UNIVERSITAT DE BARCELONA

FACULTAD DE ECONOMÍA Y EMPRESA
DEPARTAMENTO DE ECONOMÍA Y ORGANIZACIÓN DE EMPRESAS

NUEVAS EXTENSIONES A LOS OPERADORES *OWA* Y SU APLICACIÓN EN LOS MÉTODOS DE DECISIÓN

Doctorando

José M. Merigó Lindahl

Directoras de la Tesis Doctoral:

Montserrat Casanovas Ramón

Anna M. Gil Lafuente

Doctorado en Estudios Empresariales

Marco estratégico de la empresa

Bienio: 2005-2007

Diciembre 2008

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

Resulta difícil poder dar las gracias a todas las personas que de una forma o de otra me han ayudado a lo largo de la Tesis Doctoral pero quiero mencionar algunos casos.

En primer lugar, quiero agradecer a mis directoras de tesis, Montserrat Casanovas Ramón y Anna María Gil Lafuente, todo el apoyo que me han dado a lo largo del periodo de elaboración de la Tesis Doctoral.

En segundo lugar, quiero expresar mis agradecimientos al resto de personas que forman el Grupo de Investigación en Economía y Gestión de la Incertidumbre por toda la ayuda que he recibido. En especial, quiero dar las gracias a Mª Carmen Gracia Ramos, a Pilar López Jurado, a Jordi Bachs Ferrer, a Jaime Gil Lafuente y a Emilio Vizuete Luciano. Tampoco quiero olvidar al fundador del grupo, Jaime Gil Aluja que es el responsable de que a día de hoy tengamos una base tan sólida sobre el análisis de las decisiones y la incertidumbre en la empresa.

A continuación, quiero expresar mis agradecimientos a todo el resto de personas que forman el Departamento de Economía y Organización de Empresas por toda la ayuda que he recibido. En especial, quiero dar las gracias a Rafael Redondo Durán, a Anna Lauroba Pérez, a Mercè Bernardo Vilamitjana, a Jaume Valls Pasola y a Carles Grau Algueró. También a Maite Lupiañez y a Ángela Moreno.

También quiero dar las gracias a diferentes personas de la Facultad de Economía y Empresa que en algún momento me han prestado su ayuda. En especial, quiero destacar a Jesús Marín del Departamento de Matemática Económica, Financiera y Actuarial, y a Josep M. Argilés y a Román Izuzquiza del Departamento de Contabilidad. Tampoco me quiero olvidar de mis compañeros de doctorado por todos los momentos que hemos compartido en nuestro proceso de formación como profesores e investigadores.

Además, también quiero expresar mis agradecimientos a muchas otras personas con las cuales he compartido inquietudes comunes en relación a la investigación y que en algún momento dado me han podido servir de ayuda. En especial, quiero dar las gracias a Luis

Martínez López de la Universidad de Jaén, a Enrique Herrera Viedma y a Francisco Herrera Trigueros de la Universidad de Granada, a Kurt Engemann del Iona College de Nueva York (Estados Unidos), a Luigi Troiano de la Universidad de Sannio (Italia), a Jordi Nin del Insituto de Investigación en Inteligencia Artificial del CSIC en Barcelona, a Radko Mesiar de la Universidad de Tecnología de Eslovaquia y a José Luis García Lapresta de la Universidad de Valladolid.

Finalmente, quiero dar las gracias a mi familia y a mis amigos por todo el apoyo que me han dado a lo largo de todo este tiempo que he estado elaborando la Tesis Doctoral. En especial, quiero dar las gracias a mis padres José M. y Bárbara, y a mi hemana Carolina por todo el apoyo que me han dado.

Por último, no quisiera finalizar los agradecimientos sin decir que todas las personas que en algún momento dado me han ayudado, espero que hayan sido incluidas en alguno de los agradecimientos pero sino, simplemente decir: Muchas Gracias.

<u>ÍNDICE SINTÉTICO</u>

ÍNDICE

VOLUMEN I

VOLUMEN II

1. Introducción

1.1. Presentación

La teoría de la decisión en la incertidumbre es un área de las ciencias sociales y de las ciencias en general que siempre ha suscitado gran interés. Pero es especialmente en los últimos 50 años cuando toma una increíble importancia en el mundo científico. Gran número de cuestiones surgen en estos años como son la teoría de la utilidad, la teoría de juegos o la teoría de los subconjuntos borrosos. En este estudio, se hace especial referencia a 2 de estas teorías. Una, propuesta por Zadeh (1965) en la cual se introduce el concepto de los conjuntos borrosos y otra, propuesta por Yager (1988) en la cual se introduce el concepto de *Ordered Weighted Averaging* (OWA) *operator*. Con estas 2 teorías, junto con las aportaciones desarrolladas en el ámbito empresarial por Kaufmann y Gil-Aluja (1986; 1987), se tratará de analizar la situación actual en esta área sobre la teoría de la decisión y se analizará qué diferentes aportaciones se podrán realizar en la investigación.

La investigación del doctorando empezó ya hace mucho tiempo cuando era un estudiante de empresariales. La verdad es que desde siempre he sido un gran aficionado a la ciencia y a la investigación en general. Pero los temas de teoría de la decisión cogieron importancia para mí, a partir del tercer curso, en el año 2000-2001, en la asignatura de dirección financiera 1. En esta asignatura se propuso hacer un trabajo y aprovechando mi afán por investigar intenté hacer un trabajo con cierto contenido investigador. Aun así, era un trabajo aficionado, pero ya mostraba mis grandes intereses por investigar.

Concretamente, diseñé lo que creía que era un nuevo modelo de decisión pero con los años, me di cuenta que lo que había descubierto no era nada más y nada menos que el operador OWA que ya se estudiaba en la comunidad científica desde el año 1988 cuando Yager publicó su primer trabajo sobre estos temas. Aun así, algunas de las extensiones que diseñé, sí que eran novedosas como el uso de esta metodología en el criterio de Savage de minimización del coste o el uso de información incierta representada mediante intervalos de confianza o números borrosos (NBs). Estas ideas ya han sido publicadas en revistas internacionales por lo que la idea originaria a pesar de que la desarrollé antes de su publicación, a día de hoy ya es conocida. Por lo menos, esto quedó como consuelo en el sentido de que sin conocer los operadores OWA, había sido capaz de crearlos y llegar a crear aportaciones que sí eran novedosas y que se publicaban en revistas internacionales. En cualquier caso, nada de esta investigación que desarrollé desde octubre de 2000 hasta mayo de 2001 ha sido publicado ya que el trabajo era un trabajo de un estudiante aficionado a la investigación pero no de un profesional. Por tanto, la investigación a pesar de ser muy original, tenía muchas carencias como desconocimiento de la bibliografía, desarrollo metodológico de las ideas, etc.

Durante un tiempo, este trabajo quedó aparcado hasta que decidí hacer el doctorado. Después de haber estudiado en el extranjero, empecé el doctorado el curso 2005-2006 y desde entonces he estado constantemente desarrollando nuevas ideas sobre este trabajo que inicié en el 2000, pero ahora siguiendo con la metodología que se sigue en la investigación profesional. Ahora, poco a poco la investigación ya está introduciéndose en la comunidad científica con el desarrollo de un gran número de aportaciones relacionadas con los operadores OWA y la teoría de la decisión en general. Todavía queda mucho camino por recorrer, en especial, para consolidarse como una autoridad en esta área de investigación en relación a publicaciones en las revistas de mayor prestigio internacional. No obstante, ya se están consiguiendo resultados muy buenos, incluyendo publicaciones en las revistas de mayor prestigio internacional por lo que se prevé que la línea ascendente que está consiguiendo el doctorando, seguirá después de la tesis doctoral hasta consolidarse como uno de los principales investigadores internacionales en esta especialidad.

El desarrollo de esta investigación ha contado con la suerte de que en el departamento de economía y organización de empresas de la universidad de Barcelona existe uno de los principales grupos de investigación en relación al estudio de la incertidumbre y las decisiones en el ámbito empresarial. Por eso, el doctorando ha contado con mucha información adicional (en especial, la procedente de las investigaciones desarrolladas por Kaufmann y Gil-Aluja) que le ha permitido alcanzar una formación mucho más sólida en este ámbito, lo cual puede ser decisivo en el futuro para poder desarrollar nuevas aportaciones. En cualquier caso, en la actualidad este hecho ha facilitado mucho que el doctorando haya podido hacer un gran número de las aportaciones que se han presentado en esta tesis. Además se ha alcanzado un nivel de conocimientos que se consideran muy buenos para poder hacer aportaciones a la comunidad científica internacional de la mejor forma posible.

Con todo esto, la elección del tema de investigación no fue difícil ya que antes de empezar el doctorado ya tenía claro que quería mejorar estas ideas que había empezado unos años atrás. A partir de aquí, simplemente consistió en dedicar el tiempo necesario para adquirir la información básica de partida y poco a poco empezar a realizar aportaciones mediante el desarrollo de artículos de congreso y de revista sobre el tema escogido, es decir, aportaciones a los operadores OWA. Al inicio, fue divertido aunque no fue fácil el acostumbrarse a escribir artículos ya que para poder publicar en revistas internacionales se requiere de un trabajo muy laborioso en el que se ha considerado hasta el más mínimo detalle. Por tanto, el inicio consistió en ir poco a poco desarrollando artículos de congresos y a medida que se iba cogiendo más experiencia, se empezó a desarrollar artículos de revista. A día de hoy, el proceso de formación sigue porque como es bien sabido, la formación de un investigador nunca termina porque siempre podrá aprender un poco más. Este es un hecho importante cuando se investiga a nivel internacional porque siempre hay que estar actualizándose ya que cada año aparecen nuevas aportaciones que se tienen que conocer si se quiere ser uno de lo mejores investigadores en esta área de investigación.

El operador OWA es un tipo de media que proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación que fluctúan entre el máximo y el mínimo. Por tanto, de entrada es una herramienta estadística. Pero a día de hoy, a donde más relevancia se le ha dado es en la resolución de problemas de teoría de la decisión ya que este operador unifica a los criterios clásicos de decisión. Es decir, unifica al criterio optimista, pesimista, de Laplace y de Hurwicz en un único modelo a partir del cual el resto de casos son casos particulares de adoptar una postura concreta en dicha unificación. Además, otros criterios clásicos como el criterio de Savage también pueden ser utilizados con este operador aunque no se consiga una unificación natural como se había conseguido con los otros cuatro criterios.

Los operadores *OWA* han sido fuente de numerosas extensiones. Constantemente van apareciendo nuevos enfoques sobre distintos aspectos teóricos que amplían su conocimiento. Por ejemplo, se puede mencionar el *induced OWA* (IOWA) *operator* de Yager y Filev (1999) en donde se proponía utilizar un proceso de reordenación de mayor complejidad basado en variables inducidas. En (Herrera et al., 1995; 1996a) se propuso un operador OWA que podía tratar con información lingüística. Este modelo ha sido posteriormente mejorado por Herrera y Martínez (2000a) a través de un modelo lingüístico más completo basado en 2-tuplas a partir de las cuales no se pierde información en el proceso de agregación. También en Xu (2004a) se ha desarrollado un nuevo modelo lingüístico para tratar situaciones con elevados grados de incertidumbre. Otro tipo de modelos que han sido tratados mediante los operadores OWA son aquellos que utilizan información imprecisa representada mediante intervalos de confianza. A este operador se le ha denominado *uncertain OWA* (UOWA) *operator* (Xu y Da, 2002). Además, también se han desarrollado extensiones similares mediante números borrosos (Canfora y Troiano, 2001; S.J. Chen y S.M. Chen, 2003).

Una de las extensiones más relevantes es aquella que generaliza los operadores OWA a través de la noción de media. Esta generalización se ha conseguido desde dos perspectivas. Una primera vertiente es aquella que generaliza los operadores OWA mediante la media generalizada (Dujmovic, 1974; Dyckhoff y Pedrycz, 1984). A esta generalización se le conoce como *generalized OWA* (GOWA) *operator* (Karayiannis, 2000; Karayiannis y Randolph-Gips, 2005; Yager, 2004b). De esta forma, aparte de obtener el operador OWA como un caso particular, se consigue una versión OWA de la media geométrica, harmónica, cuadrática, etc. Una segunda vertiente es aquella que generaliza a los operadores OWA mediante las medias cuasi-aritméticas (Nagumo, 1930; Kolmogoroff, 1930; Hardy et al., 1934). A esta generalización se le denomina *Quasi-OWA operator* (Fodor et al., 1995; Calvo et al., 2002). Cabe destacar que el operador GOWA es un caso particular del Quasi-OWA (Beliakov, 2005).

En la actualidad, la mayoría de las extensiones desarrolladas se han dirigido exclusivamente a los operadores OWA. En cambio, diferentes generalizaciones como el operador GOWA o el uso de medidas de distancia que son generalizaciones a los operadores OWA, no han recibido demasiada atención. En la mayoría de casos, resulta posible desarrollar extensiones similares en ambas situaciones. Debido a esto, en esta investigación se pretenderá explorar la posible generalización de estas extensiones mediante el uso de medias y distancias generalizadas y cuasi-aritméticas.

Además, también se introducirá un nuevo modelo unificador entre el operador OWA, la media ponderada y la probabilidad. En este modelo se conseguirán casos particulares de gran interés porque además de estos tres casos, también se obtendrán otros casos parciales como el operador que unifica al operador OWA con la probabilidad, al que unifica la media ponderada con la probabilidad y al que unifica al operador OWA con la media ponderada. Todos estos casos serán estudiados desde su perspectiva simplificada y mediante el desarrollo de diferentes extensiones y generalizaciones según lo explicado en los párrafos anteriores.

También se analizará la aplicabilidad que puede tener el uso de estos operadores no sólo en teoría de la decisión sino en las ciencias en general, lo cual llevará a observar una gran cantidad de resultados y de nuevas ideas que desembocarán en un gran número de conclusiones.

Finalmente, en resumen, cabe señalar que en esta tesis se propondrán un gran número de nuevas propuestas teóricas a los operadores OWA y se analizará su aplicabilidad en diferentes ámbitos de investigación aunque se dará especial importancia a los problemas relacionados con la teoría de la decisión.

1.2. Justificación del tema objeto de la investigación

Visto desde una perspectiva general, el problema objeto de la investigación hace referencia a la adopción de decisiones en ambiente de incertidumbre. El análisis de las decisiones es una rama de la economía que ha cogido especial importancia en los últimos 50 años. Cada vez es mayor el número de trabajos sobre diferentes ramas de la decisión. Dentro de estas especialidades, destaca una de gran interés para esta investigación, propuesta por R. Yager (1988) con un primer trabajo denominado "*On Ordered Weighted Averaging Operators in Multi-criteria Decision Making*", en el cual se introduce el concepto de *OWA operator* (operador *OWA*). Cabe destacar que la traducción al español del concepto OWA vendría a ser algo como media ponderada ordenada. Para evitar confusiones lingüísticas, en el trabajo se utilizará siempre la abreviatura inglesa OWA.

Los operadores *OWA* surgen como un método que trata de ofrecer una visión más completa sobre la adopción de decisiones en un entorno de incertidumbre. Una de las grandes aportaciones que ofrece, es un modelo generalizado que unifica los criterios de decisión clásicos (optimismo, pesimismo, Laplace y Hurwicz) en un único modelo, a través del cual, dichos criterios son casos especiales procedentes de adoptar un tipo de carácter concreto por parte del decisor. Desde su aparición, los operadores OWA han sido fuente de un gran número de aportaciones, convirtiéndose en un área de gran interés.

A pesar de que ya han transcurrido 20 años desde su aparición, los operadores OWA siguen ofreciendo numerosas posibilidades como se puede ver reflejado en las publicaciones hechas en los últimos 5 años (véase el capítulo 2.2). Dentro de las posibilidades existentes en la actualidad, se puede ver como la incorporación de la teoría de los subconjuntos borrosos en los operadores OWA todavía deja muchas puertas abiertas debido especialmente a la novedad del tema y a la constante aparición de nuevos tipos de operadores OWA que ilumina continuamente el camino ofreciendo nuevas alternativas de estudio.

En esta tesis doctoral, se tratará de ofrecer una visión general sobre el estado de los operadores OWA como criterio para la adopción de decisiones. Para ello, se estudiará una gran variedad de extensiones que se han hecho en los últimos años sobre estos operadores. También se tratará de mostrar la aplicabilidad de los operadores OWA como instrumento para la toma de decisiones en el ámbito empresarial. Como se podrá observar en el capítulo 2 y 4, dichos operadores con todas sus extensiones son muy recientes, lo cual motiva su investigación en una tesis doctoral. Además, como se podrá observar en los capítulos 5 - 11, la investigación permite ofrecer una amplia variedad de contribuciones sobre los operadores OWA, lo cual justifica el desarrollo de esta tesis doctoral ya que se observarán unos resultados muy positivos.

Analizando el problema específico objeto de la investigación, se puede decir que tendrá dos vertientes. Por un lado, se desarrollarán nuevos modelos teóricos sobre los operadores OWA consistentes en la utilización de diferentes técnicas matemáticas como la noción de media, las medidas de distancia, los índices de selección, la media ponderada, la probabilidad, los intervalos de confianza o los números borrosos (NBs). Por el otro lado, se considerarán diferentes aplicaciones dentro de las cuales se destacarán diferentes aplicaciones a otros métodos de decisión y el desarrollo de nuevos modelos de decisión empresarial mediante la utilización de dichos operadores. Se destacarán diferentes problemas empresariales concretos, como por ejemplo, en la administración de recursos humanos, en la gestión financiera, en la gestión de las inversiones, en la administración del activo y el pasivo de la empresa, en la gestión estratégica, en la administración de productos y recursos en general, etc.

Cabe destacar que se considerarán un gran número de nuevas aportaciones a los operadores OWA mediante el desarrollo de diferentes extensiones y generalizaciones. No obstante, las aplicaciones se realizarán únicamente en casos muy concretos y no para todos los operadores que se proponen ya que sino se entraría en una excesiva redundancia a pesar de considerar diferentes problemas empresariales.

La razón por la cual resulta interesante utilizar los operadores OWA en los métodos de decisión empresarial es por la posibilidad de alterar el carácter actitudinal del decisor. Esto sucede porque tradicionalmente, los métodos de decisión empresarial han sido neutros respecto al grado de optimismo del decisor. Es decir, el modelo decisional no ha considerado que algunos decisores son más reacios que otros a la hora de estudiar un problema decisional en incertidumbre en el cual existen una serie de riesgos a los cuales se tiene que hacer frente si se desea obtener grandes beneficios. Por tanto, los operadores OWA permiten solucionar este problema considerando diferentes grados de optimismo-pesimismo según quién tome la decisión. Evidentemente, esto llevará a que las decisiones sean diferentes según qué decisor tome dicha decisión.

Cabe destacar que esta problemática se ha considerado en algunos problemas decisionales en donde el decisor se encontraba en una situación de *riesgo*. Es decir, en una situación en donde existe incertidumbre sobre lo que sucederá en el futuro pero se dispone de una serie de probabilidades que permiten modelizar el problema. Pero en situaciones de incertidumbre total (o ignorancia) este problema no se ha estudiado con el suficiente detalle. A partir de este análisis se irá perfeccionando lo máximo posible el operador OWA incorporando diferentes aspectos y proponiendo un nuevo modelo unificador que englobará a la probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA como casos particulares.

1.3. Objetivos

Esta investigación tiene 3 objetivos fundamentales que son:

1. Aspectos introductorios sobre la teoría de la decisión y la incertidumbre.
2. Nuevas extensiones y generalizaciones a los operadores OWA.
3. Análisis de la aplicabilidad del operador OWA.

1- El primer objetivo consiste en realizar un análisis sobre el estado de la cuestión. Este objetivo se consigue mediante una investigación bibliográfica sobre la teoría de la decisión en la incertidumbre, poniendo especial énfasis en las recientes contribuciones hechas sobre los operadores OWA y sus diferentes extensiones. Esta investigación bibliográfica estará orientada en tres direcciones:

(1) En primer lugar, se analizará el estado de la cuestión desde un punto de vista estadístico. Es decir, se estudiará el número de publicaciones que han tratado estos temas. Debido a que el número de publicaciones sobre un área tan amplia como la teoría de la borrosidad es prácticamente incalculable, se acotará el número a través de utilizar como soporte la *ISI Web of Knowledge*. A partir de este soporte, se estudiarán algunos aspectos genéricos como cuáles son los artículos de mayor impacto, cuáles son las revistas y autores con mayor número de publicaciones, cuál ha sido la evolución histórica, y qué países tienen mayor importancia en esta área de investigación. Cabe destacar que este análisis se dividirá en una perspectiva genérica sobre la teoría de la borrosidad y una perspectiva específica sobre los operadores OWA.

(2) En segundo lugar, se tratarán los conceptos básicos sobre la teoría de la decisión en la incertidumbre. Es decir, se estudiarán los aspectos fundamentales relacionados con la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. Para ello, se estudiarán los criterios clásicos de decisión como son el criterio optimista, el pesimista, el de Laplace, el de Hurwicz y el de Savage. También se desarrollará otra gran variedad de criterios generalmente aceptados como son el WSM, el WPM, el AHP y el TOPSIS, entre otros. También se considerarán diferentes instrumentos para el tratamiento de la incertidumbre como es la valuación, los intervalos de confianza, los subconjuntos borrosos, los NBs, la noción de distancia y los expertones. Además, también se mencionarán otros elementos para la toma de decisiones como la relación, la asignación, la agrupación y la ordenación.

(3) En tercer lugar, se desarrollará una introducción a los conceptos básicos sobre los *operadores OWA. En este* capítulo se estudiará la definición, las principales propiedades, los casos particulares, las medidas que caracterizan el vector de ponderaciones y los diferentes métodos para la fijación de dichas ponderaciones. Además, también se estudiará una amplia gama de extensiones que se han desarrollado sobre los operadores OWA. Entre las distintas extensiones que se analizarán, podemos destacar el *Induced OWA* (IOWA) *operator*, el *Linguistic OWA* (LOWA) *operator*, el *Generalized OWA* (GOWA) *operator*, el *Heavy OWA* (HOWA) *operator*, el *Uncertain OWA* (UOWA) *operator*, y muchos otros más.

2- El segundo objetivo es el principal en la tesis y está dirigido a desarrollar nuevas aportaciones al conocimiento teórico de los operadores OWA. Es decir, a elaborar nuevos modelos que aporten nuevas ideas sobre dichos operadores. Como ya se ha comentado en el capítulo de los antecedentes, la investigación ya ha empezado a dar sus frutos en este sentido (véase el capítulo 14 de anexo). Las principales líneas de investigación para conseguir aportaciones teóricas sobre los operadores OWA irán encaminadas en las siguientes direcciones:

(1) Estudio de los operadores *OWA* a partir de las generalizaciones procedentes de la noción de media: Se analizará la generalización de Yager (2004b) a los operadores *OWA* a partir de la noción de media. En esta generalización, se podrá estudiar una gran variedad de casos particulares como por ejemplo, el *ordered weighted geometric* (OWG) *operator*, el *ordered weighted harmonic averaging* (OWHA) *operator* y el *ordered weighted quadratic averaging* (OWQA) *operator*. Además, también se propondrán toda una nueva serie de extensiones a esta generalización como podrán ser el *induced generalized OWA operator*, el *linguistic generalized OWA operator*, el *2-tuple linguistic generalized OWA operator*, y el *uncertain generalized OWA operator*. Cabe destacar que esta línea de investigación está empezando a dar sus frutos (Merigó y Casanovas, 2007a; 2007d; 2008h; 2008i; 2008j; 2008k; 2008l; 2008n; 2008t; 2008v; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2007c; 2008e; 2008h; 2008n; 2008r; 2009a).

(2) Utilización de los operadores OWA en la noción de distancia: Se propondrán unas medidas de distancia en las cuales se introducirá el operador OWA para así poder manipular el carácter actitudinal del decisor. Básicamente, se propondrá utilizar el operador OWA en la distancia de Hamming, en la de Euclides, en la de Minkowski, en la geométrica y en la harmónica. Además, también se elaborarán toda una serie de extensiones a estos modelos primarios mediante la utilización de variables de ordenación inducidas (*Induced OWA distance* (IOWAD) *operator*), mediante la utilización de variables linguísticas (*Linguistic OWA distance* (LOWAD) *operator*), mediante la utilización de relajaciones en el vector de pesos (*Heavy OWA distance* (HOWAD) *operator*), mediante la utilización de mezclas entre el *weighted average* y el operador *OWA* (*Weighted OWA distance* (WOWAD) *operator*), mediante la utilización de coeficientes negativos (*Nonmonotonic OWA distance* (NOMMOWAD) *operator*), y muchas otras variantes más. En esta línea de investigación ya se han empezado a conseguir resultados, como se puede observar en (Merigó y Casanovas, 2008o; 2008q; 2008r; 2008u; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2006d; 2006e; 2007b; 2007d; 2007e; 2007f; 2007g; 2007h; 2008a; 2008b; 2008c; 2008d; 2008f; 2008i; 2008k; 2008s).

(3) Utilización de los operadores OWA en los diferentes índices de selección empresarial: Se propondrá la utilización de los operadores OWA en los diferentes índices de selección existentes. Entre estos índices, podemos destacar el coeficiente de adecuación (Kaufmann y Gil-Aluja, 1986), el índice del máximo y el mínimo nivel (J. Gil-Lafuente, 2001) y el índice por eliminación-descartes (J. Gil-Lafuente, 2004). Además de proponer la utilización de los operadores OWA, también se propondrá la utilización de las diferentes variantes a los operadores OWA en dichos índices de selección. En esta línea de investigación, se pueden destacar algunas aplicaciones ya hechas con estos índices (A.M. Gil-Lafuente y Merigó, 2006; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2006d; 2006e; 2007f; 2007g; 2007h; 2007i; 2008a; 2008f; 2008g; 2008i; 2008j; 2008k; 2008l; 2008m; 2008o; 2008p; 2008q; 2008s).

(4) Unificación entre el operador OWA y la media ponderada y elaboración de extensiones y generalizaciones: Se propondrá un nuevo modelo que unifica al operador OWA y a la media ponderada (WA) de tal forma que ambos resultados son casos particulares de esta formulación. Para ello, se introducirá el operador *ordered weighted averaging weighted averaging operator* (OWAWA) y se propondrán diferentes extensiones como el *induced OWAWA*, *linguistic OWAWA*, *uncertain OWAWA*, *fuzzy OWAWA*, *fuzzy induced OWAWA*, etc. También se propondrá una generalización mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas siguiendo con el objetivo 1. Es decir, se propondrá el *generalized OWAWA* (GOWAWA) y el Quasi-OWAWA. También se propondrán diferentes extensiones como el *induced GOWAWA*, *linguistic GOWAWA*, *uncertain GOWAWA*, *fuzzy GOWAWA*, etc. Finalmente, se analizará el uso de distancias (objetivo 2) e índices de selección (objetivo 3) en dicho operador obteniéndose por ejemplo, el *OWAWA distance* (OWAWAD), el *GOWAWA distance* (GOWAWAD), el *OWAWA adequacy coefficient* (OWAWAAC), etc.
(5) Unificación entre los operadores OWA y la probabilidad: Presentación de un modelo que unifica el operador OWA con la probabilidad. A este operador se le denominará el *probabilistic OWA operator* (POWA). A partir de aquí, se propondrán diferentes extensiones como el *induced POWA*, *linguistic POWA*, *uncertain POWA*, *fuzzy POWA*, etc. También se generalizará el modelo mediante el uso de medias generalizadas (objetivo 1) y cuasi-aritméticas obteniéndose el *generalized POWA* y el Quasi-POWA, y desarrollándose diferentes extensiones como el *induced GOWA*, *linguistic GOWA*, *uncertain GOWA*, *fuzzy GOWA*, etc. A continuación, también se analizará el uso de distancias (objetivo 2) y de índices de selección (objetivo 3) en el operador obteniéndose el *POWA distance* (POWAD), el *generalized POWA distance* (GPOWAD), el *POWA adequacy coefficient* (POWAAC), etc.
(6) Unificación entre los conceptos de probabilidad, medias ponderadas y operadores OWA: Presentación de un modelo que unifica los operadores OWA con la probabilidad y la media ponderada en una misma formulación superior y desarrollo de diferentes extensiones. A este operador se le denominará *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging operator* (POWAWA) y algunas de sus extensiones serán el *induced POWAWA*, el *linguistic POWAWA*, el *uncertain POWAWA*, el *fuzzy POWAWA*, etc. En este caso, también se propondrá una generalización (objetivo 1) superior mediante el uso de medias generalizadas (PGOWAWA) y cuasi-aritméticas (Quasi-POWAWA). A estas generalizaciones se les desarrollará diferentes extensiones como el *induced PGOWAWA*, el *linguistic PGOWAWA*, el *uncertain PGOWAWA*, el *fuzzy PGOWAWA*, etc. También se considerarán los casos que utilizan distancias, es decir, el POWAWAD, el PGOWAWAD, el PIGOWAWAD, etc., y los casos que utilizan índices de selección como el POWAWAAC, el POWAWAIMAM, etc.
(7) Unificación entre la probabilidad y la media ponderada a partir del operador POWAWA: A lo largo del capítulo referente al operador POWAWA, también se estudiará el caso particular del *probabilistic weighted averaging operator* (PWA). Este caso no se estudia en un capítulo exclusivo porque no es un operador OWA, pero cabe destacar que es un operador de gran importancia. Por eso, representa uno de los principales objetivos de esta investigación. Consiste en utilizar a la probabilidad y a la media ponderada en una misma formulación.

También se desarrollarán diferentes extensiones mediante el uso de información lingüística, intervalos de confianza y NBs. Además se generalizará el modelo mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas y mediante el uso de distancias.

(8) Además, como se ha visto, a lo largo de todo el trabajo se considerarán diferentes versiones basadas en situaciones de incertidumbre de mayor complejidad. En la tesis se considerará la utilización de intervalos de confianza, números borrosos y variables lingüísticas. Cabe destacar que estos aspectos serán tratados con mayor detalle en la elaboración de la tesis doctoral. En este caso, también se pueden destacar algunos resultados ya obtenidos (Casanovas y Merigó, 2007; 2008a; 2008b; 2008c; Merigó y Casanovas, 2006b; 2007a; 2007d; 2007e; 2008c; 2008e; 2008g; 2008h; 2008j; 2008k; 2008m; 2008o; 2008s; 2008t; 2008v; Merigó et al., 2007; 2008a; 2008b; Merigó y A-M- Gil-Lafuente, 2008n; 2009a).

(9) Finalmente, también se considerará la utilización de los operadores OWA en otros métodos de decisión como la estructura de credibilidad de Dempster-Shafer, el método de la minimización del coste, el AHP, el TOPSIS, las decisiones de grupo, las decisiones secuenciales, la noción de utilidad y los procesos de asignación y agrupación. Se analizarán las propuestas de Yager para utilizar los operadores OWA en algunos de estos métodos (Yager 1992; 2004a; Yager y Kelman, 1999). También se considerarán otras posibles extensiones a estos métodos de decisión mediante otras variantes de los operadores OWA. En este sentido, cabe destacar los resultados ya obtenidos (Casanovas y Merigó, 2007; 2008a; 2008b; 2008c; Merigó y Casanovas, 2006a; 2006c; 2007a; 2007b; 2007c; 2008a; 2008b; 2008d; 2008f; 2008m; 2008p; 2008s; 2009b; Merigó et al., 2007; 2008a; 2008b).

Cabe destacar que a todos estos objetivos se les destinará un capítulo exclusivo para llevar a cabo su análisis a excepción del objetivo 7 referente al PWA que se incluirá como un caso particular del operador POWAWA. El objetivo 8 que se irá introduciendo como diferentes extensiones al modelo simplificado de cada objetivo. Por tanto tampoco se le dedicará un capítulo exclusivo aunque muchas de sus nociones básicas para llevar a cabo el estudio serán presentadas en el capítulo 3.

Visto en perspectiva global, se puede observar que en muchos casos los objetivos van conectados entre sí. A modo de resumen, se puede observar que el objetivo 1 también está presente en el 2, 3, 4, 5, 6 y 7. El objetivo 2 está presente en el 4, 5, 6 y 7. El objetivo 3 está presente en el 4, 5, 6 y 7. Los objetivos 4, 5 y 7, son casos particulares del 6. El 6 engloba a los objetivos 1, 2, 3, 4, 5 y 7. Finalmente, el objetivo 8 está presente en todos los demás objetivos como una versión extendida del modelo en cuestión. En cuanto al objetivo 9, decir que todos los objetivos anteriores pueden ser introducidos en este objetivo. Todos estos objetivos serán estudiados en la tesis aunque sea de forma resumida. El objetivo que menos se analizará es el 9 debido al gran número de casos posibles a desarrollar. Aun así, en el anexo se podrán observar diferentes artículos relacionados con algunos aspectos de este objetivo.

3- El tercer objetivo consiste en estudiar la aplicabilidad del operador OWA. Esto se desarrollará de forma resumida en el capítulo 11 en donde se distinguirá entre:

- Aplicaciones en el ámbito empresarial.
- Aplicaciones en otros métodos de decisión.

- Aplicación en las ciencias en general.

Un objetivo fundamental de esta tesis es mostrar que la aplicabilidad de los operadores OWA y la incertidumbre en general es ilimitada. Por tanto, resulta evidente que pueden ser utilizados en una gran variedad de aplicaciones de entre los cuales se destaca la estadística.

En cuanto al uso de estos operadores en el ámbito de la empresa se desarrollarán aplicaciones empresariales mediante el uso de los operadores OWA. Con esto, se quiere mostrar la utilidad de dichos operadores en el ámbito empresarial. De forma general, al ser los operadores OWA unas técnicas modernas de decisión, se puede decir que dichos operadores serán útiles en todo lo que esté relacionado con la toma de decisiones empresariales. Además, al tratarse de un operador de agregación, también resultará útil en muchas situaciones empresariales en donde se desee agregar la información. Dejando aparte los trabajos previos realizados por otros investigadores, las principales líneas de investigación para conseguir modelos empresariales de decisión irán encaminadas en las siguientes direcciones:

- Utilización de los operadores OWA en la gestión de estrategias.
- Utilización de los operadores OWA en la gestión de recursos humanos.
- Utilización de los operadores OWA en la gestión financiera.
- Utilización de los operadores OWA en la gestión de inversiones.
- Utilización de los operadores OWA en la gestión de inmovilizado.
- Utilización de los operadores OWA en la gestión comercial.
- Utilización de los operadores OWA en la gestión de productos en general.
- Utilización de los operadores OWA en otros procesos de decisión empresarial.
- Utilización de los operadores OWA en otros procesos de decisión en general.

Cabe señalar que a lo largo de la tesis se irán presentando diferentes aplicaciones sobre los nuevos operadores OWA en distintos problemas empresariales como los mencionados anteriormente. Además, se tiene que resaltar que en la investigación, también se mencionará la utilización de los operadores OWA en los distintos procesos de asignación, agrupación y ordenación (Gil-Aluja, 1999).

Cabe destacar que este tercer objetivo también está empezando a dar sus frutos ya que en la mayoría de los artículos elaborados para congresos o revistas se ha desarrollado una aplicación sobre las nuevas aportaciones en un problema de toma de decisiones en el ámbito empresarial.

1.4. Metodología

La metodología utilizada en este trabajo está basada principalmente en la teoría de los subconjuntos borrosos introducida por Zadeh (1965) y en la teoría de la decisión en incertidumbre, dentro de la cual destacan los operadores *OWA* de Yager (1988). También se ha seguido desde el punto de vista empresarial con la metodología desarrollada por Kaufmann y Gil-Aluja (1986; 1987).

En este trabajo se desarrollan diferentes extensiones a los operadores OWA. Estas extensiones se presentan desde una perspectiva matemática en la cual se define el concepto, se estudian las propiedades y se analizan diferentes casos particulares del modelo. Cabe destacar que todas las extensiones han seguido esta misma estructura ya que desde un punto de vista matemático se ha considerado lo más adecuado. A pesar de ello, en algunos casos el trabajo podría parecer algo repetitivo pero es importante remarcar la necesidad de seguir esta metodología por dos razones. En primer lugar, cada extensión se espera que se pueda materializar en un artículo de investigación[1]. Por tanto, es importante considerar todos los aspectos fundamentales de estas extensiones para la futura elaboración de dichos artículos[2]. Desde un punto de vista matemático, cada extensión implica el desarrollo de un modelo decisional diferente. Por tanto, aunque las extensiones se parezcan, se tiene que estudiar cada caso desde un punto de vista individual[3].

En las extensiones más genéricas, después del análisis matemático se presenta un ejemplo ilustrativo sobre su aplicación en un problema empresarial. Para no caer en la redundancia, cada ejemplo ilustrativo ha ido destinado a tratar diferentes problemas empresariales como por ejemplo los recursos humanos, las finanzas, las inversiones, las estrategias, el inmovilizado, etc. Pero cabe destacar que todas las extensiones podrían utilizarse en cualquiera de los modelos de decisión empresarial[4].

Además, esta misma metodología se ha seguido para todos los capítulos sobre los operadores OWA, es decir, desde el capítulo 4 hasta el 10. La razón reside en la posibilidad de mostrar con claridad la similitud del proceso en estos casos. Cabe destacar que esto ha sido posible debido a que el operador OWA es un caso particular de las siguientes extensiones o generalizaciones.

En cuanto al proceso de referenciación se tiene que destacar que se ha utilizado un método ligeramente diferente del habitual. A lo largo de la tesis se ha utilizado un método tradicional de citación basado en las citas según autor y año. La diferencia reside en la bibliografía en el sentido de que a pesar que se han ordenado alfabéticamente, no se han presentado a través de su apellido sino que las diferentes referencias han sido numeradas de uno hacia adelante. Esto se ha hecho así porque se

[1] Cabe destacar que en algunos casos, para las extensiones de nivel 2, 3 y N, puede que se agrupen dos o tres extensiones en un mismo artículo.
[2] Un buen ejemplo para entender esta problemática es a través de comparar los artículos elaborados para el operador *IGOWA* y para el operador *UGOWA* (En el anexo, artículos de congreso 8 y 13 respectivamente). Como se puede observar, cada artículo implica una nueva aportación aunque ambos modelos se presenten de la misma forma.
[3] Aún así, para evitar una excesiva redundancia, únicamente se han estudiado con detalle las extensiones de nivel 1, mientras que el resto de extensiones se han comentado de forma resumida.
[4] Siempre teniendo en cuenta el significado que se le da a cada extensión.

han utilizado aproximadamente 400 referencias y se ha considerado que la ordenación alfabética mediante un sistema numérico es más adecuada para mostrar tantas referencias. La ordenación es la misma con la diferencia de que cada referencia lleva asociada una numeración. Independientemente del número asociado, en la tesis las referencias se han presentado mediante el sistema autor – año. Cabe destacar que esto se hace de esta forma porque en la mayoría de revistas SCI en donde se están enviando artículos, no suelen utilizar el sistema autor – año sino que utilizan la ordenación numérica, aunque en muchos casos esta puede ser alfabética o sino, por orden de aparición en el texto.

Finalmente, decir que también se ha adjuntado en la parte final del trabajo un anexo con todos los artículos de congreso y de revista que el doctorando ha hecho a lo largo de este periodo como estudiante de doctorado. El principal aspecto a destacar sobre este anexo es la posibilidad de mostrar desde un punto de vista mucho más amplio cuáles son las líneas de investigación que se están siguiendo. Aun así se tiene que decir que es incompleto en el sentido que sólo recoge algunos de los casos y los avances más recientes (capítulos 8 – 10) no se recogen en este apartado ya que estos avances no se presentarán en congresos y en revistas hasta bien entrado el año 2009 cuando el doctorando ya haya finalizado la tesis doctoral.

1.5. Publicaciones sobre las aportaciones

A continuación, se van a mostrar los distintos artículos elaborados en la investigación correspondientes a distintas aportaciones sobre algunos de los temas que se están investigando. Como la investigación científica a nivel internacional se desarrolla en inglés, todos los artículos están en dicho idioma. Debido a que la investigación todavía está en una fase primitiva, únicamente se ha conseguido publicar en congresos. En el futuro se espera enviar dichos artículos a revistas internacionales. De momento, únicamente se han enviado seis artículos de los cuales uno ya ha sido aceptado. Cabe destacar que el orden elaborado es cronológico. También cabe señalar que a lo largo de la realización de la tesis doctoral está prevista la presentación de nuevas aportaciones a congresos y a revistas de prestigio internacional.

En resumen:

- 31 artículos de revista
    - 15 artículos de revista publicados
    - 3 artículos de revista aceptados
        - 2 artículos de revista *SCI* aceptados
    - 13 artículos de revista enviados
        - 12 artículos de revista *SCI* enviados
        - 2 artículos de revista *SCI* en "*major revision*".
    - + 3 artículos de revista *SCI* en preparación en el muy corto plazo.
    - + versión de revista de la mayoría de artículos de congreso más reciente
    - + 2 *Working papers*
- 40 artículos de congreso
    - 40 artículos de congreso publicados
        - 6 artículos de congreso en la *ISI Proceedings*
    - + varios artículos de congreso en preparación en el muy corto plazo (congresos del 2009 con *deadline* en los primeros meses del año).

Además, se tiene que destacar que a partir de las ideas de la tesis se producirán una gran cantidad de artículos de congreso y de revista en el futuro. También se puede destacar que para obtener información más actualizada sobre las publicaciones, se puede consultar la página web del autor: **https://webgrec.ub.edu/webs/06480_CAS.html**. Destacar que esto resulta relevante ya que el autor todavía se encuentra en los inicios de la investigación profesional y por tanto, las publicaciones de revista todavía están pasando por los primeros procesos de revisión.

Artículos de revista (Publicados):

1) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using OWG Operators in the selection of financial products, *Lectures on Modelling and Simulation* 7(3) (2006a) 49-55.
2) A.M. Gil-Lafuente, J.M. Merigó, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Lectures on Modelling and Simulation* 7(3) (2006) 42-48.
3) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Economic Review* 12 (2007a) 35-50.
4) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The ordered weighted averaging distance operator, *Lectures on Modelling and Simulation* 8(1) (2007b) 1-11.

5) J.M. Merigó, M. Casanovas, Geometric operators in decision making with minimization of regret, *International Journal of Computer Systems Science and Engineering* 1 (2008a) 111-118.
6) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision Making using Maximization of Negret, *International Journal of Computational Intelligence* 4 (2008b) 171-178.
7) J.M. Merigó, M. Casanovas, Using Fuzzy Numbers in Heavy Aggregation Operators, *International Journal of Information Technology* 4 (2008c) 177-182.
8) M. Casanovas, J.M. Merigó, Decision making with Dempster-Shafer theory and uncertain induced aggregation operators, *Journal of International Business Disciplines* 3 (2008a) 13-26.
9) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Geometric Operators in the Selection of Human Resources, *International Journal of Computer and Information Science and Engineering* 2 (2008a) 45-51.
10) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the Euclidean distance, *International Journal of Computer Science and Engineering* 2 (2008b) 170-176.
11) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operator in the Minkowski distance, *International Journal of Computer Science* 3 (2008c) 149-157.
12) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, OWA operators in generalized distances, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 5 (2008d) 11-18.
13) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Analysing the unification point in the selection of polyvalent financial products, *Modelling, Measurement and Control D* 29(1) (2008f) 37-54.
14) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient, *Modelling, Measurement and Control D* 29(3) (2008j) 1-15.
15) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory of evidence using geometric operators, *International Journal of Computational Intelligence* 4 (2008d) 261-268.

Artículos de revista (Aceptados):

1) J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators, *Fuzzy Sets and Systems* (2008e - accepted – SCI Journal).
2) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *Information Sciences* (2008e – SCI Journal), doi: 10.1016/j.ins.2008.11.013.
3) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized adequacy coefficient and its application in strategic decision making, *Fuzzy Economic Review* 13(2) (2008g - accepted).

Artículos de revista (Enviados):

1) J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *International Journal of Intelligent Systems* (2008f - submitted – SCI Journal).
2) J.M. Merigó, M. Casanovas, Fuzzy induced heavy OWA operators, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* (2008g - submitted – SCI Journal).

3) J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez, Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the Dempster-Shafer theory of evidence, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* (2008a - submitted – SCI Journal).
4) J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making, *Cybernetics and Systems* (2008h - submitted – SCI Journal).
5) J.M. Merigó, M. Casanovas, The generalized hybrid averaging operator and its application in decision making, *Knowledge Based Systems* (2008i - submitted – SCI Journal).
6) M. Casanovas, J.M. Merigó, Fuzzy aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *International Journal of Approximate Reasoning* (2008b - submitted – SCI Journal).
7) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A generalization of the linguistic aggregation operators and its application in decision making, *Information Fusion*, (2008h - submitted – SCI Journal).
8) J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain generalized OWA operator and its application in financial decision making, *International Journal of Information Technology and Decision Making* (2008j - submitted – SCI Journal).
9) J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized hybrid averaging operator, *International Journal of Fuzzy Systems* (2008k - submitted – SCI Journal).
10) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Decision making techniques for the selection of financial products, *Information Sciences*, (2008i - submitted – SCI Journal).
11) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, OWA operators in human resource management, *Cuadernos de Gestión* (2008k - submitted).
12) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A method for decision making based on the OWA operator, *Knowledge Based Systems*, (2008l – submitted).
13) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A general method for decision making based on generalized OWA operators, *European Journal of Operational Research*, (2008m – submitted).

Artículos de revista (En preparación): Obsérvese que una versión extendida de revista se realizará para la mayor parte de los artículos de congreso.

1) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced linguistic generalized OWA operator, *Fuzzy Optimization and Decision Making* (2009a - SCI Journal - in preparation for a special issue of the FLINS 2008 conference).
2) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with distance measures and induced aggregation operators, *TOP* (2009a - SCI Journal - in preparation for a special issue of the FLINS 2008 conference).
3) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory using the 2-tuple linguistic representation model, *Journal of Universal Computer Science* (2009b - SCI Journal - in preparation for a special issue of the FLINS 2008 conference).
4) Etc.

Working papers:

1) J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Working Papers in Economics*, E07/184, University of Barcelona, Spain, 2007.
2) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized index of maximum and minimum level and its application in decision making, *Working Papers in Economics*, E08/203, University of Barcelona, Spain, 2008.
3) Etc.

Artículos de congreso (Publicados):

1) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006b, CD-ROM Proceedings.
2) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006c, CD-ROM Proceedings.
3) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006d, 719-723.
4) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWG operators in the selection of financial products, *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006e, pp. 725-728.
5) J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, 2006a, pp.709-727.
6) J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced and Uncertain Heavy OWA operators, *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, 2006b, pp.728-746.
7) J.M. Merigó, M. Casanovas, Methods for decision making using minimization of regret, *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, 2006c, pp.747-763.
8) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *Proceedings of the 5th EUSFLAT Conference*, Ostrava, Czech Republic, 2007c, vol. 2, pp. 463-470.
9) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The ordered weighted averaging distance operator, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Alger, Algeria, 2007d, CD-ROM Proceedings.
10) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the Euclidean distance, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Alger, Algeria, 2007e, CD-ROM Proceedings.
11) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWG operators in the selection of human resources, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Alger, Algeria, 2007f, CD-ROM Proceedings.
12) J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain generalized OWA operator, *Proceedings of the AEDEM International Conference*, Krakow, Poland, 2007a, pp. 547-556.

13) M. Casanovas, J.M. Merigó, Using fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Proceedings of the AEDEM International Conference*, Krakow, Poland, 2007, pp. 475-486.
14) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators, *International Summer School on Aggregation Operators (AGOP)*, Ghent, Belgium, 2007b, pp. 95-100.
15) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Analysing the unification point in methods for the selection of polyvalent financial products, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, 2007g, CD-ROM Proceedings.
16) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of human resources, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, 2007h, CD-ROM Proceedings.
17) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, 2007i, CD-ROM Proceedings.
18) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making using maximization of negret, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007c, pp. 518-530.
19) J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized ordered weighted averaging operator, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007d, pp. 504-517.
20) J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez, Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007, pp. 658-671.
21) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The linguistic generalized OWA operator and its application in strategic decision making, *ICEIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008n, pp. 219-224 (ISI Proceedings).
22) J.M. Merigó, M. Casanovas, The generalized hybrid averaging operator and its application in financial decision making, *ICEIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008l, pp. 467-471 (ISI Proceedings).
23) J.M. Merigó, M. Casanovas, Fuzzy induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *ICEIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008m, pp. 548-552 (ISI Proceedings).
24) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized adequacy coefficient, *AMSE 2008*, Mallorca, Spain, 2008o, pp. 243-254.
25) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the index of maximum and minimum level, *AMSE 2008*, Mallorca, Spain, 2008p, pp. 233-242.
26) J.M. Merigó, M. Casanovas, The induced generalized hybrid averaging operator and its application in financial decision making, *IABD – AEDEM 2008*, Salamanca, Spain, 2008n, CD-ROM Proceedings.
27) M. Casanovas, J.M. Merigó, Decision making with Dempster-Shafer theory and uncertain induced aggregation operators, *IABD – AEDEM 2008*, Salamanca, Spain, 2008c, CD-ROM Proceedings.
28) J.M. Merigó, M. Casanovas, Linguistic decision making with distance measures, *ASEPELT 2008*, Barcelona, Spain, 2008o, pp. 1621-1634.
29) J.M. Merigó, Using immediate probabilities in fuzzy decision making, *ASEPELT 2008*, Barcelona, Spain, 2008, pp. 1650-1664.
30) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized index of maximum and minimum level, *ASEPELT 2008*, Barcelona, Spain, 2008q, pp. 1685-1701.

31) J.M. Merigó, M. Casanovas, Uncertain decision making with Dempster-Shafer theory, *IPMU 2008*, Málaga, Spain, 2008p, pp. 425-432.
32) J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced aggregation operators in decision making with the Euclidean distance, *FUR 2008*, Barcelona, Spain, 2008q. (Papers available in internet).
33) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced linguistic generalized OWA operator, *FLINS 2008*, Madrid, Spain, 2008r, pp. 513-518 (ISI Proceedings).
34) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with distance measures and induced aggregation operators, *FLINS 2008*, Madrid, Spain, 2008r, pp. 483-488 (ISI Proceedings).
35) J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory of evidence using the 2-tuple linguistic representation model, *FLINS 2008*, Madrid, Spain, 2008s, pp. 325-330 (ISI Proceedings).
36) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Decision making with the OWA operator in sport management, *ESTYLF 2008*, Langreo – Oviedo, Spain, 2008s, pp. 1-7.
37) J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized hybrid averaging operator, *ESTYLF 2008*, Langreo – Oviedo, Spain, 2008t, pp. 15-21.
38) J.M. Merigó, M. Casanovas, The induced Minkowski ordered weighted averaging distance operator, *ESTYLF 2008*, Langreo – Oviedo, Spain, 2008u, pp. 35-41.
39) J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martinez, A decision making model based on Dempster-Shafer theory and linguistic hybrid aggregation operators, *HIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008b, pp. 180-185.
40) J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain induced generalized OWA operator, *MDAI 2008*, Sabadell – Barcelona, Spain, 2008v, pp. 1-12.

Artículos de congreso (En preparación):

1) J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A generalization of the fuzzy induced OWA operator and its application in decision making, *SIGEF 2008*, Lugo, Spain, 2009b, (in preparation).
2) Etc.

Finalmente, también cabe destacar que ha servido como revisor en los congresos y revistas siguientes:

- *European Journal of Operational Research* (SCI – Journal).
- *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* (SCI – Journal).
- *Academy of Management – Annual Meeting 2008*.
- *FLINS 2008* (ISI Proceedings).

1.6. Estructura y contenido

Este trabajo está compuesto por 8 capítulos. En el primer capítulo se estudian una serie de aspectos introductorios como la presentación y la justificación del problema, los objetivos, la metodología, las primeras publicaciones sobre las aportaciones y el contenido del trabajo.

En el segundo capítulo se analizará el estado de la cuestión. Para ello, en primer lugar se elaborará un análisis genérico sobre la teoría de la borrosidad en donde se estudiará qué artículos tienen un mayor impacto internacional, qué revistas y autores tienen un mayor número de publicaciones, cuál ha sido la evolución histórica y cuáles son los principales países en esta área de investigación. A continuación, se desarrollará un análisis específico sobre los operadores OWA en donde se estudiarán aspectos similares como los artículos de mayor impacto, los principales autores y revistas, la evolución histórica y la situación por países. Este capítulo terminará con un listado sobre las principales revistas en esta área de investigación según los conocimientos del autor y con una breve mención a algunas de las principales asociaciones y congresos dedicados al estudio de estas especialidades.

En el tercer capítulo se elaborará un breve repaso introductorio a los conceptos básicos sobre la toma de decisiones en incertidumbre. Se iniciará con un análisis resumido sobre las nociones básicas para la teoría de la decisión. En este apartado se comentarán algunos de los criterios clásicos de decisión como son el optimista, el pesimista, el de Laplace, el de Hurwicz y el de Savage, y otras formas de decisión como son las decisiones de grupo, las decisiones secuenciales y la utilidad. A continuación, se presentarán diferentes instrumentos matemáticos para el tratamiento de la incertidumbre como son la valuación, los intervalos de confianza, los subconjuntos borrosos, los números borrosos, la noción de distancia y los expertones. El capítulo finalizará con el análisis de otros elementos para la toma de decisiones como son el concepto de relación, asignación, agrupación y ordenación.

En el cuarto capítulo se introducirá el operador OWA. Inicialmente, se estudiará el modelo original analizando diferentes aspectos fundamentales junto con un ejemplo ilustrativo sobre su aplicación en las decisiones empresariales. Posteriormente, se estudiarán las extensiones de nivel 1, es decir, las extensiones que añaden una característica fundamental a los operadores OWA. En este trabajo se considerará el operador IOWA, el operador LOWA, el operador HOWA, el operador UOWA, el *fuzzy OWA* (FOWA) *operator* y el *hybrid averaging*. Cabe destacar que en estas extensiones se elaborarán ejemplos ilustrativos para poder observar su funcionamiento en los métodos de decisión empresarial. A continuación, se desarrollarán las extensiones de nivel 2 de entre las cuales se pueden destacar el *induced linguistic OWA* (ILOWA) *operator*, el *induced heavy OWA* (IHOWA) *operator*, etc. Seguidamente se pasará a estudiar las extensiones de nivel 3 como el *uncertain induced linguistic OWA* (UILOWA) *operator*, el *uncertain induced heavy OWA* (UIHOWA) *operator*, etc. Finalmente, se comentará brevemente la posibilidad de elaborar extensiones de nivel superior. Cabe destacar que la mayoría de estas extensiones ya han sido propuestas por otros autores pero en algunos casos, estas extensiones también serán nuevas aportaciones procedentes del trabajo de investigación.

En el quinto capítulo se introducirá el operador GOWA y se propondrá un gran número de nuevas extensiones a los operadores GOWA. En primer lugar, se estudiará el modelo original que generaliza al operador OWA y tiene como casos particulares a la versión OWA geométrica, harmónica, cuadrática, etc. A continuación, se estudiarán las nuevas extensiones propuestas en este capítulo. Inicialmente, se desarrollarán las extensiones de nivel 1 que consistirán en generalizar mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas a las extensiones comentadas en los operadores OWA. Posteriormente, se estudiarán las extensiones de nivel 2 y 3 respectivamente. Este capítulo finalizará con un breve apartado sobre posibles extensiones de nivel superior.

En el sexto capítulo se analiza la utilización de los operadores OWA en las medidas de de distancia. Esto lleva a proponer un gran número de nuevas medidas de distancia basadas en el operador OWA. La medida básica será el operador OWAD a partir del cual se desarrollarán diferentes extensiones. Como el operador GOWAD incluye al operador OWAD como un caso particular y abarca mucho más, el desarrollo de las extensiones se realizará a partir de dicha generalización. Cabe destacar que esta generalización es una versión OWA de la distancia de Minkowski. También se presentará una aplicación de los operadores OWAD en un problema decisional de selección de estrategias. Las extensiones también se subdividirán en extensiones de nivel 1, de nivel 2 y de nivel N. Cabe destacar que en el último apartado también se comentará brevemente una nueva forma de ver la información lingüística mediante el análisis de las variables lingüísticas desde una perspectiva externa, lo cual lleva a proponer un gran número de conceptos como por ejemplo el número borroso lingüístico.

En el séptimo capítulo se analiza la utilización de los operadores OWA en diferentes índices de selección. En términos generales, se propone la utilización de los operadores OWA y sus extensiones en el coeficiente de adecuación y en el índice del máximo y el mínimo nivel. Después de una introducción general, este apartado se divide en cuatro grandes bloques según las cuatro principales aportaciones de este capítulo que son el operador OWAAC, el coeficiente de adecuación generalizado, el operador OWAIMAM y el índice del máximo y el mínimo nivel generalizado.

En el octavo capítulo se presenta un nuevo modelo que unifica la media ponderada y el operador OWA en una misma formulación. Para llevar a cabo el análisis, este capítulo se subdivide en cinco bloques. El primer bloque analiza los conceptos básicos de esta nueva unificación. En el segundo bloque se desarrollan algunas extensiones fundamentales al nuevo operador OWAWA como el IOWAWA, el LOWAWA, el UOWAWA, el FOWAWA, el ILOWAWA, el UIOWAWA y el FIOWAWA. En el tercer bloque se presenta un modelo generalizador del anterior mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas obteniéndose así el operador GOWAWA y Quasi-OWAWA. En el cuarto bloque se introducen diferentes extensiones a los operadores GOWAWA y Quasi-OWAWA siguiendo con una metodología similar a la desarrollada en el segundo bloque. El último bloque hace referencia a otras extensiones en donde se analizan principalmente las extensiones surgidas de utilizar la noción de distancia y los índices de selección explicados en el sexto y séptimo capítulos respectivamente, en el operador OWAWA y en sus extensiones.

En el noveno capítulo se propone un nuevo modelo que unifica el concepto de probabilidad con el operador OWA de tal forma que se obtiene un nuevo operador denominado POWA. Este capítulo sigue una metodología similar al anterior y además su formulación matemática es bastante parecida. También se divide en cinco bloques. En el primer bloque se presentan los conceptos principales del operador POWA. En el segundo bloque se analizan diferentes extensiones como el PIOWA, el PLOWA, el PUOWA, y muchos otros más. En el tercer bloque se generaliza al operador POWA mediante el uso de medias generalizadas (operador PGOWA) y cuasi-aritméticas (operador Quasi-POWA), y se estudian diferentes extensiones mediante esta nueva generalización. En el cuarto bloque se analiza la utilización de diferentes medidas de distancia en el operador POWA y algunas de sus principales extensiones. En el quinto bloque se consideran otras posibles extensiones de entre las cuales se destaca la utilización de los índices de selección comentados en el capítulo 7, en el operador POWA.

En el décimo capítulo se introduce una formulación más general que permite unificar a la noción de probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA en la misma formulación. Este es probablemente el resultado más importante de la tesis ya que engloba a prácticamente todo. Se le denomina operador POWAWA y es un nuevo modelo de gran aplicabilidad ya que se prevé que pueda ser de gran utilidad en muchos problemas en donde en el pasado sólo se consideraban uno de estos conceptos. También se divide en cinco bloques. Un primer bloque para introducir los conceptos básicos de esta nueva unificación. El segundo bloque analiza diferentes extensiones como el operador PIOWAWA, PUOWAWA, PLOWAWA, y muchos otros más. En el tercer bloque se generaliza el modelo mediante el uso de medias generalizadas (PGOWAWA) y cuasi-aritméticas (Quasi-POWAWA), y se introducen diversas extensiones. En el cuarto bloque se analiza la utilización de la noción de distancia en el operador POWAWA y diferentes extensiones. En el último bloque se considera la utilización de los índices de selección comentados en el séptimo capítulo en el operador POWAWA. Cabe destacar que a lo largo del capítulo también se comenta un caso particular de gran relevancia denominado operador PWA. A este operador no se le ha dedicado un capítulo exclusivo porque no es un operador OWA pero representa una de las tres partes constitutivas del operador POWAWA de igual forma que el operador OWAWA y POWA. Además, a día de hoy puede que tenga más impacto en la comunidad científica debido a que afecta a dos conceptos clásicos como son la probabilidad y la media ponderada.

En el undécimo capítulo se analiza la aplicabilidad del operador OWA en un sentido amplio. Se distingue entre la aplicabilidad en los métodos de gestión empresarial, en los métodos de decisión y en las ciencias en general. En la aplicabilidad empresarial se puede observar la aplicabilidad de los operadores OWA en diferentes problemas empresariales como la gestión financiera, la gestión estratégica, la gestión de recursos humanos y la gestión de productos. En la aplicabilidad en otros métodos de decisión se considera la utilización de los operadores OWA en la teoría de la evidencia, en la minimización del coste, en el AHP, en el TOPSIS, en las decisiones de grupo, en las decisiones secuenciales, en el concepto de utilidad, en la asignación y en la agrupación. Al analizar la aplicabilidad en las ciencias en general se llega a la conclusión de que la aplicabilidad de los operadores OWA y la incertidumbre en general es ilimitada.

El duodécimo capítulo presenta las principales conclusiones del trabajo. Se distingue entre un análisis de las conclusiones específico en donde se considera cada capítulo de forma individualizada y un análisis genérico en donde se consideran a grandes rasgos cuáles son las principales aportaciones de la tesis. A continuación, también se comentan las futuras líneas de investigación a llevar a cabo en el futuro procedente de la tesis doctoral.

El capítulo decimotercero presenta la bibliografía de la tesis y en el capítulo decimocuarto se presenta un anexo con todos los artículos que el doctorando ha escrito en su etapa de formación doctoral. Estos artículos se dividen en artículos de congreso y de revista, y se orden cronológicamente por años. Cabe destacar que se presentan primero los artículos de congreso porque todos ellos ya han sido publicados mientras que en los de revista hay muchos que de momento están en proceso de evaluación.

2. Estado de la cuestión

2.1. Análisis genérico sobre la teoría de la borrosidad

Para analizar el estado de la cuestión, se optará por utilizar como soporte la *Journal Citation Reports* (*JCR*) y la *Web of Science*. Tanto la *JCR* como la *Web of Science* pertenecen a la *ISI Web of Knowledge* y son de reconocimiento mundial. Principalmente, recogen las revistas científicas de mayor prestigio internacional de cada especialidad. Además, también recogen algunos documentos adicionales de gran prestigio como son algunos *proceedings* de los congresos de mayor impacto internacional. La gran ventaja que tiene es el poder mostrar los trabajos que se han publicado sobre una especialidad concreta en las principales revistas internacionales.

Para llevar a cabo la evaluación, primero se considerará el estado de la cuestión de la lógica borrosa. Esto permitirá observar de forma genérica cuál es el ritmo de publicación en la actualidad y cómo han evolucionado estas ideas a lo largo del tiempo. A continuación, se pasará a estudiar el estado de los operadores *OWA* y se analizará algunos aspectos básicos como quiénes son los principales investigadores en esta área, cuáles son las principales revistas y cuál ha sido la evolución histórica. Para finalizar, se intentará mostrar la mayor parte de las revistas científicas en esta área, independientemente de que se haya o no publicado algún artículo sobre los operadores *OWA*, para así poder mostrar cuáles son las revistas de interés para la investigación y dónde pueden llevarse a cabo los distintos intentos de publicación.

Cabe destacar que los datos expuestos han sido recogidos en la *Web of Science* y en la *JCR* el día 23-01-2007, el 28-03-2007 y el 10-07-2008. También cabe señalar que en la búsqueda mediante palabras clave, se pueden producir algunos errores por el hecho de existir trabajos con las palabras clave solicitadas pero sin el contenido científico deseado. En cuanto a la palabra clave *fuzzy* (≈ borroso), se ha observado la existencia de estos casos. De entre los resultados obtenidos, se ha extraído una pequeña muestra y se ha observado que alrededor del 90% de los artículos obtenidos eran válidos para la investigación. En cuanto a la palabra clave *OWA*, de las 230 entradas obtenidas, se han obtenido 210 entradas válidas. Pero debido a la existencia de algún artículo en donde no se ha utilizado la abreviatura *OWA*, de forma aproximada se puede decir que el número de entradas debe rondar los 220. Observando el número de citas del trabajo original de Yager (1988) en donde se introdujo el operador *OWA*, se puede observar que dichos operadores han aparecido en un mayor número de artículos. Esto implica que lo que se va a analizar es el número de artículos que se han dedicado principalmente a estudiar los operadores *OWA* (230 entradas) y no a los trabajos en donde se ha considerado puntualmente su utilización (504 entradas). Por último, cabe destacar que estos datos fueron recopilados antes de la incorporación de la *ISI Proceedings* en la *Web of Science*. Por tanto, es de esperar que estos datos estén siendo modificados significativamente en el presente.

A continuación se muestran los resultados: *Web of Science*: 23-01-2007 y 28-03-2007.

La palabra ***fuzzy*** ha obtenido **32525 entradas**. De estos datos, y a partir de la muestra extraída, se puede decir que el número de entradas válidas se encuentra alrededor de las

30000 entradas. Cabe destacar que la cifra es muy superior si se incluye a otros trabajos sobre lógica borrosa o similar en donde no se ha utilizado la palabra *fuzzy*. Este hecho se produce debido a la gran variedad de teorías que se han generado alrededor de la lógica *fuzzy* (borrosa), como es el caso de los otros trabajos añadidos después del top-20 con la palabra *fuzzy*. Cabe destacar que en la segunda lista también se han incluido algunos de los libros más relevantes en esta área de investigación.

Los 20 artículos más citados son los siguientes:

(1) L.A. Zadeh, Fuzzy Sets, *Information and Control 8* (1965) 338-353.
Veces citado: 6483.
(2) T. Takagi, M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 15* (1985) 116-132.
Veces citado: 1642.
(3) L.A. Zadeh, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Systems 1* (1978) 3-28.
Veces citado: 1588.
(4) C.C. Lee, Fuzzy Logic in Control Systems – Fuzzy Logic Controller 1, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 20* (1990a) 404-418.
Veces citado: 1212.
(5) J.S.R. Jang, ANFIS – Adaptative Network Based Fuzzy Inference System, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 23* (1993) 665-685.
Veces citado: 851.
(6) E.H. Mamdani, Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Farm, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers – London 121* (1974) 1585-1588.
Veces citado: 599.
(7) E.H. Mamdani, S. Assilian, Experiment in Linguistic Synthesis with Fuzzy Logic Controller, *International Journal of Man-Machine Studies 7* (1975) 1-13.
Veces citado: 598.
(8) L.A. Zadeh, Similarity Relations and Fuzzy Orderings, *Information Sciences 3* (1971) 177-200.
Veces citado: 496
(9) L.A. Zadeh, Probability Measures of Fuzzy Events, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 23* (1968) 421-427.
Veces citado: 483.
(10) J.A. Goguen, L-Fuzzy Sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 18* (1967) 145-174.
Veces citado: 469.
(11) L.X. Wang, J.M. Mendel, Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 22* (1992a) 1414-1427.
Veces citado: 468.
(12) C.L. Chang, Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 24* (1968) 182-190.
Veces citado: 466.
(13) L.X. Wang, J.M. Mendel, Fuzzy Basis Functions, Universal Approximation, and Ortogonal Least Squares Learning, *IEEE Transactions on Neural Networks 3* (1992b) 807-814.
Veces citado: 420.

(14) H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems 1* (1978) 45-55.
Veces citado: 419.
(15) M. Sugeno, G.T. Kang, Structure Identification of Fuzzy Model, *Fuzzy Sets and Systems 28* (1988) 15-33.
Veces citado: 381.
(16) N.R. Pal, S.K. Pal, A Review on Image Segmentation Techniques, *Pattern Recognition 26* (1993) 1277-1294.
Veces citado: 380.
(17) A. Rosenfeld, Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 35* (1971) 512-517.
Veces citado: 363.
(18) K. Tanaka, M. Sugeno, Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, *Fuzzy Sets and Systems 45* (1992) 135-156.
Veces citado: 362.
(19) C.C. Lee, Fuzzy Logic in Control Systems – Fuzzy Logic Controller 2, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 20* (1990b) 419-435.
Veces citado: 353.
(20) C.T. Lin, C.S.G. Lee, Neural Network Based Fuzzy Logic Control and Decision System, *IEEE Transactions on Computers 40* (1991) 1320-1336.
Veces citado: 344.

Otros artículos o libros de gran impacto:

(1) T.L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.
Veces citado: 2215.
(2) G.A. Shafer, *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton, NY, 1976.
Veces citado: 2045.
(3) D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
Veces citado: 1759.
(4) L.A. Zadeh, Outline of a New Approach to Analysis of Complex Systems and Decision Processes, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 3* (1973) 28-44.
Veces citado: 1570.
(5) H.J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986.
Veces citado: 1527.
(6) L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning 1, *Information Sciences 8* (1975) 199-249.
Veces citado: 1309.
(7) G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, 1995.
Veces citado: 873.
(8) L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning 3, *Information Sciences 9* (1975) 43-80.
Veces citado: 844.
(9) Z. Pawlak, Rough Sets, *International Journal of Computer & Information Sciences 11* (1982) 341-356.

Veces citado: 795.

(10) L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning 2, *Information Sciences 8* (1975) 301-357.
Veces citado: 765.

(11) A. Kaufmann, *Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets. Vol.1-4*, Academic Press, New York, 1975.
Veces citado: 738.

(12) A.P. Dempster, Upper and Lower Probabilities Induced by a Multivalued Mapping, *Annals of Mathematical Statistics 38* (1967) 325-339.
Veces citado: 659.

(13) T.L. Saaty, Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology 15* (1977) 234-281.
Veces citado: 616.

(14) A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1985.
Veces citado: 607.

(15) R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18* (1988) 183-190.
Veces citado: 530.

(16) R.R. Yager, D.P. Filev, *Essentials of Fuzzy Modeling and Control*, John & Wiley Sons, New York, 1994.
Veces citado: 396.

A continuación, se muestran los 60 investigadores que más artículos han publicado con la palabra *fuzzy*. Como se trata de investigadores especializados en lógica borrosa, se acepta el número de entradas como válido. También se añade una columna con el número total de entradas del autor para poder observar el total de publicaciones en revistas incluidas en la *ISI Web of Knowledge*.

Cabe destacar que se ha utilizado como palabra clave "*fuzzy*" y a partir de aquí se han buscado los artículos totales de los autores. Desafortunadamente esta lista no es completa al 100% debido a que las búsquedas suelen producir errores por la existencia de autores con varias nomenclaturas en su nombre, etc. Principalmente, se puede destacar que esta lista ha descartado un gran número de investigadores asiáticos. Este problema es debido a la dificultad de poder obtener el número de entradas adecuadas ya que en muchos casos varios autores tenían el mismo nombre y no se podía distinguir entre ellos.

Los autores han sido ordenados en función del número de publicaciones con la palabra "*fuzzy*". A continuación, se ha añadido una columna con el número total de artículos de cada autor y el número de artículos "*fuzzy*" publicados en los últimos 10 años. También se ha añadido una columna con el número total de citas recibidas en la *ISI Web of Knowledge* para poder observar el impacto de cada autor en la comunidad científica. Cabe destacar que se trata de números aproximados debido a lo comentado en el párrafo anterior. En cuanto al número total de artículos, destacar que el valor en paréntesis hace referencia a los artículos científicos mientras que el otro valor incluye notas editoriales, etc. Por último, decir que la información ha sido recopilada el 28-03-2007.

Tabla 1: Autores con más entradas con la palabra *fuzzy* en la *Web of Science*:

	Nombre del investigador	Art. fuzzy	Art. 1998-2007	Número total SCI	Veces citado SCI
1-	W. Pedrycz	289	188	339(302)	2571
2-	R.R. Yager	198	88	313(282)	4371
3-	A. Kandel	141	62	187(154)	1001
4-	D. Dubois	121	52	200(160)	3653
5-	E.E. Kerre	115	67	133(129)	643
6-	H. Prade	113	46	190(150)	3788
7-	M. Sakawa	106	55	170(165)	831
8-	J.J. Buckley	98	37	120(100)	1367
9-	F. Herrera	92	80	120(105)	1430
10-	S.K. Pal	90	39	165(145)	2099
11-	E.S. Lee	79	48	79(78)	487
12-	S.M. Chen	78	56	80(75)	566
13-	D.A. Linkens	78	49	200(170)	1312
14-	C.T. Lin	76	63	76(72)	1093
15-	K. Hirota	73	34	79(75)	425
16-	J.C. Bezdek	69	19	113(95)	3002
17-	D.H. Hong	64	47	65(60)	230
18-	S.K. Oh	64	71	64(64)	200
19-	C.X. Wu	64	45	64(56)	187
20-	B. de Baets	63	56	102(96)	377
21-	I.B. Turksen	62	36	77(60)	762
22-	R. Mesiar	59	38	109(91)	467
23-	H. Tanaka	59	15	60(54)	1398
24-	M. Delgado	58	29	74(72)	638
25-	J. Kacprzyk	57	29	72(60)	481
26-	G.J. Klir	54	22	144(89)	1102
27-	J.L. Verdegay	54	20	57(53)	787
28-	L.A. Zadeh	52	16	142(87)	15540
29-	M.A. Vila	52	30	54(54)	488
30-	N.R. Pal	51	32	104(88)	1625
31-	H. Ishibuchi	49	25	78(76)	1299
32-	J.N. Mordeson	48	10	85(83)	325
33-	D. Ruan	48	47	63(54)	166
34-	G.H. Tzeng	48	48	90(90)	320
35-	R.J. Wai	48	48	93(92)	422
36-	M.A. Gil	47	27	68(63)	381
37-	B.D. Liu	47	41	47(47)	386
38-	V. Novak	45	25	45(35)	148
39-	R. Lowen	44	5	110(100)	1548
40-	M. Sugeno	43	13	48(44)	3587
41-	N.N. Morsi	43	12	45(41)	309
42-	H. Ying	43	29	43(37)	704
43-	Y. Yoshida	43	36	43(42)	183
44-	S. Sessa	42	14	72(61)	348
45-	M. Inuiguchi	40	23	62(60)	262

46-	J.M. Mendel	38	33	185(109)	3192
47-	J.F. Baldwin	38	15	48(46)	462
48-	O. Cordón	38	38	54(48)	416
49-	R. Babuska	38	33	46(45)	363
50-	M. Demirci	37	35	43(40)	139
51-	P. Hajek	37	35	80(68)	392
52-	E. Herrera-Viedma	37	36	48(42)	670
53-	E.P. Klement	37	17	49(44)	575
54-	S.S. Rao	37	18	37(35)	339
55-	G. Gerla	36	12	44(42)	165
56-	I. Rojas	35	37	70(69)	206
57-	H.J. Zimmermann	35	14	60(39)	1032
58-	J.M. Keller	34	14	59(51)	1240
59-	L. Godó	34	29	53(50)	416
60-	A. Dinola	34	0	47(43)	237

En la siguiente tabla se muestra las principales revistas en este ámbito de investigación. Para ello, se ha considerado el número de entradas que tienen con la palabra *fuzzy*, el número total, el porcentaje de artículos publicados con *fuzzy* y su índice de impacto en el año 2007.

Tabla 2: Revistas con más entradas con la palabra *fuzzy* en la *Web of Science*:

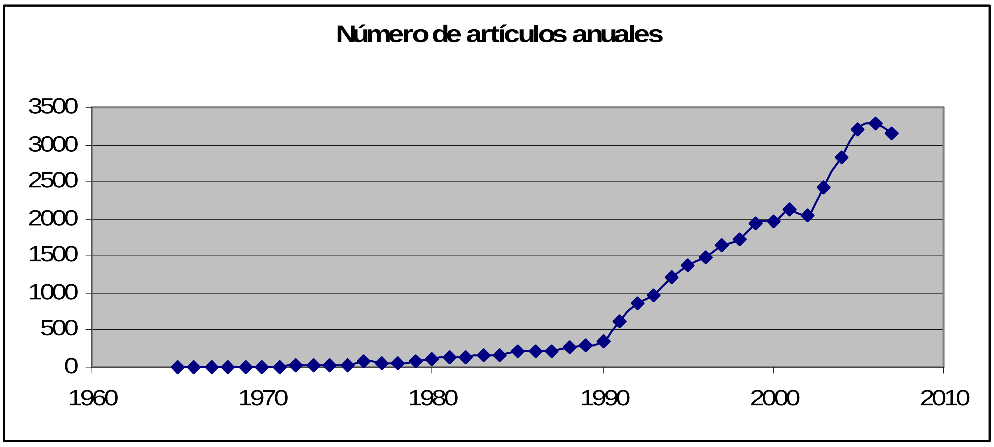
Revistas	*fuzzy*	Totales	Porcentaje	*Impact* 2007
Fuzzy Sets Systems	5019	5577	90%	1.373
IEEE Tr. Fuzzy Syst.	804	835	96.3%	2.137
Information Sci.	763	2954	25.8%	2.147
IEEE Trans. SMC B	424	1239	34.2%	1.353
Eur. J. Oper. Res.	402	10220	3.9%	1.096
Int. J. Intel. Syst.	369	1027	35.9%	0.667
IJ Uncert. Fuz. KBS	338	556	60.8%	0.376
J Math. Anal. - Appl.	268	15443	1.7%	0.872
Int. J. Approx. Reas.	249	507	49.1%	1.220
J. Intel. Fuzzy Syst.	245	361	67.8%	0.221

A continuación, se muestra la distribución por años. Esto nos permite ver cuál ha sido la evolución histórica de la investigación sobre lógica borrosa.

Tabla 3: Número de entradas con la palabra *fuzzy* distribuido por años:

Año	1965	1966	1967	1968	1969	1970	1971	1972	1973	1974
NºArt	1	0	1	10	11	6	10	19	24	24
1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981	1982	1983	1984	1985
29	68	65	46	70	114	126	127	162	175	204
1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
205	226	276	291	360	627	857	964	1210	1360	1468
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007
1653	1718	1948	1957	2140	2044	2414	2817	3208	3290	3146

Gráficamente:



Como se puede observar, en los primeros años desde su aparición en 1965, el impacto de la lógica borrosa fue muy bajo. A partir de la década de los 80 se puede observar un ligero incremento en el número de publicaciones que explota a partir de la década de los 90. En la actualidad, el número de publicaciones anuales es superior a 3000, lo cual demuestra el gran impacto que están teniendo estas ideas en la comunidad científica.

Si estudiamos el número de publicaciones *fuzzy* por países, obtenemos los siguientes resultados. Cabe destacar que se considera el número de publicaciones totales, el número de publicaciones en los últimos 10 años y en los últimos 3 años. Con esto, aparte de poder observar el número total de publicaciones, también es posible ver cuál es la evolución de estos países. Cabe destacar que esta información ha sido obtenida el 27-04-2007 y 10-05-2008.

Tabla 4: Publicaciones *fuzzy* por países

	País	Total art. fuzzy	Total Citas	Art. 1997-2006	Citas (Últimos 10 años)	Art. 2004-2006
1-	United States	6674	73792	4098	25629	1225
2-	China	3906	13969	3222	9417	1836
3-	Taiwan	2614	15175	2168	9396	877
4-	Japan	2268	19390	1316	5394	393
5-	England	1610	15251	1192	6959	493
6-	Canada	1535	11628	1104	5440	479
7-	Spain	1531	8587	1209	5468	521
8-	India	1524	7930	999	3109	409
9-	South Korea	1502	5956	1237	3609	611
10-	Germany	1433	9270	1046	5187	307
	Total	33333	238518	23446	96489	9572

Como se puede observar, Estados Unidos es la primera fuerza investigadora en temas *fuzzy* aunque últimamente se observa un fuerte crecimiento por parte de China. Por otro lado, también se puede observar como España se encuentra muy bien posicionada en esta área de investigación al encontrarse entre las 10 principales fuerzas investigadoras mundiales.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos en la principal revista fuzzy, es decir, en la *Fuzzy Sets and Systems*. La información ha sido extraída de la *ISI Web of Knowledge* el 07-05-2008. Obsérvese que en esta fecha, el número total de artículos publicados en la *Fuzzy Sets and Systems* era de **5831** artículos.

Los 10 artículos más citados en la *Web of Science* son:

(1) L.A. Zadeh, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 3-28.
Veces citado: 1588.

(2) H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems* 1 (1978) 45-55.
Veces citado: 440.

(3) M. Sugeno, G.T. Kang, Structure Identification of Fuzzy Model, *Fuzzy Sets and Systems* 28 (1988) 15-33.
Veces citado: 425.

(4) K. Tanaka, M. Sugeno, Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, *Fuzzy Sets and Systems* 45 (1992) 135-156.
Veces citado: 406.

(5) L.A. Zadeh, The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 199-227.
Veces citado: 293.

(6) H.J. Zimmermann, P. Zysno, Latent connectives in human decision making, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 37-51.
Veces citado: 253.

(7) D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets in Approximate Reasoning 1. Inference with possibility distributions, *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991) 143-202.
Veces citado: 244.

(8) G. Bortolan, R. Degani, A review of some methods for ranking fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems* 15 (1985) 1-19.
Veces citado: 239.

(9) R.R.Yager, On a general class of fuzzy connectives, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 235-242.
Veces citado: 207.

(10) K.T. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems* 20 (1986) 87-96.
Veces citado: 202.

A continuación, se muestran los 30 autores que más han publicado en la *Fuzzy Sets and Systems*. También se incluye una última fila con el creador de las teorías “*fuzzy*”, Lotfi A. Zadeh, ya que sus aportaciones son las más citadas. En resumen, se consideran el número total de artículos en la revista, las publicaciones en los últimos 10 años y el número total de artículos. También se muestra las veces que han sido citados tanto los artículos totales como los artículos publicados en la revista. Los resultados son los siguientes:

Tabla 5: Autores con el mayor número de entradas en la FSS en la *WoS*:

	Nombre del investigador	Art. fuzzy	Citas FSS	Art. 1998-2007	Número total SCI	Veces citado SCI
1-	W. Pedrycz	90	1523	30	339(302)	2571
2-	J.J. Buckley	79	1332	20	120(100)	1367
3-	A. Kandel	58	419	23	187(154)	1001
4-	R.R. Yager	55	1199	21	313(282)	4371
5-	E. Kerre	51	478	32	133(129)	643
6-	D. Dubois	48	1224	15	200(160)	3653
7-	R. Mesiar	47	333	32	109(91)	467
8-	C.X. Wu	47	184	32	64(56)	187
9-	H. Prade	43	1195	13	190(150)	3788
10-	D.H. Hong	38	208	20	65(60)	230
11-	N.N. Morsi	37	309	11	45(41)	309
12-	M. Sakawa	37	329	16	170(165)	831
13-	R. Fuller	34	358	17	34(29)	371
14-	M. Sugeno	30	1681	7	48(44)	3587
15-	E. Pap	29	161	23	79(75)	425
16-	J.L. Verdegay	29	511	9	57(53)	787
17-	K. Hirota	28	259	7	79(75)	425
18-	F. Herrera	27	705	17	120(105)	1430
19-	H. Tanaka	27	837	6	60(54)	1398
20-	B. de Baets	26	171	26	102(96)	377
21-	I.B. Turksen	26	618	7	77(60)	762
22-	E. Czogala	25	385	4	33(32)	480
23-	M. Delgado	25	336	9	74(72)	638
24-	R. Lowen	23	398	5	110(100)	1548
25-	J.N. Mordeson	23	113	4	85(83)	325
26-	M.W. Warner	22	126	2	22(19)	126
27-	E.P. Klement	22	268	10	49(44)	575
28-	H. Ishibuchi	21	588	7	78(76)	1299
29-	T. Murofushi	21	302	13	37(35)	469
30-	Y. Yoshida	21	124	16	43(42)	183
*	L.A. Zadeh	5	2070	2	142(87)	15540

Obsérvese que las tres primeras columnas fueran obtenidas el 08-05-2008 mientras que las otras dos, el 28-03-2008.

A continuación, se muestran los resultados por países. Se consideran los diez países con mayor número de publicaciones en la revista. En este caso, se considera el número total de artículos y de citas, así como el número total de artículos y de citas entre los años 1998-2007. También se consideran el número de artículos publicados por cada país entre los años 2005-2007.

Tabla 6: Artículos en FSS por países

	País	Total artículos	Total citas	Artículos 1998-2007	Citas 1998-2007	Artículos 2005-2007
1-	China	925	4200	540	1880	168
2-	United States	808	9421	288	1555	48
3-	Japan	420	6234	169	914	30
4-	India	401	2256	138	448	19
5-	Spain	393	2733	246	1338	82
6-	Taiwán	368	3526	261	1690	37
7-	South Korea	255	1239	144	497	16
8-	Germany	226	1866	121	639	29
9-	France	204	2468	92	384	37
10-	Canada	203	2298	95	604	24
	Total	5813	50063	2743	12221	689

Como se puede observar, China es el principal país a nivel de publicaciones en la *Fuzzy Sets and Systems*. Estados Unidos le sigue muy de cerca en el segundo lugar aunque parece que China incrementará las diferencias en los próximos años, como se puede observar por las publicaciones realizadas en los últimos años. Aún así, conviene destacar que a nivel de citaciones, Estados Unidos sigue manteniendo el primer lugar. Obsérvese que la India se encuentra en el 4º lugar y España en el 5º lugar.

2.2. Análisis específico sobre los operadores OWA

En cuanto a los operadores *OWA*, al tratarse de una rama concreta de la teoría de la decisión mezclada con la lógica borrosa, es obvio que el número de publicaciones es mucho menor. Además, los operadores *OWA* son mucho más recientes ya que su origen se encuentra en 1988. La ventaja de este aspecto está en que es posible conocer prácticamente todo lo que se ha hecho sobre dichos operadores en las revistas de mayor impacto internacional. Por el otro lado, es prácticamente imposible conocer todo lo que se ha hecho sobre lógica borrosa. Se pueden conocer los rasgos generales pero una vez la teoría se subdivide en especialidades, entonces resulta imposible abarcarlo todo.

El número de entradas obtenidas con los operadores *OWA*, ha sido de **230** y los 10 artículos más citados son:

(1) R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18* (1988) 183-190.
Veces citado: 530.
(2) R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems 59* (1993) 125-148.
Veces citado: 126.
(3) R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, *International Journal of Intelligent Systems 11* (1996) 49-73.
Veces citado: 80.
(4) F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision-Making with a Linguistic Assessment Approach, *Information Sciences 85* (1995) 223-239.
Veces citado: 59.
(5) F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations, *Fuzzy Sets and Systems 97* (1998) 33-48.
Veces citado: 57.
(6) D.P. Filev, R.R. Yager, On the issue of obtaining OWA operator weights, *Fuzzy Sets and Systems 94* (1998) 157-169.
Veces citado: 55.
(7) F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA Operators, *Fuzzy Sets and Systems 79* (1996) 175-190.
Veces citado: 52.
(8) F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information, *Fuzzy Sets and Systems 115* (2000) 67-82.
Veces citado: 46.
(9) R.R. Yager, Applications and extensions of OWA aggregations, *International Journal of Man-Machine Studies 37* (1992c) 103-132.
Veces citado: 46
(10) G. Bordogna, M. Fedrizzi, G. Pasi, A linguistic modelling of consensus in group decision making based on OWA Operator, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 27* (1997) 126-132.
Veces citado: 45.

Tabla 7: Autores con más entradas con la palabra *OWA* en la *Web of Science* son:

Autor	Entradas con *OWA* en *JCR*	Total entradas en *JCR*
R.R. Yager	49	313
Z.S. Xu	17	≈30
E. Herrera-Viedma	16	48
F. Herrera	15	120
X.W. Liu	10	≈15
V. Torra	9	≈60
H.B. Mitchell	7	≈25
T. Calvo	6	21
F. Chiclana	6	14
R. Mesiar	6	109

En cuanto a las principales revistas de publicación, se puede observar como son las mismas que en el caso de la lógica borrosa.

Tabla 8: Revistas con más entradas con la palabra *OWA* en la *Web of Science*:

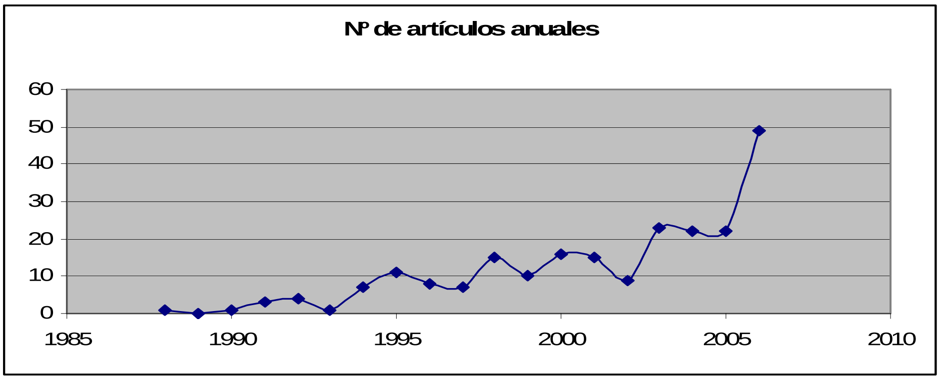
Revista	Entradas *OWA*	Total	Porcentaje	*Impact* 2007
Fuzzy Sets - Syst.	35	5577	0.6%	1.373
Int. J. Intel. Syst.	33	1027	3.2%	0.667
IJ Unc. Fuz. KBS	22	556	3.9%	0.376
IJ. Approx. Reas.	13	507	2.5%	1.220
Inform. Sciences	12	2954	0.4%	2.147

A continuación se muestra la evolución histórica de las publicaciones hechas con los operadores *OWA*.

Tabla 9: Número de entradas con la palabra *OWA* distribuido por años:

Año	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996
NºArt.	1	0	1	3	4	1	7	11	8
1997	1998	1999	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
7	15	10	16	15	9	23	22	22	49

Gráficamente.



Como se puede observar, hasta mediados de la década de los 90, el número de publicaciones es mínimo. A partir de esta fecha, se puede observar una tendencia al alza que hace prever que en los próximos años las cifras continuarán aumentando.

Como el número de publicaciones con la palabra *OWA* es bastante reducido, dividir las publicaciones por países puede no ser del todo adecuado y representativo ya que resulta suficiente con la información obtenida para el caso de los autores individuales. Por tanto, para tratar de estudiar por países el área de especialización de esta investigación, lo que se va a hacer es lo siguiente. Se seleccionarán las 10 revistas *SCI*/*SCCI* que se consideran en la actualidad de mayor relevancia para esta investigación doctoral. Cabe destacar que esta selección es subjetiva de acuerdo con los conocimientos del autor. Estas revistas han sido marcadas en negro en la tabla 9.

Tabla 10: Publicaciones por países en las 10 principales revistas:

	País	Art. totales	Art. 1997-2006	Art. 2004-2006
1-	Estados Unidos	7368	3293	991
2-	Inglaterra	1953	626	227
3-	China	1707	1208	504
4-	Canadá	1365	649	225
5-	España	1264	922	317
6-	Taiwán	1230	935	330
7-	Holanda	1154	448	143
8-	Japón	1126	577	152
9-	Francia	1022	527	185
10-	India	905	379	125
	Total	25871	12589	4155

Como se puede observar, en este caso Estados Unidos también lidera la clasificación. A continuación se encuentra Inglaterra aunque la tendencia muestra un fuerte crecimiento por parte de China que hace presagiar que un corto plazo de tiempo pase a ocupar el segundo lugar. Por otra parte, España también muestra una gran influencia en estas revistas al ubicarse en el quinto lugar mundial. Cabe destacar que cada artículo puede tener un valor doble o triple por el hecho de existir varios autores en la publicación.

2.3. Principales revistas para la investigación

Para finalizar el estudio sobre el estado de la cuestión, se va a mostrar las diferentes revistas existentes en este ámbito. Cabe destacar que estas revistas han sido seleccionadas de un grupo mayor. Básicamente, las revistas expuestas son las que el autor ha considerado más relevantes para este proyecto de investigación. Para cada revista se muestra su índice de impacto en el 2004, 2005, 2006, 2007. También se han añadido algunas de las revistas españolas en economía y empresa que a día de hoy ya han accedido a la *ISI Web of Knowledge*.

Tabla 11: Principales revistas en la *Journal Citation Reports* con el *Impact Factor* (I.F.) en los años 2004, 2005, 2006 y 2007.

Journal title	*I.F.* - 2007	*I.F.*- 2006	*I.F.* - 2005	*I.F.* - 2004
IEEE Trans. Neural Networks	2.769	2.620	2.205	2.170
Information Sciences	2.147	1.003	0.723	0.540
IEEE Trans. Fuzzy Systems	2.137	1.803	1.701	1.373
Computational Intelligence	1.972	1.415	0.532	1.923
Management Science	1.931	1.687	1.669	1.934
Applied Soft Computing	1.537	0.849	-	-
Operations Research	1.467	1.234	1.219	0.803
J Amer. Soc. Inf. Sci. Techn.	1.436	1.555	1.583	2.086
Decision Sciences	1.435	1.620	1.055	0.764
Fuzzy Sets and Systems	1.373	1.181	1.039	0.734
IEEE Trans. SMC – B	1.353	1.538	1.108	1.052
OMEGA – IJ Manag. Sci.	1.327	0.663	0.648	0.286
IJ Aprox. Reasoning	1.220	1.262	0.959	0.929
Exp. Syst with Applic.	1.177	0.957	1.236	1.247
Computers & Oper. Res.	1.147	0.893	0.746	0.562
J Risk and Uncertainty	1.122	0.846	2.100	1.480
Decision Support Systems	1.119	1.160	0.946	1.458
European J Oper. Res.	1.096	0.918	0.824	0.828
Rel. Eng. Syst Safety	1.004	0.920	0.747	0.551
IJ Production Economics	0.995	1.183	1.008	0.879
IEEE Trans. Eng. Manag.	0.962	0.825	0.864	0.573
J Business Research	0.878	0.815	0.694	0.607
Math. Oper. Res.	0.875	0.785	0.906	1.044
IEEE Trans. SMC – A	0.868	0.980	0.821	0.555
IEEE Trans. SMC – C	0.864	0.885	0.706	0.482
J Global Optimization	0.813	0.568	0.662	0.693
J Intelligent Inform. Syst.	0.796	0.750	1.234	0.851
J. Oper. Research Society	0.784	0.597	0.603	0.515
Computers & Math. Applic.	0.720	0.611	0.430	0.431
IJ Inf Techn and Dec. Mak.	0.718	0.818	-	-
J Opt. Theory Applic.	0.688	0.633	0.612	0.593
IJ Intelligent Systems	0.667	0.429	0.657	0.603
Cybernetics and Systems	0.655	0.964	0.681	0.768
Soft Computing	0.607	0.516	0.538	0.333
TEST	0.607	0.581	1.163	0.881

Interfaces	0.575	0.338	0.524	0.477
Knowledge-Based Systems	0.574	0.576	0.696	0.645
OR Spectrum	0.562	1.224	0.566	0.720
IJ Production Research	0.560	0.799	0.481	0.558
Computers & Ind. Eng.	0.554	0.650	0.347	0.632
Kybernetika	0.552	0.293	0.343	0.224
IJ General Systems	0.551	0.620	0.855	0.509
Annals Operations Research	0.544	0.589	0.525	0.411
Group Dec. and Negotiation	0.526	0.429	0.696	0.509
Oper. Res. Letters	0.517	0.767	0.597	0.597
Applied Intelligence	0.500	0.329	0.569	0.477
Control and Cybernetics	0.495	0.202	0.224	0.337
Social Choice and Welfare	0.493	0.417	0.283	0.417
IJ Systems Science	0.492	0.343	0.212	0.239
Expert Systems	0.413	0.119	0.652	0.104
Optimization	0.408	0.500	0.325	0.330
J Mult. Val. Logic Soft Comp.	0.407	0.200	-	-
Math. Meth. Oper. Res.	0.400	0.388	0.259	0.224
Theory and Decision	0.377	0.145	0.234	0.214
IJ Uncert. Fuzz KBS	0.376	0.406	0.430	0.573
J. Mathematical Economics	0.351	0.590	0.391	0.253
Negotiation Journal	0.340	0.418	0.245	0.109
Mathematical Social Sciences	0.319	0.312	0.326	0.455
J Universal Comp. Sci.	0.315	0.338	0.337	-
Intelligent Autom Soft Comp	0.268	0.354	0.160	0.089
Asia Pacific J Oper. Res.	0.258	0.375	0.333	0.200
Military Oper. Res.	0.241	0.080	0.222	-
J Intelligent & Fuzzy Syst.	0.221	0.283	0.174	0.439
J Oper. Res. Soc. Japan	0.200	0.292	0.281	0.191
Kybernetes	0.175	0.156	0.136	0.185
RAIRO – Oper. Res.	0.088	0.286	0.513	0.073
Fuzzy Opt. Dec. Mak. - New	-	-	-	-
Information Fusion – New	-	-	-	-
IJ Fuzzy Systems – New	-	-	-	-
Iranian J Fuzzy Syst. – New	-	-	-	-
TOP - New	-	-	-	-
Lecture Notes Comp. Science	-	-	0.402	0.513
Lect. Notes Artif. Intelligence	-	-	0.302	0.251
Revistas españolas de economía y empresa en la ISI				
Investigaciones económicas	0.268	-	-	-
Hacienda Púb. Esp. - New	-	-	-	-
Revista de Econ. Aplic. - New	-	-	-	-
Rev. Esp. Fin. Cont.- New	-	-	-	-
Spanish Economic Rev.- New	-	-	-	-
Universia Business Rev.- New	-	-	-	-

Otras revistas relevantes para la investigación que no pertenecen a la *SCI/SCCI*:

- *Academy of Information and Management Sciences Journal*
- *Advances in Computational Sciences and Technology*
- *Advances in Fuzzy Mathematics*
- ***Advances in Fuzzy Sets & Systems***
- *Advances in Modelling A*
- *Advances in Modelling B*
- *Advances in Modelling D*
- *Algorithmic Operations Research*
- *American Journal of Applied Sciences*
- *Applied Mathematics and Computation*
- *Asia Pacific Journal of Management Science*
- *Asian Journal of Information Technology*
- *Brazilian Journal of Operacional Research – Pesquisa Operacional*
- ***BUSEFAL***
- *Central European Journal of Operational Research*
- *Communications of the ICISA: An International Journal*
- *Computational Economics*
- *Computational Management Science*
- *Contemporary Management Research*
- *Control and Cybernetics Journal*
- *Control and Decision*
- *Control & Intelligent Systems*
- *Cuadernos de Gestión*
- *Cuadernos del CIMBAGE*
- *Cybernetics and Systems Analysis*
- *Decision Analysis*
- *Decisions in Economics and Finance*
- *Decision Sciences Journal of Innovative Education*
- *Egyptian Rough Computing Journal*
- *Electronic Journal of Business Research Methods*
- *Electronic Journal of SADIO*
- *Engineering Intelligent Systems*
- *Engineering Letters*
- *European Journal of Industrial Engineering*
- *European Sport Management Quarterly*
- *Foundations of Computing and Decision Sciences*
- ***Fuzzy Economic Review***
- *Fuzzy Systems and AI Magazine*
- *Fuzzy Systems and Soft Computing*
- *Fuzzy Systems & Mathematics*
- *IADIS International Journal on Computer Science and Information Systems*
- *IAENG International Journal of Computer Science*
- *IAENG International Journal of Applied Mathematics*
- *Icfaian Journal of Behavioural Finance*
- *Icfaian Journal of Financial Economics*

- *Icfaian Journal of Information Technology*
- *Icfaian Journal of Management Research*
- *Icfaian Journal of Managerial Economics*
- *Icfaian Journal of Organizational Behaviour*
- *Icfaian Journal of Systems Management*
- *IMA Journal of Management Mathematics*
- *INFOR: Information Systems and Operational Research*
- *Informatica*
- *Information: An International Interdisciplinary Journal*
- *Information – Interaction – Intelligence: A Journal in Information Engineering Sciences*
- *Information – Knowledge – Systems Management*
- *Information Resources Management Journal*
- *Information Sciences for Decision Making*
- *Information Technology Journal*
- *Intelligent Data Analysis*
- *Intelligent Decision Technologies*
- *Interdisciplinary Information Sciences*
- *Interdisciplinary Journal of Information, Knowledge, and Management*
- *International Journal of Advanced Cybernetics and Intelligent Systems*
- ***International Journal of Advanced Intelligence Paradigms***
- *International Journal of Applied Artificial Intelligence in Engineering*
- *International Journal of Applied Computing*
- ***International Journal of Applied Decision Sciences***
- ***International Journal of Applied Management Sciences***
- *International Journal of Applied Management & Technology*
- ***International Journal of Applied Mathematics and Computer Science***
- ***International Journal of Applied Science, Engineering and Technology***
- *International Journal of Applied Systemic Studies*
- *International Journal of Artificial Intelligence and Computational Research*
- ***International Journal of Artificial Intelligence and Soft Computing***
- *International Journal of Autonomic Computing*
- *International Journal of Behavioural Accounting and Finance*
- *International Journal of Bioinformatics and Soft Computing*
- *International Journal of Biomedical Soft Computing*
- *International Journal of Business and Systems Research*
- ***International Journal of Business Forecasting and Marketing Intelligence***
- *International Journal of Business Information Systems*
- *International Journal of Business Intelligence*
- ***International Journal of Business Intelligence and Data Mining***
- *International Journal of Business Performance Management*
- *International Journal of Computational Engineering Science*
- ***International Journal of Computational Intelligence***
- *International Journal of Computational Intelligence and Applications*
- *International Journal of Computational Intelligence and Health Care Informatics*
- *International Journal of Computational Intelligence and Organizations*

- *International Journal of Computational Intelligence and Telecommunications Systems*
- *International Journal of Computational Intelligence in Bioinformatics and Systems Biology*
- *International Journal of Computational Intelligence in Control*
- *International Journal of Computational Intelligence Research*
- ***International Journal of Computational Intelligence Research & Applications***
- ***International Journal of Computational Intelligence Studies***
- ***International Journal of Computational Intelligence Systems***
- ***International Journal of Computational Intelligence Theory and Practice***
- ***International Journal of Computational Intelligence: Theory and Practice***
- ***International Journal of Computational Science***
- ***International Journal of Computer and Information Science and Engineering***
- ***International Journal of Computer, Information, and Systems Science and Engineering***
- *International Journal of Computer & Information Science*
- *International Journal of Computers, Communications & Control*
- ***International Journal of Computer Science***
- *International Journal of Computer Science & Applications*
- ***International Journal of Computer Science and Engineering***
- *International Journal of Computer Science and Information technology*
- *International Journal of Computer Science and Management Systems*
- *International Journal of Computer Science in Sports*
- *International Journal of Computer Science, Systems Engineering and Information Technology*
- ***International Journal of Computer Systems Science and Engineering***
- *International Journal of Computing and Applications*
- *International Journal of Computing and Information Sciences*
- *International Journal of Computing Science and Mathematics*
- ***International Journal of Data Analysis Techniques and Strategies***
- ***International Journal of Decision Sciences, Risk and Management***
- *International Journal of Electrical, Computer, and Systems Engineering*
- *International Journal of Environmental Policy and Decision Making*
- *International Journal of Fuzzy Logic and Intelligent Systems*
- ***International Journal of Fuzzy Systems and Rough Systems***
- *International Journal of Granular Computing, Rough Sets and Intelligent Systems*
- *International Journal of Grid and Utility Computing*
- ***International Journal of Human and Social Sciences***
- *International Journal of Hybrid Computational Intelligence*
- *International Journal of Hybrid Intelligent Systems*
- *International Journal of Industrial and Systems Engineering*
- *International Journal of Information Retrieval*
- *International Journal of Information Science and Technology*
- *International Journal of Information Systems and Change Management*
- *International Journal of Information Systems and Management*
- *International Journal of Information Systems and Management Research*
- ***International Journal of Information Technology***

- *International Journal of Information Technology and Intelligent Computing*
- *International Journal of Information Technology and Knowledge Management*
- *International Journal of Information Technology and Management*
- *International Journal of Innovative Computing and Applications*
- *International Journal of Innovative Computing, Information & Control*
- ***International Journal of Intelligent Computing and Cybernetics***
- *International Journal of Intelligent Engineering Informatics*
- *International Journal of Intelligent Enterprise*
- *International Journal of Intelligent Information and Database Systems*
- *International Journal of Intelligent Information Processing*
- *International Journal of Intelligent Information Technologies*
- *International Journal of Intelligent Knowledge Systems and Information Processing*
- ***International Journal of Intelligent Systems in Accounting, Finance and Management***
- *International Journal of Intelligent Systems Science and Technology*
- *International Journal of Intelligent Systems Technologies and Applications*
- *International Journal of Internet and Enterprise Management*
- *International Journal of Knowledge-Based and Intelligent Engineering Systems*
- *International Journal of Knowledge Management Studies*
- *International Journal of Logic Based Intelligent Systems*
- ***International Journal of Management and Decision Making***
- *International Journal of Management and Network Economics*
- *International Journal of Management Research and Technology*
- ***International Journal of Management Science and Engineering Management***
- *International Journal of Manufacturing Science and Technology*
- *International Journal of Mathematics and Computer Science*
- *International Journal of Mathematics in Operational Research*
- *International Journal of Mathematics Science*
- *International Journal of Metaheuristics*
- *International Journal of Modelling and Simulations*
- ***International Journal of Modelling, Identification and Control***
- *International Journal of Neural Networks and Applications*
- ***International Journal of Operational Research***
- ***International Journal of Operational Research****
- *International Journal of Operations & Quantitative Management*
- *International Journal of Reasoning-based Intelligent Systems*
- *International Journal of Risk Assessment and Management*
- *International Journal of Scientific Computing*
- *International Journal of Simulation and Process Modelling*
- *International Journal of Simulation Systems, Science & Technology*
- *International Journal of Social and Humanistic Computing*
- ***International Journal of Social Sciences***
- *International Journal of Society Systems Science*
- *International Journal of Soft and Intelligent Computing and Mathematics*
- *International Journal of Soft Computing*
- *International Journal of Soft Computing**
- *International Journal of Soft Computing and Bioinformatics*

- *International Journal of Soft Computing Applications*
- *International Journal of Sport Management*
- *International Journal of Sport Management and Marketing*
- ***International Journal of Sports Science and Engineering***
- *International Journal of Statistics and Management Systems*
- *International Journal of Technology Intelligence and Planning*
- ***International Journal of Technology, Policy and Management***
- *International Journal of Theoretical and Applied Computer Sciences*
- *International Journal of Theoretical and Applied Intelligent Systems*
- ***International Journal on Advances in Fuzzy Systems***
- *International Review of Fuzzy Mathematics*
- *International Transactions in Operational Research*
- *Investigaciones Europeas de Dirección y Economía de la Empresa*
- *Iranian Journal of Operational Research*
- *IST Transactions of Applied Mathematics-Modeling and Simulation*
- *IST Transactions on Information Technology - Theory and Applications*
- *IST Transactions of Systems & Cybernetics - Theory and Applications*
- *IST Transactions of Transportation Systems - Theory and Applications*
- *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*
- *Journal of Advances in Information Fusion*
- *Journal of Applied Mathematics and Decision Sciences*
- *Journal of Applied Quantitative Methods*
- *Journal of Applied Sciences*
- *Journal of Artificial Intelligence*
- *Journal of Behavioral and Applied Management*
- *Journal of Computational Optimization in Economics and Finance*
- *Journal of Computer and System Sciences*
- *Journal of Computer Science*
- *Journal of Computer Science & Technology*
- *Journal of Computing and Information Technology*
- *Journal of Cybernetics and Systems*
- *Journal of Decision Systems*
- *Journal of Economic Behavior and Organization*
- *Journal of Fuzzy Mathematics*
- *Journal of Grey Systems Association*
- *Journal of Hybrid Computing Research*
- *Journal of Industrial Engineering International*
- *Journal of Information and Computing Science*
- *Journal of Information and Optimization Sciences*
- *Journal of Information and Organization Sciences*
- *Journal of Information Science*
- *Journal of Information Science and Technology*
- *Journal of Information Technology*
- *Journal of Intelligence Computing and Applications*
- *Journal of Intelligent Learning Systems and Applications*
- *Journal of Intelligent systems*
- *Journal of Intelligent Systems Research*

- *Journal of Interdisciplinary Mathematics*
- *Journal of Issues in Informing Science & Information Technology*
- *Journal of Japanese Society for Fuzzy Theory and Systems*
- *Journal of Modelling in Management*
- *Journal of Modern Mathematics and Statistics*
- ***Journal of Multi-Criteria Decision Analysis***
- *Journal of Neural Computing Systems*
- *Journal of Railway Operations Research*
- *Journal of Simulation*
- *Journal of Statistics & Management Systems*
- *Journal of System and Management Science*
- *Journal of Systems Science and Mathematical Science*
- *Journal of the Southern African Institute for Management Scientists*
- ***Journal of Theoretical and Applied Information Technology***
- ***Journal of Uncertain Systems***
- *Judgment and Decision Making*
- *Knowledge Management Research & Practice*
- *LMS Journal of Computation and Mathematics*
- *Malaysian Journal of Computer Science*
- *Malaysian Journal of Library & Information Science*
- *Management Decision*
- *Managerial and Decision Economics*
- ***Mathware and Soft Computing***
- *Mediterranean Journal of Artificial Intelligence*
- *METAMORPHOSIS: A Journal of Management Research*
- *Military Operations Research Journal*
- ***Modeling, Measurement and Control D***
- ***New Mathematics and Natural Computation***
- ***Notes on Intuitionistic Fuzzy Sets***
- ***Operational Research: An International Journal***
- *OPSEARCH*
- *ORiON*
- ***Rect@: Revista Electrónica de Comunicaciones y Trabajos de ASEPUMA***
- *Research Journal of Applied Sciences*
- *Review of Managerial Science*
- *Revista de Investigación Operacional*
- ***Revista de Métodos Cuantitativos para la Economía y la Gestión de Empresas***
- *Revista Europea de Dirección y Economía de la Empresa*
- *Revista ICHIO*
- *Risk and Decision Analysis*
- *Rocky Mountain Journal of Mathematics*
- *SCS International Journal of Information Technology*
- ***SORT: Statistics and Operations Research Transactions***
- *Studies in Informatics and Control*
- *Systems Engineering – Theory & Practice*
- *The International Arab Journal of Information Technology*
- ***The Journal of Financial Decision Making***

- *Transactions on Operational Research*
- *Vikalpa: The Journal for Decision Makers*
- ***World Journal of Modelling and Simulation***
- ***WSEAS Transactions on Business and Economics***
- *WSEAS Transactions on Computers*
- *WSEAS Transactions on Systems*
- *WSEAS Transactions on Systems and Control*
- *WSEAS Transactions on Circuits and Systems*
- *WSEAS Transactions on Information Science and Applications*
- ***Yugoslav Journal of Operational Research***
- *4OR: Quarterly Journal of the Belgian, French and Italian Operations Research Societies*

Además de estas revistas, también se tiene que considerar toda una amplia gama de publicaciones hechas en diferentes congresos internacionales. De entre todos estos se pueden destacar los organizados por las siguientes asociaciones científicas. Cabe destacar que se muestran únicamente los de mayor relevancia mundial destacando principalmente aquellos que tienen gran influenza en Europa y en España.

- ACIA: *Associació Catalana d'Intel.ligencia Artificial*
- AMSE: *Association for Modelling and Simulation in Enterprises*
- AEDEM: *Academia Europea de Dirección y Economía de la Empresa*
- ACEDE: *Asociación Científica de Economía y Dirección de Empresas*
- AGOP: *European Working Group on Aggregation Operators*
- ASEPELT: *Asociación Española de Economía Aplicada*
- ASEPUMA: *Asociación Española de Profesores Universitarios de Matemáticas para la Economía y la Empresa*
- BUFSA: *Balkan Union for Fuzzy Systems & AI*
- DAS: *Decision Analysis Society*
- DSI: *Decision Sciences Institute*
- ECSQARU: *European Conference on Symbolic and Quantitative Approaches for Reasoning under Uncertainty*
- ESTYLF: *Congreso Español sobre Tecnologías y Lógica Fuzzy*
- EURO: *The Association of European Operational Research Societies*
- EUROFUSE: *European Working Group on Fuzzy Sets*
- EUSFLAT: *European Society for Fuzzy Logic and Technology*
- EWG-DSS: *Euro Working Group on Decision Support Systems*
- EWG-MCDA: *Euro Working Group on Multicriteria Decision Aid*
- FLINS: *Fuzzy Logic and Intelligent Technologies in Nuclear Science*
- FSKD: *International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery*
- FSSCEF: *International Conference on Fuzzy Sets and Soft Computing, in Economics and Finance*
- FSTA: *Fuzzy Set Theory and Applications*
- FUR: *Foundations and Applications of Risk, Utility and Decision Theory*
- GDN: *Group Decision and Negotiation Meeting*
- GOR: *The German Society for Operations Research*
- HIS: *International Conference on Hybrid Intelligent Systems*

- IAENG: *International Association of Engineers*
- IASTED: *International Association of Science and Technology for Development*
- ICAISC: *International Conference on Artificial Intelligence and Soft Computing*
- ICEIS: *International Conference on Enterprise Information Systems*
- IEEE-CIS: *IEEE Computational Intelligence Society*
- IEEE-SMC: *IEEE Systems, Man and Cybernetics Society*
- IFORS: *International Federation of Operational Research Societies*
- IFSA: *International Fuzzy Systems Association*
- INFORMS: *The Institute for Operations Research and the Management Sciences*
- IPMU: *Information Processing and Management of Uncertainty*
- ISIPTA: *International Symposium on Imprecise Probabilities and their Applications*
- LFA: *French Days on Fuzzy Logic and Applications*
- MCDM: *Int. Society on Multiple Criteria Decision Making*
- MDAI: *Modelling Decisions for Artificial Intelligence*
- NAFIPS: *North American Fuzzy Information Processing Society*
- ORS: *The Operational Research Society of UK*
- RASC: *Recent Advances in Soft Computing*
- RUD: *Risk, Utility and Decision*
- SEIO: *The Spanish Society of Statistics & Operations Research*
- SIGEF: *Sociedad Internacional de Gestión y Economía Fuzzy*
- SOFT: *Japan Society for Fuzzy Theory and Intelligent Informatics*
- SPUDM. *Subjective Probability, Utility and Decision making*
- WASET: *World Academy of Science, Engineering and Technology*
- WILF: *International Workshop on Fuzzy Logic and Applications*
- WSEAS: *World Society of Engineering and Applied Sciences*

3. Introducción a la teoría de la decisión en la incertidumbre

3.1. Nociones básicas sobre la teoría de la decisión

3.1.1. Introducción

La toma de decisiones hace referencia al conjunto de operaciones tanto mentales como físicas que comprenden el momento en el que se detecta una situación que hace necesaria la toma de una decisión hasta que ésta es adoptada y ejecutada (Gracia-Ramos et al., 2007).

El proceso decisional, visto desde un punto de vista empresarial, se compone de cuatro etapas:

(1) Diagnóstico: consiste en detectar cuál es el problema o conjunto de problemas que afectan a la empresa. Esto da lugar a la necesidad de tomar decisiones.

(2) Diseño: modelizar las diferentes alternativas gracias a las cuales, a priori, podemos solucionar el problema diagnosticado. Estas alternativas deben cumplir como características:

   a. Exclusividad: la elección de una estrategia supone el rechazo de las restantes.
   b. Exhaustividad: se deben incluir todas las posibles formas de actuación.
   c. Viabilidad: deben ser viables desde un punto de vista técnico, financiero y comercial.

(3) Elección: fase en la cual seleccionamos la mejor estrategia del conjunto y para ello se analizarán como variables:

   a. La estrategia que forma parte del conjunto.
   b. El comportamiento del entorno: dicha variable ayudará a determinar el criterio de selección a utilizar en función de si nos movemos en certeza, riesgo o incertidumbre.

(4) Revisión: se lleva a cabo un análisis sobre el grado en el que la estrategia seleccionada y ejecutada ha conseguido resolver el problema.

Para analizar los procesos de decisión disponibles, se parte de la base de establecer lo que se conoce como la matriz de decisión que nos permitirá delimitar los diferentes estados de la naturaleza con las diferentes estrategias o acciones que pueda tomar el decisor. Obsérvese que la información procedente de esta matriz puede ser precisa, imprecisa, borrosa, lingüística, etc. Más detalles sobre como representar la información en situaciones de incertidumbre en los resultados, serán estudiados en el apartado 3.2.

La representación gráfica de esta matriz sería la siguiente:

Matriz ($m \times n$)	N_1	N_2	… N_j …	N_n
E_1	a_{11}	a_{12}	a_{1j}	a_{1n}
E_2	a_{21}	a_{22}	a_{2j}	a_{2n}
…	…	…	…	…
E_i	a_{i1}	a_{i2}	a_{ij}	a_{in}
…	…	…	…	…
E_m	a_{m1}	a_{m2}	a_{mj}	a_{mn}

Siendo:
- N_1, N_2,….., N_n: Los diferentes estados de la naturaleza que se pueden presentar.
- E_1, E_2,…..., E_n: Las diferentes acciones o estrategias que puede adoptar el decisor.
- a_{11}, a_{12},…, a_{mn}: Los diferentes resultados que surgen de combinar una estrategia con los diferentes estados de la naturaleza. Estos resultados pueden ser exactos o imprecisos según la información disponible para el problema.

Obsérvese que esta matriz se ha establecido desde la perspectiva de la ocurrencia de diferentes estados de la naturaleza. Pero se tiene que destacar la posibilidad de diseñarla desde diferentes perspectivas como podría ser a través de la fijación de criterios (decisiones multicriterio), atributos (decisiones multiatributo), expertos (decisiones multiexperto), etc.

Para estudiar los diferentes criterios de decisión clásicos disponibles, en primer lugar, se tiene que distinguir entre si nos encontramos en una situación de certidumbre, riesgo o incertidumbre. Véase, por ejemplo, López-Cachero (1989).

- En situaciones de certidumbre, la decisión es inmediata ya que se conoce cuál es la mejor decisión posible.

- En situaciones de riesgo, no se conoce cuál es la mejor decisión posible, pero sí se puede asociar un grado de probabilidad a las posibles situaciones futuras. Por tanto, la mejor decisión consiste en calcular el valor esperado para las diferentes alternativas y escoger aquella que obtenga un mayor valor esperado. Al utilizar probabilidades en el problema, se puede distinguir entre:

  - Probabilidad objetiva: Es aquella probabilidad que se obtiene a través de análisis empíricos o datos históricos que permiten creer en unos determinados grados de probabilidad. Estos datos proceden de observar la realidad, por tanto, no están condicionados por las opiniones de los decisores.
  - Probabilidad subjetiva: Es aquella probabilidad que se establece a partir de la opinión de unos expertos o decisores que establecen su credibilidad respecto a la probabilidad de ocurrencia de un resultado o situación.
  - Probabilidades de inmediación: Este tipo de probabilidad es mucho más reciente (Engemann et al., 1996; 2004; Yager, 1999b; Yager et al., 1995) y resulta de gran relevancia para la tesis ya que algunas de las principales aportaciones de la tesis siguen esta línea de investigación. En este caso, se trata de un tipo de probabilidad, ya sea objetiva o subjetiva, a la cual

se le introduce el grado de optimismo (o carácter actitudinal) del decisor. De esta forma a pesar de utilizar probabilidades, también se considera el grado de optimismo del decisor lo cual representa un análisis mucho más completo del problema decisional.
    - Otras probabilidades: Existe una gran variedad de métodos probabilísticos. Aparte de los comentados anteriormente, podemos destacar el uso de diferentes formas de representación de las probabilidades en contextos inciertos como son el uso de intervalos de confianza, números borrosos, variables lingüísticas, etc. Para más información, véase por ejemplo, (Engemann y Yager, 2001; Halliwell and Shen, 2009; Viscusi y Evans, 2006; Yager, 1999c; Yager y Kreinovich, 1999; Zadeh, 1984).

- En situaciones de incertidumbre (o también conocido como situaciones de ignorancia), se conoce cuáles son los posibles resultados futuros pero se desconoce el grado de probabilidad asociado a ellos. Es decir, se conoce todos los posibles estados de la naturaleza pero se desconoce cual de ellos se va a presentar. En estos casos, se tiene que recurrir a una serie de criterios subjetivos para poder tomar una decisión. Como se ha comentado anteriormente, cabe destacar que la información disponible puede ser precisa, imprecisa, borrosa, lingüística, etc.

Entre los diferentes métodos existentes para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, podemos destacar como métodos clásicos los siguientes:

(1) El criterio optimista: Parte del supuesto de que se nos presentará el estado de la naturaleza más favorable. Por tanto, nuestra elección consistirá en escoger para cada alternativa el resultado más favorable que se puede presentar, y de entre los resultados obtenidos para cada alternativa, escoger el resultado más favorable de todos. Este método se conoce comúnmente como el método maximax, es decir, de entre los máximos beneficios, escoger el mayor de todos. Su formulación es la siguiente.

$$\text{Decisión} = \text{Max}\{E_i\} = \text{Max}\ [\text{Max}\{a_j\}]$$

(2) El criterio pesimista o de Wald: Propuesto por Wald (1950), se sugiere que el decisor debe elegir aquella alternativa que le proporcione el mayor nivel de seguridad posible. Es decir, se parte del supuesto de que se nos presentará el estado de la naturaleza más desfavorable y por tanto, nuestra decisión consistirá en escoger el resultado más favorable de entre los más desfavorables escogidos para cada alternativa. Este método se conoce comúnmente como el método maximin, es decir, de entre los mínimos beneficios, escoger el mayor de todos. Su formulación es la siguiente.

$$\text{Decisión} = \text{Max}\{E_i\} = \text{Max}\ [\text{Min}\{a_j\}]$$

(3) El criterio de Hurwicz: Propuesto por Hurwicz (1951), se puede considerar como una combinación entre el criterio optimista y el criterio pesimista. Es decir, consiste en ponderar con un coeficiente de optimismo y otro de pesimismo al mejor y peor

caso respectivamente. Después, se suman los 2 valores y se escoge aquella alternativa que proporcione un mayor resultado. Su formulación es la siguiente.

$$\text{Decisión} = \text{Max}\ \{E_i\} = \text{Max}[\alpha\ \text{Max}\{a_j\} + (1-\alpha)\ \text{Min}\{a_j\}]$$

donde: $\alpha + (1 - \alpha) = 1$.

- Se demuestra que si $\alpha = 1$; Decisión = $\text{Max}[1 \times \text{Max}\{a_j\} + 0 \times \text{Min}\{a_j\}] = \text{Max}[\text{Max}\{a_j\}]$ = Criterio optimista.
- Por otro lado, si $\alpha = 0$; Decisión = $\text{Max}[0 \times \text{Min}\{a_j\} + 1 \times \text{Min}\{a_j\}] = \text{Max}[\text{Min}\{a_j\}]$ = Criterio pesimista.

(4) El criterio de Laplace: Propuesto por Laplace (1825), está basado en un principio de razón insuficiente que implica asociar un mismo grado de probabilidad a los distintos estados de la naturaleza, siempre y cuando no tengamos indicios de lo contrario. Su formulación es la siguiente.

$$\text{Decisión} = \text{Max}\ \{E_j\} = \text{Max}[(1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j\ ]$$

(5) El criterio de Savage: Propuesto por Savage (1951), se considera que para cada estado de la naturaleza existe una estrategia óptima. A partir de aquí, al resto de estrategias se les asignará un valor de coste de oportunidad en relación al coste de oportunidad óptimo. Una vez establecidos todos los costes de oportunidad, escogeremos el mayor coste de oportunidad para cada alternativa y nuestra decisión consistirá en escoger el menor coste de oportunidad de entre los mayores escogidos para cada alternativa. Es decir, una vez hemos establecido la matriz de costes de oportunidad, consiste en hacer un criterio pesimista de costes que comúnmente se conoce como el método minimax. Su formulación es la siguiente.

$$\text{Decisión} = \text{Min}\ \{E_j\} = \text{Min}[\text{Max}\{S_j\}]$$

donde: $S_j = \text{Max}\{a_j\} - a_j$.

Para finalizar con estos criterios de decisión clásicos, destacar que cada criterio ha consistido en adoptar una postura determinada por parte del decisor, a través de la cual, se tomará la decisión. En los próximos capítulos se estudiará una técnica que engloba a estos criterios y se denomina *ordered weighted averaging* (*OWA*) *operator* (Yager, 1988).

Además, también podemos mencionar otros métodos de decisión frecuentemente usados como son el *Weighted Sum Model (WSM)* (Fishburn, 1967), el *Weighted Product Model (WPM)* (Bridgman, 1922; Miller y Starr, 1969), el *Analytic Hierarchy Process (AHP)* (Saaty, 1978), el TOPSIS (Hwang y Yoon, 1981) y el *ELECTRE* (Roy, 1968). Una buena introducción sobre estos métodos puede encontrarse en (Romero, 1993; Triantaphyllou, 2000; Figueira et al., 2005).

Por último, también mencionar otros contextos de decisión frecuentemente utilizados como son las decisiones secuenciales, las decisiones de grupo y el concepto de utilidad.

(1) Las decisiones secuenciales son aquellas que pasan por varios procesos simples de decisión. En estos casos, la matriz de decisión resulta insuficiente para representar el problema y se tiene que recurrir a otras representaciones como son los árboles de decisión (López-Cachero, 1989).

Un árbol de decisión es un grafo conexo y sin ciclos que explica la secuencia de las decisiones a tomar y los diversos acontecimientos que pueden suceder (Gracia-Ramos et al., 2007). Los elementos fundamentales de los árboles de decisión son:

- Puntos de decisión que representan las distintas opciones a adoptar por el decisor ante una situación dada.
- Acontecimientos o sucesos inciertos que corresponden a los distintos fenómenos aleatorios que pueden suceder cuando se ha adoptado una decisión.
- Resultados esperados.

En cuanto a la fase de elaboración de un árbol de decisión, se siguen las cuatro etapas sucesivas siguientes:

1. Determinar el conjunto de acciones y acontecimientos posibles así como la secuencia de las decisiones a tomar.
2. Representar mediante un árbol las secuencias alternativas de acción o estrategias de acontecimientos.
3. A partir del grafo, determinar los puntos finales. Para cada punto final se calculará el resultado condicional en función de los datos económicos disponibles.
4. A cada acontecimiento, se le asociará una probabilidad.

Finalmente, se tienen los elementos necesarios para tomar las decisiones simplificando las alternativas en cada punto y eligiendo mediante el método de avance hacia atrás (roll-back).

También se tiene que destacar que las decisiones secuenciales pueden ser utilizadas en contextos de certeza, de riesgo o de incertidumbre. Por tanto, aunque en la actualidad la mayor parte de estos estudios se concentran en situaciones de riesgo, se tiene que mencionar la posibilidad de utilizarlos en situaciones de incertidumbre total en donde se podrían utilizar los métodos clásicos de decisión y otros métodos que se comentarán en los próximos capítulos 4 – 10. También destacar la posibilidad de representar la información de un árbol mediante intervalos de confianza, números borrosos, variables lingüísticas, técnicas de decisión de grupo, etc.

(2) Las decisiones de grupo hacen referencia a los procesos de decisión en los cuales intervienen varias personas o expertos. Son de gran utilidad para dar una mayor credibilidad a la información ya que en términos generales, se supone que la opinión de un grupo de personas (expertos) suele ser más fiable que la opinión de una sola persona. Para más información sobre estos métodos, véase por ejemplo, (Alonso et al., 2006; 2008a; 2008b; Chiclana et al., 2001b; 2007; 2008; Herrera et al., 1996b; Herrera y Martínez, 2001b; Herrera-Viedma et al., 2007a; 2007b; Kacprzyk y Fedrizzi, 1989; Kacprzyk et al., 1996; Xu, 2004b; Yager y Kacprzyk, 1997) y el apartado 3.2.6. de expertones.

Obsérvese que una variante de la teoría de decisión de grupo es aquella en la que intervienen varios decisores con intereses contrapuestos. Esta rama de la teoría de la decisión de grupo se conoce como la Teoría de Juegos (López-Cachero, 1989; Luce y Raiffa, 1989).

Existen otras variantes a la teoría de decisión de grupo como pueden ser las decisiones colectivas en las cuales se analizan la formación de mayorías en el proceso de decisión, etc. Para más información, véase por ejemplo, (Edwards et al., 2007; Herrera-Viedma, 2005; Kacprzyk y Fedrizzi, 1989; Kacprzyk et al., 1996; Samson, 1988; Turban y Aronson, 1998).

Obsérvese que las decisiones de grupo son aplicables a prácticamente todos los métodos considerados con decisiones individuales ya que puede verse como un caso plural de la decisión individual que puede ser tratado de forma individualizada para cada experto o decisor. Por tanto, se pueden utilizar en las decisiones de grupo, los métodos clásicos de decisión y otros métodos de decisión individual como son el *AHP*, el *TOPSIS*, etc.

(3) Finalmente, el concepto de utilidad es un concepto frecuentemente utilizado en los procesos de decisión que hace referencia al valor que tiene cada situación decisional. Es decir, cuando el decisor evalúa las consecuencias de sus acciones en términos cualitativos, ya sea porque lo importante para él sea manifestar simplemente un comportamiento coherente con su estructure de preferencias, porque la cuantificación de resultados condicionales no resulte factible o no exprese adecuadamente las imprescindibles garantías de rigor en el cálculo.
Por ejemplo, si tenemos 2 alternativas, con dos posibles situaciones con probabilidad de 0.5. La primera alternativa puede dar un beneficio de 1.000.000 de euros pero en el otro 50% puede dar 0. En cambio, la segunda alternativa garantiza un beneficio de 200.000 euros.

Utilizando los métodos clásicos de probabilidad, se obtendría:

$0.5 \times 1000000 + 0.5 \times 0 = 500.000$ euros
$0.5 \times 200000 + 0.5 \times 200000 = 200.000$ euros

Como se puede observar, la primera alternativa proporciona un mejor resultado esperado, pero es obvio que mucha gente se decantaría por la segunda alternativa ya que prefieren asegurar un resultado aceptablemente bueno. Obsérvese que este hecho interacciona con el concepto de probabilidades de inmediación (*immediate probabilities*). Por tanto, podemos anticipar que en investigaciones postdoctorales, ya sean hechas por el doctorando o por otros investigadores, es probable que surjan nuevas ideas en este sentido.

Obsérvese que el concepto de utilidad también puede ser representado de diferentes formas. Por ejemplo, mediante la utilización de intervalos de confianza, de números borrosos, de variables lingüísticas, de técnicas de decisión de grupo, etc.

También se tiene que destacar que no sólo afecta a decisiones de riesgo con probabilidades (objetivas o subjetivas) sino que también afecta a situaciones de incertidumbre total, ya sea en un contexto de decisión individual, secuencial o de grupo.

3.1.2. Ejemplo ilustrativo: Selección de inversiones

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que el ámbito de aplicación es muy amplio. Desde un punto de vista empresarial, se puede utilizar estos modelos en todo problema que requiera de un proceso de toma de decisiones como por ejemplo, la selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, etc. Para más información, véase por ejemplo (Romero, 1993). En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de inversiones ya que en función del significado que se le de a la inversión, esta podría generalizar a una gran variedad de situaciones.

Ejemplo: Supongamos que a una empresa inversora se le plantean cinco posibles inversiones y se desea seleccionar aquella que mejor se adapta a sus necesidades.

(1) A_1: invertir en el sector téxtil.
(2) A_2: invertir en el sector automovilístico.
(3) A_3: invertir en el sector agrario.
(4) A_4: invertir en el sector informático.
(5) A_5: invertir en el sector aeroespacial.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada inversión pueda reportar a la empresa. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza S_k que podrían ocurrir en el futuro. Los resultados esperados para cada inversión son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados (suponemos en millones de euros).

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	30	50	70	20
A_2	40	80	–10	70	100
A_3	10	0	20	40	10
A_4	30	40	40	50	20
A_5	60	–30	70	70	50

A continuación se va a desarrollar el proceso de agregación. Para este ejemplo, se va a utilizar el operador máximo o criterio optimista, el operador mínimo o criterio pesimista, la media aritmética o criterio de Laplace, el criterio de Hurwicz y el de Savage. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Optimista	*Pesimista*	*Laplace*	*Hurwicz*	*Savage*
A_1	80	30	58	50	40
A_2	90	40	61	60	30
A_3	120	10	51	54	35
A_4	80	30	54	50	40
A_5	90	30	60	54	30

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del criterio utilizado. Si utilizamos el criterio optimista, seleccionaremos la inversión A_3. Si se utiliza el criterio pesimista, el de Laplace o el de Hurwicz, la decisión será invertir en el sector automovilístico. Por último, si se utiliza el criterio de Savage, tanto el sector automovilístico como aeroespacial, pueden ser decisiones óptimas en este problema. Cabe destacar que en el criterio de Savage se estudian costes de oportunidad, por tanto, la decisión óptima es aquella que tiene un menor coste de oportunidad.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las inversiones. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una inversión o se desea considerar posibles sustituciones ante casos excepcionales. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las inversiones

	Ordenación		*Ordenación*
Optimista	$A_3 \succ A_2=A_5 \succ A_1=A_4$	*Hurwicz*	$A_2 \succ A_3=A_5 \succ A_1=A_4$
Pesimista	$A_2 \succ A_1=A_4=A_5 \succ A_3$	*Savage*	$A_2=A_5 \succ A_3 \succ A_1=A_4$
Laplace	$A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$		

Como se puede observar según el criterio utilizado, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión de la empresa inversora también.

3.2. Instrumentos matemáticos para el tratamiento de la incertidumbre

3.2.1. La valuación

3.2.1.1. Concepto

Es un dato numérico en una escala adecuada de valores que afectamos a un fenómeno percibido por nuestros sentidos o por nuestra experiencia. Es la expresión subjetiva de un nivel de verdad, el cual toma sus valores del intervalo de confianza [0, 1].

Se tiene que distinguir del concepto de:

- Evaluación: Es la asociación de un valor numérico, que puede ser positivo, negativo o nulo, a un objeto (concreto o abstracto) realizada por un experto.
- Probabilidad: Es un dato objetivo, y por tanto teórico, aceptado por todo el mundo. Obsérvese que la probabilidad se halla ligada a la noción de azar mientras que la valuación a la noción de incertidumbre y subjetividad.

Las valuaciones pueden ser asignadas en toda escala numérica de valores, pero las más usuales son:

- En el campo binario: 0 o 1.
- En el campo multivalente o borroso: Número comprendido entre 0 y 1, incluidos estos.

De entre todas las formas de expresar la subjetividad, las más usuales, por su facilidad comunicativa son:

- Numero preciso "a", siendo $a \in [0, 1]$.
- Intervalo de confianza "$[a_1, a_2]$", siendo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq 1$. Obsérvese que a_1 hace referencia al extremo inferior y a_2 al extremo superior.
- Tripleta de confianza "$[a_1, a_2, a_3]$", siendo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq 1$. Obsérvese que en este caso a_2 hace referencia al máximo de presunción, es decir, el valor que se presume como de mayor posibilidad de ocurrencia.
- Cuádruplo de confianza "$[a_1, [a_2, a_3], a_4]$", siendo $0 \leq a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq 1$. Obsérvese que a_2 y a_3 hacen referencia al intervalo de máxima presunción, es decir, el intervalo que se presume de mayor posibilidad de ocurrencia.

Cuando una valuación expresa un valor de verdad entre 0 (falso) y 1 (verdadero), se pueden elegir un número infinito de correspondencias semánticas de la verdad a la falsedad. Veamos algunos ejemplos:

- Escala binaria: {0 = falso, 1 verdadero}.
- Escala ternaria: {0 = falso, 0.5 = ni falso ni verdadero, 1 = verdadero}.
- Escala cuaternaria: {0 = falso, 1/3 = más falso que verdadero, 2/3 = más verdadero que falso, 1 = verdadero}.
- Escala pentaria: {0 = falso, 1/4 = más falso que verdadero, 1/2 = ni verdadero ni falso, 3/4 = más verdadero que falso, 1 = verdadero}.

- Escala endecadaria: {0 = falso, 1/10 = prácticamente falso, 2/10 = casi falso, 3/10 = bastante falso, 4/10 = más falso que verdadero, 5/10 = ni verdadero ni falso, 6/10 = más verdadero que falso, 7/10 = bastante verdadero, 8/10 = casi verdadero, 9/10 = prácticamente verdadero, 1 = verdadero}.
- Etc.

3.2.1.2. Aritmética de las valuaciones

La adición, sustracción, producto y división ordinarias no forman parte de la aritmética de las valuaciones en [0, 1], al no ser operaciones internas, ya que el resultado puede quedar fuera del intervalo [0, 1].

Las principales operaciones lógicas con las valuaciones son:

- Mínimo ($\wedge$): que corresponde a "y" (el uno y el otro).
- Máximo ($\vee$): que corresponde a "y/o" (el uno, el otro o los dos).
- Complemento a la unidad (¯).

La aplicación de las operaciones para cada una de las formas en que se pueden expresar las valuaciones será:

Dados:
- Números precisos: $a, b \in [0, 1]$.
- Intervalos de confianza: $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, con $a_1, a_2, b_1, b_2, \in [0, 1]$.
- Tripletas: $[a_1, a_2, a_3]$, $[b_1, b_2, b_3]$ con $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3 \in [0, 1]$.
- Cuádruplos: $[a_1, [a_2, a_3], a_4]$, $[b_1, [b_2, b_3], b_4]$ con $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in [0, 1]$.

Mínimo:
- Números precisos: $a \ (\wedge) \ b = \min\{a, b\}$.
- Intervalos de confianza: $[a_1, a_2] \ (\wedge) \ [b_1, b_2] = [\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}]$.
- Tripletas: $[a_1, a_2, a_3] \ (\wedge) \ [b_1, b_2, b_3] = [\min\{a_1, b_1\}, \min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}]$.
- Cuádruplos: $[a_1, [a_2, a_3], a_4] \ (\wedge) \ [b_1, [b_2, b_3], b_4] = [\min\{a_1, b_1\}, [\min\{a_2, b_2\}, \min\{a_3, b_3\}], \min\{a_4, b_4\}]$.

Máximo:
- Números precisos: $a \ (\vee) \ b = \max\{a, b\}$.
- Intervalos de confianza: $[a_1, a_2] \ (\vee) \ [b_1, b_2] = [\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}]$.
- Tripletas: $[a_1, a_2, a_3] \ (\vee) \ [b_1, b_2, b_3] = [\max\{a_1, b_1\}, \max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}]$.
- Cuádruplos: $[a_1, [a_2, a_3], a_4] \ (\vee) \ [b_1, [b_2, b_3], b_4] = [\max\{a_1, b_1\}, [\max\{a_2, b_2\}, \max\{a_3, b_3\}], \max\{a_4, b_4\}]$.

Complemento a la unidad:
- Números precisos: $\bar{a} = 1 - a$.
- Intervalos de confianza: $\overline{[a_1, a_2]} = [1 - a_2, 1 - a_1]$.
- Tripletas: $\overline{[a_1, a_2, a_3]} = [1 - a_3, 1 - a_2, 1 - a_1]$.

- Cuádruplos: $\overline{[a_1,[a_2,a_3],a_4]} = [1-a_4, 1-a_3, 1-a_2, 1-a_1]$.

En el supuesto de operar con valuaciones expresadas en formas diferentes (intervalos de confianza, tripletas, etc.) sólo cabe tener en cuenta que:

- $a = [a, a] = [a, a, a] = [a, [a, a], a]$.
- $[a_1, a_2] = [a_1, [a_1, a_2], a_2]$.
- $[a_1, a_2, a_3] = [a_1, [a_2, a_2], a_3]$.

También destacar que existe una infinidad de operadores aparte de los tres comentados (máximo, mínimo y complementación) para expresar los criterios más complejos. Se trata de las t-normas que se descomponen en pares duales llamados T-normas (de los que forma parte $\wedge$) y T-conormas (de los que forma parte $\vee$).

3.2.1.3. Propiedades

Tanto el operador máximo como el mínimo cumplen las siguientes propiedades:

- Conmutatividad
  $a\ (\wedge)\ b = b\ (\wedge)\ a$
  $a\ (\vee)\ b = b\ (\vee)\ a$
- Asociatividad
  $(a\ (\wedge)\ b)\ (\wedge)\ \mathrm{c} = a\ (\wedge)\ (b\ (\wedge)\ \mathrm{c}) = a\ (\wedge)\ b\ (\wedge)\ \mathrm{c}$
  $(a\ (\vee)\ b)\ (\vee)\ \mathrm{c} = a\ (\vee)\ (b\ (\vee)\ \mathrm{c}) = a\ (\vee)\ b\ (\vee)\ \mathrm{c}$
- Idempotencia
  $a\ (\wedge)\ a = a$
  $a\ (\vee)\ a = a$
- Distributividad: Es una propiedad que relaciona los 2 operadores.
  $a\ (\wedge)\ (b\ (\vee)\ \mathrm{c}) = (a\ (\wedge)\ b)\ (\vee)\ (a\ (\wedge)\ c)$
  $a\ (\vee)\ (b\ (\wedge)\ \mathrm{c}) = (a\ (\vee)\ b)\ (\wedge)\ (a\ (\vee)\ c)$

En cuanto al operador complementario, se puede destacar las siguientes propiedades:

- Involución
  $\overline{(\overline{a})} = a$
  Ejemplo: $\overline{(\overline{0.4})} = 0.4$
- Teoremas de De Morgan
  $\overline{a(\wedge)b} = \overline{a}(\vee)\overline{b} = (1-a)(\vee)(1-b)$
  $\overline{a(\vee)b} = \overline{a}(\wedge)\overline{b} = (1-a)(\wedge)(1-b)$

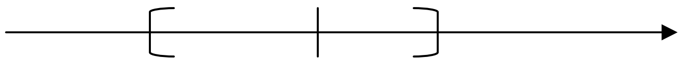
3.2.2. Intervalos de confianza

3.2.2.1. Concepto

Es un segmento $A = [a_1, a_2]$, en donde no se conoce de manera precisa el valor de una magnitud y la única información que se dispone es que es mayor o igual a a_1, y menor o igual a a_2. Obsérvese que fueron introducidos por (Moore, 1966).

Normalmente se consideran intervalos cerrados aunque también es posible considerar intervalos abiertos a la izquierda y/o a la derecha.

Gráficamente: Dominio de confianza en R.



Obsérvese que está gráfica se podría extender a R^2, R^3, …., R^n.

Se distinguen diferentes tipos de intervalos de confianza como por ejemplo:

- Intervalo de confianza "$[a_1, a_2]$", siendo a_1 el extremo inferior y a_2 el extremo superior.
- Tripleta de confianza "$[a_1, a_2, a_3]$", siendo a_2 el máximo de presunción, es decir, el valor que se presume como de mayor posibilidad de ocurrencia.
- Cuádruplo de confianza "$[a_1, [a_2, a_3], a_4]$", siendo a_2 y a_3 el intervalo de máxima presunción, es decir, el intervalo que se presume de mayor posibilidad de ocurrencia.
- Etc.

3.2.2.2. Operaciones con intervalos de confianza

Sean $A = [a_1, a_2] \subset R$, $B = [b_1, b_2] \subset R$ y $C = [c_1, c_2] \subset R$, intervalos de confianza. Se definen las siguientes operaciones:

A) Suma

$A\ (+)\ B = [a_1, a_2]\ (+)\ [b_1, b_2] = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$

Propiedades
- Conmutativa: $A\ (+)\ B = B\ (+)\ A$
- Asociativa: $[A\ (+)\ B]\ (+)\ C = A\ (+)\ [B\ (+)\ C]$
- Elemento neutro ($0 = [0, 0]$): $0\ (+)\ A = A\ (+)\ 0$

B) Resta

$A\ (–)\ B = [a_1, a_2]\ (–)\ [b_1, b_2] = [a_1 – b_2, a_2 – b_1]$

Cabe destacar que en la resta no se cumplen las propiedades previamente comentadas en la suma.

C) Producto (multiplicación)

$A\ (\cdot)\ B = [a_1, a_2]\ (\cdot)\ [b_1, b_2] = [\min(a_1 (\cdot) b_1, a_1 (\cdot) b_2, a_2 (\cdot) b_1, a_2 (\cdot) b_2), \max(a_1 (\cdot) b_1, a_1 (\cdot) b_2, a_2 (\cdot) b_1, a_2 (\cdot) b_2)]$.

Obsérvese que para el caso particular de R^+ tenemos: $A\ (\cdot)\ B = [a_1 (\cdot) b_1, a_2 (\cdot) b_2]$

Propiedades
- Conmutativa: $A\ (\cdot)\ B = B\ (\cdot)\ A$
- Asociativa: $[A\ (\cdot)\ B]\ (\cdot)\ C = A\ (\cdot)\ [B\ (\cdot)\ C]$
- Elemento neutro: $1\ (\cdot)\ A = A\ (\cdot)\ 1 = A$

D) División

$A\ (\div)\ B = [a_1, a_2]\ (\div)\ [b_1, b_2] = [\min(a_1 / b_1, a_1 / b_2, a_2 / b_1, a_2 / b_2), \max(a_1 / b_1, a_1 / b_2, a_2 / b_1, a_2 / b_2)]$.

Obsérvese que para el caso particular de R^+ tenemos: $A\ (\div)\ B = [a_1 / b_2, a_2 / b_1]$

E) Multiplicación por un número real

Dado $k \in R$:
$k\ (\cdot)\ A = [\min(ka_1, ka_2), \max(ka_1, ka_2)]$

o bien:
- Si $k \geq 0$, $k\ (\cdot)\ A = k\ [a_1, a_2] = [ka_1, ka_2]$.
- Si k < 0, $k\ (\cdot)\ A = k\ [a_1, a_2] = [ka_2, ka_1]$.

F) División por un número real

Dado $k \in R - \{0\}$:
$A\ (\div)\ k = [a_1, a_2]\ (\div)$ k $= [\min(a_1 / k, a_2 / k), \max(a_1 / k, a_2 / k)]$

O bien:
- Si $k \geq 0$, $A\ (\div)\ k = [a_1 / k, a_2 / k]$
- Si $k < 0$, $A\ (\div)\ k = [a_2 / k, a_1 / k]$

3.2.2.3. Relación de orden

Los intervalos no forman un orden total, sino un orden parcial, ya que existen intervalos que no son comparables directamente.

Dados: $A = [a_1, a_2] \subset R$ y $B = [b_1, b_2] \subset R$.

$A \geq B \Leftrightarrow a_1 \geq b_1$ y $a_2 \geq b_2$.

Así, por ejemplo, [–1, 7] y [3, 5] no son comparables de manera inmediata, ya que $-1 < 3$ y $7 > 5$.

Para pasar de un orden parcial a un orden total, es necesario establecer de manera arbitraria un criterio, y sino es suficiente, recurriremos a un segundo criterio.

1er criterio: La media de los extremos del intervalo

$\lambda\ ([a_1, a_2]) = (a_1 + a_2) / 2$

entonces: $A > B \Leftrightarrow (a_1 + a_2) / 2 > (b_1 + b_2) / 2$.

Ejemplo: $(-1 + 7) / 2 = 3$; $(3 + 5) / 2 = 4$. Por tanto, en este caso, podemos decir que el intervalo [3, 5] es mayor al intervalo [–1, 7].

2º criterio: En el caso de que $a_1 + a_2 = b_1 + b_2$, este criterio no decide, por lo que es preciso adoptar otro. Se proponen 3 criterios a escoger según la naturaleza del problema:

1) $A > B \Leftrightarrow a_2 > b_2$.
2) $A > B \Leftrightarrow a_1 > b_1$.
3) $A > B \Leftrightarrow a_2 - a_1 < b_2 - b_1$.

Ejemplo: Si $A = [2, 4]$ y $B = [0, 1]$, A y B son comparables ya que $2 > 0$ y $4 > 1 \Rightarrow A > B$.

Si $A = [-2, 10]$ y $B = [1, 7]$:

$\lambda\ (A) = (-2 + 10) / 2 = 4$.
$\lambda\ (B) = (1 + 7) / 2 = 4$.
$\lambda\ (A) = \lambda\ (B)$.

Como el 1er criterio no decide, adoptamos otro criterio;

1) $10 > 7 \Rightarrow A > B$.
2) $-2 < 1 \Rightarrow A < B$.
3) $10 + 2 > 7 - 1 \Rightarrow A < B$.

3.2.2.4. Maximización y minimización

Mínimo: $A\ (\wedge)\ B = [a_1, a_2]\ (\wedge)\ [b_1, b_2] = [\min(a_1, b_1), \min(a_2, b_2)] = [a_1\ (\wedge)\ b_1, a_2\ (\wedge)\ b_2]$.

Máximo: $A\ (\vee)\ B = [a_1, a_2]\ (\vee)\ [b_1, b_2] = [\max(a_1, b_1), \max(a_2, b_2)] = [a_1\ (\vee)\ b_1, a_2\ (\vee)\ b_2]$.

Propiedades:
- Conmutativa:
  $A\ (\wedge)\ B = B\ (\wedge)\ A$
  $A\ (\vee)\ B = B\ (\vee)\ A$
- Asociativa:
  $(A\ (\wedge)\ B)\ (\wedge)\ C = A\ (\wedge)\ (B\ (\wedge)\ C)$
  $(A\ (\vee)\ B)\ (\vee)\ C = A\ (\vee)\ (B\ (\vee)\ C)$
- Idempotencia:
  $A\ (\wedge)\ A = A$
  $A\ (\vee)\ A = A$
- Absorción:
  $A\ (\wedge)\ (A\ (\vee)\ B) = A$
  $A\ (\vee)\ (A\ (\wedge)\ B) = A$
- Distributiva:
  $A\ (\wedge)\ (B\ (\vee)\ C) = (A\ (\wedge)\ B)\ (\vee)\ (A\ (\wedge)\ C)$
  $A\ (\vee)\ (B\ (\wedge)\ C) = (A\ (\vee)\ B)\ (\wedge)\ (A\ (\vee)\ C)$

3.2.2.5. Intervalos de confianza repetidos

$$A = [a_1, a_2] \subset R$$

$A\ (+)\ A\ (+)\ A\ (+)\ \ldots\ (+)\ A = [a_1, a_2]\ (+)\ [a_1, a_2]\ (+)\ \ldots\ (+)\ [a_1, a_2] = [n\ (\cdot)\ a_1, n\ (\cdot)\ a_2] = n\ (\cdot)\ A$

En este caso, si “$x = (a_1 + a_2) / 2$” es el valor central de A, el valor central de $n\ (\cdot)\ A$ es: $[n\ (\cdot)\ (a_1 + a_2)] / 2 = n\ (\cdot)\ x$

3.2.2.6. Intervalos de confianza de grado superior

Los extremos de un intervalo de confianza pueden ser inciertos, es decir, otros intervalos de confianza, en cuyo caso tendríamos:

$A_2 = [[a_1, a_2], [a_3, a_4]]$

Lo cual representa un intervalo de confianza de segundo grado.

A continuación, tendríamos los intervalos de confianza de tercer grado:

$A_3 = [[[a_1, a_2], [a_3, a_4]], [[a_5, a_6], [a_7, a_8]]]$

Y así sucesivamente, con carácter ilimitado.

3.2.3. La teoría de los subconjuntos borrosos

3.2.3.1. Concepto de subconjunto borroso

La teoría de los subconjuntos borrosos fue introducida por Lotfi A. Zadeh en 1965 con su famoso trabajo "*Fuzzy sets*". Desde entonces, se ha desarrollado y aplicado en una amplia gama de situaciones siendo a día de hoy una auténtica revolución. A modo introductorio, se puede decir lo siguiente respecto a dicha teoría.

Consideremos un conjunto referencial E y un subconjunto ordinario $A \subset E$ de aquellos elementos que cumplen una característica concreta. En el caso de subconjuntos ordinarios sólo existen 2 posibilidades $\forall\ x \in E$: "x" cumple la característica ($x \in A$) o "x" no la cumple ($x \notin A$). Por ello, se define la "función característica" de A o "función de pertenencia" de A:

$\forall\ x \in E$:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

De esta manera, se puede simbolizar un subconjunto ordinario $A \subset E$ a través del par (E, $\mu_A(x)$).

Supongamos ahora que los elementos de A pueden tomar cualquier valor del intervalo [0, 1], es decir, que existen elementos de E que cumplen la característica que define el subconjunto A, pero en un cierto grado. Entonces, tendremos una función de pertenencia de A definida como:

$$\begin{array}{lll} \forall\ x \in E: & & \\ \mu_{\underline{A}}(x): & E & \rightarrow\ [0, 1] \\ & X & \rightarrow\ \mu_{\underline{A}}(x) = \alpha \in [0,1] \end{array}$$

De esta forma, se construye el subconjunto borroso (E, $\mu_A(x)$) que simbolizamos por $\underline{A} \subset E$.

A continuación, se representa un subconjunto borroso $\underline{A}$ del referencial

E = {a, b, c, d, e, f, g, h, i}

Y un subconjunto ordinario A del mismo referencial:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
E =	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
A =	1	0	1	0	1	0	0	1	1	1

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\underline{A} =$	.5	.4	.8	0	.9	.4	.3	.6	.2	.4

En cuanto a la imagen de un elemento de X, que se expresa por α, se llamará "nivel de presunción".

Cada nivel de presunción α determina un "subconjunto de confianza" A_α del referencial que se define como:

$$A_\alpha = \{x \in E \;/\; \mu_{\underline{A}}(x) \leq \alpha\}$$

Si el conjunto referencial son los números reales ($E = R$) entonces A_α es un intervalo de confianza:

$$A_\alpha = \{x \in R \;/\; \mu_{\underline{A}}(x) \leq \alpha\} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

Si se encajan de manera monótona los subconjuntos de confianza A_α $\forall$ $\alpha \in$ [0, 1] de tal manera que:

$$\alpha' > \alpha \Rightarrow A_{\alpha'} \subset A_\alpha$$

dicho encaje construye un subconjunto borroso. Así, el subconjunto borroso expresado anteriormente puede representarse para cada nivel de presunción utilizando un sistema endecadario como:

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
$\alpha = 1$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0.9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
0.8	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0.7	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0
0.6	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0.5	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0
0.4	1	1	1	0	1	1	0	1	0	1
0.3	1	1	1	0	1	1	1	1	0	1
0.2	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
0.1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1
$\alpha = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\underline{A} =$	.5	.4	.8	0	.9	.4	.3	.6	.2	.4
$E =$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Puede observarse que el subconjunto de confianza para $\alpha = 0$ es el conjunto referencial $A = E$. Finalmente, se puede definir la igualdad de subconjuntos borrosos como:

$$\underline{A} = \underline{B} \Leftrightarrow \forall x \in E, \;\; \mu_{\underline{A}}(x) = \mu_{\underline{B}}(x)$$

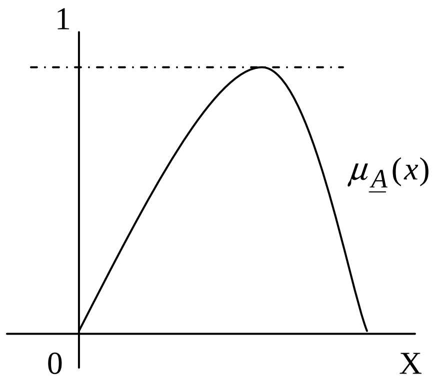
3.2.3.2. Normalidad y convexidad en los subconjuntos borrosos

Dado un subconjunto borroso $A \subset R$ diremos que es "normal" cuando:

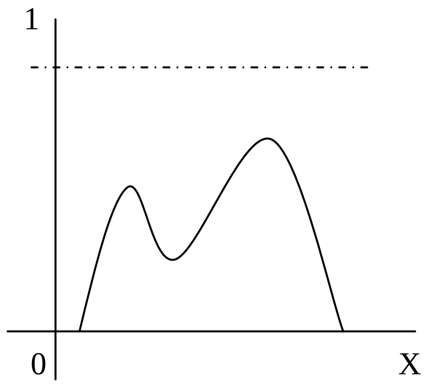
$$\underset{x}{\vee}\, \mu_{\underline{A}}(x) = 1$$

Es decir, cuando existe al menos un elemento cuya función de pertenencia toma el valor 1.

Subconjunto borroso normal



Subconjunto borroso no normal

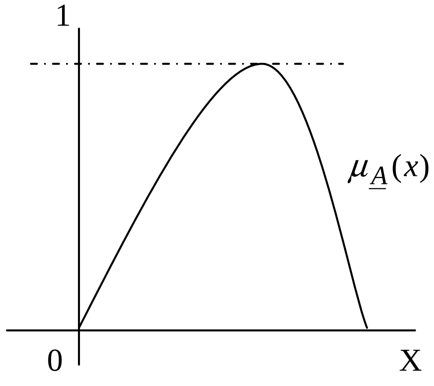


Como se puede observar, para cada nivel de presunción α se define un subconjunto de confianza A_α, que al tratarse de números reales, es un intervalo de confianza $A = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$.

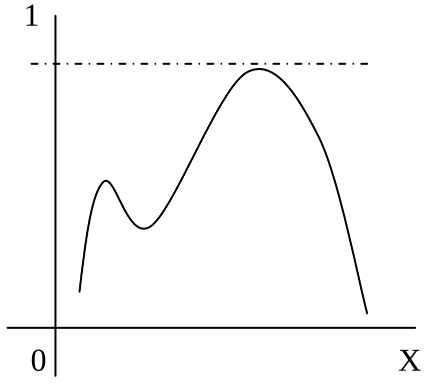
Se dice que $\underline{A}$ es convexo si:

$\alpha' > \alpha \Rightarrow (A_{\alpha'} \subset A_\alpha \Rightarrow [a_1(\alpha'), a_2(\alpha')] \subset [a_1(\alpha), a_2(\alpha)])$.

Subconjunto borroso convexo



Subconjunto borroso no convexo



Con estos dos conceptos se puede redefinir un número borroso diciendo que es un subconjunto borroso de R normal y convexo.

3.2.3.3. Intersección, unión y complementación de subconjuntos borrosos

1) Intersección

$$\underline{A} \cap \underline{B} \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ \mu_{\underline{A} \cap \underline{B}}(x) = \mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(x)$$

Propiedades:

- Conmutativa: $\underline{A} \cap \underline{B} = \underline{B} \cap \underline{A}$
- Asociativa: $\underline{A} \cap (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cap \underline{C}$
- Idempotencia: $\underline{A} \cap \underline{A} = \underline{A}$
- $\underline{A} \cap \varnothing = \varnothing$
- $\underline{A} \cap E = \underline{A}$

2) Unión

$$\underline{A} \cup \underline{B} \Leftrightarrow \forall\, x \in E,\ \mu_{\underline{A} \cup \underline{B}}(x) = \mu_{\underline{A}}(x) \vee \mu_{\underline{B}}(x)$$

Propiedades:

- Conmutativa: $\underline{A} \cup \underline{B} = \underline{B} \cup \underline{A}$
- Asociativa: $\underline{A} \cup (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cup \underline{C}$
- Idempotencia: $\underline{A} \cup \underline{A} = \underline{A}$
- $\underline{A} \cup \varnothing = \varnothing$
- $\underline{A} \cup E = \underline{A}$

También se cumple la propiedad distributiva tanto de la intersección respecto de la unión, como de la unión respecto de la intersección:

- Distributiva:
    - $\underline{A} \cap (\underline{B} \cup \underline{C}) = (\underline{A} \cap \underline{B}) \cup (\underline{A} \cap \underline{C})$
    - $\underline{A} \cup (\underline{B} \cap \underline{C}) = (\underline{A} \cup \underline{B}) \cap (\underline{A} \cup \underline{C})$

3) Complementación

$$\forall\, x \in E,\ \mu_{\overline{\underline{A}}}(x) = 1 - \mu_{\underline{A}}(x)$$

Propiedades:

- Involución: $\overline{(\underline{A})} = \underline{A}$
- Teoremas de De Morgan:
    - $\overline{\underline{A} \cap \underline{B}} = \overline{\underline{A}} \cup \overline{\underline{B}}$
    - $\overline{\underline{A} \cup \underline{B}} = \overline{\underline{A}} \cap \overline{\underline{B}}$

3.2.3.4. Otros operadores de los subconjuntos borrosos

Obsérvese que aparte de la intersección, la unión y la complementación, existen muchas otras operaciones posibles como por ejemplo, la operación de normalización (transformar un número borroso no normal en normal), la traslación a la derecha o a la izquierda, la compresión, la dilatación, el aumento de contraste, etc. Para más información sobre estos operadores, se puede consultar los libros de Kaufmann y Gil Aluja (1987; 1990) y de Kaufmann et al. (1994).

3.2.3.5. Subconjuntos Φ - borrosos

La teoría de los subconjuntos borrosos puede ser extendida y generalizada a expresiones de mayor complejidad en donde las valuaciones de los subconjuntos son expresiones más complejas a los números precisos. A modo orientativo, veamos un ejemplo que ilustre las diferencias.

Supongamos un referencial E tal que:

$$E = \{a, b, c, d, e, f\}$$

Referencial E:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
$E =$	1	1	1	1	1	1

Subconjunto ordinario:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
$A =$	0	0	1	0	1	0

Subconjunto borroso:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
$\underline{A} =$	.5	.8	.3	.9	.4	.8

Subconjunto Φ – borroso:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
$\underline{\underline{A}} =$	[.2, .6]	.5	.8	[.3,.6]	[.4, .7]	[.2, .3]

Subconjunto P – borroso:

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
$\underline{\underline{A}}' =$	[.2, .5] ∪ [.8, .9]	.7	[.4, .6]	[.2, .3] ∪ [.5, .8]	[.3, .5]	.5

Y así sucesivamente, se podrían estudiar subconjuntos borrosos de orden superior, etc. Para más información, véase por ejemplo (Atanassov, 1986; 1989; 1999; Atanassov y

Gargov, 1989; Bustince et al., 2008; Dubois y Prade, 1980; Dubois et al., 1993; 1997; Kacprzyk, 1997; Kaufmann, 1973; 1975a; 1975b; 1975c; 1976; Kaufmann y Gil-Aluja, 1986; 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994; Mendel, 2001; Orlowska, 1998; Pawlak, 1991; Pedrycz, 1995; Ruan, 1995; Zimmerman, 1986)

3.2.3.6. Otras extensiones

A partir de la teoría de los subconjuntos borrosos, se han ido desarrollando un gran número de extensiones a lo largo de los años. De entre los muchos conceptos existentes, podemos destacar las variables lingüísticas, la teoría del *Soft Computing* y otras teorías principalmente iniciadas por Lotfi A. Zadeh.

Para más información sobre variables lingüísticas, véase por ejemplo (Bonissone, 1982; Bonissone y Decker, 1986; Bordogna y Pasi, 1995; Delgado et al., 1993; Herrera et al., 1995; 1996a; 1996b; Herrera y Martínez, 2000a; 2000b; 2001a; 2001b; Wang y Hao, 2006; Zadeh, 1975a; 1975b; 1975c; Zadeh y Kacprzyk, 1999a; 1999b)

En cuanto a la teoría del *Soft Computing*, decir que es la evolución que se ha producido sobre la inteligencia artificial clásica a través de utilizar diferentes técnicas de computación modernas y otros aspectos relacionados. En resumen, se puede decir que el *Soft Computing*, muy relacionado con el *Computational Intelligence*, abarca:

- La teoría de los subconjuntos borrosos y la lógica borrosa: En donde se encuentran todos sus aspectos relacionados como son sus operaciones, el razonamiento aproximado, la teoría de la posibilidad y el modelado lingüístico.
- La teoría de las redes neuronales
- El razonamiento probabilístico: Se destaca el modelo Bayesiano y la teoría de la credibilidad de Dempster-Shafer.
- La computación evolutiva: Se destaca la programación evolutiva y los algoritmos genéticos.
- La teoría del caos (o computación caótica)
- Y algunos otros aspectos que complementan dicha teoría como son la combinación de de algunos de estos ingredientes entre sí, y otros aspectos.

Para más información, véase por ejemplo (R.A. Aliev y R.R. Aliev, 2001; 2004; Ribeiro et al., 1999; Ruan et al., 2001; Yager y Zadeh, 1994; Yu y Kacprzyk, 2003).

En cuanto a los avances más recientes de Zadeh sobre una nueva teoría general de la incertidumbre, decir que están fundamentados en cuatro grandes conceptos:

- Granulación
- Gradación
- Restricción generalizada
- Precisación

Para más información, véase por ejemplo (Zadeh, 2005; 2006, 2008).

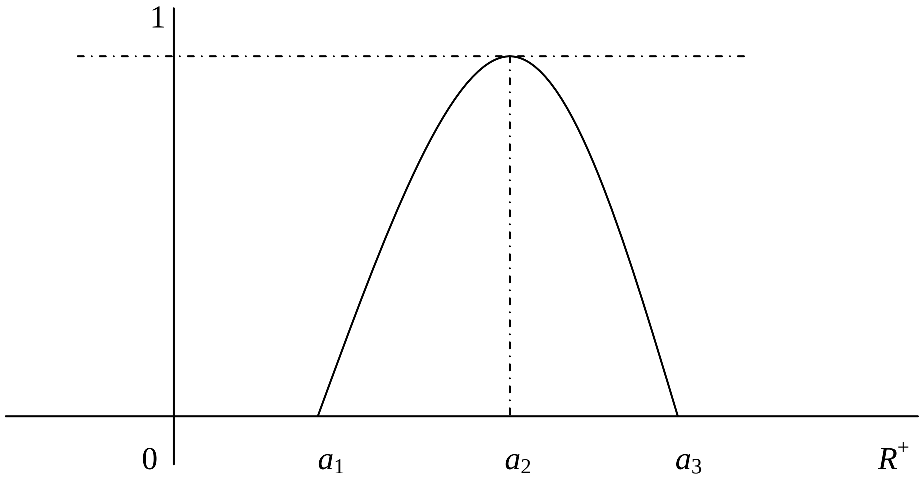
3.2.4. Números borrosos

3.2.4.1. Concepto

Un número borroso (Chang y Zadeh, 1972; Zadeh, 1975a; 1975b; 1975c), es un subconjunto borroso que posee 3 características:

1) El referencial pertenece al campo de los números reales (R).
2) La función característica de pertenencia es normal.
3) La función característica de pertenencia es convexa.

Si se pasa del campo discreto al campo de la continuidad:



De forma general, un número borroso en el ámbito continuo, puede ser expresado de 3 formas.

1) Mediante la forma ternaria. Es decir, en forma de intervalos de confianza.

$$[a_1, a_2]$$
$$[a_1, a_2, a_3]$$
$$[a_1, [a_2, a_3], a_4]$$

Ejemplo: (2, 5, 8). En donde "2" sería el mínimo, "8" el máximo, y "5" el máximo de presunción.

2) Mediante la forma α-cortes.

$$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$$

Ejemplo: $A_\alpha = [3\alpha + 2, 9 - 2\alpha]$

3) Mediante la función de pertenencia.

Ejemplo:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ \dfrac{x-2}{4} & 2 \le x \le 5 \\ 1 & 5 \le x \le 7 \\ \dfrac{9-x}{2} & 7 \le x \le 9 \\ 0 & x \ge 9 \end{cases}$$

3.2.4.2. Suma de números borrosos

Se tiene que distinguir entre la suma en el ámbito continuo y en el ámbito discreto.

1) Dados 2 números borrosos *A* y *B*, se define la suma en *R*, en el ámbito continuo, tomando sus α-cortes de la siguiente forma:

$$C = A\ (+)\ B \Leftrightarrow \forall\ \alpha \in [0, 1]$$
$$C_\alpha = A_\alpha\ (+)\ B_\alpha$$

$$[c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\ (+)\ [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)]$$

2) Suma de números borrosos en *Z* (campo de los números enteros). En este caso, se utiliza la fórmula conocida como "convolución maxmin" para la adición.

$$\mu_{\underline{A}(+)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x+y} \left(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)\right)$$

Ejemplo en el ámbito discreto: Dados 2 números borrosos *A* y *B*, en el campo de los enteros *Z*, tales que:

	–2	–1	0	1	2	3	4	5
A =	0	.2	.4	.7	1	.8	.5	0

	–1	0	1	2	3	4
B =	0	.1	.4	1	.6	0

Se obtiene como resultado:

	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8
A (+) *B* =	0	.1	.2	.4	.4	.7	1	.8	.6	.5	0

Obsérvese, que los valores obtenidos se obtienen de:

$\mu_{\underline{A}(+)\underline{B}}(-2) = \left(\mu_{\underline{A}}(-2) \wedge \mu_{\underline{B}}(0)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(-1) \wedge \mu_{\underline{B}}(-1)\right) = (0 \wedge .1) \vee (.2 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$

$\mu_{\underline{A}(+)\underline{B}}(-1) = \left(\mu_{\underline{A}}(-2) \wedge \mu_{\underline{B}}(1)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(-1) \wedge \mu_{\underline{B}}(0)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(0) \wedge \mu_{\underline{B}}(-1)\right) = (0 \wedge .4) \vee (.2 \wedge .1) \vee (.4 \wedge 0) = 0 \vee .1 \vee 0 = .1$

$\mu_{\underline{A}(+)\underline{B}}(0) = \left(\mu_{\underline{A}}(-2) \wedge \mu_{\underline{B}}(2)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(-1) \wedge \mu_{\underline{B}}(1)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(0) \wedge \mu_{\underline{B}}(0)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(1) \wedge \mu_{\underline{B}}(-1)\right) =$
$= (0 \wedge 1) \vee (.2 \wedge .4) \vee (.4 \wedge .1) \vee (.7 \wedge 0) = 0 \vee .2 \vee .1 \vee 0 = .2$

Y así sucesivamente, se podrían ir obteniendo el resto de resultados mediante la convolución maxmin hasta llegar al máximo, en este ejemplo, el 8. Por tanto, si se observa los dos últimos resultados, se obtiene lo siguiente.

$\mu_{\underline{A}(+)\underline{B}}(7) = \left(\mu_{\underline{A}}(5) \wedge \mu_{\underline{B}}(2)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(4) \wedge \mu_{\underline{B}}(3)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(3) \wedge \mu_{\underline{B}}(4)\right) = (0 \wedge 1) \vee (.5 \wedge .6) \vee (.8 \wedge 0) = 0 \vee .5 \vee 0 = .5$

$\mu_{\underline{A}(+)\underline{B}}(8) = \left(\mu_{\underline{A}}(5) \wedge \mu_{\underline{B}}(3)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(4) \wedge \mu_{\underline{B}}(4)\right) = (0 \wedge .6) \vee (.5 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$

Ejemplo en el ámbito continuo: Dados 2 números borrosos *A* y *B*, en el campo de los reales R, cuyas funciones de pertenencia son:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{4} & -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{8-x}{6} & 2 \le x \le 8 \\ 0 & x \ge 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -5 \\ \dfrac{x+5}{5} & -5 \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{5-x}{4} & 1 \le x \le 5 \\ 0 & x \ge 5 \end{cases}$$

En primer lugar, pasamos las funciones de pertenencia a la forma α-cortes.

$A_\alpha = [4\alpha - 2, 8 - 6\alpha]$
$B_\alpha = [5\alpha - 5, 5 - 4\alpha]$

$A_\alpha\ (+)\ B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\ (+)\ [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [9\alpha - 7, 13 - 10\alpha]$

Con este resultado obtenido en α-cortes, se vuelve a pasar a la función de pertenencia, obteniendo así, el resultado deseado.

$$\mu_{\underset{=}{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -7 \\ \dfrac{x+7}{9} & -7 \le x \le 2 \\ 1 & 2 \le x \le 3 \\ \dfrac{13-x}{10} & 3 \le x \le 13 \\ 0 & x \ge 13 \end{cases}$$

Obsérvese que estos resultados pueden expresarse mediante intervalos de confianza para cada nivel de presunción. Es decir:

α	A_α	B_α	A_α (+) B_α
1	2	[0, 1]	[2, 3]
0.9	[1.6, 2.6]	[–0.5, 1.4]	[1.1, 4]
0.8	[1.2, 3.2]	[–1, 1.8]	[0.2, 5]
0.7	[0.8, 3.8]	[–1.5, 2.2]	[–0.7, 6]
0.6	[0.4, 4.4]	[–2, 2.6]	[–1.6, 7]
0.5	[0, 5]	[–2.5, 3]	[–2.5, 8]
0.4	[–0.4, 5.6]	[–3, 3.4]	[–3.4, 9]
0.3	[–0.8, 6.2]	[–3.5, 3.8]	[–4.3, 10]
0.2	[–1.2, 6.8]	[–4, 4.2]	[–5.2, 11]
0.1	[–1.6, 7.4]	[–4.5, 4.6]	[–6.1, 12]
0	[–2, 8]	[–5, 5]	[–7, 13]

A continuación, se van a presentar algunas de las principales propiedades de la suma de números borrosos:

1) Conmutativa

A (+) B = B (+) A
$[a_1(\alpha) + b_1(\alpha), a_2(\alpha) + b_2(\alpha)] = [b_1(\alpha) + a_1(\alpha), b_2(\alpha) + a_2(\alpha)]$

2) Asociativa

(A (+) B) (+) C = A (+) (B (+) C)

3) Elemento neutro

A (+) 0 = 0 (+) A = A

3.2.4.3. Resta de números borrosos

Se tiene que distinguir entre la resta en el ámbito continuo y en el ámbito discreto.

1) Dados 2 números borrosos A y B, se define la resta en R, en el ámbito continuo, tomando sus α-cortes de la siguiente forma:

$$C = A\,(-)\,B \Leftrightarrow \forall\ \alpha \in [0, 1]$$
$$C_\alpha = A_\alpha\,(-)\,B_\alpha$$

$$[c_1(\alpha), c_2(\alpha)] = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\ (-)\ [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [a_1(\alpha) - b_1(\alpha), a_2(\alpha) - b_2(\alpha)]$$

2) Resta de números borrosos en Z (campo de los números enteros). En este caso, se utiliza la fórmula conocida como "convolución maxmin" para la sustracción.

$$\mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x-y} \left(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)\right)$$

Ejemplo en el ámbito discreto: Dados 2 números borrosos A y B, en el campo de los enteros Z, tales que:

	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
A =	0	.1	.2	.5	.7	1	.8	.3	0

	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
B =	0	.1	.4	.9	1	.7	.2	0

Se obtiene como resultado:

	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
A (–) B =	0	.1	.2	.2	.5	.7	.7	1	.9	.8	.4	.3	.1	0

Obsérvese, que los valores obtenidos se obtienen de:

$\mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(-4) = \left(\mu_{\underline{A}}(-1) \wedge \mu_{\underline{B}}(3)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(0) \wedge \mu_{\underline{B}}(4)\right) = (0 \wedge .2) \vee (.1 \wedge 0) = 0 \vee 0 = 0$

$\mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(-3) = \left(\mu_{\underline{A}}(-1) \wedge \mu_{\underline{B}}(2)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(0) \wedge \mu_{\underline{B}}(3)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(1) \wedge \mu_{\underline{B}}(4)\right) = (0 \wedge .7) \vee (.1 \wedge .2) \vee (.2 \wedge 0) = 0 \vee .1 \vee 0 = .1$

$\mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(-2) = \left(\mu_{\underline{A}}(-1) \wedge \mu_{\underline{B}}(1)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(0) \wedge \mu_{\underline{B}}(2)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(1) \wedge \mu_{\underline{B}}(3)\right) \vee \left(\mu_{\underline{A}}(2) \wedge \mu_{\underline{B}}(4)\right) = = (0 \wedge 1) \vee (.1 \wedge .7) \vee (.2 \wedge .2) \vee (.5 \wedge 0) = 0 \vee .1 \vee .2 \vee 0 = .2$

Y así sucesivamente, se podrían ir obteniendo el resto de resultados mediante la convolución maxmin hasta llegar al máximo, en este ejemplo, el 9. Por tanto, si se observa los dos últimos resultados, se obtiene lo siguiente.

$\mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(8) = (\mu_{\underline{A}}(7) \wedge \mu_{\underline{B}}(-1)) \vee (\mu_{\underline{A}}(6) \wedge \mu_{\underline{B}}(-2)) \vee (\mu_{\underline{A}}(5) \wedge \mu_{\underline{B}}(-3)) =$ (0 ∧ .4) ∨ (.3 ∧ .1) ∨ (.8 ∧ 0) = 0 ∨ .1 ∨ 0 = .1

$\mu_{\underline{A}(-)\underline{B}}(9) = (\mu_{\underline{A}}(7) \wedge \mu_{\underline{B}}(-2)) \vee (\mu_{\underline{A}}(6) \wedge \mu_{\underline{B}}(-3)) =$ (0 ∧ .1) ∨ (.3 ∧ 0) = 0 ∨ 0 = 0

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo en el ámbito continuo. Se pide la resta entre 2 números borrosos *A* y *B*, en el campo de los reales *R*, cuyas funciones de pertenencia son:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -2 \\ \dfrac{x+2}{4} & -2 \le x \le 2 \\ \dfrac{8-x}{6} & 2 \le x \le 8 \\ 0 & x \ge 8 \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -5 \\ \dfrac{x+5}{5} & -5 \le x \le 0 \\ 1 & 0 \le x \le 1 \\ \dfrac{5-x}{4} & 1 \le x \le 5 \\ 0 & x \ge 5 \end{cases}$$

En primer lugar, pasamos las funciones de pertenencia a la forma α-cortes.

$A_\alpha = [4\alpha - 2,\ 8 - 6\alpha]$
$B_\alpha = [5\alpha - 5,\ 5 - 4\alpha]$

$A_\alpha\ (-)\ B_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\ (-)\ [b_1(\alpha), b_2(\alpha)] = [8\alpha - 7,\ 13 - 11\alpha]$

Con este resultado obtenido en α-cortes, se vuelve a pasar a la función de pertenencia, obteniendo así, el resultado deseado.

$$\mu_{\underline{\underline{B}}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -7 \\ \dfrac{x+7}{8} & -7 \le x \le 1 \\ 1 & 1 \le x \le 2 \\ \dfrac{13-x}{11} & 2 \le x \le 13 \\ 0 & x \ge 13 \end{cases}$$

Obsérvese que estos resultados pueden expresarse mediante intervalos de confianza para cada nivel de presunción. Es decir:

α	A_α	B_α	A_α (+) B_α
1	2	[0, 1]	[1, 2]
0.9	[1.6, 2.6]	[–0.5, 1.4]	[1.1, 3.1]
0.8	[1.2, 3.2]	[–1, 1.8]	[–0.6, 4.2]
0.7	[0.8, 3.8]	[–1.5, 2.2]	[–1.4, 5.3]
0.6	[0.4, 4.4]	[–2, 2.6]	[–2.2, 6.4]
0.5	[0, 5]	[–2.5, 3]	[–3, 7.5]
0.4	[–0.4, 5.6]	[–3, 3.4]	[–3.8, 8.6]
0.3	[–0.8, 6.2]	[–3.5, 3.8]	[–4.6, 9.7]
0.2	[–1.2, 6.8]	[–4, 4.2]	[–5.4, 10.8]
0.1	[–1.6, 7.4]	[–4.5, 4.6]	[–6.2, 11.9]
0	[–2, 8]	[–5, 5]	[–7, 13]

Obsérvese que la resta no cumple las propiedades descritas en la suma.

3.2.4.4. Multiplicación de números borrosos

La multiplicación de números borrosos en R sigue las mismas normas que la de los intervalos de confianza en R. Así, dados 2 números borrosos A y B.

$\forall\ \alpha \in [0, 1]$

$A_\alpha (\cdot) B_\alpha = [\min(a_1(\alpha) (\cdot) b_1(\alpha), a_1(\alpha) (\cdot) b_2(\alpha), a_2(\alpha) (\cdot) b_1(\alpha), a_2(\alpha) (\cdot) b_2(\alpha)),$
$\max(a_1(\alpha) (\cdot) b_1(\alpha), a_1(\alpha) (\cdot) b_2(\alpha), a_2(\alpha) (\cdot) b_1(\alpha), a_2(\alpha) (\cdot) b_2(\alpha))]$

Obsérvese que en R^+ esta formulación se reduce a:

$$A_\alpha (\cdot) B_\alpha = [a_1(\alpha) (\cdot) b_1(\alpha), a_2(\alpha) (\cdot) b_2(\alpha)]$$

En cuanto a la multiplicación en el ámbito discreto de los números enteros Z, se utilizará el proceso de convolución maxmin de la siguiente forma.

$\forall\ x, y, z, \in\ R$

$$\mu_{\underline{A}(\cdot)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x(\cdot)y} \left(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)\right)$$

Cabe destacar que el proceso de convolución irá condicionado de la siguiente forma:

1) Para la parte izquierda a partir del máximo de presunción ($\alpha = 1$), se considerarán todos los pares para los que se cumple que $x (\cdot) y \le z$.

2) Para la parte derecha a partir del máximo de presunción ($\alpha = 1$), se tomarán todos los pares para los que se cumple que $x\ (\cdot)\ y \geq z$.

Propiedades de la multiplicación de números borrosos:

1) Conmutativa

$A\ (\cdot)\ B = B\ (\cdot)\ A$

2) Asociativa

$(A\ (\cdot)\ B)\ (\cdot)\ C = A\ (\cdot)\ (B\ (\cdot)\ C)$

3) Elemento neutro

$A\ (\cdot)\ 1 = 1\ (\cdot)\ A = A$

3.2.4.5. División de números borrosos

Se define la división de A por B en el ámbito continuo, como el producto de A por el pseudos-inverso de B (B^{-1}).

$\forall\ \alpha \in [0, 1]$

$$A_\alpha\ (\div)\ B_\alpha = A_\alpha\ (\cdot)\ B_\alpha^{-1} = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]\ (\cdot)\ [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]^{-1}$$

Por tanto, es necesario la existencia del pseudo-inverso, por lo que la división se definirá exclusivamente en R^+ y R^- (no en R).

En R^+:

$$A_\alpha\ (\div)\ B_\alpha = A_\alpha\ (\cdot)\ B_\alpha^{-1} = \left[\frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}, \frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}\right]$$

En R^-:

$$A_\alpha\ (\div)\ B_\alpha = A_\alpha\ (\cdot)\ B_\alpha^{-1} = \left[\frac{a_2(\alpha)}{b_1(\alpha)}, \frac{a_1(\alpha)}{b_2(\alpha)}\right]$$

En el ámbito discreto, se define la división mediante la fórmula de convolución maxmin para la división:

$\forall\ x, y, z, \in R^+$ o R^-

$$\mu_{\underline{A}(\div)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x(\div)y} \left(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)\right)$$

3.2.4.6. Multiplicación y división por un número real

En el ámbito continuo, se define la multiplicación por un número real como:

$$k\ (\cdot)\ A_\alpha = k\ (\cdot)\ [a_1(\alpha), a_2(\alpha)] = [\min(ka_1(\alpha), ka_2(\alpha)), \max(ka_1(\alpha), ka_2(\alpha))]$$

Y la división por un número real se define como:

$$A_\alpha / k = \left[\min\left(\frac{a_1(\alpha)}{k}, \frac{a_2(\alpha)}{k}\right), \max\left(\frac{a_1(\alpha)}{k}, \frac{a_2(\alpha)}{k}\right)\right]$$

En el ámbito discreto, la multiplicación por un número real se define de la siguiente forma:

$\forall\ z \in R$

$$\mu_{k\underline{A}}(z) = \mu_{\underline{A}}(z \times k)$$

Y la división por un número real, de la siguiente forma:

$\forall\ z \in R$

$$\mu_{\frac{\underline{A}}{k}}(z) = \mu_{\underline{A}}\left(\frac{z}{k}\right)$$

3.2.4.7. Mínimo y máximo de números borrosos

El mínimo entre números borrosos se define de la siguiente forma:

a) En el ámbito continuo:

$$A_\alpha\ (\wedge)\ B_\alpha = [a_1(\alpha)\ (\wedge)\ b_1(\alpha), a_2(\alpha)\ (\wedge)\ b_2(\alpha)]$$

b) En el ámbito discreto:

$$\mu_{\underline{A}(\wedge)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x(\wedge)y} \left(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)\right)$$

Y el máximo entre números borrosos, de la siguiente forma:

a) En el ámbito continuo:

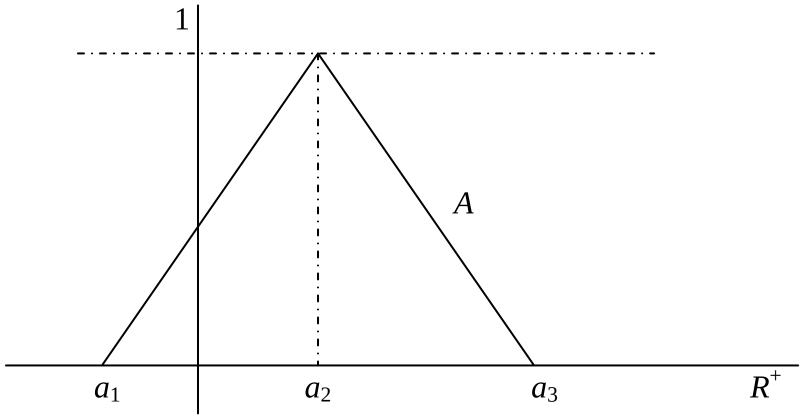
$$A_\alpha\,(\vee)\,B_\alpha = [a_1(\alpha)\,(\vee)\,b_1(\alpha),\ a_2(\alpha)\,(\vee)\,b_2(\alpha)]$$

b) En el ámbito discreto:

$$\mu_{\underline{A}(\vee)\underline{B}}(z) = \bigvee_{z=x(\vee)y} \left(\mu_{\underline{A}}(x) \wedge \mu_{\underline{B}}(y)\right)$$

3.2.4.8. Números borrosos triangulares

Los números borrosos triangulares (NBT) son aquellos números borrosos cuyas funciones de pertenencia son lineales y tienen un valor único en el máximo de presunción. Gráficamente, se pueden representar de la siguiente forma:



Numéricamente, se pueden expresar de diversas formas.

1) Mediante la forma ternaria

$$A = (a_1, a_2, a_3)$$

Estos tres números implican que:

$$\forall\ x \le a_1 \qquad \mu_{\underline{A}}(x) = 0$$
$$\forall\ x \ge a_3 \qquad \mu_{\underline{A}}(x) = 0$$
$$\mu_{\underline{A}}(a_2) = 1$$

y que la función de pertenencia $\mu_{\underline{A}}(x)$ para los demás valores es:

$$\forall\ a_1 \le x \le a_2 \quad \Rightarrow \quad \mu_{\underline{A}}(x) = \frac{x - a_1}{a_2 - a_1}$$

$$\forall\ a_2 \le x \le a_3 \quad \Rightarrow \quad \mu_{\underline{A}}(x) = \frac{a_3 - x}{a_3 - a_2}$$

2) Mediante la función de pertenencia

$$\mu_{\underline{A}}(x)=\begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & x \geq a_3 \end{cases}$$

3) Mediante la forma α–cortes

Partiendo de la función de pertenencia se obtiene la forma α–cortes de la siguiente manera:

$$\alpha=\frac{x-a_1}{a_2-a_1} \quad \text{y} \quad \alpha=\frac{a_3-x}{a_3-a_2}$$

Obsérvese que este mismo resultado se puede obtener a partir de la forma ternaria:

$$A_\alpha=[a_1+\alpha(a_2-a_1),\ a_3-\alpha(a_3-a_2)]$$

Con los NBT, se pueden destacar las siguientes operaciones:

Supongamos 2 NBT: $A=(a_1, a_2, a_3)$ y $B=(b_1, b_2, b_3)$

1) Suma

$A\ (+)\ B=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$

Para la función de pertenencia sería:

$$\mu_{\underline{A}+\underline{B}}(x)=\begin{cases} 0 & x \leq a_1+b_1 \\ \dfrac{x-(a_1+b_1)}{(a_2+b_2)-(a_1+b_1)} & a_1+b_1 \leq x \leq a_2+b_2 \\ \dfrac{(a_3+b_3)-x}{(a_3+b_3)-(a_2+b_2)} & a_2+b_2 \leq x \leq a_3+b_3 \\ 0 & x \geq a_3+b_3 \end{cases}$$

2) Resta

$A\ (-)\ B = (a_1 - b_3,\ a_2 - b_2,\ a_3 - b_1)$

Siendo la función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{A}-\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 - b_3 \\ \dfrac{x-(a_1-b_3)}{(a_2-b_2)-(a_1-b_3)} & a_1 - b_3 \leq x \leq a_2 - b_2 \\ \dfrac{(a_3-b_1)-x}{(a_3-b_1)-(a_2-b_2)} & a_2 - b_2 \leq x \leq a_3 - b_1 \\ 0 & x \geq a_3 - b_1 \end{cases}$$

3) Producto por un número real

$\forall\ k \in R$

$k\ (\cdot)\ A = (\min(ka_1,\ ka_3),\ ka_2,\ \max(ka_1,\ ka_3))$

Cabe destacar que se mencionan estas operaciones porque son las únicas cuyos resultados son también NBT. Para otros casos, nos remitiremos a los NB en general.

Ejemplo de suma y resta de NBT: Dados los NBT: $A = (-3, 4, 7)$ y $B = (-1, 2, 5)$, cuyas funciones de pertenencia son:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -3 \\ \dfrac{x+3}{7} & -3 \leq x \leq 4 \\ \dfrac{7-x}{3} & 4 \leq x \leq 7 \\ 0 & x \geq 7 \end{cases}$$

$$\mu_{\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq -1 \\ \dfrac{x+1}{3} & -1 \leq x \leq 2 \\ \dfrac{5-x}{3} & 2 \leq x \leq 5 \\ 0 & x \geq 5 \end{cases}$$

Su suma será: $A\ (+)\ B = ((-3) + (-1),\ 4 + 2,\ 7 + 5) = (-4, 6, 12)$; siendo su función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -4 \\ \dfrac{x+4}{10} & -4 \le x \le 6 \\ \dfrac{12-x}{6} & 6 \le x \le 12 \\ 0 & x \ge 12 \end{cases}$$

Obsérvese que este mismo resultado se podría haber obtenido por el método general de los números borrosos. Entonces, en primer lugar, se tendría que calcular la forma α– cortes de A y B.

A_α = [–3 + 7α, 7 – 3α]
B_α = [–1 + 3α, 5 – 3α]

A continuación, se calcula la suma.

A_α (+) B_α = [–4 + 10α, 12 – 6α]

Los extremos se obtienen a través de sustituir en el resultado, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

$\alpha = 0 \Rightarrow [-4, 12]$
$\alpha = 1 \Rightarrow [6, 6]$

Y las funciones a través de despejar α.

$-4 + 10\alpha \Rightarrow \alpha = (x + 4) / 10$
$12 - 6\alpha \Rightarrow \alpha = (12 - x) / 6$

Si ahora se elabora la resta, se obtiene lo siguiente: A (–) B = ((–3) –5, 4 –2, 7 – (–1)) = (–8, 2, 8); siendo su función de pertenencia:

$$\mu_{\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \le -8 \\ \dfrac{x+8}{10} & -8 \le x \le 2 \\ \dfrac{8-x}{6} & 2 \le x \le 8 \\ 0 & x \ge 8 \end{cases}$$

Obsérvese que en este caso también podría haberse obtenido este resultado por el método general. De la misma forma que en la suma, en primer lugar se tendría que calcular la forma α–cortes de A y B.

A_α = [–3 + 7α, 7 – 3α]

$B_\alpha = [-1 + 3\alpha, 5 - 3\alpha]$

A continuación, se calcula la suma.

$A_\alpha\,(+)\,B_\alpha = [-8 + 10\alpha, 8 - 6\alpha]$

Los extremos se obtienen a través de sustituir en el resultado, $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

$\alpha = 0 \;\Rightarrow\; [-8, 8]$
$\alpha = 1 \;\Rightarrow\; [2, 2]$

Y las funciones a través de despejar α.

$-8 + 10\alpha \Rightarrow \alpha = (x + 8) / 10$
$8 - 6\alpha \Rightarrow \alpha = (8 - x) / 6$

3.2.4.9. Números borrosos trapezoidales

Es un caso particular de NBT donde el máximo de presunción corresponde a un intervalo de confianza y no a un número. Se representan mediante 4 valores en forma de tripleta de confianza ampliada o cuádruplo de confianza (forma cuaternaria).

$A = (a_1, [a_2, a_3], a_4)$

La función de pertenencia toma la forma siguiente:

$$\mu_{\underline{B}}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a_1 \\ \dfrac{x - a_1}{a_2 - a_1} & a_1 \leq x \leq a_2 \\ 1 & a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4 - x}{a_4 - a_3} & a_3 \leq x \leq a_4 \\ 0 & x \geq a_4 \end{cases}$$

Y la forma α–cortes, partiendo de la forma cuaternaria, nos quedaría de la siguiente forma:

$A_\alpha = [a_1 + \alpha(a_2 - a_1), a_4 - \alpha(a_4 - a_3)]$

Ejemplo: Dado el número borroso trapezoidal (NBTp): NBTp = (2, [5, 6], 8); su forma $\alpha-$ cortes quedará de la siguiente manera: $(2 + (5 - 2)\alpha, 8 - (8 - 6)\alpha) = (2 + 3\alpha, 8 - 2\alpha)$.

Cabe destacar que las propiedades comentadas en los NBT, son ampliables al caso de los NBTp, como sería la suma, la resta, etc.

3.2.4.10. Otros tipos de números borrosos

Además de los tipos de números borrosos comentados, existen una amplia variedad de números borrosos como son los que se mencionan a continuación:

- Números borrosos intervalo valorados
  - Con intervalos simples
  - Con tripletas de confianza
  - Con cuádruplos de confianza
  - Etc.
- Números borrosos de tipo 2
- Números borrosos de tipo *n*
- Números borrosos intuicionistas
  - Simples
  - Intervalo valorados
  - De tipo 2 y *n*
- Números borrosos L-R
  - Simples
  - Intervalo valorados
  - Intuicionistas
  - De tipo 2 y *n*
- Números borrosos generalizados
  - Simples (triangulares, trapezoidales, etc.)
  - Intervalo valorados
  - De tipo 2 y *n*
  - Intuicionistas
    - Simples
    - Intervalo valorados
    - De tipo 2 y *n*
  - L-R
    - Simples
    - Intervalo valorados
    - De tipo 2 y *n*
    - Intuicionistas
- Números borrosos *L* (basados en los retículos)
- Etc.

Para más información sobre estos tipos de números borrosos y otros, véase por ejemplo (R.A. Aliev y R.R. Aliev, 2001; 2004; Bezdek, 1987; Bustince et al., 2008; Chang y Zadeh, 1972; S.H. Chen, 1985; S.J. Chen y S.M. Chen, 2003; 2005; 2007; 2008; S.M. Chen y J.H. Chen, 2008a; 2008b; Dubois y Prade, 1978; 1980; Dubois et al., 1993; 1997; Guijun y Xiaoping, 1998; H.L. Huang y F.G. Shi, 2008, Jones et al., 1986; Kaufmann y Gil-Aluja, 1986; 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994; Kaufmann y Gupta, 1985; 1988; Lin, 2002; Mendel, 2001; Mizumoto y Tanaka, 1976; Nahmias, 1976; Wang y Li, 2001; S.H. Wei y S.M. Chen, 2009; Xu, 2007a; 2007b; Xu y Yager, 2006; 2008; Zadeh, 1975a; 1975b; 1975c; Zimmermann, 1986). Obsérvese que algunos de estos números borrosos no han sido considerados en la comunidad científica. Se espera que en el futuro se puedan desarrollar algunas aportaciones en este sentido ya sea por parte del doctorando o por parte de la comunidad científica en general.

3.2.5. La noción de distancia

3.2.5.1. Distancia de Hamming entre dos subconjuntos borrosos

La noción de distancia sirve para calcular el grado de alejamiento entre 2 elementos, 2 conjuntos, etc. Entre la gran variedad de distancias disponibles, las más utilizadas son la distancia de Hamming, la distancia de Euclides y la distancia de Minkowski.

La distancia de Hamming se puede formular de la siguiente forma.

1) En el ámbito discreto: Sea E un referencial finito y A y $B \subset E$, se define la distancia de Hamming como:

$$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|$$

con $x \in E \; \forall \; i = 1, 2, \ldots, n$; $\mu_{\underline{A}}(x_i), \mu_{\underline{B}}(x_i) \in [0,1]$.

2) En el ámbito continuo: En el supuesto de que el referencial E sea el conjunto de los números reales ($E = R$), la distancia de Hamming vendría definida $\forall \; x \in [x_1, x_2]$ como:

$$d(A,B) = \int_{x_1}^{x_2} \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right| dx$$

Ejemplo en el ámbito discreto: Dado el conjunto referencial:

$E = \{a, b, c, d, e, f\}$

Y los subconjuntos borrosos A y B:

	a	b	c	d	e	f
$A =$	.5	.3	.8	.4	.6	.2

	a	b	c	d	e	f
$B =$	.7	.8	.2	0	1	.5

$d(A,B) = \sum_{i=1}^{6} \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|$ = |0.5 – 0.7| + |0.3 – 0.8| + |0.8 – 0.2| + |0.4 – 0| + |0.6 – 1| + |0.2 – 0.5| = 2

3.2.5.2. Distancia de Euclides entre dos subconjuntos borrosos

La distancia de Euclides se puede formular de la siguiente manera:

1) En el ámbito discreto: Sea E un referencial finito y A y $B \subset E$, se define la distancia de Euclides como:

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i))^2}$$

con $x \in E \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu_{\underline{A}}(x_i), \mu_{\underline{B}}(x_i) \in [0,1]$.

2) En el ámbito continuo: En el supuesto de que el referencial E sea R, la distancia de Euclides vendría definida $\forall\ x \in [x_1, x_2]$ como:

$$e(A,B) = \sqrt{\int_{x_1}^{x_2} (\mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i))^2 dx}$$

Ejemplo en el ámbito discreto: Supongamos la misma información que en el ejemplo de la distancia de Hamming.

$$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{6} (\mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i))^2} =$$

$$\sqrt{(0.5-0.7)^2 + (0.3-0.8)^2 + (0.8-0.2)^2 - (0.4-0)^2 + (0.6-1)^2 + (0.2-0.5)^2} = 1.06$$

3.2.5.3. Distancia de Minkowski entre dos subconjuntos borrosos

La distancia de Minkowski es una generalización a una amplia gama de distancias entre las cuales se encuentran la distancia de Hamming y de Euclides. Se puede formular de la siguiente forma:

1) En el ámbito discreto: Sea E un referencial finito y A y $B \subset E$, se define la distancia de Euclides como:

$$r(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|^{\lambda} \right)^{1/\lambda}$$

con $x \in E \ \forall \ i = 1, 2, \ldots, n;\ \mu_{\underline{A}}(x_i), \mu_{\underline{B}}(x_i) \in [0,1]$ y $\lambda \in N - \{0\}$.

2) En el ámbito continuo: En el supuesto de que el referencial E sea R, la distancia de Minkowski se define como:

$$r(A,B) = \left(\int_{x_1}^{x_2} \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|^{\lambda} dx \right)^{1/\lambda}$$

con $\lambda \in N - \{0\}$.

Se puede observar tanto en el ámbito discreto como en el continuo que:

$\lambda = 1 \Rightarrow$ Se obtiene la distancia de Hamming.
$\lambda = 2 \Rightarrow$ Se obtiene la distancia de Euclides.

3.2.5.4. Distancias relativas

Las anteriores distancias representaban la distancia total entre 2 subconjuntos borrosos. En muchas ocasiones, resulta interesante considerar un valor medio de la distancia total. Para ello, se utiliza el concepto de distancia relativa. En el estudio de la distancia relativa, a grandes rasgos, se pueden distinguir entre 2 grandes tipos:

1) Situaciones en donde todos los elementos de los subconjuntos tienen el mismo grado de importancia.
    a. Distancia relativa de Hamming
        i. En el ámbito discreto:

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{n}$$

        ii. En el ámbito continuo:

$$\delta(A,B) = \frac{d(A,B)}{x_2 - x_1}$$

    b. Distancia relativa de Euclides
        i. En el ámbito discreto:

$$\eta(A,B) = \frac{e(A,B)}{\sqrt{n}}$$

        ii. En el ámbito continuo:

$$\eta(A,B) = \frac{e(A,B)}{\sqrt{x_2 - x_1}}$$

    c. Distancia relativa de Minkowski
        i. En el ámbito discreto:

$$\rho(A,B) = \frac{r(A,B)}{n^{1/\lambda}}$$

        ii. En el ámbito continuo:

$$\rho(A,B) = \frac{r(A,B)}{(x_2 - x_1)^{1/\lambda}}$$

2) Situaciones en donde los elementos de los subconjuntos tienen diferentes grados de importancia. Es decir, algunos elementos son más importantes que otros (obsérvese que sólo se muestra la formulación en el ámbito discreto).

   a. Distancia relativa de Hamming

   $$d(A,B) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|$$

   Con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

   b. Distancia relativa de Euclides

   $$e(A,B) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} w_i (\mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i))^2}$$

   Con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

   c. Distancia relativa de Minkoswki

   $$r(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \left| \mu_{\underline{A}}(x_i) - \mu_{\underline{B}}(x_i) \right|^{\lambda} \right)^{1/\lambda}$$

   Con $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$.

Obsérvese que si la suma de los coeficientes w_i es diferente a 1, se tendrá que normalizar mediante $w_i \,/\, \sum_{i=1}^{n} w_i$; $\forall$ i, para que finalmente sí se cumpla que la suma de las ponderaciones es igual a 1.

3.2.5.5. Distancia de Hamming para intervalos de confianza

Dados 2 intervalos de confianza $[a_1, a_2]$ y $[b_1, b_2] \subset R$, podemos definir una distancia de Hamming a la izquierda y otra a la derecha:

Distancia a la izquierda:

$$d_I([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = |a_1 - b_1|$$

Distancia a la derecha:

$d_D([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = |a_2 - b_2|$

Y finalmente, la distancia total:

$$d([a_1, a_2], [b_1, b_2]) = d_I + d_D = |a_1 - b_1| + |a_2 - b_2|$$

3.2.5.6. Distancia entre números borrosos

$A_\alpha = [a_1(\alpha), a_2(\alpha)]$ y $B_\alpha = [b_1(\alpha), b_2(\alpha)]$

En el ámbito discreto:

$$d_I(A_\alpha, B_\alpha) = |a_1(\alpha) - b_1(\alpha)|$$
$$d_D(A_\alpha, B_\alpha) = |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)|$$

Y la distancia total sería la suma de las dos distancias.

$$d(A_\alpha, B_\alpha) = d_I(A_\alpha, B_\alpha) + d_D(A_\alpha, B_\alpha)$$

En el ámbito continuo, la formulación sería:

$$d_I(A_\alpha, B_\alpha) = \int_{\alpha=0}^{1} |a_1(\alpha) - b_1(\alpha)| d\alpha$$

$$d_D(A_\alpha, B_\alpha) = \int_{\alpha=0}^{1} |a_2(\alpha) - b_2(\alpha)| d\alpha$$

Y la distancia total:

$$d(A_\alpha, B_\alpha) = d_I(A_\alpha, B_\alpha) + d_D(A_\alpha, B_\alpha)$$

3.2.5.7. Clasificación de los números borrosos en un orden total

Para establecer un orden total entre n números borrosos $A_1, A_2, \ldots, A_n$, a partir del uso de la noción de distancia, se seguirá el siguiente proceso:

1) Se calcula el máximo de $A_1, A_2, \ldots, A_n$:

   $A_M = A_1 (\vee) A_2 (\vee) \ldots (\vee) A_n$

2) Se obtienen las distancias de cada número borroso al máximo:

   $\forall\ i = 1, \ldots, n; \quad d(A_i, A_M)$

3) El número A_i más cercano a A_M, es decir aquel cuya distancia sea menor, se considera que es el mayor de los n números borrosos.

Cabe destacar que existen otras formas de establecer un orden a partir de la noción de distancia, ya sea a través de establecer un número borroso mínimo a partir del cual calcular la distancia, etc.

Ejemplo: Establecer un orden entre $A = [2, 6]$ y $B = [1, 8]$.

En primer lugar, se calcula el máximo: $A_M = A\ (\vee)\ B = [2, 8]$.

A continuación, se calcula la distancia al máximo:

$$d(A, A_M) = [|2 - 2| + |6 - 8|] = 2$$

$$d(B, A_M) = [|1 - 2| + |8 - 8|] = 1$$

Como se puede observar, la distancia de B al máximo es menor. Por tanto, se considera que B es el mayor en la ordenación ya que se acerca más a dicho máximo.

3.2.5.8. Otras tipos de distancias

Finalmente, para finalizar el apartado de distancias, destacar que en este trabajo se han considerado la distancia de Hamming, la distancia de Euclides y la distancia de Minkowski. Es conveniente destacar la existencia de una amplia gama de diferentes medidas de distancia, de entre las cuales se pueden destacar las siguientes:

- La distancia cuasi aritmética (se verá al desarrollar extensiones al OWAD en el capítulo 6).
- La distancia de Mahalanobis.
- La distancia de Manhattan (tiene mucha similitud con la de Hamming).
- La distancia de series temporales.
- La distancia Chi cuadrado.
- La distancia de Edit o de Levenshtein.
- La distancia de Dalmerau-Levenshtein.
- Etc.

En función del problema estudiado, resultará de mayor utilidad el utilizar una distancia u otra. Para más información, véase (Gómez-Alonso y Valls, 2008; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

3.2.6. Teoría general de expertones

3.2.6.1. Construcción de un expertón

Para explicar la construcción de un expertón, se utilizará un ejemplo numérico. Supongamos 10 expertos con la siguiente información (valuaciones en [0, 1]):

Experto 1	[0, 0.4]
Experto 2	[0.3, 0.5]
Experto 3	0.5
Experto 4	[0.2, 0.6]
Experto 5	[0.5, 0.8]
Experto 6	0.7
Experto 7	[0.6, 1]
Experto 8	[0.1, 0.4]
Experto 9	[0.7, 0.9]
Experto 10	0.8

En primer lugar, se calculan las frecuencias absolutas de los extremos inferiores y superiores de los intervalos, es decir, el número de veces que los expertos han dado un valor como extremo inferior y superior.

0	1	
0.1	1	
0.2	1	
0.3	1	
0.4		2
0.5	2	2
0.6	1	1
0.7	2	1
0.8	1	2
0.9		1
1		1

A continuación, se normalizan los datos estadísticos a través de las frecuencias relativas (dividiendo por el número de expertos (en este ejemplo 10)).

0	0.1	
0.1	0.1	
0.2	0.1	
0.3	0.1	
0.4		0.2
0.5	0.2	0.2
0.6	0.1	0.1
0.7	0.2	0.1
0.8	0.1	0.2
0.9		0.1
1		0.1

Finalmente, se obtiene la función acumulada complementaria, es decir, se empieza por el nivel 1 y se suman las frecuencias relativas ascendiendo en cada nivel.

0	1	1
0.1	0.9	1
0.2	0.8	1
0.3	0.7	1
0.4	0.6	1
0.5	0.6	0.8
0.6	0.4	0.6
0.7	0.3	0.5
0.8	0.1	0.4
0.9	0	0.2
1	0	0.1

A este resultado (función de frecuencias acumuladas complementarias) se le denomina expertón.

3.2.6.2. Minimización y maximización de expertones

Dados 2 expertones A y $B \subset E$:

Mínimo: $A\ (\wedge)\ B = C \Leftrightarrow \forall\ \alpha \in\ [0, 1]$
Máximo: $A\ (\vee)\ B = C \Leftrightarrow \forall\ \alpha \in\ [0, 1]$

Ejemplo:

$A =$

0	1	1
0.1	1	1
0.2	0.9	1
0.3	0.6	1
0.4	0.5	0.8
0.5	0.5	0.6
0.6	0.4	0.6
0.7	0.3	0.4
0.8	0.1	0.3
0.9	0.1	0.2
1	0	0.1

B =

0	1	1
0.1	0.9	1
0.2	0.7	1
0.3	0.7	0.8
0.4	0.6	0.8
0.5	0.3	0.6
0.6	0.1	0.5
0.7	0.1	0.3
0.8	0	0.2
0.9	0	0.1
1	0	0

$A\ (\wedge)\ B =$

0	1	1
0.1	0.9	1
0.2	0.7	1
0.3	0.6	0.8
0.4	0.5	0.8
0.5	0.3	0.6
0.6	0.1	0.5
0.7	0.1	0.3
0.8	0	0.2
0.9	0	0.1
1	0	0

$A\ (\vee)\ B =$

0	1	1
0.1	1	1
0.2	0.9	1
0.3	0.7	1
0.4	0.6	0.8
0.5	0.5	0.6
0.6	0.4	0.6
0.7	0.3	0.4
0.8	0.1	0.3
0.9	0.1	0.2
1	0	0.1

3.2.6.3. La noción de media en el expertizaje

La media proporciona un valor medio de un conjunto de elementos, en este caso, de expertos. En algunos casos, la importancia de cada experto puede ser diferente y esto lleva a tener que utilizar medias ponderadas. De forma general, para presentar el concepto de media se utilizará la media generalizada.

Media generalizada

$$M_p(a,\lambda) = \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i a_i^p \right)^{1/p}$$

con $\lambda_i \in [0, 1]$ y $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Obsérvese que:

- si $p = 1$, se obtiene la media aritmética ponderada.
- si $p = 2$, la media cuadrática ponderada.
- si $p = 1$ y $\lambda = 1/n$, se obtiene la media aritmética (simple).
- si $\lambda = 1/n$, se obtiene la media generalizada simple.

Ejemplo con media aritmética simple y ponderada. Supongamos que 5 expertos dan su opinión sobre un problema con las siguientes valuaciones.

Experto 1	[0.4, 0.7]
Experto 2	[0.2, 0.3]
Experto 3	0.5
Experto 4	[0.3, 0.5]
Experto 5	[0.4, 0.5]

Para calcular el valor medio de estas opiniones, se utilizará la media aritmética simple.

M = (1/5) ([0.4, 0.7] + [0.2, 0.3] + 0.5 + [0.3, 0.5] + [0.4, 0.5]) = [0.36, 0.5]

Por el contrario, si suponemos que la importancia de cada experto es diferente, entonces se tendrá que utilizar la media aritmética ponderada. Supongamos los siguientes grados de importancia para cada experto: $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.1$, $\lambda = 0.2$, $\lambda = 0.3$, $\lambda = 0.3$.

$M = 0.1 \times [0.4, 0.7] + 0.1 \times [0.2, 0.3] + 0.2 \times 0.5 + 0.3 \times [0.3, 0.5] + 0.3 \times [0.4, 0.5] =$ [0.37, 0.5]

Y de una forma similar, se podrían considerar otros casos particulares de la media generalizada ponderada como sería la media cuadrática, etc.

3.2.6.4. Esperanza matemática de un expertón

Para llevar a cabo su cálculo, se tiene que acumular sus valores de la izquierda por una parte, y los de la derecha por otra, sin tener en consideración el nivel 0, dividiendo luego el resultado por 10.

Ejemplo: (se cogen los datos del expertón A del apartado 3.2.6.2).

Esperanza matemática:

E(A) = (1/10) [[0, 0.1] + [0.1, 0.2] + [0.1, 0.3] + [0.3, 0.4] + [0.4, 0.6] + [0.5, 0.6] + [0.5, 0.8] + [0.6, 1] + [0.9, 1] + [1, 1] = [0.44, 0.6]

3.2.6.5. Operaciones con expertones

Se pueden utilizar un gran número de operaciones como el mínimo y el máximo, los cuales quedan englobados dentro de las T-normas y T-conormas. A continuación, se va a mostrar un ejemplo de cálculo de una T-conorma en un expertón.

Dados los expertones A y B de los apartados 3.2.6.2., se desea calcular la T-conorma: $X = 1\ (\wedge)\ (a + b)$; con $a \in A$, y $b \in B$.

1 (∧) (A + B) =

0	1	1
0.1	1	1
0.2	1	1
0.3	1	1
0.4	1	1
0.5	0.8	1
0.6	0.5	1
0.7	0.4	0.7
0.8	0.1	0.5
0.9	0.1	0.3
1	0	0.1

A continuación, se calculará la T-conorma (+), es decir, la suma algebraica: $a + b = a + b - ab$, para los expertones A y B.

A (+) B =

0	1	1
0.1	1	1
0.2	0.97	1
0.3	0.88	1
0.4	0.8	0.96
0.5	0.65	0.84
0.6	0.46	0.8
0.7	0.37	0.58
0.8	0.1	0.44
0.9	0.1	0.28
1	0	0.1

Y así sucesivamente, se podrían calcular otros tipos de T-normas o T-conormas.

3.2.6.6. Distancia de Hamming entre expertones

Se utiliza un proceso similar al explicado en el apartado de distancias con la diferencia que en este caso consideramos todas las valuaciones de los expertones excepto el nivel $\alpha = 0$. A continuación, para normalizar el resultado, se divide entre el número de valuaciones *n* consideradas (normalmente 10) y teniendo en cuenta que hay 10 valuaciones en el extremo inferior y 10 valuaciones en el extremo superior. Su formulación, será la siguiente:

Distancia a la izquierda: $d_I = (A,B) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_1(\alpha_i) - b_1(\alpha_i)\right|$

Distancia a la derecha: $d_D = (A,B) = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_2(\alpha_i) - b_2(\alpha_i)\right|$

Distancia total: $d(A,B) = d_I(A,B) + d_D(A,B)$

3.2.6.7. El contraexpertizaje

Existen muchos métodos de contraexpertizaje de entre los cuales, se puede destacar el siguiente. Pedir a expertos distintos de los que han realizado el primer expertizaje que realicen las estimaciones para poder establecer una comparación.

- Si ambos expertizajes proporcionan resultados similares, quiere decir que el resultado obtenido parece bastante fiable.
- En cambio, si los resultados obtenidos en los expertizajes son distintos, quiere decir que la información obtenida no es fiable ya que no hay acuerdo entre los expertos de ambos grupos.

Ejemplo: Supongamos que 5 expertos proporcionan las siguientes valuaciones.

Experto 1	[0.4, 0.7]
Experto 2	[0.3, 0.7]
Experto 3	[0.2, 0.3]
Experto 4	0.5
Experto 5	[0.4, 0.5]

A partir de esta información, se puede establecer el siguiente expertón.

$A =$

0	1	1
0.1	1	1
0.2	1	1
0.3	0.8	1
0.4	0.6	0.8
0.5	0.2	0.8
0.6	0	0.4
0.7	0	0.4
0.8	0	0
0.9	0	0
1	0	0

A continuación, se pide a otro grupo de expertos que estimen el mismo problema sin conocer los resultados del primer expertizaje.

Experto 1	[0.2, 0.5]
Experto 2	[0.4, 0.6]
Experto 3	[0.1, 0.3]
Experto 4	[0.5, 0.6]
Experto 5	[0.3, 0.6]

Con esta información, se establece el siguiente expertón.

$B =$

0	1	1
0.1	1	1
0.2	0.8	1
0.3	0.6	1
0.4	0.4	0.8
0.5	0.2	0.8
0.6	0	0.6
0.7	0	0
0.8	0	0
0.9	0	0
1	0	0

Para contrastar la información obtenida en los expertones, se calculará su esperanza matemática.

E(A) = [0.36, 0.54]

E(B) = [0.3, 0.52]

A continuación, se calculará la distancia entre las esperanzas matemáticas

$$d(E[A], E[B]) = \frac{|0.36 - 0.3| + |0.54 - 0.52|}{2} = 0.04 \Rightarrow 4\%$$

Como la distancia entre los 2 expertizajes es pequeña, se puede dar por válido el primer expertizaje. Es decir, la información proporcionada por los expertos, parece ser fiable.

3.2.6.8. Los R^+ - Expertones

Es una generalización a los expertones a través de extender sus resultados al campo de los números reales. A continuación, se muestra un ejemplo numérico para comprender su funcionamiento.

Ejemplo: Supongamos que 5 expertos proporcionan sus opiniones respecto a un problema el cual se encuentra delimitado por el siguiente intervalo de referencia: $[e_1, e_2] = [200, 300]$.

Experto 1	[0.4, 0.7]
Experto 2	[0.2, 0.7]
Experto 3	[0.2, 0.3]
Experto 4	[0.5, 0.8]
Experto 5	[0.4, 0.6]

A partir de esta información, se obtiene el siguiente expertón.

$A =$

0	1	1
0.1	1	1
0.2	1	1
0.3	0.6	1
0.4	0.6	0.8
0.5	0.2	0.8
0.6	0	0.8
0.7	0	0.6
0.8	0	0.2
0.9	0	0
1	0	0

Para obtener el R^+-expertón, se utilizará la siguiente ecuación: $[a_1, a_2] = e_1 + (e_2 - e_1) (\cdot) [\alpha_1, \alpha_2]$.

$200 + (300 - 200)\,A =$

0	300	300
0.1	300	300
0.2	300	300
0.3	260	300
0.4	260	280
0.5	220	280
0.6	200	280
0.7	200	260
0.8	200	220
0.9	200	200
1	200	200

Obsérvese que a partir de este resultado, también se puede obtener la esperanza matemática del *R*-expertón tomando todos los resultados menos el nivel α = 0 y dividiendo por 10.

$E[\tilde{A}] = [234, 262]$

3.2.6.9. M–expertones

Un m-expertón es un expertón en el que los intervalos de confianza son sustituidos por tripletas de confianza o por cuádruplos de confianza. Por tanto, su proceso de cálculo es el mismo, es decir, primero se calculan las frecuencias absolutas, después las frecuencias relativas, y finalmente las frecuencias relativas acumuladas que representan el m-expertón.

Ejemplo: Supongamos las siguientes opiniones de 5 expertos sobre un problema determinado.

Experto 1	[0.4, [0.5, 0.6], 0.7]
Experto 2	[0.1, [0.3, 0.4], 0.7]
Experto 3	[0.2, 0.3, 0.5]
Experto 4	[0.5, 0.8]
Experto 5	[0.2, [0.4, 0.5], 0.6]

A partir de esta información, se obtendría el siguiente m-expertón.

A =

0	1	1	1	1
0.1	1	1	1	1
0.2	0.8	1	1	1
0.3	0.4	1	1	1
0.4	0.4	0.6	0.8	1
0.5	0.2	0.4	0.6	1
0.6	0	0	0.4	0.8
0.7	0	0	0.2	0.6
0.8	0	0	0.2	0.2
0.9	0	0	0	0
1	0	0	0	0

A partir de aquí, se podría utilizar los m-expertones de una forma similar a los expertones (Kaufmann y Gil-Aluja, 1993; Kaufmann et al., 1994). Es decir, se podría definir su R^+-expertón, su esperanza matemática, etc.

3.3. Otros elementos para la toma de decisiones

3.3.1. Las relaciones

3.3.1.1. Introducción

Se entiende por relación a todo tipo de asociación capaz de poner en evidencia los niveles de conexión existente entre objetos físicos o mentales pertenecientes a un mismo conjunto o entre objetos de distintos conjuntos (Gil-Aluja, 1999).

Para llevar a cabo el análisis de las relaciones, en primer lugar se tiene que establecer la existencia de un conjunto de elementos:

$$E_1 = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$$

Entre los cuales puede existir cierto tipo de relación a un determinado nivel. También es posible que la relación tenga lugar a un cierto nivel, entre cada uno de los elementos de este conjunto E_1 con los de otro conjunto E_2:

$$E_2 = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$$

Estas relaciones pueden ser representadas de diversas formas. Por ejemplo, pueden ser representadas mediante la forma matricial:

	b_1	b_2	…	b_m
a_1	$\mu_{a_1b_1}$	$\mu_{a_1b_2}$	$\cdots$	$\mu_{a_1b_m}$
a_2	$\mu_{a_2b_1}$	$\mu_{a_2b_2}$	$\cdots$	$\mu_{a_2b_m}$
…	…	…	…	…
a_n	$\mu_{a_nb_1}$	$\mu_{a_nb_2}$	$\cdots$	$\mu_{a_nb_m}$

en donde:

$\mu_{ij} \in [0, 1]$
$i = a_1, a_2, \ldots, a_n$
$j = b_1, b_2, \ldots, b_n$

De estas relaciones, se pueden destacar algunos casos particulares.

1) Si se supone que los conjuntos E_1 y E_2 son iguales, $E_1 = E_2 = E$, el conjunto producto $E \times E$ reflejará la relación de los elementos del referencial con ellos mismos. Su representación matricial quedaría de la siguiente forma:

	a_1	a_2	…	a_m
a_1	μ_{11}	μ_{12}	…	μ_{1n}
a_2	μ_{21}	μ_{22}	…	μ_{2n}
…	…	…	…	…
a_n	μ_{n1}	μ_{n2}	…	μ_{nn}

en donde:

$\mu_{ij} \in [0, 1]$
$i, j, = 1, 2, \ldots, n$

2) Si se supone que no existe matización en cuanto a la intensidad de la relación, la relación, únicamente puede "existir" o "no existir". Su representación matricial quedaría de la siguiente forma (supongamos un ejemplo concreto):

	b_1	b_2	…	b_m
a_1	1	1	…	0
a_2	0	1	…	1
…	…	…	…	…
a_n	0	1	…	1

3) Si se consideran simultáneamente ambas restricciones, se llegaría a la siguiente representación matricial (supongamos un ejemplo concreto):

	a_1	a_2	…	a_n
a_1	1	1	…	0
a_2	0	1	…	1
…	…	…	…	…
a_n	0	1	…	1

Cuando se estudian las relaciones entre elementos de un mismo conjunto, se pueden analizar las siguientes propiedades:

1) Relación reflexiva borrosa: Se produce cuando se tiene la diagonal principal llena de 1.

2) Antisimetría borrosa: Se produce cuando la relación existente entre dos elementos del referencial *E* da lugar, en determinados casos, a una cierta pero no una total reciprocidad. Es decir, la intensidad o nivel de la relación no tiene por qué ser la misma cuando se contempla la relación de a_i con a_j de cuando se estudia la de a_j con a_i. Matricialmente, nos quedaría lo siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	.5	.8	.5	.6	.3	.2
a_2	.3	.4	.4	.7	.8	.4
a_3	.4	.2	.7	.1	.4	.9
a_4	.8	.3	.5	1	.5	.8
a_5	.4	.4	.8	.6	.6	.2
a_6	.9	.2	.7	.4	.5	0

Obsérvese que generalmente, se acepta que no se rompe la antisimetría si cuando alguno de los valores de $\mu_{a_i a_j}$ son iguales a 0, también lo son los de $\mu_{a_j a_i}$, es decir:

$$\mu_{a_i a_j} = \mu_{a_j a_i} = 0$$

3) Antisimetría perfecta: Se produce cuando:

$$\forall\ a_i, a_j \in E, \quad a_i \neq a_j$$
$$(\mu_{a_i a_j} > 0) \Rightarrow (\mu_{a_j a_i} = 0)$$

Un ejemplo matricial de relación antisimétrica perfecta podría ser el siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	.4	0	0	.4	0	0
a_2	.5	.9	0	0	.8	.9
a_3	1	0	0	0	0	0
a_4	0	0	.5	.3	.2	0
a_5	.5	0	.9	0	.5	0
a_6	.3	0	0	.6	0	.2

Obsérvese que en el ámbito booleano (cuando los valores de $\mu_{a_i a_j}$ se limitan a los extremos del intervalo [0, 1]), la antisimetría borrosa y la antisimetría perfecta quedan reducidas a un mismo tipo de antisimetría.

4) Simetría: Hace referencia a aquel tipo de relaciones en las cuales la intensidad de la relación de a_i hacia a_j es o se considera la misma que la de a_j hacia a_i. Es decir:

$$\forall\ a_i, a_j \in E, \quad a_i \neq a_j$$
$$\mu_{a_i a_j} = \mu_{a_j a_i}$$

A continuación, se muestra un ejemplo de relación simétrica:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	1	.5	.4	0	1	.3
a_2	.5	.4	.8	.3	.9	.6
a_3	.4	.8	.9	0	0	.5
a_4	0	.3	0	.4	.2	0
a_5	1	.9	0	.2	1	.7
a_6	.3	.6	.5	0	.7	0

5) Transitividad: Establece que la valuación de la relación directa tiene que ser mayor o igual a la más grande de las relaciones indirectas. Es decir:

$$\forall\ a_i, a_j, a_k \in E,$$
$$\mu_{a_i a_k} \underset{a_j}{\geq} (\mu_{a_i a_j} \wedge \mu_{a_j a_k}), \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

De esta forma, el segundo miembro de la desigualdad, constituye la convolución maxmin de la relación borrosa [R]. Es decir:

$$[R] \text{ o } [R] = [R]^2$$

De aquí se puede concluir que, para la existencia de transitividad es necesario y suficiente que $[R]^2$ no sea mayor que la originaria $[R]$. A continuación, se muestra un ejemplo de relación borrosa transitiva:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	1	.5	.5	.5	.5	.5
a_2	.2	.8	.8	.8	.5	.6
a_3	.2	.8	.9	.8	.5	.6
a_4	.2	.8	.8	.9	.5	.6
a_5	.2	.7	.7	.7	.5	.6
a_6	.2	.4	.4	.4	.4	.4

Si se obtiene $[R]^2 = [R] \text{ o } [R]$:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
a_1	1	.5	.5	.5	.5	.5
a_2	.2	.8	.8	.8	.5	.6
a_3	.2	.8	.9	.8	.5	.6
a_4	.2	.8	.8	.9	.5	.6
a_5	.2	.7	.7	.7	.5	.6
a_6	.2	.4	.4	.4	.4	.4

Como se puede observar, en la relación $[R]^2$ no existe casilla alguna con valor inferior a la correspondiente en $[R]$.

3.3.1.2. Tipos de relaciones

Relación de semejanza: Es aquel tipo de relación, la cual cumple las propiedades de reflexividad y simetría. A modo de ejemplo, una relación de semejanza en forma matricial podría ser el siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	.4	.9	.2	.7
a_2	.4	1	.2	.6	.5
a_3	.9	.2	1	.4	0
a_4	.2	.6	.4	1	.8
a_5	.7	.5	0	.8	1

Relación de similitud: Es aquel tipo de relación, en donde se cumplen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad. Un ejemplo matricial de relación de similitud podrías ser el siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	0	0	.4	.4
a_2	0	1	.8	0	0
a_3	0	.8	1	0	0
a_4	.4	0	0	1	.7
a_5	.4	0	0	.7	1

Relación de preorden: Es aquel tipo de relación en donde se cumplen las propiedades de reflexividad y transitividad. Por ejemplo, una relación de preorden expresada en forma matricial, podría ser el siguiente:

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	.8	.5	.7	.5
a_2	.2	1	.3	.2	.4
a_3	0	0	1	.1	.5
a_4	0	0	0	1	.2
a_5	0	0	0	.1	1

Relación de orden: Es aquel tipo de relación de preorden a la cual se le impone la condición de antisimetría. Es decir, es aquel tipo de relación en la cual se cumplen las propiedades de reflexividad, transitividad y antisimetría.

Debido a la existencia de dos tipos de antisimetría (borrosa y perfecta), se definen dos tipos de relaciones de orden.

a) Relación de orden no perfecto: Es aquella relación de orden en la cual se observa una antisimetría borrosa. A modo de ejemplo,

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	.8	.5	.7	.5
a_2	.2	1	.3	.2	.4
a_3	0	0	1	.1	.5
a_4	0	0	0	1	.2
a_5	0	0	0	.1	1

b) Relación de orden perfecto: Es aquella relación de orden en la cual se observa una antisimetría perfecta.

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
a_1	1	.8	.5	.7	.5
a_2	0	1	.3	.2	.4
a_3	0	0	1	.1	.5
a_4	0	0	0	1	.2
a_5	0	0	0	0	1

3.3.2. La asignación

3.3.2.1. Introducción

Se entiende por asignación al proceso mediante el cual cada elemento de un conjunto de objetos es adscrito a otro elemento perteneciente a otro conjunto de objetos de naturaleza diferente, en base a ciertas características, exigidas a un cierto nivel. Para ello, se utilizarán 2 algoritmos frecuentemente utilizados en modelos de selección como son el coeficiente de adecuación y la distancia de Hamming.

1) Coeficiente de adecuación:

$$\rho(P,T) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[1 \wedge (1-\mu_{kj}^{(T)} + \mu_{ij}^{(P)})\right]$$

donde $i = 1, 2, \ldots, m$; y $k = 1, 2, \ldots, p$.

Obsérvese que desde la perspectiva de la asignación: P = Objetos a asignar, y T = Objetos que van a recibir una asignación.

Y desde la perspectiva de la selección: P = Objetos reales (lo que tenemos para escoger), y T = Objeto ideal (lo que "imaginariamente" sería perfecto).

A continuación, se muestra un ejemplo numérico.

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
T =	.6	.9	.7	1	.8	.3	0

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
P_1 =	.2	.1	1	.9	.3	0	.4

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
P_2 =	0	.9	.8	1	.5	.4	0

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
P_3 =	.6	1	.9	.5	.7	.5	.8

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
P_4 =	.3	.8	.7	.4	1	.9	.6

	A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*G*
P_5 =	.4	.8	.6	1	.9	.3	.3

$\rho(P_1, T) = (0.6 + 0.2 + 1 + 0.9 + 0.5 + 0.7 + 1) / 7 = 0.70$
$\rho(P_2, T) = (0.4 + 1 + 1 + 1 + 0.7 + 1 + 1) / 7 = 0.87$
$\rho(P_3, T) = (1 + 1 + 1 + 0.5 + 0.9 + 1 + 1) / 7 = 0.91$
$\rho(P_4, T) = (0.7 + 0.9 + 1 + 0.4 + 1 + 1 + 1) / 7 = 0.85$
$\rho(P_5, T) = (0.8 + 0.9 + 0.9 + 1 + 1 + 1 + 1) / 7 = 0.94$

Obsérvese, a modo de ejemplo, que en la característica A de (P_1, T) se obtiene lo siguiente: $1 \wedge (1 - 0.6 + 0.2) = 0.6$.

En este ejemplo, se escogería el mayor resultado, es decir, P_5.

2) Distancia de Hamming

$$\delta(P,T) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left| \mu_{ij}^{(P)} - \mu_{kj}^{(T)} \right|$$

donde $i = 1, 2, \ldots, m$; y $k = 1, 2, \ldots, p$.

Si se utiliza la distancia de Hamming en el ejemplo anterior, se obtendrían los siguientes resultados:

$\delta(P_1, T) =$

$$\frac{1}{7}\left[|0.6-0.2| + |0.9-0.1| + |0.7-1| + |1-0.9| + |0.8-0.3| + |0.3-0| + |0-0.4| \right] = 0.40$$

$\delta(P_1, T) = 0.15$
$\delta(P_1, T) = 0.27$
$\delta(P_1, T) = 0.34$
$\delta(P_1, T) = 0.11$

En este caso, la alternativa óptima será aquella con una menor distancia ya que tendrá un mayor acercamiento al ideal. Es decir, la alternativa óptima es P_5.

3.3.2.2. Algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas

Para estudiar el proceso de asignación, se desarrollará un ejemplo numérico.

Supongamos 4 elementos a asignar: $E_1 = \{P_1, P_2, P_3, P_4\} = \{a, b, c, d\}$, y 3 elementos que van a recibir una asignación: $E_2 = \{T_1, T_2, T_3\} = \{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Para el conjunto E_1:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
a =	.7	.4	.8	.2	.9

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
b =	.3	.6	.9	.4	.6

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
c =	.5	.8	.7	.6	.8

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
d =	.9	.3	.8	.9	.4

Para el conjunto E_2:

	A	B	C	D	E
$\alpha =$	.6	.8	.9	.7	.6

	A	B	C	D	E
$\beta =$	.9	.4	.6	.8	.5

	A	B	C	D	E
$\gamma =$	.7	.5	.7	.3	.8

A partir de esta información inicial, se podría calcular el algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas de la siguiente forma:

1) Se calculan las distancias entre los elementos del conjunto E_1 con los elementos del conjunto E_2.

$$\delta(a, \alpha) = \frac{1}{5}\left[|0.7-0.6|+|0.4-0.8|+|0.8-0.9|+|0.2-0.7|+|0.9-0.6|\right] = \frac{1.4}{5} = 0.28$$

$$\delta(a, \beta) = \frac{1}{5}\left[|0.7-0.9|+|0.4-0.4|+|0.8-0.6|+|0.2-0.8|+|0.9-0.5|\right] = \frac{1.4}{5} = 0.28$$

Etc.

2) Estas distancias se pueden resumir en una matriz que representa las relaciones de alejamiento de cada elemento del conjunto E_1 respecto a cada elemento del conjunto E_2.

	α	β	γ
a	0.28	0.28	0.08
b	0.16	0.32	0.20
c	0.12	0.28	0.16
d	0.26	0.10	0.30

3) En muchos casos, resulta de utilidad pasar a una matriz de relaciones de acercamiento. Para ello, se calcula la matriz complementaria de la anterior.

	α	β	γ
a	0.72	0.72	0.92
b	0.84	0.68	0.80
c	0.88	0.72	0.84
d	0.74	0.90	0.70

4) A partir de esta relación borrosa, se llevará a cabo el proceso de asignación. La idea del proceso de asignación consiste en escoger el mayor valor de la matriz y establecer una asignación entre los elementos que intervienen. A continuación, se elimina la fila y la columna de dicho mayor valor, y se repite el proceso.

	α	β	γ
~~*a*~~	~~0.72~~	~~0.72~~	~~**0.92**~~
b	0.84	0.68	0.80
c	0.88	0.72	0.84
d	0.74	0.90	0.70

Es decir, se asigna "*a*" con "γ".

5) A continuación se repite el proceso con la parte de la matriz "no eliminada".

	α	β
b	0.84	0.68
c	0.88	0.72
~~*d*~~	~~0.74~~	~~**0.90**~~

Por tanto, se asigna "*d*" con "β".

6) Y así sucesivamente.

	α
b	0.84
c	**0.88**

Finalmente, se asigna "*c*" con "α", y "*b*" se queda sin asignación.

Resultado de las asignaciones

a	→	γ
d	→	β
c	→	α
b	→	Sin asignación

Además de las asignaciones finales, también se podría calcular el grado total de idoneidad sumando los niveles asignados. Es decir: 0.92 + 0.90 + 0.88 = 2.7.

Finalmente, también destacar que este mismo proceso se podría haber desarrollado con el coeficiente de adecuación. La diferencia se encuentra en que el coeficiente de adecuación nos da directamente "la matriz de relaciones de acercamiento" (sin pasar por la de alejamiento). Y a partir de aquí, el proceso de cálculo en las asignaciones sería el mismo.

También destacar, tanto para la distancia de Hamming como para el coeficiente de adecuación, que este proceso se podría haber resuelto mediante "la matriz de relaciones de alejamiento". La diferencia en este caso respecto del anterior se encuentra en el proceso de selección de valor óptimo de asignación, ya que en este caso se seleccionará el valor mínimo de la matriz en lugar de máximo. Aun así, los resultados en las asignaciones coinciden.

3.3.2.3. Otros algoritmos de asignación

Por último, también destacar que existen muchos otros métodos de asignación diferentes del algoritmo de asignación por eliminación de filas y columnas como son el algoritmo húngaro de asignación o el algoritmo Branch and Bound, entre otros. Para más información, véase (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; Gil-Aluja, 1999).

A modo de ejemplo, podríamos comentar algunas variantes del método Branch and Bound como son:

- Branch and Bound
- Branch and Cut
- Branch and Price
- Branch and Price and Cut
- Branch and Win
- Etc.

Para más información, véase por ejemplo, (Belov y Scheithauer, 2006; Little et al., 1963; Lawler y Wood, 1966; Pastor y Corominas, 2004; Pereira-Lopes y Valério de Carvalho, 2007).

3.3.3. La agrupación

3.3.3.1. Introducción

El proceso de agrupación hace referencia a la existencia de varios eventos u objetos los cuales, por sus características o cualidades, resultan indiferentes al sujeto decisor. En estos casos, es posible la formación de uno o varios grupos, dentro de los cuales, los elementos gozarán de la misma estimación, mientras que esta será distinta al pasar de uno a otro grupo.

Para llevar a cabo el estudio de la agrupación, resulta de gran utilidad el uso del concepto de afinidad (Kaufmann y Gil Aluja, 1992, Gil Aluja, 1999). Las afinidades se pueden definir como "aquellas agrupaciones homogéneas a determinados niveles, estructuradas ordenadamente, que ligan elementos de dos conjuntos de distinta naturaleza, relacionados por la propia esencia de los fenómenos que representan".

La noción de afinidad permite relacionar los elementos de un conjunto con los elementos de otro, lo cual queda representado a partir de matrices rectangulares definidas en $E_1 \times E_2$. A partir de este análisis, también se podrá obtener las subrelaciones máximas de similitud, las cuales consisten en la obtención de unas relaciones contenidas en la relación global. Es decir, $R \subset E_1 \times E_2$.

Para llevar a cabo el análisis de las afinidades, en primer lugar se tiene que partir del conocimiento de unos subconjuntos borrosos que definen un objeto P_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, a través de unas características o elementos C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, tal como se hace en el ámbito de las relaciones de semejanza. Los conjuntos son:

$$E_1 = \{P_j \,/\, j = 1, 2, \ldots, m\}$$

$$E_2 = \{C_i \,/\, i = 1, 2, \ldots, n\}$$

Y los correspondientes subconjuntos borrosos:

$$P_j = \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_n \\ \hline \mu_1^{(j)} & \mu_2^{(j)} & \ldots & \mu_n^{(j)} \end{array}$$

Donde: $0 \le \mu_i^{(j)} \le 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$.
$j = 1, 2, \ldots, m$.

Estos subconjuntos borrosos pueden ser reunidos formando una relación borrosa $[R]$, tal como:

$$[R] = \begin{array}{c|cccc} & C_1 & C_2 & \ldots & C_n \\ \hline P_1 & \mu_1^{(1)} & \mu_2^{(1)} & \ldots & \mu_n^{(1)} \\ P_2 & \mu_1^{(2)} & \mu_2^{(2)} & \ldots & \mu_n^{(2)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ P_m & \mu_1^{(m)} & \mu_2^{(m)} & \ldots & \mu_n^{(m)} \end{array}$$

En donde, $0 \leq \mu_i^{(j)} \leq 1$.

Con objeto de establecer el grado mínimo a partir del cual se considera la existencia de homogeneidad para cada elemento C_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, del conjunto E_2, se determina un límite o umbral θ_i. Por tanto, a los valores de las $\mu_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$; que cumplan $\mu_i^{(j)} \geq \theta_i$, se les asignará en una nueva matriz [B], unos valores para sus elementos $\beta_i^{(j)}$ iguales a 1, mientras que cuando sea $\mu_i^{(j)} < \theta_i$, se hará $\beta_i^{(j)}$ igual a cero. De esta forma, los θ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, constituyen los umbrales a partir de los cuales se considera que existe la deseada homogeneidad para cada elemento del conjunto E_2. Obsérvese que se podría hacer el mismo planteamiento tomando como base el conjunto E_1, si la naturaleza del problema tratado así lo exigiera.

Matricialmente, nos quedaría la relación booleana siguiente.

$$
[B] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & C_1 & C_2 & \ldots & C_n \\
\hline
P_1 & \beta_1^{(1)} & \beta_2^{(1)} & \ldots & \beta_n^{(1)} \\
\hline
P_2 & \beta_1^{(2)} & \beta_2^{(2)} & \ldots & \beta_n^{(2)} \\
\hline
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\hline
P_m & \beta_1^{(m)} & B_2^{(m)} & \ldots & \beta_n^{(m)} \\
\hline
\end{array}
$$

En donde, $\beta_i^{(j)} = \{0, 1\}$.

Obsérvese que la matriz [B], es el punto de partida para hallar las relaciones de afinidad.

3.3.3.2. Algoritmos para la obtención de afinidades

En la literatura, existen un gran número de técnicas para el cálculo de las afinidades. Uno de los principales métodos es aquel conocido como el algoritmo de la correspondencia inversa máxima. El proceso a desarrollar en este algoritmo, es el siguiente:

1) Elección entre E_1 y E_2, del conjunto que posee menor número de elementos.
2) Construcción del conjunto $\Pi(E_1)$ (suponiendo que el conjunto escogido es E_1) de todas sus partes, es decir, su “power set”.
3) Obtención de “la conexión a la derecha”, B^+, es decir, que para todo $A \in \Pi(E_1)$, B^+A recogerá los sucesores de todos los elementos que pertenecen a A.
4) Se escoge para todo conjunto no vacío de B^+A, el correspondiente de A que posee mayor número de elementos.
5) Las relaciones obtenidas forman un retículo de Galois, el cual permite una perfecta estructuración y ordenación de todas las afinidades posibles.

A continuación, se va a mostrar un ejemplo para poder observar el funcionamiento de dicho algoritmo.

Supongamos 2 conjuntos E_1 y E_2.

$$E_1 = \{a, b, c\}$$
$$E_2 = \{A, B, C, D\}$$

Los elementos de estos conjuntos se hallan ligados por la relación borrosa R siguiente:

$R =$

	A	B	C	D
a	.8	.2	.7	.9
b	.4	.8	1	.3
c	.1	.9	.7	.2

Supongamos los siguientes umbrales.

$$\theta_A = 0.7; \quad \theta_B = 0.8; \quad \theta_C = 0.6; \quad \theta_D = 0.8$$

Se halla la siguiente matriz booleana:

$R =$

	A	B	C	D
a	1		1	1
b		1	1	
c		1	1	

A partir de aquí, se inicia el algoritmo.

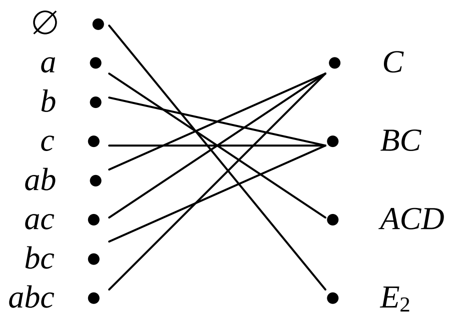
1) Se elige el conjunto con menor número de elementos:

$$E_1 = \{a, b, c\}$$

2) Se construye el "power set" $\Pi(E_1)$.

$$\Pi(E_1) = \{\varnothing, a, b, c, ab, ac, bc, abc = E_1\}$$

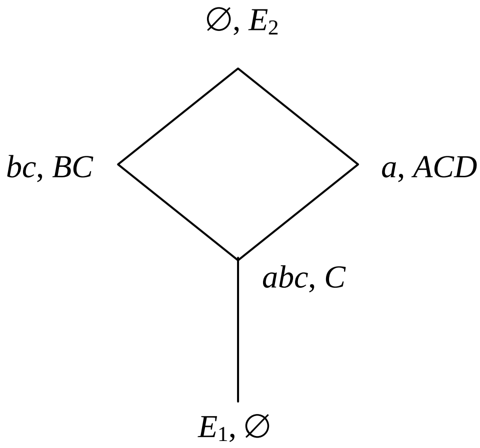
3) Se obtiene la conexión a la derecha B^+:



4) Se escoge para cada conjunto no vacío de la columna de la derecha, el que posee mayor número de elementos de la columna izquierda.

$$E_2 \to \varnothing; \quad ACD \to a; \quad BC \to bc; \quad C \to abc$$

5) Estas agrupaciones forman sendos retículos, los cuales serán de Galois si se añade la correspondencia formal $\varnothing \to E_1$.



Obsérvese que el estudio de las afinidades puede llevarse a cabo desde diferentes perspectivas como por ejemplo, considerando un solo conjunto E, o suponiendo que dentro de un único conjunto, además se cumple la propiedad de simetría.

3.3.3.3. Las subrelaciones máximas de similitud

Dentro del análisis de las afinidades en los casos en los cuales se analiza un único conjunto que posee la propiedad de simetría, si se le añade la propiedad de reflexividad, entonces se obtiene una relación de semejanza. Las relaciones de semejanza pueden ser tratadas con unos algoritmos que estudian las afinidades y que a su vez en algunos casos detectan lo que se conoce como las subrelaciones máximas de similitud. Obsérvese que estas subrelaciones poseen las propiedades de reflexividad, simetría y transitividad.

Para llevar a cabo el análisis, se parte de un conjunto de objetos físicos o mentales $E_1 = \{P_j \ / \ j = 1, 2, \dots, m\}$ que se desean agrupar a partir de ciertas cualidades o características $E_2 = \{C_i \ / \ i = 1, 2, \dots, n\}$. Cada objeto puede ser descrito a partir de sus cualidades o características mediante un subconjunto borroso:

	C_1	C_2	…	C_n
$P_j =$	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	…	$\mu_n^{(j)}$

Donde: $\mu_i^{(j)} \in [0, 1]$, $i = 1, 2, \dots, n$.

La agrupación de los objetos P_j, $j = 1, 2, \dots, m$; tomados de dos en dos, puede tener lugar, entre otros, a través del concepto de distancia. Si se adopta, por ejemplo, la distancia de Hamming, se obtendrán las desemejanzas entre cada par de objetos, en relación con las cualidades o características consideradas.

Dado que la distancia relativa de Hamming entre dos objetos tales que P_j y P_k es:

$$\delta(P_j, P_k) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \left| \mu_i^{(j)} - \mu_i^{(k)} \right| \right)$$

Con: j, k = 1, 2, …, m.

Se obtiene una matriz de distancias, es decir, una matriz de desemejanza tal como la siguiente, en la que se ha designado por δ_{jk} la distancia relativa entre los objetos P_j y P_k:

$$[D] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ \hline
P_1 & \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1m} \\ \hline
P_2 & \delta_{21} & \delta_{22} & \dots & \delta_{2m} \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
P_m & \delta_{m1} & \delta_{m2} & \dots & \delta_{mm} \\ \hline
\end{array}$$

en donde $\delta_{11} = \delta_{22} = \dots = \delta_{mm} = 0$, al ser nula la distancia de un objeto consigo mismo, y, en todo caso, $\delta_{jk} \in [0, 1]$.

Para hallar la matriz de semejanza, se puede recurrir a la operación de complementar con respecto a la unidad los elementos de la matriz de desemejanza, es decir:

$$s_{jk} = 1 - \delta_{jk}$$

Entonces, la matriz de semejanza nos quedaría de la siguiente forma.

$$[S] = \begin{array}{c|c|c|c|c|}
 & P_1 & P_2 & \dots & P_n \\ \hline
P_1 & s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1m} \\ \hline
P_2 & s_{21} & s_{22} & \dots & s_{2m} \\ \hline
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \hline
P_m & s_{m1} & s_{m2} & \dots & s_{mm} \\ \hline
\end{array}$$

Con: $s_{jk} \in [0, 1]$; and $s_{jk} = 1$, if $j = k$.

A partir de esta información inicial, se podría pasar a utilizar algún algoritmo para la obtención de las subrelaciones máximas de similitud como por ejemplo, el algoritmo de Pichat. Obsérvese que tiene que tratarse de relaciones que cumplan las propiedades de simetría, reflexividad y transitividad. La finalidad del algoritmo de Pichat es la obtención de submatrices o grafos transitivos. Su proceso es el siguiente:

1) El punto de partida viene dado por la existencia u obtención en su caso de una relación booleanas de semejanza (simétrica y reflexiva).
2) Debido a la simetría, se considera únicamente la diagonal principal y su parte superior en la matriz.
3) Se consideran sucesivamente los ceros (vacíos) de cada fila operando en ellas, una detrás de la otra a partir de la primera, de la siguiente forma:
    a. Se multiplica los elementos de aquellas columnas en las cuales existen ceros (vacíos).
    b. Se realiza la suma booleanas del elemento de la correspondiente fila con el producto anterior.
4) Las sumas halladas para cada fila son reunidas mediante el producto booleano, en términos mínimos, según las siguientes reglas:
    a. Las filas sin ceros (no hay suma para ellas) son excluídas del proceso.

b. Cuando el producto de sumas da la repetición de un sumando, sólo se considera uno de ellos. Así: $a \dot{+} a = a$.
c. Si en uno de los sumandos resultantes aparecen los mismos elementos que en otro, o los mismos más alguno o algunos más, se elimina el que posee mayor número de elementos. Así: $a \dot{+} \cancel{abc} = a$.

5) Se halla así, una suma de productos de elementos. Para cada uno de los sumandos se obtiene su complemento con relación al referencial. Cada uno de estos términos complementarios proporciona una subrelación máxima de similitud.

Obsérvese que existen otros métodos para obtener las subrelaciones máximas de similitud como por ejemplo, a través de utilizar una variante del algoritmo de la correspondencia inversa máxima.

A continuación, se va a mostrar un ejemplo sobre el funcionamiento del algoritmo de Pichat.

Dados los siguientes productos:

	A	B	C	D
P_1 =	0.8	0.6	0.7	0.7

	A	B	C	D
P_2 =	0.9	0.7	0.5	0.6

	A	B	C	D
P_3 =	0.4	0.7	0.6	0.7

	A	B	C	D
P_4 =	0.8	0.3	0.5	0.6

Obtener las subrelaciones máximas de similitud suponiendo $\alpha \geq 0.86$.

Solución: En primer lugar, se tendrá que calcular las distancias entre estos subconjuntos borrosos.

$$\delta(P_1, P_2) = \frac{1}{4}[|0.8-0.9|+|0.6-0.7|+|0.7-0.5|+|0.7-0.6|] = 0.125$$
$$\delta(P_1, P_3) = 0.150$$
$$\delta(P_1, P_4) = 0.150$$
$$\delta(P_2, P_3) = 0.175$$
$$\delta(P_2, P_4) = 0.125$$
$$\delta(P_3, P_4) = 0.250$$

Estos resultados se pueden presentar mediante la matriz de desemejanza:

$[D]$ =

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	0	0.125	0.150	0.150
P_2	0.125	0	0.175	0.125
P_3	0.150	0.175	0	0.250
P_4	0.150	0.125	0.250	0

Esta relación borrosa de desemejanza se puede convertir a una de semejanza complementando a la unidad cada uno de sus elementos:

$[S]$ =

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	0.875	0.850	0.850
P_2	0.875	1	0.825	0.875
P_3	0.850	0.825	1	0.75
P_4	0.850	0.875	0.75	1

A continuación, se construye la matriz booleana a partir del nivel α exigido, en este ejemplo, $\alpha \geq 0.86$.

$[B]$ =

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	1		
P_2	1	1		1
P_3			1	
P_4		1		1

Una vez se dispone de la matriz booleanas, se podría pasar a desarrollar el algoritmo de Pichat.

En primer lugar, se considera la parte superior de la diagonal principal $[B]$ (esta incluida).

$[B]$ =

	P_1	P_2	P_3	P_4
P_1	1	1		
P_2		1		1
P_3			1	
P_4				1

A continuación, se realiza la suma de productos para cada fila.

Fila P_1: $P_1 \dot{+} P_3 P_4$

Fila P_2: $P_2 \dot{+} P_3$

Fila P_3: $P_3 \dot{+} P_4$

Fila P_4: No se considera

Seguidamente, se calcula el producto booleano en términos mínimos.

$$S = (P_1 \dot{+} P_3 P_4)(P_2 \dot{+} P_3)(P_3 \dot{+} P_4) = (P_1 P_2 \dot{+} P_1 P_3 \dot{+} \cancel{P_2 P_3 P_4} \dot{+} P_3 P_4)(P_3 \dot{+} P_4)$$

$$= \cancel{P_1 P_2 P_3} \dot{+} P_1 P_2 P_4 \dot{+} P_1 P_3 \dot{+} \cancel{P_1 P_3 P_4} \dot{+} P_3 P_4 \dot{+} \cancel{P_3 P_4}$$

Por tanto, el resultado después de despejar todos aquellos que contienen a subrelaciones más pequeñas, es el siguiente:

$$S = P_1 P_2 P_4 \dot{+} P_1 P_3 \dot{+} P_3 P_4$$

Finalmente, se calcula el complemento de cada uno de los términos de S:

$$\overline{S} = P_3 \dot{+} P_2 P_4 \dot{+} P_1 P_2$$

Por lo cual, las subrelaciones máximas de similitud son:

	P_3
P_3	1

	P_2	P_4
P_2	1	1
P_4	1	1

	P_1	P_2
P_1	1	1
P_2	1	1

3.3.4. La ordenación

3.3.4.1. Introducción

El orden es una gradación en las preferencias de objetos físicos o mentales, establecida en base a la apreciación objetiva o subjetiva de sus propiedades, características o singularidades (Gil-Aluja, 1999).

En el proceso de ordenación, adquiere especial importancia el concepto de relación. En especial, se destaca el tipo de relación conocido como relación de orden. En resumen, si se analiza una matriz booleana, se puede decir que un elemento "*a*" es preferido a otro "*b*" si en la casilla (a, b) aparece un 1. Entonces, el orden quedaría representado de la siguiente manera.

$$a \rightarrow b$$

No obstante, se pueden encontrar otros casos en los cuales no es posible establecer una relación de ordenación. Esto sucede cuando aparece por ejemplo, un 1 en la casilla (a, c) y también un 1 en la casilla (c, a). En teoría de grafos, se considera que en estas situaciones existe un circuito. Obsérvese que en este caso se trata de un circuito muy corto pero es posible ampliarlo a situaciones de mayor complejidad donde intervienen más de dos elementos del referencial.

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & c \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

A partir de aquí, se observa que es necesario que haya una inexistencia de circuitos en el grafo representativo de las relaciones para que exista un orden entre objetos. Como se puede observar esto implica, entre otros aspectos, la propiedad de antisimetría explicada en al tema de relaciones.

Al estudiar la ordenación de unos elementos del referencial, se puede distinguir, principalmente, entre dos tipos de orden.

1) Orden total: Cuando es posible establecer una total ordenación entre los elementos del referencial.

   Ejemplo: Dado el conjunto referencial $E_1 = \{a, b, c, d\}$, se establecen las siguientes relaciones:

	a	*b*	*c*	*d*
a				1
b			1	
c	1			
d				

Es decir:

$$b \longrightarrow c \longrightarrow a \longrightarrow d$$

Como se puede observar, se dispone de un orden total ya que todos los elementos del referencial se hayan perfectamente ordenados.

2) Orden parcial: Cuando es posible ordenar algunos elementos del referencial pero no todos.

Ejemplo: Dado el conjunto referencial $E_1 = \{a, b, c, d\}$, se establecen las siguientes relaciones:

	a	*b*	*c*	*d*
a				1
b	1			
c	1			
d				

Es decir:

$$\begin{tikzcd} b \arrow[dr] & & \\ & a \arrow[r] & d \\ c \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

Por tanto, se observan dos órdenes distintos dentro del mismo problema.

$$b \longrightarrow a \longrightarrow d$$

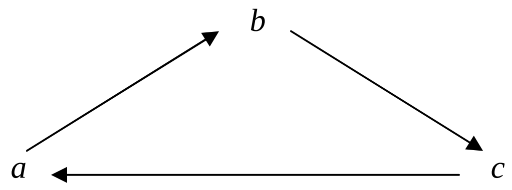
$$c \longrightarrow a \longrightarrow d$$

Por tanto, se concluye que estamos en una situación de orden parcial porque algunos de los elementos del referencial ("*a*" y "*d*") pueden ser ordenados mientras que otros elementos ("*b*" y "*c*") no pueden ser completamente ordenados.

3.3.4.2. Importancia de la agrupación de objetos indiferentes para la ordenación

La posible existencia de circuitos constituye una de las mayores dificultades para la ordenación. En estos casos, se requiere tratar el problema con más detalle para tratar de encontrar un "cierto" orden.

A modo introductorio, se puede establecer el siguiente circuito constituido por los objetos “*a*”, “*b*” y “*c*” cuya relación se reproduce a continuación.



Como se puede observar, resulta imposible establecer un orden. Cuando esto sucede, se recurre a la formación de grupos compuestos por aquellos objetos que se considerarán indiferentes. Sólo así es posible establecer un cierto orden, ahora entre grupos:

En base a esta idea, se pueden dar tres supuestos diferenciados:

1) No existen objetos indiferentes o equivalentes y, por tanto, tendrá lugar una ordenación por objetos individualizados.
2) Existen uno o varios grupos de objetos indiferentes (uno o varios circuitos) acompañados o no de objetos individualizados y se establece una ordenación de grupos y, si procede, de objetos.
3) Todos los objetos son indiferentes (un solo circuito). La ordenación no es posible y, por la indiferencia, tampoco es útil.

Para analizar estas situaciones, surge la necesidad de establecer un proceso, si es posible en forma de algoritmo, capaz de agrupar los objetos indiferentes, es decir, los que forman un circuito. Para ello, se recurrirá a la noción de clase de equivalencia y a su correspondiente de subgrafo fuertemente conexo.

<u>Algoritmo para la obtención de clases de equivalencia</u>

Está compuesto de los siguientes pasos:

1) Se parte de una matriz booleanas de relaciones binarias.
2) Se escoge arbitrariamente un elemento cualquiera del referencial *E*, P_j y se obtiene su cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{P_j\}$ y su cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{P_j\}$.
3) Se realiza la intersección $\hat{\Gamma}\{P_j\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{P_j\}$ hallándose como resultado el conjunto de elementos del referencial (vértices del grafo) que junto con el elemento escogido P_j forman una clase de equivalencia (subgrafo fuertemente conexo).
4) Se eliminan de la matriz booleanas de relaciones binarias, las filas y columnas correspondientes a la clase ya obtenida (vértices del subgrafo fuertemente conexo hallado). Se obtiene una matriz de orden inferior.
5) De esta matriz de orden inferior se escoge, de nuevo arbitrariamente, un elemento P_j, obteniendo su cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{P_j\}$ y su cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{P_j\}$.

6) Se continuará el proceso a partir del punto 3 y así sucesivamente hasta el agotamiento de la matriz.
7) Se habrá obtenido, entonces, todas las clases de equivalencia (subgrafos fuertemente conexos), surgidos sin orden alguno, como consecuencia de la elección arbitraria de los elementos del conjunto P_j.

A continuación, se muestra un ejemplo numérico sobre el funcionamiento de dicho algoritmo. Se considerará un caso en el cual no existen objetos indiferentes (primer supuesto comentado).

1) Se parte de la matriz booleana:

$$[S] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & x & 1 & 1 & & 1 & 1 \\ \hline b & & x & & & 1 & 1 \\ \hline c & & & x & & 1 & 1 \\ \hline d & & 1 & & x & 1 & 1 \\ \hline e & & & & & x & \\ \hline f & & & & & 1 & x \\ \hline \end{array}$$

Obsérvese que esta matriz binaria podría proceder de una matriz borrosa la cual ha sido transformada a binaria a través de utilizar un umbral a partir del cual se considera que la relación de cada casilla es relevante (es decir, 1) y por debajo del cual se considera que la relación no es relevante (es decir, 0).

2) Se escoge arbitrariamente un elemento cualquiera, por ejemplo *a*, se halla el cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{a\}$ y el cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$. Para ello, se coloca al lado de la matriz una columna que recogerá los elementos pertenecientes al cierre transitivo $\hat{\Gamma}\{a\}$ y debajo una fila que comprenderá los elementos relativos al cierre transitivo inverso $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$. En la columna $\hat{\Gamma}\{a\}$ se anota un 0 en la casilla *a* (elemento arbitrariamente escogido) y se observa en qué casillas de la fila *a* hay 1 (casillas *b*, *c*, *e*, *f*). Se escribe el número 1 (número siguiente al 0 de la casilla *a*) en las casillas *b*, *c*, *e*, *f*.

   Se busca en la fila *b* los 1 existentes en sus casillas. Los hay en la *e* y *f*. Se pondría en 2 (número que sigue al 1) si estas casillas de la columna $\hat{\Gamma}\{a\}$ estuvieran vacías, pero como en ellas ya existen un 1 pasamos a analizar la fila *c*. Procederíamos de la misma manera, con el mismo resultado. En la fila *e* no hay 1, y en la fila *f* sólo hay 1 en la casilla *e* ya rellenada.

   Se haría exactamente igual con el cierre transitivo inverso, empezando por poner un 0 en la casilla *a* de la fila $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$ pero como no hay ninguna casilla con 1 se cierra el proceso y colocamos *x* en el resto de casillas de $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$.

   Resulta así:

$[S] =$

	a	b	c	d	e	f	$\hat{\Gamma}\{a\}$
a	x	1	1		1	1	0
b		x			1	1	1
c			x		1	1	1
d		1		x	1	1	x
e					x		1
f					1	x	1
$\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$	0	x	x	x	x	x	

Se obtiene entonces:

$$\hat{\Gamma}\{a\} = \{a, b, c, e, f\}$$
$$\hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a\}$$

3) Tiene lugar la intersección de $\hat{\Gamma}\{a\}$ y $\hat{\Gamma}^{-}\{a\}$:

$$\hat{\Gamma}\{a\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{a\} = \{a, b, c, e, f\} \cap \{a\} = \{a\}.$$

Resulta como único elemento de esta clase de equivalencia, el elemento *a*.

4) Se eliminan de la matriz la fila *a* y la columna *a* y se obtiene:

$[S] =$

	b	c	d	e	f
b	x			1	1
c		x		1	1
d	1		x	1	1
e				x	
f				1	x

5) Se escoge arbitrariamente *b* y, por el mismo procedimiento, se halla $\hat{\Gamma}\{b\}$ y $\hat{\Gamma}^{-}\{b\}$.

$[S] =$

	b	c	d	e	f	$\hat{\Gamma}\{b\}$
b	x			1	1	0
c		x		1	1	x
d	1		x	1	1	x
e				x		1
f				1	x	1
$\hat{\Gamma}^{-}\{b\}$	0	x	1	x	x	

Se tiene:

$$\hat{\Gamma}\{b\} = \{b, e, f\}$$
$$\hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, d\}$$

6) Se realiza la intersección $\hat{\Gamma}\{b\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{b\}$:

$$\hat{\Gamma}\{b\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{b\} = \{b, e, f\} \cap \{b, d\} = \{b\}.$$

Por tanto, el único elemento de esta clase de equivalencia (subgrafo fuertemente conexo) es b.

Y así sucesivamente, se irían obteniendo la totalidad de las clases de equivalencia:

7) Después de haber obtenido la totalidad de las clases de equivalencia, la matriz ha quedado agotada y han aparecido, en este caso, tantas clases de equivalencia como elementos del referencial E. Si numeramos, de manera arbitraria evidentemente, las clases obtenidas, se tiene:

$$C_1 = \{a\} \qquad C_2 = \{b\} \qquad C_3 = \{c\}$$

$$C_4 = \{d\} \qquad C_5 = \{e\} \qquad C_6 = \{f\}$$

En este supuesto, pues, no existe indiferencia entre grupos de objetos y por tanto el orden a obtener lo será de manera individualizada.

Obsérvese que el caso de que sólo existiese una clase de equivalencia, se produce cuando al realizar el primer cierre transitivo y cierre transitivo inverso, la matriz queda agotada. Por ejemplo, en un conjunto de 5 elementos $E = \{a, b, c, d, e\}$, si en el primer cierre transitivo y cierre transitivo inverso se produce:

$$\hat{\Gamma}\{P_j\} = \{a, b, c, d, e\}$$
$$\hat{\Gamma}^{-}\{P_j\} = \{a, b, c, d, e\}$$

Es decir:

$$\hat{\Gamma}\{P_j\} \cap \hat{\Gamma}^{-}\{P_j\} = \{a, b, c, d, e\}$$

Entonces, se comprueba la existencia de una sola clase de equivalencia ya que la matriz quedaría agotada. En otras palabras, todos los elementos del conjunto quedarían englobados dentro del mismo circuito.

3.3.4.3. Establecimiento de un orden a partir de la función ordinal

Una vez formadas las clases de equivalencia, resulta posible establecer una ordenación entre las mismas. Existen diversos caminos cuya utilización depende, entre otros factores, de los planteamientos realizados y de los objetivos a alcanzar. En este trabajo, se expondrá únicamente el que parte de la noción de la función ordinal.

Obtener una función ordinal significa descomponer un grafo de clases (o de objetos si éste fuera el caso) en el que por definición no existen circuitos, de tal manera que un vértice C_j preferido a otro C_i, no se halla en caso alguno en un nivel anterior al correspondiente a C_i.

Se han elaborado varios algoritmos en base al concepto de función ordinal. A continuación, se muestra uno de ellos que se destaca por su simplicidad (Gil-Aluja, 1999). Se conoce como el algoritmo de Demoocrom. Para su desarrollo, se deben seguir los siguientes pasos:

1) Las relaciones de los objetos, dos a dos, son expresadas mediante una matriz booleana.
2) Se sitúa una fila debajo de la matriz, haciendo coincidir las casillas con las columnas. En esta fila se coloca, en cada casilla, la suma de los 1 que hay en la casilla que le corresponde.
3) El o los 0 que aparecen son los vértices sin predecesores y forman, por tanto, el nivel N_0.
4) Se eliminan las filas de la matriz correspondientes a los elementos que son los vértices del nivel N_0.
5) Se forma una segunda fila debajo de la matriz, se colocan cruces en las casillas con 0 en la primera fila y se suman los 1 de las columnas en la matriz que queda, colocando la suma en las casillas correspondientes de la segunda fila.
6) El o los 0 que aparecen, son los vértices sin predecesor cuando no están los del nivel N_0, por lo que forman el nivel N_1.
7) Se vuelve a la fase “4)” y siguientes hasta que el proceso se autoagota.

A continuación, se muestra el mismo ejemplo que el utilizado mediante el otro algoritmo. Como se observará, los resultados mediante ambos procedimientos son iguales.

1) Se parte de la matriz booleana:

[S] =

	a	*b*	*c*	*d*	*e*	*f*
a	x	1	1		1	1
b		x			1	1
c			x		1	1
d		1		x	1	1
e					x	
f					1	x

2) Se sitúa debajo de la matriz una fila Λ_0 colocándose en las correspondientes casillas la suma de los unos de cada columna.

	a	b	c	d	e	f
a	x	1	1		1	1
b		x			1	1
c			x		1	1
d		1		x	1	1
e					x	
f					1	x

Λ_0	0	2	1	0	5	4

3) El primer nivel N_0 está formado por las casillas en donde aparece un cero, es decir, "*a*" y "*d*".
4) Se eliminan las filas "*a*" y "*d*".
5) Se forma una segunda fila Λ_1 debajo de la Λ_0 colocando cruces en las casillas "*a*" y "*d*" y sumando los 1 de cada columna.

	a	b	c	d	e	f
b		x			1	1
c			x		1	1
e					x	
f					1	x

Λ_0	0	2	1	0	5	4
Λ_1	x	0	0	x	3	2

6) El nivel N_1 estará formado por los elementos en cuyas casillas existen ceros en la fila Λ_1, es decir "*b*" y "*c*".
7) Se eliminan las filas "*b*" y "*c*".
8) Se forma una tercera fila Λ_2 debajo de la Λ_1, añadiendo los correspondientes cruces en las casillas "*b*" y "*c*" y sumando los 1 de cada columna.

	a	b	c	d	e	f
e					x	
f					1	x

Λ_0	0	2	1	0	5	4
Λ_1	x	0	0	x	3	2
Λ_2	x	x	x	x	1	0

9) El nivel N_2 estará formado por el elemento "*f*" dado que en la casilla de Λ_2 existe un cero.
10) Al eliminar la fila "*f*" queda una matriz con una sola fila.
11) Se forma una cuarta fila Λ_3 debajo de Λ_2 añadiendo una cruz en la casilla "*f*".

	a	b	c	d	e	f
e					x	
Λ_0	0	2	1	0	5	4
Λ_1	x	0	0	x	3	2
Λ_2	x	x	x	x	1	0
Λ_3	x	x	x	x	0	x

12) El nivel N_3 estará formado por "*e*".

Se ha agotado la matriz y se dispone del orden deseado:

$N_0 = \{a, d\}$
$N_1 = \{b, c\}$
$N_2 = \{f\}$
$N_3 = \{e\}$

Para finalizar, también podría resultar de interés el analizar este algoritmo en el caso de que sólo tuviésemos una clase de equivalencia. A continuación, se muestra un ejemplo.

Se parte de la siguiente matriz:

$$[S] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & x & 1 & & 1 & \\ \hline b & & x & & & 1 \\ \hline c & 1 & & x & & \\ \hline d & & & 1 & x & \\ \hline e & 1 & & & 1 & x \\ \hline \end{array}$$

Al colocar la primera fila Λ_0 y sumar los 1 de las columnas se tiene:

$$[S] = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|} & a & b & c & d & e \\ \hline a & x & 1 & & 1 & \\ \hline b & & x & & & 1 \\ \hline c & 1 & & x & & \\ \hline d & & & 1 & x & \\ \hline e & 1 & & & 1 & x \\ \hline \end{array}$$

Λ_0	2	1	1	2	1

Se observa que en la fila Λ_0 no existen 0, lo cual indica la existencia de al menos un circuito, es decir objetos indiferentes. Este algoritmo constituye un medio automático de comprobar si en un grafo existen circuitos, es decir, indiferencia entre dos o más objetos.

4. Introducción a los operadores *OWA*

4.1. Introducción al modelo original de Yager (1988)

4.1.1. Introducción

Un modelo más completo a los anteriores criterios clásicos es el propuesto por Yager (1988) cuando generaliza los criterios optimista, pesimista, de Hurwicz y de Laplace, en un único modelo a través del cual los otros 4 criterios son el resultado particular de adoptar una determinada actitud ante la incertidumbre. Además, los otros criterios explicados anteriormente, también son extensibles a los *OWA Operators* (Yager, 1999; 2004) aunque no se consiga una generalización natural como era el caso de los otros 4 criterios.

Los operadores *OWA* son unos instrumentos que permiten agregar la información. Es decir, a partir de una serie de datos se puede obtener un único valor representativo de la información. Como característica adicional de los operadores *OWA* se puede decir que el valor representativo obtenido es un valor agregado de acuerdo con unos parámetros de optimismo/pesimismo predeterminados. De esta forma, cada decisor puede agregar la información de una forma distinta según cual sea su grado de optimismo o pesimismo. Cabe destacar que desde un punto de vista más matemático, se puede decir que los operadores *OWA* sirven para agregar la información dentro de unos límites delimitados por el mínimo y el máximo. A continuación, se hará un breve resumen sobre dichos operadores *OWA*.

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *OWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4.1}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos (estados de la naturaleza) con las ponderaciones (coeficientes). Se puede observar que también podemos expresar esta agregación en una notación vectorial como:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = W^T B \tag{4.2}$$

En esta expresión, W es el vector *OWA* de pesos asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado (Yager y Filev, 1999); donde el j-ésimo componente en B es

b_j siendo este el j-ésimo más grande de los a_i. Usando esta notación vectorial, podemos distinguir claramente la parte del proceso que es lineal (la multiplicación matricial) de la parte no-lineal (la formulación de B).

Un *OWA Operator* es una media. Esto es reflejo del hecho de que el operador tiene las siguientes propiedades:

(1) Conmutatividad: cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación.
(2) Monotonía: Si $a_i \geq d_i \ \forall i \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$.
(3) Limitado: $\mathrm{Min}\{a_i\} \leq F(a_1,\ldots, a_n) \leq \mathrm{Max}\{a_i\}$.

Es esta 3ª propiedad la que efectivamente lo convierte en un operador de medias. Una importante implicación de esta 3ª propiedad es la idempotencia del operador: si $a_i = a$, $\forall i \ \Rightarrow \ F(a_1,\ldots, a_n) = a$.

Otro aspecto a destacar son las medidas introducidas (Yager, 1988; 1996a; 2002) para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta.

La primera medida hace referencia al carácter actitudinal del decisor $\alpha(W)$ y es definido como (Yager, 1988):

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{4.3}$$

Como se puede observar, $\alpha \in [0, 1]$. Cuanto más peso esté localizado cerca del tope de W, más cerca estará α de 1 y viceversa. Cabe destacar que para el criterio optimista u operador máximo $\alpha = 1$, para el pesimista $\alpha = 0$, y para el criterio de Laplace $\alpha = 0.5$.

La segunda medida introducida también por Yager (1988), se conoce como la entropía o dispersión de W. Es definida como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4.4}$$

Esto puede ser usado para ofrecer una medida sobre la información que está siendo usada en la agregación. Por ejemplo, si $w_j = 1$ para algún j (conocido como *step-OWA* (Yager, 1993)), entonces $H(W) = 0$, lo cual implica que la información usada es mínima. Por el otro lado, si $w_j = 1/n$ para todo j, entonces la entropía de dispersión es máxima.

Otra medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de favoritismo hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* ($Bal(W)$) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{4.5}$$

Como se puede observar, $Bal(W) \in [-1, 1]$. Para el criterio optimista o también conocido como operador máximo obtenemos $Bal(W) = 1$. Para el criterio pesimista o operador mínimo se obtiene $Bal(W) = -1$. Para el criterio de Laplace o media aritmética se obtiene $Bal(W) = 0$. En general, para valores cercanos a 1, quiere decir que la agregación está dando mayor importancia a los mayores valores de la agregación o dicho de otra forma, a los valores optimistas. Por el otro lado, para valores cercanos a -1, quiere decir que la agregación esta dando mayor importancia a los menores valores de la agregación o dicho de otra forma, a los valores pesimistas. En cambio, para valores cercanos a 0, quiere decir que el vector W utilizado está dando una importancia similar a los valores optimistas y pesimistas.

Una cuarta medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de divergencia de W (Yager, 2002). Se dice que esta medida resulta útil para aquellos casos en donde la medida de dispersión y el carácter actitudinal resultan incompletos. Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{4.6}$$

Como se puede observar, para el caso optimista y pesimista, $Div(W) = 0$. De forma general, podemos decir que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

A modo de ejemplo, vamos a mostrar una situación en donde esta medida podría resultar de utilidad. Supongamos $n = 9$ y tenemos dos vectores de pesos W y W^*. Para W tenemos que $w_2 = w_8 = 0.5$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq 2,8$. Para W^* tenemos que $w_4 = w_6 = 0.5$ para todo $j \neq 4,6$. Como se puede observar, $\alpha(W) = \alpha(W^*) = 0.5$, $H(W) = H(W^*) = \ln(2)$ y $BAL(W) = BAL(W^*) = 0$. Por tanto, estas tres medidas no nos permiten distinguir entre los vectores de ponderaciones. En cambio, mediante esta cuarta medida, sí se puede distinguir entre dichos vectores. En este ejemplo, tendríamos que $Div(W) = 0.140625$ y $Div(W^*) = 0.015625$. Es decir, el vector W^* tiene una menor divergencia entre sus coeficientes, lo cual resulta obvio para este ejemplo ya que intuitivamente se observa que la divergencia entre 4 y 6 es menor que la divergencia entre 2 y 8.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación (Yager, 1992a), tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending OWA (DOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending OWA (AOWA) operator*. Las razones por las cuales este aspecto resulta relevante están expuestas en (Merigó y Casanovas, 2006a; 2007a). En resumen, esta distinción es necesaria para poder expresar adecuadamente el carácter actitudinal del decisor ante situaciones de beneficios y ante situaciones de costes. El operador *DOWA* tiene la misma definición que el operador *OWA*. Para el operador *AOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función $F:R^n \rightarrow R$ es un *AOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4.7}$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los a_i. Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *AOWA*, vemos como los argumentos b_j están ordenados de forma ascendente (Fodor et al, 1995): $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, mientras que en el operador *OWA* (o *DOWA*), el orden es descendente: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Cabe destacar que Yager denominó al operador *AOWA* como operador dual (Yager, 1992a).

Cabe destacar que los vectores del *DOWA* y *AOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWA* (o *OWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWA operator*. Cabe destacar que ambos operadores pueden ser utilizados para situaciones en donde el máximo argumento es el mejor resultado (situación de beneficios) o para situaciones en donde el mínimo argumento es el mejor resultado (situación de costes). Pero para una mejor coordinación entre ambos, lo correcto sería utilizar uno de ellos para una situación y el otro para la otra situación.

El operador *AOWA* cumple las mismas propiedades que el operador *OWA*. Es decir, también cumple la monotonía, la conmutatividad, la idempotencia y la delimitación entre el máximo y el mínimo.

Si estudiamos el carácter actitudinal del decisor mediante el operador *AOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1}\right) \tag{4.8}$$

Como se puede observar, $\alpha \in [0, 1]$. Cuanto más peso esté localizado cerca de los primeros coeficientes del vector W, más cerca estará α de 0 y viceversa. Cuanto más peso esté localizado cerca de los últimos coeficientes del vector W, más cerca estará α de 1. Cabe destacar que para el criterio optimista $\alpha = 1$, para el pesimista $\alpha = 0$, y para el criterio de Laplace $\alpha = 0.5$.

En cuanto a la medida de dispersión de W, simplemente destacar que se obtienen los mismos resultados con ambos operadores a pesar de que sus ordenaciones son diferentes.

Para la medida de balance, se obtiene la siguiente expresión:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(2j-n-1)}{n-1} w_j \tag{4.9}$$

En este caso, también se observa que $Bal(W) \in [-1, 1]$. Igualmente, para el criterio optimista se obtiene, $Bal(W) = 1$, para el pesimista $Bal(W) = -1$ y para el de Laplace $Bal(W) = 0$.

Finalmente, si analizamos la medida de divergencia para el operador *AOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{4.10}$$

En este caso también se comprueba que tanto el criterio optimista como el pesimista, tienen $Div(W) = 0$. De forma general, también se obtiene que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

4.1.2. Tipos de operadores *OWA*

A continuación, se va a estudiar una amplia gama de casos particulares de operadores *OWA*. Para ello, se van a analizar diferentes alternativas a utilizar a la hora de fijar el vector de ponderaciones *W*. Como resulta evidente, a través de escoger una manifestación diferente del vector de pesos, somos capaces de obtener diferentes tipos de agregaciones. De entre ellas, se encuentran las agregaciones propuestas previamente en los criterios de decisión clásicos.

(1) Para el criterio optimista: $w_1 = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1 \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_j\}$
(2) Para el criterio pesimista: $w_n = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq n \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_j\}$
(3) Para el criterio de Laplace: $w_j = 1/n, \forall j \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
(4) Para el criterio de Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1, n \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \alpha\text{Max}\{a_j\} + (1 - \alpha)\text{Min}\{a_j\}$.

Estos criterios clásicos también pueden ser estudiados a través del operador *AOWA*.

(1) Para el criterio optimista: $w_n = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq \text{n} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_j\}$
(2) Para el criterio pesimista: $w_1 = 1$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1 \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_j\}$
(3) Para el criterio de Laplace: $w_j = 1/n, \forall j \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
(4) Para el criterio de Hurwicz: $w_n = \alpha$, $w_1 = 1 - \alpha$ y $w_j = 0, \forall j \neq 1, n \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \alpha\text{Max}\{a_j\} + (1 - \alpha)\text{Min}\{a_j\}$.

Como se puede observar, la metodología es muy similar en ambos casos y se comprueba que $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DOWA* (o *OWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWA operator*. Cabe destacar que en este caso se ha supuesto una situación de beneficios en donde el mayor valor es el mejor resultado. Si estudiásemos una situación de costes, los resultados obtenidos se invertirían en ambos casos. Como la relación entre el operador *OWA* y *AOWA* es directa, para el resto de casos particulares únicamente consideraremos el caso con operadores *OWA*. Obviamente, la obtención del caso particular de operador *AOWA* es automática mediante la relación anterior.

En primer lugar, vamos a estudiar una serie de casos particulares que se obtienen directamente del vector de pesos *W*. La media ponderada (*Weighted average* (*WA*)) se obtiene cuando la ordenación de los argumentos a_i es la misma que la ordenación de los argumentos b_j.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene, $OWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = b_k$, donde b_k es el k-ésimo más grande de los argumentos a_i. Este tipo de operador se conoce como el *step-OWA operator* (Yager, 1993). Cabe destacar que el *step-OWA operator* se convierte en el máximo si $k = 1$ y en el mínimo si $k = n$.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-OWA operator* (Yager, 1993). Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-OWA operator* se convierte en el máximo si $m = k = 1$, en el mínimo si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética si $m = n$ y $k = 1$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic-OWA average* (Yager, 1996b). El *olympic-OWA average* se transforma en la mediana si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-OWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

De forma general, la mediana se obtiene de la siguiente forma (Yager, 1994). En primer lugar se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos a_i. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande a_i.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada (Yager, 1994). En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los a_i tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z OWA weights* (Yager, 2003). En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.

Otra familia interesante de operadores *OWA* es el *S-OWA operator* (Yager, 1994). Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-OWA operator*. El *orlike S-OWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo. El *andlike S-OWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-OWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo. Finalmente, el *generalized S-OWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde α, β

$\in$ [0, 1] y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-OWA operator* se convierte en el *andlike S-OWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-OWA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-OWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz.

Otro tipo de operador *OWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados (Yager, 1993). Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-OWA operator* (Yager, 1993; Yager y Filev, 1994).

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{4.11}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos a_i. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética y si $\alpha = \infty$, se obtiene el máximo. Otra familia de *OWA* operators que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1-b_j)^{\alpha}} \tag{4.12}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos a_i. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo. Un tercer tipo de operadores *OWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{4.13}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos a_i. En este caso también se obtiene la media si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, se obtiene la media harmónica y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo. Otros tipos de agregaciones dependientes han sido estudiados en (Xu, 2006d).

En Filev y Yager (1998), se sugirieron otros dos métodos para determinar las ponderaciones *OWA*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *OWA* es aquel conocido como el *centered OWA weights*. Este tipo de operador ha sido propuesto recientemente por Yager (2007) y dice que un operador *OWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered OWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered OWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered OWA* se le conoce como *non-inclusive centered OWA operator*. En este tipo de *centered OWA* se encuentra como caso particular la mediana.

Un caso especial de *centered OWA* es el *Gaussian OWA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{4.14}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{4.15}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{4.16}$$

Se pueden definir los *OWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{4.17}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener los coeficientes es el método funcional introducido por Yager (1996b). De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *OWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{4.18}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. Varios métodos han sido propuestos en los últimos años de entre los cuales se pueden destacar (O'Hagan, 1990; Filev y Yager, 1995; Yager, 1995a; Troyano y Yager, 2005; Fullér y Majlender, 2001; 2003; Majlender, 2005; Wang y Parkan, 2005; Wang et. al., 2007; Amin y Emrouznejad, 2006; Ahn, 2006; Liu, 2006; *in press*; Wu et. al., 2007). A continuación, se va a comentar alguno de estos métodos. El primer método propuesto fue el de O'Hagan (1990) en donde se determinaban las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método es conocido como el *maximal entropy OWA* (*MEOWA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} - \sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (n-j) w_j = \alpha(W) = \alpha \tag{4.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Filev y Yager (1995) sugirieron un método analítico para obtener las ponderaciones *MEOWA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange. Este problema ha sido posteriormente estudiado por Fullér y Majlender (2001).

Otro método similar es el propuesto por Yager (1995a). Este método consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Cabe destacar que la variabilidad se estudia con la varianza de las ponderaciones $D^2(W)$. A este método se le denomina *minimal variability OWA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (n-j) w_j = \alpha \tag{4.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Este método ha sido posteriormente estudiado por Fullér y Majlender (2003) a través de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker. Estas condiciones también han sido estudiadas en (Hong, 2006).

Otra variante a estos métodos es la propuesta de Majlender de utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Cabe destacar que la entropía de Rényi $H_\beta(W)$ es una extensión de la medida de entropía tradicional de Shannon (1948). Esta propuesta se conoce como *maximal Rényi entropy OWA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^\beta = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^\beta\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que el *MEOWA weights* es un caso particular de este último método cuando $\beta = 1$.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones es la propuesta de Wang y Parkan (2005) en donde se debe resolver un problema de programación para un nivel determinado de optimismo (o tendencia al máximo). Este método obtiene las ponderaciones a través de minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se le denomina *minimax disparity OWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j\in\{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.22}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal. Otro aspecto a resaltar es la reciente introducción de un método dual al anterior problema (Amin y Emrouznejad, 2006). También cabe mencionar la propuesta de Liu (*in press*) sobre una visión unificadora entre el *minimax disparity OWA weights* y el *minimal variability OWA weights*.

4.1.3. Ejemplo ilustrativo: Selección de inversiones

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *OWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables en cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables en cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones. De entre los muchos problemas decisionales que se podrían plantear, se puede destacar los problemas de selección de recursos humanos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1986; Gil-Aluja, 1996; J. Gil-Lafuente, 2002), selección de productos financieros (A.M. Gil-Lafuente, 2001; Merigó y Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2006d; 2007a), selección de inversiones (Merigó y Gil-Lafuente, 2007e), selección de inmovilizado y la selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, estudios, etc.

En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de inversiones ya que en función del significado que se le de a la inversión, esta podría generalizar a una gran variedad de situaciones. Desde un punto de vista genérico, la selección de recursos humanos, productos financieros, inmovilizado, viviendas, etc., pueden ser vistos como un caso particular de inversión. Cabe destacar que en el capítulo de aplicaciones empresariales se considerará a la inversión desde un punto de vista empresarial mientras que al caso general se le denominará *selección de productos en general*.

Ejemplo (basado en (Herrera et. al., 2000)): Supongamos que a una empresa inversora se le plantean cinco posibles inversiones y se desea seleccionar aquella que mejor se adapta a sus necesidades.

(1) A_1: invertir en una empresa de coches.
(2) A_2: invertir en una empresa de comida.
(3) A_3: invertir en una empresa de ordenadores.
(4) A_4: invertir en una empresa química.
(5) A_5: invertir en una empresa de televisores.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada inversión pueda reportar a la empresa. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza S_k que podrían ocurrir en el futuro. Los resultados esperados para cada inversión son los siguientes:

Tabla: Matriz de pagos esperados (suponemos en millones de euros).

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	30	30	50	70	20	30
A_2	40	80	–10	70	100	–50
A_3	10	0	20	40	10	150
A_4	30	40	40	50	20	50
A_5	60	–30	70	70	50	10

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones $W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$. En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la inversión mas adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (*AM*), media ponderada (*WA*), *OWA* y *AOWA*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*AM*	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	70	20	38.33	38	33	45
A_2	100	–50	38.33	30	16	58
A_3	150	0	38.33	58	25	59
A_4	50	20	38.33	40	34	42
A_5	70	–30	38.33	37	23	50

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el máximo, la media ponderada o el operador *AOWA*, nuestra decisión será escoger la inversión A_3. Si se utiliza el mínimo, la decisión será escoger la inversión A_1 o la A_4. Mediante el operador *OWA* la decisión consiste en escoger la alternativa A_4. Finalmente, mediante la media aritmética, todas las inversiones son igualmente válidas.

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones *OWA* mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente en el capítulo 4.1. Se va a considerar el *step-OWA operator*, la mediana-*OWA*, el *olympic average*, el *S-OR-OWA operator*, el *S-AND-OWA operator*, y las dos clases de *E-Z OWA weights*. Cabe destacar que se considerará k = 3 para el *step-OWA* y para los *E-Z OWA*. Para el *S-OR-OWA* se supone α = 0.4 y para el *S-AND-OWA* se supone β = 0.4. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *OWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *OWA*

	Step	*Mediana*	*Olympic*	*S-OR*	*S-AND*	*EZ-1*	*EZ-2*
A_1	30	30	35	51	31	26.66	50
A_2	70	55	45	63	3	–6.66	83.33
A_3	20	15	20	83	23	6.66	70
A_4	40	40	40	43	31	30	46.66
A_5	60	55	47.5	51	11	10	66.66

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *step-OWA* o el *EZ-OWA 2*, la decisión será escoger la inversión A_2. Si se utiliza la mediana, la inversión óptima será la A_2 o la A_5. Mediante el *olympic average* la inversión óptima es la A_5. Con el *E-Z OWA 1*, la decisión consiste en escoger la A_4. Finalmente, si se utiliza el *S-OR-OWA* la decisión será escoger la A_3 y mediante el *S-AND-OWA*, la A_1 o la A_4.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las inversiones. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una inversión. Como aspecto a resaltar, podemos decir que cada operador nos da un orden diferente de las inversiones. Por tanto, según el criterio utilizado, el decisor tomará una decisión diferente. La lógica subyacente de estos métodos está en que se supone que el decisor habrá cogido aquel criterio o vector de ponderaciones que más se adapte a sus intereses. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las inversiones

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 = A_5 \succ A_4$	*Mediana*	$A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
Mínimo	$A_1 = A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2$	*Olympic average*	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
AM	$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$	*S-OR-OWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 = A_5 \succ A_4$
WA	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2$	*S-AND-OWA*	$A_1 = A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2$
OWA	$A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2$	*E-Z OWA 1*	$A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2$
AOWA	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$	*E-Z OWA 2*	$A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
Step-OWA	$A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$		

Como se puede observar según el tipo de agregación *OWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del inversor también.

4.2. Extensiones a los operadores OWA

A continuación, se va estudiar algunas de las principales extensiones sobre los operadores *OWA*. Cabe destacar que las extensiones que se estudiarán en este apartado son aquellas extensiones que se han denominado en el trabajo como extensiones de nivel 1. Se les denomina “de nivel 1” porque se está indicando que son extensiones que añaden una característica genérica a los operadores *OWA* pero no más. En el apartado 4.3., se estudiarán las extensiones de nivel 2, es decir aquellas que añaden dos características genéricas a los operadores *OWA*.

4.2.1. *Induced OWA operator*

4.2.1.1. Introducción

Yager y Filev (1999), presentaron una extensión a los operadores *OWA* denominada *IOWA Operator*. Su principal característica reside en un proceso de reordenación más complejo en el cual los argumentos a_i no son ordenados por sus cantidades. En este caso, la ordenación de los argumentos es inducido por otras variables u_i denominadas las variables de ordenación inducidas. Este operador resulta de gran utilidad para tratar problemas decisionales de gran complejidad donde los intereses del decisor no sólo se reducen a un grado de optimismo ante la incertidumbre. El *IOWA Operator* es definido de la siguiente forma.

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *IOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (4.23)$$

donde b_j es el valor a_i del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y a_i es la variable del argumento.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, podemos distinguir entre el *Descending IOWA (DIOWA) operator* y el *Ascending IOWA (AIOWA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación (Merigó y Casanovas, 2006b; 2007c). El *DIOWA operator* tiene la misma definición que el *IOWA operator*. El *AIOWA operator* se define de la siguiente forma.

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *AIOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (4.24)$$

donde b_j es el valor a_i del par *OWA* que tiene el j-ésimo más pequeño de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y a_i es la variable del argumento. Como se puede observar, la definición es prácticamente la misma con la diferencia que ahora el orden de las variables inducidas es ascendente.

El operador *IOWA* es una media. Esto es debido a que el operador es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = IOWA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle \ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$, donde $(d_1, \ldots, d_n)$ es cualquier permutación de los argumentos $(a_1, \ldots, a_n)$. Es monótono porque si $a_i \geq d_i$, para todo a_i, entonces, $IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq IOWA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle \ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$. Es limitado porque el operador *IOWA* está delimitado entre el máximo y el mínimo. Es decir, $\text{Min}\{a_i\} \leq IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \leq \text{Max}\{a_i\}$. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo a_i, entonces, $IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = a$.

Otro aspecto a destacar en el operador *IOWA* es el problema de empates en el proceso de ordenación de los argumentos. En el caso de los operadores *OWA*, este hecho no resultaba conflictivo ya que el resultado era el mismo independientemente de qué argumento se escogiera primero en la ordenación. En el caso del operador *IOWA* esto no sucede así porque la ordenación se elabora con variables inducidas y esto implica que los empates pueden producirse con argumentos que tienen diferente valor. Para solucionar este problema, la política comúnmente aceptada es la propuesta por Yager y Filev (1999) en donde se sustituyen los argumentos empatados por su media aritmética.

También cabe destacar que los procesos de ordenación no tienen que venir necesariamente dados por un orden numérico. Como Yager y Filev (1999) explican, se puede coger cualquier valor de ordenación con el único requerimiento de que tenga un orden lineal. Entonces, esto permite poder utilizar diferentes tipos de atributos en las variables inducidas de ordenación como por ejemplo, el poder mezclar números con palabras en las agregaciones, siguiendo con las ideas de Zadeh (1996).

Cabe destacar que en este caso resulta inapropiado utilizar el carácter actitudinal $\alpha(W)$ ya que los intereses del decisor son más complejos que el grado de optimismo estudiado para los operadores *OWA*. Igualmente, la medida de balance $Bal(W)$ y la medida de divergencia $Div(W)$, tampoco resultan de gran utilidad en estos operadores. Excepcionalmente, se podrían estudiar como medida de tendencia al máximo pero su significado no sería de gran utilidad. Por otra parte, las medidas que sí resultan de gran utilidad en estos casos son las medidas de entropía ya que su significado es el mismo que en los operadores *OWA*. En entre estas medidas podríamos destacar la comentada en el capítulo de operadores *OWA*, $H(W)$, basada en la tradicional medida de Shannon (1948), así como otras extensiones a esta medida como son (Rényi, 1961; Daróczy, 1970; Aczél y Daróczy, 1975; Havrda y Charvat, 1967).

4.2.1.2. Tipos de *IOWA operators*

En este apartado, se va a analizar diversos tipos de operadores *IOWA*. De forma similar a lo comentado con los operadores *OWA*, se pueden obtener diferentes casos particulares a través de escoger una manifestación diferente en las ponderaciones. Por ejemplo, se pueden obtener los criterios clásicos de decisión como son el máximo, el mínimo, la media aritmética o la media ponderada. También cabe destacar que el operador *OWA* es un caso particular de esta formulación.

El máximo se consigue si $w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, entonces, $IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Max}\{a_i\}$. El mínimo se obtiene si $w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \text{Min}\{a_i\}$, entonces, $IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Min}\{a_i\}$. De forma genérica, si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene $IOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = b_k$, donde b_k es el argumento a_i con el k-ésimo más grande de las variables inducidas u_i. Cabe destacar que este caso general es conocido como el *step-IOWA operator*. La media aritmética se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo a_i. La media ponderada se consigue cuando $u_i > u_{i+1}$, para todo i. Finalmente, el operador *OWA* se consigue si la posición de las variables u_i coincide con la posición de los argumentos b_j tal que b_j es el j-ésimo más grande de los a_i. Cabe destacar la posibilidad de considerar los operadores máximo, mínimo, etc., desde la perspectiva de las variables inducidas donde el máximo es el máximo de las variables inducidas, etc.

Otras casos particulares de operadores *IOWA* pueden ser obtenidos a través de escoger diferentes vectores de ponderaciones. Por ejemplo, cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, estamos utilizando el *window-IOWA operator*. Cabe destacar que k y m tienen que ser números enteros tales que $k + m - 1 \leq n$. También cabe señalar que si $m = k = 1$, y la posición inicial del mayor u_i es también la posición inicial del mayor a_i, entonces, el *window-IOWA* se convierte en el máximo. Si $m = 1$, $k = n$, y la posición inicial del menor u_i es también la posición inicial del menor a_i, entonces, el *window-IOWA* se convierte en el mínimo. Y si $m = n$ y $k = 1$, el *window-IOWA* se transforma en la media aritmética.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, se está utilizando el *olympic induced average*. Cabe destacar que si $n = 3$ o $n = 4$, el *olympic induced average* se convierte en el *IOWA median* y si $m = n - 2$ y $k = 2$, el *window-IOWA* se transforma en el *olympic induced average*. También cabe destacar que el *olympic induced average* se convierte en el *olympic average* si $w_p = w_q = 0$, tal que $u_p = \text{Max}\{a_i\}$ y $u_q = \text{Min}\{a_i\}$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z IOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases. En la primera clase, se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$, y en la segunda clase, se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$

y w_j = (1/k) para $j = n - k + 1$ hasta n. Cabe destacar que el *E-Z IOWA weights* se convierte en el *E-Z OWA weights* para la primera clase si la posición de las variables u_i es la misma que la posición de los b_j tal que b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, desde j = 1 hasta k. Y para la segunda clase, este caso aparece si las posiciones de los u_i y de los b_j es la misma desde $j = n - k + 1$ hasta n.

Otro caso interesante es la mediana obtenida con el operador *IOWA* y su respectiva mediana ponderada. Para la mediana, si n es impar se asigna $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al argumento a_i con el [(n + 1)/2]-ésimo más grande de los u_i. Si n es par, se asigna por ejemplo, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con los (n/2)-ésimo y [(n/2) + 1]-ésimo más grande de los u_i. Cabe destacar que la mediana obtenida con el operador *IOWA* es equivalente a la obtenida con el operador *OWA* si la ordenación de las variables u_i coincide con la de los argumentos b_j tal que b_j es el j-ésimo más grande de los a_i. Para la mediana ponderada de los *IOWA*, se selecciona el argumento a_i que tiene la k-ésima variable inducida u_i más grande tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior a 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta k – 1 es menor a 0.5. En este caso, también se obtiene la mediana ponderada de los operadores *OWA* si las ordenaciones de las variables inducidas y de los argumentos coinciden.

Otro tipo de operador *IOWA* es el *S-IOWA operator*. Para este tipo, se tiene que distinguir entre 3 casos posibles, el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-IOWA operator*. El *orlike S-IOWA operator* se consigue cuando $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para todo $j \neq p$ con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética y si $\alpha = 1$, el máximo. El *andlike S-IOWA operator* se consigue cuando $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, $u_q = \text{Min}\{a_i\}$, y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para todo $j \neq q$ con $\beta \in [0, 1]$. En este caso, si $\beta = 0$ se obtiene la media y si $\beta = 1$, el mínimo. Finalmente, el *generalized S-IOWA operator* se obtiene cuando $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, con $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, con $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para todo $j \neq p,q$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. Cabe señalar que si $\alpha = 0$, el *generalized S-IOWA operator* se convierte en el *andlike S-IOWA operator* y si $\beta = 0$, en el *orlike S-IOWA operator*.

Otras familias de operadores *IOWA* que se pueden desarrollar son aquellas que dependen de los objetos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-IOWA operator* de la siguiente manera:

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{4.25}$$

con $\alpha \in (-\infty, \infty)$ y b_j es el valor a_i del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i. Cabe destacar que la suma de las ponderaciones tiene que ser 1 y $w_j \in [0,1]$. También cabe señalar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética y si $\alpha = \infty$, el máximo. Otra familia de operador *IOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)^{\alpha}} \tag{4.26}$$

con $\alpha \in (-\infty, \infty)$ y b_j es el valor a_i del par *OWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i. En este caso también se consigue la media aritmética si $\alpha = 0$ y si $\alpha = \infty$, el mínimo. Una tercera familia de operadores *IOWA* con ponderaciones que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^{\alpha}} \tag{4.27}$$

con $\alpha \in (-\infty, \infty)$ y b_j es el valor a_i del par *OWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i. En este caso también se consigue la media aritmética si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, se obtiene la media harmonica y si $\alpha = \infty$, el mínimo.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones es el método funcional conocido como el *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Puede ser formulado de la siguiente forma. Sea f una función f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Utilizando está función *BUM* se obtienen las ponderaciones *IOWA* w_j para $j = 1$ hasta n como:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{4.28}$$

Utilizando este método, se puede observar fácilmente que este método satisface que la suma de las ponderaciones sea 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro tipo de operadores *IOWA* que podría ser utilizado en la agregación es el *centered IOWA weights*. Siguiendo la misma metodología que la utilizada por Yager (2007) en los operadores *OWA*, se puede decir que un operador *IOWA* es una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente respecto del centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto al centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar la posibilidad de considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. A estas situaciones se les denomina *softly decaying centered IOWA operator*. Un ejemplo de este caso particular de operadores centrados es la media aritmética. Otra situación particular aparece si se elimina la tercera condición. A estos casos se les denomina *non-inclusive centered IOWA operator*. Un caso particular de este tipo de agregación centrada es la mediana con operadores *IOWA*.

Un tipo especial de operadores *IOWA* centrados son las ponderaciones *IOWA* Gaussianas. Para definir las ponderaciones, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{4.29}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{4.30}$$

Suponiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{4.31}$$

se definen las ponderaciones *IOWA* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{4.32}$$

Cabe destacar que la suma de las ponderaciones tiene que ser 1 y $w_j \in [0,1]$.

4.2.1.3. Ejemplo ilustrativo: Selección de productos financieros

A continuación, se va a elaborar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *IOWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones, como por ejemplo, selección de recursos humanos, productos financieros, inversiones, inmovilizado, estrategias, y productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, etc. En este apartado, se desarrollará un ejemplo para la selección de productos financieros.

Ejemplo (basado en (A.M. Gil-Lafuente (2001)): Supongamos que una empresa está interesada en adquirir un producto financiero y en el mercado se le presentan cinco alternativas diferentes A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Para ello, se pide a un grupo de expertos que evaluen a cada producto financiero en función de una serie de características que se consideran principales. Estas características son C_1 = el precio del dinero, C_2 = plazo de devolución, C_3 = posibilidades de renovación, C_4 = fraccionamiento de la amortización y C_5 = rapidez en la concesión.

Estas características se evaluan con valores entre 1 y 10 siendo este último el mejor resultado posible. Para evitar complicaciones con evaluaciones multiexperto suponemos un único resultado agregado de todas las opiniones de los expertos. Las evaluaciones agregadas para cada producto financiero son las siguientes.

Tabla: Matriz de evaluaciones.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	4	4	6	8	7
A_2	5	6	9	2	7
A_3	3	6	6	8	6
A_4	5	9	2	4	10
A_5	3	6	8	8	4

Como el proceso de decisión es bastante complejo, se desconoce cuál de estas características es la más importante pero se desea establecer una serie de ponderaciones ya que el decisor desea dar más importancia a una serie de factores. Para ello, establece un proceso de reordenación de los resultados basado en un complejo mecanismo. Este mecanismo se resume mediante los resultados que se muestran a continuación.

Tabla: Variables inducidas de los argumentos.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	5	7	6	4	8
A_2	3	6	4	2	6
A_3	3	5	6	3	8
A_4	4	7	3	8	5
A_5	5	2	6	4	8

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es el producto financiero mas adecuado para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (*AM*), media ponderada (*WA*), *OWA*, *IOWA* y *AIOWA*. Cabe destacar que en caso de empate entre las variables de ordenación inducidas, se utilizará la media aritmética en todos los casos. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*AM*	*WA*	*OWA*	*IOWA*	*AIOWA*
A_1	8	4	5.8	6.3	5.4	5.9	5.7
A_2	9	2	5.8	6	5.1	5.35	6.25
A_3	8	3	5.8	6.1	5.3	5.75	5.85
A_4	10	2	6	6.5	5.2	5.8	6.2
A_5	8	3	5.8	5.9	5.3	6	5.6

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el máximo, la media aritmética o la media ponderada, nuestra decisión será escoger el producto financiero A_4. Si se utiliza el mínimo, la decisión consistirá en escoger el producto financiero A_2 o el A_4. Mediante el operador *OWA* la decisión consiste en escoger la alternativa A_1. Si se utiliza el operador *IOWA*, se escogerá A_5. Finalmente, mediante el operador *AIOWA*, la decisión será escoger el producto financiero A_2.

A continuación, vamos a estudiar otros tipos de agregaciones *IOWA* mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente en el Capítulo 4.2.1.2. Se va a considerar el *step-IOWA operator*, la mediana-*IOWA*, el *olympic-IOWA*, el *S-OR-IOWA operator*, el *S-AND-IOWA operator*, y las dos clases de *E-Z IOWA weights*. Cabe destacar que se considerará $k = 3$ para el *step-IOWA* y para los *E-Z IOWA*. Como se puede observar, el *step-IOWA* coincide con la mediana-*IOWA*. Para el *S-OR-IOWA* se supone $\alpha = 0.4$ y para el *S-AND-IOWA* se supone $\beta = 0.4$. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *IOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *IOWA*

	Step	*Mediana*	*Olympic*	*S-OR*	*S-AND*	*EZ-1*	*EZ-2*
A_1	6	6	4.66	6.68	5.08	5.66	6
A_2	9	9	6.83	7.08	4.28	7.33	5.33
A_3	6	6	5.83	6.68	4.68	6	5.66
A_4	10	10	8	7.6	4.4	7.66	5.66
A_5	3	3	6.33	6.68	4.68	5	5.66

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *step-IOWA*, la mediana, el *olympic-IOWA*, el *S-OR-IOWA* o el *EZ-IOWA 1*, la decisión será escoger el producto financiero A_2. Si se utiliza el *S-AND-IOWA* o el *EZ-IOWA 2*, el producto financiero óptimo será el A_1.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de los productos financieros. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de un producto financiero y se puede observar como cada operador nos da un orden diferente de los productos financieros. Por tanto, según el criterio utilizado, el decisor tomará una decisión diferente. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las inversiones

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_4 \succ A_2 \succ A_1 = A_5 = A_4$	*Step-IOWA*	$A_4 \succ A_2 \succ A_1 = A_3 \succ A_5$
Mínimo	$A_1 \succ A_3 = A_5 \succ A_2 = A_4$	*Mediana-IOWA*	$A_4 \succ A_2 \succ A_1 = A_3 \succ A_5$
AM	$A_4 \succ A_1 = A_2 = A_3 = A_5$	*Olympic-IOWA*	$A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1$
WA	$A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_5$	*S-OR-IOWA*	$A_4 \succ A_2 \succ A_1 = A_3 = A_5$
OWA	$A_1 \succ A_3 = A_5 \succ A_4 \succ A_2$	*S-AND-IOWA*	$A_1 \succ A_3 = A_5 \succ A_4 \succ A_2$
IOWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2$	*E-Z-IOWA 1*	$A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$
AIOWA	$A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$	*E-Z-IOWA 2*	$A_1 \succ A_3 = A_4 = A_5 \succ A_2$

Como se puede observar según el tipo de agregación *IOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión de la empresa también.

4.2.2. *Linguistic OWA operator*

4.2.2.1. Introducción al modelo de Herrera et al. (1995)

Los primeros modelos de decisión con información lingüística y utilizando los operadores *OWA* fueron desarrollados en (Herrera et. al., 1995; Bordogna y Pasi, 1995). Posteriormente, han ido apareciendo nuevos modelos lingüísticos, de los cuales podemos destacar el de Xu (2004) y el de Herrera y Martínez (2000). La idea que subyace en los modelos con información lingüística está en la existencia de situaciones de la vida cotidiana que no pueden ser tratados con valores numéricos. Entonces, se requiere otra alternativa que pueda tratar problemas de este tipo en donde los grados de incertidumbre son muy elevados. Para ello, una buena alternativa para analizar estos problemas puede ser la utilización de valores lingüísticos. La aproximación lingüística representa aspectos cualitativos mediante variables lingüísticas (Zadeh, 1975a; 1975b; 1975c).

En primer lugar, vamos a analizar el modelo de Herrera et. al. (1995). Para ello vamos a explicar brevemente algunos conceptos básicos sobre el modelo lingüístico a utilizar en este caso. Cabe destacar que existen diferentes métodos para tratar problemas con información lingüística (Bonissone, 1982; Herrera y Herrera-Viedma, 1997; Yager, 1995b).

Se tienen que seleccionar los descriptores lingüísticos apropiados para el conjunto de términos y sus respectivas semánticas. Una posibilidad para generar el conjunto de términos lingüísticos consiste en proveer directamente el conjunto de términos a través de considerar todos los términos distribuidos en una escala en donde existe un orden total. Por ejemplo, un conjunto de siete términos S podrían venir expresados de la siguiente forma:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M, s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Generalmente, en estos casos, se requiere que en el conjunto de términos lingüísticos exista:

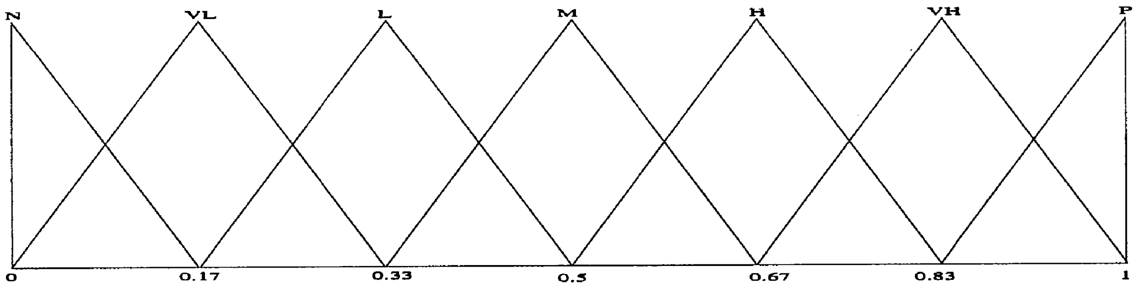
(1) Un operador de negación: $\mathrm{Neg}(s_i) = s_j$ tal que $j = g+1-i$.
(2) El conjunto está ordenado: $s_i \leq s_j$ si y solo si $i \leq j$.
(3) Operador máximo: $\mathrm{Max}(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \geq s_j$.
(4) Operador mínimo: $\mathrm{Min}(s_i, s_j) = s_i$ si $s_i \leq s_j$.

La semántica de los términos viene dada mediante números borrosos definidos en el intervalo [0, 1], el cual suele estar descrito mediante funciones de pertenencia. Una forma computacionalmente eficiente para caracterizar un número borroso es a través de utilizar una representación basada en parámetros de su función de pertenencia (Bonissone, 1986). Debido a que las expresiones lingüísticas suelen ser aproximaciones, algunos autores consideran que las funciones lineales de pertenencia trapezoidales son suficientemente válidas para capturar la vaguedad de dichas expresiones lingüísticas ya que puede resultar imposible e innecesario obtener valores más acertados (Delgado et. al., 1993). Esta representación paramétrica se consigue mediante cuádruplos (a, b, d, c), donde b y d indican el intervalo en donde el valor de la función de pertenencia es 1, mientras que los límites izquierdo y derecho quedan reflejados en a y c. Un caso particular del anterior es aquel en donde las funciones de pertenencia son triangulares, es decir, $b = d$. Este caso particular queda representado por una tripleta (a, b, c).

Por ejemplo, se puede asignar las siguientes semánticas al conjunto de siete términos lingüísticos:

P = *Perfect* = (.83, 1, 1)	*L* = *Low* = (.17, .33, .5)
VH = *Very High* = (.67, .83, 1)	*VL* = *Very Low* = (0, .17, .33)
H = *High* = (.5, .67, .83)	*N* = *None* = (0, 0, .17)
M = *Medium* =(.33, .5, .67)	

Gráficamente:



Cabe destacar la existencia de otras representaciones no-trapezoidales como por ejemplo la que utiliza funciones Gaussianas (Bordogna y Pasi, 1993).

Con esta información inicial, se puede pasar a analizar los operadores *OWA* con información lingüística. Para el modelo de Herrera et. al. (1995), tenemos lo siguiente.

Definición: Sea $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ el conjunto de etiquetas a agregar, y W es el vector de ponderaciones de dimensión n tal que $w_j \in [0, 1]$ y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, entonces, el *Linguistic OWA operator*, es definido como:

$$\begin{aligned} LOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) &= W^T B = C^m\{w_k, b_k, k = 1, \ldots, m\} \\ &= w_1 \otimes b_1 \oplus (1 - w_1) \otimes C^{m-1} \{\beta_h, b_h, h = 2, \ldots, m\} \end{aligned} \tag{4.33}$$

donde $\beta_h = w_h / \sum_2^m w_k$, $h = 2, \ldots, m$, y $B = \{b_1, \ldots, b_m\}$ es un vector asociado a A, tal que:

$$B = \sigma(A) = \{a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(n)}\}$$

donde:

$$a_{\sigma(j)}, \leq a_{\sigma(i)}, \quad \forall i \leq j,$$

siendo σ una permutación sobre el conjunto de etiquetas A. Este operador verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y limitado por el máximo y el mínimo (Herrera et. al., 1995). Cabe destacar la existencia de una versión ascendente denominada *Inverse-LOWA* (*I-LOWA*) *operator* (Herrera y Herrera-Viedma, 1997). Para más información, se puede consultar (Herrera et. al., 1996a; 1996b; 1996c; 1997).

4.2.2.2. Introducción al modelo de Herrera y Martínez (2000a)

El modelo de Herrera y Martínez (2000a) surge como un método que trata de solucionar las carencias de los anteriores modelos con información lingüística. Principalmente, el inconveniente que mostraban los modelos lingüísticos clásicos (Bonissone y Decker, 1986; Delgado et al., 1993; Degani y Bortolan, 1988) era una pérdida de información a la hora de operar (*computing with words* (Zadeh y Kacprcyk, 1999)) con ellos ya que los resultados tenían que estar expresados en su forma original. Por tanto, Herrera y Martínez argumentaron la necesidad de solventar este problema a través de proponer un nuevo método que permitía operar sin pérdida de información y sin falta de precisión.

Desde un punto de decisional, el modelo de 2-tuplas lingüísticas puede ser tratado de diferentes formas. En este trabajo, se utilizará como método de decisión para situaciones en donde la información viene expresada de forma lingüística. Cabe destacar que esta información lingüística puede ser bastante precisa hasta el punto de ser información con niveles de incertidumbre bastante bajos. Otro aspecto a destacar sobre el modelo de 2-tuplas es la posibilidad de utilizarlo para combinar información numérica con información lingüística (Herrera y Martínez, 2000b). Para más información sobre este modelo se puede consultar (Herrera y Martínez, 2001a; 2001b).

A continuación se muestra brevemente sus nociones elementales. El modelo de representación lingüística mediante 2-tuplas representa la información lingüística a través de 2-tuplas, (s_i, α), donde s_i es un término lingüístico y α es un valor numérico que representa el valor de la transformación simbólica. Esta transformación simbólica de un término lingüístico, s_i, es un valor numérico en $[-0.5, 0.5)$ que soporta la "diferencia de información" entre un contador de información $\beta \in [0, g]$ obtenido después de un operador de agregación simbólico y el valor más cercano en $\{0, \ldots, g\}$ que indica el índice del término lingüístico más cercano en S (i = redondeo(β)).

Definición: Sea $S = \{s_0, \ldots, s_g\}$ un conjunto de términos lingüísticos y $\beta \in [0, g]$ un valor que representa el resultado de una operación de agregación simbólica, entonces, las 2-tuplas que expresan la información equivalente a β se obtienen con la siguiente función:

$$\Delta: [0, g] \rightarrow S \text{ x } [-0.5, 0.5)$$

$$\Delta(\beta) = (s_i, \alpha), \text{ con } \begin{cases} s_i, & i = \text{redondeo}(\beta) \\ \alpha = \beta - i, & \alpha \in [-0.5, 0.5) \end{cases} \tag{4.34}$$

donde redondeo(·) es la operación tradicional de redondeo, s_i tiene la etiqueta con el índice más cercano a β, y α es el valor de la trasformación simbólica.

Con estos conceptos básicos, se puede pasar a estudiar el *2-tuple linguistic OWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma:

Definición: Sea $A = \{(s_1, \alpha_1), \ldots, (s_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de 2-tuplas y W un vector asociado de dimensión n que satisface:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

entonces, el *2-tuple OWA operator* para 2-tuplas lingüísticas se define como:

$$2\text{-}TOWA((s_1, \alpha_1), \ldots, (s_n, \alpha_n)) = \Delta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j^*\right) \quad (4.35)$$

donde β_j^* es el *j*-ésimo más grande de los valores β_j.

Como se puede observar, este operador también verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y limitación entre el máximo y el mínimo. Además, desde una perspectiva general de proceso de reordenación, se pueden distinguir entre el *Descending 2-tuple OWA* (*D2-TOWA*) *operator* y el *Ascending 2-tuple OWA* (*A2-TOWA*) *operator*. Cabe destacar que su definición es muy similar con la única diferencia en el proceso de reordenación. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *D2-TOWA* (o *2-TOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *A2-TOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de estudiar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Básicamente, se puede decir que son aplicables las mismas medidas que las utilizadas para los operadores *OWA* en el Capitulo 4.1.1. Es decir, se podría utilizar el carácter actitudinal $\alpha(W)$, la medida de dispersión $H(W)$, la medida de balance $BAL(W)$ y la medida de divergencia $Div(W)$.

4.2.2.3. Introducción al modelo de Xu (2004a)

El modelo lingüístico de Xu (2004a) representa una simplificación a los anteriores modelos mediante supuestos de elevada incertidumbre en donde únicamente se puede especificar la información mediante etiquetas lingüísticas genéricas. Este modelo puede resultar de mayor practicidad ya que computacionalmente es más fácil de manejar. Esto sucede porque en este caso no es necesario considerar que los términos lingüísticos sean definidos por números borrosos ya que suponemos situaciones de elevada incertidumbre.

En este caso, la principal consideración que se tiene que hacer, está en extender el conjunto de términos lingüísticos discretos S a un conjunto de términos lingüísticos continuos $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t,\ \alpha \in [1, t]\}$, donde, si $s_\alpha \in S$, llamamos a s_α término lingüístico original, y en cualquier otro caso, llamamos a s_α término lingüístico virtual. Además, también se tienen que definir una serie de leyes operacionales. Suponiendo dos términos lingüísticos cualesquiera s_α, $s_\beta \in \hat{S}$, y μ, μ_1, $\mu_2 \in [0, 1]$, se pueden establecer las siguiente leyes operacionales (Xu, 2004a; 2004b):

1. $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$.
2. $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$.
3. $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$.

4. $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$.

Definición: Una función $F{:}\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *LOWA Operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = w_1 \otimes S_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes S_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus w_n \otimes S_{\beta_n} = S_{\bar{A}} \tag{4.36}$$

donde $\bar{A} = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j$; S_{β_j} es el j-ésimo más grande de los S_{α_i}. Cabe destacar que este operador lingüístico también se conoce como *extended OWA* (*EOWA*) *operador* (Xu, 2004a).

Este operador también cumple las propiedades básicas de las medias. Es decir, es conmutativo, monótono, idempotente y limitado. En este modelo, también es posible utilizar las diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Como estas medidas únicamente afectan a las ponderaciones y no a los argumentos lingüísticos, su formulación será la misma que en el caso de los operadores *OWA*. Por tanto, sus formulaciones están expuestas en el Capítulo 4.1.1. A modo de resumen, se puede decir que el carácter actitudinal se define como:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{4.37}$$

En cuanto a la medida de dispersión:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4.38}$$

Para la medida de balance, se obtiene la siguiente expresión:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{4.39}$$

Finalmente, si analizamos la medida de divergencia para el operador *LOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{4.40}$$

Como se puede observar, su formulación es idéntica a la de los operadores *OWA*.

Desde una perspectiva general del proceso de ordenación, se puede distinguir entre el *Descending LOWA* (*DLOWA*) *operator* y el *Ascending LOWA* (*ALOWA*) *operator*. Cabe señalar que ambos tienen la misma formulación con la única diferencia de que uno tiene un orden descendente y el otro ascendente. La definición del operador *DLOWA* coincide con la del operador *LOWA*. Para el operador *ALOWA*, se tiene lo siguiente:

Definición: Una función $F:\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *LOWA Operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = w_1 \otimes S_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes S_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus w_n \otimes S_{\beta_n} = S_{\bar{A}} \tag{4.41}$$

donde $\bar{A} = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j$; S_{β_j} es el j-ésimo más pequeño de los S_{α_i}.

El operador *ALOWA* también cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y limitado por el máximo y el mínimo. Además, también se pueden utilizar las diferentes medidas comentadas anteriormente para caracterizar el vector de ponderaciones. Las formulaciones para las versiones ascendentes son las mismas que las utilizadas en los operadores *AOWA* y están explicadas en el Capítulo 4.1.1. Otro aspecto a destacar, es la posibilidad de utilizar variables lingüísticas en las ponderaciones *LOWA* (Herrera y Herrera-Viedma, 1997).

4.2.2.4. Tipos de *LOWA operators*

A continuación se van a estudiar diferentes casos particulares de operadores *LOWA*. Cabe destacar que principalmente, el análisis se centrará en el modelo de Xu (2004a) pero también es posible considerar estos casos con el modelo de Herrera et. al. (1995) y con el modelo de Herrera y Martínez (2000a). Básicamente, se estudiarán diferentes tipos a través de escoger diferentes expresiones en el vector de ponderaciones. También cabe señalar que estos resultados se pueden conseguir con el *DLOWA* o el *ALOWA operator*. Debido a que estos operadores están totalmente relaciones a través de $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación del *DLOWA* (o *LOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación del *ALOWA operator*, únicamente se considerará el caso genérico con operadores *LOWA*. Por ejemplo, se puede obtener el resultado lingüístico máximo, mínimo, medio y medio ponderado.

El máximo se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. Generalizando, si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene el *step-LOWA operator*. La media aritmética lingüística se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo S_{α_i}. La media ponderada lingüística se consigue cuando la ordenación de los S_{α_i} coincide con la ordenación de los S_{β_j}.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-LOWA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. Cabe destacar que, el *window-LOWA operator* se convierte en el máximo si $m = k = 1$, en el mínimo si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética lingüística si $m = n$ y $k = 1$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces, el tipo de operador *LOWA* obtenido es el *olympic LOWA average*. El *olympic LOWA average* se convierte en la mediana lingüística si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-LOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

De forma general, la mediana lingüística se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos S_{α_i}. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande a_i. Cabe destacar que se podrían considerar otros criterios para el caso impar como por ejemplo, únicamente considerar el valor superior de los valores centrales, o sólo el mínimo, etc.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada lingüística. En este caso se selecciona el argumento lingüístico que tiene el k-ésimo más grande de los S_{α_i} tal que la suma de las ponderaciones w_j desde 1 hasta k es igual o superior a 0.5 y la suma de las ponderaciones desde 1 hasta $k - 1$ es menor a 0.5.

Otro tipo de agregación lingüística que puede ser utilizada es el *E-Z LOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe destacar que si $k = 1$, se obtiene el máximo y si $k = n$, la media aritmética lingüística. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, si $k = 1$, se obtiene el mínimo y si $k = n$, la media aritmética lingüística. También cabe señalar que ambas clases son casos particulares de *window-LOWA operators*.

Otra familia interesante de operadores *LOWA* es el *S-LOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-LOWA operator*. El *orlike S-LOWA operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética lingüística y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo argumento lingüístico. El *andlike S-LOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-LOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media lingüística y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo. Finalmente, el *generalized S-LOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-LOWA operator* se convierte en el *andlike S-LOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-LOWA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-LOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz lingüístico.

Otro tipo de operador *LOWA* es aquel en el cual las ponderaciones w_j dependen de los argumentos lingüísticos. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-LOWA operator*.

$$w_j = \frac{(S_{\beta_j})^{\mu}}{\sum_{j=1}^{n}(S_{\beta_j})^{\mu}} \tag{4.42}$$

donde $\mu \in (-\infty, \infty)$, S_{β_j} es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos lingüísticos S_{α_i}. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\mu = 0$, se obtiene la media aritmética lingüística y si $\mu = \infty$, se obtiene el valor lingüístico máximo. Otra familia de *LOWA* operators que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1 - S_{\beta_j})^{\mu}}{\sum_{j=1}^{n}(1 - S_{\beta_j})^{\mu}} \tag{4.43}$$

donde $\mu \in (-\infty, \infty)$, S_{β_j} es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos S_{α_i}. En este caso, también se observa que si $\mu = 0$, se obtiene la media aritmética lingüística y si $\mu = \infty$, se obtiene el valor lingüístico mínimo. Un tercer tipo de operadores *LOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/S_{\beta_j})^{\mu}}{\sum_{j=1}^{n}(1/S_{\beta_j})^{\mu}} \tag{4.44}$$

donde $\mu \in (-\infty, \infty)$, S_{β_j} es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos S_{α_i}. En este caso también se obtiene la media si $\mu = 0$. Si $\mu = 1$, se obtiene la media harmónica y si $\mu = \infty$, se obtiene el mínimo.

Suiguiendo la misma metodología que utilizaron Filev y Yager (1998) para los operadores *OWA*, se pueden desarrollar otros dos métodos para determinar las ponderaciones *LOWA*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otro tipo de operador lingüístico a destacar es el *centered LOWA weights*. Este tipo dice que un operador *LOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe señalar la posibilidad de relajar la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. A estos casos se les denomina *softly decaying centered LOWA weights*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética lingüística ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered LOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered LOWA* se le conoce como *non-inclusive centered LOWA operator*. En este tipo de *centered LOWA* se encuentra como caso particular la mediana lingüística.

Un caso especial de *centered LOWA* es el *Gaussian LOWA weights*. Para poder definirlo, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana η(μ, σ) donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{4.45}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{4.46}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{4.47}$$

Se pueden definir los *LOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{4.48}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones es el método funcional introducido por Yager (1996b) y utilizado en los operadores *LOWA* por Herrera y Herrera-Viedma (1997). De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] → [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *OWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{4.49}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión para el caso lingüístico. Cabe destacar que la mayoría de los métodos desarrollados para los operadores *OWA*, también son aplicables para los operadores *LOWA* del modelo de Xu (2004a). A continuación, se va a comentar alguno de estos métodos. El primer método consiste en determinar las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *maximal entropy LOWA* (*MELOWA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} - \sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \tag{4.50}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo el método de Filev y Yager (1995) para los operadores, se podría sugerir un método analítico similar para obtener las ponderaciones *MELOWA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Otro método similar podría consistir en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Cabe destacar que la variabilidad se estudia con la varianza de las ponderaciones $D^2(W)$. A este método se le puede denominar *minimal variability LOWA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.51}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. En este caso, siguiendo las ideas de Fullér y Majlénder (2003), también se podría estudiar a través de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker.

Otra variante a estos métodos es la propuesta de Majlénder de utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Para el caso de operadores *LOWA*, este método se podría denominar *maximal Rényi entropy LOWA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^\beta = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^\beta\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.52}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que el *MELOWA weights* es un caso particular de este último método cuando $\beta = 1$.

Otra alternativa consiste en obtener las ponderaciones a través de minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se le puede denominar *minimax disparity LOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{Sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (n-j) w_j = \alpha \tag{4.53}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal y es posible estudiarlo mediante un método dual. Además, siguiendo con las ideas de Liu (*in press*) se podría desarrollar una visión unificadora entre el *minimax disparity LOWA weights* y el *minimal variability LOWA weights*.

Finalmente, destacar que en el caso de haber utilizado estos casos particulares en el modelo de Herrera y Martínez (2000), se habría obtenido el *step-2-TOWA operator*, el *window-2-TOWA operator*, el *olympic-2-TOWA operator*, la mediana *2-TOWA*, la mediana ponderada *2-TOWA*, el *E-Z 2-TOWA weights*, el *centered-2-TOWA operator*, el *Gaussian 2-TOWA weights*, el *maximal entropy 2-tuple OWA* (*ME2-TOWA*) *weights*, el *minimal variability 2-tuple OWA weights*, el *maximal Rényi entropy 2-tuple OWA weights* y el *minimax disparity 2-tuple OWA weights*.

4.2.2.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de recursos humanos

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *LOWA* en el proceso de toma de decisiones. Al igual que en los casos anteriores, estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones. De entre los muchos problemas decisionales que se podrían plantear, se puede destacar la selección de recursos humanos, la selección de productos financieros, la selección de inversiones, la selección de inmovilizado y la selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, estudios, etc. En este apartado se considerará un ejemplo para el caso de selección de recursos humanos.

Ejemplo: Supongamos que una empresa necesita contratar a un director financiero. De entre la gran variedad de ofertas existentes en el mercado la empresa ha preseleccionado a cinco candidatos A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Para evaluar a estos candidatos, se pide a un grupo de expertos que puntue de 0 a 10 a cada candidato según las siguientes caracteríticas: C_1= Capacidad de liderazgo, C_2 = Situación personal, C_3 = Capacidad de trabajar en equipo, C_4 = Motivación, C_5 = Conocimiento del mercado, C_6 = Currículum Vitae. Como resulta difícil poder evaluar a los candidatos según estas características, los expertos recurren a la utilización de información lingüística. Por tanto, se define un conjunto de 11 términos lingüísticos:

$$S = \{S_0 = I, S_1 = MM, S_2 = M, S_3 = BM, S_4 = LM, S_5 = R,$$
$$S_6 = LB, S_7 = BB, S_8 = B, S_9 = MB, S_{10} = P\}$$

Donde: I = Incompetente, MM = Muy Malo, M = Malo, BM = Bastante malo, LM = Ligeramente malo, R = Regular, LB = Ligeramente bueno, BB = Bastante bueno, B = Bueno, MB = Muy Bueno, P = Perfecto. Los resultados obtenidos para cada candidato son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	S_5	S_8	S_2	S_6	S_4	S_7
A_2	S_4	S_5	S_7	S_1	S_6	S_9
A_3	S_5	S_5	S_4	S_7	S_6	S_5
A_4	S_3	S_9	S_6	S_4	S_8	S_2
A_5	S_7	S_7	S_4	S_3	S_5	S_6

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es el candidato más adecuado para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo lingüístico, mínimo lingüístico, media aritmética lingüística (*LA*), media ponderada lingüística (*LWA*), *LOWA* y *ALOWA*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*LA*	*LWA*	*LOWA*	*ALOWA*
A_1	S_8	S_2	$S_{6.4}$	$S_{5.6}$	$S_{4.5}$	$S_{6.1}$
A_2	S_9	S_1	$S_{6.4}$	$S_{5.7}$	$S_{4.3}$	$S_{6.3}$
A_3	S_7	S_4	$S_{6.4}$	$S_{5.5}$	S_5	$S_{5.7}$
A_4	S_9	S_2	$S_{6.4}$	$S_{4.8}$	$S_{4.3}$	$S_{6.4}$
A_5	S_7	S_3	$S_{6.4}$	$S_{5.2}$	$S_{4.7}$	$S_{5.9}$

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el mínimo o el operador *LOWA*, nuestra decisión será escoger al candidato A_3. Si se utiliza el máximo, la decisión será escoger al candidato A_2 o al A_4. Mediante el operador *LWA* la decisión consiste en escoger la alternativa A_2. Si se utiliza el operador

ALOWA, entonces, la decisión óptima consiste en escoger al candidato A_4. Finalmente, mediante la media aritmética lingüística, todos los candidatos son igualmente válidos.

A continuación, vamos a estudiar otros tipos de agregaciones *LOWA* mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente en el capítulo 4.2.2. Se va a considerar el *step-LOWA operator*, la mediana-*LOWA*, el *olympic-LOWA*, el *S-OR-LOWA operator*, el *S-AND-LOWA operator*, y las dos clases de *E-Z LOWA weights*. Cabe destacar que se considerará k = 3 para el *step-LOWA* y para los *E-Z LOWA*. Para el *S-OR-LOWA* se supone $\alpha = 0.4$ y para el *S-AND-LOWA* se supone $\beta = 0.4$. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *LOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *LOWA*

	Step	*Mediana*	*Olympic*	*S-OR*	*S-AND*	*EZ-1*	*EZ-2*
A_1	S_6	$S_{5.5}$	$S_{5.5}$	$S_{7.04}$	$S_{4.64}$	S_7	$S_{3.66}$
A_2	S_6	$S_{5.5}$	$S_{5.5}$	$S_{7.44}$	$S_{4.24}$	$S_{7.33}$	$S_{3.33}$
A_3	S_5	S_5	$S_{5.25}$	$S_{6.64}$	$S_{5.44}$	S_6	$S_{4.66}$
A_4	S_6	S_5	$S_{5.25}$	$S_{7.44}$	$S_{4.64}$	$S_{7.66}$	S_3
A_5	S_6	$S_{5.5}$	$S_{5.5}$	$S_{6.64}$	$S_{5.04}$	$S_{6.66}$	S_4

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *step-LOWA*, se podrá escoger al candidato A_1, al A_2, al A_4 o al A_5. Si se utiliza la mediana o el *olympic-LOWA*, el candidato óptimo puede ser el A_1, el A_2 o el A_5. Con el *E-Z LOWA 1*, la decisión consiste en escoger al A_4. Mediante el *EZ LOWA 2* y el *S-AND-LOWA*, el candidato óptimo es el A_3. Finalmente, si se utiliza el *S-OR-LOWA* la decisión será escoger al A_2 o al A_4.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de los candidatos. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar a más de un candidato o se desea considerar posibles sustitutos. Según el criterio utilizado, el decisor ordenará a los candidatos de forma diferente. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de los candidatos

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3=A_5$	*Mediana*	$A_1=A_2=A_5 \succ A_3=A_4$
Mínimo	$A_3 \succ A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_2$	*Olympic-LOWA*	$A_1=A_2=A_5 \succ A_3=A_4$
LA	$A_1=A_2=A_3=A_4=A_5$	*S-OR-LOWA*	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3=A_5$
LWA	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$	*S-AND-LOWA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_2$
LOWA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2=A_4$	*E-Z LOWA 1*	$A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_3$
AOWA	$A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_3$	*E-Z LOWA 2*	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
Step-LOWA	$A_1=A_2=A_4=A_5 \succ A_3$		

Como se puede observar según el tipo de agregación *LOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión de la empresa también.

4.2.3. *Heavy OWA operator*

4.2.3.1. Introducción

Los *heavy OWA operators* fueron introducidos por Yager (2002) y representan una extensión a los operadores *OWA*. La principal característica de estos operadores está en que la suma de las ponderaciones no es igual a 1. En este caso, se permite que la suma del vector de ponderaciones se encuentre entre 1 y *n*. De esta forma, se consigue una amplia gama de operadores no considerados anteriormente que incluyen entre otros al operador *OWA* y al operador total, el cual viene a representar a la suma de todos los resultados posibles.

La motivación para considerar este tipo de operadores reside en la existencia de situaciones en donde la información disponible es independiente entre sí y resulta necesario considerar este aspecto en la agregación. Cuando se dice información independiente, se está refiriendo a resultados que se pueden producir simultáneamente. Evidentemente, si dos resultados se pueden producir simultáneamente, esto quiere decir que al agregarlos, no se tiene que calcular su valor medio sino que se tiene que considerar su resultado total. En los anteriores criterios, se había supuesto implícitamente que la información era excluyente entre sí. Es decir, únicamente se podía producir un único resultado. El operador *HOWA* puede ser definido de la siguiente forma.

Definición: Una función $F: R^n \rightarrow R$ es un *Heavy OWA Operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$HOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4.54}$$

donde b_j es el *j*-ésimo más grande de los a_i. Cabe destacar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes (Merigó y Casanovas, 2006b). A la versión descendente se le denomina *descending HOWA* (*DHOWA*) *operator* y a la versión ascendente *ascending HOWA* (*AHOWA*) *operator*. El *DHOWA* tiene la misma definición que el operador *HOWA*. El *AHOWA* se define de la siguiente forma.

Definición: Una función $F: R^n \rightarrow R$ es un *Heavy AOWA Operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$AHOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4.55}$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los a_i. Como se puede observar, los elementos b_j están ordenados en sentido ascendente.

El operador *HOWA* es monótono y conmutativo. Es monótono porque si $a_i \geq d_i$, para todo i, entonces, $HOWA(a_1,\ldots, a_n) \geq HOWA(d_1,\ldots, d_n)$. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Cabe destacar que el operador *HOWA* no está delimitado por el máximo y el mínimo, pero sí por el mínimo y la suma total de argumentos.

Otro aspecto a destacar es la suma de los elementos del vector de ponderaciones W que se denota como $|W|$ (Yager, 2002) y se le denomina la magnitud de W. Para poder normalizar este hecho, Yager introdujo un parámetro denominado el valor beta del vector W. Se define como: $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Como $|W| \in [1, n]$, entonces, $\beta \in [0, 1]$. Como se puede observar, si $\beta = 1$, se obtiene el operador total y si $\beta = 0$, se consigue el tradicional operador *OWA*. Cabe señalar que también es posible analizar la negación de β. Entonces, $\rho = 1 - \beta$. En este caso, si $\rho = 0$, se obtiene el operador total y si $\rho = 1$, el tradicional operador *OWA*.

Una vez estudiada la magnitud de W, es posible estudiar las medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Para el operador *HOWA*, Yager definió dos medidas muy similares a las medidas utilizadas en el operador *OWA*. La primera medida, el carácter actitudinal, se definió como:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n-j}{n-1}\right) w_j \tag{4.56}$$

Como se puede observar, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Cabe señalar que el operador total tiene un $\alpha(W) = 0.5$. La segunda medida, la entropía de dispersión, se definió de la siguiente forma:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{4.57}$$

Cabe destacar que el operador total tiene una entropía de: $H(W) = -\ln n$. También cabe remarcar que ambas medidas se convierten en las versiones tradicionales desarrolladas para los operadores *OWA* (Yager, 1988) cuando $|W| = 1$.

Además de estas dos medidas, también se podría considerar el balance $Bal(W)$ y la divergencia $Div(W)$ de las ponderaciones. Para el balance de las ponderaciones tenemos:

$$Bal(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{4.58}$$

Como se puede observar, si $|W| = 1$, la medida se transforma en la medida de balance de los operadores *OWA*. Si $|W| = n$, se obtiene la divergencia para el operador total y tiene un valor de $Bal(W) = 0$.

De forma similar, también es posible estudiar la medida de divergencia en estos problemas. Se puede formular de la siguiente forma:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{4.59}$$

En este caso, si $|W| = 1$, también se obtiene la misma medida de divergencia que en el operador *OWA*. Si $|W| = n$, se obtiene la divergencia para el operador total y es la misma divergencia que para la media aritmética. Su divergencia es de: $Div(W) = (1/12)[(n + 1)/(n - 1)]$.

Finalmente, se tiene que destacar que estas medidas también pueden ser estudiadas mediante operadores *AOWA*. Se puede decir que su formulación es la misma que en los casos descendentes asumiendo que el vector de ponderaciones ascendente y descendente están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del operador *DHOWA* (o *HOWA*) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del operador *AOWA*.

4.2.3.2. Tipos de *HOWA operators*

A través de escoger una diferente manifestación en el vector de ponderaciones, es posible obtener diferentes tipos de operadores *HOWA*. Por ejemplo, se puede obtener el tradicional operador *OWA* cuando la suma de las ponderaciones es 1. El operador total se obtiene cuando la suma de las ponderaciones es n. El mínimo también es un caso particular de este operador cuando $w_n = 1$, $w_j = 0$ para todo $j \neq n$ y la suma de las ponderaciones es 1. En cambio, como el operador *HOWA* no está delimitado por el máximo, este caso no se obtiene directamente como un una situación particular. A pesar de ello, se puede obtener excepcionalmente asignando la ponderación correspondiente. Es decir, cuando $w_1 = 1$, $w_j = 0$ para todo $j \neq 1$ y la suma de las ponderaciones es 1. En cuanto a la media aritmética, decir que se puede obtener de diversas formas ya que la suma de las ponderaciones está delimitada por 1 y n. En cualquier caso, se puede conseguir la versión tradicional cuando la suma de las ponderaciones es 1 y $w_j = 1/n$ para todo j. También cabe señalar que estos resultados y los que se estudiarán a continuación, pueden ser obtenidos tanto por la versión descendente como por la ascendente de los operadores *HOWA*.

Debido a que la suma de las ponderaciones de los operadores *HOWA* puede variar entre 1 y n, pero las ponderaciones individualmente sólo pueden valer 1, Yager (2002) diseñó otra gama de casos particulares en donde se intentaba alcanzar los conceptos de máximo y mínimo, entre otros. Por ejemplo, en el caso de máximo, si para $n = 6$ y la suma de las ponderaciones era 3.5, al no poder asignar más de 1 a la ponderación máxima, Yager lo que sugirió fue asignar 1 a todas las ponderaciones máximas hasta llegar a la suma total. Es decir, en este ejemplo se asignaría 1 a las tres primeras ponderaciones y 0.5 a la cuarta ponderación. Por otro lado, la quinta y sexta ponderación se les asignaría 0. Como se puede observar, dadas las restricciones del operador *HOWA*, esta era la mejor forma de obtener una agregación máxima. Siguiendo con estas ideas, a continuación se va a desarrollar matemáticamente una amplia gama de casos particulares de este tipo.

En primer lugar, se va a comentar el operador con tendencia al máximo. Se le conoce como *push up allocation* y su formulación es: $w_j = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Cabe destacar que si $\beta = 0$, $W_{pu} = W^*$, es decir, se obtiene el operador máximo tradicional: $w_1 = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq 1$, con $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W^*) = 1$. Por otro lado, si $\beta = 1$, $W_{pu} = W_T$, es decir, se obtiene el operador total: $w_j = 1$ para todo j y $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

Un segundo tipo de operador *HOWA* es la versión dual a la anterior conocida como *push down allocation* o tendencia al mínimo. Se define como: $w_{n-j+1} = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Cabe destacar que si $\beta = 0$, $W_{pd} = W_*$, se obtiene el operador mínimo tradicional: $w_n = 1$ y $w_j = 0$ para todo $j \neq n$, con $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_*) = 0$. En cambio, si $\beta = 1$, se obtiene el operador total $W_{pd} = W_T$, con $w_j = 1$ para todo j y $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

Otro tipo de operador *HOWA* es el *uniform allocation* o agregación uniforme. En este caso, se asigna $w_j = |W|/n$ para todo j. Como se puede observar, siempre se obtiene un carácter actitudinal neutro con $\alpha(W) = 0.5$. Cabe destacar que si $\beta = 0$, se obtiene la media aritmética tradicional.

Otro caso especial de operador *HOWA* es el *median type allocation* o tendencia a la mediana. En este caso se tiene que distinguir entre casos donde n es par o impar. Si n es par, se asignan las ponderaciones para $j = 1$ hasta a como $w_{a+j} = w_{a+1-j} = [1 \wedge ((|W| - 2(j - 1))/2)] \vee 0$. Si n es impar, se asigna para $j = 1$ hasta a como $w_{a+1} = 1$ y $w_{a+1-j} = w_{a+1+j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. Como el vector de ponderaciones es simétrico, $\alpha(W) = 0.5$. Cabe señalar que si $\beta = 0$, se obtiene la mediana del operador *OWA* y si $\beta = 1$, el operador total.

A continuación, se va a analizar el *step-HOWA operator*. En este caso, la agregación está concentrada en el K-ésimo elemento más grande. Es decir, suponiendo que $b = \text{Min}[(K - 1), (n - K)]$, se asigna para j hasta b, $w_K = 1$ y $w_{K+j} = w_{K-j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. Si $b = K - 1$, $K - 1 < n - K$, entonces, $w_{j+2K-1} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, para $j = 1$ hasta $n - 2K + 1$. Si $b = n - K$, $K - 1 > n - K$, entonces, $w_{2K-n-j} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, para $j = 1$ hasta $n - 2K + 1$. Cabe destacar que si $K = 1$, el *step-HOWA* se convierte en el *push up allocation*, si $K = n$, el *step-HOWA* se transforma en el *push down allocation* y si $K = (n + 1)/2$, en el *median type allocation*.

Otro caso particular de operador *HOWA* es el *olympic average allocation*. En este tipo, se tiene que distinguir entre dos clases. En la primera clase, $|W| < n - 2m$, se asigna $w_j = |W|/(n - 2m)$ para $j = m + 1$ hasta $n - m$, y $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta m y para $j = n - m + 1$ hasta n. En la segunda clase, donde $|W| \geq n - 2m$, se asigna $w_j = 1$ para $j = m + 1$ hasta $n - m$ y $w_{m+1-j} = w_{n-m+j} = [1 \wedge ([(|W| - (n - 2m)) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$ para $j = 1$ hasta m.

Finalmente, el último tipo de operador que se va a considerar es el *Arrow-Hurwicz aggregation*, es decir, aquel que tiene tendencia al máximo y al mínimo al mismo tiempo. Suponiendo que $|W| = q$ y dimensión n, se definen las ponderaciones en dos direcciones, *push up* y *push down*. Primero, se calcula $\omega_j = (1 \wedge (\lambda q - (j - 1))) \vee 0$ para $j = 1$ hasta n y $\hat{w}_{n-j+1} = (1 \wedge ((1 - \lambda)q - (j - 1))) \vee 0$ para $j = 1$ hasta n. Entonces, se definen las ponderaciones como $w_i = \omega_i + \hat{w}_i$. Cabe destacar que $\omega_j = 0$ para todo $j \geq \lambda q + 1 \geq \lambda|W| + 1$ y $\hat{w}_j = 0$ para $j \leq n - (1 - \lambda)q \leq n - |W| + \lambda|W|$.

4.2.4. *Hybrid Averaging*

4.2.4.1. Introducción

El *Hybrid Averaging* (*HA*) o media híbrida es un método de agregación que permite utilizar en la misma formulación a la media ponderada (*WA*) y a la media ponderada ordenada (*OWA*). De esta forma, se obtiene un método que permite combinar los procesos de decisión con ponderaciones subjetivas en los argumentos y con ponderaciones subjetivas en función del grado de optimismo del decisor. Este método representa una generalización al operador *OWA* y al operador *WA*, de forma que ambos casos son situaciones particulares de esta formulación. Este método ha sido propuesto por Xu (2006b) y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función $F:R^n \rightarrow R$ es un *HA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$HA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, b_j \qquad (4.60)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos (estados de la naturaleza) con los pesos (coeficientes). Se puede observar que también podemos expresar esta agregación en una notación vectorial como:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = W^T B \qquad (4.61)$$

En esta expresión, W es el vector *HA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado, donde el j-ésimo componente en B es b_j siendo este el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Usando esta notación vectorial, podemos distinguir claramente la parte del proceso que es lineal (la multiplicación matricial) de la parte no-lineal (la formulación de B).

Un *HA Operator* es una media. Esto es debido a que el operador conmutativo, monótono, idempotente y limitado por el máximo y el mínimo. Es conmutativo porque cualquier premutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $a_i \geq d_i$ para todo i, entonces, $HA(a_1, \ldots, a_n) \geq HA(d_1, \ldots, d_n)$. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo i, entonces, $HA(a_1,\ldots, a_n) = a$. Finalmente, es limitado porque Min$\{a_i\} \leq HA(a_1,\ldots, a_n) \leq$ Max$\{a_i\}$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending HA (DHA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending HA (AHA) operator*. En resumen, esta distinción es necesaria para poder expresar adecuadamente el carácter actitudinal del decisor ante situaciones de beneficios y ante situaciones de costes. El operador *DHA* tiene la misma definición que el operador *HA*. Para el operador *AHA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *HA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$AHA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j\ b_j \tag{4.62}$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación de las ponderaciones *OWA*. Para el operador *AHA*, vemos como los argumentos b_j están ordenados de forma ascendente: $b_1 \leq b_2 \leq\ldots \leq b_n$, mientras que en el operador *HA* (o *DHA*), el orden es descendente: $b_1 \geq b_2 \geq\ldots \geq b_n$. Cabe destacar que los vectores del *HA* y *AHA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DHA* (o *HA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AHA operator*.

El operador *AHA* cumple las mismas propiedades que el operador *HA*. Es decir, también cumple la monotonía, la conmutatividad, la idempotencia y la delimitación entre el máximo y el mínimo. Cabe destacar que en estos casos también se puede utilizar las medidas comentadas en el Capítulo 4.1.1. para caracterizar el vector de ponderaciones. El aspecto a resaltar sobre ello, es que estas medidas únicamente son de aplicación para la ponderación *OWA* ya que la ponderación *WA* no esta relacionada con los conceptos de subjetividad según el grado de optimismo.

4.2.4.2. Tipos de *HA operators*

En este tipo de agregación, también es posible obtener diferentes tipos de casos particulares. En primer lugar, se va a demostrar que el *WA* y el *OWA* son casos particulares de esta generalización. El *HA* se convierte en el *WA* cuando todas las ponderaciones w_j valen $1/n$, para todo j. Por otro lado, el *HA* se transforma en el *OWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen $1/n$, para todo i.

En segundo lugar, se puede destacar la obtención de todas las familias comentadas en el Capítulo 4.1.2. para los operadores *OWA*. Es decir, se podría obtener el máximo, el mínimo, la media aritmética y la media ponderada (*WA*). Como se puede observar, estos casos se obtienen del vector de ponderaciones w_j que afecta al operador *OWA*. Entonces, para obtener estos casos particulares, es necesario que ω_i sea $1/n$, para todo i, ya que entonces, la agregación *HA* se transforma en la agregación *OWA*. Además de estos casos clásicos, también se podrían obtener todas las otras familias comentadas para los operadores *OWA*. Es decir, se podría obtener el *step-OWA*, el *window-OWA*, la mediana *OWA*, la mediana ponderada *OWA*, el *olympic OWA average*, el *E-Z OWA*, el *S-OWA*, las ponderaciones *OWA* que dependen de los objetos agregados, el *centered OWA*, el *Gaussian OWA*, el *MEOWA*, el *minimal variability OWA*, el *minimax disparity OWA*, y muchos otros más.

Otro tipo de casos particulares de operadores *HA* que se podrían considerar, son aquellos en donde se mezclan las características comentadas en el párrafo anterior con el vector de ponderaciones ω_i que está relacionado con la media ponderada. Por ejemplo, se podría obtener el máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media aritmética híbrida o el criterio de Hurwicz híbrido. El máximo híbrido se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo híbrido se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media aritmética híbrida se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo a_i. Finalmente, el criterio de Hurwicz híbrido se consigue cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Además de estos casos basados en los criterios clásicos, también se podrían estudiar otra gran variedad de operadores como los que se muestran a continuación. Por ejemplo, si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene: $HA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = b_k$, donde b_k es el k-ésimo más grande de los argumentos a_i. A este tipo de operador se conoce como el *step-HA operator*. Cabe destacar que el *step-HA operator* se convierte en el máximo híbrido si $k = 1$ y en el mínimo híbrido si $k = n$. Obviamente, si $\omega_i = 1/n$, para todo i, el *step-HA operator* se transforma en el *step-OWA operator*.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-HA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. Cabe destacar que si $m = k = 1$, el *window-HA operator* se convierte en el máximo híbrido, en el mínimo híbrido si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética híbrida si $m = n$ y $k = 1$. Si $\omega_i = 1/n$, para todo i, el *window-HA operator* se transforma en el *window-OWA operator*.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic-HA operator*. El *olympic-HA operator* se transforma en la mediana híbrida si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-HA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$. En este caso, también se observa que si $\omega_i = 1/n$, para todo i, el *olympic-HA operator* se transforma en el *olympic-OWA operator*.

Respecto a la mediana híbrida se puede decir lo siguiente. En primer lugar, se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el (n/2)-ésimo y [(n/2) + 1]-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Cabe destacar que la mediana híbrida se convierte en la mediana *OWA* cuando $\omega_i = 1/n$, para todo i.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada híbrida. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5. Al igual que en la mediana, la mediana ponderada híbrida se transforma en la mediana ponderada *OWA* cuando $\omega_i = 1/n$, para todo i.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z HA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el máximo híbrido y si $k = n$, la media aritmética híbrida. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el mínimo híbrido y si $k = n$, la media aritmética híbrida. Por último, decir que el *E-Z HA weights* se convierte en el *E-Z OWA weights* cuando $\omega_i = 1/n$, para todo i.

Otra familia interesante de operadores *HA* es el *S-HA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-HA operator*. El *orlike S-HA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Obsérvese que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética híbrida y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo híbrido. El *andlike S-HA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-HA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo híbrido. Finalmente, el *generalized S-HA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-HA operator* se convierte en el *andlike S-HA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-HA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-HA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz híbrido.

Otro tipo de operador *HA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-HA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} b_j^\alpha} \tag{4.63}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética híbrida y si $\alpha = \infty$, el máximo híbrido. Otra familia de *HA operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)^{\alpha}} \tag{4.64}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética híbrida y si $\alpha = \infty$, el mínimo híbrido. Un tercer tipo de operadores *HA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^{\alpha}} \tag{4.65}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). En este caso también se obtiene la media híbrida si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, se consigue la media harmónica híbrida y si $\alpha = \infty$, el mínimo híbrido.

Siguiendo con la metodología propuesta por Filev y Yager (1998) para los operadores *OWA*, se pueden aplicar estos dos métodos al caso de los operadores *HA*. Para el primer método, las ponderaciones se obtienen de la siguiente forma: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, las ponderaciones se consiguen mediante: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otro tipo de operador *HA* que se puede desarrollar es el *centered HA weights*. Este tipo de operador dice que un operador *HA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered HA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética híbrida ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered HA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered HA* se le conoce como *non-inclusive centered HA operator*. Cabe señalar que la mediana híbrida es un caso particular de esta situación.

Un caso especial de *centered HA* es el *Gaussian HA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{4.66}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{4.67}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{4.68}$$

Se pueden definir los *HA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{4.69}$$

Se comprueba que la suma de las ponderaciones es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones es el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente para el caso de los operadores *HA*. Sea f una función f: [0, 1] → [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *HA* w_j para j = 1 hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{4.70}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. Por ejemplo, siguiendo con los modelos explicados en el Capítulo 4.1.1., podemos proponer un método que determina las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denominará *maximal entropy HA* (*MEHA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \tag{4.71}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. También cabe destacar la posibilidad de obtener las ponderaciones *MEHA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Otro método similar consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Cabe destacar que la variabilidad se estudia con la varianza de las ponderaciones $D^2(W)$. A este método se le puede denominar *minimal variability HA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}w_j^2-\frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j=\alpha \tag{4.72}$$

$$\sum_{j=1}^{n}w_j=1, \quad w_j\in[0,1], \quad j=1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha\in[0, 1]$. Cabe destacar la posibilidad de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker para resolver este problema.

Otra variante a estos métodos consiste en utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Esta propuesta se conoce como *maximal Rényi entropy HA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W)=\frac{1}{1-\beta}\log_2\sum_{j=1}^{n}w_j^\beta=\log_2\left(\sum_{j=1}^{n}w_j^\beta\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j=\alpha \tag{4.73}$$

$$\sum_{j=1}^{n}w_j=1, \quad w_j\in[0,1], \quad j=1, 2, \ldots, n$$

con $\beta\in\Re$, y $\alpha\in[0, 1]$. Cabe destacar que el *MEHA weights* es un caso particular de este último método cuando $\beta=1$.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones es a través de minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se le denomina *minimax disparity HA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar: } \left\{\underset{j\in\{1,\ldots,n-1\}}{Max}\left|w_j-w_{j+1}\right|\right\}$$

$$\text{Sujeto a: } \alpha(W)=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j=\alpha \tag{4.74}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal y se puede calcular mediante el proceso dual.

4.2.4.3. Ejemplo ilustrativo: Selección de inmovilizado

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *HA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones. De entre los muchos problemas decisionales que se podrían plantear, se puede destacar los problemas de selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, etc. En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de inmovilizado.

Ejemplo: Supongamos que una empresa está estudiando adquirir maquinaria nueva para mejorar su sistema productivo. Para ello, se solicita al departamento de producción que recomiende a la empresa cuál es la maquinaria más interesante para la empresa teniendo en cuenta que la empresa no desea desembolsar una cantidad exagerada de dinero. El departamento de producción considera las siguientes alternativas.

(1) A_1: Maquinaria V.
(2) A_2: Maquinara W.
(3) A_3: Maquinaria X.
(4) A_4: Maquinaria Y.
(5) A_5: Maquinaria Z.

Estas distintas alternativas se evaluan con puntuaciones de 0 a 10 en función de las siguientes características. C_1 = Costes de mantenimiento esperados, C_2 = Prestigio de la marca, C_3 = Facilidad de uso, C_4 = Duración esperada, C_5 = Rendimiento esperado, C_6 = Precio de adquisición. Cabe destacar que una puntuación de 0 significa el peor resultado posible mientras que 10 significa lo contrario, es decir, el mejor resultado posible. Los resultados esperados para cada maquinaria son las siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	7	6	4	8	2	6
A_2	8	2	3	5	4	10
A_3	3	5	7	8	5	5
A_4	6	4	7	2	8	6
A_5	7	5	3	4	6	8

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la maquinaria más adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (*AM*), media ponderada (*WA*), *OWA* y *AOWA*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*AM*	*WA*	*OWA*	*HA*	*AHA*
A_1	8	2	5.5	5.5	4.7	4.38	6.84
A_2	10	2	5.33	6.1	4.3	4.56	8.34
A_3	8	3	5.5	5.6	4.9	4.44	6.72
A_4	8	2	5.5	5.5	4.7	4.38	6.84
A_5	8	3	5.5	5.9	4.8	4.62	7.62

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el máximo, la media ponderada o el operador *AHA*, nuestra decisión será escoger la maquinaria A_2. Si se utiliza el mínimo, la decisión será escoger la maquinaria A_3 o la A_5. Mediante el operador *OWA* la decisión consiste en escoger la alternativa A_3 y mediante el operador *HA* la alternativa A_5. Finalmente, mediante la media aritmética, todas las maquinarias menos la A_2 son igualmente válidas.

A continuación, vamos a estudiar otros tipos de agregaciones *HA* mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente en el capítulo 4.2.4. Se va a considerar el *step-HA operator*, la mediana-*HA*, el *olympic-HA*, el *S-OR-HA operator*, el *S-AND-HA operator*, y las dos clases de *E-Z HA weights*. Cabe destacar que se considerará k = 3 para el *step-HA* y para los *E-Z HA*. Para el *S-OR-HA* se supone α = 0.4 y para el *S-AND-HA* se supone β = 0.4. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *HA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *HA*

	Step	*Mediana*	*Olympic*	*S-OR*	*S-AND*	*EZ-1*	*EZ-2*
A_1	4.2	3.9	4.45	7.62	4.26	8.2	2.8
A_2	4.8	4.8	4.35	10.4	3.68	9.6	2.6
A_3	6	5.1	5.55	7.14	4.02	8.2	3
A_4	4.2	3.9	4.45	7.62	4.26	8.2	2.26
A_5	4.8	4.5	4.8	9.06	4.02	8.8	3

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *step-HA*, la mediana o el *olympic-HA*, la decisión será escoger la maquinaria A_3. Si se utiliza el *S-OR-HA* o el *E-Z HA 1*, la maquinaria óptima será la A_2. Con el *E-Z HA 2*, la decisión consiste en escoger la A_3 o la A_5. Finalmente, si se utiliza el *S-AND-HA*, la alternativa óptima será la A_1 o la A_4.

Otra posibilidad en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las maquinarias ya que en muchs casos puede ser interesante considerar varias alternativas debido a posibles sustituciones, etc. Según el criterio utilizado, el decisor tomará una decisión diferente. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las maquinarias.

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_2 \succ A_1=A_3=A_4=A_5$	*Step-HA*	$A_3 \succ A_2=A_5 \succ A_1=A_4$
Mínimo	$A_3=A_5 \succ A_1=A_2=A_4$	*Mediana*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1=A_4$
AM	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$	*Olympic-HA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_2$
WA	$A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1=A_4$	*S-OR-HA*	$A_2 \succ A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_3$
OWA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_2$	*S-AND-HA*	$A_1=A_4 \succ A_3=A_5 \succ A_2$
HA	$A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1=A_4$	*E-Z HA 1*	$A_2 \succ A_5 \succ A_1=A_3=A_4$
AHA	$A_2 \succ A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_3$	*E-Z HA 2*	$A_3=A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$

Como se puede observar según el tipo de agregación *HA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión de la empresa también.

4.2.5. *Uncertain OWA operator*

4.2.5.1. Introducción

En muchas situaciones de la vida cotidiana, el entorno de las personas está fuertemente condicionado por altos grados de incertidumbre. Entonces, cuando las personas deben o desean tomar una decisión, tienen que tener en cuenta estos elevados niveles de incertidumbre que les rodea. Una forma de hacer frente a esta incertidumbre es mediante la utilización de información numérica expresada en forma de intervalos de confianza. Con estos intervalos de confianza, a pesar de que la incertidumbre persiste en el análisis, se puede representar correctamente el problema ya que se consideran todas las posibilidades inciertas que pueden ocurrir. El no utilizar intervalos de confianza para tratar un problema de este tipo, puede llevar a que el decisor tenga una información errónea que le lleve a tomar una decisión incorrecta y esto en muchos casos puede significar grandes pérdidas.

Tradicionalmente, se ha considerado que los intervalos de confianza tienen sus orígenes en los trabajos de Moore (1959; 1966). A pesar de ello, se tiene que destacar la existencia de otros trabajos previos que ya consideraron algunos aspectos básicos como por ejemplo (Dwyer, 1951; Warmus, 1956). Los intervalos de confianza pueden venir expresados de diversas formas. Por ejemplo, pueden estar compuestos por intervalos de confianza simples, tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. De forma general, podemos decir que los cuádruplos de confianza están compuestos de 4-tuplas (a, b, c, d) en donde a y d indican el mínimo y el máximo respectivamente, y b y c el intervalo de máxima presunción. Cabe destacar que el cuádruplo se convierte en una tripleta cuando $b = c$, y en un intervalo de confianza simple cuando b y c son desconocidos. Para más información sobre el funcionamiento de los intervalos de confianza, se puede consultar (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

A partir de esta información, se puede pasar a estudiar un operador *OWA* que utiliza información numérica expresada mediante intervalos de confianza. Este operador ha sido propuesto por Xu y Da (2002a) y se le denomina *Uncertain OWA* (*UOWA*) *operator*. Se define de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un *UOWA Operator* de dimensión n es una función $F{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector $w = (w_1, w_2,\ldots, w_n)^T$ tal que $w_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Entonces:

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\,*} \tag{4.75}$$

donde b_j* es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y los $\tilde{a}_i$ ($i \in N$) son intervalos de confianza. Cabe destacar que los intervalos de confianza pueden ser intervalos simples, tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. De forma genérica, se puede decir que se utilizará para cada problema aquel tipo de intervalo de confianza que más se adapte a la situación.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos (estados de la naturaleza) con las ponderaciones (coeficientes). Se puede observar que también podemos expresar esta agregación en una notación vectorial como:

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{4.76}$$

En esta expresión, W es el vector *UOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado, donde el j-ésimo componente en B es b_j* siendo este el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$. Usando esta notación vectorial, podemos distinguir claramente la parte del proceso que es lineal (la multiplicación matricial) de la parte no-lineal (la formulación de B).

El proceso de reordenación del operador *UOWA* tiene una dificultad adicional por el hecho de tener que ordenar intervalos de confianza. Esto nos lleva a tener que comparar intervalos de confianza. En algunos casos, la comparación es inmediata ya que un intervalo es claramente superior al otro. Pero en otros casos, la comparación puede ser más compleja y se tiene que recurrir a criterios subjetivos. De entre la gran variedad de criterios que existen para comparar intervalos de confianza, en este trabajo se seguirá una metodología similar a la desarrollada en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; Kaufmann et al., 1994).

El proceso a seguir es el siguiente. Si $A = [a_1, a_2]$ y $B = [b_1, b_2] \subset \Re$, tal que $a_1 \geq b_1$ y $a_2 \geq b_2$, entonces $A \geq B$. Por el contrario, si $a_1 \geq b_1$ y $a_2 \leq b_2$, entonces, no se puede determinar directamente cual de los dos intervalos es mayor. Un primer criterio a utilizar consiste en calcular el valor medio de los intervalos. A esto también se le conoce como *hacer caer la entropía*, ya que se transforma el intervalo a un valor representativo. Entonces, si $(a_1 + a_2)/2 > (b_1 + b_2)/2$, se dice que $A > B$. En el caso de que el valor medio de ambos intervalos coincida, entonces, se tendrá que recurrir a otros criterios de naturaleza subjetiva. De forma genérica, se puede decir que los decisores optimistas escogerán aquel que tenga un extremo superior mayor mientras que los pesimistas escogerán aquel que tenga un extremo inferior mayor.

Cabe destacar que este proceso también es aplicable a las tripletas y a los cuádruplos de confianza. Por ejemplo, para los cuádruplos de confianza, se podría hacer lo siguiente. Dados $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ y $B = [b_1, b_2, b_3, b_4]$ se calcula el valor medio. Como conceptualmente se dice que a_2 y a_3, son el intervalo de máxima presunción, se puede suponer que estos dos valores son datos de mayor relevancia en el problema. Por tanto, al calcular el valor medio, podemos asignar una mayor ponderación a estos dos valores a través de utilizar la media ponderada. Tradicionalmente, se ha utilizado $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) / 6$, para calcular dicho valor medio. Pero también se podrían utilizar otras ponderaciones. Por ejemplo, si se supone que los extremos superior e inferior son sólo casos residuales para casos prácticamente imposibles, se puede asignar una mayor ponderación al intervalo de máxima presunción. Entonces, en lugar de ponderar con un 66% al intervalo de máximo presunción, se le podría otorgar un 75%, 80%, etc. Si se utiliza una ponderación del 80%, el valor medio ponderado del cuádruplo de confianza quedaría de la siguiente forma: $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4) / 10$. Si ahora se realiza la comparación y se obtiene que $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4)/6 > (b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4)/6$, entonces ya se puede concluir que $A > B$. Pero en el caso de que siga el empate, se tendrá que recurrir a un criterio de naturaleza subjetiva. De acuerdo con el grado de optimismo o pesimismo del decisor, se asignará una ponderación que dará más o menos importancia a los diferentes valores del cuádruplo. Básicamente, se puede decir que la utilización del extremo superior es para decisores muy optimistas con poca aversión al riesgo, la utilización del extremo superior del intervalo de máxima presunción es para decisores optimistas-conservadores, la utilización del extremo inferior del intervalo de máxima presunción es para pesimistas-conservadores y la utilización del extremo inferior para pesimistas-extremistas. Cabe destacar que se podrían utilizar otra amplia gama de agregaciones a través de ponderar alguno de los valores del cuádruplo. Por ejemplo, se podría comparar el valor medio de los extremos, el valor medio del intervalo de máxima presunción, etc.

Un *UOWA operator* es una media. Esto es debido a que el operador es conmutativo, monótono, idempotente y limitado por el máximo y el mínimo. Es conmutativo porque cualquier premutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$ para todo i, entonces, $UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) \geq UOWA(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$. Es idempotente porque si $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, para todo i, entonces, $UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$. Finalmente, es limitado porque $\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending UOWA (DUOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending UOWA (AUOWA) operator*. En resumen, esta distinción es necesaria para poder expresar adecuadamente el carácter actitudinal del decisor ante situaciones de beneficios y ante situaciones de costes. El operador *DUOWA* tiene la misma definición que el operador *UOWA*. Para el operador *AUOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un *AUOWA Operator* de dimensión n es una función $F{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector $w = (w_1, w_2,\ldots, w_n)^T$ tal que $w_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Entonces:

$$AUOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{*} \tag{4.77}$$

donde b_j^* es el j-ésimo más pequeño de los $\tilde{a}_i$, y los $\tilde{a}_i$ ($i \in N$) son intervalos de confianza. Cabe destacar que los intervalos de confianza pueden ser intervalos simples, tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. De forma genérica, se puede decir que se utilizará para cada problema aquel tipo de intervalo de confianza que más se adapte a la situación.

Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *AUOWA*, vemos como los argumentos b_j están ordenados de forma ascendente: $b_1^* \leq b_2^* \leq\ldots \leq b_n^*$, mientras que en el operador *UOWA* (o *DUOWA*), el orden es descendente: $b_1^* \geq b_2^* \geq\ldots \geq b_n^*$. Cabe destacar que los vectores del *UOWA* y *AUOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUOWA* (o *UOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de considerar a las ponderaciones como intervalos de confianza. La motivación de este aspecto reside en situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimsmo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral. A modo de anticipo, decir que aparte de los diferentes problemas matemáticos que conlleva el tratar con ponderaciones inciertas y el estudio de sus diferentes familias, existe un problema fundamental en relación al carácter actitudinal $\alpha(W)$ a la hora de agregar números negativos en estas situaciones que lleva a ciertos desajustes de dicha medida $\alpha(W)$.

Al estudiar el operador *UOWA*, también es posible utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Como estas medidas únicamente afectan a las ponderaciones y no a los argumentos inciertos, su formulación será la misma que en el caso de los operadores *OWA*. Por tanto, sus formulaciones están expuestas en el Capítulo 5.1.1. A modo de resumen, se puede decir que el carácter actitudinal se define como:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{4.78}$$

En cuanto a la medida de dispersión:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4.79}$$

Para la medida de balance, se obtiene la siguiente expresión:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{4.80}$$

Finalmente, si analizamos la medida de divergencia para el operador *UOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{4.81}$$

Como se puede observar, su formulación es idéntica a la de los operadores *OWA*.

También cabe destacar que estas medidas pueden ser estudiadas mediante el operador *AUOWA*. Utilizando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUOWA* (o *UOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUOWA operator*, la formulación de estas medidas es automática.

4.2.5.2. Tipos de *UOWA operators*

A continuación se van a estudiar diferentes casos particulares de operadores *UOWA*. Básicamente, se estudiarán diferentes casos particulares a través de escoger diferentes expresiones en el vector de ponderaciones. También cabe señalar que estos resultados se pueden conseguir con el *DUOWA* o el *AUOWA operator*. Debido a que estos operadores están totalmente relacionados a través de $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación del *DUOWA* (o *UOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación del *AUOWA operator*, únicamente se considerará el caso genérico con operadores *UOWA*. Por ejemplo, se puede obtener el resultado máximo incierto, el mínimo incierto, el medio incierto y el medio ponderado incierto.

El máximo incierto se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo incierto se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media aritmética incierta o *uncertain average* (*UA*), se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$. La media ponderada incierta o *uncertain weighted average* (*UWA*), se consigue cuando la ordenación de los $\tilde{a}_i$ coincide con la ordenación de los b_j*.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *UOWA* son el *step-UOWA operator*, el *window-UOWA operator*, el *olympic-UOWA operator*, la mediana *UOWA*, la mediana ponderada *UOWA*, el *E-Z UOWA weights*, el *S-UOWA operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos inciertos agregados, el *centered-UOWA operator* y el *Gaussian UOWA weights*, entre otros.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene el *step-UOWA operator*. Cabe destacar que el *step-UOWA operator* se convierte en el máximo incierto si $k = 1$ y en el mínimo incierto si $k = n$.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-UOWA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-UOWA operator* se convierte en el máximo incierto si $m = k = 1$, en el mínimo incierto si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética incierta si $m = n$ y $k = 1$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic UOWA average*. El *olympic-UOWA average* se transforma en la mediana incierta si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-UOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

De forma general, la mediana incierta se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande $\tilde{a}_i$.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada incierta. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z UOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el máximo incierto y si $k = n$, la media aritmética incierta. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el mínimo incierto y si $k = n$, la media aritmética incierta.

Otra familia interesante de operadores *UOWA* es el *S-UOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-UOWA operator*. El *orlike S-UOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media incierta y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo incierto. El *andlike S-UOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-UOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media aritmética incierta y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo incierto. Finalmente, el *generalized S-UOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-UOWA operator* se convierte en el *andlike S-UOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-UOWA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-UOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz incierto.

Otro caso particular de operador *UOWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-UOWA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{4.82}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento incierto más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética incierta y si $\alpha = \infty$, se obtiene el máximo incierto. Otra familia de *UOWA operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1 - b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1 - b_j)^{\alpha}} \tag{4.83}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento incierto más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética incierta y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo incierto. Un tercer tipo de operadores *UOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{4.84}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento incierto más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso también se obtiene la media incierta si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, se obtiene la media harmónica incierta y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo incierto.

En el caso de los operadores *UOWA*, también se puede aplicar la metodología de Filev y Yager (1998), los cuales sugirieron otros dos métodos para determinar las ponderaciones *OWA*. Para el primer método, las ponderaciones se expresan de la siguiente forma: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se consiguen como: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *UOWA* es el *centered UOWA weights*. Este tipo de operador dice que un operador *UOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered UOWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética incierta ya que todas sus ponderaciones son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered UOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered UOWA* se le conoce como *non-inclusive centered UOWA operator*. En este tipo de *centered UOWA* se encuentra como caso particular la mediana incierta.

Un caso especial de *centered UOWA* es el *Gaussian UOWA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana η(μ, σ) donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{4.85}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{4.86}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{4.87}$$

Se pueden definir los *UOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{4.88}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener los coeficientes es el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] → [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *UOWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{4.89}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. La metodología a utilizar en los operadores *UOWA* es la misma que en los operadores *OWA* ya que en ambos casos las ponderaciones son números precisos. A modo de resumen, se puede decir lo siguiente. Un primer método es aquel que calcula las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método es conocido como el *maximal entropy UOWA* (*MEUOWA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \tag{4.90}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo a Filev y Yager (1995), en este caso también se puede desarrollar un método analítico para obtener las ponderaciones *MEUOWA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Un segundo método consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *minimal variability UOWA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.91}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo a Fullér y Majlender (2003) se puede solucionar este problema a través de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker.

Un tercer método consiste en utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Este modelo se conoce como *maximal Rényi entropy UOWA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^\beta = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^\beta\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.92}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe destacar que el *MEUOWA weights* es un caso particular de este último método cuando β=1.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones consiste en minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se denomina *minimax disparity UOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{Sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} (n-j) w_j = \alpha \tag{4.93}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal y resuelto por el método dual. También cabe mencionar la posibilidad de aplicar la propuesta de Liu (*in press*) para el caso de operadores *UOWA*.

4.2.5.3. Ejemplo ilustrativo: Selección de viviendas

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *OWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables en cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones. De entre los muchos problemas decisionales que se podrían plantear, se puede destacar los problemas de selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, estudios, etc. En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de viviendas ya que este proceso de decisión es probablemente uno de los más importantes desde el punto de vista de las personas.

Ejemplo: Supongamos que una persona se está planteando adquirir una vivienda. Después de una preselección, considera cinco alternativas posibles:

A_1: Vivienda A.
A_2: Vivienda B.
A_3: Vivienda C.
A_4: Vivienda D.
A_5: Vivienda E.

Se consideran cinco características fundamentales: C_1 = Accesibilidad, C_2 = Antigüedad, C_3 = Ubicación, C_4 = Tamaño, C_5 = Precio. Como el entorno es muy incierto, el decisor no puede expresar las características C_1 y C_3 mediante números precisos. Por tanto, tiene que recurrir a la utilización de intervalos de confianza. Cabe destacar que para el resto de características se supone $a = (a_1, a_2)$ Las evaluaciones sobre las características son las siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	(4,5)	4	(4,6)	8	7
A_2	(3,5)	5	(5,6)	6	8
A_3	(6,7)	2	(4,7)	5	9
A_4	(3,4)	7	(7,8)	3	6
A_5	(7,8)	2	(4,5)	8	7

Para los casos en donde se requiera, el decisor establece el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la vivienda más adecuada para esta persona. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo incierto, mínimo incierto, media aritmética incierta (*UA*), media ponderada incierta (*UWA*), *UOWA* y *AUOWA*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*UA*	*UWA*	*UOWA*	*AUOWA*
A_1	8	4	(5.4,6)	(5.7,6.2)	(5,5.6)	(5.8,6.4)
A_2	8	(3,5)	(5.4,6)	(5.9,6.3)	(4.9,5.7)	(5.9,6.3)
A_3	9	2	(5.2,6)	(5.5,6.2)	(4.5,5.3)	(5.9,6.7)
A_4	(7,8)	3	(5.2,5.6)	(5.5,5.8)	(4.8,5.1)	(5.6,6.1)
A_5	8	2	(5.6,6)	(5.6,5.9)	(5,5.4)	(6.2,6.6)

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Cabe destacar que en el caso de no poder escoger entre dos o más intervalos, se recurre al criterio de ordenación comentado anteriormente. Es decir, primero se calcula el valor medio del intervalo. En el caso de que continúe el empate se opta por un criterio subjetivo conservador, es decir, aquel intervalo que tenga menor entropía. Si utilizamos el mínimo o el operador *UOWA*, nuestra decisión será escoger la vivienda A. Si se utiliza la media ponderada incierta o el operador *AUOWA*, la decisión será escoger la vivienda E. Mediante el máximo, la vivienda óptima será la C. Finalmente, mediante la media ponderada incierta, la decisión óptima consiste en escoger la vivienda B.

A continuación, vamos a estudiar otros tipos de agregaciones *UOWA* mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente en el capítulo 4.2.5.2 Se va a considerar el *step-UOWA operator*, la mediana-*UOWA*, el *olympic-UOWA*, el *S-OR-UOWA operator*, el *S-AND-UOWA operator*, y las dos clases de *E-Z UOWA weights*. Cabe destacar que se considerará k = 3 para el *step-UOWA* y para los *E-Z UOWA*. Para el *S-OR-UOWA* se supone α = 0.4 y para el *S-AND-UOWA* se supone β = 0.4. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *UOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *OWA*

	Step	*Mediana*	*Olympic*	*S-OR*	*S-AND*	*EZ-1*	*EZ-2*
A_1	(4,6)	(4,6)	(5,6)	(6.4,6.8)	(4.8,5.2)	(6.3,7)	(4,5)
A_2	(5,6)	(5,6)	(5.3,5.6)	(6.4,6.8)	(4.4,5.6)	(6.3,6.6)	(4.3,5.3)
A_3	(4,7)	(4,7)	(5,6.3)	(6.7,7.2)	(3.9,4.4)	(6.3,7.6)	(3.6,4.6)
A_4	6	6	(5.3,5.6)	(5.9,6.5)	(4.3,4.5)	(6.6,7)	(4,4.3)
A_5	7	7	(6,6.6)	(6.5,6.8)	(4.1,4.4)	(7.3,7.6)	(4.3,4.6)

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *step-UOWA*, la mediana-*UOWA*, el olympic-UOWA o el *EZ-UOWA 1*, la decisión será escoger la vivienda A_5. Con el *E-Z UOWA 2*, la decisión consiste en escoger la A_2. Finalmente, si se utiliza el *S-OR-UOWA* la decisión será escoger la vivienda A_3 y mediante el *S-AND-UOWA*, la A_1.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las viviendas. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una vivienda. Como aspecto a resaltar, podemos decir que cada operador nos da un orden diferente de las viviendas. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las viviendas.

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_3 \succ A_1 = A_2 = A_5 \succ A_4$	*Mediana-UOWA*	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Mínimo	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 = A_5$	*Olympic-UOWA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 = A_4 \succ A_1$
UA	$A_5 \succ A_1 = A_2 \succ A_3 = A_4$	*S-OR-UOWA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 = A_2 \succ A_4$
UWA	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$	*S-AND-UOWA*	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_3$
UOWA	$A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_3$	*E-Z UOWA 1*	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
AUOWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	*E-Z UOWA 2*	$A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
Step-UOWA	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$		

Como se puede observar según el tipo de agregación *UOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del decisor también.

4.2.6. *Fuzzy OWA operator*

4.2.6.1. Introducción

Un modelo similar al anterior es aquel que utiliza información numérica expresada mediante números borrosos (NB) en lugar de utilizar intervalos de confianza. Cabe destacar que este aspecto se produce en aquellas situaciones de la vida cotidiana con elevados grados de incertidumbre en donde se necesita y se dispone de información representada mediante NB que permiten explicar con cierta claridad cual es la situación incierta a la que se enfrenta el decisor.

A pesar de que el primer trabajo de Zadeh (1965) ya consideraba implícitamente los NB, hoy en día, se considera que su origen se encuentra en los trabajos de Chang y Zadeh (1972) y Zadeh (1975a; 1975b; 1975c). Posteriormente, los NB han sido desarrollados por varios autores (Mizumoto y Tanaka, 1976; Nahmias, 1978; Dubois y Prade, 1978). Comparando los NB con los intervalos de confianza, se puede decir que los NB son mucho más completos. Esto se debe a que aparte de delimitar los extremos entre los cuales fluctuará el problema en cuestión, también permiten conocer en cierta medida cuáles son las posibilidades de ocurrencia de los valores intermedios. También cabe remarcar que la definición tradicional de los NB dice que son aquellos subconjuntos borrosos que cumplen con la propiedad de normalidad, convexidad y pertenecen al campo de los reales *R*.

Cabe señalar la existencia de una gran variedad de números borrosos de entre los cuales se pueden destacar los números borrosos triangulares (NBT), los números borrosos trapezoidales (NBTp), etc. Obsérvese que un NBT es un caso particular de NBTp cuando el intervalo de máxima presunción es un único valor preciso. Para más información sobre aritmética borrosa, etc., véase por ejemplo (Dubois y Prade, 1978; 1980; Nahmias, 1978; Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

Con esta información, se puede elaborar un operador *OWA* que utiliza NB. Existen diferentes versiones de entre las cuales se puede destacar (Mitchell y Estrakh, 1998; 2004; Canfora y Troiano, 2001; S.J. Chen y S.M. Chen, 2003). En este trabajo, a este tipo de operadores se les denominará *Fuzzy OWA* (*FOWA*) *operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Un *FOWA operator* de dimensión n es una función F: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector $w = (w_1, w_2,\ldots, w_n)^T$ tal que $w_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Entonces:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.94}$$

donde b_j^* es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y los $\tilde{a}_i$ ($i \in N$) son NB. Cabe destacar que se pueden utilizar diversos tipos de NB. Por ejemplo, se podría utilizar los NBT, los NBTp, etc. De forma genérica, se puede decir que se utilizará para cada problema aquel tipo de NB que más se adapte a la situación particular a la que se enfrente el decisor.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos (estados de la naturaleza) con las ponderaciones (coeficientes). Se puede observar que también podemos expresar esta agregación en una notación vectorial como:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{4.95}$$

En esta expresión, W es el vector *FOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado, donde el j-ésimo componente en B es b_j^* siendo este el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$. Usando esta notación vectorial, podemos distinguir claramente la parte del proceso que es lineal (la multiplicación matricial) de la parte no-lineal (la formulación de *B*).

Al igual que el operador *UOWA*, el proceso de reordenación del operador *FOWA* tiene una dificultad adicional por el hecho de tener que ordenar NB. Esto nos lleva a tener que comparar NB. En algunos casos, la comparación es inmediata ya que un NB es claramente superior al otro. Pero en otros casos, la comparación puede ser más compleja y se tiene que recurrir a criterios subjetivos. De entre la gran variedad de criterios que existen para comparar NB, en este trabajo se seguirá una metodología similar a la desarrollada en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; Kaufmann et al., 1994). Cabe destacar que para más información sobre ordenación de NB, se puede consultar, por ejemplo, (Buckley, 1985; Chen, 1985; Dubois y Prade, 1983; Kim y Park, 1990).

El proceso a seguir en el caso de que directamente no se obtenga una ordenación, es el siguiente. Supongamos dos NBTp $A = [a_1, a_2, a_3, a_4]$ y $B = [b_1, b_2, b_3, b_4]$, se calcula el valor medio. Como conceptualmente se dice que a_2 y a_3, son el intervalo de máxima presunción, se puede suponer que estos dos valores son datos de mayor relevancia en el problema. Por tanto, al calcular el valor medio, podemos asignar una mayor ponderación a estos dos valores a través de utilizar la media ponderada. Tradicionalmente, se ha utilizado $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) / 6$, para calcular dicho valor medio. Pero también se podrían utilizar otras ponderaciones. Por ejemplo, como se ha comentado con los intervalos de confianza, se puede asignar una mayor ponderación al intervalo de máxima presunción. Por ejemplo, se podría: $(a_1 + 4a_2 + 4a_3 + a_4) / 10$. Si ahora se realiza la comparación y se obtiene que $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4)/6 > (b_1 + 2b_2 + 2b_3 + b_4)/6$, entonces ya se puede concluir que $A > B$. Pero en el caso de que siga el empate, se tendrá que recurrir a un criterio de naturaleza subjetiva. De acuerdo con el grado de optimismo o pesimismo del decisor, se asignará una ponderación que dará más o menos importancia a los diferentes valores del NBTp. Cabe destacar que se podrían utilizar otra amplia gama de agregaciones a través de ponderar alguno de los valores del NBTp. Por ejemplo, se podría comparar el valor medio de los extremos, el valor medio del intervalo de máxima presunción, etc.

Un *FOWA operator* es una media. Esto es debido a que el operador es conmutativo, monótono, idempotente y limitado por el máximo y el mínimo. Es conmutativo porque cualquier premutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$ para todo *i*, entonces, $FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) \geq FOWA(\tilde{u}_1, \ldots, \tilde{u}_n)$. Es idempotente porque si $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, para todo *i*, entonces, $FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$. Finalmente, es limitado porque $\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre el *Descending FOWA (DFOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending FOWA (AFOWA) operator*. En resumen, esta distinción es necesaria para poder expresar adecuadamente el carácter actitudinal del decisor ante situaciones de beneficios y ante situaciones de costes. El operador *DFOWA* tiene la misma definición que el operador *FOWA*. Para el operador *AFOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Un *AFOWA operator* de dimensión n es una función F: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector $w = (w_1, w_2,\ldots, w_n)^T$ tal que $w_j \in [0, 1]$, $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Entonces:

$$AFOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.96}$$

donde b_j^* es el j-ésimo más pequeño de los $\tilde{a}_i$, y los $\tilde{a}_i$ ($i \in N$) son NB. Cabe destacar que los NB pueden ser NBT, NBTp, etc. De forma genérica, se puede decir que se utilizará para cada problema aquel tipo de NB que más se adapte a la situación específica.

Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *AFOWA*, vemos como los argumentos b_j^* están ordenados de forma ascendente: $b_1^* \leq b_2^* \leq\ldots \leq b_n^*$, mientras que en el operador *FOWA* (o *DFOWA*), el orden es descendente: $b_1^* \geq b_2^* \geq\ldots \geq b_n^*$. Cabe destacar que los vectores del *FOWA* y *AFOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFOWA* (o *FOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de considerar a las ponderaciones como NB. Al igual que en el caso con intervalos de confianza, la motivación de este aspecto reside en situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral. A modo de anticipo, destacar un aspecto similar al caso de intervalos de confianza. Aparte de los diferentes problemas matemáticos que conlleva el tratar con ponderaciones borrosas y el estudio de sus diferentes familias, existe un problema fundamental en relación al carácter actitudinal $\alpha(W)$ a la hora de agregar números negativos en estas situaciones que lleva a ciertos desajustes de dicha medida $\alpha(W)$.

También cabe la posibilidad de complicar más estos modelos con información incierta o borrosa a través de mezclarlos entre sí. Es decir, utilizar ponderaciones expresadas mediante intervalos de confianza y argumentos expresados por números borrosos y viceversa. A su vez, se podrían mezclar situaciones con tripletas, cuádruplos, NBT, NBTp, etc. Estos temas también se dejarán para la tesis doctoral o en algunos casos incluso para investigación postdoctoral.

En el operador *FOWA*, también es posible utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Como estas medidas únicamente afectan a las ponderaciones y no a los argumentos inciertos, su formulación será la misma que en el caso de los operadores *OWA*. Por tanto, sus formulaciones están expuestas en el Capítulo 4.1.1. A modo de resumen, se puede decir que el carácter actitudinal se define como:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \quad (4.97)$$

En cuanto a la medida de dispersión:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \quad (4.98)$$

Para la medida de balance, se obtiene la siguiente expresión:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \quad (4.99)$$

Finalmente, si analizamos la medida de divergencia para el operador *FOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (4.100)$$

Como se puede observar, su formulación es idéntica a la de los operadores *OWA*.

También cabe destacar que estas medidas pueden ser estudiadas mediante el operador *AFOWA* utilizando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFOWA* (o *FOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFOWA operator*.

4.2.6.2. Tipos de *FOWA operators*

A continuación, se van a estudiar diferentes casos particulares de operadores *FOWA*. Básicamente, se estudiarán diferentes casos particulares a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. También cabe señalar que estos resultados se pueden conseguir con el *DFOWA* o el *AFOWA operator*. Debido a que estos operadores están totalmente relaciones a través de $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación del *DFOWA* (o *FOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación del *AFOWA operator*, únicamente se considerará el caso genérico con operadores *FOWA*. Por ejemplo, se puede obtener el NB máximo, el NB mínimo, el NB medio y el NB medio ponderado.

El NB máximo se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El NB mínimo se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media aritmética de NB o *fuzzy average* (*FA*), se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$. La media ponderada de NB o *fuzzy weighted average* (*FWA*), se consigue cuando la ordenación de los $\tilde{a}_i$ coincide con la ordenación de los b_j*.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *FOWA* son el *step-FOWA operator*, el *window-FOWA operator*, el *olympic-FOWA operator*, la mediana *FOWA*, la mediana ponderada *FOWA*, el *E-Z FOWA weights*, el *S-FOWA operator*, las ponderaciones que dependen de los NB agregados, el *centered-FOWA operator* y el *Gaussian FOWA weights*, entre otros.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene el *step-FOWA operator*. Cabe destacar que el *step-FOWA operator* se convierte en el NB máximo si $k = 1$ y en el NB mínimo si $k = n$.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-FOWA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-FOWA operator* se convierte en el NB máximo si $m = k = 1$, en el NB mínimo si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética de NB si $m = n$ y $k = 1$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic-FOWA average*. El *olympic-FOWA average* se transforma en el NB mediano si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-FOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

De forma general, el NB mediano se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande $\tilde{a}_i$.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización del NB mediano ponderado. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z FOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el NB máximo y si $k = n$, la media aritmética de NB. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el NB mínimo y si $k = n$, la media aritmética de NB.

Otra familia interesante de operadores *FOWA* es el *S-FOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-FOWA operator*. El *orlike S-FOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media de NB y si $\alpha = 1$, se obtiene el NB máximo. El *andlike S-FOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-FOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media aritmética de NB y si $\beta = 1$, se obtiene el NB mínimo. Finalmente, el *generalized S-FOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-FOWA operator* se convierte en el *andlike S-FOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-*

FOWA operator. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-FOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz con NB.

Otro caso particular de operador *FOWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-FOWA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{4.101}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo NB más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética de NB y si $\alpha = \infty$, se obtiene el NB máximo. Otra familia de *FOWA* operators que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)^{\alpha}} \tag{4.102}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo NB más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media aritmética de NB y si $\alpha = \infty$, se obtiene el NB mínimo. Un tercer tipo de operadores *FOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^{\alpha}} \tag{4.103}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo NB más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso también se obtiene la media de NB si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, se obtiene la media harmónica de NB y si $\alpha = \infty$, se obtiene el NB mínimo.

En los operadores *FOWA*, también es posible seguir con la metodología de Filev y Yager (1998), los cuales sugirieron otros dos métodos para determinar las ponderaciones *OWA*. Para el primer método, las ponderaciones se expresan de la siguiente forma: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se consiguen como: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *FOWA* es el *centered-FOWA weights*. Este tipo de operador dice que un operador *FOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered FOWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética de NB ya que todas sus ponderaciones son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular de *centered-FOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-FOWA* se le conoce como *non-inclusive centered-FOWA operator*. En este tipo de *centered-FOWA* se encuentra como caso particular la mediana de NB.

Un caso especial de *centered-FOWA* es el *Gaussian-FOWA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{4.104}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{4.105}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{4.106}$$

Se pueden definir los *FOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{4.107}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones es el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *FOWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{4.108}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otras alternativas para obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. La metodología a utilizar en los operadores *FOWA* es la misma que en los operadores *OWA* ya que en ambos casos las ponderaciones son números precisos. A modo de resumen, se puede decir lo siguiente. Un primer método es aquel que calcula las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método es conocido como el *maximal entropy FOWA* (*MEFOWA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \tag{4.109}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo a Filev y Yager (1995), en este caso también se puede desarrollar un método analítico para obtener las ponderaciones *MEFOWA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Un segundo método consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *minimal variability FOWA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.110}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo a Fullér y Majlender (2003) se puede solucionar este problema a través de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker.

Un tercer método consiste en utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Este modelo se conoce como *maximal Rényi entropy FOWA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^\beta = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^\beta\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.111}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que el *MEFOWA weights* es un caso particular de este último método cuando $\beta=1$.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones consiste en minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se denomina *minimax disparity FOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar: } \left\{ \underset{j\in\{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{Sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{4.112}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal y resuelto por el método dual. También cabe mencionar la posibilidad de aplicar la propuesta de Liu (*in press*) para el caso de operadores *FOWA*.

4.2.6.3. Ejemplo ilustrativo: Selección de deportistas

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *FOWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones. De entre los muchos problemas decisionales que se podrían plantear, se puede destacar los problemas de selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, estudios, etc. En este apartado, se desarrollará un caso particular de la selección de recursos humanos: la selección de deportistas. Obviamente, un correcto análisis sobre la selección del deportista adecuado para un equipo es fundamental, sobretodo en deportes en donde se mueven grandes cifras económicas como es el caso del fútbol.

Ejemplo: Supongamos que un equipo de fútbol necesita fichar a un nuevo jugador para cubrir un puesto que ha quedado vacante. Después de un análisis genérico de todas las posibilidades, se considera como posibles fichajes a 5 jugadores.

(1) A_1: Jugador 1.
(2) A_2: Jugador 2.
(3) A_3: Jugador 3.

(4) A_4: Jugador 4.
(5) A_5: Jugador 5.

Para llevar a cabo la selección, se consideran las siguientes características como fundamentales: C_1 = Capacidad de relacionarse dentro del equipo, C_2 = Capacidad de trabajar en equipo, C_3 = Visión de juego, C_4 = Velocidad, C_5 = Habilidad y técnica, C_6 = Precio. Para evaluar estas características, se pide a un grupo de expertos que evaluen a estos jugadores. Como el entorno es muy incierto, los expertos no pueden evaluar las características con números precisos y recurren a la utilización de los NB. Cabe destacar que las evaluaciones son valores entre 0 y 100 donde 0 indica el peor resultado y 100 el mejor. Las evaluaciones genéricas hechas por los expertos son las siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	(35,40,50)	(60,70,80)	(90,95,100)	(70,75,80)	(80,85,90)	(50,60,70)
A_2	(70,80,90)	(50,60,70)	(60,70,80)	(70,80,90)	(70,80,90)	(50,60,70)
A_3	(70,80,90)	(70,80,90)	(70,80,90)	(70,80,90)	(70,80,90)	(20,30,40)
A_4	(40,50,60)	(60,70,80)	(60,70,80)	(80,90,100)	(60,70,80)	(40,50,60)
A_5	(50,60,70)	(50,60,70)	(50,60,70)	(50,60,70)	(70,80,90)	(80,90,100)

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es el deportista más adecuado para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo borroso, mínimo borroso, media aritmética borrosa (*FA*), media ponderada borrosa (*FWA*), *FOWA* y *AFOWA*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados.

	Max	*Min*	*FA*	*FWA*	*FOWA*	*AFOWA*
A_1	(90,95,100)	(35,40,50)	(64.1,70.8,78.3)	(63.5,70.5,78)	(56.5,63.5,72)	(71.5,77.5,84)
A_2	(70,80,90)	(50,60,70)	(61.6,71.6,81.6)	(61,71,81)	(58,68,78)	(65,75,85)
A_3	(70,80,90)	(20,30,40)	(61.6,71.6,81.6)	(55,65,75)	(55,65,75)	(65,75,85)
A_4	(80,90,100)	(40,50,60)	(56.6,66.6,76.6)	(56,66,76)	(52,62,72)	(62,72,82)
A_5	(80,90,100)	(50,60,70)	(58.3,68.3,78.3)	(63,71,83)	(55,65,75)	(63,73,83)

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Cabe destacar que en los casos en los cuales no se vea directamente qué NB es mayor, se recurrirá al criterio de ordenación comentado anteriormente. Es decir, se calcula el valor medio mediante: $(a_1 + 2a_2 + a_3)/4$. En el caso de que prosiga el empate, se utilizará como criterio subjetivo el de menor incertidumbre.

Si utilizamos el máximo borroso o el operador *AFOWA*, nuestra decisión será escoger al jugador A_1. Si se utiliza el mínimo, el jugador óptimo será el A_2 o el A_5. Mediante el operador *FA* la decisión consiste en escoger la alternativa A_2 o A_3 y mediante la media ponderada borrosa, la A_5. Finalmente, mediante el operador *FOWA*, el jugador más adecuado para el equipo será el A_2.

A continuación, vamos a estudiar otros tipos de agregaciones *FOWA* mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente en el capítulo 4.2.6. Se va a considerar el *step-FOWA operator*, la mediana-*FOWA*, el *olympic-FOWA*, el *S-OR-FOWA operator*, el *S-AND-FOWA operator*, y el *E-Z FOWA 1 weights*. Cabe destacar que se considerará k = 3 para el *step-FOWA* y para los *E-Z FOWA*. Para el *S-OR-FOWA* se supone α = 0.4 y para el *S-AND-FOWA* se supone β = 0.4. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *FOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *FOWA*

	Step	*Mediana*	*Olympic*	*S-OR*	*S-AND*	*EZ-1*
A_1	(70,75,80)	(65,72.5,80)	(65,72.5,80)	(74.5,80.5,87)	(52.5,58.,67)	(80,85,90)
A_2	(70,80,90)	(65,75,85)	(62.5,72.5,82.5)	(65,75,85)	(57,67,77)	(70,80,90)
A_3	(70,80,90)	(70,80,90)	(70,80,90)	(65,75,85)	(45,55,65)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(60,70,80)	(55,65,75)	(62,72,82)	(50,60,70)	(66.6,76.6,86.6)
A_5	(50,60,70)	(50,60,70)	(55,65,75)	(63,73,83)	(55,65,75)	(66.6,76.6,86.6)

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *S-OR-FOWA* o el *EZ-FOWA 1*, la decisión será escoger al jugador A_1. Si se utiliza la mediana o el *olympic-FOWA*, el deportista más adecuado será el A_3. Mediante el *S-AND-FOWA*, el jugador óptimo será el A_2. Finalmente, si se utiliza el *step-FOWA*, la decisión será escoger al deportista A_2 o al A_3.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de los deportistas. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar a más de un deportista o se desea considerar posibles sustitutos ante casos excepcionales. Como aspecto a resaltar, podemos decir que cada operador nos da un orden diferente de los deportistas. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de los deportistas.

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_1 \succ A_4 = A_5 \succ A_2 = A_3$	*Step-FOWA*	$A_2 = A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5$
Mínimo	$A_2 = A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$	*Mediana-FOWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5$
FA	$A_2 = A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$	*Olympic-FOWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4 = A_5$
FWA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$	*S-OR-FOWA*	$A_1 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2 = A_3$
FOWA	$A_2 \succ A_3 = A_5 \succ A_1 \succ A_4$	*S-AND-FOWA*	$A_2 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3$
AFOWA	$A_1 \succ A_2 = A_3 \succ A_5 \succ A_4$	*E-Z FOWA 1*	$A_1 \succ A_2 = A_3 \succ A_4 = A_5$

Como se puede observar según el tipo de agregación *FOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión sobre qué jugador fichar también.

4.2.7. Otras extensiones de nivel 1

Aparte de las extensiones comentadas, cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel 1. Por ejemplo, se podría destacar el *Nonmonotonic OWA*

(*NOMMOWA*) *operator* (Yager, 1999a), el *Weighted OWA* (*WOWA*) *operator* (Torra 1997), el *generalized OWA operator* (Schaefer y Mitchell, 1999), el *Ordinal OWA operator* (Yager, 1992a), el *OWA* con t-normas (*t-OWA*) (Yager et al., 2005), el *Majority Additive OWA* (Peláez y Doña, 2003), el *Constrained OWA* (Yager, 1996a), y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar los operadores *OWA* en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer (Dempster, 1967; Shafer, 1976) desarrollado por Yager (1992b) y Merigó y Casanovas (2006a; 2007a), en el método de minimización del coste de Savage (Savage, 1951) también desarrollado por Yager (2004a) y Merigó y Casanovas (2006c; 2007c), en el *Analytic Hierarchy Process* o *AHP* (Saaty, 1978; 1980) desarrollado por Yager y Kelman (1999). Además, aunque no se haya estudiado con detalle en este trabajo, también se tiene que señalar las aplicaciones hechas en los métodos de decisión basados en distancias o similar por Merigó y A.M. Gil-Lafuente (2006a; 2006b; 2006c; 2006d; 2007a; 2007c; 2007d; 2007e; 2007f).

4.3. Extensiones de nivel 2

En este apartado, se va a describir brevemente algunas de las principales extensiones de nivel 2 sobre los operadores *OWA*. Cuando se refiere a extensiones de nivel 2, se está indicando extensiones *OWA* con dos características genéricas. Es decir, aquellas extensiones que utilizan dos características de nivel 1. Para resumir el trabajo, en este apartado no se estudiarán con detalle los diferentes casos particulares de los operadores obtenidos ya que se sobreentienden dentro del contexto. De forma resumida, se puede decir que la mayoría de tipos estudiados en las extensiones de nivel 1, también son aplicables a las extensiones de nivel 2.

4.3.1. *Induced linguistic OWA operator*

El *induced linguistic OWA (ILOWA) operator* ha sido propuesto por Xu (2006a) y consiste en utilizar información lingüística en situaciones en donde la agregación *OWA* utiliza un proceso de ordenación diferente del valor de los argumentos lingüísticos S_i. En este caso, se utiliza un proceso de reordenación más complejo basado en variables de ordenación inducidas u_i. El *IOWA Operator* es definido de la siguiente forma.

Definición: Una función $F{:}S^n \rightarrow S$ es un *ILOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(\langle u_1, S_{\alpha_1}\rangle,\ldots, \langle u_n, S_{\alpha_n}\rangle) = w_1 \otimes S_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes S_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus w_n \otimes S_{\beta_n} = S_{\bar{A}} \qquad (4.113)$$

donde $\bar{A} = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j$; S_{β_j} es el valor S_{α_i} del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, S_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y S_{α_i} es la variable del argumento lingüístico.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, podemos distinguir entre el *Descending ILOWA (DILOWA) operator* y el *Ascending ILOWA (AILOWA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DILOWA operator* tiene la misma definición que el *ILOWA operator*. El *AILOWA operator* también se define de la misma forma con la única diferencia que ahora el orden es ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DILOWA* (o *ILOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AILOWA operator*.

El operador *ILOWA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y limitado por el máximo y el mínimo. Para el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir la política de Yager y Filev (1999) en donde se sustituyen los argumentos lingüísticos empatados por su media aritmética lingüística. Además, también se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal. Entre otros métodos, se destaca la posibilidad de utilizar variables lingüísticas en las variables inducidas de forma que se puede mezclar en la agregación valores numéricos con valores lingüísticos.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros el máximo lingüístico, el mínimo lingüísico, la media aritmética lingüística (*LA*), la media ponderada lingüística (*LWA*), el *LOWA operator*, el *step-ILOWA operator*, el *window-ILOWA operator*, el *olympic-ILOWA operator*, la mediana *ILOWA*, la mediana ponderada *ILOWA*, el *E-Z ILOWA weights*, el *S-ILOWA operator*, la ponderación *ILOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ILOWA weights*, el *Gaussian-ILOWA weights*, y muchos otros más.

4.3.2. *Induced 2-tuple OWA operator*

Un modelo similar al anterior es aquel que utiliza variables inducidas en el proceso de reordenación con información lingüística expresada mediante 2-tuplas. A este modelo se le denomina *induced 2-tuple OWA* (*I2-TOWA*) *operator*. Partiendo de las nociones básicas del modelo lingüístico de 2-tuplas explicadas en el Capítulo 4.2.2.2., se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea $A = \{(s_1, \alpha_1), \ldots, (s_n, \alpha_n)\}$ un conjunto de 2-tuplas y W un vector asociado de dimensión n que satisface:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

entonces, el *induced 2-tuple OWA operator* para 2-tuplas lingüísticas se define como:

$$I2\text{-}TOWA((\langle u_1, (s_1, \alpha_1)\rangle, \ldots, \langle u_n, (s_n, \alpha_n)\rangle)) = \Delta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j^*\right) \tag{4.114}$$

donde β_j^* es el valor β_j del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, (s_n, \alpha_n)\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y β_j es la variable del argumento lingüístico de 2-tuplas.

Como se puede observar, este operador también verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y limitación entre el máximo y el mínimo. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se pueden distinguir entre el *Descending induced 2-tuple OWA* (*DI2-TOWA*) *operator* y el *Ascending induced 2-tuple OWA* (*AI2-TOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DI2-TOWA* (o *I2-TOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AI2-TOWA operator*.

En este caso también se puede seguir con las ideas de Yager y Filev (1999), y utilizar la media aritmética de 2-tuplas lingüísticas para situaciones en donde se produzcan empates en las variables inducidas. Entonces, se sustituirán los argumentos con variables inducidas empatadas por su media aritmética lingüística. También cabe destacar la posibilidad de utilizar diferentes formas de expresar las variables inducidas con la única condición de que tengan un orden lineal. Por ejemplo, se podrían utilizar variables ligüísticas en las variables inducidas. Cabe destacar que estas variables lingüísticas podrían ser las variables tradicionales, las 2-tuplas lingüísticas, etc.

De forma resumida, si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros el máximo lingüístico, el mínimo lingüísico, la media aritmética de 2-tuplas (*2-TAM*), la media ponderada de 2-tuplas (*2-TWA*), el *2-TOWA operator*, el *step-I2-TOWA operator*, el *window-I2-TOWA operator*, el *olympic-I2-TOWA operator*, la mediana *I2-TOWA*, la mediana ponderada *I2-TOWA*, el *E-Z I2-TOWA weights*, el *S-I2-TOWA operador*, la ponderación *I2-TOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-I2-TOWA weights*, el *Gaussian-I2-TOWA weights*, y muchos otros más.

4.3.3. *Induced heavy OWA operator*

Otra extension de nivel 2 es aquella que utiliza variables de ordenación inducidas en problemas donde la información ya sea totalmente o parcialmente es independiente entre sí. Es decir, parte de la información de las distintas variables puede producirse a la vez de forma que es necesario desarrollar un proceso de reordenación que refleje este hecho. Esta extensión se denomina *induced heavy OWA* (*IHOWA*) *operator* y ha sido propuesta por Merigó y Casanovas (2006b; 2007d). Puede definirse de la siguiente forma.

Definición: Una función $F:R^n \rightarrow R$ es un *Induced Heavy OWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$IHOWA(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4.115}$$

donde b_j es el valor a_i del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y a_i es la variable del argumento.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, podemos distinguir entre el *Descending IHOWA (DIHOWA) operator* y el *Ascending IHOWA (AIHOWA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DIHOWA operator* tiene la misma definición que el *IHOWA operator*. El *AIHOWA operator* también se define de la misma forma con la única diferencia que ahora el orden es ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DIHOWA* (o *IHOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AIHOWA operator*.

El operador *IHOWA* únicamente cumple las propiedades de conmutatividad y monotonía. También cumple la propiedad de ser limitado pero en este caso es por el mínimo y el operador total. En este caso, también se debe de tener en cuenta el caso de empates en las variables de ordenación inducidas. De igual forma que en las anteriores extensiones con variables inducidas, se recomienda seguir la política de Yager y Filev (1999) en donde se sustituyen los argumentos empatados por su media aritmética. Además, también se tiene que destacar la posibilidad de utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal. Entre otros métodos, existe la posibilidad de utilizar variables lingüísticas en las variables inducidas de forma que se pueden mezclar en la agregación valores numéricos con valores lingüísticos.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros el máximo, el mínimo, la media aritmética (*AM*), la media ponderada (*WA*), el *OWA operator*, el operador total, el *push up IHOWA allocation*, el *push down IHOWA allocation*, el *uniform IHOWA allocation*, el *step-IHOWA allocation*, el *olympic-IHOWA allocation*, el *median IHOWA allocation*, y muchos otros más.

4.3.4. *Induced hybrid averaging*

Otra possible extensión de nivel 2 es aquella que utiliza variables de ordenación inducidas en agregaciones híbridas entre la media ponderada y la media ponderada ordenada. A esta extensión se le denomina *induced hybrid averaging* (*IHA*) y permite considerar procesos de decisión en donde el carácter del decisor es más complejo que su grado de optimismo. Se puede definir de la siguiente forma

Definición: Una función $F:R^n \rightarrow R$ es un *IHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$IHA(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j\ b_j \qquad (4.116)$$

donde b_j es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y a_i es la variable del argumento. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

En este operador, también es posible distinguir entre el *Descending IHA (DIHA) operator* y el *Ascending IHA (AIHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DIHA operator* tiene la misma definición que el *IHA operator*. El *AIHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DIHA* (o *IHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AIHA operator*.

El operador *IHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sugieren sustituir los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media aritmética híbrida. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal. Entre otros métodos, se puede destacar el uso de variables lingüísticas en las variables inducidas de forma que se pueden mezclar en la agregación valores numéricos con valores lingüísticos.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *IOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones $\omega_i = 1/n$, de forma que el *IHA* se convierta en el *IOWA* operador. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el capítulo 4.2.1.2.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *IOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media aritmética híbrida, la media ponderada híbrida, el operador *HA*, el *step-IHA operator*, el *window-IHA operator*, el *olympic-IHA operator*, la mediana *IHA*, la mediana ponderada *IHA*, el *E-Z IHA weights*, el *S-IHA operator*, la ponderación *IHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-IHA weights*, el *Gaussian-IHA weights*, y muchos otros más.

4.3.5. *Uncertain induced OWA operator*

El *uncertain induced OWA* (*UIOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *OWA* en donde se supone que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otras alternativas como por ejemplo, la utilización de intervalos de confianza. Además, en esta extensión se supone que la ordenación de los argumentos inciertos se establece mediante el uso de variables de ordenación inducidas.

Cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, también es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *UIOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F:\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UIOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UIOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.117}$$

donde b_j* es el valor $\tilde{a}_i$ del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresado en forma de intervalos de confianza.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. Otra alternativa sería considerar a las variables inducidas como intervalos de confianza. En este caso sí sería necesario definir un criterio de ordenación de intervalos.

Como se puede observar, el operador *UIOWA* también verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain induced OWA* (*DUIOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain induced OWA* (*AUIOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUIOWA* (o *UIOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUIOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de considerar a las ponderaciones como intervalos de confianza. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este caso, también se tiene que analizar aquellos argumentos con variables inducidas empatadas. De forma resumida, se recomienda sustituir estos argumentos por su media aritmética incierta ya que de este modo, la agregación será neutra respecto a este hecho. Cabe destacar la posibilidad de utilizar otros métodos como el *WA* o el *OWA*. Además, se tiene que resaltar el hecho de poder utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas como números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

Finalmente, se debe comentar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *UIOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares al máximo incierto, al mínimo incierto, a la media aritmética incierta (*UA*), a la media ponderada incierta (*UWA*), al operador *UOWA*, al *step-UOWA operator*, al *window-UIOWA operator*, al *olympic-UIOWA operator*, a la mediana *UIOWA*, a la mediana ponderada *UIOWA*, al *E-Z UIOWA weights*, al *S-UIOWA operator*, a la ponderación *UIOWA* que depende de los objetos agregados, al *centered-UIOWA weights*, al *Gaussian-UIOWA weights*, y muchos otros más.

4.3.6. *Fuzzy induced OWA operator*

El *fuzzy induced OWA* (*FIOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *OWA* en donde se supone que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otras alternativas como por ejemplo, la utilización de NB. Además, en esta extensión se supone que la ordenación de los argumentos inciertos se establece mediante el uso de variables de ordenación inducidas. Este método ha sido propuesto por S.J. Chen y S.M. Chen (2003).

Cabe destacar que es posible utilizar una amplia gama de diferentes tipos de NB. Entre otros, se pueden destacar los NBT y los NBTp. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los NB en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *FIOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función F: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FIOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FIOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.118}$$

donde b_j* es el valor $\tilde{a}_i$ del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresado mediante NB.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de NB ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. Otra alternativa sería considerar a las variables inducidas como NB o intervalos de confianza. En este caso sí sería necesario definir un criterio de ordenación de intervalos o de NB.

El operador *FIOWA* también es un operador de medias conmutativo, monótono, idempotente y limitado por el máximo y el mínimo. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending fuzzy induced OWA* (*DFIOWA*) *operator* y el *Ascending fuzzy induced OWA* (*AFIOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFIOWA* (o *FIOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFIOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de considerar a las ponderaciones como NB. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral. También se dejará para la tesis doctoral el estudio de otros casos más complejos en donde se mezclan los intervalos de confianza y los NB en los procesos de decisión.

En este caso, también resulta relevante el estudio de los argumentos con variables inducidas empatadas. De forma resumida, se recomienda sustituir estos argumentos por su media aritmética borrosa ya que de este modo, la agregación será neutra respecto a este hecho. Cabe destacar la posibilidad de utilizar otros métodos como el *FWA* o el *FOWA*. Además, se tiene que resaltar el hecho de poder utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas como números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

Finalmente, se debe comentar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *FIOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares al NB máximo, al NB mínimo, a la media aritmética borrosa (*FA*), a la media ponderada borrosa (*FWA*), al operador *FOWA*, al *step-FIOWA operator*, al *window-FIOWA operator*, al *olympic-FIOWA operator*, a la mediana *FIOWA*, a la mediana ponderada *FIOWA*, al *E-Z FIOWA weights*, al *S-FIOWA operator*, a la ponderación *FIOWA* que depende de los objetos agregados, al *centered-FIOWA weights*, al *Gaussian-FIOWA weights*, y muchos otros más.

4.3.7. *Uncertain linguistic OWA operator*

El *uncertain linguistic OWA* (*ULOWA*) *operator* ha sido propuesto por Xu (2004c) y representa una extensión a los operadores *OWA* de nivel 2. Básicamente, se puede decir que este operador resulta de utilidad para aquellas situaciones de la vida cotidiana en donde la información es muy imprecisa. Como la información es muy imprecisa, únicamente se pueden conocer los resultados de forma aproximada. Para expresar esta información, se puede recurrir al uso de variables lingüíticas. El inconveniente en estas situaciones está en que la información es tan imprecisa que se requiere el uso de intervalos de confianza en las variables lingüísticas para poder acotar la información del problema. Obviamente, el uso de estas herramientas demuestra que la situación tratada está afectada por grados de incertidumbre extremadamente elevados hasta un punto en el cuál se puede considerar que la información disponible es mínima.

En este caso, también cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, se puede utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Cabe destacar que el resultado combinado de estas herramientas puede ser denominado como intervalos de confianza lingüísticos, tripletas de confianza lingüísticas, cuádruplos de confianza lingüísticos, etc.

Para poder definir el operador *ULOWA*, se tiene que tener en cuenta una serie de leyes operacionales sobre variables lingüísticas inciertas (Xu, 2004c). Además, se tendría que volver a considerar los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994). A partir de estas consideraciones previas, se puede definir el operador *ULOWA* de la siguiente forma.

Definición: Una función $ULOWA: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ es un *ULOWA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ULOWA(\tilde{S}_{\alpha_1}, \tilde{S}_{\alpha_2}, ..., \tilde{S}_{\alpha_n}) = w_1 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus w_2 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus ... \oplus w_n \otimes \tilde{S}_{\beta_n} = \tilde{S}_{\bar{A}} \tag{4.119}$$

donde $\bar{A} = \sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j$; S_{β_j} es el *j*-ésimo más grande de los S_{α_i}, y los S_{α_i} son variables lingüísticas inciertas expresadas mediante intervalos de confianza.

Cabe destacar la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza lingüísticos para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*. En este caso, se tendría que tener en cuenta que la ordenación se desarrolla a partir de los valores numéricos de las variables lingüísticas. A modo de ejemplo, para los casos en los cuales no quede claro qué intervalo es mayor, se podrá utilizar el criterio del valor medio. En el caso de que prosiguiese el empate, se tendría que recurrir a criterios subjetivos para decidir sobre el orden de los intervalos de confianza lingüísticos.

El operador *ULOWA* es un operador de medias que verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo lingüístico incierto. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain linguistic OWA* (*DULOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain linguistic OWA* (*AULOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DULOWA* (o *ULOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AULOWA operator*.

También cabe señalar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Como se puede observar, en estas situaciones podría ser muy lógico recurrir a ello ya que el decisor se encuentra en situaciones con niveles de incertidumbre extremos. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este modelo, también es posible utilizar las diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Como estas medidas únicamente afectan a las ponderaciones y no a los argumentos lingüísticos inciertos, su formulación será la misma que en el caso de los operadores *OWA*. Por tanto, sus formulaciones están expuestas en el Capítulo 4.1.1. A modo de resumen, se puede decir que el carácter actitudinal se define como:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{4.120}$$

En cuanto a la medida de dispersión:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4.121}$$

Para la medida de balance, se obtiene la siguiente expresión:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{4.122}$$

Finalmente, si analizamos la medida de divergencia para el operador *LOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{4.123}$$

Como se puede observar, su formulación es idéntica a la de los operadores *OWA*.

Finalmente, destacar la posibilidad de utilizar diferentes familias de operadores ULOWA en el proceso de agregación. Por ejemplo, se podría utilizar el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüísico incierto, la media aritmética lingüística incierta (*ULA*), la media ponderada lingüística incierta (*ULWA*), el *step-ULOWA operator*, el *window-ULOWA operator*, el *olympic-ULOWA operator*, la mediana *ULOWA*, la mediana ponderada *ULOWA*, el *E-Z ULOWA weights*, el *S-ULOWA operator*, la ponderación *ULOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ULOWA weights*, el *Gaussian-ULOWA weights*, y muchos otros más.

4.3.8. *Linguistic hybrid averaging*

El *linguistic hybrid averaging* (*LHA*) es un operador que permite utilizar en la misma agregación al *LWA* y al *LOWA*. Además es un operador que trata situaciones en las cuales, debido a la incertidumbre, etc., no se pueden utilizar valores numéricos.

Entonces, lo que ofrece este operador es la posibilidad de representar estas situaciones mediante información expresada en forma de variables lingüísticas. Este operador ha sido propuesto recientemente por Xu (2006b). Teniendo en cuenta una serie de leyes operacionales básicas (Xu, 2004a), el operador *LHA* se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función $F{:}\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *LHA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$F(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = w_1 \otimes S_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes S_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus w_n \otimes S_{\beta_n} \tag{4.124}$$

donde S_{β_j} es el *j*-ésimo más grande de los argumentos lingüísticos ponderados $\hat{S}_{\alpha_i}$ ($\hat{S}_{\alpha_i} = n\omega_i S_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los S_{α_i}, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, es posible distinguir entre el *Descending LHA (DLHA) operator* y el *Ascending LHA (ALHA) operator*. El *DLHA operator* tiene la misma definición que el *LHA operator*. El *ALHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DLHA* (o *LHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *ALHA operator*. Otro aspecto a señalar es que este operador verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el máximo y el mínimo lingüístico.

Cabe destacar que este operador se ha estudiado con el modelo de Xu (2004a). Pero también podría desarrollarse una versión similar mediante el modelo de Herrera et al. (1995) y mediante el modelo de Herrera y Martínez (2000a). Cabe destacar que utilizando el modelo de Herrera y Martínez (2000a), se obtendría el *2-tuple Hybrid averaging* (*2-THA*).

Como se ha comentado antes, el operador *LHA* abarca tanto al *LWA* como al *LOWA operator*. El *LHA* se convierte en el *LWA* cuando todas las ponderaciones w_j valen 1/*n*, para todo *j*. Por otro lado, el *LHA* se transforma en el *LOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen 1/*n*, para todo *i*.

Aparte de estos dos casos particulares, también se podría destacar la existencia de una gran variedad de casos especiales de operadores *LHA*. Por ejemplo, se podría mencionar todos los casos particulares del *LOWA operator* ya que si $\omega_i = 1/n$, el *LHA* se convirte en el *LOWA operator*. Por tanto, a partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los mismos casos que en el operador *LOWA*, estudiados en el Capítulo 4.2.2.2.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *LOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido lingüístico, el mínimo híbrido lingüístico, la media aritmética híbrida lingüística, la media ponderada híbrida lingüística, el *step-LHA operator*, el *window-LHA operator*, el *olympic-LHA operator*, la mediana *LHA*, la mediana ponderada *LHA*, el *E-Z LHA weights*, el *S-LHA operator*, la ponderación *LHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-LHA weights*, el *Gaussian-LHA weights*, y muchos otros más.

4.3.9. *Uncertain hybrid OWA operator*

El *uncertain hybrid averaging* (*UHA*) o media híbrida incierta es un método de agregación que permite utilizar en la misma formulación a la media ponderada incierta (*UWA*) y a la media ponderada ordenada incierta (*UOWA*). De esta forma, se obtiene una formulación que contiene tanto a situaciones de ponderación subjetiva en los argumentos como a situaciones de ponderación subjetiva según el grado de optimismo del decisor. Este método representa una generalización al operador *OWA* y al operador *WA*, de forma que ambos casos son situaciones particulares de esta formulación. Además, este operador esta destinado a tratar situaciones de la vida cotidiana en donde no es posible cuantificar la información disponible mediante valores numéricos precisos. Por tanto, para tratar a estas situaciones se utiliza información numérica imprecisa, la cual viene expresada en forma de intervalos de confianza.

Esta información numérica imprecisa puede venir expresada por diversos tipos de intervalos de confianza. Aparte de los intervalos de confianza simples, se pueden destacar las tripletas de confianza, los cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta las nociones básicas sobre los intervalos de confianza, explicados en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el *UHA operator* de la siguiente manera.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.125}$$

donde b_j^* es el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1, y los $\tilde{a}_i$ ($i \in N$) son intervalos de confianza. Cabe destacar que los intervalos de confianza pueden ser intervalos simples, tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. De forma genérica, se puede decir que se utilizará para cada problema aquel tipo de intervalo de confianza que más se adapte a la situación.

Otro aspecto fundamental sobre este operador, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*.

El operador *UHA* verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Además, en el proceso de reordenación se puede distinguir entre el *Descending uncertain hybrid averaging* (*DUHA*) *operator* y el *Ascending uncertain hybrid averaging* (*AUHA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DUHA* (o *UHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AUHA operator*.

También cabe destacar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. Este hecho surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Como se ha comentado previamente, el operador *UHA* abarca tanto al *UWA* como al *UOWA operator*. El *UHA* se convierte en el *UWA* cuando todas las ponderaciones w_j valen 1/*n*, para todo *j*. Por otro lado, el *UHA* se transforma en el *UOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen 1/*n*, para todo *i*.

Aparte de estos dos casos particulares, también se podría destacar la existencia de otro gran número de operadores *UHA*. Por ejemplo, se podría mencionar todos los casos particulares del *UOWA operator* ya que si ω_i = 1/n, el *UHA* se convirte en el *UOWA operator*. Por tanto, simplemente consistiría en estudiar los mismos casos que en el operador *UOWA*, estudiados en el Capítulo 4.2.5.2.

Otra gran variedad de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *UOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido incierto, el mínimo híbrido incierto, la media aritmética híbrida incierta, la media ponderada híbrida incierta, el *step-UHA operator*, el *window-UHA operator*, el *olympic-UHA operator*, la mediana *UHA*, la mediana ponderada *UHA*, el *E-Z UHA weights*, el *S-UHA operator*, la ponderación *UHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UHA weights*, el *Gaussian-UHA weights*, y muchos otros más.

4.3.10. *Fuzzy hybrid averaging*

El *fuzzy hybrid averaging* (*FHA*) o media híbrida borrosa es un método de agregación que permite utilizar en la misma formulación a la media ponderada borrosa (*FWA*) y a la media ponderada ordenada borrosa (*FOWA*). Este método representa una generalización al operador *FOWA* y al operador *FWA*, de forma que ambos casos son situaciones particulares de esta formulación. Además, este operador está destinado a tratar situaciones de la vida cotidiana en donde no es posible cuantificar la información disponible mediante valores numéricos precisos. En este caso, para tratar a estas situaciones se utiliza información numérica borrosa, la cual viene expresada en forma de NB. La ventaja que tienen los NB frente a los intervalos de confianza es la posibilidad de ofrecer una información mucho más completa sobre la inceridumbre inherente al problema.

Esta información numérica borrosa puede venir expresada por diversos tipos de NB. Por ejemplo, se pueden destacar los NBT, los NBTp, etc. Teniendo en cuenta las nociones básicas sobre los NB, explicados en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el *FHA operator* de la siguiente manera.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $F: \Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.126}$$

donde b_j^* es el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1, y los $\tilde{a}_i$ ($i \in N$) son NB. Cabe destacar que los NB pueden ser NBT, NBTp, etc. De forma genérica, se puede decir que se utilizará para cada problema aquel tipo de NB que más se adapte al problema específico.

Otro aspecto fundamental sobre este operador, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de NB para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.6. para el operador *FOWA*.

El operador *FHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo borroso. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending fuzzy hybrid averaging* (*DFHA*) *operator* y el *Ascending fuzzy hybrid averaging* (*AFHA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFHA* (o *FHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFHA operator*.

También cabe destacar la posibilidad de utilizar NB en las ponderaciones. Este hecho surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Además, también se podrían considerar situaciones en donde se mezcla la información imprecisa con la borrosa. Por ejemplo, en situaciones donde los argumentos vienen expresados por intervalos de confianza y las ponderaciones por NB. Debido a que estos conceptos llevan implícitos otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Como se ha comentado al principio, el operador *FHA* abarca tanto al *FWA* como al *FOWA operator*. El *FHA* se convierte en el *FWA* cuando todas las ponderaciones w_j valen 1/*n*, para todo *j*. Por otro lado, el *FHA* se transforma en el *FOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen 1/*n*, para todo *i*.

Otra gran variedad de operadores *FHA* pueden ser estudiados en la agregación. Por ejemplo, se podría mencionar todos los casos particulares del *FOWA operator* ya que si ω_i = 1/n, el *FHA* se convirte en el *FOWA operator*. Por tanto, simplemente consistiría en estudiar los mismos casos que en el operador *FOWA*, estudiados en el Capítulo 4.2.6.2.

Otros casos especiales de operadores *FOWA* son aquellos en donde no se fija el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido borroso, el mínimo híbrido borroso, la media aritmética híbrida borrosa, la media ponderada híbrida borrosa, el *step-FHA operator*, el *window-FHA operator*, el *olympic-FHA operator*, la mediana *FHA*, la mediana ponderada *FHA*, el *E-Z FHA weights*, el *S-FHA operator*, la ponderación *FHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FHA weights*, el *Gaussian-FHA weights*, y muchos otros más.

4.3.11. *Uncertain heavy OWA operator*

El *uncertain heavy OWA* (*UHOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *OWA* a través de utilizar números imprecisos en el problema. En este operador se supone que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otras alternativas como por ejemplo, la utilización de intervalos de confianza. Además, también se supone que las diferentes variables que influyen en el problema, son independientes entre sí. Es decir, pueden producirse a la vez de forma que el resultado final puede incluso llegar a ser la suma de los resultados de todas las variables. Este operador ha sido desarrollado por Merigó y Casanovas (2006b; 2007d).

Cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, también es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *UHOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UHOWA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$UHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.127}$$

donde b_j* es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$. y los $\tilde{a}_i$ son intervalos de confianza.

En este caso, se tiene que señalar la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*.

Como se puede observar, el operador *UHOWA* sólo verifica las propiedades de conmutatividad y monotonía. Cabe señalar que la delimitación se produce entre el mínimo y el operador total. Además, desde una perspectiva genérica del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain heavy OWA* (*DUHOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain heavy OWA* (*AUHOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUHOWA* (o *UHOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUHOWA operator*.

Otro aspecto a remacar es la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Otro aspecto a destacar es la suma de los elementos del vector de ponderaciones W que se denota como $|W|$ (Yager, 2002) y se le denomina la magnitud de W. Aplicando las ideas de Yager al operador *UHOWA*, se puede introducir un parámetro denominado el valor beta del vector W. Se define como: $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Como $|W| \in [1, n]$, entonces, $\beta \in [0, 1]$. Como se puede observar, si $\beta = 1$, se obtiene el operador total incierto y si $\beta = 0$, se consigue el tradicional operador *UOWA*. Cabe señalar que también es posible analizar la negación de β. Entonces, $\rho = 1 - \beta$. En este caso, si $\rho = 0$, se obtiene el operador total incierto y si $\rho = 1$, el tradicional operador *UOWA*.

Una vez estudiada la magnitud de W, es posible estudiar las medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Para el operador *UHOWA*, se pueden definir las mismas medidas que en el operador *HOWA*. Es decir, el carácter actitudinal, la medida de dispersión, la medida de balance y la medida de divergencia. A modo de resumen, para el carácter actitudinal se obtiene:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{4.128}$$

Como se puede observar, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Para la entropía de dispersión, se obtiene:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{4.129}$$

Para el balance de las ponderaciones:

$$Bal(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\frac{(n+1-2j)}{n-1}w_j \tag{4.130}$$

Y finalmente, para la medida de divergencia:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\frac{n-j}{n-1}-\alpha(W)\right)^2 \tag{4.131}$$

Para finalizar el apartado del operador *UHOWA*, se debe comentar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *UHOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el intervalo de confianza máximo, el intervalo de confianza mínimo, la media aritmética incierta (*UA*), la media ponderada incierta (*UWA*), el *UOWA operator*, el operador total incierto, el *push up UHOWA allocation*, el *push down UHOWA allocation*, el *uniform UHOWA allocation*, el *step-UHOWA allocation*, el *olympic-UHOWA allocation*, el *median UHOWA allocation*, y muchos otros más.

4.3.12. *Fuzzy heavy OWA operator*

De forma similar al operador *UHOWA*, se puede elaborar otra extensión de nivel 2 a los operadores *OWA* mediante el uso de NB en el problema. A este operador se le denomina *fuzzy heavy OWA* (*FHOWA*) *operator*. En dicho operador se supone que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otras alternativas como por ejemplo, la utilización de NB. Además, también se supone que las diferentes variables que influyen en el problema, son paracialmente o totalmente independientes entre sí. Es decir, pueden producirse a la vez de forma que el resultado final puede incluso llegar a ser la suma de los resultados de todas las variables.

Cabe destacar que existe una gran variedad de NB borrosos que pueden ser utilizados en el problema como por ejemplo, los NBT, los NBTp, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los NB en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *FHOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $F: \Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FHOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$

2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$FHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.132}$$

donde b_j* es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$. y los $\tilde{a}_i$ son NB.

En este caso, se tiene que señalar la necesidad de definir un criterio de ordenación de NB para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.6. para el operador *FOWA*.

Como se puede observar, el operador *FHOWA* sólo verifica las propiedades de conmutatividad y monotonía. Cumple la delimitación pero esta se produce entre el mínimo y el operador total. También cabe destacar que una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending fuzzy heavy OWA* (*DFHOWA*) *operator* y el *Ascending fuzzy heavy OWA* (*AFHOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFHOWA* (o *FHOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFHOWA operator*.

Al igual que en el operador *UHOWA*, en este caso tambien es posible utilizar NB en las ponderaciones. Esta necesidad surge porque en muchos casos el decisor no tiene definido su carácter actitudinal y prefiere considerar varios grados de optimismo a la hora de tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito muchos problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Otro aspecto a remarcar es la suma de los elementos del vector de ponderaciones W que se denota como $|W|$ (Yager, 2002) y se le denomina la magnitud de W. Aplicando las ideas de Yager al operador *FHOWA*, se puede introducir un parámetro denominado el valor beta del vector W. Se define como: $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Como $|W| \in [1, n]$, entonces, $\beta \in [0, 1]$. Como se puede observar, si $\beta = 1$, se obtiene el operador total borroso y si $\beta = 0$, se consigue el tradicional operador *FOWA*. Cabe señalar que también es posible analizar la negación de β. Entonces, $\rho = 1 - \beta$. En este caso, si $\rho = 0$, se obtiene el operador total borroso y si $\rho = 1$, el tradicional operador *FOWA*.

Una vez estudiada la magnitud de W, es posible estudiar las medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Para el operador *FHOWA*, se pueden definir las mismas medidas que en el operador *HOWA*. Es decir, el carácter actitudinal, la medida de dispersión, la medida de balance y la medida de divergencia. Para no repetir las fórmulas del apartado anterior, en este caso se van a considerar los resultados con órdenes ascendentes. A modo de resumen, para el carácter actitudinal se obtiene:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n-1} \right) w_j \tag{4.133}$$

Como se puede observar, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Para la entropía de dispersión, se obtiene:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{4.134}$$

Para el balance de las ponderaciones:

$$Bal(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} \frac{(2j-n-1)}{n-1} w_j \tag{4.135}$$

Y finalmente, para la medida de divergencia:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{4.136}$$

Para finalizar el apartado del operador *FHOWA*, se debe comentar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *FHOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el NB máximo, el NB mínimo, la media aritmética borrosa (*FA*), la media ponderada borrosa (*FWA*), el *FOWA operator*, el operador total borroso, el *push up FHOWA allocation*, el *push down FHOWA allocation*, el *uniform FHOWA allocation*, el *step-FHOWA allocation*, el *olympic-FHOWA allocation*, el *median FHOWA allocation*, y muchos otros más.

4.3.13. Otras extensiones de nivel 2

Aparte de las extensiones comentadas, cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel 2. Por ejemplo, se podría destacar aquellas extensiones que se podrían realizar a los casos comentados en el Capítulo 4.2.7. como el *induced nonmonotonic OWA* (*INOMMOWA*) *operator*, el *linguistic nonmonotonic OWA* (*LNOMMOWA*) *operator*, el *generalizad induced OWA operator* (Xu y Da, 2003), el *IOWA* con t-normas (*t-IOWA*), el *Majority Additive IOWA*, el *LOWA* con t-normas (*t-LOWA*), el *UOWA* con t-normas (*t-UOWA*), el *Majority Additive LOWA*, y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar extensiones de nivel 1 en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer (Dempster, 1967; Shafer, 1976) como se puede observar para el caso del operador *IOWA* y *LOWA* en (Merigó y Casanovas, 2007c; 2007f; Merigó et al., 2007), en el método de minimización del coste de Savage (Savage, 1951), en el *Analytic Hierarchy Process* o *AHP* (Saaty, 1978; 1980). Además, también se tiene que señalar la posibilidad de utilizar extensiones de nivel 1 en los métodos de decisión basados en distancias o similar (Merigó y Gil-Lafuente, 2006c; 2006d; 2007f).

4.4. Extensiones de nivel 3

En este apartado, se va a describir algunas de las principales extensiones de nivel 3. Cuando se refiere a "nivel 3" se está haciendo referencia a extensiones de los operadores *OWA* con tres características genéricas añadidas. Cabe destacar que estas extensiones también pueden ser vistas como extensiones de nivel 1 a las extensiones de nivel 2 o como extensiones de nivel 2 a las extensiones de nivel 1.

4.4.1. *Induced linguistic hybrid averaging*

El *induced linguistic hybrid averaging* (*ILHA*) es un operador que permite utilizar en la misma agregación al *LWA* y al *ILOWA*. Para ello, utiliza un proceso de reordenación de los argumentos lingüísticos basado en una serie de variables de ordenación inducidas. Además, al ser un operador lingüístico, trata situaciones en las cuales, debido a la incertidumbre, etc., no se pueden utilizar valores numéricos. Entonces, lo que ofrece este operador es la posibilidad de representar estas situaciones mediante información expresada en forma de variables lingüísticas. Teniendo en cuenta una serie de leyes operacionales básicas (Xu, 2004a), el operador *ILHA* se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función $F:\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *ILHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ILHA(\langle u_1, S_{\alpha_1}\rangle,\ldots, \langle u_n, S_{\alpha_n}\rangle) = w_1 \otimes S_{\beta_1} \oplus w_2 \otimes S_{\beta_2} \oplus \ldots \oplus w_n \otimes S_{\beta_n} \tag{4.137}$$

donde S_{β_j} es el valor del argumento lingüístico ponderado $\hat{S}_{\alpha_i}*$ ($\hat{S}_{\alpha_i}* = n\omega_i S_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, S_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, S_{α_i} es la variable del argumento lingüístico y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los S_{α_i}, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

El operador *ILHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo. Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, es posible distinguir entre el *Descending ILHA (DILHA) operator* y el *Ascending ILHA (AILHA) operator*. El *DILHA operator* tiene la misma definición que el *ILHA operator*. El *AILHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DILHA* (o *ILHA*) *operator* y $w*_{n+1-j}$ el j-ésimo coeficiente del *AILHA operator*.

Para el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir la política de Yager y Filev (1999) en donde se sustituyen los argumentos lingüísticos empatados por su media aritmética. En el caso del operador *ILHA*, se sustituirá los argumentos empatados por se media aritmética híbrida lingüística. Además, también se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal. Entre otros métodos, se destaca la posibilidad de utilizar variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc., en las variables inducidas.

Cabe destacar que este operador se ha estudiado con el modelo de Xu (2004a). Pero también podría desarrollarse una versión similar mediante el modelo de Herrera et al. (1995) y mediante el modelo de Herrera y Martínez (2000a). Cabe destacar que utilizando el modelo de Herrera y Martínez (2000a), se obtendría el *2-tuple induced hybrid averaging* (*2-TIHA*).

Como se ha comentado anteriormente, el operador *ILHA* contiene en la misma formulación al *LWA* y al *ILOWA* operator. El *ILHA* se convierte en el *LWA* cuando todas las ponderaciones w_j valen $1/n$, para todo j. Por otro lado, el *ILHA* se transforma en el *ILOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen $1/n$, para todo i. En este caso, también cabe señalar que si el proceso de reordenación de las variables inducidas coincide con el de los argumentos, entonces se obtiene el operador *LOWA*. Otro caso similar a este último se produce cuando el proceso de reordenación de las variables inducidas y de los argumentos del operador *ILHA* coincide, ya que entonces, se consigue el *LHA*.

Además de estos cuatro casos particulares, cabe destacar la existencia de un gran número de casos particulares de operadores *ILHA*. Por ejemplo, se podría mencionar todos los casos particulares del *ILOWA operator* ya que si $\omega_i = 1/n$, el *ILHA* se convirte en el *ILOWA operator*. Por tanto, a partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los mismos casos que en el operador *ILOWA*, comentados brevemente en el Capítulo 4.3.1.2. También se pueden mencionar todos los casos particulares del operador *LOWA* y del operador *LHA* ya que estos dos operadores son casos particulares del operador *ILHA*.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos que utilizan la misma metodología que en los casos particulares del operador *ILOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido lingüístico, el mínimo híbrido lingüístico, la media aritmética híbrida lingüística, la media ponderada híbrida lingüística, el *LHA*, el *step-ILHA operator*, el *window-ILHA operator*, el *olympic-ILHA operator*, la mediana *ILHA*, la mediana ponderada *ILHA*, el *E-Z ILHA weights*, el *S-ILHA operator*, la ponderación *ILHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ILHA weights*, el *Gaussian-ILHA weights*, y muchos otros más.

4.4.2. *Uncertain induced linguistic OWA operator*

El *uncertan induced linguistic OWA* (*UILOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *OWA* propuesto por Xu (2006a). Consiste en utilizar variables de ordenación inducidas en el proceso de agregación lingüística. En este caso, la información lingüística disponible se supone que está sujeta a elevados grados de incertidumbre que llevan a no poder precisar con exactitud las variables lingüísticas. Entonces, se tiene que hacer uso de los intervalos de confianza en las variables lingüísticas para poder representar adecuadamente el problema.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar diversos tipos de intervalos de confianza como por ejemplo los intevalos de confianza simples, las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Cabe destacar que el resultado combinado de estas herramientas puede ser denominado como intervalos de confianza lingüísticos, tripletas de confianza lingüísticas, cuádruplos de confianza lingüísticos, etc.

Para poder definir el operador *UILOWA*, se tiene que tener en cuenta una serie de leyes operacionales sobre variables lingüísticas inciertas (Xu, 2004c). Además, se tendría que volver a considerar los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994). A partir de estas consideraciones previas, se puede definir el operador *UILOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de los intervalos de confianza lingüísticos. Una función $UILOWA: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ es un *UILOWA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UILOWA(\langle u_1, \tilde{S}_{\alpha_1} \rangle, ..., \langle u_n, \tilde{S}_{\alpha_n} \rangle) = w_1 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus w_2 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus ... \oplus w_n \otimes \tilde{S}_{\beta_n} \quad (4.138)$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el valor del argumento lingüístico incierto del par *ULOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{S}_{\alpha_i} \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y los $\tilde{S}_{\alpha_i}$ son variables lingüísticas inciertas expresadas mediante intervalos de confianza.

En este operador no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos para poder llevar a cabo la agregación. No obstante, a la hora de comparar los resultados agregados de las diferentes alternativas, sí que puede resultar útil el definir un criterio de comparación de intervalos. En este caso, se tiene que definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza lingüísticos para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*. Cabe señalar que la ordenación se desarrolla a partir de los valores numéricos de las variables lingüísticas. A modo de ejemplo, para los casos en los cuales no quede claro qué intervalo es mayor, se podrá utilizar el criterio del valor medio. En el caso de que prosiguiese el empate, se tendría que recurrir a criterios subjetivos para decidir sobre el orden de los intervalos de confianza lingüísticos.

El operador *UILOWA* es un operador que cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo lingüístico incierto. Además, en el proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain induced linguistic OWA* (*DUILOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain induced linguistic OWA* (*AUILOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DUILOWA* (o *UILOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AUILOWA operator*.

En este caso, también resulta relevante el estudio de los argumentos con variables inducidas empatadas. De forma resumida, decir que se recomienda sustituir estos argumentos por su media aritmética lingüística incierta (*ULA*). Otro aspecto a remarcar es la posibilidad de utilizar otros métodos como el *ULWA* o el *ULOWA*. Además, se tiene que resaltar el hecho de poder utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas como números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

Cabe destacar que este operador se ha estudiado con el modelo de Xu (2004a). Pero también podría desarrollarse una versión similar mediante el modelo de Herrera et al. (1995) y mediante el modelo de Herrera y Martínez (2000a). Utilizando el modelo de Herrera y Martínez (2000a), se obtiene el *2-tuple uncertain induced OWA (2-TIOWA) operador*. También cabe señalar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. Debido a que estos conceptos llevan implícitos otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Finalmente, destacar la posibilidad de utilizar diferentes familias de operadores *UILOWA* en el proceso de agregación. Por ejemplo, se podría utilizar el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüísico incierto, la media aritmética lingüística incierta (*ULA*), la media ponderada lingüística incierta (*ULWA*), el *ULOWA operator*, el *step-UILOWA operator*, el *window-UILOWA operator*, el *olympic-UILOWA operator*, la mediana *UILOWA*, la mediana ponderada *UILOWA*, el *E-Z UILOWA weights*, el *S-UILOWA operator*, la ponderación *UILOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UILOWA weights*, el *Gaussian-UILOWA weights*, y muchos otros más.

4.4.3. *Uncertain induced heavy OWA operator*

El *uncertain induced heavy OWA* (*UIHOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *OWA* de nivel 3 propuesto por Merigó y Casanovas (2006b; 2007d). De forma resumida se puede decir que consiste en utilizar variables de ordenación inducidas en el operador *UHOWA*. Cabe destacar que los operadores *HOWA* están destinados a tratar problemas de decisión en donde la información es independiente entre sí. Es decir, la información se puede acumular en la agregación. Además, se tiene que tener en cuenta que este operador está destinado a tratar situaciones en las cuales no es posible cuantificar la información mediante números precisos. Por tanto, se necesita representar la información mediante intervalos de confianza.

Cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, también es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *UIHOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F:\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UIHOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$UIHOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.139}$$

donde b_j^* es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UIHOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresado en forma de intervalos de confianza.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. Otra alternativa sería considerar a las variables inducidas como intervalos de confianza. En este caso sí sería necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. Además, también es necesario definir un criterio de ordenación a la hora de comparar los resultados obtenidos entre las diferentes alternativas. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el Capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*.

Como se puede observar, el operador *UIHOWA* sólo verifica las propiedades de conmutatividad y monotonía. Cabe señalar que la delimitación se produce entre el mínimo y el operador total. Además, desde una perspectiva genérica del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain induced heavy OWA* (*DUIHOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain induced heavy OWA* (*AUIHOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUIHOWA* (o *UIHOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUIHOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diveros tipos de intervalos de confianza en las ponderaciones. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este caso, también resulta relevante el estudio de los argumentos con variables inducidas empatadas. De forma resumida, decir que se recomienda sustituir estos argumentos por su media aritmética incierta (*UA*), pero también sería posible utilizar otros métodos como el *UWA* o el *UOWA*. Además, se tiene que resaltar el hecho de poder utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con el único requisito de tener un orden lineal. Por ejemplo, se podría utilizar números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

Para finalizar el apartado del operador *UIHOWA*, se debe comentar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *UIHOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el intervalo de confianza máximo, el intervalo de confianza mínimo, la media aritmética incierta (*UA*), la media ponderada incierta (*UWA*), el *UOWA operator*, el operador total incierto, el *UHOWA operator*, el *UIOWA operator*, el *push up UIHOWA allocation*, el *push down UIHOWA allocation*, el *uniform UIHOWA allocation*, el *step-UIHOWA allocation*, el *olympic-UIHOWA allocation*, el *median UIHOWA allocation*, y muchos otros más.

4.4.4. *Fuzzy induced heavy OWA operator*

El *fuzzy induced heavy OWA* (*FIHOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *OWA* de nivel 3 y consiste en utilizar NB en el operador *IHOWA* propuesto por Merigó y Casanovas (2006b; 2007d). Cabe destacar que los operadores *HOWA* están destinados a tratar problemas de decisión en donde la información es independiente entre sí. Además, se tiene que tener en cuenta que este operador está destinado a tratar situaciones en las cuales no es posible cuantificar la información mediante números precisos. Por tanto, se necesita representar la información mediante otro mecanismo como por ejemplo, mediante NB.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar diversos tipos de NB. Por ejemplo, se podrían destacr los NBT, los NBTp, los NB L-R, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre NB en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *FIHOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $F: \Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FIHOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$FIHOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \qquad (4.140)$$

donde b_j^* es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FIHOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresado en forma de NB.

En este caso, no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. Otra alternativa sería considerar a las variables inducidas como intervalos de confianza o NB. Entonces, sí sería necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. Además, también es necesario definir un criterio de ordenación a la hora de comparar los resultados obtenidos entre las diferentes alternativas. Para estas situaciones, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994) para comparar NB, brevemente explicada en el capítulo 4.2.6. para el operador *FOWA*.

Como se puede observar, el operador *FIHOWA* sólo verifica las propiedades de conmutatividad y monotonía. Cabe señalar que la delimitación se produce entre el mínimo y el operador total. Además, también se puede distinguir entre el *Descending fuzzy induced heavy OWA* (*DFIHOWA*) *operator* y el *Ascending fuzzy induced heavy OWA* (*AFIHOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFIHOWA* (o *FIHOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFIHOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diveros tipos de NB en las ponderaciones. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. También sería posible considerar situaciones en donde se mezclan los intervalos de confianza y los NB. Debido a que estos conceptos llevan implícitos otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Otro aspecto de vital importancia en el estudio de los operadores *FIHOWA* es el problema de empates en las variables inducidas. De forma resumida, decir que se recomienda sustituir estos argumentos por su media aritmética borrosa (*FA*), aunque también sería posible utilizar otros métodos como el *FWA* o el *FOWA*. Además, se tiene que resaltar la posibilidad de utilizar diferentes metodologías en las variables inducidas. Por ejemplo, se podría utilizar números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

Para finalizar el apartado del operador *FIHOWA*, se debe comentar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *FIHOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el NB máximo, el NB mínimo, la media aritmética borrosa (*FA*), la media ponderada borrosa (*FWA*), el *FOWA operator*, el operador total borroso, el *FHOWA operator*, el *FIOWA operator*, el *push up FIHOWA allocation*, el *push down FIHOWA allocation*, el *uniform FIHOWA allocation*, el *step-FIHOWA allocation*, el *olympic-FIHOWA allocation*, el *median FIHOWA allocation*, y muchos otros más.

4.4.5. *Uncertain induced hybrid averaging*

El *uncertain induced hybrid averaging* (*UIHA*) es una extensión de nivel 3 que permite utilizar en la misma formulación a la media ponderada incierta (*UWA*) y a la media ponderada ordenada incierta (*UOWA*). Este operador dispone de un proceso de reordenación complejo diferente del valor de los argumentos. Concretamente, el proceso de reordenación está desarrollado a través de variables inducidas. Además, se tiene que tener en cuenta que este operador está destinado a tratar situaciones de la vida cotidiana en las cuales la información disponible es imprecisa. Por tanto, este operador sirve para agregar información imprecisa que viene representada mediante intervalos de confianza.

Esta información numérica imprecisa puede venir expresada por diversos tipos de intervalos de confianza. Aparte de los intervalos de confianza simples, se pueden destacar las tripletas de confianza, los cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta las nociones básicas sobre los intervalos de confianza, explicados en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el *UIHA operator* de la siguiente manera.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F:\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UIHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UIHA(\langle u_1, \tilde{a}_1 \rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n \rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j * \tag{4.141}$$

donde b_j* es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *UOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento representada mediante intervalos de confianza. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Otro aspecto fundamental sobre este operador, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza para poder llevar a cabo la agregación. Para la ordenación inicial de los argumentos no es necesario ya que las variables inducidas determinan dicha ordenación. Por el otro lado, sí será necesario definir un criterio de comparación de intervalos para los resultados agregados de las diferentes alternativas. También puede ser necesaria su definición cuando las variables inducidas están expresadas por intervalos de confianza. De entre la gran variedad de criterios existentes para comparar intervalos de confianza, se podría recomendar por ejemplo, la comentada en Kaufmann y Gupta (1985), en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*.

También cabe destacar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. Este hecho surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending UIHA (DUIHA) operator* y el *Ascending UIHA (AUIHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DUIHA operator* tiene la misma definición que el *UIHA operator*. El *AUIHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUIHA* (o *UIHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUIHA operator*.

El operador *UIHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sugieren sustituir los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media aritmética híbrida incierta. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal. Entre otros métodos, se puede destacar el uso de variables lingüísticas en las variables inducidas de forma que se pueden mezclar en la agregación valores numéricos con valores lingüísticos.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros, todos los casos particulares del operador *UIOWA* y del operador *UOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones ω_i = 1/n, de forma que el *IHA* se convierta en el *IOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en los Capítulos 4.2.5.2 y 4.3.5.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *UIOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido incierto, el mínimo híbrido incierto, la media aritmética híbrida incierta, la media ponderada híbrida incierta, el operador *UHA*, el *step-UIHA operator*, el *window-UIHA operator*, el *olympic-UIHA operator*, la mediana *UIHA*, la mediana ponderada *UIHA*, el *E-Z UIHA weights*, el *S-UIHA operator*, la ponderación *UIHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UIHA weights*, el *Gaussian-UIHA weights*, y muchos otros más.

4.4.6. *Uncertain linguistic hybrid averaging*

El *uncertain linguistic hybrid averaging* (*ULHA*) es un operador que permite utilizar en la misma agregación al *ULWA* y al *ULOWA*. Además es un operador que trata situaciones en las cuales, debido a la incertidumbre, etc., no se pueden utilizar valores numéricos. Entonces, lo que ofrece este operador es la posibilidad de representar estas situaciones mediante información expresada en forma de variables lingüísticas inciertas. Es decir, debido a que el decisor se encuentra ante una situación de extrema incertidumbre, necesita utilizar variables lingüísticas e intervalos de confianza a la vez.

En este caso, también es posible utilizar diversos tipos de intervalos de confianza como por ejemplo, los intervalos de confianza simples, las tripletas de confianza, los cuádruplos de confianza, etc. Cabe destacar que el resultado combinado de estas herramientas puede ser denominado como intervalos de confianza lingüísticos, tripletas de confianza lingüísticas, cuádruplos de confianza lingüísticos, etc.

Para poder definir el operador *ULOWA*, se tiene que tener en cuenta una serie de leyes operacionales sobre variables lingüísticas inciertas (Xu, 2004c). Además, se tendría que volver a considerar los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994). A partir de estas consideraciones previas, se puede definir el operador *ULOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *ULHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ULHA(\tilde{S}_{\alpha_1}, \tilde{S}_{\alpha_2}, ..., \tilde{S}_{\alpha_n}) = w_1 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus w_2 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus ... \oplus w_n \otimes \tilde{S}_{\beta_n} \qquad (4.142)$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el j-ésimo más grande de los argumentos lingüísticos inciertos ponderados $\hat{S}_{\alpha_i}$ ($\hat{S}_{\alpha_i} = n\omega_i \tilde{S}_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{S}_{\alpha_i}$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Cabe destacar que los $\tilde{S}_{\alpha_i}$ son las variables lingüísticas inciertas expresadas mediante intervalos de confianza.

En este operador, es fundamental definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza lingüísticos para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5., para el operador *UOWA*. En este caso, se tendría que tener en cuenta que la ordenación se desarrolla a partir de los valores numéricos de las variables lingüísticas. A modo de ejemplo, para los casos en los cuales no quede claro qué intervalo es mayor, se podrá utilizar el criterio del valor medio. En el caso de que prosiguiese el empate, se tendría que recurrir a criterios subjetivos para decidir sobre el orden de los intervalos de confianza lingüísticos.

También cabe señalar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

El operador *ULHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo. Otro aspecto a señalar es la posibilidad de distinguir entre el *Descending ULHA (DULHA) operator* y el *Ascending ULHA (AULHA) operator*. El *DULHA operator* tiene la misma definición que el *ULHA operator*. El *AULHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DULHA* (o *ULHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AULHA operator*.

Cabe destacar que este operador se ha estudiado con el modelo de Xu (2004a). Pero también podría desarrollarse una versión similar mediante el modelo de Herrera et al. (1995) y mediante el modelo de Herrera y Martínez (2000). Cabe destacar que utilizando el modelo de Herrera y Martínez (2000), se obtendría el *2-tuple uncertain hybrid averaging* (*2-TUHA*).

Como se ha comentado previamente, el operador *ULHA* abarca tanto al *ULWA* como al *ULOWA* operator. El *ULHA* se convierte en el *ULWA* cuando todas las ponderaciones w_j valen $1/n$, para todo j. Por otro lado, el *ULHA* se transforma en el *ULOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen $1/n$, para todo i.

Aparte de estos dos casos especiales, también se podría destacar la existencia de una gran variedad de casos particulares de operadores *ULHA*. Por ejemplo, se podrían mencionar todos los casos particulares del *ULOWA operator* ya que como se ha dicho en el párrafo anterior, si $\omega_i = 1/n$, el *ULHA* se convirte en el *ULOWA operator*. Por tanto, a partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los mismos casos que en el operador *ULOWA*, estudiados en el Capítulo 4.3.7.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *ULOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido lingüístico incierto, el mínimo híbrido lingüístico incierto, la media aritmética híbrida lingüística incierta, la media ponderada híbrida lingüística incierta, el *step-ULHA operator*, el *window-ULHA operator*, el *olympic-ULHA operator*, la mediana *ULHA*, la mediana ponderada *ULHA*, el *E-Z ULHA weights*, el *S-ULHA operator*, la ponderación *ULHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ULHA weights*, el *Gaussian-ULHA weights*, y muchos otros más.

4.4.7. *Fuzzy induced hybrid averaging*

El *fuzzy induced hybrid averaging* (*FIHA*) es una extensión de nivel 3 que permite utilizar en la misma formulación a la media ponderada borrosa (*FWA*) y a la media ponderada ordenada borrosa (*FOWA*). Este operador dispone de un proceso de reordenación complejo basado en variables inducidas que condicionan el orden de los argumentos borrosos. Además, se tiene que tener en cuenta que este operador está destinado a tratar situaciones de la vida cotidiana en las cuales la información disponible es imprecisa. Por tanto, este operador sirve para agregar información imprecisa que viene representada mediante NB. Los NB tienen como principal ventaja el poder ofrecer una información mucho más completa de la situación imprecisa a la que se enfrenta el decisor.

Esta información numérica imprecisa puede venir expresada por diversos tipos de NB. De entre la gran variedad de NB existentes, se pueden destacar a los NBT, a los NBTp, a los NB L-R, etc. Teniendo en cuenta las nociones básicas sobre los NB, explicados en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el *FIHA operator* de la siguiente manera.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $F: \Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FIHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FIHA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^* \tag{4.143}$$

donde b_j* es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *FOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento representada mediante NB. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Otro aspecto fundamental sobre este operador, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de NB para poder llevar a cabo la agregación. Para la ordenación inicial de los argumentos no es necesario ya que las variables inducidas determinan dicha ordenación. Por el otro lado, sí será necesario definir un criterio de ordenación de NB para los resultados agregados de las diferentes alternativas. Además, también existe la posibilidad de utilizar NB en las variables inducidas, lo cual también genera la necesidad de definir un criterio de ordenación. De entre la gran variedad de criterios existentes para comparar NB, se podría recomendar por ejemplo, el comentado en Kaufmann y Gupta (1985), en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.6. para el operador *FOWA*.

También cabe destacar la posibilidad de utilizar NB en las ponderaciones. Otra posibilidad consistiría en mezclar NB con intervalos de confianza en los argumentos, en las ponderaciones y en las variables inducidas. Debido a que estos conceptos llevan implícitos otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending FIHA (DFIHA) operator* y el *Ascending FIHA (AFIHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DFIHA operator* tiene la misma definición que el *FIHA operator*. El *AFIHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFIHA* (o *FIHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AFIHA operator*.

El operador *FIHA* verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sugieren sustituir los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media aritmética híbrida borrosa. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con el único requisito de tener un orden lineal. Entre otros métodos, se puede destacar el uso de variables lingüísticas, intervalos de confianza, variables lingüísticas inciertas, NB, etc.

De forma resumida, se puede decir que al estudiar diferentes casos especiales del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros, todos los casos particulares del operador *FIOWA* y del operador *FOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones $\omega_i = 1/n$, de forma que el *FIHA* se convierta en el *FIOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en los Capítulos 4.2.6.2 y en 4.3.6.

Otra gran número de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *FIOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido borroso, el mínimo híbrido borroso, la media aritmética híbrida borrosa, la media ponderada híbrida borrosa, el operador *FHA*, el *step-FIHA operator*, el *window-FIHA operator*, el *olympic-FIHA operator*, la mediana *FIHA*, la mediana ponderada *FIHA*, el *E-Z FIHA weights*, el *S-FIHA operator*, la ponderación *FIHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FIHA weights*, el *Gaussian-FIHA weights*, y muchos otros más.

4.4.8. Otras extensiones de nivel 3

Finalmente, también cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel 3. A modo de resumen, se podrían destacar las extensiones de nivel 2 y 1 a los casos comentados en el Capítulo 4.2.7. y 4.3.13., respectivamente. Por ejemplo, se podría destacar el *induced linguistic nonmonotonic OWA* (*ILNOMMOWA*) *operator*, el *ILOWA* con t-normas (*t-ILOWA*), el *Majority Additive ILOWA*, el *ULOWA* con t-normas (*t-ULOWA*), y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar extensiones de nivel 2 en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, en el método de minimización del coste de Savage, en el *Analytic Hierarchy Process* o *AHP* y en los métodos de decisión basados en distancias o en índices de selección. Es decir, se podría utilizar en estos métodos el operador *ILOWA*, *ULOWA*, *UIOWA*, *IHA*, *UHA*, *LHA*, *FHA*, etc.

4.5. Extensiones de nivel N

4.5.1. Introducción

Cabe destacar que aparte de las diferentes extensiones explicadas en los apartados anteriores, es posible elaborar una amplia gama de extensiones más complejas. La principal idea que subyace en estos casos es la de ir añadiendo características conceptuales a los operadores *OWA* como se ha hecho al añadir variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc. Entonces, a medida que se añaden características conceptuales a los operadores *OWA*, en muchos casos, estas características se podrán mezclar entre sí. De esta forma, estos modelos cada vez recogerán una mayor gama de operadores *OWA* ya que implícitos en estas formulaciones, normalmente están como casos particulares las extensiones de niveles inferiores.

A continuación, se va a elaborar una extensión de nivel 4 para poder obervar como sucesivamente se van añadiendo características al operador *OWA*. Cabe destacar que en los próximos capítulos se estudiarán un gran número de extensiones de nivel 4 y superior. Pero como estos capítulos están enfocados en versiones generalizadas, la estructura de dichos capítulos consistirá en ir añadiendo extensiones a los operadores generalizados. De forma que las extensiones de nivel 1 a las versiones generalizadas serán realmente extensiones de nvel 2 a los operadores *OWA* ya que una versión generalizada dentro de esta filosofía, viene a ser una extensión de nivel 1 a los operadores *OWA*.

4.5.2. *Uncertain induced linguistic hybrid averaging*

El *uncertain induced linguistic hybrid averaging* (*UILHA*) es un operador que permite utilizar en la misma agregación las características del operador *UOWA*, del *IOWA*, del *LOWA* y del *HA*. Utiliza las características del operador *UOWA* y *LOWA* porque trata situaciones en donde la información disponible viene representada mediante variables lingüísticas incierta. Es decir, valores lingüísticos expresados mediante intervalos de confianza. Las características del operador *IOWA* son utilizadas porque el proceso de reordenación del operador *UILHA* no se desarrolla según los valores de los argumentos, sino que se elabora mediante variables de ordenación inducidas. Finalmente, decir que también utiliza las características del operador *HA* porque esta formulación abarca tanto al operador *OWA* como al operador *WA*.

En el *UILHA*, también es posible utilizar diversos tipos de intervalos de confianza como por ejemplo, los intervalos de confianza simples, las tripletas de confianza, los cuádruplos de confianza, etc. Cabe destacar que el resultado combinado de estas herramientas con variables lingüísticas puede ser denominado como intervalos de confianza lingüísticos, tripletas de confianza lingüísticas, cuádruplos de confianza lingüísticos, etc.

Para poder definir el operador *UILHA*, se tiene que tener en cuenta una serie de leyes operacionales sobre variables lingüísticas inciertas (Xu, 2004c). Además, se tendría que volver a considerar los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gupta, 1985; Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994). A partir de estas consideraciones previas, se puede definir el operador *UILHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F:\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UILHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UILHA(\langle u_1, \tilde{S}_{\alpha_1} \rangle, ..., \langle u_n, \tilde{S}_{\alpha_n} \rangle) = w_1 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus w_2 \otimes \tilde{S}_{\beta_j} \oplus ... \oplus w_n \otimes \tilde{S}_{\beta_n} \quad (4.144)$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el valor del argumento lingüístico incierto ponderado $\hat{S}_{\alpha_i}$ ($\hat{S}_{\alpha_i} = n\omega_i \tilde{S}_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\dots,n$), del par *ULOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, S_{\alpha_i} \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{S}_{\alpha_i}$ es la variable del argumento lingüístico incierto, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{S}_{\alpha_i}$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

En este operador, no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza lingüísticos para ordenar a los argumentos lingüísticos inciertos, ya que estos se reordenan mediante las variables inducidas. En cambio, sí resulta fundamental definir un criterio de ordenación de intervalos para comparar los resultados agregados de las distintas alternativas. Cabe destacar que si las variables inducidas vienen expresadas mediante intervalos de confianza, entonces, también se tendrá que definir un criterio de ordenación de intervalos en el proceso de ordenación de variables inducidas. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5., para el operador *UOWA*. En el caso de operadores *UILHA*, se tiene que tener en cuenta que la ordenación se desarrolla a partir de los valores numéricos de las variables lingüísticas. A modo de ejemplo, para los casos en los cuales no quede claro qué intervalo lingüístico es mayor, se podrá utilizar el criterio del valor medio. En el caso de que prosiguiese el empate, se tendría que recurrir a criterios subjetivos para decidir sobre el orden de los intervalos de confianza lingüísticos.

También cabe señalar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Otro aspecto a destacar, es la posibilidad de distinguir, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, entre el *Descending UILHA (DUILHA) operator* y el *Ascending UILHA (AUILHA) operator*. El *DUILHA operator* tiene la misma definición que el *UILHA operator*. El *AUILHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DUILHA* (o *UILHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AUILHA operator*. El operador *UILHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo.

Para el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir las ideas de Yager y Filev (1999) en donde se sustituyen los argumentos empatados por su media aritmética. En el caso del operador *UILHA*, se tiene que sustituir los argumentos lingüísticos inciertos empatados por se media aritmética híbrida lingüística incierta. Además, también se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas. Por ejemplo, se podría utilizar variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc., en las variables inducidas.

Cabe destacar que el operador *UILHA* se ha estudiado con el modelo de Xu (2004a). Pero también podría desarrollarse una versión similar mediante el modelo de Herrera et al. (1995) y mediante el modelo de Herrera y Martínez (2000a). Cabe destacar que utilizando el modelo de Herrera y Martínez (2000a), se obtendría el *2-tuple uncertain induced hybrid averaging* (*2-TUIHA*).

Como se ha comentado previamente, el operador *UILHA* abarca tanto al *ULWA* como al *UILOWA operator*. El *UILHA* se convierte en el *ULWA* cuando todas las ponderaciones w_j valen 1/*n*, para todo *j*. Por otro lado, el *UILHA* se transforma en el *UILOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen 1/*n*, para todo *i*. Además, también resulta interesante considerar que si la ordenación de las variables inducidas coincide con la ordenación de los argumentos lingüísticos inciertos, el operador *UILHA* se convierte en el operador *ULOWA*. Obsérvese que este último caso también puede ser visto como un caso particular del *ULHA*, el cual aparece cuando la ordenación de las variables inducidas y de los argumentos coincide.

Aparte de estos cuatro casos especiales, también se podría destacar la existencia de una gran variedad de casos particulares de operadores *UILHA*. Por ejemplo, se podrían mencionar todos los casos particulares del *ULHA*, del *UILOWA* y del *ULOWA operator* ya que como se ha dicho en el párrafo anterior, estos tres operadores son casos particulares del operador *UILHA*. Por tanto, a partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los mismos casos que en los operadores *ULHA*, *ULOWA* y *UILOWA* estudiados en los Capítulos 4.4.6., 4.3.7 y 4.4.2., respectivamente.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *UILOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido lingüístico incierto, el mínimo híbrido lingüístico incierto, la media aritmética híbrida lingüística incierta, la media ponderada híbrida lingüística incierta, el *step-UILHA operator*, el *window-UILHA operator*, el *olympic-UILHA operator*, la mediana *UILHA*, la mediana ponderada *UILHA*, el *E-Z UILHA weights*, el *S-UILHA operator*, la ponderación *UILHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UILHA weights*, el *Gaussian-UILHA weights*, y muchos otros más.

5. Generalizaciones procedentes de la noción de media

5.1. Introducción al Generalized OWA operator

5.1.1. Introducción

El *generalized OWA* (*GOWA*) *operator* es un modelo de decisión generalizado matemáticamente para una gran variedad de situaciones. Básicamente consiste en utilizar las medias generalizadas (Dujmovic, 1974; Dyckhoff y Pedrycz, 1984) en los operadores *OWA* (Yager, 1988). De esta forma, se consigue un modelo generalizado que aparte de abarcar a todos los casos particulares de las medias generalizadas y de los operadores *OWA*, también abarca a otros operadores de gran interés. Entre otros, se puede destacar como casos particulares al *ordered weighted geometric* (*OWG*) *operator* propuesto por Chiclana et al. (2000), el *ordered weighted harmonic averaging* (*OWHA*) *operator* (Yager, 2004b) y el *ordered weighted quadratic averaging* (*OWQA*) *operator* (Yager, 2004b). Obviamente todos los casos particulares de estos tres operadores también están incluidos en esta formulación. Esta generalización ha sido propuesta por Yager (2004b), pero cabe destacar la existencia de trabajos previos qua ya han considerado esta situación (Karayiannis, 2000; Karayiannis y Randolph-Gips, 2005). Además, los modelos basados en medias cuasi-aritméticas (Fodor et al., 1995; Calvo et al., 2002), también incluyen esta generalización como un caso particular. El operador *GOWA* se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función $GOWA{:}R^n \rightarrow R$ es un *GOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$GOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.1}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos con las ponderaciones. El operador *GOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = W^T B^{1/\lambda} \tag{5.2}$$

En esta expresión, W es el vector *GOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado (Yager y Filev, 1999); donde el j-ésimo componente en B es b_j^{λ} siendo este el j-ésimo más grande de los a_i.

Un *GOWA operator* es un operador de medias. Esto se debe a que el operador tiene las siguientes propiedades:

(1) Conmutatividad: cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $GOWA(a_1, a_2\ldots, a_n) = GOWA(u_1, u_2\ldots, u_n)$, donde $(u_1, u_2\ldots, u_n)$ es cualquier permutación de los argumentos $(a_1, a_2\ldots, a_n)$.
(2) Monotonía: Si $a_i \geq d_i$ para todo i, entonces, $GOWA(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$.
(3) Limitado: $\text{Min}\{a_i\} \leq GOWA(a_1,\ldots, a_n) \leq \text{Max}\{a_i\}$.

Es esta 3ª propiedad la que efectivamente lo convierte en un operador de medias. Una importante implicación de esta 3ª propiedad es la idempotencia del operador: si $a_i = a$, para todo i, entonces $GOWA(a_1,\ldots, a_n) = a$.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *OWA* (Yager, 1988; 1996; 2002), Yager estudió el carácter actitudinal generalizado del decisor $\alpha(W)$ de la siguiente forma (Yager, 2004b):

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.3}$$

Como se puede observar, $\alpha \in [0, 1]$. Cuanto más peso esté localizado cerca del tope de W, más cerca estará α de 1 y viceversa. Cabe destacar que para el criterio optimista u operador máximo $\alpha = 1$ y para el pesimista $\alpha = 0$.

Otra medida para caracterizar el vector de ponderaciones del operador *GOWA* es la medida de dispersión de W. En este caso, su formulación es la misma que la desarrollada para el operador *OWA* original (Yager, 1988). Es decir:

$$H(W) = - \sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{5.4}$$

Como se puede observar, si $w_j = 1$ para algún j (conocido como *step-GOWA*), entonces $H(W) = 0$, lo cual implica que la información usada es mínima. Por el otro lado, si $w_j = 1/n$ para todo j, entonces la entropía de dispersión es máxima.

Otra medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de favoritismo hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* ($Bal(W)$) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{5.5}$$

Como se puede observar, $Bal(W) \in [-1, 1]$. En este caso, también se observa que la formulación es la misma que en el caso de los operadores *OWA* (Yager, 1996a). Para el criterio optimista o también conocido como operador máximo obtenemos $Bal(W) = 1$.

Para el criterio pesimista o operador mínimo se obtiene $Bal(W) = -1$. Para el criterio de Laplace o media aritmética se obtiene $Bal(W) = 0$.

Una cuarta medida para estudiar el vector W de los operadores *GOWA* es aquella que mide el grado de divergencia de W. Se dice que esta medida resulta útil para aquellos casos en donde la medida de dispersión y el carácter actitudinal resultan incompletos. Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.6}$$

Como se puede observar, para el caso optimista y pesimista, $Div(W) = 0$. De forma general, podemos decir que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending GOWA (DGOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending GOWA (AGOWA) operator*. El operador *AGOWA* ha sido considerado en (Merigó y Gil-Lafuente, 2007b). El operador *DGOWA* tiene la misma definición que el operador *GOWA*. Para el operador *AGOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función $AGOWA{:}R^n \rightarrow R$ es un *AGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$AGOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.7}$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *AGOWA*, vemos como los argumentos b_j están ordenados de forma ascendente: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, mientras que en el operador *GOWA* (o *DGOWA*), el orden es descendente: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$.

Cabe destacar que los vectores del *DGOWA* y *AGOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DGOWA* (o *GOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AGOWA operator*. Cabe destacar que ambos operadores pueden ser utilizados para situaciones en donde el máximo argumento es el mejor resultado o para situaciones en donde el mínimo argumento es el mejor resultado. Pero para una mejor coordinación entre ambos, lo correcto sería utilizar uno de ellos para una situación y el otro para la otra situación.

El operador *AGOWA* cumple las mismas propiedades que el operador *GOWA*. Es decir, también cumple la monotonía, la conmutatividad, la idempotencia y la delimitación entre el máximo y el mínimo.

Si estudiamos el carácter actitudinal del decisor mediante el operador *AGOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.8}$$

Y para la medida de divergencia del operador *AGOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.9}$$

En cuanto a la medida de dispersión y a la de balance, se obtienen los mismos resultados que en el operador *GOWA*.

Otro aspecto fundamental es el analizar la aplicabilidad del operador GOWA y de todas sus respectivas extensiones. En general, se puede decir que tiene una aplicabilidad similar a los operadores OWA pero con un carácter generalizador ya que aparte de incluir al operador OWA, se incluyen a otra gran variedad de casos. De forma más general, tanto el operador OWA como el operador GOWA con sus respectivas extensiones, pueden ser utilizados en la mayoría de problemas en los que se han considerado la utilización de la media aritmética simple y de la media ponderada. Por ejemplo, podemos destacar las siguientes aplicaciones:

- En la estadística en general (cálculo de medias, varianza, regresión, etc.) en donde interviene la noción de media.
- En otros problemas de otras disciplinas (como las matemáticas, la física, la economía, etc.) en donde interviene la noción de media.
- En la teoría de la borrosidad en general.
- En la teoría de la decisión en general (individual, de grupo, etc.).
- Problemas de selección en general.
- Problemas de asignación en general.
- Problemas de agrupación en general.
- Problemas en la gestión de empresas como por ejemplo:
    - Selección de recursos humanos, de productos financieros, de inversiones, de estrategias, de inmovilizado, de productos en general, de precios, etc.
    - Asignación de recursos humanos, de productos financieros, de inversiones, de estrategias, de inmovilizado, de productos en general, etc.
    - Agrupación de recursos humanos, de productos financieros, de inversiones, de estrategias, de sectores, de productos en general, etc.
- Etc.

5.1.2. Tipos de *GOWA operators*

A continuación, se van a desarrollar diferentes casos particulares de operadores *GOWA*. En primer lugar, se van a analizar diferentes alternativas a la hora de fijar el vector de ponderaciones *W*. Como resulta evidente, a través de escoger una manifestación diferente del vector de pesos, somos capaces de obtener diferentes tipos de agregaciones. De entre ellas, se encuentran las agregaciones propuestas previamente en los criterios de decisión clásicos más las versiones generalizadas que siguen la misma metodología. Posteriormente, se van a estudiar diferentes casos procedentes del parámetro λ en donde principalmente destacan el operador *OWA* tradicional, el operador *OWG*, el operador *OWHA* y el operador *OWQA*. En la Tabla 5.1 se muestra un resumen de los diferentes casos particulares. Obsérvese que estos casos se muestran a partir del operador GOWA pero también se podría mostrar a partir de las diferentes extensiones que se mostrarán en los siguientes subapartados y a partir de la versión cuasi-aritmética.

Vector de ponderaciones *W*	Parámetro λ
• Máximo y mínimo	• *OWA operator*
• Media generalizada y generalizada ponderada	• *OWG operator*
• *Step-GOWA*	• *OWQA operator*
• *Window-GOWA*	• *OWHA operator*
• *E-Z GOWA*	• Etc.
• *Olympic-GOWA*	
• *Median-GOWA*	
• *Centered-GOWA*	
• *S-GOWA* (*orlike, andlike and generalized*)	
• *BADD-GOWA* (*Dependent-GOWA*)	
• *Nonmonotonic-GOWA*	
• *Maximal Entropy GOWA*	
• Etc.	

Para más información sobre el funcionamiento de estas familias se puede consultar la metodología original desarrollada por los operadores OWA simples como por ejemplo en (Amin, 2007; Ahn, 2008; Beliakov, 2005; Liu, 2007; Liu and Han, 2008; Llamazares, 2008; Merigó and Gil-Lafuente, *in press*; Wang et. al, 2007; Wang and Parkan, 2007; Wu et. al, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994; 1996; 2007a; 2007b; Yager and Filev, 1994).

5.1.2.1. Casos procedentes del vector de ponderaciones

Un gran número de casos particulares de operadores *GOWA* pueden ser obtenidos a través de escoger una diferente expresión en el vector de ponderaciones. Entre ellos, se destaca el máximo, el mínimo, la media generalizada, la media ponderada generalizada y el criterio de Hurwicz generalizado.

En el operador *GOWA*, el máximo se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media generalizada o *generalized mean* (*GM*), se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo a_i. La media ponderada generalizada o *weighted generalizad mean* (*WGM*), se consigue cuando la ordenación de los a_i coincide con la ordenación de los b_j. Finalmente, el criterio de Hurwicz generalizado se obtiene cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$. Por otro lado, en el operador *AGOWA*, el máximo se consigue si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. El mínimo se obtiene si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. La media generalizada, se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo a_i. La media ponderada generalizada, se consigue cuando la ordenación de los a_i coincide con la ordenación de los b_j. Finalmente, el criterio de Hurwicz generalizado se obtiene cuando $w_n = \alpha$, $w_1 = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$. Como se puede observar, la metodología es muy similar en ambos casos y se comprueba que $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DGOWA* (o *GOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AGOWA operator*. Como la relación entre el operador *GOWA* y *AGOWA* es directa, para el resto de casos particulares únicamente se considerará el caso con operadores *GOWA*. Obviamente, la obtención del operador *AGOWA* es automática mediante la relación anterior.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *GOWA* son la mediana *GOWA*, la mediana ponderada *GOWA*, el *step-GOWA operator*, el *window-GOWA operator*, el *olympic-GOWA operator*, el *E-Z GOWA weights*, el *S-GOWA operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos agregados, el *centered-GOWA operator* y el *Gaussian-GOWA weights*, entre otros.

La mediana *GOWA* se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar, se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos a_i. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande a_i.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada *GOWA*. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los a_i tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene, $GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b_k$, donde b_k es el k-ésimo más grande de los argumentos a_i. Este tipo de operador se conoce como el *step-GOWA operator*. Cabe destacar que el *step-GOWA operator* se convierte en el máximo si $k = 1$, en el mínimo si $k = n$, y en la mediana *GOWA* si $k = (n+1)/2$ y el número de argumentos es impar.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-GOWA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-GOWA operator* se convierte en el máximo si $m = k = 1$, en el mínimo si $m = 1$, $k = n$, en la media aritmética si $m = n$ y $k = 1$. También se puede obtener la mediana *GOWA* de la siguiente forma. Cuando el número de argumentos es impar, $k = (n+1)/2$ y $m = 1$ y cuando es par, $k = n/2$ y $m = 2$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic-GOWA average*. El *olympic-GOWA average* se transforma en la mediana *GOWA* si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-GOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$. Cabe destacar que siguiendo con las ideas de Liu (*aceptado*) se puede desarrollar una forma general considerando que $w_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y para todos los demás $w_{j^*} = 1/(n - 2k)$, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, esta expresión general se convierte en el tradicional *olympic-GOWA*. Si $k = (n - 1)/2$, entonces, esta expresión general se convierte en el *median-GOWA*. De forma similar, también se puede considerar el caso contrario del *general olympic-GOWA*. En este caso, $w_j = (1/2k)$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y $w_j = 0$, para todos los demás, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, se obtiene el caso contrario al *median-GOWA*.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z GOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el máximo y si $k = n$, la media generalizada. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el mínimo y si $k = n$, la media generalizada.

También resulta interesante considerar aquellas situaciones en donde pueden existir ponderaciones negativas. Estos casos se encuentran englobados dentro del *nonmonotonic-GOWA operator*. Por definición, se produce cuando al menos 1 de las ponderaciones w_j es menor a 0 y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Obsérvese que un factor clave en este operador es que no cumple siempre la propiedad de monotonía.

Otra familia interesante de operadores *GOWA* es el *S-GOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-GOWA operator*. El *orlike S-GOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo. El *andlike S-GOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-GOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media generalizada y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo. Finalmente, el *generalized S-GOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-GOWA operator* se convierte en el *andlike S-GOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-GOWA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-GOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz generalizado.

Otro tipo de operador *GOWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-GOWA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{5.10}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos a_i. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada y si $\alpha = \infty$, se obtiene el máximo. Otra familia de *GOWA operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)^\alpha} \tag{5.11}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos a_i. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo. Un tercer tipo de operadores *GOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^\alpha} \tag{5.12}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos a_i. En este caso también se obtiene la media generalizada si $\alpha = 0$, y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo.

Siguiendo con la metodología de Filev y Yager (1998), se puede desarrollar odos métodos más para determinar las ponderaciones *GOWA*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *GOWA* es aquel conocido como el *centered-GOWA weights*. Este tipo de operador y dice que un operador *GOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se denominan *softly decaying centered-GOWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media generalizada ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered-GOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-GOWA* se le conoce como *non-inclusive centered-GOWA operator*. En este tipo de *centered-GOWA* se encuentra como caso particular la mediana generalizada.

Un caso especial de *centered-GOWA* es el *Gaussian-GOWA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{5.13}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{5.14}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{5.15}$$

Se pueden definir los *GOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{5.16}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones *GOWA* es a través de utilizar el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *GOWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{5.17}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar medidas que caracterizan las ponderaciones como el carácter actitudinal y la medida de dispersión. A continuación, se va a comentar alguno de estos métodos. Un primer método es aquel que obtiene las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método se denomina *maximal entropy GOWA* (*MEGOWA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \\ &\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \\ &\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{5.18}$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe la posibilidad de utilizar un método analítico para obtener las ponderaciones *MEGOWA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Otro método similar, siguiendo con las ideas de Yager (1995a) para los operadores *OWA* consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *minimal variability GOWA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe destacar la posibilidad, siguiendo con las ideas de Fullér y Majlender (2003), de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker para obtener las ponderaciones.

Otra posibilidad consiste en aplicar el modelo de Majlender (2005) al cálculo de las ponderaciones *GOWA*. Este método se le puede denominar como *maximal Rényi entropy GOWA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_{\beta}(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta}\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.20}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe destacar que el *MEGOWA weights* es un caso particular de este último método cuando β =1.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones es utilizar la propuesta de Wang y Parkan (2005) para el caso de los operadores *GOWA*. Este método obtiene las ponderaciones a través de minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se le denomina *minimax disparity GOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.21}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal. Otro aspecto a resaltar es la posibilidad de utilizar un método dual aplicando las ideas de (Amin y Emrouznejad, 2006). También cabe mencionar la posibilidad de aplicar la propuesta de Liu (*in press*) para el *minimax disparity GOWA weights* y el *minimal variability GOWA weights*.

5.1.2.2. Casos procedentes del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, es posible obtener una amplia gama de casos particulares del operador *GOWA*. Entre estos, se puede destacar el operador *OWA*, el operador *OWG*, el operador *OWHA* y el operador *OWQA*.

El operador *OWA* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^1 \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5.22}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es la formulación del operador *OWA*. Cabe destacar que este resultado se puede conseguir mediante el operador *OWA* y el operador *AOWA* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWA* (o *OWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWA operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 4.1.2 para los operadores *OWA*. Es decir, se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media aritmética, la media ponderada, el *step-OWA*, el *window-OWA*, etc.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *OWG* introducido por Chiclana et al. (2000) y posteriormente estudiado por Chiclana et al. (2001a; 2001b), Herrera et al. (2003), Xu y Da (2002b), y Merigó y Casanovas (2006a; 2006c; 2007a; 2007b).

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^0 \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{5.23}$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending OWG* (*DOWG*) *operator*) y ascendentes (*ascending OWG* (*AOWG*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWG* (o *OWG*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWG operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes casos especiales a través de escoger diferentes valores en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.1.2., se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media geométrica (*GA*), la media geométrica ponderada (*WGA*), el *step-OWG operator*, el *window-OWG operator*, el *olympic-OWG operator*, la mediana *OWG*, la mediana ponderada *OWG*, el *E-Z OWG weights*, el *S-OWG operator*, los operadores *OWG* que dependen de los argumentos, el *centered-OWG operator*, el *Gaussian-OWG weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *OWHA* introducido por Yager (2004b).

$$GOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{-1} \right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{5.24}$$

En el operador *OWHA* también es posible distinguir entre el *descending OWHA* (*DOWHA*) *operator* y el *ascending OWHA* (*AOWHA*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWHA* (o *OWHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWHA operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes tipos de operadores *OWHA* a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.1.2., se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media harmónica (*HM*), la media harmónica ponderada (*WHM*), el *step-OWHA operator*, el *window-OWHA operator*, el *olympic-OWHA operator*, la mediana *OWHA*, la mediana ponderada *OWHA*, el *E-Z OWHA weights*, el *S-OWHA operator*, los operadores *OWHA* que dependen de los argumentos, el *centered-OWHA operator*, el *Gaussian-OWHA weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *OWQA* introducido por Yager (2004b).

$$GOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2} \tag{5.25}$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending OWQA* (*DOWQA*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending OWQA* (*AOWQA*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWQA* (o *OWQA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWQA operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *OWQA* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media cuadrática (*QM*), la media cuadrática ponderada (*WQM*), el *step-OWQA operator*, el *window-OWQA operator*, el *olympic-OWQA operator,* la mediana *OWQA*, la mediana ponderada *OWQA*, el *E-Z OWQA weights*, el *S-OWQA operator,* los operadores *OWQA* que dependen de los argumentos, el *centered-OWQA operator,* el *Gaussian-OWQA weights,* y muchos otros más.

5.1.3. Generalización mediante el uso de medias cuasi-aritméticas

Otro aspecto de gran importancia al estudiar modelos generalizados sobre los operadores *OWA* a partir de la noción de media es la utilización de medias cuasi-aritméticas. Las medias cuasi-aritméticas representan una mayor generalización a las medias generalizadas en donde se sustituye el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Por tanto, las medias cuasi-aritméticas incluyen a la media generalizada como un caso particular y abarcan muchos otros casos. Cabe destacar que los primeros modelos conocidos sobre las medias cuasi-aritméticas fueron introducidos en (Kolmogoroff, 1930; Nagumo, 1930; Hardy et al., 1934).

Para el caso de los operadores *OWA*, es posible aplicar el mismo concepto de forma que el operador *GOWA* se convierte en el *Quasi-OWA operator*. Este operador ha sido propuesto por Fodor et al. (1995) como una variante a las medias cuasi-aritméticas y posteriormente estudiado en Calvo et al. (2002). Como modelo generalizado a los operadores *GOWA* ha sido propuesto en Beliakov (2005). Cabe destacar que la traducción al español sería "medias cuasi-aritméticas ponderadas ordenadas". Para evitar confusiones lingüísticas, siempre se utilizará la abreviatura inglesa. Este operador se define de la siguiente forma.

Definición: Una función *Quasi-OWA*:$R^n \to R$ es un *Quasi-OWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-OWA(a_1, a_2, ..., a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \, g(b_{(j)}) \right) \tag{5.26}$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más grande de los a_i. Como se puede observar, se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

El operador *Quasi-OWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$Quasi\text{-}OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(W^T B\right) \tag{5.27}$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-OWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en B es $g(b_{(j)})$ siendo este el j-ésimo más grande de los a_i.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *GOWA*, el carácter actitudinal quasi-aritmético $\alpha(W)$ se puede formular de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{5.28}$$

Para la medida de dispersión y de balance se obtienen los mismos resultados que en el operador *GOWA*. En cambio, para la medida de divergencia se obtiene lo siguiente.

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2\right)\right) \tag{5.29}$$

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-OWA (Quasi-DOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-OWA (Quasi-AOWA) operator*. El operador *Quasi-DOWA* tiene la misma definición que el operador *Quasi-OWA*. Para el operador *Quasi-AOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función *Quasi-AOWA*:$R^n \rightarrow R$ es un *Quasi-AOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-AOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(b_{(j)})\right) \tag{5.30}$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más pequeño de los a_i. Como se puede observar, en este caso también se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DOWA* y *Quasi-AOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DOWA* (o *Quasi-OWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AOWA operator*.

Si estudiamos el carácter actitudinal del decisor mediante el operador *Quasi-AOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{j-1}{n-1}\right)\right) \tag{5.31}$$

Y para la medida de divergencia del operador *Quasi-AOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2\right)\right) \tag{5.32}$$

En cuanto a la medida de dispersión y a la de balance, se obtienen los mismos resultados que en el operador *Quasi-AOWA*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-OWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *GOWA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener el máximo, el mínimo, la media cuasi-aritmética, la media ponderada cuasi-aritmética, el operador *OWA*, el operador *OWG*, el operador *OWQA*, el operador *OWHA*, el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético, la mediana cuasi-aritmética, la mediana ponderada cuasi-aritmética, el *step-Quasi-OWA operator*, el *window-Quasi-OWA operator*, el *olympic-Quasi-OWA operator*, el *E-Z Quasi-OWA weights*, el *S-Quasi-OWA operator*, los operadores *Quasi-OWA* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-OWA operator*, el *Gaussian-Quasi-OWA weights*, el *ME-Quasi-OWA operator*, y mucho otros más.

5.1.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de recursos humanos

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *GOWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones. De entre los muchos problemas decisionales que se podrían plantear, se puede destacar los problemas de selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, etc. En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de recursos humanos.

Ejemplo: Supongamos que una empresa desea cubrir una vacante en el departamento financiero y se le presentan cinco posibles candidatos.

(1) A_1: Candidato 1.
(2) A_2: Candidato 2.
(3) A_3: Candidato 3.
(4) A_4: Candidato 4.
(5) A_5: Candidato 5.

Para evaluar a estos candidatos, se pide a un grupo de expertos que los evalúe según las siguientes características: C_1= Capacidad de liderazgo, C_2 = Situación personal, C_3 = Capacidad de trabajar en equipo, C_4 = Motivación, C_5 = Conocimiento del mercado, C_6 = Currículum Vitae. Los resultados genéricos para cada candidato son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	50	70	60	40	80	60
A_2	60	90	40	50	70	50
A_3	20	30	70	50	90	100
A_4	30	30	30	90	90	90
A_5	60	60	60	60	60	60

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores básicos para poder tomar una decisión sobre cuál es el candidato más adecuado para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (*AM*), media geométrica *(GA*), media harmónica (*HM*) y media cuadrática (*QM*). Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados.

	Max	*Min*	*AM*	*GA*	*HM*	*QM*
A_1	80	40	60	58.55	57.07	61.37
A_2	90	40	60	57.93	56.04	62.18
A_3	100	20	60	51.61	43.24	66.83
A_4	90	30	60	51.96	45	67.08
A_5	60	60	60	60	60	60

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el mínimo, la media geométrica o la media harmónica, nuestra decisión será escoger al candidato A_5. Si se utiliza el máximo, el candidato óptimo será el A_3. Mediante la media cuadrática, la decisión consistirá en escoger al candidato A_4. Finalmente, mediante la media aritmética, todos los candidatos son igualmente válidos.

A continuación, vamos a estudiar otros tipos de agregaciones *GOWA* con carácter más genérico. Se va a considerar a la media ponderada, al operador *OWA*, al operador *OWG*, al operador *OWHA* y al operador *OWQA*. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *GOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *GOWA*

	WA	*OWA*	*OWG*	*OWHA*	*OWQA*
A_1	60	55	53.54	52.14	56.48
A_2	58	54	52.23	50.74	56.03
A_3	70	48	40.31	34.23	55.67
A_4	72	48	41.71	37.5	55.31
A_5	60	60	60	60	60

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. En este caso se obtiene como decisión óptima la alternativa A_5 para todos los casos menos en la media ponderada donde el candidato óptimo es A_4.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de los candidatos. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de un candidato o se desea considerar posibles sustitutos. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de los candidatos

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_3 \succ A_2 = A_4 \succ A_1 \succ A_5$	*WA*	$A_4 \succ A_3 \succ A_1 = A_5 \succ A_2$
Mínimo	$A_5 \succ A_1 = A_2 \succ A_4 \succ A_3$	*OWA*	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 = A_4$
AM	$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5$	*OWG*	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
GA	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$	*OWHA*	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$
HM	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$	*OWQA*	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
QM	$A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$		

Como se puede observar según el tipo de agregación *GOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión de la empresa también.

5.2. Extensiones a los GOWA operators

A continuación, se va a proponer una serie de extensiones a los operadores *GOWA*. Básicamente, estas extensiones seguirán la misma metodología que la explicada en el capítulo de los operadores *OWA*, con la diferencia de que ahora las extensiones se realizan sobre el operador *GOWA*. Cabe destacar que en este apartado se desarrollarán las extensiones denominadas de "nivel 1". Con esta generalización, será posible estudiar las extensiones de "nivel 1" de los operadores *OWG*, *OWHA* y *OWQA*, entre otros. Aún asi. Para no entrar en una excesiva redundancia, únicamente se comentarán estos casos de forma resumida ya que las diferentes propiedades, casos particulares, etc., se deducen directamente a partir de la versión *GOWA*.

5.2.1. *Induced generalized OWA operator*

5.2.1.1. Introducción

Un *induced GOWA operator* es un operador *GOWA* en el cual el proceso de reordenación de los argumentos no se realiza según sus valores, sino que depende de otras variables denominadas variables de ordenación inducidas. Este operador resulta de gran utilidad cuando el problema decisional es muy complejo y la actitud del decisor está condicionada por varios factores diferentes del valor de los argumentos. Al ser un operador generalizado, el operador *IGOWA* contiene a un gran número de casos particulares de entre los cuales destaca el *induced OWA* (*IOWA*) *operator*, el *induced OWG* (*IOWG*) *operator*, el *induced OWHA* (*IOWHA*) *operator* y el *induced OWQA* (*IOWQA*) *operator*. Cabe destacar que el operador *IGOWA* ha sido propuesto en (Merigó y Gil-Lafuente, 2007b) y se define de la siguiente manera.

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *IGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.33}$$

donde b_j es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i,a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, a_i es la variable del argumento, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, podemos distinguir entre el *Descending IGOWA (DIGOWA) operator* y el *Ascending IGOWA (AIGOWA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación (Merigó y Casanovas, 2006b; 2007c). El *DIGOWA* *operator* tiene la misma definición que el *IGOWA operator*. El *AIGOWA operator* se define de la siguiente forma.

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *IGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$AIGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.34}$$

donde b_j es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más pequeño de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, a_i es la variable del argumento, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Como se puede observar, ambas definiciones son prácticamente idénticas con la única diferencia que el operador *DIGOWA* utiliza una ordenación descendente y el operador *AIGOWA* una ascendente.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos con las ponderaciones mediante el uso de variables inducidas. El operador *IGOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = W^T B^{1/\lambda} \tag{5.35}$$

En esta expresión, W es el vector *IGOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado; donde el j-ésimo componente en B es b_j^{λ} siendo este el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i.

El operador *IGOWA* es un operador de medias. Esto sucede ya que el operador cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación respecto del maximo y el mínimo. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = IGOWA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle\ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$, donde $(d_1,\ldots, d_n)$ es cualquier permutación de los argumentos $(a_1,\ldots, a_n)$. Es monótono porque si $a_i \geq d_i$, para todo a_i, entonces, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq IGOWA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle\ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo a_i, entonces, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = a$. Finalmente, es limitado porque el operador *IGOWA* está delimitado entre el máximo y el mínimo. Es decir, $\text{Min}\{a_i\} \leq IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \leq \text{Max}\{a_i\}$.

Respecto a las medidas para caracterizar el vector de ponderaciones, cabe destacar que el carácter actitudinal, la medida de balance y la medida de divergencia resultan inapropiados para el estudio. Para poder utilizarlos, se tendrían que reformular según las variables inducidas, pero esto provocaria un desajuste en el concepto que impediría su correcta utilización. La medida que sí se puede utilizar es la medida de entropía $H(W)$

ya que esta no se ve afectada por las variables inducidas. Su formulación es la misma que en el resto de operadores, es decir:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{5.36}$$

Aparte de esta medida de entropía, también se podrían utilizar otras medidas para estudiar el grado de dispersión de las ponderaciones como por ejemplo, Rényi (1961), Daróczy (1970) y Aczél y Daróczy (1975).

Otro aspecto a destacar en el operador *IGOWA* es el problema de empates en el proceso de ordenación de los argumentos ya que el resultado final es diferente según el orden de los empates. Esto sucede porque en el operador *IGOWA*, los empates se producen en las variables inducidas y no en los argumentos. Por tanto, si los argumentos son distintos, el resultado será diferente según el orden seleccionado. Para solucionar este problema, se pueden aplicar las ideas de Yager y Filev (1999) para el operador *IOWA*, en el caso de los operadores *IGOWA*. En este caso, se tiene que tener en cuenta que se sustituyen los argumentos empatados por su media generalizada. Entonces, según el caso específico que se esté estudiando, se podrá aplicar la media aritmética, la media geométrica, la media harmónica, etc. Cabe destacar la posibilidad de utilizar otros criterios en los empates como por ejemplo, la utilización de la media ponderada generalizada o del operador *GOWA*.

También cabe señalar que los procesos de ordenación no tienen que venir necesariamente expresados por un orden numérico. Como Yager y Filev (1999) explican para el caso de operadores *IOWA*, se puede coger cualquier criterio de ordenación con el único requerimiento de que tenga un orden lineal. Entonces, esto permite poder utilizar diferentes tipos de atributos en las variables inducidas de ordenación como por ejemplo, el poder mezclar números con palabras en las agregaciones, siguiendo con las ideas de Zadeh (1996) y Zadeh y Kacprzyk (1999).

5.2.1.2. Tipos de *IGOWA operators*

5.2.1.2.1. Casos procedentes del vector de ponderaciones

En este apartado, se va a analizar diversos tipos de operadores *IGOWA*. De forma similar a lo comentado con los operadores *GOWA*, se pueden obtener diferentes casos particulares a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo, se pueden obtener el máximo, el mínimo, la media generalizada, la media ponderada generalizada y el operador *GOWA*. Cabe destacar que estos resultados se pueden obtener mediante el operador *DIGOWA* o mediante el operador *AIGOWA*.

El máximo se consigue si $w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, entonces, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Max}\{a_i\}$. El mínimo se obtiene si $w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \text{Min}\{a_i\}$, entonces, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Min}\{a_i\}$. De forma genérica, si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene $IGOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) =$

b_k, donde b_k es el argumento a_i con el j-ésimo más grande de las variables inducidas u_i. Cabe destacar que este caso general es conocido como el *step-IGOWA operator*. La media generalizada se obtiene cuando w_j = 1/n, para todo a_i. La media ponderada generalizada se consigue cuando $u_i > u_{i+1}$, para todo i. Finalmente, el operador *GOWA* se consigue si la posición de las variables u_i coincide con la posición de los argumentos b_j tal que b_j es el j-ésimo más grande de los a_i. Cabe destacar la posibilidad de considerar los operadores máximo, mínimo, etc., desde la perspectiva de las variables inducidas donde el máximo es el máximo de las variables inducidas, etc.

Otro caso interesante es la mediana generalizada obtenida con el operador *IGOWA* y su respectiva mediana ponderada generalizada. Para la mediana generalizada, si n es impar se asigna $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al argumento a_i con el [(n + 1)/2]-ésimo más grande de los u_i. Si n es par, se asigna por ejemplo, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con los (n/2)-ésimo y [(n/2) + 1]-ésimo más grande de lost u_i. Cabe destacar que la mediana generalizada obtenida con el operador *IGOWA* es equivalente a la obtenida con el operador *GOWA* si la ordenación de las variables u_i coincide con la de los argumentos b_j tal que b_j es el j-ésimo más grande de los a_i. Para la mediana ponderada *IGOWA*, se selecciona el argumento a_i que tiene la k-ésima variable inducida u_i más grande tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior a 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta k – 1 es menor a 0.5. En este caso, también se obtiene la mediana ponderada de los operadores *OWA* si las ordenaciones de las variables inducidas y de los argumentos coinciden.

Otros casos particulares de operadores *IGOWA* pueden ser obtenidos a través de escoger diferentes vectores de ponderaciones. Por ejemplo, cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, estamos utilizando el *window-IGOWA operator*. Cabe destacar que k y m tienen que ser números enteros tales que $k + m - 1 \leq n$. También cabe señalar que si $m = k = 1$, y la posición inicial del mayor u_i es también la posición inicial del mayor a_i, entonces, el *window-IGOWA* se convierte en el máximo. Si $m = 1$, $k = n$, y la posición inicial del menor u_i es también la posición inicial del menor a_i, entonces, el *window-IGOWA* se convierte en el mínimo. Y si $m = n$ y $k = 1$, el *window-IGOWA* se transforma en la media generalizada.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, se está utilizando el *olympic-IGOWA operator*. Cabe destacar que si n = 3 o n = 4, el *olympic-IGOWA operator* se convierte en el *IGOWA median* y si $m = n - 2$ y $k = 2$, el *window-IGOWA* se transforma en el *olympic-IGOWA operator*. También cabe destacar que el *olympic-IGOWA operator* se convierte en el *olympic-GOWA operator* si $w_p = w_q = 0$, tal que $u_p = \mathrm{Max}\{a_i\}$ y $u_q = \mathrm{Min}\{a_i\}$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$.

Siguiendo con los trabajos recientes de Liu (*aceptado*) se puede desarrollar una forma general del *olympic-IGOWA* considerando que $w_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y para todos los demás $w_{j^*} = 1/(n - 2k)$, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, esta expresión general se convierte en el tradicional *olympic-IGOWA*. Si $k = (n - 1)/2$, entonces, esta expresión general se convierte en el *median-IGOWA*.

De forma similar, también se puede considerar el caso contrario del *general olympic-IGOWA*. En este caso, $w_j = (1/2k)$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y $w_j = 0$, para todos los demás, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, se obtiene el caso contrario al *median-IGOWA*.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z IGOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases. En la primera clase, se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$, y en la segunda clase, se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. Cabe destacar que el *E-Z IGOWA weights* se convierte en el *E-Z GOWA weights* para la primera clase si la posición de las variables u_i es la misma que la posición de los b_j tal que b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, desde $j = 1$ hasta k. Y para la segunda clase, este caso aparece si las posiciones de los u_i y de los b_j es la misma desde $j = n - k + 1$ hasta n. También cabe señalar en la primera clase que si $k = 1$ y $b_1 = \text{Max}\{a_i\}$, se obtiene el máximo y si $k = n$, la media generalizada. En la segunda clase, se obtiene el mínimo si $k = 1$ y $b_n = \text{Min}\{a_i\}$, y si $k = n$, la media generalizada.

Otro tipo de operador *IGOWA* es el *S-IGOWA operator*. Para este tipo, se tiene que distinguir entre 3 casos posibles, el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-IGOWA operator*. El *orlike S-IGOWA operator* se consigue cuando $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para todo $j \neq p$ con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada y si $\alpha = 1$, el máximo. El *andlike S-IGOWA operator* se consigue cuando $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, $u_q = \text{Min}\{a_i\}$, y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para todo $j \neq q$ con $\beta \in [0, 1]$. En este caso, si $\beta = 0$ se obtiene la media y si $\beta = 1$, el mínimo. Finalmente, el *generalized S-IGOWA operator* se obtiene cuando $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, con $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, con $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para todo $j \neq p,q$ donde α, $\beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. Cabe señalar que si $\alpha = 0$, el *generalized S-IGOWA operator* se convierte en el *andlike S-IGOWA operator* y si $\beta = 0$, en el *orlike S-IGOWA operator*.

En el operador *IGOWA*, también resulta interesante considerar aquellas situaciones en donde pueden existir ponderaciones negativas. Estas situaciones se encuentran englobadas dentro del *nonmonotonic-IGOWA operator*. Este caso se produce cuando al menos 1 de las ponderaciones w_j es menor a 0 y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Obsérvese que un factor clave en este operador es que no cumple siempre la propiedad de monotonía.

Otras familias de operadores *IGOWA* que se pueden desarrollar son aquellas que dependen de los objetos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-IGOWA operator* de la siguiente manera:

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{5.37}$$

con $\alpha \in (-\infty, \infty)$ y b_j es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i. Cabe destacar que la suma de las ponderaciones tiene que ser 1 y $w_j \in [0,1]$. También cabe señalar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada y si $\alpha = \infty$, el máximo. Otro operador *IGOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1 - b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1 - b_j)^{\alpha}} \tag{5.38}$$

con $\alpha \in (-\infty, \infty)$ y b_j es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i. En este caso también se consigue la media generalizada si $\alpha = 0$ y si $\alpha = \infty$, el mínimo. Una tercera familia de operadores *IGOWA* con ponderaciones que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^{\alpha}} \tag{5.39}$$

con $\alpha \in (-\infty, \infty)$ y b_j es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i. En este caso, también se consigue la media generalizada si $\alpha = 0$ y si $\alpha = \infty$, el mínimo.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones es el método funcional conocido como el *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Puede ser formulado de la siguiente forma. Sea f una función f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Utilizando está función *BUM* se obtienen las ponderaciones *IGOWA* w_j para $j = 1$ hasta n como:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{5.40}$$

Utilizando este método, se puede observar fácilmente que la suma de las ponderaciones es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro tipo de operadores *IGOWA* que podría ser utilizado en la agregación es el *centered-IGOWA weights*. Siguiendo la misma metodología que la utilizada por Yager (2007) en los operadores *OWA*, se puede decir que un operador *IGOWA* es una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente respecto del centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto al centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar la posibilidad de considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. A estas situaciones se les denomina *softly decaying centered IGOWA operator*. Un ejemplo de este caso particular de operadores centrados es la media generalizada. Otra situación particular aparece si se elimina la tercera condición. A estos casos se les denomina *non-inclusive centered IGOWA operator*. Un caso particular de este tipo de agregación centrada es la mediana generalizada *IGOWA*.

Un tipo especial de operadores *IGOWA* centrados son las ponderaciones *IGOWA* Gaussianas. Para definir las ponderaciones, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{5.41}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j - \mu_n)^2} \tag{5.42}$$

Suponiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{5.43}$$

se definen las ponderaciones *IGOWA* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{5.44}$$

Cabe destacar que la suma de las ponderaciones tiene que ser 1 y $w_j \in [0,1]$.

5.2.1.2.2. Casos procedentes del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, es posible obtener una amplia gama de casos particulares de operadores *IGOWA*. Entre estos casos, se puede destacar el operador *IOWA*, el operador *IOWG*, el operador *IOWHA* y el operador *IOWQA*.

El operador *IOWA* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^1\right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5.45}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es la formulación del operador *IOWA*. Cabe destacar que este resultado se puede conseguir mediante el operador *IOWA* y el operador *AIOWA* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DIOWA* (o *IOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AIOWA operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 4.2.1.2 para los operadores *IOWA*. Es decir, se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media aritmética, la media ponderada, el *step-IOWA*, el *window-IOWA*, etc.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *IOWG* introducido por Xu y Da (2003) y Chiclana et al. (2004). Este operador también ha sido estudiado en Merigó y Casanovas (2007c).

$$GOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^0\right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{5.46}$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending IOWG* (*DIOWG*) *operator*) y ascendentes (*ascending IOWG* (*AIOWG*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DIOWG* (o *IOWG*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AIOWG operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes casos especiales a través de escoger diferentes valores en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.1.2., se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media geométrica (*GA*), la media geométrica ponderada (*WGA*), el operador *OWG*, el *step-IOWG operator*, el *window-IOWG operator*, el *olympic-IOWG operator*, la mediana *IOWG*, la mediana ponderada *IOWG*, el *E-Z IOWG weights*, el *S-IOWG operator*, los operadores *IOWG* que dependen de los argumentos, el *centered-IOWG operator*, el *Gaussian-IOWG weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *IOWHA*.

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{-1}\right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \quad (5.47)$$

En el operador *IOWHA* también es posible distinguir entre el *descending IOWHA* (*DIOWHA*) *operator* y el *ascending IOWHA* (*AIOWHA*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DIOWHA* (o *IOWHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AIOWHA operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes tipos de operadores *IOWHA* a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.1.2., se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media harmónica (*HM*), la media harmónica ponderada (*WHM*), el operador *OWHA*, el *step-IOWHA operator*, el *window-IOWHA operator*, el *olympic-IOWHA operator*, la mediana *IOWHA*, la mediana ponderada *IOWHA*, el *E-Z IOWHA weights*, el *S-IOWHA operator*, los operadores *IOWHA* que dependen de los argumentos, el *centered-IOWHA operator*, el *Gaussian-IOWHA weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *IOWQA* introducido por Merigó y Gil-Lafuente (2007b).

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{2}\right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{2}} \quad (5.48)$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending IOWQA* (*DIOWQA*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending IOWQA* (*AIOWQA*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DIOWQA* (o *IOWQA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AIOWQA operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *IOWQA* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo, el mínimo, la media cuadrática (*QM*), la media cuadrática ponderada (*WQM*), el operador *OWQA*, el *step-IOWQA operator*, el *window-IOWQA operator*, el *olympic-IOWQA operator*, la mediana *IOWQA*, la mediana ponderada *IOWQA*, el *E-Z IOWQA weights*, el *S-IOWQA operator*, los operadores *IOWQA* que dependen de los argumentos, el *centered-IOWQA operator*, el *Gaussian-IOWQA weights*, y muchos otros más.

5.2.1.3. *Quasi-IOWA operator*

Otro aspecto de gran importancia al estudiar modelos generalizados sobre los operadores *IOWA* es la utilización de medias cuasi-aritméticas. En este caso, el operador *IGOWA* se convierte en el *Quasi-IOWA operator* a través de sustituir el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Por tanto, las medias cuasi-aritméticas inducidas incluyen a la media generalizada inducida como un caso particular y abarcan muchos otros casos. Cabe destacar que este operador ha sido propuesto por Merigó y Gil-Lafuente (2007b) y se define de la siguiente forma.

Definición: Una función *Quasi-IOWA*:$R^n \rightarrow R$ es un *Quasi-IOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-IOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(b_{(j)})\right) \tag{5.49}$$

donde $b_{(j)}$ es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i. Como se puede observar, se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

El operador *Quasi-IOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$Quasi-IOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = g^{-1}\left(W^T B\right) \tag{5.50}$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-IOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en B es $g(b_{(j)})$ siendo este el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Igual que en el operador *IGOWA*, únicamente la medida de dispersión resulta de utilidad.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-IOWA (Quasi-DIOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-IOWA (Quasi-AIOWA) operator*. El operador *Quasi-DIOWA* tiene la misma definición que el operador *Quasi-IOWA*. Para el operador *Quasi-AIOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función *Quasi-AIOWA*:$R^n \rightarrow R$ es un *Quasi-AIOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-AIOWA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_{(j)})\right) \tag{5.51}$$

donde $b_{(j)}$ es el valor a_i del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más pequeño de los u_i. Como se puede observar, en este caso también se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$ y la única diferencia está en el proceso de ordenación ascendente.

Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DIOWA* y *Quasi-AIOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DIOWA* (o *Quasi-IOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AIOWA operator*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-IOWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *IGOWA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener el máximo, el mínimo, la media cuasi-aritmética, la media ponderada cuasi-aritmética, el *Quasi-OWA operator*, el operador *IOWA*, el operador *IOWG*, el operador *IOWQA*, el operador *IOWHA*, el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético, la mediana *Quasi-IOWA*, la mediana ponderada *Quasi-IOWA*, el *step-Quasi-IOWA operator*, el *window-Quasi-IOWA operator*, el *olympic-Quasi-IOWA operator*, el *E-Z Quasi-IOWA weights*, el *S-Quasi-IOWA operator*, los operadores *Quasi-IOWA* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-IOWA operator*, el *Gaussian-Quasi-IOWA weights*, y muchos otros más.

5.2.1.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de estrategias

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *IGOWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones como por ejemplo, en la selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y en la selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, estudios, etc. En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de estrategias. Cabe destacar la posibilidad de considerar una amplia gama de estrategias diferentes que pueden abarcar a un gran número de aspectos como por ejemplo las estrategias generales de la empresa, las estrategias departamentales, las estrategias financieras, de márketing, etc.

Ejemplo: Supongamos que a una empresa se le plantean cinco posibles estrategias de fusión en el próximo ejercicio y se desea seleccionar aquella que mejor se adapta a sus necesidades.

(1) A_1: Fusión con la empresa A.
(2) A_2: Fusión con la empresa B y C.
(3) A_3: Fusión con la empresa D.
(4) A_4: Fusión con la empresa E, F y G.
(5) A_5: Fusión con la empresa H.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la fusión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada fusión pueda reportar a la empresa. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza S_k que podrían ocurrir en el futuro. Los resultados esperados para cada fusión son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	50	60	50	20	50	70
A_2	30	20	20	20	30	180
A_3	40	60	90	90	10	10
A_4	30	70	40	40	60	60
A_5	45	45	45	45	45	45

Como el proceso de decisión es bastante complejo, se desconoce cuál de estos estados de la naturaleza es el más importante pero se desea establecer una serie de ponderaciones ya que el decisor desea dar más importancia a una serie de factores. Para ello, establece un proceso de reordenación de los resultados basado en un complejo mecanismo. Este mecanismo se resume mediante los resultados siguientes.

Tabla: Variables inducidas de los argumentos.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	4	7	8	9	3	1
A_2	6	4	2	5	7	9
A_3	2	5	6	7	1	9
A_4	4	2	3	1	6	7
A_5	8	4	7	1	5	3

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores básicos para poder tomar una decisión sobre cuál es la estrategia más adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (*AM*), media geométrica (*GA*), media harmónica (*HM*) y media cuadrática (*QM*). Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*AM*	*GA*	*HM*	*QM*
A_1	70	20	50	46.79	42.56	52.28
A_2	180	20	50	33.01	27	76.15
A_3	90	10	50	35.32	22.73	60
A_4	70	30	50	47.91	45.81	51.96
A_5	45	45	45	45	45	45

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el máximo o la media cuadrática, nuestra decisión será escoger la estrategia A_2. Si se utiliza el mínimo, la estrategia óptima será la A_5. Mediante la media geométrica o harmónica, la decisión consiste en escoger la alternativa A_4. Finalmente, mediante la media aritmética, todas las estrategias son igualmente válidas exceptuando a la A_5 que tiene un resultado esperado menor.

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones *IGOWA* con carácter más genérico. Se va a considerar la media ponderada, el operador *OWA*, el operador *IOWA*, el operador *IOWG*, el operador *IOWHA* y el operador *IOWQA*. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *IGOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con operadores *IGOWA*

	WA	*OWA*	*IOWA*	*IOWG*	*IOWHA*	*IOWQA*
A_1	51	44	54	51.39	47.72	55.85
A_2	71	38	38	27.01	23.68	60.82
A_3	42	37	42	29.30	19.78	51.96
A_4	52	44	55	47.14	45.40	50.89
A_5	45	45	45	45	45	45

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *WA* o el *IOWQA*, la decisión será escoger la estrategia A_2. Si se utiliza el operador *IOWG* o el *IOWHA*, la estrategia óptima será la A_1. Mediante el operador *OWA*, la estrategia recomendable es la A_5 y mediante el operador *IOWA*, la A_4.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las estrategias. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una estrategia o se consideran posibles sustituciones en casos excepcionales. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las estrategias.

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 = A_4 \succ A_5$	*WA*	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_3$
Mínimo	$A_5 \succ A_4 \succ A_1 = A_2 \succ A_3$	*OWA*	$A_5 \succ A_1 = A_4 \succ A_2 \succ A_3$
AM	$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 \succ A_5$	*IOWA*	$A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2$
GA	$A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2$	*IOWG*	$A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2$
HM	$A_4 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3$	*IOWHA*	$A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3$
QM	$A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5$	*IOWQA*	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_5$

Como se puede observar según el tipo de agregación *IGOWA* escogida, la ordenación será diferente. Por tanto, la decisión de la empresa también será diferente.

5.2.2. *Linguistic generalized OWA operator*

5.2.2.1. Introducción

A continuación, se va a analizar el operador *GOWA* cuando la información disponible viene representada mediante variables lingüísticas. Cabe destacar que se considerará el modelo de Xu (2004a) pero también se podría estudiar el modelo de Herrera et al. (1995). Una vez estudiado el modelo de Xu, también se hará una breve referencia al modelo de Herrera y Martínez (2000a).

El *linguistic GOWA operator* es un operador que generaliza una gran variedad de operadores lingüísticos. Entre otros, se pueden destacar el *LOWA operator*, el *linguistic OWG operator*, el *linguistic OWHA operator* y el *linguistic OWQA operator*. Como se ha comentado en capítulos anteriores, este operador es útili en aquellas situaciones de la vida cotidiana en donde no se puede expresar la información disponible mediante valores numéricos ya que dicha información es muy imprecisa, etc. Por tanto, se tiene que recurrir a otro mecanismo que pueda representar adecuadamente la información como por ejemplo, la utilización de valores lingüísticos.

Partiendo de los conceptos explicados sobre el modelo de Xu (2004a) en el Capítulo 4.2.2.3., se puede definir el operador LGOWA de la siguiente forma.

Definición: Una función $LGOWA: \hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *LGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$LGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, ..., S_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.52}$$

donde S_{β_j} es el j-ésimo más grande de los S_{α_i}, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que a este operador también se le podría denominar *extended GOWA* (*EGOWA*) *operator*.

El operador *LGOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$LGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = W^T B^{1/\lambda} \tag{5.53}$$

En esta expresión, W es el vector *LGOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento lingüístico ordenado; donde el j-ésimo componente en B es $S_{\beta_j}^{\lambda}$ siendo este el j-ésimo más grande de los S_{α_i}.

Un *LGOWA operator* es un operador que cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación respecto al mínimo y al máximo. Otro aspecto a destacar es la distinción entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending linguistic GOWA (DLGOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending linguistic GOWA (ALGOWA) operator*. El operador *DLGOWA* tiene la misma definición que el operador *LGOWA*. Para el operador *ALGOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función $LGOWA$:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *ALGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ALGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.54}$$

donde S_{β_j} es el j-ésimo más grande de los S_{α_i}, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *ALGOWA*, vemos como los argumentos S_{β_j} están ordenados de forma ascendente: $S_{\beta_1} \leq S_{\beta_2} \leq \ldots \leq S_{\beta_n}$, mientras que en el operador *LGOWA* (o *DLGOWA*), el orden es descendente: $S_{\beta_j} \geq S_{\beta_j} \geq \ldots \geq S_{\beta_j}$.

Cabe destacar que los vectores del *DLGOWA* y *ALGOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DLGOWA* (o *LGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *ALGOWA operator*.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *GOWA* (Yager, 2004b), se puede definir el carácter actitudinal del operador *LGOWA* de la misma forma. Es decir:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.55}$$

En cuanto a la medida de dispersión, se utiliza la misma formulación que en el operador *OWA*. Es decir:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{5.56}$$

Otra medida que se puede utilizar en el operador *LGOWA*, es la medida de balance y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{5.57}$$

En algunos casos también puede resultar útil el uso de la medida de divergencia. Se define de la misma forma que en el operador *GOWA*. Es decir:

$$Div(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^{2} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.58}$$

Cabe destacar que estas medidas pueden ser utilizadas tanto en el operador *LGOWA* como en el operador *ALGOWA*.

Finalmente, también señalar la posiblidad de estudiar estas generalizaciones mediante el operador de 2-tuplas. Entonces, se obtendría el *2-tuple GOWA operator* con sus respectivos casos particulares, como por ejemplo, el *2-tuple OWA operator*, el *2-tuple OWG operator*, el *2-tuple OWHA operator*, el *2-tuple OWQA operator*, y muchos otros más.

5.2.2.2. Tipos de *LGOWA operators*

5.2.2.2.1. Casos procedentes del vector de ponderaciones

A través de escoger una expresión diferente en el vector de ponderaciones, se puede obtener un gran número de casos particulares de operadores *LGOWA*. Entre ellos, se destaca el máximo lingüístico, el mínimo lingüístico, la media generalizada lingüística, la media ponderada generalizada lingüística y el criterio de Hurwicz generalizado lingüístico. Estos resultados y los que se estudiarán posteriormente pueden ser obtenidos mediante el operador *DLGOWA* o mediante el operador *ALGOWA*. Estos dos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DLGOWA* (o *LGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *ALGOWA operator*. Como la relación entre el operador *LGOWA* y *ALGOWA* es directa, para el resto de casos particulares únicamente se considerará el caso con operadores *LGOWA*. Obviamente, la obtención del operador *ALGOWA* es automática mediante la relación anterior.

En el operador *LGOWA*, el máximo lingüístico se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo lingüístico se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media generalizada lingüística o *linguistic generalized mean* (*LGM*), se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo a_i. La media ponderada generalizada lingüística o *linguistic weighted generalizad mean* (*LWGM*), se consigue cuando la ordenación de los S_{α_i} coincide con la ordenación de los S_{β_j}. Finalmente, el criterio de Hurwicz generalizado lingüístico se obtiene cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *LGOWA* son la mediana *LGOWA*, la mediana ponderada *LGOWA*, el *step-LGOWA operator*, el *window-LGOWA operator*, el *olympic-LGOWA operator*, el *E-Z LGOWA weights*, el *S-LGOWA operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos agregados, el *centered-LGOWA operator* y el *Gaussian-LGOWA weights*, entre otros.

La mediana *LGOWA* se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar, se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos S_{α_i}. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande S_{α_i}.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada *LGOWA*. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los S_{α_i} tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene, $LGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = S_{\beta_k}$, donde S_{β_k} es el k-ésimo más grande de los argumentos S_{α_i}. Este tipo de operador se conoce como el *step-LGOWA operator*. Cabe destacar que el *step-LGOWA operator* se convierte en el máximo lingüístico si $k = 1$, en el mínimo lingüístico si $k = n$, y en la mediana *LGOWA* si $k = (n+1)/2$ y el número de argumentos es impar.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-LGOWA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-LGOWA operator* se convierte en el máximo lingüístico si $m = k = 1$, en el mínimo lingüístico si $m = 1$, $k = n$, en la media aritmética lingüística si $m = n$ y $k = 1$. También se puede obtener la mediana *LGOWA* de la siguiente forma. Cuando el número de argumentos es impar, $k = (n+1)/2$ y $m = 1$ y cuando es par, $k = n/2$ y $m = 2$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic-LGOWA average*. El *olympic-LGOWA average* se transforma en la mediana *LGOWA* si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-LGOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

Siguiendo con los trabajos recientes de Liu (*aceptado*) se puede desarrollar una forma general del *olympic-LGOWA* considerando que $w_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y para todos los demás $w_{j*} = 1/(n - 2k)$, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, esta expresión general se convierte en el tradicional *olympic-LGOWA*. Si $k = (n - 1)/2$, entonces, esta expresión general se convierte en el *median-LGOWA*.

De forma similar, también se puede considerar el caso contrario del *general olympic-LGOWA*. En este caso, $w_j = (1/2k)$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y $w_j = 0$, para todos los demás, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, se obtiene el caso contrario al *median-LGOWA*.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z LGOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el máximo lingüístico y si $k = n$, la media generalizada lingüística. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el mínimo lingüístico y si $k = n$, la media generalizada lingüística.

Otra familia interesante de operadores *LGOWA* es el *S-LGOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-LGOWA operator*. El *orlike S-LGOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada lingüística y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo lingüístico. El *andlike S-LGOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-LGOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media generalizada lingüística y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo lingüístico. Finalmente, el *generalized S-LGOWA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-LGOWA operator* se convierte en el *andlike S-LGOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-LGOWA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-LGOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz generalizado lingüístico.

Otro tipo de operador *LGOWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-LGOWA operator*.

$$w_j = \frac{(S_{\beta_j})^{\mu}}{\sum_{j=1}^{n}(S_{\beta_j})^{\mu}} \tag{5.59}$$

donde $\mu \in (-\infty, \infty)$, S_{β_j} es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos lingüísticos S_{α_i}. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\mu = 0$, se obtiene la media generalizada lingüística y si $\mu = \infty$, se obtiene el valor lingüístico máximo. Otra familia de *LGOWA operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1 - S_{\beta_j})^{\mu}}{\sum_{j=1}^{n}(1 - S_{\beta_j})^{\mu}} \tag{5.60}$$

donde $\mu \in (-\infty, \infty)$, S_{β_j} es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos S_{α_i}. En este caso, también se observa que si $\mu = 0$, se obtiene la media generalizada lingüística y si $\mu = \infty$, se obtiene el valor lingüístico mínimo. Un tercer tipo de operadores *LGOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/S_{\beta_j})^{\mu}}{\sum_{j=1}^{n}(1/S_{\beta_j})^{\mu}} \tag{5.61}$$

donde $\mu \in (-\infty, \infty)$, S_{β_j} es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos S_{α_i}. En este caso también se obtiene la media generalizada lingüística si $\mu = 0$ y si $\mu = \infty$, se obtiene el mínimo lingüístico.

Siguiendo con la metodología de Filev y Yager (1998), se puede desarrollar odos métodos más para determinar las ponderaciones *LGOWA*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *LGOWA* es aquel conocido como el *centered-LGOWA weights*. Este tipo de operador dice que un operador *LGOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se denominan *softly decaying centered-LGOWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media generalizada lingüística ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered-LGOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-LGOWA* se le conoce como *non-inclusive centered-LGOWA operator*. En este tipo de *centered-LGOWA* se encuentra como caso particular la mediana generalizada lingüística.

Un caso especial de *centered-LGOWA* es el *Gaussian-LGOWA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{5.62}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j - \mu_n)^2} \tag{5.63}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2} \tag{5.64}$$

Se pueden definir los *LGOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n} \eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}} \tag{5.65}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones *LGOWA* es a través de utilizar el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: $[0, 1] \to [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *LGOWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{5.66}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

En el operador *LGOWA*, también puede resultar de interés considerar aquellas situaciones en donde pueden existir ponderaciones negativas. A este tipo de vector de poderaciones se le conoce como el *nonmonotonic-LGOWA operator*. Este caso se produce cuando al menos 1 de las ponderaciones w_j es menor a 0 y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Obsérvese que un factor clave en este operador es que no cumple siempre la propiedad de monotonía.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar medidas que caracterizan las ponderaciones como el carácter actitudinal y la medida de dispersión. A continuación, se va a comentar alguno de estos métodos siguiendo la misma metodología que en el operador *GOWA*. Un primer método es aquel que obtiene las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método se denomina *maximal entropy LGOWA* (*MELGOWA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{5.67}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar la posibilidad de utilizar un método analítico para obtener las ponderaciones *MELGOWA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Otro método similar, siguiendo con las ideas de Yager (1995a) para los operadores *OWA*, consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *minimal variability LGOWA weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.68}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo con las ideas de Fullér y Majlender (2003), es posible utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker para obtener las ponderaciones.

Otra posibilidad consiste en aplicar el modelo de Majlender (2005) al cálculo de las ponderaciones *LGOWA*. Este método se puede denominar como *maximal Rényi entropy LGOWA weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W) = \frac{1}{1-\beta} \log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} = \log_2 \left(\sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} \right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.69}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe destacar que el *MELGOWA weights* es un caso particular de este último método cuando β=1.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones es utilizar la propuesta de Wang y Parkan (2005) para el caso de los operadores *LGOWA*. Este método obtiene las ponderaciones a través de minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se le denomina *minimax disparity LGOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.70}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. Otro aspecto a resaltar es la posibilidad de utilizar un método dual aplicando las ideas de (Amin y Emrouznejad, 2006). También cabe mencionar la posibilidad de aplicar la propuesta de Liu (*in press*) sobre una visión unificadora entre el *minimax disparity LGOWA weights* y el *minimal variability LGOWA weights*.

5.2.2.2.2. Casos procedentes del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, es posible obtener una amplia gama de casos particulares del operador *LGOWA*. Entre estos, se puede destacar el operador *LOWA*, el operador *LOWG*, el operador *LOWHA* y el operador *LOWQA*.

El operador *LOWA* se obtiene cuando λ = 1.

$$LGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{1} \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j} \tag{5.71}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es la formulación del operador *LOWA*. Cabe destacar que este resultado se puede conseguir mediante el operador *LOWA* y el operador *ALOWA* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DLOWA* (o *LOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *ALOWA operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 4.2.2.3. para los operadores *LOWA*. Es decir, se podría utilizar en la agregación el operador máximo lingüístico, el mínimo lingüístico, la media aritmética lingüística, la media ponderada lingüística, el *step-LOWA*, el *window-LOWA*, etc.

Si λ = 0, se obtiene el operador *LOWG* introducido por Xu (2004b).

$$LGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, ..., S_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{0} \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} (S_{\beta_j})^{w_j} \tag{5.72}$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending LOWG* (*DLOWG*) *operator*) y ascendentes (*ascending LOWG* (*ALOWG*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DLOWG* (o *LOWG*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *ALOWG operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes casos especiales a través de escoger diferentes valores en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.2.2.3., se podría utilizar en la agregación el operador lingüístico máximo, el mínimo lingüístico, la media geométrica lingüística (*LGA*), la media geométrica ponderada lingüística (*LWGA*), el *step-LOWG operator*, el *window-LOWG operator*, el *olympic-LOWG operator*, la mediana *LOWG*, la mediana ponderada *LOWG*, el *E-Z LOWG weights*, el *S-LOWG operator*, los operadores *LOWG* que dependen de los argumentos, el *centered-LOWG operator*, el *Gaussian-LOWG weights*, y muchos otros más.

Si λ = −1, se obtiene el operador *LOWHA*.

$$LGOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, ..., S_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{-1} \right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{S_{\beta_j}}} \tag{5.73}$$

En el operador *LOWHA* también es posible distinguir entre el *descending LOWHA* (*DLOWHA*) *operator* y el *ascending LOWHA* (*ALOWHA*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DLOWHA* (o *LOWHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *ALOWHA operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes tipos de operadores *LOWHA* a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.2.2.3., se podría utilizar en la agregación el operador lingüístico máximo, el mínimo lingüístico, la media harmónica lingüística (*LHM*), la media harmónica ponderada lingüística (*LWHM*), el *step-LOWHA operator*, el *window-LOWHA operator*, el *olympic-LOWHA operator*, la mediana *LOWHA*, la mediana ponderada *LOWHA*, el *E-Z LOWHA weights*, el *S-LOWHA operator*, los operadores *LOWHA* que dependen de los argumentos, el *centered-LOWHA operator*, el *Gaussian-LOWHA weights*, y muchos otros más.

Si λ = 2, se obtiene el operador *LOWQA*.

$$GOWA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2} \tag{5.74}$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending LOWQA* (*DLOWQA*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending LOWQA* (*ALOWQA*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DLOWQA* (o *LOWQA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *ALOWQA operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *LOWQA* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador lingüístico máximo, el mínimo lingüístico, la media cuadrática lingüística (*LQM*), la media cuadrática ponderada lingüística (*LWQM*), el *step-LOWQA operator*, el *window-LOWQA operator*, el *olympic-LOWQA operator*, la mediana *LOWQA*, la mediana ponderada *LOWQA*, el *E-Z LOWQA weights*, el *S-LOWQA operator*, los operadores *LOWQA* que dependen de los argumentos, el *centered-LOWQA operator*, el *Gaussian-LOWQA weights*, y muchos otros más.

5.2.2.3. *Quasi-LOWA operator*

Otro aspecto de gran importancia al estudiar modelos generalizados sobre los operadores *LOWA* a partir de la noción de media es la utilización de medias cuasi-aritméticas. Las medias cuasi-aritméticas representan una mayor generalización a las medias generalizadas en donde se sustituye el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Por tanto, las medias cuasi-aritméticas incluyen a la media generalizada como un caso particular y abarcan muchos otros casos. En este caso, se denominará al nuevo operador *Quasi-LOWA operator*. Cabe destacar que este operador mediante el modelo de Xu (2004a), se supone que es una aportación de este trabajo. Pero se debe tener en cuenta la reciente propuesta de Wang y Hao (2006) sobre un operador de 2-tuplas lingüísticas quasi-aritmético. Este operador ha sido denominado *2-tuple Quasi-OWA operator*. A pesar de esta propuesta, el operador *2-T-Quasi-OWA* no ha sido estudiado con exhaustivo detalle ya que no se han considerado las diferentes familias procedentes de esta generalización, etc. En realidad, el artículo de Wang y Hao (2006) está destinado a elaborar un nuevo modelo lingüístico de 2-tuplas.

Definición: Una función *Quasi-LOWA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *Quasi-LOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-LOWA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, \ldots, S_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(S_{(\beta_j)})\right) \tag{5.75}$$

donde $S_{\beta_{(j)}}$ es el *j*-ésimo más grande de los S_{α_i}. Como se puede observar, se sustituye $S_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(S_\beta)$.

El operador *Quasi-LOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$Quasi-LOWA(S_{\alpha_1},...,S_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(W^T B\right) \tag{5.76}$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-LOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en B es $g(S_{\beta_{(j)}})$ siendo este el j-ésimo más grande de los S_{α_i}.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *LGOWA*, el carácter actitudinal quasi-aritmético $\alpha(W)$ se puede formular de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{5.77}$$

Para la medida de dispersión y de balance se obtienen los mismos resultados que en el operador *LGOWA*. En cambio, para la medida de divergencia se obtiene lo siguiente.

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2\right)\right) \tag{5.78}$$

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-LOWA (Quasi-DLOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-LOWA (Quasi-ALOWA) operator*. El operador *Quasi-DLOWA* tiene la misma definición que el operador *Quasi-LOWA*. Para el operador *Quasi-ALOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función *Quasi-ALOWA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *Quasi-ALOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-ALOWA(S_{\alpha_1},...,S_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(S_{(\beta_j)})\right) \tag{5.79}$$

donde $S_{\beta_{(j)}}$ es el j-ésimo más pequeño de los S_{α_i}. Como se puede observar, en este caso también se sustituye $S_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(S_\beta)$.

Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DLOWA* y *Quasi-ALOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DLOWA* (o *Quasi-LOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-ALOWA operator*.

Si estudiamos el carácter actitudinal del decisor mediante el operador *Quasi-ALOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{j-1}{n-1}\right)\right) \tag{5.80}$$

Y para la medida de divergencia del operador *Quasi-ALOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2\right)\right) \tag{5.81}$$

En cuanto a la medida de dispersión y a la de balance, se obtienen los mismos resultados que en el operador *Quasi-ALOWA*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-LOWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *LGOWA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener el máximo lingüístico, el mínimo lingüístico, la media cuasi-aritmética lingüística, la media ponderada cuasi-aritmética lingüística, el operador *LOWA*, el operador *LOWG*, el operador *LOWQA*, el operador *LOWHA*, el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético lingüístico, la mediana *Quasi-LOWA*, la mediana ponderada *Quasi-LOWA*, el *step-Quasi-LOWA operator*, el *window-Quasi-LOWA operator*, el *olympic-Quasi-LOWA operator*, el *E-Z Quasi-LOWA weights*, el *S-Quasi-LOWA operator*, los operadores *Quasi-LOWA* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-LOWA operator*, el *Gaussian-Quasi-LOWA weights*, el *ME-Quasi-LOWA operator*, y mucho otros más.

5.2.2.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de automóviles

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo en donde se podrá observar el funcionamiento de los operadores *LGOWA* en el proceso de toma de decisiones. Cabe destacar que estos operadores son aplicables a cualquier problema en donde se desee agregar la información. Desde un punto de vista empresarial, podemos decir que son aplicables a cualquier problema en donde se requiera un proceso de toma de decisiones como por ejemplo, en la selección de recursos humanos, selección de productos financieros, selección de inversiones, selección de inmovilizado y en la selección de productos en general que podría abarcar a la selección de viviendas, coches, electrodomésticos, etc. En este apartado, se desarrollará un ejemplo para el caso de selección de automóviles ya que generalmente es un producto importante para el consumidor.

Ejemplo: Supongamos que una persona quiere adquirir un coche. Después de haber analizado las diferentes ofertas existentes en el mercado y teniendo en cuenta sus recursos monetarios, esta persona está dudando entre las cinco alternativas siguientes.

(1) A_1: Automóvil A.
(2) A_2: Automóvil B.
(3) A_3: Automóvil C.
(4) A_4: Automóvil D.
(5) A_5: Automóvil E.

Para evaluar a estos automóviles, se consideran las siguientes características: C_1 = Diseño, C_2 = Costes de mantenimiento, C_3 = Marca, C_4 = Confort, C_5 = Motor, C_6 = Precio. Como resulta difícil especificar las evaluaciones, se representan dichas evaluaciones mediante información lingüística. Los resultados esperados para cada automóvil son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	S_6	S_5	S_4	S_8	S_3	S_4
A_2	S_6	S_4	S_7	S_3	S_2	S_8
A_3	S_9	S_2	S_3	S_5	S_7	S_4
A_4	S_4	S_3	S_7	S_5	S_4	S_7
A_5	S_8	S_2	S_8	S_8	S_8	S_1

Para los casos en donde se requiera, el decisor establece el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores lingüísticos básicos para poder tomar una decisión sobre cuál es el automóvil más adecuado para el decisor. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo lingüístico, mínimo lingüístico, media aritmética lingüística (*LA*), media ponderada lingüística (*LWA*), la media geométrica lingüística (*LGA*), la media harmónica lingüística (*LHM*) y la media cuadrática lingüística (*LQM*). Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados.

	Max	*Min*	*LA*	*LGA*	*LHM*	*LQM*
A_1	S_8	S_3	S_5	$S_{4.75}$	$S_{4.52}$	$S_{5.25}$
A_2	S_8	S_2	S_5	$S_{4.47}$	$S_{3.95}$	$S_{5.44}$
A_3	S_9	S_2	S_5	$S_{4.43}$	$S_{3.90}$	$S_{5.53}$
A_4	S_7	S_3	S_5	$S_{4.76}$	$S_{4.54}$	$S_{5.22}$
A_5	S_8	S_1	$S_{5.83}$	$S_{4.48}$	S_3	$S_{6.59}$

Como se puede observar, la decisión es diferente en función del operador utilizado. Si utilizamos el *LA* o el *LQM*, la decisión será escoger el automóvil A_5. Si se utiliza el *LGA* o el *LHM*, la decisión óptima será escoger el automóvil A_4. Mediante el máximo lingüístico, se escogerá el automóvil C. Por último, mediante el mínimo lingüístico, la decisión óptima será el automóvil A_1 o A_4.

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones *LGOWA* con carácter más genérico. Se va a considerar la media ponderada lingüística, el operador *LOWA*, el operador *LOWG*, el operador *LOWHA* y el operador *LOWQA*. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores *LGOWA* son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con operadores *LGOWA*

	LWA	*LOWA*	*LOWG*	*LOWHA*	*LOWQA*
A_1	$S_{4.9}$	$S_{4.4}$	$S_{4.18}$	$S_{4.01}$	$S_{4.64}$
A_2	$S_{5.1}$	$S_{4.1}$	$S_{3.63}$	$S_{3.22}$	$S_{4.59}$
A_3	S_5	$S_{4.1}$	$S_{3.59}$	$S_{3.20}$	$S_{4.59}$
A_4	$S_{5.3}$	$S_{4.4}$	$S_{4.19}$	$S_{4.02}$	$S_{4.64}$
A_5	$S_{5.3}$	$S_{4.7}$	$S_{3.24}$	$S_{2.16}$	$S_{5.75}$

Como se puede observar, en este caso también se obtienen diferentes decisiones según el método utilizado. Si se utiliza el *LOWA* o el *LOWQA*, la decisión será escoger el automóvil A_5. Mediante el operador *LOWG* o *LOWHA*, la decisión óptima será el automóvil A_4. Por último, si se utiliza la media ponderada lingüística, se podrá escoger como automóvil óptimo al A_4 o al A_5.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de los automóviles. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de un automóvil o se consideran posibles sustitutos. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de los automóviles.

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_3 \succ A_1 = A_2 = A_5 \succ A_4$	*LWA*	$A_4 = A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Mínimo	$A_1 = A_4 \succ A_2 = A_3 \succ A_5$	*LOWA*	$A_5 \succ A_1 = A_4 \succ A_2 = A_3$
LA	$A_5 \succ A_1 = A_2 = A_3 = A_4$	*LOWG*	$A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5$
LGA	$A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3$	*LOWHA*	$A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5$
LHM	$A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5$	*LOWQA*	$A_5 \succ A_1 = A_4 \succ A_2 = A_3$
LQM	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$		

Como se puede observar, según el tipo de agregación *LGOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del comprador también.

5.2.3. *Uncertain generalized OWA operator*

5.2.3.1. Introducción

El *uncertain generalized OWA* (*UGOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *GOWA* a través de utilizar números imprecisos en el problema. En este tipo de problemas, se supone que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otros métodos como por ejemplo, la utilización de intervalos de confianza. Con este tratamiento, este operador permite generalizar una amplia gama de operadores que expresan su información mediante intervalos de confianza. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el *uncertain ordered weighted averaging* (*UOWA*) *operator*, el *uncertain ordered weighted geometric* (*UOWG*) *operator*, el *uncertain ordered weighted harmonic averaging* (*UOWHA*) *operator* y el *uncertain ordered weighted quadratic averaging* (*UOWQA*) *operator*. Este operador ha sido propuesto en Merigó y Casanovas (2007f).

Cabe destacar que esta información numérica imprecisa puede venir expresada por diversos tipos de intervalos de confianza. Aparte de los intervalos de confianza simples, se pueden destacar las tripletas de confianza, los cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta las nociones básicas sobre los intervalos de confianza, explicados en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el *UGOWA operator* de la siguiente manera.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $UGOWA{:}\,\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

$w_j \in [0, 1]$

$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.82}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son intervalos de confianza, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos con las ponderaciones. El operador *UGOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B^{1/\lambda} \tag{5.83}$$

En esta expresión, W es el vector *UGOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado; donde el j-ésimo componente en B es b_j^{λ} siendo este el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

En este operador, se tiene que señalar la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza para poder llevar a cabo la agregación. Como se ha comentado en apartados anteriores, el proceso de reordenación de intervalos no siempre es directo ya que hay situaciones en las cuáles varias ordenaciones son posibles. Paa solucionar este problema, por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*.

Un *UGOWA operator* es un operador de medias que verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo. También se tiene que señalar que desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending UGOWA (DUGOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending UGOWA (AUGOWA) operator*. El operador *DUGOWA* tiene la misma definición que el operador *UGOWA*. Para el operador *AUGOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $AUGOWA$:$\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *AUGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$AUGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.84}$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son intervalos de confianza, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *AUGOWA*, vemos como los argumentos b_j están ordenados de forma ascendente: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, mientras que en el operador *UGOWA* (o *DUGOWA*), el orden es descendente: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Cabe destacar que los vectores del *DUGOWA* y *AUGOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DUGOWA* (o *UGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUGOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones. La motivación de este aspecto reside en situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo/pesimismo para poder tomar una decisión. También cabe señalar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en el parámetro λ. En este caso, la motivación reside en poder considerar diferentes tipos de agregaciones en un mismo problema. Por ejemplo, si suponemos $\lambda = [1, 2]$, querría decir que se están considerando todas las agregaciones existentes entre el operador *UOWA* y el operador *UOWQA*. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Como se considera que los intervalos de confianza únicamente afectan a los argumentos, la formulación es la misma que en los operadores GOWA. Es decir, siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *OWA* (Yager, 1988; 1996; 2002), se puede definir el carácter actitudinal como:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.85}$$

Para la medida de dispersión se tiene:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{5.86}$$

Para la medida de balance:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{5.87}$$

Y para la medida de divergencia:

$$Div(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.88}$$

Cabe destacar que estas medidas también pueden ser estudiadas mediante operadores ascendentes. Su formulación es la misma que en los operadores *AGOWA* explicados en el Capítulo 4.1.1.

5.2.3.2. Tipos de *UGOWA operators*

5.2.3.2.1. Casos procedentes del vector de ponderaciones

A través de escoger una diferente expresión en el vector de ponderaciones se pueden obtener un gran número de casos particulares de operadores *UGOWA*. Entre ellos, se destaca el máximo incierto, el mínimo incierto, la media generalizada incierta o *uncertain generalized mean* (*UGM*), la media ponderada generalizada incierta o *uncertain weighted generalizad mean* (*UWGM*) y el criterio de Hurwicz generalizado incierto. Estos resultados y los que se estudiarán posteriormente pueden ser obtenidos mediante el operador *DUGOWA* o mediante el operador *AUGOWA*. Estos dos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUGOWA* (o *UGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUGOWA operator*. Como la relación entre el operador *UGOWA* y *AUGOWA* es directa, para el resto de casos particulares únicamente se considerará el caso con operadores *UGOWA*. Obviamente, la obtención del operador *AUGOWA* es automática mediante la relación anterior.

En el operador *UGOWA*, el máximo incierto se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo incierto se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media generalizada incierta se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$. La media ponderada generalizada incierta se consigue cuando la ordenación de los $\tilde{a}_i$ coincide con la ordenación de los b_j. Finalmente, el criterio de Hurwicz generalizado incierto se obtiene cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *UGOWA* son la mediana *UGOWA*, la mediana ponderada *UGOWA*, el *step-UGOWA operator*, el *window-UGOWA operator*, el *olympic-UGOWA operator*, el *E-Z UGOWA weights*, el *S-UGOWA operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos agregados, el *centered-UGOWA operator* y el *Gaussian-UGOWA weights*, entre otros.

La mediana *UGOWA* se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar, se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande $\tilde{a}_i$.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada *UGOWA*. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se consigue, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, donde b_k es el k-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Este tipo de operador se conoce como el *step-UGOWA operator*. Cabe destacar que el *step-UGOWA operator* se convierte en el máximo incierto si $k = 1$, en el mínimo incierto si $k = n$, y en la mediana *UGOWA* si $k = (n+1)/2$ y el número de argumentos es impar.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-UGOWA operator*. En este caso, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-UGOWA operator* se convierte en el máximo incierto si $m = k = 1$, en el mínimo incierto si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética incierta si $m = n$ y $k = 1$. También se puede obtener la mediana *UGOWA* de la siguiente forma. Cuando el número de argumentos es impar, $k = (n+1)/2$ y $m = 1$ y cuando es par, $k = n/2$ y $m = 2$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se consigue el *olympic-UGOWA average*. El *olympic-UGOWA operator* se transforma en la mediana *UGOWA* si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-UGOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

Otro caso particular de operadores *UGOWA* es el *E-Z UGOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe destacar que si $k = 1$, se obtiene el máximo incierto y si $k = n$, la media generalizada incierta. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe señalar que si $k = 1$, se consigue el mínimo incierto y si $k = n$, la media generalizada incierta.

Otra familia interesante de operadores *UGOWA* es el *S-UGOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-UGOWA operator*. El *orlike S-UGOWA operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada incierta y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo incierto. El *andlike S-UGOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-UGOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media generalizada incierta y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo incierto. Finalmente, el *generalized S-UGOWA operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-UGOWA operator* se convierte en el *andlike S-UGOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-UGOWA operator*. También cabe señalar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-UGOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz generalizado incierto.

Otro tipo de operador *UGOWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-UGOWA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^\alpha}{\sum_{j=1}^n b_j^\alpha} \tag{5.89}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada incierta y si $\alpha = \infty$, se obtiene el máximo incierto. Otra familia de *UGOWA operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1 - b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^n (1 - b_j)^\alpha} \tag{5.90}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada incierta y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo incierto. Un tercer tipo de operadores *UGOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^n (1/b_j)^\alpha} \tag{5.91}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso también se obtiene la media generalizada incierta si $\alpha = 0$, y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo incierto.

Siguiendo con la metodología de Filev y Yager (1998), se pueden desarrollar dos métodos más para determinar las ponderaciones *UGOWA*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *UGOWA* es aquel conocido como el *centered-UGOWA weights*. Este tipo de operador y dice que un operador *UGOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se denominan *softly decaying centered-UGOWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media generalizada incierta ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular de *centered-UGOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-UGOWA* se le conoce como *non-inclusive centered-UGOWA operator*. En este tipo de *centered-UGOWA* se encuentra como caso particular la mediana generalizada incierta.

Un caso especial de *centered-UGOWA* es el *Gaussian-UGOWA weights*. Para poder definirlo, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana η(μ, σ) donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{5.92}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{5.93}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{5.94}$$

Se pueden definir los *GOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{5.95}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones *UGOWA* es a través de utilizar el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] → [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *UGOWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{5.96}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar medidas que caracterizan las ponderaciones como el carácter actitudinal y la medida de dispersión. Como se supone que los intervalos de confianza no afectan a las ponderaciones se pueden utilizar los mismos métodos del operador *GOWA*. Entonces, si se desarrolla el *maximal entropy UGOWA* (*MEUGOWA*) *weights* se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.97}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se utiliza el *minimal variability UGOWA weights*, su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.98}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se resuelve el problema del cálculo de las ponderaciones mediante el *maximal Rényi entropy UGOWA weights*, el resultado es el siguiente:

$$\text{maximizar: } H_{\beta}(W) = \frac{1}{1-\beta} \log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} = \log_2 \left(\sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} \right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.99}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Por último, se puede destacar la posibilidad de calcular las ponderaciones mediante el *minimax disparity UGOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\dots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.100}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \dots, n$$

Cabe señalar la posibilidad de utilizar otra amplia gama de métodos para obtener las ponderaciones. De forma orientativa, se puede decir que la mayoría de los métodos desarrollados para los operadores *OWA*, también son aplicables a muchas de sus extensiones como en este caso el operador *UGOWA*.

5.2.3.2.2. Casos procedentes del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, se pueden obtener una amplia gama de casos particulares del operador *UGOWA*. Por ejemplo, se puede destacar el operador *UOWA*, el operador *UOWG*, el operador *UOWHA* y el operador *UOWQA*.

El operador *UOWA* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^1 \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5.101}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es la formulación del operador *UOWA*. Cabe destacar que este resultado se puede conseguir mediante el operador *UOWA* y el operador *AUOWA* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DUOWA* (o *UOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AUOWA operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 4.2.5.2 para los operadores *UOWA*. Es decir, se podría utilizar en la agregación el operador máximo incierto, el mínimo incierto, la media aritmética incierta, la media ponderada incierta, el *step-UOWA*, el *window-UOWA*, etc.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *UOWG* introducido por Xu y Da (2004).

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \dots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^0 \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{5.102}$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending UOWG* (*DUOWG*) *operator*) y ascendentes (*ascending UOWG* (*AUOWG*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DUOWG* (o *UOWG*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUOWG operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes casos especiales a través de escoger diferentes valores en el vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo incierto, el mínimo incierto, la media geométrica incierta (*UGA*), la media geométrica ponderada incierta (*UWGA*), el *step-UOWG operator*, el *window-UOWG operator*, el *olympic-UOWG operator*, la mediana *UOWG*, la mediana ponderada *UOWG*, el *E-Z UOWG weights*, el *S-UOWG operator*, los operadores *UOWG* que dependen de los argumentos, el *centered-UOWG operator*, el *Gaussian-UOWG weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *UOWHA* introducido por Merigó y Casanovas (2007e).

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{-1} \right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{5.103}$$

En el operador *UOWHA* también es posible distinguir entre el *descending UOWHA* (*DUOWHA*) *operator* y el *ascending UOWHA* (*AUOWHA*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DUOWHA* (o *UOWHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUOWHA operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes tipos de operadores *UOWHA* a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo incierto, el mínimo incierto, la media harmónica incierta (*UHM*), la media harmónica ponderada incierta (*UWHM*), el *step-UOWHA operator*, el *window-UOWHA operator*, el *olympic-UOWHA operator*, la mediana *UOWHA*, la mediana ponderada *UOWHA*, el *E-Z UOWHA weights*, el *S-UOWHA operator*, los operadores *UOWHA* que dependen de los argumentos, el *centered-UOWHA operator*, el *Gaussian-UOWHA weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *UOWQA* introducido por Merigó y Casanovas (2007e).

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{2} \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{2}} \tag{5.104}$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending UOWQA* (*DUOWQA*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending UOWQA* (*AUOWQA*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DUOWQA* (o *UOWQA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUOWQA operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *UOWQA* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo incierto, el mínimo incierto, la media cuadrática incierta (*UQM*), la media cuadrática ponderada incierta (*UWQM*), el *step-UOWQA operator*, el *window-UOWQA operator*, el *olympic-UOWQA operator*, la mediana *UOWQA*, la mediana ponderada *UOWQA*, el *E-Z UOWQA weights*, el *S-UOWQA operator*, los operadores *UOWQA* que dependen de los argumentos, el *centered-UOWQA operator*, el *Gaussian-UOWQA weights*, y muchos otros más.

5.2.3.3. *Quasi-UOWA operator*

Otro aspecto de gran importancia al estudiar modelos generalizados sobre los operadores *UOWA* es la utilización de medias cuasi-aritméticas. En este caso, el operador *UGOWA* se convierte en el *Quasi-UOWA operator* a través de sustituir el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Por tanto, las medias cuasi-aritméticas inciertas incluyen a la media generalizada incierta como un caso particular y abarcan muchos otros casos. Cabe destacar que este operador ha sido propuesto por Merigó y Casanovas (2007e) y se define de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función *Quasi-UOWA*:$\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *Quasi-UOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_{(j)})\right) \quad (5.105)$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$. Como se puede observar, se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

El operador *Quasi-UOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$Quasi\text{-}UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(W^T B\right) \quad (5.106)$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-UOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en B es $g(b_{(j)})$ siendo este el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *UGOWA*, el carácter actitudinal quasi-aritmético $\alpha(W)$ se puede formular de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1} \right) \right) \tag{5.107}$$

Para la medida de dispersión y de balance se obtienen los mismos resultados que en el operador *UGOWA*. En cambio, para la medida de divergencia se obtiene lo siguiente.

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right) \right) \tag{5.108}$$

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-UOWA (Quasi-DUOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-UOWA (Quasi-AUOWA) operator*. El operador *Quasi-DUOWA* tiene la misma definición que el operador *Quasi-UOWA*. Para el operador *Quasi-AUOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función *Quasi-AUOWA*:$\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *Quasi-AUOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-AUOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_{(j)}) \right) \tag{5.109}$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más pequeño de los $\tilde{a}_i$. Como se puede observar, en este caso también se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DUOWA* y *Quasi-AUOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DUOWA* (o *Quasi-UOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AUOWA operator*.

Si estudiamos el carácter actitudinal del decisor mediante el operador *Quasi-AUOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{j-1}{n-1} \right) \right) \tag{5.110}$$

Y para la medida de divergencia del operador *Quasi-AUOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2\right)\right) \quad (5.111)$$

En cuanto a la medida de dispersión y a la de balance, se obtienen los mismos resultados que en el operador *Quasi-AOWA*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-UOWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *UGOWA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener el máximo incierto, el mínimo incierto, la media cuasi-aritmética incierta o *uncertain quasi-arithmetic mean*, la media ponderada cuasi-aritmética incierta o *uncertain weighted quasi-arithmetic mean*, el operador *UOWA*, el operador *UOWG*, el operador *UOWQA*, el operador *UOWHA*, el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético incierto, la mediana cuasi-aritmética incierta o *uncertain quasi-arithmetic median*, la mediana ponderada cuasi-aritmética incierta o *uncertain weighted quasi-arithmetic median*, el *step-Quasi-UOWA operator*, el *window-Quasi-UOWA operator*, el *olympic-Quasi-UOWA operator*, el *E-Z Quasi-UOWA weights*, el *S-Quasi-UOWA operator*, los operadores *Quasi-UOWA* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-UOWA operator*, el *Gaussian-Quasi-UOWA weights*, el *ME-Quasi-UOWA operator*, y mucho otros más.

5.2.3.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de estrategias financieras

A continuación, se va a desarrollar un ejemplo ilustrativo enfocado en un problema de selección de estrategias financieras donde una empresa está buscando cuál es la mejor estrategia financiera a desarrollar enel próximo ejercicio. Como el entorno es muy incierto, el grupo de expertos de la empresa utilizan tripletas de confianza para representar la información.

Supongamos que una empresa está analizando su estrategia financiera para el año que viene y consideran 5 estrategias fiancieras posibles a seguir.

1) A_1: Estrategia financiera 1.
2) A_2: Estrategia financiera 2.
3) A_3: Estrategia financiera 3.
4) A_4: Estrategia financiera 4.
5) A_5: Estrategia financiera 5.

Para evaluar estas estrategias, los expertos consideran como variable fundamental la situación económica del año que viene. En function de dicha situación, los beneficios de aplicar una estrategia u otra, serán diferentes. Se han considerado 6 posibles situaciones: S_1 = Crecimiento económico negativo, S_2 = Crecimiento económico cercano a 0, S_3 = Crecimiento económico bajo, S_4 = Crecimiento económico medio, S_5 = Crecimientoeconómico alto, S_6 = Crecimiento económico muy alto. El valor esperado en function de la situación S_i y de la alternativa A_k se muestran en la Tabla.

Tabla. Matriz de pagos incierta

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(30,40,50)	(60,70,80)	(50,60,90)	(20,25,40)	(30,50,60)	(60,70,80)
A_2	(20,30,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(70,80,90)
A_3	(30,40,50)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)	(30,40,50)
A_5	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,70,80)

En este problema, el grupo de expertos consideran que el carácter actitudinal de la empresa viene definido por el siguiente vector de ponderaciones: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3).

Con esta información, se puede agregar con objeto de tomar una decisión. Los resultados se muestran en las siguientes Tablas.

Tabla. Resultados agregados 1

	Max	*Min*	*UA*	*UGA*	*UQA*
A_1	(60,70,80)	(20,25,40)	(41.6,52.5,66.6)	(38.4,49.4,64.0)	(44.5,54.9,69.0)
A_2	(70,80,90)	(20,30,50)	(41.6,51.6,63.3)	(39.1,49.6,62.2)	(44.1,53.6,64.5)
A_3	(70,80,90)	(30,40,50)	(45,55,65)	(42.2,52.7,63.0)	(47.7,57.3,66.9)
A_4	(60,70,80)	(20,30,40)	(40,50,60)	(37.3,47.9,58.2)	(42.4,51.9,61.6)
A_5	(40,70,80)	(30,40,50)	(40,53.3,63.3)	(39.5,52.5,62.6)	(40.4,54.1,64.0)

Tabla. Resultados agregados 2

	UWA	*UOWA*	*AUOWA*	*UOWG*	*UOWQA*
A_1	(42,53,66)	(35,45.5,59)	(48,58.5,73)	(32.1,42.3,56.5)	(38.0,48.4,61.5)
A_2	(47,57,68)	(37,47,60)	(47,57,68)	(34.3,44.9,59.1)	(39.6,49.0,60.9)
A_3	(49,59,69)	(39,49,59)	(52,62,72)	(36.8,47.2,57.4)	(41.5,51.0,60.7)
A_4	(37,47,57)	(34,44,54)	(46,56,66)	(31.5,42.0,52.4)	(36.6,46.0,55.6)
A_5	(40,56,66)	(38,50,60)	(41,57,67)	(37.5,49.2,59.3)	(38.4,50.7,60.6)

Como se puede observar, en función del operador de agregación utilizado se obtienen resultados diferentes, lo cual puede llevar a tomar decisiones diferentes.

Otro aspecto a destacar es el establecimiento de un orden de las alternativas. Obsérvese que esto resulta de gran utilidad cuando se desea considerer más de una alternativa en la elección.

Tabla. Ordenación de las estrategias financieras

	Ordenación		*Ordenación*
Max	$A_2=A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5$	*UWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
Min	$A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$	*UOWA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
UA	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$	*AUOWA*	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
UGA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	*UOWG*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
UQA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4$	*UOWQA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

Como se puede observar, en función del operador de agregación utilizado, la ordenación de las estrategias financieras es diferente. Por tanto, en función del caso particular utilizado, los resultados pueden llevar a tomar decisions diferentes.

5.2.4. *Fuzzy generalized OWA operator*

5.2.4.1. Introducción

El *fuzzy generalized OWA* (*FGOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *GOWA* a través de utilizar NB en el problema. En este tipo de problemas, se supone que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otros métodos como por ejemplo, la utilización de NB. Con este tratamiento, se puede generalizar una amplia gama de operadores que expresan su información mediante NB. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el *fuzzy ordered weighted averaging* (*FOWA*) *operator*, el *fuzzy ordered weighted geometric* (*FOWG*) *operator*, el *fuzzy ordered weighted harmonic averaging* (*FOWHA*) *operator* y el *fuzzy ordered weighted quadratic averaging* (*FOWQA*) *operator*.

Cabe destacar que esta información numérica borrosa puede venir expresada por diversos tipos de NB. Por ejemplo, se podría utilizar NBT, NBTp, NB L-R, etc. Teniendo en cuenta las nociones básicas sobre los NB, explicados en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el *FGOWA operator* de la siguiente manera.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *FGOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.112}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son NB, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos con las ponderaciones. El operador *FGOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B^{1/\lambda} \tag{5.113}$$

En esta expresión, W es el vector *FGOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado; donde el j-ésimo componente en B es b_j^{λ} siendo este el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

En este operador, resulta fundamental definir un criterio de ordenación de NB para poder llevar a cabo la agregación. Como se ha comentado en apartados anteriores, el proceso de reordenación de NB no siempre es directo ya que hay situaciones en las cuáles varias ordenaciones son posibles. Para solucionar este problema, se podría utilizar, por ejemplo, la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.6. para el operador *FOWA*. Otros métodos que podrían utilizarse son (Buckley, 1985; Chen, 1985; Dubois y Prade, 1983; Kim y Park, 1990).

También se tiene que señalar que desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending FGOWA (DFGOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending FGOWA (AFGOWA) operator*. El operador *DFGOWA* tiene la misma definición que el operador *FGOWA*. Para el operador *AFGOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $AFGOWA: \Psi^n \to \Psi$ es un *AFGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$AFGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.114}$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, la única diferencia existente entre los 2 operadores está en el proceso de reordenación. Para el operador *AFGOWA*, vemos como los argumentos b_j están ordenados de forma ascendente: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$, mientras que en el operador *FGOWA* (o *DFGOWA*), el orden es descendente: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$. Cabe destacar que los vectores del *DFGOWA* y *AFGOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DFGOWA* (o *FGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFGOWA operator*.

Un *FGOWA operator* es un operador de medias que verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar NB en las ponderaciones. Esta posibilidad aparece debido a la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo/pesimismo para poder tomar una decisión. También cabe señalar la posibilidad de utilizar NB en el parámetro λ. En este caso, la motivación reside en poder considerar diferentes tipos de agregaciones en un mismo problema. Por ejemplo, si suponemos $\lambda = [1, 2]$, querría decir que se están considerando todas las agregaciones existentes entre el operador *FOWA* y el operador *FOWQA*. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Como se considera que los NB únicamente afectan a los argumentos, la formulación es la misma que en los operadores *GOWA*. Es decir, siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *OWA* (Yager, 1988; 1996a; 2002), se puede definir el carácter actitudinal como:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.115}$$

Para la medida de dispersión se tiene:

$$H(W) = - \sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{5.116}$$

Para la medida de balance:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{5.117}$$

Y para la medida de divergencia:

$$Div(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.118}$$

Cabe destacar que estas medidas también pueden ser estudiadas mediante operadores ascendentes. Su formulación es la misma que en los operadores *AGOWA* explicados en el Capítulo 5.1.1.

5.2.4.2. Tipos de *FGOWA operators*

5.2.4.2.1. Casos procedentes del vector de ponderaciones

A través de escoger una diferente expresión en el vector de ponderaciones se pueden obtener un gran número de casos particulares de operadores *FGOWA*. Entre ellos, se destaca el máximo borroso, el mínimo borroso, la media generalizada borroso o *fuzzy generalized mean* (*FGM*), la media ponderada generalizada borrosa o *fuzzy weighted generalizad mean* (*FWGM*) y el criterio de Hurwicz generalizado borroso. Estos resultados y los que se estudiarán posteriormente pueden ser obtenidos mediante el operador *DFGOWA* o mediante el operador *AFGOWA*. Estos dos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DFGOWA* (o *FGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFGOWA operator*. Como la relación entre el operador *FGOWA* y *AFGOWA* es directa, para el resto de casos particulares únicamente se considerará el caso con operadores *FGOWA*. Obviamente, la obtención del operador *AFGOWA* es automática mediante la relación anterior.

En el operador *FGOWA*, el máximo borroso se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo borroso se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media generalizada borrosa se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$. La media ponderada generalizada borrosa se consigue cuando la ordenación de los $\tilde{a}_i$ coincide con la ordenación de los b_j. Finalmente, el criterio de Hurwicz generalizado borroso se obtiene cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *FGOWA* son la mediana *FGOWA*, la mediana ponderada *FGOWA*, el *step-FGOWA operator*, el *window-FGOWA operator*, el *olympic-FGOWA operator*, el *E-Z FGOWA weights*, el *S-FGOWA operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos agregados, el *centered-FGOWA operator* y el *Gaussian-FGOWA weights*, entre otros.

La mediana *FGOWA* se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar, se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande $\tilde{a}_i$.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada *FGOWA*. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se consigue, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, donde b_k es el k-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Este tipo de operador se conoce como el *step-FGOWA operator*. Cabe destacar que el *step-FGOWA operator* se convierte en el máximo borroso si $k = 1$, en el mínimo borroso si $k = n$, y en la mediana *FGOWA* si $k = (n+1)/2$ y el número de argumentos es impar.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-FGOWA operator*. En este caso, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-FGOWA operator* se convierte en el máximo borroso si $m = k = 1$, en el mínimo borroso si $m = 1$, $k = n$, y en la media aritmética borrosa si $m = n$ y $k = 1$. También se puede obtener la mediana *FGOWA* de la siguiente forma. Cuando el número de argumentos es impar, $k = (n+1)/2$ y $m = 1$ y cuando es par, $k = n/2$ y $m = 2$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se consigue el *olympic-FGOWA average*. El *olympic-FGOWA operator* se transforma en la mediana *FGOWA* si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-FGOWA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

Siguiendo con las ideas recientes de Liu (*aceptado*) se puede desarrollar una forma general del *olympic-FGOWA* considerando que $w_j = 0$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y para todos los demás $w_{j*} = 1/(n - 2k)$, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, esta expresión general se convierte en el tradicional *olympic-FGOWA*. Si $k = (n - 1)/2$, entonces, esta expresión general se convierte en el *median-FGOWA*.

De forma similar, también se puede considerar el caso contrario del *general olympic-FGOWA*. En este caso, $w_j = (1/2k)$ para $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; y $w_j = 0$, para todos los demás, donde $k < n/2$. Obsérvese que si $k = 1$, entonces, se obtiene el caso contrario al *median-FGOWA*.

Otro caso particular de operadores *FGOWA* es el *E-Z FGOWA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe destacar que si $k = 1$, se obtiene el máximo borroso y si $k = n$, la media generalizada borrosa. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe señalar que si $k = 1$, se consigue el mínimo borroso y si $k = n$, la media generalizada borrosa.

En el operador *FGOWA*, también puede resultar interesante considerar aquellas situaciones en donde pueden existir algunas ponderaciones negativas en el vector W. Estas situaciones hacen referencia al *nonmonotonic-FGOWA operator*. Este caso se produce cuando al menos 1 de las ponderaciones w_j es menor a 0 y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Obsérvese que un factor clave en este operador es que no cumple siempre la propiedad de monotonía.

Otra familia interesante de operadores *FGOWA* es el *S-FGOWA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-FGOWA operator*. El *orlike S-FGOWA operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada borrosa y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo borroso. El *andlike S-FGOWA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-FGOWA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media generalizada borrosa y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo borroso. Finalmente, el *generalized S-FGOWA operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-FGOWA operator* se convierte en el *andlike S-FGOWA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-FGOWA operator*. También cabe señalar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-FGOWA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz generalizado borroso.

Otro tipo de operador *FGOWA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-FGOWA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^\alpha}{\sum_{j=1}^n b_j^\alpha} \tag{5.119}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada borrosa y si $\alpha = \infty$, se obtiene el máximo borroso. Otra familia de *FGOWA operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^n (1-b_j)^\alpha} \tag{5.120}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada borrosa y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo borroso. Un tercer tipo de operadores *FGOWA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^n (1/b_j)^\alpha} \tag{5.121}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$. En este caso también se obtiene la media generalizada borrosa si $\alpha = 0$, y si $\alpha = \infty$, se obtiene el mínimo borroso.

En este operador, también se pueden desarrollar dos métodos basados en las ideas de Filev y Yager (1998). Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *FGOWA* es aquel conocido como el *centered-FGOWA weights*. Este tipo de operador y dice que un operador *FGOWA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$.

Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se denominan *softly decaying centered-FGOWA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media generalizada borrosa ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular de *centered-FGOWA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-FGOWA* se le conoce como *non-inclusive centered-FGOWA operator*. En este tipo de *centered-FGOWA* se encuentra como caso particular la mediana generalizada borrosa.

Un caso especial de *centered-FGOWA* es el *Gaussian-FGOWA weights*. Para poder definirlo, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{5.122}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{5.123}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{5.124}$$

Se pueden definir los *FGOWA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{5.125}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones *FGOWA* es a través de utilizar el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *FGOWA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{5.126}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar medidas que caracterizan las ponderaciones como el carácter actitudinal y la medida de dispersión.

Como se supone que los NB no afectan a las ponderaciones se pueden utilizar los mismos métodos del operador *FGOWA*. Entonces, si se desarrolla el *maximal entropy FGOWA* (*MEFGOWA*) *weights* se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a:} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.127}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se utiliza el *minimal variability FGOWA weights*, su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a:} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.128}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Otro método para obtener las ponderaciones es el *maximal Rényi entropy FGOWA weights*, el resultado es el siguiente:

$$\text{maximizar: } H_{\beta}(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta}\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a:} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.129}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Por último, se puede destacar la posibilidad de calcular las ponderaciones mediante el *minimax disparity FGOWA weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.130}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Cabe señalar la posibilidad de utilizar otra amplia gama de métodos para obtener las ponderaciones. De forma orientativa, se puede decir que la mayoría de los métodos desarrollados para los operadores *OWA*, también son aplicables en el operador *FGOWA*.

5.2.4.2.2. Casos procedentes del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, se pueden obtener una amplia gama de casos particulares del operador *FGOWA*. Por ejemplo, se puede destacar el operador *FOWA*, el operador *FOWG*, el operador *FOWHA* y el operador *FOWQA*.

El operador *FOWA* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^1 \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5.131}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es la formulación del operador *FOWA*. Cabe destacar que este resultado se puede conseguir mediante el operador *FOWA* y el operador *AFOWA* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DFOWA* (o *FOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFOWA operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 4.2.5.2 para los operadores *UOWA*. Es decir, se podría utilizar en la agregación el operador máximo borroso, el mínimo borroso, la media aritmética borrosa, la media ponderada borrosa, el *step-FOWA*, el *window-FOWA*, etc.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *FOWG* introducido por Xu (2002).

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^0 \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{5.132}$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending FOWG* (*DFOWG*) *operator*) y ascendentes (*ascending FOWG* (*AFOWG*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DFOWG* (o *FOWG*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFOWG operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes casos especiales en el vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo borroso, el mínimo borroso, la media geométrica borrosa (*FGA*), la media geométrica ponderada borrosa (*FWGA*), el *step-FOWG operator*, el *window-FOWG operator*, el *olympic-FOWG operator*, la mediana *FOWG*, la mediana ponderada *FOWG*, el *E-Z FOWG weights*, el *S-FOWG operator*, los operadores *FOWG* que dependen de los argumentos, el *centered-FOWG operator*, el *Gaussian-FOWG weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *FOWHA*.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{-1} \right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{5.133}$$

En el operador *FOWHA* también es posible distinguir entre el *descending FOWHA* (*DFOWHA*) *operator* y el *ascending FOWHA* (*AFOWHA*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DFOWHA* (o *FOWHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFOWHA operator*.

En este operador, también se pueden utilizar diferentes tipos de operadores *FOWHA* en el vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo borroso, el mínimo borroso, la media harmónica borrosa (*FHM*), la media harmónica ponderada borrosa (*FWHM*), el *step-FOWHA operator*, el *window-FOWHA operator*, el *olympic-FOWHA operator*, la mediana *FOWHA*, la mediana ponderada *FOWHA*, el *E-Z FOWHA weights*, el *S-FOWHA operator*, los operadores *FOWHA* que dependen de los argumentos, el *centered-FOWHA operator*, el *Gaussian-FOWHA weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *FOWQA*.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{2} \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{2}} \tag{5.134}$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending FOWQA* (*DFOWQA*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending FOWQA* (*AFOWQA*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DFOWQA* (o *FOWQA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFOWQA operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *FOWQA* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo borroso, el mínimo borroso, la media cuadrática borrosa (*FQM*), la media cuadrática ponderada borrosa (*FWQM*), el *step-FOWQA operator*, el *window-FOWQA operator*, el *olympic-FOWQA operator*, la mediana *FOWQA*, la mediana ponderada *FOWQA*, el *E-Z FOWQA weights*, el *S-FOWQA operator*, los operadores *FOWQA* que dependen de los argumentos, el *centered-FOWQA operator,* el *Gaussian-FOWQA weights,* y muchos otros más.

5.2.4.3. *Quasi-FOWA operator*

A continuación, se va a estudiar una generalización mayor al operador *FGOWA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, el operador *FGOWA* se convierte en el *Quasi-FOWA operator* a través de sustituir el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Por tanto, las medias cuasi-aritméticas borrosas incluyen a la media generalizada borrosa como un caso particular y abarcan muchos otros casos. Este operador se define de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *Quasi-FOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *Quasi-FOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_{(j)})\right) \tag{5.135}$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$. Como se puede observar, se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

El operador *Quasi-FOWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$Quasi\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(W^T B\right) \tag{5.136}$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-FOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en B es $g(b_{(j)})$ siendo este el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *FGOWA*, el carácter actitudinal quasi-aritmético $\alpha(W)$ se puede formular de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{5.137}$$

Para la medida de dispersión y de balance se obtienen los mismos resultados que en el operador *FGOWA*. En cambio, para la medida de divergencia se obtiene lo siguiente.

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2\right)\right) \tag{5.138}$$

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-FOWA (Quasi-DFOWA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-FOWA (Quasi-AFOWA) operator*. El operador *Quasi-DFOWA* tiene la misma definición que el operador *Quasi-FOWA*. Para el operador *Quasi-AFOWA* tenemos lo siguiente.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *Quasi-AFOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *Quasi-AFOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-AFOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_{(j)})\right) \tag{5.139}$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más pequeño de los $\tilde{a}_i$. Como se puede observar, en este caso también se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DFOWA* y *Quasi-AFOWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DFOWA* (o *Quasi-FOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AFOWA operator*.

También cabe señalar la posibilidad de utilizar las diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones de los operadores *Quasi-AFOWA*. La formulación a utilizar en estos casos es la misma que en los operadores *AGOWA*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-FOWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *FGOWA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener el máximo borroso, el mínimo borroso, la media cuasi-aritmética borrosa o *fuzzy quasi-arithmetic mean*, la media ponderada cuasi-aritmética borrosa o *fuzzy weighted quasi-arithmetic mean*, el operador *FOWA*, el operador *FOWG*, el operador *FOWQA*, el operador *FOWHA*, el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético borroso, la mediana cuasi-aritmética borrosa o *fuzzy quasi-arithmetic median*, la mediana ponderada cuasi-aritmética borrosa o *fuzzy weighted quasi-arithmetic median*, el *step-Quasi-FOWA operator*, el *window-Quasi-FOWA operator*, el *olympic-Quasi-FOWA operator*, el *E-Z Quasi-FOWA weights*, el *S-Quasi-FOWA* *operator*, los operadores *Quasi-FOWA* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-FOWA operator*, el *Gaussian-Quasi-FOWA weights*, el *ME-Quasi-FOWA operator*, y muchos otros más.

5.2.5. *Generalized hybrid averaging operator*

5.2.5.1. Introducción

El *generalized hybrid averaging* (*GHA*) o media híbrida generalizada, es un método de agregación que permite utilizar en la misma formulación a la media ponderada generalizada (*WGM*) y a la media ponderada ordenada generalizada (*GOWA*). De esta forma, es posible utilizar una amplia variedad de casos particulares en la agregación de entre los cuales destaca el *hybrid averaging* (*HA*) *operador* (Xu, 2006b), el *hybrid geometric averaging* (*HGA*) *operator* (Xu, 2004b), el *hybrid harmonic mean* (*HHM*) *operator* y el *hybrid quadratic mean* (*HQA*) *operator*. A partir de estos casos particulares genéricos, se puede obtener una amplia gama de agregaciones más específicas. El operador *GHA* se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función $GHA{:}R^n \rightarrow R$ es un *GHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$GHA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.140}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Cabe destacar que el parámetro λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Un aspecto fundamental de este operador es el proceso de reordenación que asocia los argumentos con las ponderaciones. El operador *GHA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$GHA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = W^T B^{1/\lambda} \tag{5.141}$$

En esta expresión, W es el vector *GOWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado (Yager y Filev, 1999); donde el j-ésimo componente en B es b_j^{λ} siendo este el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$).

Un *GHA operator* es un operador de medias que cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación respecto del mínimo y el máximo. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = GHA(u_1, u_2\ldots, u_n)$, donde $(u_1, u_2\ldots, u_n)$ es cualquier permutación de los argumentos $(a_1, a_2\ldots, a_n)$. Es monótono porque si $a_i \geq d_i$ para todo i, entonces, $GHA(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo i, entonces $GHA(a_1,\ldots, a_n) = a$. Está delimitado por el mínimo y el máximo ya que $\text{Min}\{a_i\} \leq GHA(a_1,\ldots, a_n) \leq \text{Max}\{a_i\}$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending GHA (DGHA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending GHA (AGHA) operator*. El operador *DGHA* tiene la misma definición que el operador *GHA*. Para el operador *AGHA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función $AGHA{:}R^n \rightarrow R$ es un *AGHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$AGHA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (5.142)$$

donde b_j es el j-ésimo más pequeño de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Cabe destacar que el parámetro λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que los vectores del *DGHA* y *AGHA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DGHA* (o *GHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AGHA operator*.

En este operador, también se pueden utilizar las diferentes medidas existentes para caracterizar el vector de ponderaciones como por ejemplo, el carácter actitudinal, la medida de dispersión, la medida de balance y la medida de divergencia. El único aspecto peculiar de este caso es que estas medidas estudian el vector de ponderaciones *OWA* pero no el vector de ponderaciones *WA*. Por lo demás, la metodología es la misma que en los operadores *GOWA* lo cual implica que su formulación también es la misma.

5.2.5.2. Tipos de *GHA operators*

5.2.5.2.1. Casos procedentes del vector de ponderaciones

En este tipo de agregación, también se pueden obtener diferentes tipos de casos particulares. En primer lugar, se va a demostrar que el *WGM* y el *GOWA* son casos particulares de esta generalización. El *GHA* se convierte en el *WGM* cuando todas las ponderaciones w_j valen $1/n$, para todo j. Por otro lado, el *GHA* se transforma en el *GOWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen $1/n$, para todo i.

En segundo lugar, se puede destacar la obtención de todas las familias comentadas en el Capítulo 5.1.2. para los operadores *GOWA*. Es decir, se podría obtener el máximo, el mínimo, la media generalizada y la media ponderada generalizada (*WGM*). Como se puede observar, estos casos se obtienen del vector de ponderaciones w_j que afecta al operador *GOWA*. Entonces, para obtener estos casos particulares, es necesario que ω_i sea $1/n$, para todo i, ya que entonces, la agregación *GHA* se transforma en la agregación *GOWA*. Además de estos casos clásicos, también se podrían obtener todas las otras familias comentadas para los operadores *GOWA*. Es decir, se podría obtener el *step-GOWA*, el *window-GOWA*, la mediana *GOWA*, la mediana ponderada *GOWA*, el *olympic-GOWA average*, el *E-Z GOWA*, el *S-GOWA*, las ponderaciones *GOWA* que dependen de los objetos agregados, el *centered-GOWA*, el *Gaussian-GOWA*, el *MEGOWA*, el *minimal variability GOWA*, el *minimax disparity GOWA*, y muchos otros más.

Otro tipo de casos particulares de operadores *GHA* que se podrían considerar, son aquellos en donde se mezclan las características comentadas en el párrafo anterior con el vector de ponderaciones ω_i que está relacionado con la media ponderada generalizada. Por ejemplo, se podría obtener el máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media generalizada híbrida o el criterio de Hurwicz generalizado híbrido. El máximo híbrido se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo híbrido se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La media generalizada híbrida se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo a_i. Finalmente, el criterio de Hurwicz generalizado híbrido se consigue cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Además de estos casos basados en los criterios clásicos, también se podrían estudiar otra gran variedad de operadores como los que se muestran a continuación. Por ejemplo, si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene: $GHA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = b_k$, donde b_k es el k-ésimo más grande de los argumentos a_i. A este tipo de operador se conoce como el *step-GHA operator*. Cabe destacar que el *step-GHA operator* se convierte en el máximo híbrido si $k = 1$ y en el mínimo híbrido si $k = n$. Obviamente, si $\omega_i = 1/n$, para todo i, el *step-GHA operator* se transforma en el *step-GOWA operator*.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-GHA operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. Cabe destacar que si $m = k = 1$, el *window-GHA operator* se convierte en el máximo híbrido, en el mínimo híbrido si $m = 1$, $k = n$, y en la media generalizada híbrida si $m = n$ y $k = 1$. Si $\omega_i = 1/n$, para todo i, el *window-GHA operator* se transforma en el *window-GOWA operator*.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic-GHA operator*. El *olympic-GHA operator* se transforma en la mediana generalizada híbrida si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-GHA operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$. En este caso, también se observa que si $\omega_i = 1/n$, para todo i, el *olympic-GHA operator* se transforma en el *olympic-GOWA operator*.

Respecto a la mediana generalizada híbrida se puede decir lo siguiente. En primer lugar, se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Cabe destacar que la mediana generalizada híbrida se convierte en la mediana *GOWA* cuando $\omega_i = 1/n$, para todo i.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada generalizada híbrida. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5. Al igual que en la mediana generalizada, la mediana ponderada generalizada híbrida se transforma en la mediana ponderada *GOWA* cuando $\omega_i = 1/n$, para todo i.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z GHA weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el máximo híbrido y si $k = n$, la media generalizada híbrida. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el mínimo híbrido y si $k = n$, la media generalizada híbrida. Por último, decir que el *E-Z GHA weights* se convierte en el *E-Z GOWA weights* cuando $\omega_i = 1/n$, para todo i.

Otra familia interesante de operadores *GHA* es el *S-GHA operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-GHA operator*. El *orlike S-GHA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Obsérvese que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada híbrida y si $\alpha = 1$, se obtiene el máximo híbrido. El *andlike S-GHA operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-HA*, si $\beta = 0$ se obtiene la media generalizada y si $\beta = 1$, se obtiene el mínimo híbrido. Finalmente, el *generalized S-GHA operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-GHA operator* se convierte en el *andlike S-GHA operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-GHA operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-GHA operator* se transforma en el criterio de Hurwicz generalizado híbrido.

Otro tipo de operador *GHA* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-GHA operator*.

$$w_j = \frac{b_j^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} b_j^\alpha} \tag{5.143}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada híbrida y si $\alpha = \infty$, el máximo híbrido. Otra familia de *GHA* operators que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)^\alpha} \tag{5.144}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la media generalizada híbrida y si $\alpha = \infty$, el mínimo híbrido. Un tercer tipo de operadores *GHA* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^\alpha} \tag{5.145}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$). En este caso también se obtiene la media generalizada híbrida si $\alpha = 0$, y si $\alpha = \infty$, el mínimo híbrido.

Siguiendo con la metodología propuesta por Filev y Yager (1998) para los operadores *OWA*, se pueden aplicar otros dos métodos al caso de los operadores *GHA*. Para el primer método, las ponderaciones se obtienen de la siguiente forma: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, las ponderaciones se consiguen mediante: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otro tipo de operador *GHA* que se puede desarrollar es el *centered-GHA weights*. Este tipo de operador dice que un operador *GHA* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered-GHA operator*. Un caso particular de este último tipo es la media generalizada híbrida ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered-GHA* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-GHA* se le conoce como *non-inclusive centered-GHA operator*. Cabe señalar que la mediana generalizada híbrida es un caso particular de esta situación.

Un caso especial de *centered-GHA* es el *Gaussian-GHA weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{5.146}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{5.147}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{5.148}$$

Se pueden definir los *GHA weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{5.149}$$

Se comprueba que la suma de las ponderaciones es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones es el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *GOWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente para el caso de los operadores *GHA*. Sea f una función f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *GHA* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{5.150}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. Por ejemplo, siguiendo con los modelos explicados en el Capítulo 5.1.1., podemos proponer un método que determina las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denominará *maximal entropy GHA* (*MEGHA*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a:} \quad \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{5.151}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. También cabe destacar la posibilidad de obtener las ponderaciones *MEGHA* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Además del operador *MEGHA*, existen otros métodos para determinar las ponderaciones a través de estas medidas como son el *minimal variability GHA weights*, el *maximal Rényi entropy GHA weights*, el *minimax disparity GHA weights* y muchos otros más.

5.2.5.2.2. Casos procedentes del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, se puede obtener una amplia gama de casos particulares del operador *GHA*. Entre estos, se puede destacar el operador *HA*, el operador *HGA*, el operador *HHA* y el operador *HQA*.

El operador *HA* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$GHA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^1 \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5.152}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es la formulación del operador *HA*. Cabe destacar que este resultado se puede conseguir mediante el operador *HA* y el operador *AHA* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DHA* (o *HA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AHA operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 4.2.4. para los operadores *HA*. Es decir, se podría utilizar en la agregación el operador máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media generalizada híbrida, la media ponderada generalizada híbrida, el *step-HA*, el *window-HA*, etc.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *HGA*.

$$GHA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^0 \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{5.153}$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending HGA* (*DHGA*) *operator*) y ascendentes (*ascending HGA* (*AHGA*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DHGA* (o *HGA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AHGA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes casos especiales a través de escoger diferentes expresiones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.2.4., se podría utilizar en la agregación el operador máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media geométrica híbrida (*HGA*), la media geométrica ponderada híbrida (*WHGA*), el *step-HGA operator*, el *window-HGA* *operator*, el *olympic-HGA operator*, la mediana *HGA*, la mediana ponderada *HGA*, el *E-Z HGA weights*, el *S-HGA operator*, los operadores *HGA* que dependen de los argumentos, el *centered-HGA operator*, el *Gaussian-HGA weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *HHA*.

$$GHA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{-1} \right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{5.154}$$

En el operador *HHA* también es posible distinguir entre el *descending HHA* (*DHHA*) *operator* y el *ascending HHA* (*AHHA*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DHHA* (o *HHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AHHA operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes tipos de operadores *HHA* a través de escoger diferentes manifestaciones en el vector de ponderaciones. Por ejemplo y siguiendo la misma metodología del Capítulo 4.2.4., se podría utilizar en la agregación el operador máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media harmónica híbrida (*HHM*), la media harmónica ponderada híbrida (*WHHM*), el *step-HHA operator*, el *window-HHA operator*, el *olympic-HHA operator*, la mediana *HHA*, la mediana ponderada *HHA*, el *E-Z HHA weights*, el *S-HHA operator*, los operadores *HHA* que dependen de los argumentos, el *centered-HHA operator*, el *Gaussian-HHA weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *HQA*.

$$GHA(a_1, a_2, ..., a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2} \tag{5.155}$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending HQA* (*DHQA*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending HQA* (*AHQA*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el *j*-ésimo coeficiente del *DHQA* (o *HQA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AHQA operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *HQA* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el operador máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media cuadrática híbrida (*HQM*), la media cuadrática ponderada híbrida (*WHQM*), el *step-HQA operator*, el *window-HQA operator*, el *olympic-HQA operator*, la mediana *HQA*, la mediana ponderada *HQA*, el *E-Z HQA weights*, el *S-HQA operator*, los operadores *HQA* que dependen de los argumentos, el *centered-HQA operator*, el *Gaussian-HQA weights*, y muchos otros más.

5.2.5.3. *Quasi-HA operator*

Los operadores *GHA* pueden ser expresados por una generalización mayor a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. Las medias cuasi-aritméticas representan una mayor generalización a las medias generalizadas en donde se sustituye el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Por tanto, las medias cuasi-aritméticas incluyen a la media generalizada como un caso particular y abarcan muchos otros casos. En este caso, el operador *GHA* se transforma en el operador *Quasi-HA* y se define de la siguiente forma.

Definición: Una función *Quasi-HA*:$R^n \rightarrow R$ es un *Quasi-HA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-HA(a_1, a_2, ..., a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(b_{(j)})\right) \tag{5.156}$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\dots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

El operador *Quasi-HA* también puede ser expresado en una notación vectorial:

$$Quasi\text{-}HA(a_1, a_2, \dots, a_n) = g^{-1}\left(W^T B\right) \tag{5.157}$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-HA* de ponderaciones asociado con la agregación, y B es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en B es $g(b_{(j)})$ siendo este el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\dots,n$).

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. En este caso, se pueden utilizar las mismas ecuaciones que en el operador *Quasi-OWA*. El único aspecto a tener en cuenta es que estas medidas sólo afectan al operador *OWA* pero no al operador *WA*.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-HA (Quasi-DHA) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-HA (Quasi-AHA) operator*. El operador *Quasi-DHA* tiene la misma definición que el operador *Quasi-HA*. Para el operador *Quasi-AHA* tenemos lo siguiente.

Definición: Una función *Quasi-AHA*:$R^n \rightarrow R$ es un *Quasi-AHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-AHA(a_1, a_2, ..., a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_{(j)})\right) \quad (5.158)$$

donde $b_{(j)}$ es el j-ésimo más pequeño de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_j \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, en este caso también se sustituye b^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b)$.

Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DHA* y *Quasi-AHA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DHA* (o *Quasi-HA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AHA operator*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-HA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *GHA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener el máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media cuasi-aritmética híbrida, la media ponderada cuasi-aritmética híbrida, el operador *HA*, el operador *HGA*, el operador *HQA*, el operador *HHA*, el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético híbrido, la mediana cuasi-aritmética híbrida, la mediana ponderada cuasi-aritmética híbrida, el *step-Quasi-HA operator*, el *window-Quasi-HA operator,* el *olympic-Quasi-HA operator*, el *E-Z Quasi-HA weights*, el *S-Quasi-HA operator*, los operadores *Quasi-HA* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-HA operator*, el *Gaussian-Quasi-HA weights,* el *ME-Quasi-HA operator,* y mucho otros más.

5.2.6. Otras extensiones de nivel 1 en los *GOWA operators*

Además de estas extensiones comentadas, cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel 1 a los operadores *GOWA*. Por ejemplo, se podría destacar el *GOWA* con t-normas (*t-GOWA*), el *Majority Additive GOWA*, y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar extensiones de nivel 1 a los operadores *GOWA* en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, en el método de minimización del coste de Savage, en el *AHP*, en los métodos de decisión basados en distancias o en índices de selección, etc.

5.3. Extensiones de nivel 2 en los GOWA operators

En este apartado, se va a desarrollar algunas de las principales extensiones de nivel 2 sobre los operadores *GOWA*. Cabe destacar que desde la perspectiva de los operadores *OWA*, estas extensiones vendrían a ser de nivel 3. Para resumir el trabajo, en estas extensiones no se estudiarán todos los casos particulares con el mismo detalle que en el anterior apartado ya que se sobreentienden dentro de las explicaciones hechas en los apartados anteriores.

5.3.1. *Induced linguistic generalized OWA operator*

El *induced linguistic generalized OWA* (*ILGOWA*) *operator* es un operador que generaliza a una amplia gama de agregaciones en donde la información disponible viene representada mediante variables lingüísticas. Otra característica a señalar en esta extensión, es su proceso de reordenación el cual no se elabora con el valor de los argumentos lingüísticos. En este caso, se utiliza un proceso de ordenación más complejo basado en variables inducidas. En este apartado se tomará como referencia el modelo lingüístico de Xu (2004a). Pero cabe destacar que también sería posible considerar otros modelos lingüísticos como por ejemplo, el modelo de Herrera y Martínez (2000a). En este caso, se tendría el *induced 2-tuple generalized OWA* (*I2-TGOWA*) *operator*. El operador *ILGOWA* se puede definir de la siguiente manera.

Definición: Una función $ILGOWA$:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *ILGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ILGOWA(\langle u_1, S_{\alpha_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, S_{\alpha_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.159}$$

donde S_{β_j} es el valor S_{α_i} del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, S_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, S_{α_i} es la variable del argumento lingüístico, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, podemos distinguir entre el *Descending ILGOWA (DILGOWA) operator* y el *Ascending ILGOWA (AILGOWA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DILGOWA operator* tiene la misma definición que el *ILGOWA operator*. El *AILGOWA operator* también se define de la misma forma con la única diferencia que ahora el orden es ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DILGOWA* (o *ILGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AILGOWA operator*.

El operador *ILGOWA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitado por el máximo y el mínimo. Para el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir la política de Yager y Filev (1999). En este caso, consistiría en sustituir los argumentos lingüísticos empatados por su media generalizada lingüística. Además, también se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal. Entre otros métodos, se destaca la posibilidad de utilizar variables lingüísticas en las variables inducidas de forma que se puede mezclar en la agregación valores numéricos con valores lingüísticos.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros el máximo lingüístico, el mínimo lingüísico, la media generalizada lingüística (*LGM*), la media ponderada generalizada lingüística (*LWGM*), el *LGOWA operator*, el *step-ILGOWA operator*, el *window-ILGOWA operator*, el *olympic-ILGOWA operator*, la mediana *ILGOWA*, la mediana ponderada *ILGOWA*, el *E-Z ILGOWA weights*, el *S-ILGOWA operator*, la ponderación *ILGOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ILGOWA weights*, el *Gaussian-ILGOWA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podrían obtener el operador *ILOWA*, el operador *ILOWG*, el operador *ILOWHA*, el operador *ILOWQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *ILOWQA*, se podriá obtener el máximo lingüístico, el mínimo lingüístico, la media cuadrática lingüística (*LQM*), la media cuadrática ponderada lingüística (*LWQM*), el *LOWQA operator*, el *step-ILOWQA operator*, el *window-ILOWQA operator*, el *olympic-ILOWQA operator*, la mediana *ILOWQA*, la mediana ponderada *ILOWQA*, el *E-Z ILOWQA weights*, el *S-ILOWQA operator*, la ponderación *ILOWQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ILOWQA weights*, el *Gaussian-ILOWQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *ILOWQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *ILOWA*, *ILOWG* e *ILOWHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *ILGOWA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-ILOWA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función *Quasi-ILOWA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *Quasi-ILOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-ILOWA(\langle u_1, S_{\alpha_1}\rangle,...,\langle u_n, S_{\alpha_n}\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(S_{(\beta_j)})\right) \tag{5.160}$$

donde $S_{\beta_{(j)}}$ es el valor S_{α_i} del par *OWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, S_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y S_{α_i} es la variable del argumento lingüístico. Como se puede observar, se sustituye $S_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(S_\beta)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *ILGOWA*, están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.3.2. *Uncertain induced generalized OWA operator*

El *uncertain induced generalized OWA* (*UIGOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *GOWA* en donde se asume que los altos grados de incertidumbre no permiten cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otras alternativas como por ejemplo, la utilización de intervalos de confianza. Además, en esta extensión la ordenación de los argumentos inciertos se establece mediante el uso de variables de ordenación inducidas.

Cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, también es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *UIGOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $F:\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UIGOWA Operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UIGOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{5.161}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresado en forma de intervalos de confianza, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. Otra alternativa sería considerar a las variables inducidas como intervalos de confianza. En este caso sí sería necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. Además, también se debe recurrir a un criterio de ordenación en los resultados finales de las agregaciones ya que estos están expresados mediante intervalos de confianza. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.5.

Como se puede observar, el operador *UIGOWA* también verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo incierto y el mínimo incierto. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain induced generalized OWA* (*DUIGOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain induced generalized OWA* (*AUIGOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUIGOWA* (o *UIGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUIGOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de considerar a las ponderaciones como intervalos de confianza. La motivación por la cual es recomendable utilizar esta metodología, surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que este concepto lleva implícito muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también resulta de interés analizar aquellos argumentos con variables inducidas empatadas. De forma resumida, se recomienda sustituir estos argumentos por su media generalizada incierta ya que de este modo, la agregación será neutra respecto a este hecho. Cabe destacar la posibilidad de utilizar otros métodos como el *UWGM* o el *UGOWA*. Además, se tiene que resaltar el hecho de poder utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas como números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

También cabe destacar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de agregaciones *UIGOWA* en el proceso de decisión a través de utilizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el máximo incierto, el mínimo incierto, la media generalizada incierta (*UGM*), la media ponderada generalizada incierta (*UWGM*), el operador *UGOWA*, el *step-UIGOWA operator*, el *window-UIGOWA operator*, el *olympic-UIGOWA operator*, la mediana *UIGOWA*, la mediana ponderada *UIGOWA*, el *E-Z UIGOWA weights*, el *S-UIGOWA operator*, la ponderación *UIGOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UIGOWA weights*, el *Gaussian-UIGOWA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podrían obtener el operador *UIOWA*, el operador *uncertain induced OWG (UIOWG)*, el operador *uncertain induced OWHA (UIOWHA)*, el operador *uncertain induced*

OWQA (UIOWQA) y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *UIOWHA*, se podriá obtener el máximo incierto, el mínimo incierto, la media harmónica incierta (*UHM*), la media harmónica ponderada incierta (*UWHM*), el *UOWHA operator*, el *step-UIOWHA operator*, el *window-UIOWHA operator*, el *olympic-UIOWHA operator*, la mediana *UIOWHA*, la mediana ponderada *UIOWHA*, el *E-Z UIOWHA weights*, el *S-UIOWHA operator*, la ponderación *UIOWHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UIOWHA weights*, el *Gaussian-UIOWHA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *UIOWHA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *UIOWA*, *UIOWG* y *UIOWQA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *UIGOWA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-UIOWA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función *Quasi-UIOWA*:$\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *Quasi-UIOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-UIOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1 \rangle, ..., \langle u_n, \tilde{a}_n \rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(\tilde{b}_j) \right) \tag{5.162}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento incierto. Como se puede observar, se sustituye b_j^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *UIGOWA*, están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.3.3. *Fuzzy induced generalized OWA operator*

El *fuzzy induced generalized OWA* (*FIGOWA*) *operator* es una extensión a los operadores *GOWA* en donde no se puede cuantificar la información mediante números precisos. Entonces, se debe recurrir a otras alternativas como por ejemplo, la utilización de NB. Además, la ordenación de los argumentos inciertos se establece mediante el uso de variables de ordenación inducidas y se puede abarcar en la misma formulación a diferentes agregaciones como por ejemplo, al *fuzzy induced OWA* (*FIOWA*) *operator*, al *fuzzy induced OWG* (*FIOWG*) *operator*, al *fuzzy induced OWHA* (*FIOWHA*) *operator*, al *fuzzy induced OWQA* (*FIOWQA*) *operator*, etc.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de NB en las agregaciones como por ejemplo, los NBT, los NBTp, los NB L-R, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los NB en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *FIGOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $F: \Psi^n \to \Psi$ es un *FIGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FIGOWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.163}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), y u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresado en forma de NB, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de NB ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. Otra alternativa sería considerar a las variables inducidas como NB o intervalos de confianza. En este caso sí sería necesario definir un criterio de ordenación. Además, también se debe recurrir a un criterio de ordenación en los resultados finales de las agregaciones ya que estos están expresados mediante intervalos de confianza. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.5.

Como se puede observar, el operador *FIGOWA* también verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo borroso y el mínimo borroso. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending fuzzy induced generalized OWA* (*DFIGOWA*) *operator* y el *Ascending fuzzy induced generalized OWA* (*AFIGOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFIGOWA* (o *FIGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFIGOWA operator*.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de considerar a las ponderaciones como NB. La motivación por la cual es recomendable utilizar esta metodología, surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. También cabe tener en cuenta la posibilidad de utilizar intervalos de confianza y NB en el mismo proceso de agregación de forma que se combinen entre ellos. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también resulta relevante el análisis de los argumentos con variables inducidas empatadas. De forma resumida, se recomienda sustituir estos argumentos por su media generalizada borrosa ya que de este modo, la agregación será neutra respecto a este hecho. Cabe destacar la posibilidad de utilizar otros métodos como el *FWGM* o el *FGOWA*. Además, se tiene que resaltar el hecho de poder utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas como números imprecisos, variables lingüísticas, variables lingüísticas imprecisas, NB, etc.

A través de utilizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones, se pueden obtener diferentes tipos de agregaciones *FIGOWA* en el proceso de decisión. Principalmente, se pueden destacar como casos particulares el máximo borroso, el mínimo borroso, la media generalizada borrosa (*FGM*), la media ponderada generalizada borrosa (*FWGM*), el operador *FGOWA*, el *step-FIGOWA operator*, el *window-FIGOWA operator*, el *olympic-FIGOWA operator*, la mediana *FIGOWA*, la mediana ponderada *FIGOWA*, el *E-Z FIGOWA weights*, el *S-FIGOWA operator*, la ponderación *FIGOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FIGOWA weights*, el *Gaussian-FIGOWA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podrían obtener el operador *FIOWA*, el *fuzzy induced OWG (FIOWG) operator*, el *fuzzy induced OWHA (FIOWHA) operator*, el *fuzzy induced OWQA (FIOWQA)* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *FIOWQA*, se podría obtener el máximo borroso, el mínimo borroso, la media cuadrática borrosa (*FQM*), la media cuadrática ponderada borrosa (*FWQM*), el *FOWQA operator*, el *step-FIOWQA operator*, el *window-FIOWQA operator*, el *olympic-FIOWQA operator*, la mediana *FIOWQA*, la mediana ponderada *FIOWQA*, el *E-Z FIOWQA weights*, el *S-FIOWQA operator*, la ponderación *FIOWQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FIOWQA weights*, el *Gaussian-FIOWQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *FIOWQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *FIOWA*, *FIOWG* y *FIOWHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *FIGOWA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-FIOWA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *Quasi-FIOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *Quasi-FIOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-FIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,...,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle)=g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n}w_j g(\tilde{b}_j)\right) \tag{5.164}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento borroso. Como se puede observar, se sustituye b_j^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *FIGOWA*, están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.3.4. *Uncertain linguistic generalized OWA operator*

El *uncertain linguistic generalized OWA* (*ULGOWA*) *operator* es una extensión al operador *GOWA* destinada a tratar situaciones en donde la información disponible es muy imprecisa. Para expresar esta información, se puede recurrir al uso de variables lingüíticas. El inconveniente en estas situaciones está en que la información es tan imprecisa que se requiere el uso de intervalos de confianza en las variables lingüísticas para poder acotar la información del problema. Obviamente, el uso de estas herramientas demuestra que la situación tratada está afectada por grados de incertidumbre extremadamente elevados hasta un punto en el cual se puede considerar que la información disponible es mínima. Además, esta extensión permite generalizar a un gran número de agregaciones de este tipo como son el *ULOWA operator* (Xu, 2004c), el *uncertain linguistic OWG* (*ULOWG*) *operator* (Xu, 2006a), el *uncertain linguistic OWHA* (*ULOWHA*) *operator*, el *uncertain linguistic OWQA* (*ULOWQA*) *operator*, etc.

En este caso, también cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza lingüísticos simples, es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza lingüísticos como las tripletas de confianza lingüísticas, los cuádruplos de confianza lingüísticos, etc. Para poder definir el operador *ULGOWA*, se tiene que tener en cuenta una serie de leyes operacionales sobre variables lingüísticas inciertas (Xu, 2004c). Además, se tendría que volver a considerar los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994). A partir de estas consideraciones previas, se puede definir el operador *ULGOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de los intervalos de confianza lingüísticos. Una función $ULGOWA: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ es un *ULGOWA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$

2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ULGOWA(\tilde{S}_{\alpha_1}, \tilde{S}_{\alpha_2}, ..., \tilde{S}_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{S}_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (5.165)$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{S}_{\alpha_i}$, los $\tilde{S}_{\alpha_i}$ son variables lingüísticas inciertas expresadas mediante intervalos de confianza, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos de confianza lingüísticos para poder llevar a cabo la agregación. Por ejemplo, se podría utilizar la metodología comentada en Kaufmann y Gil-Aluja (1987; 1990) y Kaufmann et al. (1994), brevemente explicada en el capítulo 4.2.5. para el operador *UOWA*. En este caso, se tendría que tener en cuenta que la ordenación se desarrolla a partir de los valores numéricos de las variables lingüísticas. A modo de ejemplo, para los casos en los cuales no quede claro qué intervalo es mayor, se podrá utilizar el criterio del valor medio. En el caso de que prosiguiese el empate, se tendría que recurrir a criterios subjetivos para decidir sobre el orden de los intervalos de confianza lingüísticos.

El operador *ULGOWA* es un operador de medias que verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el mínimo y el máximo lingüístico incierto. Además, desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre el *Descending uncertain linguistic generalized OWA* (*DULGOWA*) *operator* y el *Ascending uncertain linguistic generalized OWA* (*AULGOWA*) *operator*. De forma general, se puede decir que estos 2 operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DULGOWA* (o *ULGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AULGOWA operator*.

También cabe señalar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza o NB en las ponderaciones. La motivación para utilizar esta metodología surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Como se puede observar, en estas situaciones podría ser muy lógico recurrir a ello ya que el decisor se encuentra en situaciones con niveles de incertidumbre extremos. Debido a que este concepto lleva implícito otros problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este modelo, también es posible utilizar las diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones. Como estas medidas únicamente afectan a las ponderaciones y no a los argumentos lingüísticos inciertos, su formulación será la misma que en el caso de los operadores *GOWA*. Por tanto, sus formulaciones están expuestas en el Capítulo 5.1.1. A modo de resumen, se puede decir que el carácter actitudinal se define como:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (5.166)$$

En cuanto a la medida de dispersión y de balance, su formulación es la misma que en el resto de los operadores. Véase el capítulo de los operadores *OWA* o *GOWA* para su formulación.

Finalmente, si analizamos la medida de divergencia para el operador *ULGOWA*, obtenemos la siguiente expresión:

$$Div(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (5.167)$$

Como se puede observar, su formulación es idéntica a la de los operadores *GOWA*.

En este operador, también se puede estudiar un gran número de casos particulares procedentes del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüísico incierto, la media generalizada lingüística incierta (*ULGM*), la media ponderada generalizada lingüística incierta (*ULWGM*), el *step-ULGOWA operator*, el *window-ULGOWA operator*, el *olympic-ULGOWA operator*, la mediana *ULGOWA*, la mediana ponderada *ULGOWA*, el *E-Z ULGOWA weights*, el *S-ULGOWA operator*, la ponderación *ULGOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ULGOWA weights*, el *Gaussian-ULGOWA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *ULOWA*, el operador *ULOWG*, el operador *ULOWHA*, el operador *ULOWQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *ULOWQA*, se podría obtener el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüístico incierto, la media cuadrática lingüística incierta (*ULQM*), la media cuadrática ponderada lingüística incierta (*ULWQM*), el *ULOWQA operator*, el *step-ULOWQA operator*, el *window-ULOWQA operator*, el *olympic-ULOWQA operator*, la mediana *ULOWQA*, la mediana ponderada *ULOWQA*, el *E-Z ULOWQA weights*, el *S-ULOWQA operator*, la ponderación *ULOWQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ULOWQA weights*, el *Gaussian-ULOWQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *ULOWQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *ULOWA*, *ULOWG* y *ULOWHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *ULGOWA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-ULOWA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de los intervalos de confianza lingüísticos. Una función *Quasi-ULOWA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *Quasi-ULOWA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-ULOWA(\tilde{S}_{\alpha_1}, \tilde{S}_{\alpha_2} ..., \tilde{S}_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(\tilde{S}(\beta_j))\right) \tag{5.168}$$

donde $\tilde{S}(\beta_j)$ es el valor $\tilde{S}_{\alpha_i}$ del par *ULOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{S}_{\alpha_i} \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y $\tilde{S}_{\alpha_i}$ es la variable del argumento lingüístico. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{S}_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{S}(\beta_j))$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *ULGOWA*, están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.3.5. *Induced generalized hybrid averaging*

Otra possible extensión de nivel 2 a los operadores *GOWA* es aquella que utiliza variables de ordenación inducidas en agregaciones híbridas entre la media ponderada y la media ponderada ordenada. A esta extensión se le denomina *induced generalized hybrid averaging* (*IGHA*) y permite considerar procesos de decisión en donde el carácter del decisor es más complejo que su grado de optimismo. Además, el operador *IGHA* generaliza a una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *IHA*, el *induced hybrid geometric averaging* (*IHGA*), el *induced hybrid harmonic averaging* (*IHHA*), el *induced hybrid quadratic averaging* (*IHQA*), etc. Se puede definir de la siguiente forma

Definición: Una función $F{:}R^n \rightarrow R$ es un *IGHA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$IGHA(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{5.169}$$

donde b_j es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *GOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, a_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, a_i es la variable del argumento, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending IGHA (DIGHA) operator* y el *Ascending IGHA (AIGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DIGHA operator* tiene la misma definición que el *IGHA operator*. El *AIGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DIGHA* (o *IGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AIGHA operator*.

El operador *IGHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sugieren sustituir los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media generalizada híbrida. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal, como por ejemplo, variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *IGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones ω_i = 1/n, de forma que el *IGHA* se convierta en el *IGOWA* operador. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el capítulo 5.2.1.2.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *IGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido, el mínimo híbrido, la media generalizada híbrida, la media ponderada generalizada híbrida, el operador *GHA*, el *step-IGHA operator*, el *window-IGHA operator*, el *olympic-IGHA operator*, la mediana *IGHA*, la mediana ponderada *IGHA*, el *E-Z IGHA weights*, el *S-IGHA operator*, la ponderación *IGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-IGHA weights*, el *Gaussian-IGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *IHA*, el operador *IHGA*, el operador *IHHA*, el operador *IHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *IHGA*, se podría obtener el máximo, el mínimo, la media geométrica (*GA*), la media geométrica ponderada, el *HGA operator*, el *step-IHGA operator*, el *window-IHGA operator*, el *olympic-IHGA operator*, la mediana *IHGA*, la mediana ponderada *IHGA*, el *E-Z IHGA weights*, el *S-IHGA operator*, la ponderación *IHGA* que depende de los objetos agregados, el *centered-IHGA weights*, el *Gaussian-IHGA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *IHGA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *IHA*, *IHHA* y *IHQA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *IGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-IHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Una función *Quasi-IHA*:$R^n \to R$ es un *Quasi-IHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-IHA(\langle u_1, a_1\rangle, ..., \langle u_n, a_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_j)\right) \tag{5.170}$$

donde b_j es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *OWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, a_i es la variable del argumento. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los a_i, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye b_j^{λ} por una función general monótona estrictamente continua $g(b_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *IGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.3.6. *Linguistic generalized hybrid averaging*

El *linguistic generalized hybrid averaging* (*LGHA*) es una extensión de nivel 2 a los operadores *GOWA* en donde la información disponible viene representada mediante variables lingüísticas. Esto es debido a que la situación a la que se enfrenta el decisor está sujeta a elevados grados de incertidumbre donde únicamente se puede expresar la información de forma aproximada a través de valores lingüísticos. Una característica fundamental de este operador es la posibilidad de incluir en una misma formulación a la media ponderada lingüística y a la media ponderada ordenada lingüística. Además, este operador permite generalizar una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *LHA*, el *linguistic hybrid geometric averaging* (*LHGA*), el *linguistic hybrid harmonic averaging* (*LHHA*), el *linguistic hybrid quadratic averaging* (*LHQA*), etc.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar diferentes modelos lingüísticos para tratar el problema. En este apartado se utilizará el modelo de Xu (2004a) aunque también se tendría que destacar a otros modelos como por ejemplo el de Herrera y Martínez (2000a). En el caso de utilizar este último modelo, el operador lingüístico pasaría a denominarse *2-tuple generalized hybrid averaging* (*2-TGHA*). Teniendo en cuenta los conceptos básicos sobre las variables lingüísticas explicados en el Capítulo 4.2.2., se puede definir el operador *LGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea $\hat{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas. Una función *LGHA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *LGHA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$LGHA(S_{\alpha_1}, S_{\alpha_2}, ..., S_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.171}$$

donde S_{β_j} es *j*-ésimo más grande de los $\hat{S}_{\alpha_i}$ ($\hat{S}_{\alpha_i} = n\omega_i S_{\alpha_i}$, i = 1,2,…,n), S_{α_i} es la variable del argumento expresada mediante valores lingüísticos, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$, y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los S_{α_i}, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending LGHA (DLGHA) operator* y el *Ascending LGHA (ALGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DLGHA operator* tiene la misma definición que el *LGHA operator*. El *ALGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DLGHA* (o *LGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *ALGHA operador*. Cabe destacar que el operador *LGHA* verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo.

A través de estudiar diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *LGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones $\omega_i = 1/n$, de forma que el *LGHA* se convierta en el *LGOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el Capítulo 5.2.2.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos que siguen la misma metodología de los operadores *LGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podría obtener el máximo híbrido lingüístico, el mínimo híbrido lingüístico, la media generalizada híbrida lingüística, la media ponderada generalizada híbrida lingüística, el *step-LGHA operator*, el *window-LGHA operator*, el *olympic-LGHA operator*, la mediana *LGHA*, la mediana ponderada *LGHA*, el *E-Z LGHA weights*, el *S-LGHA operator*, la ponderación *LGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-LGHA weights*, el *Gaussian-LGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *LHA*, el operador *LHGA*, el operador *LHHA*, el operador

LHQA y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *LHQA*, se podría obtener el máximo lingüístico, el mínimo lingüístico, la media cuadrática lingüística (*LQM*), la media cuadrática ponderada lingüística (*LWQM*), el *step-LHQA operator*, el *window-LHQA operator*, el *olympic-LHQA operator*, la mediana *LHQA*, la mediana ponderada *LHQA*, el *E-Z LHQA weights*, el *S-LHQA operator*, la ponderación *LHQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-LHQA weights*, el *Gaussian-LHQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *LHQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *LHA*, *LHGA* y *LHHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *LGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-LHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea $\hat{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas. Una función *Quasi-LHA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *Quasi-LHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-LHA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, ..., s_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(s_{\beta_j})\right) \tag{5.172}$$

donde s_{β_j} es el j-ésimo más grande de los $\hat{s}_{\alpha_i}$ ($\hat{s}_{\alpha_i} = n\omega_i s_{\alpha_i}$, i = 1,2,…,n), s_{α_i} es la variable del argumento expresada mediante intervalos de confianza, y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los s_{α_i}, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $s_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(s_{\beta_j})$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *LGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas lingüísticas generalizan a las medias generalizadas lingüísticas.

5.3.7. *Uncertain generalized hybrid averaging*

El *uncertain generalized hybrid averaging* (*UGHA*) es una extensión de nivel 2 a los operadores *GOWA* en donde la información disponible viene representada mediante intervalos de confianza. Una característica fundamental de este operador es la posibilidad de incluir en una misma formulación a la media ponderada incierta y a la media ponderada ordenada incierta. Además, este operador permite generalizar una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *UHA*, el *uncertain hybrid geometric averaging* (*UHGA*), el *uncertain hybrid harmonic averaging* (*UHHA*), el *uncertain hybrid quadratic averaging* (*UHQA*), etc.

Cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, también es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *UGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $UGHA$:$\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UGHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.173}$$

donde $\tilde{b}_j$ es j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante intervalos de confianza, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$, y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Para poder llevar a cabo la ordenación de los argumentos, se necesita definir un criterio de ordenación. Además, también se debe recurrir a un criterio de ordenación en los resultados finales de las agregaciones ya que estos están expresados mediante intervalos de confianza. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.5.

También cabe señalar la posibilidad de considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como intervalos de confianza. Esta necesidad surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending UGHA (DUGHA) operator* y el *Ascending UGHA (AUGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DUGHA operator* tiene la misma definición que el *UGHA operator*. El *AUGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del

DUGHA (o *UGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AUGHA operador*. Cabe destacar que el operador *UGHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo tanto en el operador descendente como ascendente.

A través de estudiar diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *UGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones ω_i = 1/*n*, de forma que el *UGHA* se convierta en el *UGOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el Capítulo 5.2.4.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos que siguen la misma metodología de los operadores *UGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podría obtener el máximo híbrido incierto, el mínimo híbrido incierto, la media generalizada híbrida incierta, la media ponderada generalizada híbrida incierta, el *step-UGHA operator*, el *window-UGHA operator*, el *olympic-UGHA operator*, la mediana *UGHA*, la mediana ponderada *UGHA*, el *E-Z UGHA weights*, el *S-UGHA operator*, la ponderación *UGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UGHA weights*, el *Gaussian-UGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *UHA*, el operador *UHGA*, el operador *UHHA*, el operador *UHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *UHQA*, se podría obtener el máximo incierto, el mínimo incierto, la media cuadrática incierta (*UQM*), la media cuadrática ponderada incierta (*UWQM*), el *step-UHQA operator*, el *window-UHQA operator*, el *olympic-UHQA operator*, la mediana *UHQA*, la mediana ponderada *UHQA*, el *E-Z UHQA weights*, el *S-UHQA operator*, la ponderación *UHQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UHQA weights*, el *Gaussian-UHQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *UHQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *UHA*, *UHGA* y *UHHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *UGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-UHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función *Quasi-UHA*:$\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *Quasi-UHA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-UHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(\tilde{b}_j)\right) \tag{5.174}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante intervalos de confianza, y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{b}_j^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{b}_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *UGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas inciertas generalizan a las medias generalizadas inciertas.

5.3.8. *Fuzzy generalized hybrid averaging*

El *fuzzy generalized hybrid averaging* (*FGHA*) es una extensión de nivel 2 a los operadores *GOWA* en donde la información disponible viene representada mediante NB. Una característica fundamental de este operador es la posibilidad de incluir en una misma formulación a la media ponderada borrosa y a la media ponderada ordenada borrosa. Además, este operador permite generalizar una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *FHA*, el *fuzzy hybrid geometric averaging* (*FHGA*), el *fuzzy hybrid harmonic averaging* (*FHHA*), el *fuzzy hybrid quadratic averaging* (*FHQA*), etc.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar una gran variedad de NB en el análisis. Por ejemplo, se podría destacar a los NBT, a los NBTp, a los NB L-R, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los NB en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *FGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función $FGHA$: $\Psi^n \to \Psi$ es un *FGHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.175}$$

donde $\tilde{b}_j$ es j-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante NB, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$, y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Para poder llevar a cabo la ordenación de los argumentos y analizar los resultados finales de las agregaciones, se necesita definir un criterio de ordenación. Esto sucede debido a que los datos están expresados mediante NB y en muchos casos no se puede decidir directamente cuál de los NB es mayor. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.6.

También cabe señalar la posibilidad de considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como NB. Esta necesidad surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending FGHA (DFGHA) operator* y el *Ascending FGHA (AFGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DFGHA operator* tiene la misma definición que el *FGHA operator*. El *AFGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFGHA* (o *FGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFGHA operator*. Cabe destacar que el operador *FGHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo tanto en el operador descendente como ascendente.

De forma similar al operador *UGHA*, a través de estudiar diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *FGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones $\omega_i = 1/n$, de forma que el *FGHA* se convierta en el *FGOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el Capítulo 5.2.5.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos que siguen la misma metodología de los operadores *FGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podría obtener el máximo híbrido borroso, el mínimo híbrido borroso, la media generalizada híbrida borrosa, la media ponderada generalizada híbrida borrosa, el *step-FGHA operator*, el *window-FGHA operator*, el *olympic-FGHA operator*, la mediana *FGHA*, la mediana ponderada *FGHA*, el *E-Z FGHA weights*, el *S-FGHA operator*, la ponderación *FGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FGHA weights*, el *Gaussian-FGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *FHA*, el operador *FHGA*, el operador *FHHA*, el operador *FHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *FHGA*, se podría obtener el máximo borroso, el mínimo borroso, la media geométrica borrosa (*FGA*), la media geométrica ponderada borrosa (*FWGA*), el *step-FHGA operator*, el *window-FHGA operator*, el *olympic-FHGA operator*, la mediana *FHGA*, la mediana ponderada *FHGA*, el *E-Z FHGA weights*, el *S-FHGA operator*, la ponderación *FHGA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FHGA weights*, el *Gaussian-FHGA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *FHGA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *FHA*, *FHHA* y *FHQA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *FGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-FHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *Quasi-FHA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *Quasi-FHA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi - FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, ..., \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(\tilde{b}_j)\right) \tag{5.176}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el *j*-ésimo más grande de los $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\dots,n$), $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante NB, y $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{b}_j^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{b}_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *FGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas borrosas generalizan a las medias generalizadas borrosas.

5.3.9. Otras extensiones de nivel 2 en los *GOWA operators*

Aparte de las extensiones comentadas, cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel 2. Por ejemplo, se podría destacar el *IGOWA* con t-normas (*t-IGOWA*), el *UGOWA* con t-normas (*t-UGOWA*), el *Majority Additive IGOWA*, el *Majority Additive UGOWA*, y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar extensiones de nivel 2 a los operadores *GOWA* en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, en el método de minimización del coste de Savage, en el *AHP*, en los métodos de decisión basados en distancias o en índices de selección, etc.

5.4. Extensiones de nivel 3 en los GOWA operators

5.4.1. *Induced linguistic generalized hybrid averaging*

El *induced linguistic generalized hybrid averaging* (*ILGHA*) es una extensión de nivel 3 a los operadores *GOWA* en la cual se utilizan variables de ordenación inducidas en agregaciones híbridas entre la media ponderada lingüística y la media ponderada ordenada lingüística. Una característica fundamental de este modelo es la utilización de información lingüística ya que la situación específica del problema no permite cuantificar la información mediante valores numéricos. Esta extensión permite considerar procesos de decisión en donde el carácter del decisor es más complejo que su grado de optimismo. Además, el operador *ILGHA* generaliza a una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *ILHA*, el *induced linguistic hybrid geometric averaging* (*ILHGA*), el *induced linguistic hybrid harmonic averaging* (*ILHHA*), el *induced linguistic hybrid quadratic averaging* (*ILHQA*), etc.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar diferentes modelos lingüísticos para tratar el problema. En este apartado se utilizará el modelo de Xu (2004a) aunque también se tendría que destacar a otros modelos como por ejemplo el de Herrera y Martínez (2000a). En el caso de utilizar este último modelo, el operador lingüístico pasaría a denominarse *induced 2-tuple generalized hybrid averaging* (*I2-TGHA*). Teniendo en cuenta los conceptos básicos sobre las variables lingüísticas explicados en el Capítulo 4.2.2., se puede definir el operador *ILGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea $\hat{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas. Una función $F{:}\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *ILGHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$ILGHA(\langle u_1, s_{\alpha_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{\alpha_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.177}$$

donde s_{β_j} es el valor $\bar{s}_{\alpha_i}$ ($\bar{s}_{\alpha_i} = n\omega_i s_{\alpha_i}$, i = 1,2,…,n), del par *LOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, s_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, s_{α_i} es la variable del argumento, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los s_{α_i}, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending ILGHA (DILGHA) operator* y el *Ascending ILGHA (AILGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DILGHA operator* tiene la misma definición que el *ILGHA operator*. El

AILGHA operator también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DILGHA* (o *ILGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AILGHA operator*.

El operador *ILGHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sustituyen los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media generalizada híbrida lingüística. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal, como por ejemplo, variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc.

Si se analizan diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *ILGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones ω_i = 1/n, de forma que el *ILGHA* se convierta en el *ILGOWA* operador. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el capítulo 5.3.1.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos que utilizan la misma metodología que en los operadores *ILGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido lingüístico, el mínimo híbrido lingüístico, la media generalizada híbrida lingüística, la media ponderada generalizada híbrida lingüística, el operador *LGHA*, el *step-ILGHA operator*, el *window-ILGHA operator*, el *olympic-ILGHA operator*, la mediana *ILGHA*, la mediana ponderada *ILGHA*, el *E-Z ILGHA weights*, el *S-ILGHA operator*, la ponderación *ILGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ILGHA weights*, el *Gaussian-ILGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *ILHA*, el operador *ILHGA*, el operador *ILHHA*, el operador *ILHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *ILHHA*, se podría obtener el máximo lingüístico, el mínimo lingüístico, la media harmónica lingüística (*LHM*), la media harmónica ponderada lingüística (LWHM), el *LHHA operator*, el *step-ILHHA operator*, el *window-ILHHA operator*, el *olympic-ILHHA operator*, la mediana *ILHHA*, la mediana ponderada *ILHHA*, el *E-Z ILHHA weights*, el *S-ILHHA operator*, la ponderación *ILHHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-ILHHA weights*, el *Gaussian-ILHHA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *ILHHA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *ILHA*, *ILHGA* y *ILHQA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *ILGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas lingüísticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-ILHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ŝ el conjunto de las variables lingüísticas. Una función *Quasi-ILHA*:$\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ es un *Quasi-ILHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-ILHA(\langle u_1, S_{\alpha_1}\rangle, ..., \langle u_n, S_{\alpha_n}\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(S_{\beta_j})\right) \tag{5.178}$$

donde S_{β_j} es el valor $\bar{S}_{\alpha_i}$ ($\bar{S}_{\alpha_i} = n\omega_i S_{\alpha_i}$, i = 1,2,…,n), del par *LOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i,\ S_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, S_{α_i} es la variable del argumento. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los S_{α_i}, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $S_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(S_{\beta_j})$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *ILGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas lingüísticas generalizan a las medias generalizadas lingüísticas.

5.4.2. *Uncertain induced linguistic generalized OWA operator*

El *uncertain induced linguistic generalized OWA* (*UILGOWA*) *operator* es una extensión de nivel 3 a los operadores *GOWA* que generaliza a una amplia gama de agregaciones en donde la información disponible viene representada mediante variables lingüísticas inciertas. Esto sucede debido a que la información disponible está sujeta a elevados grados de incertidumbre, de tal forma que la información se puede considerar mínima. Otra característica a señalar en esta extensión, es su proceso de reordenación el cual no se elabora con el valor de los argumentos lingüísticos. En este caso, se utiliza un proceso de ordenación más complejo basado en variables inducidas. En este apartado se tomará como referencia el modelo lingüístico de Xu (2004a). Pero cabe destacar que también sería posible considerar otros modelos lingüísticos como por ejemplo, el modelo de Herrera y Martínez (2000a). En este caso, se tendría el *2-tuple uncertain induced generalized OWA* (*2-TUIGOWA*) *operator*.

También cabe tener en cuenta la posibilidad de utilizar diferentes tipos de intervalos de confianza lingüísticos. Por ejemplo, se podría utilizar tripletas de confianza lingüísticas, cuádruplos de confianza lingüística, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza y las variables lingüísticas explicados en el Capítulo 4.2.5. y 4.2.2., respectivamente, se puede definir el operador *UILGOWA* de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas imprecisas. Una función $UILGOWA: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ es un *UILGOWA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UILGOWA(\langle u_1, \tilde{S}_{\alpha_1}\rangle, ..., \langle u_n, \tilde{S}_{\alpha_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{S}_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.179}$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el valor $\tilde{S}_{\alpha_i}$ del par *ULGOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{S}_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{S}_{\alpha_i}$ *e*s la variable del argumento lingüístico incierto, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

En este operador, no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos en el proceso de reordenación de argumentos lingüísticos inciertos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. En cambio, sí será necesario a la hora de ordenar los resultados finales de las agregaciones y en el caso de que las variables inducidas sean intervalos de confianza. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.5.

Cabe destacar la posibilidad de considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como intervalos de confianza. Esta necesidad surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, podemos distinguir entre el *Descending UILGOWA (DUILGOWA) operator* y el *Ascending UILGOWA (AUILGOWA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DUILGOWA operator* tiene la misma definición que el *UILGOWA operator*. El *AUILGOWA operator* también se define de la misma forma con la única diferencia que ahora el orden es ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el *j*-ésimo coeficiente del *DUILGOWA* (o *UILGOWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el *j*-ésimo coeficiente del *AUILGOWA operator*.

El operador *UILGOWA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Para el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir la política de Yager y Filev (1999). En este caso, consistiría en sustituir los argumentos lingüísticos empatados por su media generalizada lingüística lingüística. Además, también se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal como por ejemplo, variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc.

Si se estudian diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüísico incierto, la media generalizada lingüística incierta (*ULGM*), la media ponderada generalizada lingüística incierta (*ULWGM*), el *ULGOWA operator*, el *step-UILGOWA operator*, el *window-UILGOWA operator*, el *olympic-UILGOWA operator*, la mediana *UILGOWA*, la mediana ponderada *UILGOWA*, el *E-Z UILGOWA weights*, el *S-UILGOWA operator*, la ponderación *UILGOWA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UILGOWA weights*, el *Gaussian-UILGOWA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podrían obtener el operador *UILOWA*, el operador *UILOWG*, el operador *UILOWHA*, el operador *UILOWQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *UILOWQA*, se podría obtener el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüístico incierto, la media cuadrática lingüística incierta (*ULQM*), la media cuadrática ponderada lingüística incierta (*ULWQM*), el *ULOWQA operator*, el *step-UILOWQA operator*, el *window-UILOWQA operator*, el *olympic-UILOWQA operator*, la mediana *UILOWQA*, la mediana ponderada *UILOWQA*, el *E-Z UILOWQA weights*, el *S-UILOWQA operator*, la ponderación *UILOWQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UILOWQA weights*, el *Gaussian-UILOWQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *UILOWQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *UILOWA*, *UILOWG* y *UILOWHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *UILGOWA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas lingüísticas inciertas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-UILOWA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas imprecisas. Una función $Quasi-UILOWA: \tilde{S}^n \to \tilde{S}$ es un *Quasi-UILOWA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-UILOWA(\langle u_1, \tilde{S}_{\alpha_1} \rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{S}_{\alpha_n} \rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \, g(\tilde{S}_{(\beta_j)}) \right) \tag{5.180}$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el valor $\tilde{S}_{\alpha_i}$ del par *ULOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{S}_{\alpha_i} \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y $\tilde{S}_{\alpha_i}$ es la variable del argumento lingüístico. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{S}_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{S}_{\beta_j})$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *ILGOWA*, están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.4.3. *Uncertain induced generalized hybrid averaging*

El *uncertain induced generalized hybrid averaging* (*UIGHA*) es una extensión de nivel 3 a los operadores *GOWA* en donde se utilizan variables de ordenación inducidas en agregaciones híbridas entre la media ponderada incierta y la media ponderada ordenada incierta. Además, este operador sirve para tratar situaciones de la vida cotidiana en donde la información numérica disponible viene representada mediante intervalos de confianza debido a la incertidumbre existente en el problema. Otra característica fundamental de este operador es su vertiente generalizadora de una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *UIHA*, el *uncertain induced hybrid geometric averaging* (*UIHGA*), el *uncertain induced hybrid harmonic averaging* (*UIHHA*), el *uncertain induced hybrid quadratic averaging* (*UIHQA*), etc.

Cabe destacar que aparte de los intevalos de confianza simples, también es posible utilizar otros tipos de intervalos de confianza como las tripletas de confianza, cuádruplos de confianza, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre los intervalos de confianza en el Capítulo 4.2.5., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *UIGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función $UIGHA{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *UIGHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UIGHA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.181}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, i = 1,2,…,n), del par *UIGHA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante intervalos de confianza, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos en el proceso de reordenación de argumentos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. En cambio, sí sería necesario en el caso de que las variables inducidas fuesen intervalos de confianza. Además, también se debe recurrir a un criterio de ordenación en los resultados finales de las agregaciones ya que estos están expresados mediante intervalos de confianza. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.5.

También cabe señalar la posibilidad de considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como intervalos de confianza. Esta necesidad surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending UIGHA (DUIGHA) operator* y el *Ascending UIGHA (AUIGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DUIGHA operator* tiene la misma definición que el *UIGHA operator*. El *AUIGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUIGHA* (o *UIGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUIGHA operator*.

El operador *UIGHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sugieren sustituir los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media generalizada híbrida incierta. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal, como por ejemplo, variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc.

De forma resumida, se puede decir que si se estudiasen diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros todos los casos particulares del operador *UIGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones $\omega_i = 1/n$, de forma que el *UIGHA* se convierta en el *UIGOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el capítulo 5.3.2.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las diferentes técnicas comentadas para estudiar diferentes tipos de operadores *UIGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podría obtener el máximo híbrido incierto, el mínimo híbrido incierto, la media generalizada híbrida incierta, la media ponderada generalizada híbrida incierta, el operador *UGHA*, el *step-UIGHA operator*, el *window-UIGHA operator*, el *olympic-UIGHA operator*, la mediana *UIGHA*, la mediana ponderada *UIGHA*, el *E-Z UIGHA weights*, el *S-UIGHA operator*, la ponderación

UIGHA que depende de los objetos agregados, el *centered-UIGHA weights*, el *Gaussian-UIGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *UIHA*, el operador *UIHGA*, el operador *UIHHA*, el operador *UIHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *UIHHA*, se podría obtener el máximo incierto, el mínimo incierto, la media harmónica incierta (*UHM*), la media harmónica ponderada incierta (*UWHM*), el *UHHA operator*, el *step-UIHHA operator*, el *window-UIHHA operator*, el *olympic-UIHHA operator*, la mediana *UIHHA*, la mediana ponderada *UIHHA*, el *E-Z UIHHA weights*, el *S-UIHHA operator*, la ponderación *UIHHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UIHHA weights*, el *Gaussian-UIHHA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *UIHHA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *UIHA*, *UIHGA* y *UIHQA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *UIGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-UIHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función *Quasi-UIGHA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ es un *Quasi-UIHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-UIHA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, ..., \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(\tilde{b}_j)\right) \tag{5.182}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *UOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante intervalos de confianza. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{b}_j^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{b}_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *UIGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.4.4. *Fuzzy induced generalized hybrid averaging*

El *fuzzy induced generalized hybrid averaging* (*FIGHA*) es una extensión de nivel 3 a los operadores *GOWA* en donde se utilizan variables de ordenación inducidas en agregaciones híbridas entre la media ponderada borrosa y la media ponderada ordenada borrosa. Además, este operador sirve para tratar situaciones de la vida cotidiana en donde la información numérica disponible viene representada mediante NB debido a la incertidumbre existente en el problema. Otra característica fundamental de este operador es su vertiente generalizadora de una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *FIHA*, el *fuzzy induced hybrid geometric averaging* (*FIHGA*), el *fuzzy induced hybrid harmonic averaging* (*FIHHA*), el *fuzzy induced hybrid quadratic averaging* (*FIHQA*), etc.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar una amplia gama de NB en la agregación como por ejemplo, los NBT, los NBTp, los NB L-R, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos explicados sobre NB en el Capítulo 4.2.6., junto con explicaciones más amplias desarrolladas en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994), se puede definir el operador *FIGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *FIGHA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *FIGHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$FIGHA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{b}_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{5.183}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *FGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante NB, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos en el proceso de reordenación de argumentos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. En cambio, sí sería necesario en el caso de que las variables inducidas fuesen NB o intervalos de confianza. Además, también se debe recurrir a un criterio de ordenación en los resultados finales de las agregaciones ya que estos están expresados mediante NB. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.6.

También cabe señalar la posibilidad de considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como NB. Esta necesidad surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending FIGHA (DFIGHA) operator* y el *Ascending FIGHA (AFIGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DFIGHA operator* tiene la misma definición que el *FIGHA operator*. El *AFIGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DFIGHA* (o *FIGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AFIGHA operator*.

El operador *FIGHA* verifica las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sugieren sustituir los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media generalizada híbrida borrosa. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal, como por ejemplo, variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc.

Si se estudian diferentes casos particulares del vector de ponderaciones, se podrían obtener entre otros, todos los casos particulares del operador *FIGOWA*. Para ello, se tendría que fijar el vector de ponderaciones $\omega_i = 1/n$, de forma que el *FIGHA* se convierta en el *FIGOWA operator*. A partir de aquí, simplemente consistiría en estudiar los casos particulares comentados en el capítulo 5.3.2.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos en donde se utilizan las mismas técnicas comentadas para el operador *FIGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podría obtener el máximo híbrido borroso, el mínimo híbrido borroso, la media generalizada híbrida borrosa, la media ponderada generalizada híbrida borrosa, el operador *FGHA*, el *step-FIGHA operator*, el *window-FIGHA operator*, el *olympic-FIGHA operator*, la mediana *FIGHA*, la mediana ponderada *FIGHA*, el *E-Z FIGHA weights*, el *S-FIGHA operator*, la ponderación *FIGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FIGHA weights*, el *Gaussian-FIGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *FIHA*, el operador *FIHGA*, el operador *FIHHA*, el operador *FIHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *FIHQA*, se podría obtener el máximo borroso, el mínimo borroso, la media cuadrática borrosa (*FQM*), la media cuadrática ponderada borrosa (*FWQM*), el *FHQA operator*, el *step-FIHQA operator*, el *window-FIHQA operator*, el *olympic-FIHQA operator*, la mediana *FIHQA*, la mediana ponderada *FIHQA*, el *E-Z FIHQA weights*, el *S-FIHQA operator*, la ponderación *FIHQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-FIHQA weights*, el *Gaussian-FIHQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *FIHQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *FIHA*, *FIHGA* y *FIHHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *FIGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-FIHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función *Quasi-FIGHA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un *Quasi-FIHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-FIHA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, ..., \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(\tilde{b}_j)\right) \tag{5.184}$$

donde $\tilde{b}_j$ es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), del par *FOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{a}_i$ es la variable del argumento expresada mediante NB. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{a}_i$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{b}_j^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{b}_j)$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *FIGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas generalizan a las medias generalizadas.

5.4.5. Otras extensiones de nivel 3 en los *GOWA operators*

Además de las extensiones comentadas, cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel 3. Por ejemplo, se podría destacar el *induced linguistic nonmonotonic GOWA* (*ILNOMGOWA*) *operator*, el *uncertain induced nonmonotonic GOWA* (*UINOMGOWA*) *operator*, el *fuzzy induced nonmonotonic GOWA* (*FINOMGOWA*) *operator*, el *UIGOWA* con t-normas (*t-UIGOWA*), el *Majority Additive UIGOWA*, y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar las extensiones de nivel 3 a los operadores *GOWA* en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, en el método de minimización del coste de Savage, en el *AHP*, en los métodos de decisión basados en distancias o en índices de selección, etc.

5.5. Extensiones de nivel N en los GOWA operators

5.5.1. *Uncertain induced linguistic generalized hybrid averaging*

El *uncertain induced linguistic generalized hybrid averaging* (*UILGHA*) es una extensión de nivel 4 a los operadores *GOWA* en la cual se utilizan variables de ordenación inducidas en agregaciones híbridas entre la media ponderada lingüística incierta y la media ponderada ordenada lingüística incierta. Una característica fundamental de este modelo es la utilización de información lingüística incierta expresada mediante intervalos de confianza lingüísticos. En este operador se supone que la incertidumbre es extremadamente elevada hasta el punto de que la información disponible se puede considerar mínima. Esta extensión permite considerar procesos de decisión en donde el carácter del decisor es más complejo que su grado de optimismo. Además, el operador *UILGHA* generaliza a una amplia gama de operadores híbridos entre los cuales se encuentran el operador *UILHA*, el *uncertain induced linguistic hybrid geometric averaging* (*UILHGA*), el *uncertain induced linguistic hybrid harmonic averaging* (*UILHHA*), el *uncertain induced linguistic hybrid quadratic averaging* (*UILHQA*), etc.

Cabe destacar la posibilidad de utilizar diferentes modelos lingüísticos para tratar el problema. En este apartado se utilizará el modelo de Xu (2004a) aunque también se tendría que destacar a otros modelos como por ejemplo el de Herrera y Martínez (2000a). En el caso de utilizar este último modelo, el operador lingüístico pasaría a denominarse *2-tuple uncertain induced generalized hybrid averaging* (*2-TUIGHA*). También cabe tener en cuenta la posibilidad de utilizar diferentes tipos de intervalos de confianza lingüísticos. Por ejemplo, se podría utilizar tripletas de confianza lingüísticas, cuádruplos de confianza lingüística, etc. Teniendo en cuenta los conceptos básicos sobre los intervalos de confianza y las variables lingüísticas explicados en el Capítulo 4.2.5. y 4.2.2., respectivamente, se puede definir el operador *UILGHA* de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas imprecisas. Una función $UILGHA: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ es un *UILGHA operator* de dimensión *n* si tiene un vector asociado *W* de dimensión *n* tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$UILGHA(\langle u_1, \tilde{S}_{\alpha_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{S}_{\alpha_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{S}_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5.185}$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el valor $\bar{S}_{\alpha_i}$ ($\bar{S}_{\alpha_i} = n\omega_i \tilde{S}_{\alpha_i}$, i = 1,2,…,n), del par *LOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{S}_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{S}_{\alpha_i}$ es la variable del argumento lingüístico incierto, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{S}_{\alpha_i}$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1.

Cabe destacar que en este caso no es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos en el proceso de reordenación de argumentos lingüísticos inciertos ya que la ordenación se desarrolla a partir de las variables inducidas. En cambio, sí será necesario en el caso de que las variables inducidas sean intervalos de confianza. Además, también se debe recurrir a un criterio de ordenación en los resultados finales de las agregaciones ya que estos están expresados mediante intervalos de confianza. Por ejemplo, se podría recomendar como criterio de ordenación el comentado en el Capítulo 4.2.5.

También cabe señalar la posibilidad de considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como intervalos de confianza. Esta necesidad surge por la existencia de situaciones en donde el decisor no tiene muy definido su carácter actitudinal y necesita considerar varios grados de optimismo para poder tomar una decisión. Debido a que estos conceptos llevan implícitos muchos más problemas a la hora de estudiar el proceso de decisión, se dejará su análisis para la futura tesis doctoral.

En este operador, también se puede distinguir entre el *Descending UILGHA (DUILGHA) operator* y el *Ascending UILGHA (AUILGHA) operator*. En este caso, el proceso de reordenación descendente o ascendente se produce en las variables inducidas de ordenación. El *DUILGHA operator* tiene la misma definición que el *UILGHA operator*. El *AUILGHA operator* también se define de la misma forma pero tiene un orden ascendente. Es decir, las ponderaciones son $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j es el j-ésimo coeficiente del *DUILGHA* (o *UILGHA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AUILGHA operator*.

El operador *UILGHA* cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación por el mínimo y el máximo lingüístico. En el caso de empates en las variables de ordenación inducidas, se recomienda utilizar las ideas de Yager y Filev (1999), los cuales sustituyen los argumentos con variables inducidas empatadas por su valor medio. Cabe destacar que en este caso se tendría que utilizar la media generalizada híbrida lingüística incierta. Además, también se podrían utilizar diferentes expresiones en las variables inducidas con la única condición de tener un orden lineal, como por ejemplo, variables lingüísticas, intervalos de confianza, NB, etc.

Como se ha comentado previamente, el operador *UILGHA* abarca tanto al *ULWGM* como al *UILGOWA operator*. El *UILGHA* se convierte en el *ULWGM* cuando todas las ponderaciones w_j valen $1/n$, para todo j. Por otro lado, el *UILGHA* se transforma en el *UILGWA* cuando todas las ponderaciones ω_i valen $1/n$, para todo i. Además, también resulta interesante considerar que si la ordenación de las variables inducidas coincide con la ordenación de los argumentos lingüísticos inciertos, el operador *UILGHA* se convierte en el operador *ULGOWA*. Obsérvese que este último caso también puede ser visto como un caso particular del *ULGHA*, el cual aparece cuando la ordenación de las variables inducidas y de los argumentos coincide.

Otra amplia gama de casos particulares son aquellos que utilizan la misma metodología que en los operadores *UILGOWA* pero sin fijar el vector de ponderaciones ω_i. De esta forma, se podrá obtener el máximo híbrido lingüístico incierto, el mínimo híbrido lingüístico incierto, la media generalizada híbrida lingüística incierta, la media ponderada generalizada híbrida lingüística incierta, el operador *ULGHA*, el *step-UILGHA operator*, el *window-UILGHA operator*, el *olympic-UILGHA operator*, la mediana *UILGHA*, la mediana ponderada *UILGHA*, el *E-Z UILGHA weights*, el *S-UILGHA operator*, la ponderación *UILGHA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UILGHA weights*, el *Gaussian-UILGHA weights*, y muchos otros más.

Por otro lado, si se estudian diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ, se podría obtener el operador *UILHA*, el operador *UILHGA*, el operador *UILHHA*, el operador *UILHQA* y todas sus respectivas variantes. Por ejemplo, con el operador *UILHQA*, se podría obtener el máximo lingüístico incierto, el mínimo lingüístico incierto, la media cuadrática lingüística incierta (*ULQM*), la media cuadrática ponderada lingüística incierta (*ULWQM*), el *ULHQA operator*, el *step-UILHQA operator*, el *window-UILHQA operator*, el *olympic-UILHQA operator*, la mediana *UILHQA*, la mediana ponderada *UILHQA*, el *E-Z UILHQA weights*, el *S-UILHQA operator*, la ponderación *UILHQA* que depende de los objetos agregados, el *centered-UILHQA weights*, el *Gaussian-UILHQA weights*, y muchos otros más. De forma similar a como se ha comentado en el operador *UILHQA*, se podrían estudiar los diferentes casos particulares de los operadores *UILHA*, *UILHGA* y *UILHHA*.

Finalmente, cabe destacar la posibilidad de formular una generalización mayor al operador *ILGHA* a través de utilizar medias cuasi-aritméticas lingüísticas. En este caso, al operador obtenido se le denomina *Quasi-UILHA operator* y se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea $\tilde{S}$ el conjunto de las variables lingüísticas imprecisas. Una función $Quasi-UILHA: \tilde{S}^n \rightarrow \tilde{S}$ es un *Quasi-UILHA operator* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y

$$Quasi-UILHA(\langle u_1, \tilde{S}_{\alpha_1}\rangle, ..., \langle u_n, \tilde{S}_{\alpha_n}\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(\tilde{S}_{\beta_j})\right) \tag{5.186}$$

donde $\tilde{S}_{\beta_j}$ es el valor $\bar{S}_{\alpha_i}$ ($\bar{S}_{\alpha_i} = n\omega_i \tilde{S}_{\alpha_i}$, i = 1,2,…,n), del par *ULOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i ($i \in N$), u_i en $\langle u_i, \tilde{S}_{\alpha_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\tilde{S}_{\alpha_i}$ es la variable del argumento lingüístico incierto. Cabe destacar que $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $\tilde{S}_{\alpha_i}$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1. Como se puede observar, se sustituye $\tilde{S}_{\beta_j}^{\lambda}$ por una función general monótona estrictamente continua $g(\tilde{S}_{\beta_j})$.

Cabe señalar que en este caso también es posible distinguir entre ordenaciones descendentes y ascendentes. Además, todos los casos particulares comentados en el operador *UILGHA* están incluidos en esta generalización ya que las medias cuasi-aritméticas lingüísticas inciertas generalizan a las medias generalizadas lingüísticas inciertas.

5.5.2. Otras extensiones de nivel *N* en los *GOWA operators*

Además de esta extensión, cabe destacar la existencia de otro gran número de extensiones de nivel N. Por ejemplo, se podría destacar el *uncertain induced linguistic nonmonotonic GOWA* (*UILNOMGOWA*) *operator*, el *uncertain induced nonmonotonic generalized hybrid averaging (UINOMGHA*) *operator*, el *fuzzy induced nonmonotonic generalized hybrid averaging (FINOMGHA*) *operator*, el *UILGOWA* con t-normas (*t-UILGOWA*), el *Majority Additive UILGOWA*, y muchos más.

Por otro lado, también se debe tener en cuenta la posibilidad de utilizar las extensiones de nivel N a los operadores *GOWA* en otros métodos de decisión como por ejemplo, en la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, en el método de minimización del coste de Savage, en el *AHP*, en los métodos de decisión basados en distancias o en índices de selección, etc.

6. Operadores *OWA* en la noción de distancia

6.1. Introducción

6.1.1. Aspectos introductorios

En los modelos tradicionales de distancias, se suele utilizar ponderaciones simples o basadas en medias ponderadas que reflejan la importancia de cada característica en el problema. No obstante, en muchos casos puede que esta ponderación no sea suficiente. Puede que se necesite de otro tipo de media que permita englobar a un mayor número de casos. Por ejemplo, esto se puede conseguir con la utilización de los operadores OWA. La utilización de los operadores OWA permite obtener una amplia gama de distancias parametrizadas entre la distancia mínima y la distancia máxima del problema. De esta forma, en función de los intereses del análisis, se podrá dar una mayor importancia a las distancias menores o mayores del problema según el tipo de ponderaciones utilizado en el problema. Tomando como punto de partida la distancia media simple, se puede decir que la utilización de los operadores OWA permite la infravaloración o sobrevaloración de dicha distancia según los intereses de quien analiza el problema.

De entre la gran variedad de distancias disponibles principalmente podemos destacar la distancia de Hamming, la distancia de Euclides, la de Minkowski y la distancia cuasi-aritmética. Cabe destacar la existencia de otra amplia gama de distancias que a pesar de no estudiarse directamente, un gran número de casos quedará englobado dentro de la distancia cuasi-aritmética. A partir de estas distancias, se desarrollará un gran número de nuevas distancias a través de utilizar distintos tipos de operadores OWA. En resumen, podemos decir que todos los operadores OWA comentados en los capítulos 4 y 5, pueden ser utilizados para formar nuevas medidas de distancia. Para no entrar en una excesiva redundancia, se estudiarán con cierto detalle únicamente los casos más básicos. Mientras que para el resto de casos, simplemente se mostrará su formulación básica y algunos aspectos fundamentales.

A continuación, se muestra un pequeño esquema con las principales distancias que se utilizarán en este tema. Obviamente, dentro de estos casos existe una gran variedad de casos particulares obtenidos de una forma similar a como se ha comentado en los capítulos 4 y 5. Este esquema se presenta a partir del *Minkowski* (o *generalized*) *OWA distance* (*MOWAD*) *operator* pero también se podría desarrollar con el *quasi-arithmetic OWA distance* (*Quasi-OWAD*) *operator*.

Nuevas distancias presentadas en este capítulo:

- *MOWAD operator*: *Induced MOWAD*, *Linguistic MOWAD*, *Uncertain MOWAD*, *Fuzzy MOWAD*, *Hybrid MOWAD*, *Induced Linguistic MOWAD*, *Uncertain Induced MOWAD*, *Fuzzy Induced MOWAD*, *Uncertain Linguistic MOWAD*, etc.

- *Quasi-OWAD operator*: *Induced Quasi-OWAD*, *Linguistic Quasi-OWAD*, *Uncertain Quasi-OWAD*, *Fuzzy Quasi-OWAD*, *Hybrid Quasi-OWAD*, *Induced Linguistic Quasi-OWAD*, *Uncertain Induced Quasi-OWAD*, *Fuzzy Induced Quasi-OWAD*, etc.

Para cada uno de estos casos, se analizarán diferentes casos particulares. En resumen, para cada nueva distancia propuesta, se analizarán los siguientes casos particulares. Obsérvese que se podrían utilizar muchos otros casos particulares a partir de los diferentes estudios existentes en la literatura sobre ponderaciones OWA o sobre medias generalizadas o cuasi-aritméticas.

A continuación, se muestran algunos de estos casos (a partir del MOWAD):

Vector de ponderaciones W	Parámetro λ
• Distancia máxima y mínima	• *OWAD operator*
• Distancia de Minkowski	• *OWGAD operator*
• *Step-MOWAD*	• *OWQAD operator*
• *Window-MOWAD*	• *OWHAD operator*
• *E-Z MOWAD*	• Etc.
• *Olympic-MOWAD*	
• *Median-MOWAD*	
• *Centered-MOWAD*	
• *S-MOWAD* (*orlike, andlike and generalized*)	
• *Maximal Entropy MOWAD*	
• Etc.	

Para más información sobre el funcionamiento de estas familias y otras se puede consultar la metodología original desarrollada por los operadores OWA simples como por ejemplo en (Amin, 2007; Amin y Emrouznejad, 2006; Ahn, 2006; 2007; 2008; Ahn y Park, 2008; Beliakov, 2005; Carlsson et al., 2003b; Emrouznejad, 2008; Hong, 2006; Liu, 2006; 2007; 2008; 2009; Liu y Han, 2008; Llamazares, 2008; Merigó y Gil-Lafuente, 2008e; Wang et. al, 2007; Wang y Parkan, 2005; 2007; Wu et. al, 2007; Xu, 2005; 2006d; 2008a; Yager, 1993; 1994; 1996a; 1996b; 1999; 2003a; 2007a; 2007b; Yager y Filev, 1994).

Obsérvese que también se podrían considerar otras extensiones a las medidas de distancia a través de otros operadores similares a los OWA como es por ejemplo, la integral de Choquet. A partir de la integral de Choquet, se podría definir el uso de dicha integral en las diferentes medidas de distancia. También sería posible definir una medida de distancia a partir de la integral de Choquet inducida (Yager, 2002) y a partir de una generalización mayor a través de utilizar en las medidas de distancia con la integral de Choquet, medias generalizadas o cuasi-aritméticas y variables inducidas. Esta generalización se le podría denominar como *Induced generalized Choquet integral distance* o *Induced quasi-arithmetic Choquet integral distance*. Obsérvese que se espera que estas ideas puedan publicarse en trabajos postdoctorales futuros.

Otro aspecto introductorio fundamental es el analizar la aplicabilidad de estas nuevas medidas de distancia. En general, se puede decir que tiene una aplicabilidad similar a las distancias clásicas. Es decir, puede aplicarse a la mayoría de problemas considerados con las distancias clásicas. Por ejemplo, podemos destacar las siguientes aplicaciones:

- Distancias entre elementos u objetos en general.

- Distancias entre conjuntos (subconjuntos) borrosos, Φ - borrosos, borrosos intuicionistas, borrosos de tipo 2.
- Distancias entre intervalos de confianza (tripletas, cuádruplos, etc.), entre números borrosos (triangulares, trapezoidales, Φ - borrosos, generalizados, de tipo 2, generalizados Φ - borrosos, etc.), entre variables lingüísticas (simples, de 2-tuplas, generalizadas, generalizadas con números Φ - borrosos, etc.).
- Problemas estadísticos.
- Problemas de teoría de la decisión (individual, de grupo, etc.).
- Problemas de selección en general.
- Problemas de asignación en general.
- Problemas de agrupación en general.
- Problemas en la gestión de empresas como por ejemplo:
    - Gestión de recursos humanos (selección, asignación, agrupación, etc.).
    - Gestión financiera.
    - Gestión estratégica.
    - Gestión comercial.
    - Gestión de productos en general.
    - Otros problemas empresariales.
- Otros problemas de las ciencias en general.
- Etc.

6.1.2. *OWA distance operator*

6.1.2.1. Introducción

El *ordered weighted averaging distance* (*OWAD*) *operator* es un operador que introduce el operador OWA en la medida de distancia simple, es decir, en la distancia de Hamming. De esta forma, se consigue un nuevo tipo de distancia que parametriza un gran número de distancias comprendidas entre la distancia máxima y la distancia mínima. Básicamente, lo que se consigue a través de utilizar el operador OWA es la posibilidad de sobrevalorar o infravalorar la distancia de Hamming normalizada en función del vector de ponderaciones. Se puede definir de la siguiente forma

Definición: Una función *OWAD*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es un operador OWAD de dimension n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0,1]$ tal que:

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{6.1}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, y $k = 1, 2,\ldots, m$.

Obsérvese que esta definición puede ser generalizada a todos los número reales R a través de utilizar OWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$. Obsérvese también que desde un punto de vista general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending OWAD* (*DOWAD*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending OWAD* (*AOWAD*) *operator*.

Si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados D_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador OWAD puede ser expresado como:

$$OWAD(P,P_k) = W^T B \tag{6.2}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador OWAD se puede expresar de la siguiente forma:

$$OWAD(P,P_k) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{6.3}$$

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{6.4}$$

Se puede demostrar que $\alpha \in [0, 1]$. A mayor parte de la ponderación concentrada en la parte inicial de W, más cerca estará α de 1 y a mayor parte de dicha ponderación en la parte final de W, más cerca estará α de 0.

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{6.5}$$

Esta medida puede ser utilizada para medir la cantidad de información utilizada en el problema. Por ejemplo, si $w_j = 1$ para algún j, entonces $H(W) = 0$, y la cantidad de información utilizada es mínima.

Además de estas dos medidas, también se podrían considerar otras medidas de forma similar a como se he explicado en los capítulos 4 y 5. Entonces, se podrían destacar la medida de balance del vector de ponderaciones W y la medida de divergencia de W.

También se puede observar como el operador OWAD cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Otras propiedades a destacar en el operador OWAD es aquella que dice que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, entonces, $d(X, Y) = 0$. Obsérvese también que $d(X, Y) = d(Y, X)$.

Los operadores OWAD basados en la distancia de Hamming pueden ser extendidos a diferentes extensiones de los OWA de una forma similar a como se ha hecho en el capítulo 4. Como en el apartado 6.2. se va estudiar el operador OWAD generalizado a través de la distancia de Minkowski y la distancia cuasi-aritmética, los cuales incluyen al operador OWAD como un caso particular, el análisis de dichas extensiones se realizará a partir de estas generalizaciones. De esta forma, se podrían destacar diferentes extensiones de los OWAD como son el operador OWAD inducido (Merigó y Casanovas, 2008r), el lingüístico (Merigó y Casanovas, 2008o), el heavy, el híbrido, el incierto, el borroso, etc.

6.1.2.2. Tipos de *OWAD* operators

A continuación se van a estudiar diferentes casos particulares de operadores *OWAD*. Básicamente, se estudiarán diferentes casos particulares a través de escoger diferentes expresiones en el vector de ponderaciones. Obsérvese que estos resultados se pueden conseguir con el *DOWAD* o el *AOWAD operator*. Debido a que estos operadores están totalmente relacionados a través de $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación del *DOWAD* (o *OWAD*) *operator* y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación del *AOWAD operator*, únicamente se considerará el caso genérico con operadores *OWAD*. Por ejemplo, se puede obtener la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia relativa o normalizada de Hamming y la distancia ponderada de Hamming.

La distancia máxima se consigue si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. La distancia mínima se obtiene si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La distancia relativa de Hamming se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo d_i. La distancia ponderada de Hamming se consigue cuando la ordenación de los d_i coincide con la ordenación de los b_j*.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *OWAD* son el *step-OWAD operator*, el *window-OWAD operator*, el *olympic-OWAD operator*, la mediana *OWAD*, la mediana ponderada *OWAD*, el *E-Z OWAD weights*, el *S-OWAD operator*, las ponderaciones que dependen de los argumentos (distancias individuales entre objetos), el *centered-OWAD operator* y el *Gaussian OWAD weights*, entre otros.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene el *step-OWAD operator*. Cabe destacar que el *step-OWAD operator* se convierte en la distancia máxima si $k = 1$ y en la distancia mínima si $k = n$.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-OWAD operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-OWAD operator* se convierte en la distancia máxima si $m = k = 1$, en la distancia mínima si $m = 1$, $k = n$, y en la distancia relativa de Hamming si $m = n$ y $k = 1$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se obtiene el *olympic OWAD average*. El *olympic-OWAD average* se transforma en la distancia mediana si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-OWAD operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

De forma general, la distancia mediana se obtiene de la siguiente forma. En primer lugar se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos d_i. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande d_i.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la distancia mediana ponderada. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los d_i tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otro tipo de agregación que puede ser utilizado es el *E-Z OWAD weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene la distancia máxima y si $k = n$, la distancia relativa de Hamming. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue la distancia máxima y si $k = n$, la distancia relativa de Hamming.

Otra familia interesante de operadores *OWAD* es el *S-OWAD operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-OWAD operator*. El *orlike S-OWAD operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la distancia relativa de Hamming y si $\alpha = 1$, se obtiene la distancia máxima. El *andlike S-OWAD operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-OWAD*, si $\beta = 0$ se obtiene la distancia relativa de Hamming y si $\beta = 1$, se obtiene la distancia mínima. Finalmente, el *generalized S-OWAD operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-OWAD operator* se convierte en el *andlike S-OWAD operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-OWAD operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-OWAD operator* se transforma en la distancia según el criterio de Hurwicz.

Otro caso particular de operador *OWAD* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-OWAD operator*.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{6.6}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es la j-ésima distancia individual más grande de los argumentos d_i. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la distancia relativa de Hamming y si $\alpha = \infty$, se obtiene la distancia máxima. Otra familia de *OWAD operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1-b_j)^{\alpha}} \tag{6.7}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es la j-ésima distancia individual más grande de los argumentos d_i. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la distancia relativa de Hamming y si $\alpha = \infty$, se obtiene la distancia mínima. Un tercer tipo de operadores *OWAD* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^{\alpha}} \tag{6.8}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es la j-ésima distancia individual más grande de los argumentos d_i. En este caso también se obtiene la distancia relativa de Hamming si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$, se obtiene la distancia harmónica y si $\alpha = \infty$, se obtiene la distancia mínima.

En el caso de los operadores *OWAD*, también se puede aplicar la metodología de Filev y Yager (1998), los cuales sugirieron otros dos métodos para determinar las ponderaciones *OWAD*. Para el primer método, las ponderaciones se expresan de la siguiente forma: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se consiguen como: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otro tipo de operador *OWAD* es el *centered OWAD weights*. Este tipo de operador dice que un operador *OWAD* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered OWAD operator*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética incierta ya que todas sus ponderaciones son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered OWAD* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered OWAD* se le conoce como *non-inclusive centered OWAD operator*. En este tipo de *centered OWAD* se encuentra como caso particular la mediana incierta.

Un caso especial de *centered OWAD* es el *Gaussian OWAD weights*. Para poder definirlo, primero tenemos que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{6.9}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{6.10}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2} \tag{6.11}$$

Se pueden definir los *OWAD weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n} \eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}} \tag{6.12}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener los coeficientes es el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWAD*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] → [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *OWAD* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{6.13}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. La metodología a utilizar en los operadores *OWAD* es la misma que en los operadores *OWAD* ya que en ambos casos las ponderaciones son números precisos. A modo de resumen, se puede decir lo siguiente. Un primer método es aquel que calcula las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método es conocido como el *maximal entropy OWAD* (*MEOWAD*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j$$

$$\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \tag{6.14}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. Siguiendo a Filev y Yager (1995), en este caso también se puede desarrollar un método analítico para obtener las ponderaciones *MEOWAD* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Un segundo método consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *minimal variability OWAD weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{6.15}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in$ [0, 1]. Siguiendo a Fullér y Majlender (2003) se puede solucionar este problema a través de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker.

Un tercer método consiste en utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Este modelo se conoce como *maximal Rényi entropy OWAD weights*. La obtención de las ponderaciones se consigue a través de resolver el siguiente problema de programación paramétrica.

$$\text{maximizar: } H_\beta(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^\beta = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^\beta\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \tag{6.16}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\beta \in \Re$, y $\alpha \in$ [0, 1]. Cabe destacar que el *MEOWAD weights* es un caso particular de este último método cuando β=1.

Otra alternativa para obtener las ponderaciones consiste en minimizar la diferencia máxima entre dos ponderaciones adyacentes. Se denomina *minimax disparity OWAD weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{Minimizar: } \left\{ \underset{j\in\{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\} \tag{6.17}$$

$$\text{Sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que este método puede ser simplificado a un problema de programación lineal y resuelto por el método dual. También cabe mencionar la posibilidad de aplicar la propuesta de Liu (2005; 2006; 2007; 2008) para el caso de operadores *OWAD*.

6.2. Introducción al Minkowski OWA distance operator

6.2.1. Nociones básicas

El *Minkowski* o *generalized OWA distance* (*MOWAD o GOWAD*) *operator* es una generalización a la distancia de Hamming a través de utilizar medias generalizadas en el problema. La gran ventaja que ofrece es el poder abarcar a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destaca la distancia de Hamming y la distancia de Euclides. Se puede definir de la siguiente manera.

Definición: Una función *GOWAD*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \to [0, 1]$ es un operador OWAD de dimension n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$GOWAD(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.18}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, $k = 1, 2,\ldots, m$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar que esta definición puede ser extendida a todos los número reales R a través de utilizar GOWAD: $R^n \times R^n \to R$. Obsérvese también que desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending GOWAD* (*DGOWAD*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending GOWAD* (*AGOWAD*) *operator*.

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados D_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador GOWAD puede ser expresado como:

$$GOWAD(P,P_k) = W^T B \tag{6.19}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador GOWAD se puede expresar de la siguiente forma:

$$GOWAD(P,P_k) = \frac{1}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.20}$$

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.21}$$

Se puede demostrar que $\alpha \in [0, 1]$. A mayor parte de la ponderación concentrada en la parte inicial de W, más cerca estará α de 1 y a mayor parte de dicha ponderación en la parte final de W, más cerca estará α de 0.

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{6.22}$$

Esta medida puede ser utilizada para medir la cantidad de información utilizada en el problema. Por ejemplo, si $w_j = 1$ para algún j, entonces $H(W) = 0$, y la cantidad de información utilizada es mínima.

Otra medida que se puede utilizar en el GOWAD para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de tendencia hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* ($Bal(W)$) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{6.23}$$

Como se puede observar, $Bal(W) \in [-1, 1]$. Para el criterio optimista o también conocido como operador máximo obtenemos $Bal(W) = 1$. Para el criterio pesimista o operador mínimo se obtiene $Bal(W) = -1$. Para el criterio de Laplace o media aritmética se obtiene $Bal(W) = 0$.

Una cuarta medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de divergencia de W (Yager, 2002). En el caso del operador GOWAD se dice que esta medida resulta útil para aquellos casos en donde la medida de dispersión y el carácter actitudinal resultan incompletos. Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{6.24}$$

Como se puede observar, para el caso optimista y pesimista, $Div(W) = 0$. De forma general, podemos decir que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

También se puede observar como el operador GOWAD cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $d_i \geq e_i$ para todo i, entonces, $GOWAD(d_1,\ldots, d_n) \geq GOWAD(e_1,\ldots, e_n)$, siendo d_i y e_i las distancias individuales entre los dos conjuntos. Es idempotente porque si $d_i = d$, para todo i, entonces, $GOWAD(d_1,\ldots, d_n) = d$. Finalmente, es limitado porque $\min\{d_i\} \leq GOWAD(d_1,\ldots, d_n) \leq \max\{d_i\}$. Otras propiedades a destacar en el operador GOWAD es aquella que dice que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, entonces, $d(X, Y) = 0$. Obsérvese también que $d(X, Y) = d(Y, X)$.

6.2.2. Tipos de *GOWAD operators*

6.2.2.1. Análisis del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, se pueden obtener una amplia gama de casos particulares del operador *GOWAD*. Por ejemplo, se puede destacar el operador *OWAD*, el operador *OWGD*, el operador *OWHAD* y el operador *OWQAD* (o la distancia Euclidea OWA).

El operador *OWAD* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$GOWAD(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^1 \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{6.25}$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es el operador *OWAD*. Obsérvese que este resultado se puede conseguir mediante el operador *OWAD* y el operador *AOWAD* considerando la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWAD* (o *OWAD*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWAD operator*.

También cabe señalar que a partir de este resultado, se pueden utilizar todos los casos particulares comentados en el Capítulo 6.1.2.2 para los operadores *OWAD*. Es decir, se podría utilizar en la agregación la distancia máxima, la distancia mínima, la relativa de Hamming, la distancia ponderada de Hamming, el *olympic-OWAD*, el *window-OWAD*, el *S-OWAD*, etc.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *OWGD*.

$$GOWAD(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^0 \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} D_j^{w_j} \quad (6.26)$$

En este caso, también se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending OWGD* (*DOWGD*) *operator*) y ascendentes (*ascending OWGD* (*AOWGD*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWGD* (o *OWGD*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWGD operator*.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes casos particulares del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia relativa (o normalizada) geométrica (*GAD*), la distancia geométrica ponderada (*WGAD*), el *step-OWGD operator*, el *window-OWGD operator*, el *olympic-OWGD operator*, la mediana *OWGD*, la mediana ponderada *OWGD*, el *E-Z OWGD weights*, el *S-OWGD operator*, los operadores *OWGD* que dependen de los argumentos, el *centered-OWGD operator*, el *Gaussian-OWGD weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *OWQAD*.

$$GOWAD(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2} \quad (6.27)$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending OWQAD* (*DOWQAD*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending OWQAD* (*AOWQAD*) *operator*) a través de la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWQAD* (o *OWQAD*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWQAD operator*.

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *OWQAD* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia relativa cuadrática (o de Euclides), la distancia cuadrática ponderada (*WQD*), el *step-OWQAD operator*, el *window-OWQAD operator*, el *olympic-OWQAD operator*, la mediana *OWQAD*, la mediana ponderada *OWQAD*, el *E-Z OWQAD weights*, el *S-OWQAD operator*, los operadores *OWQAD* que dependen de los argumentos, el *centered-OWQAD operator*, el *Gaussian-OWQAD weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *OWHAD*.

$$GOWAD(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{-1} \right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{D_j}} \quad (6.28)$$

En el operador *OWHAD* también es posible distinguir entre el *descending OWHAD* (*DOWHAD*) *operator* y el *ascending OWHAD* (*AOWHAD*) *operator* a través de utilizar la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWHAD* (o *OWHAD*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWHAD operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes casos particulares como la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia relativa (o normalizada) harmónica (*HD*), la distancia harmónica ponderada (*WHD*), el *step-OWHAD operator*, el *window-OWHAD operator*, el *olympic-OWHAD operator*, la mediana *OWHAD*, la mediana ponderada *OWHAD*, el *E-Z OWHAD weights*, el *S-OWHAD operator*, los operadores *OWHAD* que dependen de los argumentos, el *centered-OWHAD operator*, el *Gaussian-OWHAD weights*, y muchos otros más.

6.2.2.2. Análisis del vector de ponderaciones *W*

A través de escoger una diferente expresión en el vector de ponderaciones se pueden obtener un gran número de casos particulares de operadores *GOWAD*. Entre ellos, se destaca la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia relativa generalizada (o de Minkowski), la distancia ponderada generalizada, y la distancia según el criterio de Hurwicz. Estos resultados y los que se estudiarán posteriormente pueden ser obtenidos mediante el operador *DGOWAD* o mediante el operador *AGOWAD*. Estos dos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DGOWAD* (o *GOWAD*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AGOWAD operator*. Como la relación entre el operador *GOWA* y *AGOWA* es directa, para el resto de casos particulares únicamente se considerará el caso con operadores *GOWAD*. Obviamente, la obtención del operador *AGOWAD* es automática mediante la relación anterior.

En el operador *GOWAD*, la distancia máxima se obtiene si $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. La distancia mínima se consigue si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. La distancia relativa generalizada se forma cuando $w_j = 1/n$, para todo D_i. La distancia ponderada generalizada se consigue cuando la ordenación de los d_i coincide con la ordenación de los D_j. Finalmente, la distancia según el criterio de Hurwicz generalizado se forma cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *GOWAD* son el *step-GOWAD operator*, el *window-GOWAD operator*, el *olympic-GOWAD operator*, la mediana *GOWAD*, la mediana ponderada *GOWAD*, el *E-Z GOWAD weights*, el *S-GOWAD operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos agregados, el *centered-GOWAD operator* y el *Gaussian-GOWAD weights*, entre otros.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se consigue, el *step-GOWAD operator*. Cabe destacar que el *step-GOWAD operator* se convierte en la distancia máxima si $k = 1$, en la distancia mínima si $k = n$, y en la distancia mediana *GOWAD* si $k = (n+1)/2$ y el número de argumentos es impar.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-GOWAD operator*. En este caso, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. Obsérvese que el *window-GOWAD operator* se convierte en la distancia máxima si $m = k = 1$, en la distancia mínima si $m = 1$, $k = n$, y en la distancia relativa generalizada si $m = n$ y $k = 1$. También se puede obtener la mediana *GOWAD* de la siguiente forma: si el número de argumentos es impar, $k = (n+1)/2$ y $m = 1$ y cuando es par, $k = n/2$ y $m = 2$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se consigue el *olympic-GOWAD average*. El *olympic-GOWAD operator* se transforma en la mediana *GOWAD* si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-GOWAD operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$. Obsérvese que también es posible formular un caso más general de *olympic-GOWAD operator* (Liu, 2009).

Para la mediana *GOWAD* se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos d_i. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande d_i.

Otra alternativa similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada *GOWAD*. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los d_i tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otra familia interesante de operadores *GOWAD* es el *S-GOWAD operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-GOWAD operator*. El *orlike S-GOWAD operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, y $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ para $j = 2$ hasta n con $\alpha \in [0, 1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la distancia relativa generalizada y si $\alpha = 1$, se obtiene la distancia máxima. El *andlike S-GOWAD operator* se obtiene cuando $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ y $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ para $j = 1$ hasta $n - 1$ con $\beta \in [0, 1]$. En este tipo de *S-GOWAD*, si $\beta = 0$ se obtiene la distancia relativa generalizada y si $\beta = 1$, se obtiene la distancia mínima. Finalmente, el *generalized S-GOWAD operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-GOWAD operator* se convierte en el *andlike S-GOWAD operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-GOWAD operator*. También cabe señalar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-GOWAD operator* se transforma en la distancia según el criterio de Hurwicz generalizado.

Otro caso particular de operadores *GOWAD* es el *E-Z GOWAD weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe destacar que si $k = 1$, se obtiene la distancia máxima y si $k = n$, la distancia relativa generalizada. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe señalar que si $k = 1$, se consigue la distancia mínima y si $k = n$, la distancia relativa generalizada.

Otro tipo de operador *GOWAD* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados, es decir, de las distancias individuales entre los conjuntos considerados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-GOWAD operator*.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{6.29}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos d_i. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene la distancia relativa generalizada y si $\alpha = \infty$, se obtiene la distancia máxima. Otra familia de *GOWAD operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1-b_j)^{\alpha}} \tag{6.30}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos d_i. En este caso, también se observa que si $\alpha = 0$, se obtiene la distancia relativa generalizada y si $\alpha = \infty$, se obtiene la distancia mínima. Un tercer tipo de operadores *GOWAD* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{6.31}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos d_i. En este caso también se obtiene la distancia relativa generalizada si $\alpha = 0$, y si $\alpha = \infty$, se obtiene la distancia mínima.

Siguiendo con la metodología de Filev y Yager (1998), se pueden desarrollar dos métodos más para determinar las ponderaciones *GOWAD*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otra tipo de operador *GOWAD* es aquel conocido como el *centered-GOWAD weights*. Este tipo de operador dice que un operador *GOWAD* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$. Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se denominan *softly decaying centered-GOWAD operator*. Un caso particular de este último tipo es la distancia relativa generalizada ya que todos sus coeficientes son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular de *centered-GOWAD* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered-GOWAD* se le conoce como *non-inclusive centered-GOWAD operator*. En este tipo de *centered-GOWAD* se encuentra como caso particular la distancia mediana generalizada.

Un caso especial de *centered-GOWAD* es el *Gaussian-GOWAD weights*. Para poder definirlo, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana η(μ, σ) donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{6.32}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{6.33}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{6.34}$$

Se pueden definir los *GOWAD weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{6.35}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones *GOWAD* es a través de utilizar el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] → [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *GOWAD* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{6.36}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar medidas que caracterizan las ponderaciones como el carácter actitudinal y la medida de dispersión. Entonces, si se desarrolla el *maximal entropy GOWAD* (*MEGOWAD*) *weights* se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{6.37}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se utiliza el *minimal variability GOWAD weights*, su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{6.38}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se resuelve el problema del cálculo de las ponderaciones mediante el *maximal Rényi entropy GOWAD weights*, el resultado es el siguiente:

$$\text{maximizar: } H_{\beta}(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} = \log_2 \left(\sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta}\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{6.39}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Por último, se puede destacar la posibilidad de calcular las ponderaciones mediante el *minimax disparity GOWAD weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{6.40}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Cabe señalar la posibilidad de utilizar otra amplia gama de métodos para obtener las ponderaciones. De forma orientativa, se puede decir que la mayoría de los métodos desarrollados para los operadores *OWA,* también son aplicables a muchas de sus extensiones como en este caso el operador *GOWAD*. (Ahn, 2006; 2007; 2008; Ahn y Park, 2008; Amin, 2007; Amin y Emrouznejad, 2006; Beliakov, 2005; Emrouznejad, 2008; Hong, 2006; Liu, 2006; 2007, 2008; 2009; Liu y Han, 2008; Troiano y Yager, 2005; Wang y Parkan, 2005; 2007, Wang et al., 2007; Wu et al., 2007; Xu, 2005; 2006d; 2008a; Yager, 1988; 1993; 1994; 1996; 1999; 2002; 2007a; 2007b; Zarghami y Szidarovsky, 2008; Zarghami et al., 2008).

6.2.3. *Quasi-OWAD operator*

Otro aspecto de gran importancia al estudiar modelos generalizados sobre los operadores *OWAD* es la utilización de medias cuasi-aritméticas. En este caso, el operador *GOWAD* se convierte en el *Quasi-OWAD operator* a través de sustituir el parámetro λ por una función monótona estrictamente continua $g(b)$. Obsérvese que las distancias cuasi-aritméticas incluyen a las distancias generalizadas como un caso particular y abarcan muchos otros casos. Cabe destacar que este operador ha sido propuesto por Merigó y A.M. Gil-Lafuente (2009a) y se define de la siguiente forma.

Definición: Una función *QOWAD*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ es un operador Quasi-OWAD de dimension n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QOWAD(P,P_k) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(D_j)\right) \tag{6.41}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, $k = 1, 2,\ldots, m$ y g(D) es una función monótona estrictamente continua.

Obsérvese que la principal diferenta entre el Quasi-OWAD y el GOWAD está en que se sustituye el parámetro λ por una función monótona estrictamente creciente. Cabe destacar que esta definición puede ser extendida a todos los número reales R a través de utilizar QOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$. Obsérvese también que desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes.

El operador *Quasi-OWAD* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$QOWAD(P,P_k) = g^{-1}\left(W^T D\right) \tag{6.42}$$

En esta expresión, W es el vector *Quasi-OWAD* de ponderaciones asociado con la agregación, y D es el vector argumento ordenado donde el j-ésimo componente en D es $g(D_j)$ siendo este el j-ésimo más grande de los d_i.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador *Quasi-OWAD* se puede expresar de la siguiente forma:

$$QOWAD(P,P_k) = \frac{1}{W} g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(D_j) \right) \tag{6.43}$$

Otro hecho a resaltar son las medidas para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *Quasi-OWAD*, el carácter actitudinal quasi-aritmético $\alpha(W)$ se puede formular de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1} \right) \right) \tag{6.44}$$

Para la medida de dispersión y de balance se obtienen los mismos resultados que en el operador *Quasi-OWDA*. En cambio, para la medida de divergencia se obtiene lo siguiente.

$$Div(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \right) \right) \tag{6.45}$$

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, tenemos que distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Para ordenaciones descendentes tenemos el *Descending Quasi-OWAD (Quasi-DOWAD) operator* y para ordenaciones ascendentes tenemos el *Ascending Quasi-OWAD (Quasi-AOWAD) operator*. Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DOWAD* y *Quasi-AOWAD* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DOWAD* (o *Quasi-OWAD*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AOWAD operator*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-OWAD* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *GOWAD* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se pueden obtener la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia normalizada cuasi-aritmética, la distancia ponderada cuasi-aritmética, el operador *OWAD*, el operador *OWGD*, el operador *OWQAD*, el operador *OWHAD*, la distancia según el criterio de Hurwicz cuasi-aritmético, la distancia mediana cuasi-aritmética, el *step-Quasi-OWAD operator*, el *window-Quasi-OWAD operator*, el *olympic-Quasi-OWAD operator*, el *E-Z Quasi-OWAD weights*, el *S-Quasi-OWAD operator*, los operadores *Quasi-OWAD* que dependen de los argumentos, el *centered-Quasi-OWAD operator*, el *Gaussian-Quasi-OWAD weights*, el *ME-Quasi-OWAD operator*, y mucho otros más.

6.2.4. Ejemplo numérico: selección de estrategias

A continuación, se muestra un ejemplo numérico de este operador. Se estudiarán diferentes casos particulares de operadores GOWAD o Quasi-OWAD. Se analizará un problema de decisiones en la selección de estrategias. Obsérvese que la selección de estrategias es muy amplia y puede ir dirigida en muchos sentidos.

Supongamos que una empresa está considerando su estrategia general para el año que viene y están pensando en algunos cambios con objeto de incrementar los beneficios. Después de analizarlos con el grupo de expertos, se considera la posibilidad de incrementar sus operaciones a otros continentes. En la actualidad opera en Europa y América del Norte. Se consideran las siguientes estrategias:

- S_1: Expandirse al continente asiático.
- S_2: Expandirse al continente sudamericano.
- S_3: Expandirse al continente africano.
- S_4: Expandirse a los 3 continentes.
- S_5: No realizar ninguna expansión.

Después de un análisis detallado de la información, los expertos de la empresa establecen la siguiente información en cuanto a las estrategias. Obsérvese que los resultados son valuaciones en [0, 1].

Tabla. Características de las estrategias

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	0.5	0.7	0.8	0.6	0.5
S_2	0.8	0.9	0.2	0.4	0.5
S_3	0.5	0.7	0.6	0.3	0.7
S_4	0.7	0.9	0.6	0.2	0.6
S_5	0.2	0.7	0.8	0.7	0.5

De acuerdo con los objetivos y políticas de la empresa, los expertos establecen la estrategia ideal para la empresa independientemente de las estrategias disponibles.

Tabla. Estrategia ideal

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	0.9	1	0.9	0.9	0.8

A partir de esta información, se elabora el proceso de agregación. En este caso, debido a que el operador GOWAD es un operador que generaliza a un gran número de casos particulares, se analizarán diferentes resultados obtenidos mediante diferentes tipos de operadores GOWAD. En primer lugar, se consideran los resultados obtenidos con la distancia relativa y ponderada de Hamming, y con la distancia relativa y ponderada de

Euclides. Obsérvese que se utilizará el vector de ponderaciones siguiente: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Los resultados son los siguientes:

Tabla. Resultados agregados 1

	NDH	*NED*	*WHD*	*WED*
S_1	0.28	0.29	0.27	0.28
S_2	0.34	0.41	0.36	0.42
S_3	0.34	0.37	0.31	0.35
S_4	0.3	0.36	0.3	0.36
S_5	0.32	0.38	0.28	0.32

Como se puede observar, la mejor alternativa mediante estos cuatro casos es la estrategia S_1 porque tiene la menor distancia.

A continuación, se consideran los resultados obtenidos a través de utilizar el operador OWAD, el operador AOWAD, el operador EOWAD y el operador AEOWAD.

Tabla. Resultados agregados 2

	OWAD	*AOWAD*	*EOWAD*	*AEOWAD*
S_1	0.25	0.31	0.27	0.32
S_2	0.28	0.4	0.349	0.46
S_3	0.29	0.39	0.327	0.42
S_4	0.24	0.36	0.293	0.42
S_5	0.26	0.38	0.309	0.43

Como se puede observar, según el caso utilizado, el resultado será diferente. Mediante el operador AOWAD, EOWAD y AEOWAD, se seleccionará la estrategia S_1. En cambio, mediante el operador OWAD, la decisión óptima será S_4.

Si se establece una ordenación de las estrategias, un resultado muy habitual en situaciones en donde se desea considerar más de una alternativa, se observa que cada operador de distancias da un resultado diferente.

Tabla. Ordenación de las estrategias

NHD	$S_1 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_2 = S_3$	*OWAD*	$S_4 \succ S_1 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_3$
NED	$S_1 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2$	*AOWAD*	$S_1 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2$
WHD	$S_1 \succ S_5 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_2$	*EOWAD*	$S_1 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2$
WED	$S_1 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_4 \succ S_2$	*AEOWAD*	$S_1 \succ S_3 = S_4 \succ S_5 \succ S_2$

Como conclusión general decir que en función del caso particular de operador GOWAD utilizado, los resultados podrán ser diferentes, lo cual puede llevar a que las decisiones también sean diferentes.

6.3. Extensiones al GOWAD operator

6.3.1. Introducción

Los operadores GOWAD pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que incorporemos en dicho operador. Para no entrar en una excesiva redundancia y teniendo en cuenta que en el capítulo 6.2 ya se ha desarrollado un análisis bastante profundo de diferentes propiedades, características, etc., de los operadores OWAD, en este apartado se presentarán diferentes extensiones a los operadores GOWAD de forma resumida. Por tanto, se presentará únicamente su definición principal y algunos comentarios básicos sobre dicho operador. A partir de observar las propiedades comentadas en el operador GOWAD, se pueden aplicar de forma prácticamente directa a las diferentes extensiones.

Obsérvese que el operador OWAD generaliza al operador OWAD, OWQAD, etc. Por tanto, al introducir extensiones a los operadores GOWAD, automáticamente, también se estarán introduciendo extensiones a los operadores OWAD, OWQAD, etc. También cabe destacar que para cada operador generalizado, se comentará su formulación a través de utilizar medias generalizadas y medias cuasi-aritméticas aunque la denominación GOWAD se utilice para referirse al uso de medias generalizadas.

También cabe destacar que un operador GOWAD es una extensión de nivel 1 a los operadores GOWA, y de nivel 2 a los operadores OWA. Por tanto, las extensiones a los operadores GOWAD, también cumplirán esta diferencia. Es decir, las extensiones de nivel 1, serán extensiones de nivel 2 a los operadores GOWA y de nivel 3 a los operadores OWA, y así sucesivamente.

A modo de resumen, distinguiremos entre extensiones a los operadores GOWAD de nivel 1, de nivel 2 y de nivel *N*.

- Extensiones de nivel 1.
  - *Induced GOWAD operator*
  - *Linguistic GOWAD operator*
  - *Uncertain GOWAD operator*
  - *Fuzzy GOWAD operator*
  - *Hybrid GOWAD operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel 2.
  - *Induced linguistic GOWAD operator*
  - *Uncertain induced GOWAD operator*
  - *Fuzzy induced GOWAD operator*
  - *Induced hybrid GOWAD operator*
  - *Uncertain hybrid HOWAD operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel *N*.
  - *Uncertain induced linguistic GOWAD operator*
  - *Uncertain induced hybrid GOWAD operator*
  - Etc.

6.3.2. Extensiones de nivel 1

6.3.2.1. *Induced GOWAD operator*

El *Induced GOWAD operator* o operador IGOWAD, es un operador de distancias similar al GOWAD con la diferencia de que su proceso de ordenación no depende de los valores de las distancias individuales entre características, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Para dos conjuntos X e Y, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador IGOWAD es una función f: $R^n \times R^n \rightarrow R$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.46}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta IGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

El operador IGOWAD es conmutativo, monotónico, limitado e idempotente. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es decir, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = f(\langle u_1, s_1, v_1\rangle, \langle u_2, s_2, v_2\rangle, \ldots, \langle u_n, s_n, v_n\rangle)$ donde $(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle)$ es cualquier permutación de los argumentos $(\langle u_1, s_1, v_1\rangle, \langle u_2, s_2, v_2\rangle, \ldots, \langle u_n, s_n, v_n\rangle)$. Es monotónico porque si $|x_i - y_i| \geq |s_i - v_i|$, para todo i, entonces, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) \geq f(\langle u_1, s_1, v_1\rangle, \langle u_2, s_2, v_2\rangle, \ldots, \langle u_n, s_n, v_n\rangle)$. Es limitado porque la agregación IGOWAD está delimitada por el mínimo y el máximo. Es decir, $\min\{|x_i - y_i|\} \leq f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) \leq \max\{|x_i - y_i|\}$. Es idempotente porque si $|x_i - y_i| = |x - y|$, para todo i, entonces, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = |x - y|$.

Obsérvese que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = 0$. Obsérvese también que $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = f(\langle u_1, y_1, x_1\rangle, \ldots, \langle u_n, y_n, x_n\rangle)$.

Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DIGOWAD) y ascendentes (AIGOWAD). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DIGOWAD (o IGOWAD) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AIGOWAD.

Si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j^{λ}, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador IGOWAD puede ser expresado como:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{6.47}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador IGOWAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6.48}$$

Otro aspecto a destacar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en el caso del operador IGOWAD, el cambio se hará por la media generalizada, es decir, por la distancia relativa (o normalizada) de Minkowski.

El operador IGOWAD generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *induced OWAD* (*IOWAD*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *induced OWQAD* (*IOWQAD*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *induced OWGAD* (*IOWGAD*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *induced OWHAD* (*IOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWAD.
- El *weighted Minkowski distance*.
- El *normalized Minkowski distance*.
- La distancia máxima.
- La distancia mínima.
- La distancia según el criterio de Hurwicz.
- El *step-IGOWAD operator*.
- El *window-IGOWAD operator*.
- El *olympic-IGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-IGOWAD.
- El *S-IGOWAD operator*.
- El *centered-IGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-IGOWAD operator*.
- El *dependent-IGOWAD operator*.
- Etc.

El operador IGOWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-IOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-IOWAD es una función f: $R^n \times R^n \to R$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{6.49}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta QIOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-IOWAD se convierte en el operador IGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DIOWAD) y ascendentes (Quasi-AIOWAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador IGOWAD también son aplicables al operador Quasi-IOWAD.

6.3.2.2. *Linguistic GOWAD operator*

El *linguistic GOWAD* (LGOWAD) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el cálculo de distancias. Además, este operador utiliza medias (o distancias) generalizadas por lo incluye a un gran número de distancias como la distancia de Hamming lingüística (*normalized linguistic Hamming distance*), la distancia de Euclides lingüística, (*normalized linguistic Euclidean distance*), etc. Para dos conjuntos $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ e $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador LGOWAD es una función $LGOWAD$: $S^n \times S^n \to S$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$LGOWAD(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.50}$$

donde s_{β_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

El operador LGOWAD es conmutativo, monótono, idempotente y delimitado por el máximo y el mínimo. Obsérvese que si $s_{X_i} = s_{Y_i}$ para todo $i \in [1, n]$, $LGOWAD(X, Y) = 0$. Obsérvese también que $LGOWAD(X, Y) = LGOWAD(Y, X)$.

Desde un punto de vista general en la ordenación, se puede distinguir entre operadores ascendentes (DLGOWAD) y ascendentes (ALGOWAD). Sus ponderaciones se encuentran relacionadas mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación de los DLGOWAD (o LGOWAD) y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación de los ALGOWAD.

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial en la que se supone que si B es el vector de argumentos ordenados de s_{β_j}, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador LGOWAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$LGOWAD(X, Y) = W^T B \tag{6.51}$$

Otro aspecto a destacar hace referencia a aquellos casos en los que el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador LGOWAD se expresa de la siguiente forma:

$$LGOWAD(X, Y) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{6.52}$$

El operador LGOWAD incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes. En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *linguistic OWAD* (*LOWAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *linguistic OWQAD* (*LOWQAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *linguistic OWGAD* (*LOWGAD*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *linguistic OWHAD* (*LOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se pueden analizar los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones W.

- El operador LGOWAD.
- El *linguistic weighted Minkowski distance*.
  - El *linguistic weighted Hamming distance*.
  - El *linguistic weighted Euclidean distance*.
  - Etc.
- El *linguistic normalized Minkowski distance*.
  - El *linguistic normalized Hamming distance*.
  - El *linguistic normalized Euclidean distance*.
  - Etc.
- La distancia máxima lingüística.
- La distancia mínima lingüística.
- La distancia lingüística según el criterio de Hurwicz.
- El *step-LGOWAD operator*.
- El *window-LGOWAD operator*.

- El *olympic-LGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-LGOWAD.
- El *S-LGOWAD operator*.
- El *centered-LGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-LGOWAD operator*.
- El *dependent-LGOWAD operator*.
- Etc.

El operador LGOWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-LOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-LOWAD es una función f: $S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$LGOWAD(X, Y) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(s_{\beta_j}\right)\right) \tag{6.53}$$

donde s_{β_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(s_\beta) = s_\beta^\lambda$, entonces, el Quasi-LOWAD se convierte en el operador LGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DLOWAD) y ascendentes (Quasi-ALOWAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador LGOWAD también son aplicables al operador Quasi-LOWAD.

6.3.2.3. *Uncertain GOWAD operator*

El *uncertain GOWAD operator* o operador UGOWAD, es un operador de distancias para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa de tal forma que resulta posible considerar los resultados más optimistas y los más pesimistas. Para dos conjuntos A y E, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UGOWAD es una función *UGOWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle\tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^\lambda\right)^{1/\lambda} \tag{6.54}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

También resulta conveniente señalar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. Para evitar excesivas dificultades, se recomienda seguir con el mismo criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como inciertos. Es decir, se puede definir la información de estas variables mediante intervalos de confianza. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

El operador UGOWAD cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Obsérvese que si $\tilde{a}_i = \tilde{e}_i$ para todo $i \in [1, n]$, $f(\langle\tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = 0$. Obsérvese también que $f(\langle\tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = f(\langle\tilde{e}_1, \tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{e}_n, \tilde{a}_n\rangle)$.

Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUGOWAD) y ascendentes (AUGOWAD). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DUGOWAD (o UGOWAD) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AUGOWAD.

El operador UGOWAD también puede ser expresado en forma vectorial:

$$f(\langle\tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{6.55}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador UGOWAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(\langle\tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle\tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.56}$$

El operador UGOWAD generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *uncertain OWAD* (*UOWAD*) *operator*.

- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *uncertain OWQAD* (*UOWQAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *uncertain OWGAD* (*UOWGAD*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *uncertain OWHAD* (*UOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWAD.
- El *uncertain weighted Minkowski distance*.
- El *uncertain normalized Minkowski distance*.
- La distancia máxima incierta.
- La distancia mínima incierta.
- La distancia incierta según el criterio de Hurwicz.
- El *step-UGOWAD operator*.
- El *window-UGOWAD operator*.
- El *olympic-UGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-UGOWAD.
- El *S-UGOWAD operator*.
- El *centered-UGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-UGOWAD operator*.
- El *dependent-UGOWAD operator*.
- Etc.

En este caso, también se puede generalizar el operador UGOWAD a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UOWAD es una función *QUOWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \to \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{6.57}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-UOWAD se convierte en el operador UGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DUOWAD) y ascendentes (Quasi-AUOWAD).

Finalmente, decir que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador UGOWAD también son aplicables al operador Quasi-UOWAD.

6.3.2.4. *Fuzzy GOWAD operator*

El fuzzy GOWAD operator o operador FGOWAD, es un operador de distancias similar al operador UGOWAD. La diferencia entre ambos se encuentra en que el operador UGOWAD representa la información mediante intervalos de confianza, mientras que el FGOWAD utiliza números borrosos (NB). Por lo demás, estos dos operadores son muy similares. Para dos conjuntos A y E, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador FGOWAD es una función *FGOWAD*: $\Psi^n \times \Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6.58}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son números borrosos y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB, ya sea NBT, NBTp, NB L-R, NB generalizado, NB intervalo-valorado, NB de tipo 2 y *n*, NB generalizado de tipo 2 y *n*, NB intuicionista, etc.

También resulta conveniente señalar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones y al parámetro λ como NBs. Es decir, debido al grado de incertidumbre o al deseo del decisor de representar diferentes escenarios, se puede definir la información de estas variables mediante NBs. Debido a que estos conceptos implican un análisis mucho más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

El operador FGOWAD cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DFGOWAD) y ascendentes (AFGOWAD). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DFGOWAD (o FGOWAD) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AFGOWAD.

El operador FGOWAD también puede ser expresado en forma vectorial. También obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador FGOWAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.59}$$

Al igual que las anteriores extensiones, el operador FGOWAD generaliza a un gran número de casos particulares. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *fuzzy OWAD* (*FOWAD*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *fuzzy OWQAD* (*FOWQAD*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *fuzzy OWGAD* (*FOWGAD*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *fuzzy OWHAD* (*FOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWAD.
- El *fuzzy weighted Minkowski distance*.
- El *fuzzy normalized Minkowski distance*.
- La distancia máxima borrosa.
- La distancia mínima borrosa.
- La distancia borrosa según el criterio de Hurwicz.
- El *step-FGOWAD operator*.
- El *window-FGOWAD operator*.
- El *olympic-FGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-FGOWAD.
- El *S-FGOWAD operator*.
- El *centered-FGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-FGOWAD operator*.
- El *dependent-FGOWAD operator*.
- Etc.

En este caso, también se puede generalizar el operador FGOWAD a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-FOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-FOWAD es una función *QFOWAD*: $\Psi^n \times \Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones *W* tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{6.60}$$

donde b_j es el *j*-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son NBs y *g* es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^\lambda$, entonces, el Quasi-FOWAD se convierte en el operador FGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DFOWAD) y ascendentes (Quasi-AFOWAD).

Finalmente, decir que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador FGOWAD también son aplicables al operador Quasi-FOWAD.

6.3.2.5. Otras extensiones de nivel 1

Además de estos cuatro casos, se podrían considerar otras extensiones de nivel 1 como por ejemplo, el *generalized hybrid averaging distance* (GHAD) *operator*, el *weighted GOWA distance* (WGOWAD) *operator*, la versión generalizada de Schaefer y Mitchell (1999) del operador GOWAD, el *heavy OWAD operator*, etc.

En términos generales, estos operadores seguirían una metodología similar a los anteriores, es decir, se podría desarrollar su definición, estudiar diferentes propiedades, aspectos fundamentales y casos particulares. También se podrían generalizar mediante medias cuasi-aritméticas, obteniendo el operador Quasi-HAD, el operador Quasi-WOWAD, la versión generalizada de Schaefer y Mitchell (1999) del operador Quasi-OWAD, etc.

Obsérvese que el operador GHAD y el WGOWAD no se analizan en este apartado porque su objetivo es combinar la media ponderada con la media ponderada ordenada. Y este hecho es el que trataremos en el capítulo 8 de la tesis proponiendo un nuevo método de unificar a la media ponderada y a la media ponderada ordenada en la misma formulación.

A pesar de que creemos en un nuevo modelo de unificación entre medias ponderadas y ponderadas ordenadas, conviene resaltar que si el HAD y el WOWAD son válidos, también se podría desarrollar una aproximación similar mediante el uso de probabilidades ya que la interpretación del HAD y el WOWAD está basado en el concepto de grados de importancia, o dicho en otras palabras, en el concepto de probabilidad subjetiva. Por tanto, también sería posible ampliar estos operadores a situaciones en donde se considera la probabilidad objetiva.

6.3.3. Extensiones de nivel 2

6.3.3.1. *Induced linguistic GOWAD operator*

El *induced linguistic GOWAD* (ILGOWAD) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el cálculo de distancias y un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Además, este operador también utiliza medias (o distancias) generalizadas. Dado el conjunto de variables inducidas U = $\{u_1, \ldots, u_n\}$ para dos conjuntos $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ e $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea S el conjunto de etiquetas lingüísticas. Un operador ILGOWAD es una función $ILGOWAD$: $S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$ILGOWAD(U, X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6.61}$$

donde s_{β_j} es el valor $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ de la tripleta ILGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias lingüísticas individuales y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

El operador ILGOWAD es conmutativo, monótono, idempotente y delimitado por el máximo y el mínimo. Obsérvese que si $s_{X_i} = s_{Y_i}$ para todo $i \in [1, n]$, $ILGOWAD(X, Y) = 0$. Obsérvese también que $ILGOWAD(X, Y) = ILGOWAD(Y, X)$.

En este caso, también se puede distinguir entre operadores ascendentes (DILGOWAD) y ascendentes (AILGOWAD). Sus ponderaciones se encuentran relacionadas mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación de los DILGOWAD (o ILGOWAD) y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación de los AILGOWAD.

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial de la siguiente forma:

$$ILGOWAD(U, X, Y) = W^T B \tag{6.62}$$

Otro aspecto a destacar hace referencia a aquellos casos en los que el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador ILGOWAD se expresa de la siguiente forma:

$$ILGOWAD(U, X, Y) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{6.63}$$

El operador ILGOWAD incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes. En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *induced linguistic OWAD* (*ILOWAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *induced linguistic OWQAD* (*ILOWQAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *induced linguistic OWGAD* (*ILOWGAD*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *induced linguistic OWHAD* (*ILOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se pueden analizar los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador LGOWAD.
- El *linguistic weighted Minkowski distance*.
    - El *linguistic weighted Hamming distance*.
    - El *linguistic weighted Euclidean distance*.
    - Etc.
- El *linguistic normalized Minkowski distance*.
    - El *linguistic normalized Hamming distance*.
    - El *linguistic normalized Euclidean distance*.
    - Etc.
- La distancia máxima lingüística.
- La distancia mínima lingüística.
- La distancia lingüística según el criterio de Hurwicz.
- El *step-ILGOWAD operator*.
- El *window-ILGOWAD operator*.
- El *olympic-ILGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-ILGOWAD.
- El *S-ILGOWAD operator*.
- El *centered-ILGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-ILGOWAD operator*.
- El *dependent-ILGOWAD operator*.
- Etc.

El operador ILGOWAD también puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-ILOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-ILOWAD es una función f: $S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$QILOWAD(X, Y) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(s_{\beta_j}\right)\right) \tag{6.64}$$

donde s_{β_j} es el valor $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ de la tripleta QILOWAD $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias lingüísticas individuales y g es la función monótona estrictamente continua.

El operador Quasi-ILOWAD incluye al operador ILGOWAD ya que cuando $g(s_\beta) = s_\beta^\lambda$, entonces, el Quasi-ILOWAD se convierte en el operador ILGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DILOWAD) y ascendentes (Quasi-AILOWAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador ILGOWAD también son aplicables al operador Quasi-ILOWAD.

6.3.3.2. *Uncertain induced GOWAD operator*

El *uncertain induced GOWAD operator* o operador UIGOWAD, es un operador de distancias similar al IGOWAD con la diferencia de que la información disponible es incierta y viene representada mediante intervalos de confianza. Para dos conjuntos A y E, y dado el conjunto de variables inducidas U, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UIGOWAD es una función *UIGOWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1 \rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n \rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^\lambda \right)^{1/\lambda} \tag{6.65}$$

donde b_j es el valor $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ de la tripleta UIGOWAD $\langle u_i, \tilde{a}_i, \tilde{e}_i \rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar que se puede utilizar cualquier tipo de intervalo en el operador UIGOWAD, ya sea una tripleta, un cuádruplo, etc.

También cabe mencionar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones o en el parámetro λ. La motivación por la cual se producirían estos casos reside en que el decisor puede no estar seguro en relación a qué ponderaciones o parámetros utilizar y prefiere considerar un intervalo que abarca a una amplia gama de casos. Debido a que estos aspectos pueden implicar dificultades adicionales, se dejará su análisis para futuras investigaciones postdoctorales.

En este caso, el proceso de reordenación de intervalos no es un problema ya que queda resuelta a través de la reordenación mediante las variables inducidas. Obsérvese que las variables inducidas pueden venir representadas de diferentes formas, ya sea mediante números precisos, NBs, intervalo de confianza, variables lingüísticas, función que representan aspectos complejos del decisor, etc.

El operador UIGOWAD es conmutativo, monotóno, limitado e idempotente. Otra propiedad a destacar es aquella que dice que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = 0$. Obsérvese también que $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = f(\langle u_1, y_1, x_1\rangle, \ldots, \langle u_n, y_n, x_n\rangle)$.

En este caso, también se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUIGOWAD) y ascendentes (AUIGOWAD), y también se puede expresar mediante una forma vectorial:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{6.66}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador UIGOWAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.67}$$

Otro aspecto a destacar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en el caso del operador UIGOWAD, el cambio se hará por la media generalizada incierta, es decir, por la distancia relativa incierta (o normalizada) de Minkowski.

El operador UIGOWAD generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *uncertain induced OWAD* (*UIOWAD*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *uncertain induced OWQAD* (*UIOWQAD*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *uncertain induced OWGAD* (*UIOWGAD*) *operator*.
- Si λ = −1, se obtiene el *uncertain induced OWHAD* (*UIOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWAD.
- El operador UGOWAD.
- El *uncertain weighted Minkowski distance*.
- El *uncertain normalized Minkowski distance*.
- La distancia máxima incierta.
- La distancia mínima incierta.

- La distancia incierta según el criterio de Hurwicz.
- El *step-UIGOWAD operator*.
- El *window-UIGOWAD operator*.
- El *olympic-UIGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-UIGOWAD.
- El *S-UIGOWAD operator*.
- El *centered-UIGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-UIGOWAD operator*.
- El *dependent-UIGOWAD operator*.
- Etc.

El operador UIGOWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UIOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UIOWAD es una función *QUIOWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{6.68}$$

donde b_j es el valor $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ de la tripleta QUIOWAD $\langle u_i, \tilde{a}_i, \tilde{e}_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-UIOWAD se convierte en el operador UIGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DUIOWAD) y ascendentes (Quasi-AUIOWAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador UIGOWAD también son aplicables al operador Quasi-UIOWAD.

6.3.3.3. *Fuzzy induced GOWAD operator*

El *fuzzy induced GOWAD operator* o operador FIGOWAD, es un operador muy similar al operador UIGOWAD con la diferencia de que en lugar de utilizar intervalos de confianza para representar la información incierta, utiliza NBs. Para dos conjuntos A y E, y dado el conjunto de variables inducidas U, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador FIGOWAD es una función *FIGOWAD*: $\Psi^n \times \Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.69}$$

donde b_j es el valor $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ de la tripleta FIGOWAD $\langle u_i, \tilde{a}_i, \tilde{e}_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son NBs y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar que se puede utilizar cualquier tipo de NB en el operador FIGOWAD, ya sea NBT, NBTp, NB L-R, NB generalizado, NB intervalo-valorado, NB de tipo 2 y n, NB intuicionista, etc.

También cabe mencionar la posibilidad de utilizar NBs (u otras formas de representar la información como son los intervalos de confianza) en las ponderaciones o en el parámetro λ. Estos aspectos se dejarán para futuras investigaciones postdoctorales.

En este caso, el proceso de reordenación de NBs queda resuelto a través de la reordenación mediante las variables inducidas. Obsérvese que las variables inducidas pueden venir representadas de diferentes formas, ya sea mediante números precisos, NBs, intervalo de confianza, variables lingüísticas, función que representan aspectos complejos del decisor, etc.

El operador FIGOWAD cumple propiedades similares al resto de operadores OWAD como la conmutatividad, monotonia, etc.

En este caso, también se puede distinguir entre órdenes descendentes (DFIGOWAD) y ascendentes (AFIGOWAD), y también se puede expresar mediante una forma vectorial:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{6.70}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador FIGOWAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.71}$$

En el caso de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en el caso del operador FIGOWAD, el cambio se hará por la media generalizada incierta, es decir, por la distancia relativa borrosa (o normalizada) de Minkowski.

El operador FIGOWAD generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *fuzzy induced OWAD* (*FIOWAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *fuzzy induced OWQAD* (*FIOWQAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *fuzzy induced OWGAD* (*FIOWGAD*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *fuzzy induced OWHAD* (*FIOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWAD.
- El operador FGOWAD.
- El *fuzzy weighted Minkowski distance*.
- El *fuzzy normalized Minkowski distance*.
- La distancia máxima borrosa.
- La distancia mínima borrosa.
- La distancia borrosa según el criterio de Hurwicz.
- El *step-FIGOWAD operator*.
- El *window-FIGOWAD operator*.
- El *olympic-FIGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-FIGOWAD.
- El *S-FIGOWAD operator*.
- El *centered-FIGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-FIGOWAD operator*.
- El *dependent-FIGOWAD operator*.
- Etc.

El operador FIGOWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-FIOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-FIOWAD es una función *QFIOWAD*: $\Psi^n \times \Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones *W* tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{6.72}$$

donde b_j es el valor $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ de la tripleta QFIOWAD $\langle u_i, \tilde{a}_i, \tilde{e}_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son NBs, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, el Quasi-FIOWAD se convierte en el operador FIGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DFIOWAD) y ascendentes (Quasi-AFIOWAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador FIGOWAD también son aplicables al operador Quasi-FIOWAD.

6.3.3.4. Otras extensiones de nivel 2

Además de estos casos, también se podrían considerar otras extensiones de nivel 2. Por ejemplo, se podrían considerar diferentes extensiones del operador GHAD como el *induced GHAD* (IGHAD), el *linguistic GHAD* (LGHAD), el *uncertain GHAD* (UGHAD), el *fuzzy GHAD* (FGHAD), etc. También se podría hacer un análisis similar con el operador WGOWAD. Es decir, se podría considerar el *induced WGOWAD* (IWGOWAD), el *linguistic WGOWAD* (LWGOWAD), el *uncertain WGOWAD* (UWGOWAD), el *fuzzy WGOWAD* (FWGOWAD), etc. La metodología de estos operadores sería muy similar a los casos comentados en los anteriores subapartados en relación a propiedades, casos particulares, etc. En el caso del WGOWAD, resulta interesante mencionar algún caso particular como sería el IWOWAD, el LWOWAD, el UWOWAD, el FWOWAD, etc.

En este caso también es aplicable lo dicho en el apartado 6.3.2.5. sobre ampliar el GHAD y el WGOWAD a situaciones probabilísticas ya que su estudio se orienta a medias ponderadas que indican grados de importancia o probabilidades subjetivas. Pero es perfectamente ampliable a situaciones probabilísticas.

También obsérvese que en los próximos capítulos, se desarrollarán muchas otras extensiones a los operadores GOWAD. Otro caso que se podría considerar es el uso de las agregaciones *heavy*, por ejemplo, el *induced heavy OWA distance operator* (IHOWAD). Para dos conjuntos X e Y, se define de la siguiente forma.

Definición: Una función $IHOWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ es un operador *IHOWAD* de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n tal que sus componentes satisfacen:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

y

$$IHOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle)) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (6.73)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta IHOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, y $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales.

Como se puede observar, si $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, entonces se obtiene el operador IOWAD, y si es igual a n, entonces se obtiene la distancia absoluta del operador IOWAD.

6.3.4. Extensiones de nivel *N*

6.3.4.1. *Uncertain induced linguistic GOWAD operator*

El *induced linguistic GOWAD* (ILGOWAD) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el cálculo de distancias y un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Además, este operador también utiliza medias (o distancias) generalizadas. Dado el conjunto de variables inducidas U = $\{u_1, \ldots, u_n\}$ para dos conjuntos $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ e $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea S el conjunto de etiquetas lingüísticas. Un operador ILGOWAD es una función $ILGOWAD$: $S^n \times S^n \to S$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$UILGOWAD(U, X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6.74}$$

donde s_{β_j} es el valor $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ de la tripleta UILGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias lingüísticas individuales inciertas y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

El operador UILGOWAD cumple propiedades similares al resto de operadores GOWAD. Obsérvese que en el caso de comparación de variables lingüísticas inciertas, se utilizará el valor medio de las variables lingüísticas. Cabe destacar que las variables lingüísticas inciertas pueden venir expresadas mediante intervalos de confianza simples, mediante tripletas, cuádruplos, etc.

Obsérvese que también se podría extender el concepto de variable lingüística incierta a la variable lingüística borrosa. En este caso, se obtendría el *fuzzy number induced linguistic OWA distance* (FNILGOWAD) *operator*. Es decir las etiquetas inciertas se representan mediante un NB que indica la posibilidad de ocurrencia de una etiqueta o su valor intermedio. Cabe destacar que estos casos serán de mayor utilidad a medida que el conjunto de términos lingüísticos se vaya haciendo más amplio ya que entonces hay más posibilidades de que se genere incertidumbre en las etiquetas. Es importante destacar que el concepto de variables lingüísticas inciertas o borrosas es diferente de las tradicionales, ya que los conceptos tradicionales van dirigidos a analizar lo que sucede en la parte interna de la etiqueta ligüística representándola mediante NBs, etc. En cambio, en el análisis que comentamos, se analiza la etiqueta lingüística desde un contexto externo en donde se analiza la incertidumbre en la fijación de etiquetas lingüísticas.

Para más información sobre los NBs, véase el capítulo 3. La diferencia en este caso está en que en lugar de utilizar valores numéricos, se utilizan etiquetas lingüísticas representadas en una escala numérica contínua. Es decir, el NB fluctuará entre una etiqueta s_{X_i} y otra s_{X_j}, y dentro del intervalo formado entre estas dos etiquetas, se establecerán diferentes grados de presunción α respecto a la posibilidad de ocurrencia de un resultado concreto expresado generalmente mediante intervalos. A continuación se muestra un ejemplo muy simple de su funcionamiento. El objetivo de este ejemplo es dar una visión general de estas nuevas ideas. En futuras investigaciones postdoctorales, se llevarán estudios mucho más detallados de estos nuevos conceptos.

Ejemplo. Dada una escala endecadaria de términos lingüísticos, se analiza un problema y la conclusión es que el resultado se va a ubicar en un valor medio. Debido a la incertidumbre, los expertos representan este resultado mediante un número borroso triangular lingüístico (NBT): (s_4, s_5, s_6). Por tanto, este resultado se podría representar en α-cortes, etc. (véase el capítulo de NBs 3.2.4.). En α-cortes tendríamos: (s_4, + αs_1, s_6, – αs_1). Este resultado también se podría representar desde una perspectiva numérica a la cual se le introduce las etiquetas lingüísticas al final del proceso para representar y mostrar la información. Es decir, para facilitar el proceso de computación con palabras (en los casos donde las etiquetas son continuas y permiten este tipo de análisis) se realizan las operaciones de forma numérica pero los resultados se expresan de forma lingüística. En este ejemplo, tendríamos: ($4 + \alpha$, $6 - \alpha$). Obsérvese que ambos mecanismos son válidos. Entonces, en este ejemplo tendríamos la siguiente información: *El resultado será como mínimo de* s_4*, es decir, un valor ligeramente inferior al medio del problema analizado, lo más posible* (el valor de máxima presunción) *es justamente el valor medio de la escala, y el valor máximo será un resultado ligeramente superior al medio*. Además, para diferentes niveles de presunción se podría considerar el resultado obtenido. Por ejemplo, para α = 0.3, se formaría el siguiente intervalo: (4.3, 5.7). Obsérvese que en otros ejemplos de mayor complejidad, el análisis de diferentes niveles de presunción puede ser de gran utilidad.

Visto este segundo mecanismo para operar con variables lingüísticas continuas, podríamos establecer el siguiente esquema (o nueva metodología para los procesos de computación con palabras).

Información lingüística inicial
↓
Adaptación o transformación numérica de la información lingüística
↓
Operaciones numéricas
↓
Resultado final numérico
↓
Adaptación o transformación lingüística del resultado numérico
↓
Información lingüística final

Como se puede observar la información inicial y final siempre se representa mediante etiquetas lingüísticas, pero internamente las operaciones se realizan, para mayor facilidad y utilidad, numéricamente. Obsérvese que este mecanismo es perfecto con conjuntos de términos lingüísticos con la misma amplitud en sus etiquetas pero puede tener algunas dificultades adicionales con conjuntos de términos lingüísticos de mayor dificultad, como por ejemplo con situaciones de “*unbalanced linguistic term sets*”-conjuntos de términos lingüísticos inbalanceados (Herrera et al., 2008). En estor casos, el problema o mecanismo que se tendría que utilizar es uno que realiza una transformación adicional en la escala numérica adaptando los resultados inbalanceados a una escala numérica. Obsérvese que la forma de llevar a cabo la transformación puede seguir diferentes caminos. Por tanto, este tema se tratará en futuras investigaciones postdoctorales. Pero de forma resumida, el esquema comentado anteriormente, también resulta válido.

Este concepto de variable lingüística incierta surge en situaciones de elevados grados de incertidumbre en donde la información disponible es mucho más incierta que la incertidumbre establecida en la representación de las variables lingüísticas. En otras palabras, la incertidumbre que queremos representar abarca a más de una etiqueta lingüística. Entonces, necesariamente se tiene que recurrir al uso de intervalos, etc., que abarquen a más de una variable lingüística. En algunos casos, este problema se podría solucionar redefiniendo las etiquetas lingüísticas iniciales de forma que cada etiqueta sea más amplia. Pero hay algunos casos, en los que no se podría redefinir ya que otra parte del problema ya funciona con estas etiquetas iniciales.

Obviamente, a partir de aquí, se podrían establecer un gran número de nuevas variables lingüísticas mediante el uso de diferentes números borrosos, etc., por ejemplo:

- *Linguistic interval number – Uncertain linguistic variable* (triplet, quadruplet, etc.)
- *Linguistic fuzzy number* (LFN).
- *Linguistic triangular FN* (LTFN).
- *Linguistic trapezoidal FN* (LTpFN).
- *Linguistic generalized FN* (LGFN).
- *Linguistic interval-valued FN* (LIVFN).
- *Linguistic L-R FN* (L-LR-FN).
- *Linguistic generalized interval-valued FN* (LGIVFN).
- *Linguistic type* 2 *FN*.
- *Linguistic type n FN*.
- *Linguistic generalized type n FN*.
- *Linguistic generalized L-R FN*.
- *Linguistic generalized interval-valued L-R FN*.
- *Linguistic intuitionistic FN.*
- *Linguistic intuitionistic generalized interval-valued FN* (LIGIVFN).
- Etc.

Además, a partir de estos casos, se podría distinguir entre diferentes modelos lingüísticos, ya sea el lingüístico tradicional, el de 2-tuplas, el modelo con términos lingüísticos inbalanceados (*unbalanced linguistic variables*), etc.

Además, toda esta estructura de casos se podría unificar con toda la estructura de casos, métodos, etc., lingüísticos procedentes del análisis clásico en donde se analiza la estructura interna de la variable lingüística. Un resumen de estos casos (junto con nuevas aportaciones) se mencionarán brevemente por ejemplo, en los apartados 8.2.3. y 11.1.1. Por tanto, estos casos se podrían combinar con variables lingüísticas con estructura interna representada por NB generalizados (variables lingüísticas generalizadas – *generalized linguistic variables*), por NB intervalo valorados (variables lingüísticas intervalo valoradas), etc.

Por tanto, con estas propuestas se amplia mucho más el conocimiento de las variables lingüísticas y además se consigue una representación mucho más completa de la información. Obviamente, el número de casos y aplicaciones potenciales es ilimitado. Por tanto, en trabajos postdoctorales se elaborarán algunos de los principales casos pero debido a que una sola persona no puede encargarse del desarrollo de todos estos casos, se espera la participación de otras personas para poder llevar a cabo todas estas investigaciones.

Obsérvese que también se podría considerar la utilización de diferentes tipos de expertones, etc. Y a su vez este mismo análisis sería aplicable a los expertones. Es decir, se podría utilizar diferentes tipos de NBs para representar la información, etc.

Siguiendo con el operador UILGOWAD, también se puede distinguir entre operadores descendentes (DUILGOWAD) y ascendentes (AUILGOWAD).

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial de la siguiente forma:

$$UILGOWAD(U, X, Y) = W^T B \tag{6.75}$$

Otro aspecto a destacar hace referencia a aquellos casos en los que el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador UILGOWAD se expresa de la siguiente forma:

$$UILGOWAD(U, X, Y) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{6.76}$$

El operador UILGOWAD incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes. En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *uncertain induced linguistic OWAD* (*UILOWAD*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *uncertain induced linguistic OWQAD* (*UILOWQAD*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *uncertain induced linguistic OWGAD* (*UILOWGAD*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *uncertain induced linguistic OWHAD* (*UILOWHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se pueden analizar los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador LGOWAD.

- El operador ULGOWAD.
- El operador ILGOWAD.
- El *uncertain linguistic weighted Minkowski distance*.
  - El *uncertain linguistic weighted Hamming distance*.
  - El *uncertain linguistic weighted Euclidean distance*.
  - Etc.
- El *uncertain linguistic normalized Minkowski distance*.
  - El *uncertain linguistic normalized Hamming distance*.
  - El *uncertain linguistic normalized Euclidean distance*.
  - Etc.
- La distancia máxima lingüística incierta.
- La distancia mínima lingüística incierta.
- La distancia lingüística incierta según el criterio de Hurwicz.
- El *step-UILGOWAD operator*.
- El *window-UILGOWAD operator*.
- El *olympic-UILGOWAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-UILGOWAD.
- El *S-UILGOWAD operator*.
- El *centered-UILGOWAD operator*.
- El *nonmonotonic-UILGOWAD operator*.
- El *dependent-UILGOWAD operator*.
- Etc.

El operador UILGOWAD también puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UILOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-UILOWAD es una función f: $S^n \times S^n \rightarrow S$ que tiene asociado un vector de ponderaciones tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$QUILOWAD(X, Y) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(s_{\beta_j}\right)\right) \tag{6.77}$$

donde s_{β_j} es el valor $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ de la tripleta QUILOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias lingüísticas individuales inciertas y g es la función monótona estrictamente continua.

El operador Quasi-UILOWAD contiene al operador UILGOWAD como un caso particular ya que cuando $g(s_\beta) = s_\beta^{\lambda}$, entonces, el Quasi-UILOWAD se convierte en el operador UILGOWAD. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DUILOWAD) y ascendentes (Quasi-AUILOWAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador UILGOWAD también son aplicables al operador Quasi-UILOWAD.

6.3.3.2. *Uncertain induced generalized hybrid averaging distance operator*

El *uncertain induced generalized hybrid averaging operator* o operador UIGHAD, es un operador de distancias similar al UIGOWAD con la diferencia de que incluye a la media ponderada en la formulación. Obsérvese que con el operador GOWAD se conseguía artificialmente la media ponderada, pero con el operador UIGHAD, se considera al mismo tiempo situaciones con OWA y situaciones con media ponderada. Entonces, el decisor puede considerar en el problema tanto su grado de optimismo como su credibilidad o subjetividad respecto a cuáles son los resultados de mayor relevancia. Para dos conjuntos A y E, y dado el conjunto de variables inducidas U, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UIGHAD es una función *UIGHAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6.78}$$

donde b_j es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $i = 1,2,\ldots,n$), de la tripleta UIGHAD $\langle u_i, \tilde{a}_i, \tilde{e}_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe destacar que se puede utilizar cualquier tipo de intervalo en el operador UIGHAD, ya sea una tripleta, un cuádruplo, etc. También resulta interesante destacar la posibilidad de utilizar intervalos de confianza en las ponderaciones o en el parámetro λ. Estos aspectos, como ya se ha comentado anteriormente, se dejarán para futuras investigaciones postdoctorales.

En este caso, el proceso de reordenación de intervalos no es un problema ya que queda resuelta a través de la reordenación mediante las variables inducidas. Obsérvese que las variables inducidas pueden venir representadas de diferentes formas, ya sea mediante números precisos, NBs, intervalo de confianza, variables lingüísticas, función que representan aspectos complejos del decisor, etc.

El operador UIGHAD cumple las propiedades de conmutatividad y monotonía. Obsérvese que no cumple la propiedad de delimitación porque en algunos casos puede darse situaciones en donde el resultado de la agregación sea mayor al máximo o menor al mínimo. En parte, esto es una de las motivaciones por las cuales se ha desarrollado y propuesto el capítulo 8 ya que se necesite de un nuevo modelo capaz de incluir a la media ponderada y al operador OWA y que a su vez cumpla la propiedad de delimitación entre el máximo y el mínimo. Otra propiedad a destacar es aquella que dice que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = 0$. Obsérvese también que $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = f(\langle u_1, y_1, x_1\rangle, \ldots, \langle u_n, y_n, x_n\rangle)$.

En este caso, también se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUIGHAD) y ascendentes (AUIGHAD), y también se puede expresar mediante una forma vectorial:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{6.79}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador UIGHAD puede ser expresado de la siguiente forma:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6.80}$$

En el caso de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en el caso del operador UIGHAD, el cambio se hará por la media generalizada incierta, es decir, por la distancia relativa incierta (o normalizada) de Minkowski.

El operador UIGHAD generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *uncertain induced hybrid averaging distance (UIHAD*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *uncertain induced hybrid quadratic averaging distance* (*UIHQAD*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *uncertain induced hybrid geometric averaging distance* (*UIHGAD*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *uncertain induced hybrid harmonic averaging distance* (*UIHHAD*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GHAD.
  - El operador HAD.
  - El operador HQAD.
  - Etc.
- El operador UGHAD.
  - El operador UHAD.
  - El operador UHQAD.
  - Etc.
- El operador IGHAD.
  - El operador IHAD.
  - El operador IHQAD.
  - El operador IHGAD.
  - El operador IHHAD.
  - Etc.

- El *uncertain weighted Minkowski distance*.
- El *uncertain normalized Minkowski distance*.
- La distancia máxima incierta híbrida.
- La distancia mínima incierta híbrida.
- La distancia incierta según el criterio de Hurwicz híbrido.
- El *step-UIGHAD operator*.
- El *window-UIGHAD operator*.
- El *olympic-UIGHAD operator* (simple y generalizado).
- La mediana-UIGHAD.
- El *S-UIGHAD operator*.
- El *centered-UIGHAD operator*.
- El *nonmonotonic-UIGHAD operator*.
- El *dependent-UIGHAD operator*.
- Etc.

El operador UIGHAD puede ser generalizado a través de utilizar medias o distancias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UIHAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UIHAD es una función *QUIHAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W tal que $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, entonces:

$$f(\langle u_1, \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle,\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{6.81}$$

donde b_j es el valor $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $i = 1,2,\ldots,n$), de la tripleta UIGHAD $\langle u_i, \tilde{a}_i, \tilde{e}_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ es el vector de ponderaciones de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, con $\omega_i \in [0, 1]$ y la suma de sus ponderaciones es igual a 1, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-UIHAD se convierte en el operador UIGHAD. Obsérvese también la posibilidad de distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DUIHAD) y ascendentes (Quasi-AUIHAD).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador UIGHAD también son aplicables al operador Quasi-UIHAD.

6.3.3.3. Otras extensiones de nivel *N*

Siguiendo con la metodología explicada en los apartados anteriores, se podría desarrollar otra gran variedad de extensiones a los operadores GOWAD.

Por ejemplo, otras extensiones al operador GHAD como podrían ser el *fuzzy induced GHAD* (FIGHAD), el *induced linguistic GHAD* (ILGHAD), etc. Y también se podrían considerar extensiones de nivel superior como el *uncertain induced linguistic GHAD* (UILGHAD).

Otras extensiones podrían proceder del GWOWAD como por ejemplo el *uncertain induced GWOWAD* (UIGWOWAD), el *fuzzy induced GWOWAD* (FIGWOWAD), el *induced linguistic GWOWAD* (ILGWOWAD), etc.

De la misma forma, se podrían ir buscando otras extensiones, por ejemplo en el continuos OWA (C-OWA) buscar su caso general, su caso con distancias, etc.

Como se ha comentado anteriormente en el apartado 6.3.2.5., es posible ampliar el GHAD y el WGOWAD a situaciones probabilísticas ya que su estudio se orienta a medias ponderadas que indican grados de importancia o probabilidades subjetivas. Y por tanto, una continuación natural sería su extensión a situaciones probabilísticas.

También obsérvese que en los próximos capítulos, se desarrollarán muchas otras extensiones a los operadores GOWAD.

7. Operadores *OWA* en los índices de selección

7.1. Introducción

En este capítulo se analizan diferentes técnicas utilizadas en la toma de decisiones. Entre la gran variedad de técnicas disponibles, se analizará con detalle el coeficiente de adecuación (Kaufmann y Gil-Aluja, 1986; 1987) y sus extensiones, y el índice del máximo y el mínimo nivel (J. Gil-Lafuente, 2001). Existen otros índices de selección como el coeficiente por eliminación – descartes (J. Gil-Lafuente, 2004), el coeficiente de cualificación (A.M. Gil-Lafuente, 2001), etc. Pero en este trabajo se ha decidido analizar los dos índices mencionados. Cabe destacar que estos índices podrían haber sido incluidos en el capítulo 10.2. sobre la utilización de los operadores OWA en otros métodos de decisión (más específicos de decisión). Pero debido a que estos índices tienen una gran influencia en el grupo de investigación en el cual trabaja el doctorando, se ha decidido analizarlos en un capítulo exclusivo.

En resumen, decir que se analizará la utilización de los operadores OWA en estos índices. Para ello, se presentará el caso con el operador OWA y el caso con el operador GOWA. A continuación, se elaborarán algunas extensiones al operador GOWA. Las extensiones se harán al operador GOWA ya que este incluye al operador OWA como un caso particular. Básicamente se presentarán los siguientes operadores:

- *Ordered weighted averaging adequacy coefficient* (OWAAC).
- *Generalized OWAAC* (GOWAAC).
- *Induced GOWAAC* (IGOWAAC).
- *Generalized hybrid AC* (GHAC).
- *Uncertain GOWAAC* (UGOWAAC).
- Etc.

Y respecto al índice del máximo y el mínimo nivel:

- *Ordered weighted averaging index of maximum and minimum level* (OWAIMAM).
- *Generalized OWAIMAM* (GOWAIMAM).
- *Induced GOWAIMAM* (IGOWAIMAM).
- *Generalized hybrid IMAM* (GHIMAM).
- *Uncertain GOWAIMAM* (UGOWAIMAM).
- Etc.

Obsérvese que además de considerar otras extensiones, también se podrían implementar en otros métodos de decisión como los que se comentarán en el apartado 10.2., en especial en el TOPSIS. Se destaca el TOPSIS ya que sigue una metodología similar pero con distancias. Por tanto, en lugar de utilizar distancias en el proceso de comparación, se podría utilizar el coeficiente de adecuación o el índice del máximo y el mínimo nivel. Además mediante el uso de estos índices, en muchos casos, se conseguiría una representación mucho más correcta del problema ya que tiene en cuenta las situaciones en donde tan bueno es alcanzar un determinado nivel ideal como sobrepasarlo. En cambio, los métodos basados en distancias no consideran este hecho lo cual puede llevar a que una alternativa que cumple sobradamente un requisito, puede encontrarse con una valoración negativa.

Ejemplo. Supongamos que una característica se supone que es ideal a partir de una valuación 0.7. Entonces, si tenemos 2 alternativas A y B con 0.6 y 0.9, respectivamente, en la mayoría de casos resultaría lógico escoger la alternativa B ya que es la que tiene un mejor resultado hasta el punto de que sobrepasa los requisitos ideales (o mínimos). En cambio, si utilizamos el método de distancias, no sucedería esto. Con A la distancia sería 0.1 y con B sería 0.2. Por el otro lado, si se utiliza el coeficiente de adecuación (para compararlo con distancias, mejor utilizar el coeficiente de adecuación dual), sí que se obtendría un resultado coherente ya que A sería 0.1 y B sería 0.

Por tanto, la conclusión a la que se llega es que utilizando el coeficiente de adecuación, se obtiene unos resultados mucho más acertados del análisis y obviamente, en el TOPSIS también se conseguirían unos resultados mucho más acertados ya que por lo comentado en el ejemplo particular, se puede observar que en el proceso de cálculo del TOPSIS hay muchos errores lo cual lleva a resultados finales erróneos que en muchas ocasiones pueden implicar decisiones erróneas.

Cabe destacar que el uso de distancias sería únicamente válido en aquellas situaciones donde se considera que el ideal es estrictamente la cifra establecida y no es un umbral a partir del cual los resultados son válidos. Entonces sí que el uso de distancia sería correcto. Pero obviamente este caso no es el habitual ya que lo normal es establecer una cifra que se considera como umbral a partir del cual los resultados son válidos. Por ejemplo, si analizamos la variable beneficios, se podría decir que un beneficio ideal obviamente sería 1 (el máximo). Pero normalmente, el beneficio ideal se establece en una cifra no tan exigente que se considera como válida, por ejemplo, en 0.7, indicando como cifra ideal beneficios bastante elevados.

En la actualidad, en el método TOPSIS esto se soluciona mediante la fijación de un ideal a partir de los resultados disponibles, ya que entonces el mejor resultado disponible será 0 y los demás estarán por debajo.

Pero otra posible aproximación sería el establecimiento de un ideal independientemente de los resultados disponibles. Este ideal sería mucho más adecuado ya que permitiría considerar el ideal visto desde una perspectiva de requisitos mínimos a partir de los cuales se da el resultado como válido. El problema en este caso, es que con distancias el modelo podría fallar. Entonces, es donde surgiría interés por utilizar otros índices de comparación como el coeficiente de adecuación.

Para que el TOPSIS basado en distancias y con fijación de ideales independientes a los resultados sea válido, necesariamente, el establecimiento del ideal tiene que ser la mejor cifra posible ya que sino, el cálculo de distancias sería erróneo por no estar analizando estrictamente cuál es la alternativa que más se acerca al ideal.

Cabe destacar que la detección de cálculos incorrectos en estos casos va relacionado con el análisis hecho por Merigó y A.M. Gil-Lafuente (2007a) sobre el punto de unificación entre el coeficiente de adecuación y la distancia de Hamming. Este análisis, implícitamente, lo que está diciendo es que si ninguno de los valores analizados supera su respectivo ideal, entonces los resultados mediante el coeficiente de adecuación y la distancia de Hamming son iguales. Aunque no sea 100% correcto, en estos casos si que se consigue que el TOPSIS sea correcto ya que al no haber ningún caso en donde las alternativas sobrepasen los ideales, los resultados obtenidos son consistentes y siempre llevan a la decisión correcta o adecuada dentro de los aspectos analizados en la incertidumbre.

En otras palabras, con este tipo de TOPSIS, sólo se conseguirán resultados correctos cuando se den las condiciones del punto de unificación, es decir, cuando los valores disponibles no sobrepasen a los ideales (o requisitos mínimos para ser ideales). En el caso de que se acepten resultados que sobrepasen a los ideales, entonces, el concepto utilizado tiene que ser que estrictamente se deseen esos resultados y si se sobrepasan, por las razones que sean, se considera que los resultados no son favorables. La otra posibilidad para que el TOPSIS sea correcto es considerar siempre el ideal como el máximo, es decir, mediante subconjuntos borrosos, todo el ideal compuesto de unos.

En los casos habituales, es decir, ideales que no siempre son máximos sino que son requisitos a partir de los cuales se considera que el resultado es ideal, se necesita establecer otro modelo de decisión, por ejemplo, mediante el uso del coeficiente de adecuación o mediante el índice del máximo y el mínimo nivel, en lugar de distancias.

Si se elabora este nuevo método, simplemente decir que consistirá en sustituir la distancia de Hamming por el coeficiente de adecuación o por el índice del máximo y el mínimo nivel. Por lo demás, el proceso sería muy similar. Para no extendernos en exceso en este análisis, simplemente decir que esta metodología se elaborará en futuras investigaciones postdoctorales. Como se comentará en el capítulo 10 de aplicaciones, decir que de este modelo (al igual que en muchos otros) puede surgir un gran número de nuevas aportaciones mediante el uso de diferentes operadores de agregación, etc. Por tanto, el doctorando sólo se concentrará en el desarrollo de los casos más básicos o fundamentales dejando el resto de aplicaciones a la participación de otras personas, por ejemplo, futuros estudiantes del doctorando cuando este ya tenga acreditación para formar estudiantes de doctorado. Obsérvese que estas aplicaciones pueden ser de gran utilidad para estudiantes de doctorado ya que puede ser un punto de partida donde iniciarse en la investigación. Y con la ventaja de que ya tienen nuevas ideas con las que trabajar y además con la ventaja de que tienen como supervisores a gente que conoce muy bien (al detalle) estos problemas, lo cual puede ser decisivo para tener opciones de publicar en revistas de la *ISI Web of knowledge*.

7.2. Operador OWA en el coeficiente de adecuación

7.2.1. Introducción

Como se ha comentado en el anterior apartado, el coeficiente de adecuación surge como un nuevo modelo que intenta ofrecer resultados más adecuados que en la distancia de Hamming para una serie de casos, en especial, en problemas decisionales.

Con la introducción del operador OWA en el coeficiente de adecuación, se busca la posibilidad de introducir el grado de optimismo del decisor en el proceso de cálculo de dicho índice. La ventaja que ofrece es que se incluye a un gran número de casos en función de los intereses del decisor. De esta forma el decisor puede disponer de un gran número de resultados distintos que dependen del grado de optimismo con el que se haya tomado la decisión. Para dos conjuntos A y B, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador OWAAC de dimensión n, es una función $OWAAC$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $w_j \in [0,1]$ y la suma de las ponderaciones es igual a 1, tal que:

$$OWAAC\,(P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{7.1}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, y $k = 1,2,\ldots,m$.

Obsérvese que el resultado final será un resultado comprendido entre [0, 1] siendo el mejor resultado posible el 1.

Desde un punto de vista general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending OWAAC* (*DOWAAC*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending OWAAC* (*AOWAAC*) *operator*.

Si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados K_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador OWAAC puede ser expresado como:

$$OWAAC\,(P, P_k) = W^T B \tag{7.2}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador OWAAC se puede expresar de la siguiente forma:

$$OWAAC\,(P, P_k) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{7.3}$$

Otro aspecto a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{7.4}$$

Se puede demostrar que $\alpha \in [0, 1]$. A mayor parte de la ponderación concentrada en la parte inicial de W, más cerca estará α de 1 y a mayor parte de dicha ponderación en la parte final de W, más cerca estará α de 0.

La segunda medida se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{7.5}$$

Esta medida puede ser utilizada para medir la cantidad de información utilizada en el problema. Por ejemplo, si $w_j = 1$ para algún j, entonces $H(W) = 0$, y la cantidad de información utilizada es mínima.

Otra medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de favoritismo hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* ($Bal(W)$) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{7.6}$$

Como se puede observar, $Bal(W) \in [-1, 1]$. En general, para valores cercanos a 1, la agregación está dando mayor importancia a los mayores valores de la agregación. Por el otro lado, para valores cercanos a –1, la agregación esta dando mayor importancia a los menores valores de la agregación. En cambio, para valores cercanos a 0, el vector W utilizado está dando una importancia similar a los valores optimistas y pesimistas.

Una cuarta medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de divergencia de W (Yager, 2002). Se dice que esta medida resulta útil para aquellos casos en donde la medida de dispersión y el carácter actitudinal resultan incompletos. Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{7.7}$$

Como se puede observar, para el caso optimista y pesimista, $Div(W) = 0$. De forma general, podemos decir que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

También se puede observar como el operador OWAAC cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Otras propiedades a destacar en el operador OWAAC es aquella que dice que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, entonces, *OWAAC* (P, P_k) = 0. Obsérvese también que *OWAAC* (P, P_k) = *OWAAC* (P_k, P).

Otro factor a resaltar de este operador es que en muchos casos se convierte en el operador OWAD. Esto se demuestra con el siguiente teorema.

Teorema . Supongamos *OWAD* (P, P_k) es el operador OWAD y *OWADAC* (P_k, P) es el operador OWADAC. Si $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo i, entonces:

$$OWAD(P, P_k) = OWADAC(P_k, P) \tag{7.8}$$

Demostración. Sea

$$OWAD(P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \,|\, \mu_i - \mu_i^{(k)} \,|$$ y

$$OWADAC(P_k, P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Como $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ para todo i, entonces

$$OWADAC(P_k, P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P, P_k) \qquad \blacksquare$$

Analizando este teorema, se podría generalizar para todas las alternativas consideradas en el problema de decisión. El teorema que explica esta generalización es muy similar al teorema anterior con la diferencia de que ahora se considera todas las características i y todas las alternativas k.

Los operadores OWAAC pueden ser extendidos a diferentes extensiones de los OWA de una forma similar a como se ha hecho en el capítulo 4. Como en el apartado 7.3. se va estudiar el operador OWAAC generalizado a través de utilizar medias generalizadas y cuasi-aritméticas, los cuales incluyen al operador OWAAC como un caso particular, el análisis de dichas extensiones se realizará a partir de estas generalizaciones. De esta forma, se podrían destacar diferentes extensiones de los OWAAC como son el operador OWAAC inducido, el heavy, el híbrido, el incierto, el borroso, etc.

7.2.2. Tipos de *OWAAC operators*

En este apartado, se van a estudiar diferentes casos particulares de operadores *OWAAC*. Se estudiarán diferentes casos particulares a través de escoger diferentes expresiones en el vector de ponderaciones. Obsérvese que estos resultados se pueden conseguir con el *DOWAAC* o el *AOWAAC operator*. Debido a que estos operadores están totalmente relacionados a través de $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es la j-ésima ponderación del *DOWAAC* (o *OWAAC*) *operator* y w^*_{n+1-j} la j-ésima ponderación del *AOWAAC operator*, únicamente se considerará el caso genérico con operadores *OWAAC*.

Por ejemplo, se puede obtener el máximo, el mínimo, el coeficiente de adecuación normalizado y el coeficiente de adecuación ponderado.

El máximo se consigue cuando $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo cuando $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. El coeficiente de adecuación normalizado se obtiene cuando $w_j = 1/n$, para todo p_i. El coeficiente de adecuación ponderado se consigue cuando la ordenación de los argumentos iniciales coincide con la ordenación de los K_j.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *OWAAC* son el *step-OWAAC operator*, el *window-OWAAC operator*, el *olympic-OWAAC operator*, la mediana *OWAAC*, la mediana ponderada *OWAAC*, el *E-Z OWAAC weights*, el *S-OWAAC operator*, las ponderaciones que dependen de los argumentos y el *centered-OWAAC operator*, entre otros.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se obtiene el *step-OWAAC operator*. Obsérvese que el *step-OWAAC operator* se convierte en el máximo si $k = 1$ y en el mínimo si $k = n$.

De forma general, la mediana se obtiene de la siguiente forma. Primero se tiene que distinguir entre situaciones con un número de argumentos par e impar. Si n es impar se asigna $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos K_i. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande K_i.

Otro caso similar en el proceso de agregación es la utilización de la mediana ponderada. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los d_i tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otra agregación que puede ser utilizada es el *E-Z OWAAC weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. Cabe señalar que si $k = 1$, se obtiene el máximo y si $k = n$, el coeficiente de adecuación normalizado. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n. En este caso, cabe destacar que si $k = 1$, se consigue el máximo y si $k = n$, el coeficiente de adecuación normalizado.

Otra familia de operadores *OWAAC* a destacar es el *S-OWAAC operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-OWAAC operator*. El *generalized S-OWAAC operator* se obtiene cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-OWAAC operator* se convierte en el *andlike S-OWAAC operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-OWAAC operator*. También destacar que si $\alpha + \beta = 1$, el *generalized S-OWAAC operator* se transforma en el coeficiente de adecuación según el criterio de Hurwicz.

Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-OWAAC operator*. Como se puede observar, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$. En este caso, el *window-OWAAC operator* se convierte en el máximo si $m = k = 1$, en el mínimo si $m = 1$, $k = n$, y en el coeficiente de adecuación normalizado si $m = n$ y $k = 1$.

Un caso de gran utilidad es el *olympic OWAAC average*. Se produce cuando $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$. El *olympic-OWAAC average* se transforma en la mediana si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-OWAAC operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$.

Otro caso particular de operador *OWAAC* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-OWAAC operator*.

$$w_j = \frac{b_j^\alpha}{\sum_{j=1}^{n} b_j^\alpha} \tag{7.9}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es la j-ésima diferencia individual más grande de los argumentos k_i. Se observa que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$. Cabe destacar que si $\alpha = 0$, se obtiene el coeficiente de adecuación normalizado y si $\alpha = \infty$, se obtiene el máximo. Otros caso de operadores dependientes podrían ir definidos a través de $(1 - b_j)^\alpha$, $(1/b_j)^\alpha$, etc.

En el caso de los operadores *OWAAC*, también se puede estudiar la metodología de Filev y Yager (1998), los cuales sugirieron otros dos métodos para determinar las ponderaciones *OWAAC*. Para el primer método, las ponderaciones se expresan de la siguiente forma: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Y para el segundo método: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otro tipo de operador *OWAAC* es el *centered OWAAC weights*. Este tipo de operador dice que un operador *OWAAC* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo.

- Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$.
- Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$.
- Es inclusivo si $w_j > 0$.

Cabe destacar que es posible considerar una relajación de la segunda condición a través de utilizar $w_i \leq w_j$ en vez de $w_i < w_j$. Estos casos se les denomina como *softly decaying centered OWAAC operator*. Un caso particular de este último tipo es la media aritmética incierta ya que todas sus ponderaciones son iguales y por tanto, no es estrictamente decreciente con respecto del centro. Otro caso particular del *centered OWAAC* es aquel que no cumple la tercera condición de inclusividad. A este tipo de *centered OWAAC* se le conoce como *non-inclusive centered OWAAC operator*. En este tipo de *centered OWAAC* se encuentra como caso particular la mediana.

Otro método de gran utilidad para obtener los coeficientes es el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWAAC*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *OWAAC* w_j para $j = 1$ hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{7.10}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar el carácter actitudinal y la medida de dispersión. La metodología a utilizar en los operadores *OWAAC* es la misma que en los operadores *OWAAC* ya que en ambos casos las ponderaciones son números precisos. A modo de resumen, se puede decir lo siguiente. Un primer método es aquel que calcula las ponderaciones a través de maximizar la medida de dispersión sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. Este método es conocido como el *maximal entropy OWAAC* (*MEOWAAC*) *weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \\ &\text{sujeto a: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha(W) = \alpha \\ &\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned} \tag{7.11}$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo a Filev y Yager (1995), en este caso también se puede desarrollar un método analítico para obtener las ponderaciones *MEOWAAC* mediante el uso de los multiplicadores de Lagrange.

Un segundo método consiste en minimizar la variabilidad de las ponderaciones sujeto a un determinado nivel de optimismo o carácter actitudinal. A este método se le denomina *minimal variability OWAAC weights*. Su formulación es la siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2} \\ &\text{sujeto a: } \alpha(W) = \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-j)w_j = \alpha \end{aligned} \tag{7.12}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

con $\alpha \in [0, 1]$. Siguiendo a Fullér y Majlender (2003) se puede solucionar este problema a través de utilizar las condiciones de segundo orden de Kuhn-Tucker. Otra posibilidad sería utilizar la entropía de Rényi (1961) en el problema. Este modelo se conoce como *maximal Rényi entropy OWAAC weights*.

7.2.3. Extensiones a los *OWAAC operators*

Como se ha comentado en la introducción, se pueden elaborar un gran número de extensiones a los operadores OWAAC siguiendo con la metodología explicada en los capítulos 4, 5 y 6. Para evitar redundancia, en este caso simplemente se mencionarán algunas de las múltiples extensiones que se podrían hacer. Por ejemplo, se podría destacar los siguientes casos:

- *Induced OWAAC* (IOWAAC).
- *Hybrid AC* (HAC).
- *Uncertain OWAAC* (UOWAAC).
- *Fuzzy OWAAC* (FOWAAC).
- *Induced hybrid AC* (IHAC).
- *Uncertain induced OWAAC* (UIOWAAC).
- *Fuzzy induced OWAAC* (FIOWAAC).
- *Uncertain hybrid AC* (UHAC).
- *Fuzzy hybrid AC* (FHAC).
- *Heavy OWAAC* (HOWAAC).
- *Induced heavy OWAAC* (IHOWAAC).
- *Uncertain heavy OWAAC* (UHOWAAC).
- *Fuzzy heavy OWAAC* (FHOWAAC).
- *Uncertain induced heavy OWAAC* (UIHOWAAC).
- *Fuzzy induced heavy OWAAC* (FIHOWAAC).
- *Weighted OWAAC* (WOWAAC).
- *Induced weighted OWAAC* (IWOWAAC).
- *Uncertain weighted OWAAC* (UWOWAAC).
- *Fuzzy weighted OWAAC* (FWOWAAC).
- *Uncertain induced weighted OWAAC* (UIWOWAAC).
- *Fuzzy induced weighted OWAAC* (FIWOWAAC).
- Etc

Y así, sucesivamente se podrían ir analizando un gran número de extensiones a los operadores OWAAC.

7.3. El coeficiente de adecuación generalizado

7.3.1. Introducción

El coeficiente de adecuación generalizado es una formulación más general al coeficiente de adecuación a través de utilizar medias generalizadas (o cuasi-aritméticas). Con esta formulación se consigue una representación mucho más completa ya que aparte de incluir al coeficiente de adecuación tradicional, se incluyen a muchos otros casos, como por ejemplo el caso geométrico, el cuadrático, etc. En primer lugar, se va a definir el caso general con medias ponderadas, es decir el *weighted generalized adequacy coefficient* (WGAC).

Definición. Un operador WGAC de dimensión n es una función WGAC: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\mathrm{WGAC}(P_k, P) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i [1 \wedge (1 - \mu_i - \mu_i^{(k)})]^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.13}$$

donde μ_i y μ_i^k son el i-ésimo argumento de los conjuntos P_k y P, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$ y las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Como se puede observar, si $w_i = 1/n$, se obtiene el coeficiente de adecuación generalizado normalizado. Obsérvese que a través de analizar al parámetro λ también se obtienen una amplia gama de operadores de medias. Por ejemplo, si $\lambda = 1$, se obtiene el *weighted adequacy coefficient* (WAC), y si $\lambda = 2$, el *weighted quadratic averaging adequacy coefficient* (WQAAC).

Si se va un paso más allá, es posible considerar una generalización mayor a través de utilizar operadores OWA. Entonces, se obtiene lo siguiente.

Definición. Un operador GOWAAC de dimensión n es una función GOWAAC: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\mathrm{GOWAAC}\ (p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.14}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$ y las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0, 1]$.

Obsérvese también que desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending GOWAAC* (*DGOWAAC*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending GOWAAC* (*AGOWAAC*) *operator*.

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados K_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador GOWAAC puede ser expresado como:

$$GOWAAC\ (P, P_k) = W^T B \tag{7.15}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador GOWAAC se puede expresar de la siguiente forma:

$$GOWAAC\ (P, P_k) = \frac{1}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{7.16}$$

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{7.17}$$

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{7.18}$$

La tercera medida es aquella que mide el grado de tendencia hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* ($Bal(W)$) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{7.19}$$

Una cuarta medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de divergencia de W (Yager, 2002). Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{7.20}$$

También se puede observar como el operador GOWAAC cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $k_i \geq e_i$ para todo i, entonces, $GOWAAC(k_1,\ldots, k_n) \geq GOWAAC(e_1,\ldots, e_n)$, siendo k_i y e_i las distancias individuales entre los dos conjuntos. Es idempotente porque si $k_i = k$, para todo i, entonces,

$GOWAAC(k_1,\ldots, k_n) = k$. Finalmente, es limitado porque $\min\{k_i\} \leq GOWAAC(k_1,\ldots, k_n) \leq \max\{k_i\}$. Otras propiedades a destacar en el operador GOWAAC es aquella que dice que si $x_i = y_i$ para todo $i \in [1, n]$, entonces, $K(X, Y) = 0$. Obsérvese también que $K(X, Y) = K(Y, X)$.

Otro aspecto a destacar es el punto de unificación entre el operador GOWAD (o MOWAD) y el GOWAAC que puede ser demostrado mediante el siguiente teorema.

Teorema. Supongamos que GOWAD(d_1, d_2,…, d_n) es el operador GOWAD y GOWADAC(s_1, s_2,…, s_n) el operador GOWADAC. Si $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo i, entonces:

$$\text{GOWAD}\ (d_1, d_2,\ldots, d_n) = \text{GOWADAC}\ (s_1, s_2,\ldots, s_n) \tag{7.21}$$

Demostración. Sea

$$\text{GOWAD}\ (d_1, d_2,\ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, |\, \mu_i - \mu_i^{(k)}\, | \tag{7.22}$$

$$\text{GOWADAC}\ (s_1, s_2,\ldots, s_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] \tag{7.23}$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$\text{GOWADAC}\ (s_1, s_2,\ldots, s_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{GOWAD}\ (d_1, d_2,\ldots, d_n) \quad \blacksquare$$

Finalmente, también cabe destacar la posibilidad de elaborar una generalización mayor que incluye al GOWAAC a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará el *Quasi-OWAAC operator*. Se define de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-OWAAC de dimensión n es una función QOWAAC: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\text{QOWAAC}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(K_j\right)\right) \tag{7.24}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, g es una función monótona estrictamente continua y las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0, 1]$.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-OWAAC se convierte en el operador GOWAAC. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DOWAAC) y ascendentes (Quasi-AOWAAC).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador GOWAAC también son aplicables al operador Quasi-OWAAC.

7.3.2. Tipos de *generalized OWAAC operators*

7.3.2.1. Análisis del vector de ponderaciones *W*

A través de analizar el vector de ponderaciones, se pueden obtener un gran número de casos particulares. Entre ellos, se destaca el máximo, el mínimo, el coeficiente de adecuación generalizado normalizado, el coeficiente de adecuación generalizado ponderado, el coeficiente de adecuación generalizado según el criterio de Hurwicz. Estos resultados y los que se estudiarán posteriormente pueden ser obtenidos mediante el operador *DGOWAAC* o mediante el operador *AGOWAAC*.

En el operador *GOWAAC*, el máximo se obtiene cuando $w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$. El mínimo si $w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$. El coeficiente de adecuación generalizado se consigue cuando $w_j = 1/n$, para todo K_i, y el ponderado se forma, aunque sea artificialmente, cuando la ordenación de los p_i coincide con la ordenación de los K_j. Finalmente, el coeficiente de adecuación generalizado según el criterio de Hurwicz se forma cuando $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$.

Otros ejemplos de casos particulares de operadores *GOWAAC* son el *step-GOWAAC operator*, el *window-GOWAAC operator*, el *olympic-GOWAAC operator*, la mediana *GOWAAC*, la mediana ponderada *GOWAAC*, el *E-Z GOWAAC weights*, el *S-GOWAAC operator*, las ponderaciones que dependen de los objetos agregados, el *centered-GOWAAC operator* y el *Gaussian-GOWAAC weights*, entre otros.

Si $w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$, se consigue, el *step-GOWAAC operator*. Cuando $w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$, se obtiene el *window-GOWAAC operator*. En este caso, k y m tienen que ser números enteros positivos tales que $k + m - 1 \leq n$.

Si $w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$, entonces se consigue el *olympic-GOWAAC average*. El *olympic-GOWAAC operator* se transforma en la mediana *GOWAAC* si $n = 3$ o $n = 4$ y en el *window-GOWAAC operator* si $m = n - 2$ y $k = 2$. Obsérvese que también es posible formular un caso más general de *olympic-GOWAAC operator* (Liu, 2009).

Otra familia de operadores *GOWAAC* es el *S-GOWAAC operator*. Se subdivide en tres tipos distintos: el *orlike*, el *andlike* y el *generalized S-GOWAAC operator*. El *generalized S-GOWAAC operator* se consigue cuando $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$. En este caso, si $\alpha = 0$, el *generalized S-GOWAAC operator* se convierte en el *andlike S-GOWAAC operator* y si $\beta = 0$, se convierte en el *orlike S-GOWAAC operator*.

Para la mediana *GOWAAC* se tiene que distinguir entre 2 situaciones. Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos p_i. Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande p_i.

Otra alternativa similar es la utilización de la mediana ponderada *GOWAAC*. En este caso se selecciona el argumento que tiene el k-ésimo más grande de los p_i tal que la suma de los coeficientes w_j desde 1 hasta k es igual o superior que 0.5 y la suma de los coeficientes desde 1 hasta $k - 1$ es menor que 0.5.

Otro caso particular es el *E-Z GOWAAC weights*. En este caso, se tiene que distinguir entre dos clases diferentes. Una primera clase es aquella en donde se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$. En la segunda clase se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.

Otro tipo de operador *GOWAAC* es aquel en el cual los coeficientes w_j dependen de los argumentos agregados. Por ejemplo, se podría desarrollar el *BADD-GOWAAC operator*.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{7.25}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos p_i. Otra familia de *GOWAAC operators* que dependen de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1 - b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1 - b_j)^{\alpha}} \tag{7.26}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos p_i. Un tercer tipo de operadores *GOWAAC* que depende de los objetos agregados es:

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{7.27}$$

donde $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j es el j-ésimo elemento más grande de los argumentos p_i.

Siguiendo con la metodología de Filev y Yager (1998), se pueden desarrollar dos métodos más para determinar las ponderaciones *GOWAAC*. Para el primer método, los coeficientes quedan expresados de la siguiente manera: $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, y $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$. Para el segundo método, los coeficientes se obtienen como se muestra a continuación: $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, y $w_j = w_j(1 - w_n)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$.

Otro caso particular es el *centered-GOWAAC weights*. Este tipo de operador dice que un operador *GOWAAC* será una agregación centrada si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo. Es simétrico si $w_j = w_{j+n-1}$. Es estrictamente decreciente con respecto del centro cuando $i < j \leq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$ y cuando $i > j \geq (n + 1)/2$, entonces $w_i < w_j$. Es inclusivo si $w_j > 0$

Un caso especial de *centered-GOWAAC* es el *Gaussian-GOWAAC weights*. Para poder definirlo, primero se tiene que considerar una distribución Gaussiana $\eta(\mu, \sigma)$ donde:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{7.28}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{7.29}$$

Asumiendo que:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{7.30}$$

Se pueden definir los *GOWAAC weights* como:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{7.31}$$

Se comprueba que la suma de los coeficientes es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otro método de gran utilidad para obtener las ponderaciones *GOWAAC* es a través de utilizar el método funcional introducido por Yager (1996b) para los operadores *OWA*. De forma resumida, podemos decir lo siguiente. Sea f una función f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] tal que $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ para $x > y$. Esta función se conoce como *basic unit interval monotonic function* (*BUM*). Utilizando esta función *BUM* se pueden obtener las ponderaciones *GOWAAC* w_j para j = 1 hasta n de la siguiente forma:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{7.32}$$

Se puede demostrar fácilmente que utilizando este método las ponderaciones w_j satisfacen que la suma de todos ellos es 1 y $w_j \in [0,1]$.

Otra forma de obtener las ponderaciones w_j es a través de utilizar medidas que caracterizan las ponderaciones como el carácter actitudinal y la medida de dispersión. Entonces, si se desarrolla el *maximal entropy GOWAAC* (*MEGOWAAC*) *weights* se obtiene la siguiente expresión:

$$\text{maximizar:} -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{7.33}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se utiliza el *minimal variability GOWAAC weights*, su formulación es la siguiente:

$$\text{minimizar: } D^2(W) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} w_j^2 - \frac{1}{n^2}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{7.34}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Si se resuelve el problema del cálculo de las ponderaciones mediante el *maximal Rényi entropy GOWAAC weights*, el resultado es el siguiente:

$$\text{maximizar: } H_{\beta}(W) = \frac{1}{1-\beta}\log_2 \sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta} = \log_2\left(\sum_{j=1}^{n} w_j^{\beta}\right)^{1/(1-\beta)}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{7.35}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Por último, se puede destacar la posibilidad de calcular las ponderaciones mediante el *minimax disparity GOWAAC weights* y se puede formular de la siguiente manera:

$$\text{minimizar: } \left\{ \underset{j \in \{1,\ldots,n-1\}}{Max} \left| w_j - w_{j+1} \right| \right\}$$

$$\text{sujeto a: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \alpha(W) = \alpha \tag{7.36}$$

$$\sum_{j=1}^{n} w_j = 1, \quad w_j \in [0,1], \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Cabe destacar la posibilidad de utilizar otra amplia gama de métodos para obtener las ponderaciones. De forma orientativa, se puede decir que la mayoría de los métodos desarrollados para los operadores *OWA*, también son aplicables a muchas de sus extensiones como en este caso el operador *GOWAAC*. (Ahn, 2006; 2007; 2008; Ahn y Park, 2008; Amin, 2007; Amin y Emrouznejad, 2006; Beliakov, 2005; Emrouznejad, 2008; Hong, 2006; Liu, 2006; 2007, 2008; 2009; Liu y Han, 2008; Troiano y Yager, 2005; Wang y Parkan, 2005; 2007, Wang et al., 2007; Wu et al., 2007; Xu, 2005; 2006d; 2008a; Yager, 1988; 1993; 1994; 1996; 1999; 2002; 2007a; 2007b; Zarghami y Szidarovsky, 2008; Zarghami et al., 2008).

7.3.2.2. Análisis del parámetro λ

A través de estudiar el parámetro λ, se pueden obtener una amplia gama de casos particulares del operador *GOWAAC*. Por ejemplo, se puede destacar el operador *OWAAC*, el operador *OWGAC*, el operador *OWHAAC* y el operador *OWQAAC*.

El operador *OWAAC* se obtiene cuando $\lambda = 1$.

$$GOWAAC\,(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^1 \right)^{1/1} = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \qquad (7.37)$$

Como se puede observar, el resultado obtenido es el operador *OWAAC*.

Si $\lambda = 0$, se obtiene el operador *OWGAC*.

$$GOWAAC\,(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^0 \right)^{1/0} = \prod_{j=1}^{n} D_j^{w_j} \qquad (7.38)$$

Obsérvese que se puede distinguir entre ordenaciones descendentes (*descending OWGAC* (*DOWGAC*) *operator*) y ascendentes (*ascending OWGAC* (*AOWGAC*) *operator*) mediante la relación $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *DOWGAC* (o *OWGAC*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *AOWGAC operator*.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes casos particulares del vector de ponderaciones. Por ejemplo, se podría utilizar en la agregación el coeficiente de adecuación normalizado geométrico, el ponderado geométrico, el *step-OWGAC operator*, el *window-OWGAC operator*, el *olympic-OWGAC operator*, la mediana *OWGAC*, la mediana ponderada *OWGAC*, el *E-Z OWGAC weights*, el *S-OWGAC operator*, los operadores *OWGAC* que dependen de los argumentos, el *centered-OWGAC operator*, el *Gaussian-OWGAC weights*, y muchos otros más.

Si $\lambda = 2$, se obtiene el operador *OWQAAC*.

$$GOWAAC\,(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2} \qquad (7.39)$$

En este caso, también se puede distinguir entre versiones descendentes (*descending OWQAAC* (*DOWQAAC*) *operator*) y versiones ascendentes (*ascending OWQAAC* (*AOWQAAC*) *operator*).

También se tiene que señalar la posibilidad de utilizar diferentes tipos de operadores *OWQAD* a través del vector de ponderaciones. Por ejemplo, el coeficiente de adecuación cuadrático, el ponderado cuadrático, el *step-OWQAAC operator*, el *olympic-OWQAAC operator*, la mediana *OWQAAC*, la mediana ponderada *OWQAAC*, el *S-OWQAAC operator*, el *dependent-OWQAAC*, el *centered-OWQAAC operator*, y muchos otros más.

Si $\lambda = -1$, se obtiene el operador *OWHAAC*.

$$GOWAAC\,(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{-1}\right)^{1/-1} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{D_j}} \tag{7.40}$$

En el operador *OWHAAC* también es posible distinguir entre el *descending OWHAAC* (*DOWHAAC*) *operator* y el *ascending OWHAAC* (*AOWHAAC*) *operator*.

En este operador, también se puede utilizar diferentes casos particulares como el coeficiente de adecuación harmónico, el harmónico ponderado, el *step-OWHAAC operator*, el *window-OWHAAC operator*, el *olympic-OWHAAC operator*, la mediana *OWHAAC*, el *S-OWHAAC operator*, el *centered-OWHAAC operator*, y muchos otros más.

7.3.3. Extensiones a los *GOWAAC operators*

Como se ha comentado en la introducción, se pueden elaborar un gran número de extensiones a los operadores GOWAAC siguiendo con la metodología explicada en los capítulos 4, 5 y 6. Para evitar redundancia, en este caso simplemente se mencionarán algunas de las múltiples extensiones que se podrían hacer. Por ejemplo, se podría destacar los siguientes casos:

- *Induced GOWAAC* (IGOWAAC).
- *Generalized hybrid AC* (GHAC).
- *Uncertain GOWAAC* (UGOWAAC).
- *Fuzzy GOWAAC* (FGOWAAC).
- *Induced generalized hybrid AC* (IGHAC).
- *Uncertain induced GOWAAC* (UIGOWAAC).
- *Fuzzy induced GOWAAC* (FIGOWAAC).
- *Uncertain generalized hybrid AC* (UGHAC).
- *Fuzzy generalized hybrid AC* (FGHAC).
- *Weighted GOWAAC* (WGOWAAC).
- *Induced weighted GOWAAC* (IWGOWAAC).

- *Uncertain weighted GOWAAC* (UWGOWAAC).
- *Fuzzy weighted GOWAAC* (FWGOWAAC).
- *Uncertain induced weighted GOWAAC* (UIWGOWAAC).
- *Fuzzy induced weighted GOWAAC* (FIWGOWAAC).
- Etc.

Y así, sucesivamente se podrían ir analizando un gran número de extensiones a los operadores GOWAAC.

7.3.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de estrategias

A continuación, se desarrolla un ejemplo ilustrativo de estos operadores de agregación. Se analiza un problema de toma de decisiones en la selección de estrategias. Se analizará desde la perspectiva del operador GOWAAC ya que este incluye a un gran número de casos particulares, entre otros el OWAAC.

Supongamos que una empresa está analizando su política general para el próximo año y se consideran 5 estrategias a seguir.

- A_1: Estrategia 1.
- A_2: Estrategia 2.
- A_3: Estrategia 3.
- A_4: Estrategia 4.
- A_5: Estrategia 5.

Para evaluar estas estrategias, la empresa utiliza a un grupo de expertos que consideran diferentes características de la empresa que se pueden resumir en las 6 siguientes.

- C_1 = Riesgo de la estrategia.
- C_2 = Dificultad.
- C_3 = Beneficios en el corto plazo.
- C_4 = Beneficios en el medio plazo.
- C_5 = Beneficios en el largo plazo.
- C_6 = Otras variables.

Los expertos representan los resultados en la siguiente tabla en función de la característica C_i y la alternativa A_k. Obsérvese que valores cercanos a 1 implica que los resultados son buenos y valores cercanos a 0, malos.

Tabla: Resultados esperados

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.6	0.9	0.9	0.7	0.7
A_2	0.8	0.4	0.7	0.6	0.8	0.9
A_3	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.7
A_4	0.5	0.8	0.8	0.8	0.6	0.9
A_5	0.7	0.8	0.9	1	0.8	0.4

El grupo de expertos consideran el siguiente vector de ponderaciones: $W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$. Obsérvese que este vector representa el grado de optimismo de la empresa. Para llevar a cabo el análisis, se determina una alternativa ideal imaginaria. Los resultados de esta estrategia ideal se muestran en la siguiente tabla.

Tabla: Estrategia ideal

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.8	0.9	1	0.8	1	0.8

Obviamente, resultados mayores al ideal también son válidos por lo que no pueden ser penalizados como sucede con las medidas de distancia. De aquí que resulte interesante utilizar el coeficiente de adecuación. Obsérvese que se podrían utilizar otros métodos similares como el índice del máximo y el mínimo nivel (J. Gil-Lafuente, 2002).

Con esta información, se pueden agregar los resultados esperados para obtener un resultado representativo para cada alternativa. Primero se va a considerar los resultados obtenidos con el coeficiente de adecuación normalizado (NAC), el cuadrático (QAC), el ponderado (WAC), el ponderado cuadrático (WQAC) y el operador OWAAC. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla: Resultados agregados 1

	NAC	QAC	WAC	WQAC	OWAAC
A_1	0.85	0.857	0.86	0.867	0.81
A_2	0.8	0.818	0.84	0.854	0.73
A_3	0.85	0.855	0.88	0.884	0.81
A_4	0.83	0.846	0.86	0.875	0.77
A_5	0.85	0.859	0.81	0.824	0.8

Ahora, se va a considerar los resultados obtenidos a través de utilizar otros casos particulares del operador GOWAAC como el AOWAAC, el OWQAAC, el step-OWAAC (k = 2), la mediana-OWAAC y el olympic-OWAAC. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla: Resultados agregados 2

	AOWAAC	OWQAAC	step	median	olympic
A_1	0.89	0.817	0.9	0.9	0.85
A_2	0.86	0.751	1	0.8	0.825
A_3	0.89	0.815	0.9	0.85	0.85
A_4	0.89	0.784	1	0.85	0.85
A_5	0.89	0.812	0.9	0.9	0.875

Como se puede observar, en función del operador de agregación escogido, los resultados son diferentes. Esto puede llevar a que el decisor pueda tomar decisiones diferentes según el método particular de GOWAAC escogido. La gran ventaja del GOWAAC es la posibilidad de considerar una amplia gama de casos particulares, lo cual hace que el decisor tenga una visión mucho más completa del problema. Entonces, escogerá una alternativa en función de sus intereses pero a su vez, será consciente de otros resultados potenciales que podrían producirse.

Otro aspecto interesante, es el establecer una ordenación de las alternativas. Obsérvese que esto resulta de utilidad cuando se quiere considerar más de una alternativa. Los resultados se muestran en la siguiente tabla. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las estrategias

	Ordenación		Ordenación
NAC	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	AOWAAC	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
QAC	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	OWQAAC	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
WAC	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_2 \succ A_5$	Step	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
WQAC	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$	Median	$A_1=A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
OWAAC	$A_1=A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic	$A_5 \succ A_1=A_3=A_4 \succ A_2$

Como se puede observar, en función del operador de agregación escogido, la ordenación de las estrategias es diferente. Entonces, estos resultados pueden llevar a diferentes decisiones.

7.4. Operador OWA en el índice del máximo y el mínimo nivel

7.4.1. Introducción

Un modelo más completo al coeficiente de adecuación y a los métodos basados en distancias es el índice del máximo y el mínimo nivel (IMAM). Este índice utiliza en la misma formulación tanto a las distancias como al coeficiente de adecuación de tal forma que escogerá a uno o a otro para cada característica según cual sea el que más se adapte al problema particular.

Una extensión más completa al IMAM es aquella que utiliza el operador OWA en el índice. Este hecho resulta de interés cuando se desea sobrevalorar o infravalorar los resultados obtenidos con el IMAM en función del grado de optimismo del decisor. A este operador se le denominará el *ordered weighted averaging index of maximum and minimum level* (OWAIMAM) y se define de la siguiente forma.

Definición. Un operador OWAIMAM de dimensión n, es una función *OWAIMAM*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $w_j \in [0, 1]$ y la suma de las ponderaciones es 1, tal que:

$$OWAIMAM(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{7.41}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de todos los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; con $k = 1,2,\ldots,m$.

Desde un punto de vista general en la reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DOWAIMAM) y ascendentes (AOWAIMAM).

Si K es un vector correspondiente a los argumentos ordenados K_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador OWAIMAM se puede expresar:

$$OWAIMAM(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{7.42}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador OWAIMAM se puede expresar de la siguiente forma:

$$OWAIMAM(p_1, p_2 \ldots, p_n) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{7.43}$$

De forma análoga al operador OWAIMAM, también se podría considerar un índice dual al OWAIMAM porque: $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. A este índice se le denominará *ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level* (OWADIMAM). It is defined as follows.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones (Yager, 1988; 1996; 2002) del OWAIMAM como por ejemplo el carácter actitudinal $\alpha(W)$, la medida de entropía de dispersión, el operador de balance y la medida de divergencia.

También resulta interesante mencionar que en mucho casos, este operador se convierte en el operador OWAD. Esto sucede cuando se cumplen las condiciones del siguiente teorema.

Teorema. Supongamos que OWAD(P, P_k) es el operador OWAD y OWAIMAM(P_k, P) el operador OWAIMAM. Si $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo i, entonces:

$$\text{OWAD}(P, P_k) = \text{OWAIMAM}(P_k, P) \tag{7.44}$$

Demostración. Sea

$$\text{OWAD}(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \,|\mu_i - \mu_i^{(k)}|^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.45}$$

$$\text{OWAIMAM}(P_k, P) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.46}$$

Como $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ para todo i, entonces

$$\text{OWAIMAM}(P_k, P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{OWAD}(P, P_k) \qquad \blacksquare$$

Analizando este teorema, se podría generalizar para todas las alternativas consideradas en el problema de decisión. El teorema que explica esta generalización es muy similar al teorema anterior con la diferencia de que ahora se considera todas las características i y todas las alternativas k.

7.4.2. Tipos de *OWAIMAM operators*

A través de utilizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones W, se pueden obtener diferentes casos particulares de operadores OWAIMAM. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes. Obsérvese que este apartado se desarrolla de forma resumida ya que se seguiría con la misma metodología que se ha desarrollado a lo largo de toda la tesis y se considera innecesario el exponer detalladamente estos casos. Además, todos estos casos son casos particulares del GOWAIMAM, el cual sí será comentado con más detalle.

- El máximo ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).

- El IMAM normalizado ($w_j = 1/n$, para todo K_i).
- El IMAM ponderado (la ordenación de los p_i coincide con la ordenación de los K_j).
- El IMAM según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-OWAIMAM* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-OWAIMAM* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-OWAIMAM operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-OWAIMAM.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos p_i.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande p_i.
- El *S-OWAIMAM* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z OWAIMAM (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-OWAIMAM* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-OWAIMAM*.
- El *dependent-OWAIMAM*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

7.4.3. Extensiones a los *OWAIMAM operators*

En este caso, también se podrían considerar un gran número de extensiones siguiendo con la metodología explicada en los capítulos 4, 5 y 6. Para evitar redundancia, en este caso simplemente se mencionarán algunas de las múltiples extensiones que se podrían hacer. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes casos:

- *Induced OWAIMAM* (IOWAIMAM).
- *Hybrid IMAM* (HIMAM).
- *Uncertain OWAIMAM* (UOWAIMAM).
- *Fuzzy OWAIMAM* (FOWAIMAM).
- *Induced hybrid IMAM* (IHIMAM).
- *Uncertain induced OWAIMAM* (UIOWAIMAM).
- *Fuzzy induced OWAIMAM* (FIOWAIMAM).
- *Uncertain hybrid IMAM* (UHIMAM).

- *Fuzzy hybrid IMAM* (FHIMAM).
- *Heavy OWAIMAM* (HOWAIMAM).
- *Induced heavy OWAIMAM* (IHOWAIMAM).
- *Uncertain heavy OWAIMAM* (UHOWAIMAM).
- *Fuzzy heavy OWAIMAM* (FHOWAIMAM).
- *Uncertain induced heavy OWAIMAM* (UIHOWAIMAM).
- *Fuzzy induced heavy OWAIMAM* (FIHOWAIMAM).
- *Weighted OWAIMAM* (WOWAIMAM).
- *Induced weighted OWAIMAM* (IWOWAIMAM).
- *Uncertain weighted OWAIMAM* (UWOWAIMAM).
- *Fuzzy weighted OWAIMAM* (FWOWAIMAM).
- *Uncertain induced weighted OWAIMAM* (UIWOWAIMAM).
- *Fuzzy induced weighted OWAIMAM* (FIWOWAIMAM).
- Etc

Y así, sucesivamente se podrían ir analizando un gran número de extensiones a los operadores OWAIMAM.

7.5. El índice del máximo y el mínimo nivel generalizado

7.5.1. Introducción

El operador OWAIMAM puede ser generalizado mediante el uso de medias generalizadas o cuasi-aritméticas. Entonces, se obtiene una formulación mucho más general que incluye al operador OWAIMAM y a muchos otros casos. La gran ventaja de este operador es la posibilidad de incluir a un gran número de situaciones en su formulación lo cual permite que el decisor tenga una información mucho más completa del problema. Se puede definir de la siguiente manera. En primer lugar, se considera la definición mediante el uso de ponderaciones simples, es decir mediante el IMAM ponderado generalizado (WGIMAM).

Definición. Un operador WGIMAM de dimensión n es una función WGIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones asociado W de dimensión n con las siguientes propiedades:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y tal que

WGIMAM(P_k, P) =

$$= \left(\sum_u w_i(u) \times \left| \mu_i(u) - \mu_i^{(k)}(u) \right|^{\lambda} + \sum_v w_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(k)}(v)) \right]^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \qquad (7.47)$$

donde μ_i y μ_i^k son los i-ésimos argumentos de los conjuntos P_k y P, $u + v = n$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $w_i = 1/n$, se obtiene el IMAM generalizado simple. Obsérvese que si se analiza el parámetro λ, también se obtienen un gran número de casos. Por ejemplo, si $\lambda = 1$, se obtiene el IMAM ponderado (WIMAM), y si $\lambda = 2$, se obtiene el IMAM cuadrático ponderado IMAM (WQAIMAM).

Si se va un paso más adelante, es posible desarrollar una generalización mayor a través de utilizar el operador OWA. Entonces, se obtiene lo siguiente.

Definición. Un operador GOWAIMAM de dimensión n es una función GOWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W con las siguientes propiedades:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y tal que

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.48}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de todos los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; $k = 1,2,\ldots,m$; y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que es posible distinguir entre el *descending generalized OWAIMAM* (DGOWAIMAM) *operator* y el *ascending generalized OWAIMAM* (AGOWAIMAM) *operator*. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DGOWAIMAM y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del AGOWAIMAM.

De forma análoga al operador GOWAIMAM, se puede sugerir un índice de alejamiento equivalente que es el dual del GOWAIMAM porque $Q(P_k, P) = 1 - K(P_k, P)$. Se le denominará el *generalized ordered weighted averaging dual IMAM* (GOWADIMAM).

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados K_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador GOWAIMAM puede ser expresado como:

$$GOWAIMAM\,(P, P_k) = W^T B \tag{7.49}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, entonces, el operador GOWAIMAM se puede expresar de la siguiente forma:

$$GOWAD\,(P, P_k) = \frac{1}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.50}$$

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.51}$$

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{7.52}$$

Una tercera medida a analizar es aquella que mide el grado de tendencia hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* (*Bal*(*W*)) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{7.53}$$

Una cuarta medida para estudiar el vector *W* es aquella que mide el grado de divergencia de *W* (Yager, 2002). En el caso del operador GOWAIMAM se dice que esta medida resulta útil para aquellos casos en donde la medida de dispersión y el carácter actitudinal resultan incompletos. Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{7.54}$$

También se puede destacar que el operador GOWAIMAM cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $p_i \geq e_i$ para todo *i*, entonces, *GOWAIMAM* ($p_1,\ldots, p_n$) $\geq$ *HA*($e_1,\ldots, e_n$), siendo p_i y e_i las diferencias individuales entre los dos conjuntos. Es idempotente porque si $p_i = p$, para todo *i*, entonces, *GOWAIMAM* ($p_1,\ldots, p_n$) = *p*. Finalmente, es limitado porque $\min\{p_i\} \leq$ *GOWAIMAM* ($p_1,\ldots, p_n$) $\leq \max\{p_i\}$. Otras propiedades a destacar en el operador GOWAIMAM es aquella que dice que si $p_i = e_i$ para todo $i \in [1, n]$, entonces, *GOWAIMAM* (*P*, *E*) = 0. Obsérvese también que *GOWAIMAM* (*P*, *E*) = *GOWAIMAM* (*E*, *P*).

Otro aspecto a destacar es el punto de unificación entre el operador GOWAD (o MOWAD) y el GOWAIMAM que dice que el GOWAIMAM se convierte en muchos casos en el operador GOWAD.

Teorema. Supongamos GOWAD(P, P_k) es el operador GOWAD y GOWAIMAM (P_k, *P*) el operador GOWAIMAM. Si $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo *i*, entonces:

$$\text{GOWAD}(P, P_k) = \text{GOWAIMAM}(P_k, P) \tag{7.55}$$

Demostración. Sea

$$\text{GOWAD}(P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, | \mu_i - \mu_i^{(k)} | \tag{7.56}$$

$$\text{GOWAIMAM}(P_k, P) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7.57}$$

Como $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ para todo *i*, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ para todo *i*, entonces

$$\text{GOWAIMAM}(P_k, P) = \sum_{j=1}^{n} w_j(\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{MOWAD}(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Analizando este teorema, se podría generalizar para todas las alternativas consideradas en el problema de decisión. El teorema que explica esta generalización es muy similar al teorema anterior con la diferencia de que ahora se considera todas las características *i* y todas las alternativas *k*.

Finalmente, también se puede realizar en este caso una generalización mayor que incluye al GOWAIMAM a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará el *Quasi-OWAIMAM operator*. Se define de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-OWAIMAM de dimensión n es una función QOWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$\text{QOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(K_j\right)\right) \tag{7.24}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de todos los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; $k = 1,2,\ldots,m$; g es una función monótona estrictamente continua y las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0, 1]$.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-OWAIMAM se convierte en el operador GOWAIMAM. Obsérvese que también es posible distinguir entre órdenes descendentes (Quasi-DOWAIMAM) y ascendentes (Quasi-AOWAIMAM).

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador GOWAIMAM también son aplicables al operador Quasi-OWAIMAM.

7.5.2. Tipos de *generalized OWAIMAM operators*

El operador GOWAIMAM generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el OWAIMAM aritmético o *OWAIMAM operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el OWAIMAM cuadrático o *OWQAIMAM operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el OWAIMAM geométrico o *OWGIMAM operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el OWAIMAM harmónico o *OWHAIMAM operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes.

- El máximo ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- El GIMAM normalizado ($w_j = 1/n$, para todo K_i).
- El GIMAM ponderado (la ordenación de los p_i coincide con la ordenación de los K_j).
- El GIMAM según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-GOWAIMAM* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-GOWAIMAM* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-GOWAIMAM operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-GOWAIMAM.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás, y esto afecta al $[(n + 1)/2]$-ésimo más grande de los argumentos p_i.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y esto afecta a los argumentos con el $(n/2)$-ésimo y $[(n/2) + 1]$-ésimo más grande p_i.
- El *S-GOWAIMAM* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z GOWAIMAM (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-GOWAIMAM* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-GOWAIMAM*.
- El *dependent-GOWAIMAM*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

7.5.3. Extensiones a los *GOWAIMAM operators*

Como se ha comentado en la introducción, se pueden elaborar un gran número de extensiones a los operadores GOWAIMAM siguiendo con la metodología explicada en los capítulos 4, 5 y 6. Para evitar redundancia, en este caso simplemente se mencionarán algunas de las múltiples extensiones que se podrían hacer. Por ejemplo, se podría destacar los siguientes casos:

- *Induced GOWAIMAM* (IGOWAIMAM).
- *Generalized hybrid IMAM* (GHIMAM).
- *Uncertain GOWAIMAM* (UGOWAIMAM).
- *Fuzzy GOWAIMAM* (FGOWAIMAM).
- *Induced generalized hybrid IMAM* (IGHIMAM).

- *Uncertain induced GOWAIMAM* (UIGOWAIMAM).
- *Fuzzy induced GOWAIMAM* (FIGOWAIMAM).
- *Uncertain generalized hybrid IMAM* (UGHIMAM).
- *Fuzzy generalized hybrid IMAM* (FGHIMAM).
- *Weighted GOWAIMAM* (WGOWAIMAM).
- *Induced weighted GOWAIMAM* (IWGOWAIMAM).
- *Uncertain weighted GOWAIMAM* (UWGOWAIMAM).
- *Fuzzy weighted GOWAIMAM* (FWGOWAIMAM).
- *Uncertain induced weighted GOWAIMAM* (UIWGOWAIMAM).
- *Fuzzy induced weighted GOWAIMAM* (FIWGOWAIMAM).
- Etc

Y así, sucesivamente se podrían ir analizando un gran número de extensiones a los operadores GOWAIMAM.

7.5.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de productos

A continuación, se desarrolla un ejemplo ilustrativo de estos nuevos índices de selección. Se va a analizar un problema de selección de productos. Obsérvese que el caso de productos es muy general ya que puede abarcar productos de la empresa, de los consumidores, etc.

Supongamos que una persona desea comprar un producto, y se le presentan 5 posibilidades.

- A_1: Producto *A*.
- A_2: Producto *B*.
- A_3: Producto *C*.
- A_4: Producto *D*.
- A_5: Producto *E*.

Para evaluar estos productos, el decisor considera diferentes características que describen al producto. Estas características quedan resumidas en las 6 siguientes: C_1 = Precio, C_2 = Utilidad, C_3 = Calidad, C_4 = Imagen, C_5 = Valor, C_6 = Otras variables.

El decisor evalúa estas características que quedan expresadas para cada producto en la siguiente tabla en función de la característica C_i y de la alternativa A_k. Obsérvese que valores cercanos a 1 implica que el resultado es bueno y cercano a 0 no.

Tabla: Resultados esperados

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.6	0.9	0.9	0.7	0.7
A_2	0.8	0.4	0.7	0.6	0.8	0.9
A_3	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.7
A_4	0.5	0.8	0.8	0.8	0.6	0.9
A_5	0.7	0.8	0.9	1	0.8	0.4

El decisor considera el siguiente vector de ponderaciones: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). Para llevar a cabo el análisis, el decisor establece los resultados que tendría que tener el producto ideal para este problema. Estos resultados se muestran en la siguiente tabla.

Tabla: Producto ideal

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.8	0.9	1	0.8	1	0.8

En este ejemplo, se supondrá que el decisor considera las 3 primeras características con la distancia de Hamming y las otras 3 con el coeficiente de adecuación. La utilidad del IMAM es que si se considera la distancia de Hamming como válida, se puede utilizar, pero sino, se puede recurrir al coeficiente de adecuación.

Con esta información, se pueden agregar los resultados esperados para obtener el resultado representativo para cada alternativa. En primer lugar, se van a considerar los resultados obtenidos con el IMAM simple, el IMAM cuadrático simple, el IMAM ponderado, el IMAM cuadrático ponderado y el OWAIMAM Los resultados son los siguientes.

Tabla: Resultados agregados 1

	NIMAM	QIMAM	WIMAM	WQIMAM	OWAIMAM
A_1	0.85	0.857	0.86	0.867	0.81
A_2	0.8	0.818	0.84	0.854	0.73
A_3	0.85	0.855	0.88	0.884	0.81
A_4	0.83	0.846	0.86	0.875	0.77
A_5	0.85	0.859	0.81	0.824	0.8

A continuación, se van a analizar los resultados obtenidos con otros casos particulares del operador GOWAIMAM como son el AOWAIMAM, el OWQAIMAM, el step-OWAIMAM (k = 2), el median-OWAIMAM y el olympic-OWAIMAM. Los resultados son los siguientes.

Tabla: Resultados agregados 2

	AOWAIMAM	OWQAIMAM	step	median	olympic
A_1	0.89	0.817	0.9	0.9	0.85
A_2	0.86	0.751	1	0.8	0.825
A_3	0.89	0.815	0.9	0.85	0.85
A_4	0.89	0.784	1	0.85	0.85
A_5	0.89	0.812	0.9	0.9	0.875

Como se puede observar, en función del operador de agregación utilizado, los resultados son diferentes.

Otro aspecto interesante a analizar es el establecimiento de una ordenación de las alternativas, es decir, en este caso, una ordenación de los productos. Obsérvese que esto resulta de utilidad cuando se desea considerar más de una alternativa. Los resultados son los siguientes. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla. Ordenación de los productos

	Ordenación		Ordenación
NIMAM	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	AOWAIMAM	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
QIMAM	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	OWQAIMAM	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
WIMAM	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_2 \succ A_5$	Step	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
WQIMAM	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$	Mediana	$A_1=A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
OWAIMAM	$A_1=A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic	$A_5 \succ A_1=A_3=A_4 \succ A_2$

Como se puede observar, en función del operador de agregación utilizado, la ordenación de los productos es diferente. Entonces, estos resultados pueden llevar a que el decisor tome decisiones diferentes. La gran ventaja de esta generalización es que el decisor tomará una decisión según sus intereses, pero también podrá observar cuáles son los resultados esperados en otras situaciones diferentes a sus intereses basados en grados de optimismo, etc.

Para finalizar este apartado, decir que se podrían considerar muchas otras aplicaciones de estos operadores, además de la selección de estrategias y productos. Un resumen de muchas de las posibles aplicaciones, se comentarán en el capítulo 10.

8. Operadores *OWA* en la noción de media ponderada

8.1. Introducción

8.1.1. Conceptos básicos

En este capítulo se analiza una nueva formulación que permite utilizar el operador OWA y la media ponderada al mismo tiempo. De esta forma, se podrá ponderar a las variables según su grado de importancia, y al mismo tiempo se podrá sobrevalorar o infravalorar la información según el grado de optimismo del decisor. A este nuevo modelo se le denominará *ordered weighted averaging weighted averaging* (OWAWA) *operator*. Obsérvese que se utiliza esta denominación para diferenciar este modelo del operador *weighted OWA* (WOWA) introducido por Torra (1997). Aunque los dos modelos buscan combinar la media ponderada y el operador OWA en la misma formulación, las metodologías desarrolladas son diferentes.

Cabe destacar que con este nuevo modelo se consiguen un gran número de aplicaciones potenciales ya que cualquier técnica estadística o similar que lleve el concepto de media ponderada, es muy probable que también pueda estudiarse con este nuevo operador. Por tanto, con la introducción de este nuevo operador de agregación, se crea un camino muy amplio de posibles aplicaciones a través de reinterpretar problemas con la media ponderada a través de reconsiderarlos con el operador OWAWA. La idea o motivación de reconsiderar estos problemas es debido a la posibilidad de sobrevalorar o infravalorar los resultados según un grado de optimismo establecido por el decisor. En teoría de la decisión este hecho resulta vital ya que los problemas que se analizan no suelen ser de certeza, sino que están rodeados de incertidumbre. Entonces, aunque se disponga de cierta información por ejemplo, a través de grados de importancia (o probabilidades subjetivas), esta información puede ser incorrecta. Por tanto, según como sea el decisor en relación a situaciones inciertas futuras, puede que se prefiera sobrevalorar los resultados para así tomar decisiones más o menos arriesgadas.

A modo de resumen, se podrían desarrollar aplicaciones en diferentes ámbitos como los que se mencionan a continuación:

- En teoría de la decisión en general.
- En estadística en general.
- En economía y empresa.
- En teorías del *Soft Computing* y similar.
- En ingeniería en general.
- En matemáticas.
- En física.
- En química.
- En biología.
- En medicina.
- Etc.

La gran ventaja de este nuevo operador es que permite considerar en la misma formulación al operador OWA y a la media ponderada (WA) de tal forma que se puede considerar al mismo tiempo el grado de optimismo del decisor y los grados de importancia (o probabilidad subjetiva) del problema. Además, se incluye a un gran número de casos particulares según el grado de optimismo, por lo que se puede analizar diferentes resultados que pueden surgir según como se tome la decisión.

Para llevar a cabo el análisis, cabe destacar que se van a presentar 2 modelos para tratar este problema. En la actualidad, se conocen otros 2 modelos que ya tratan este problema, pero por lo que el doctorando ha analizado, a pesar de que son modelos que funcionan parcialmente, no funcionan con total plenitud a la hora de mostrar una unificación total entre la media ponderada y el operador OWA. Estos modelos son los de (Torra, 1997; Xu y Da, 2003).

La razón por la cual se presentan estos dos modelos nuevos es porque el primero es una extensión del modelo de (Engemann et al., 1996; Yager, 1999) con probabilidades para el caso de medias ponderadas ya que su metodología es la misma. Este modelo tampoco es correcto pero representa una aproximación más acertada del proceso de unificación entre el operador OWA y la media ponderada. Y además, decir que el nuevo modelo que se propondrá en esta tesis utilizará algunos de los conceptos clave de dicha aproximación. Aunque la denominación general que se va a establecer para ambos modelos es de operadores OWAWA, cabe destacar que para el primer modelo se podría utilizar la denominación utilizada para la versión probabilística. Es decir, se podría denominar como *immediate weighted ordered weighted averaging* (IWOWA) *operator*. Como se puede observar, tiene cierta similitud con el operador WOWA, lo cual dificulta su análisis posterior en relación a diferentes extensiones a dichos operadores.

A continuación se presentan ambos modelos. Obsérvese que se presenta la definición básica de ambos casos y a partir de aquí el resto del análisis se hace conjuntamente para los dos modelos ya que la metodología de análisis es la misma en ambos casos en relación a sus propiedades, casos particulares, etc. La diferencia reside en la formulación inicial del operador, pero para lo demás sería lo mismo. En primer lugar, se presenta el modelo basado en el concepto de *immediate probabilities* aplicado al concepto de medias ponderadas. Cabe recordar que es un modelo incompleto porque unifica el operador OWA y la media ponderada, pero lo hace para un caso particular y no para todos los casos según el grado de importancia que se le quiera dar al operador OWA y a la media ponderada. También obsérvese que en este caso se presenta como immediate WOWA, pero para el resto del trabajo se incluirá como OWAWA.

Definición. Un operador IWOWA es una función IWOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.1}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i.

Obsérvese que este operador cumple con las propiedades de los operadores OWA. Es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DIWOWA) y ascendentes (AIWOWA), se pueden estudiar diferentes mediadas para caracterizar el vector de ponderaciones, se puede normalizar en el caso de que la suma de las ponderaciones sea diferente de 1, etc. Además, también cumple la inclusión del operador OWA y de la media ponderada (WA) como casos particulares. Estos casos se producen cuando uno de los vectores de ponderaciones es el mismo para todos sus términos.

Como se ha comentado, se puede formular un caso más completo que además de unificar al operador OWA y al operador WA, permita reflejar en qué grado se quiere considerar cada uno. Es decir, en algunos casos puede que se quiera tener en cuenta ambos casos pero por las circunstancias del problema, puede que sólo se quiera considerar uno de los casos y el otro con carácter residual, o simplemente, en un grado inferior. Para conseguir una formulación más completa que pueda incluir a ambos operadores y los incluya según el grado de importancia que se les quiera dar, se propone el siguiente nuevo modelo unificador. Obsérvese que este es el modelo al que estrictamente se le denomina como operador OWAWA.

Definición. Un operador OWAWA es una función OWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$OWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.2}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i.

Obsérvese que este caso es mucho más completo ya que aparte de unificar al operador OWA y WA, también permite introducirlos en la formulación en mayor o menor medida según el grado de importancia que se les quiera dar. Entonces, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada o operador WA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWA.

Cabe destacar que el operador OWAWA se ha presentado según la ecuación 8.2 porque esto permitirá desarrollar posteriores análisis en relación a casos particulares procedentes del vector de ponderaciones. Pero otra forma de haber formulado este modelo podría haber sido el siguiente.

Obsérvese que tanto la ecuación 8.2 como 8.3 son iguales, es decir, dan el mismo resultado. La única diferencia es que se han presentado de forma diferente. La ecuación 8.2 trata de mezclar al operador OWA y al WA mientras que la ecuación 8.3 les da un tratamiento separado. En este segundo caso, la ventaja es que la definición es algo más simple ya que no se tienen que reordenar las ponderaciones debido a que se realiza un tratamiento separado para cada caso.

Definición. Un operador OWAWA es una función OWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$OWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \tag{8.3}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos a_i y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, en este caso se da un tratamiento separado a ambos casos a través de utilizar una ponderación simple que refleja la importancia de cada caso en el problema. En este caso también se observa que si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada o operador WA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWA.

A continuación, se va a considerar diferentes aspectos de este operador. Para evitar redundancia, se explicará una sola vez sobreentendiendo que es igualmente válido para las 3 definiciones comentadas anteriormente.

Por ejemplo, se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending OWAWA* (*DOWAWA*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending OWAWA* (*AOWAWA*) *operator*.

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador OWAWA puede ser expresado como:

$$OWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = W^T B \tag{8.4}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones OWA o el WA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador OWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$OWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\beta}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \tag{8.5}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$OWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.6}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

También se puede observar como el operador OWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $a_i \geq e_i$ para todo i, entonces, $OWAWA(a_1,\ldots, a_n) \geq OWAWA(e_1,\ldots, e_n)$, siendo a_i y e_i las distancias individuales entre los dos conjuntos. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo i, entonces, $OWAWA(a_1,\ldots, a_n) = a$. Finalmente, es limitado porque $\min\{a_i\} \leq OWAWA(a_1,\ldots, a_n) \leq \max\{a_i\}$.

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. Obsérvese que se analiza el vector OWA ya que es el que se puede manipular según grados de optimismo o tendencia al máximo. En cambio, el operador WA está sujeto a la creencia (probabilidad subjetiva) o grados de importancia que se le de al análisis y esto no es manipulable directamente. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1}\right) w_j \tag{8.7}$$

Se puede demostrar que $\alpha \in [0, 1]$. A mayor parte de la ponderación concentrada en la parte inicial de W, más cerca estará α de 1 y a mayor parte de dicha ponderación en la parte final de W, más cerca estará α de 0.

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{8.8}$$

Esta medida puede ser utilizada para medir la cantidad de información utilizada en el problema.

Una tercera medida que se puede desarrollar en el análisis del operador OWAWA para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de tendencia hacia valores optimistas o pesimistas. Se conoce como *balance operator* ($Bal(W)$) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{8.9}$$

Como se puede observar, $Bal(W) \in [-1, 1]$. Para el criterio optimista o también conocido como operador máximo se obtiene $Bal(W) = 1$. Para el criterio pesimista o operador mínimo se obtiene $Bal(W) = -1$. Para el criterio de Laplace o media aritmética se obtiene $Bal(W) = 0$.

Una cuarta medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de divergencia de W (Yager, 2002). Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{8.10}$$

Como se puede observar, para el caso optimista y pesimista, $Div(W) = 0$. De forma general, podemos decir que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

8.1.2. Tipos de *OWAWA operators*

Analizando el vector de ponderaciones W, se pueden obtener diferentes casos particulares de operadores OWAWA. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes. Obsérvese que este apartado se desarrolla de forma resumida ya que se seguiría con la misma metodología que se ha desarrollado a lo largo de toda la tesis y se considera innecesario el exponer detalladamente estos casos. Además, todos estos casos son casos particulares del GOWAWA, el cual sí será comentado con más detalle.

- El operador OWA ($\beta = 1$).
- El operador WA ($\beta = 0$).
- El máximo ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El OWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-OWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-OWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-OWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-OWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-OWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z OWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-OWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-OWAWA*.
- El *dependent-OWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

8.2. Extensiones a los OWAWA operators

8.2.1. Introducción

Los operadores OWAWA también pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que incorporemos en dicho operador. Para no entrar en una excesiva redundancia y teniendo en cuenta lo explicado en el capítulo 8.1, en este apartado se presentarán diferentes extensiones a los operadores OWAWA de forma resumida. Por tanto, se presentará únicamente su definición principal y algunos comentarios básicos sobre dicho operador. A partir de observar las propiedades comentadas en el operador OWAWA, se pueden aplicar de forma prácticamente directa a las diferentes extensiones.

Siguiendo con la metodología comentada en capítulos anteriores, cabe destacar que un operador OWAWA es una extensión de nivel 1 a los operadores OWA. Por tanto, las extensiones a los operadores OWAWA, también cumplirán esta diferencia. Es decir, las extensiones de nivel 1, serán extensiones de nivel 2 a los operadores OWA, y así sucesivamente. Aun así, cabe destacar que los operadores OWAWA pueden ser vistos como un nuevo punto de partida ya que unifican a dos grandes conceptos como son la media ponderada (WA) y la media ponderada ordenada (OWA). De todas formas, como sucederá algo similar en el próximo capítulo al unificar el operador OWA con el concepto de probabilidad, este punto de partida se dejará para lo que se deduce de esta tesis como el caso unificador completo. Es decir, el caso en el que se unifican los conceptos de media ponderada, media ponderada ordenada y probabilidad en una misma formulación. Es decir, el *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging* (POWAWA) *operator*.

A modo de resumen, distinguiremos entre extensiones a los operadores OWAWA de nivel 1, de nivel 2 y de nivel *N*.

- Extensiones de nivel 1.
  - *Induced OWAWA operator*
  - *Linguistic OWAWA operator*
  - *Uncertain OWAWA operator*
  - *Fuzzy OWAWA operator*
  - *Heavy OWAWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel 2.
  - *Induced linguistic OWAWA operator*
  - *Uncertain induced OWAWA operator*
  - *Fuzzy induced OWAWA operator*
  - *Induced heavy OWAWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel *N*.
  - *Uncertain induced linguistic OWAWA operator*
  - *Fuzzy induced linguistic OWAWA operator*
  - *Uncertain induced heavy OWAWA operator*
  - *Fuzzy induced heavy OWAWA operator*
  - Etc.

8.2.2. *Induced OWAWA operator*

El *induced OWAWA operator* o operador IOWAWA, es un operador similar al OWAWA con la diferencia de que su proceso de ordenación no depende de los valores de los argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el resultado obtenido con el concepto de *immediate weighted OWA* (IWOWA). En este caso, se obtendría el *induced IWOWA* (IWIOWA).

Definición. Un operador IWIOWA es una función IWIOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWIOWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.11}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IWIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores OWA y WA. Se le conoce en este caso como el operador IOWAWA.

Definición. Un operador IOWAWA es una función IOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.12}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

Como se ha comentado para el operador OWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador IOWAWA es una función IOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$IOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \tag{8.13}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada o operador WA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador IOWA a partir del cual se podría estudiar todos sus casos particulares (véase el capítulo 4.2.1).

A continuación, se va a considerar diferentes aspectos de este operador. Para evitar redundancia, se explicará una sola vez sobreentendiendo que es igualmente válido para las 3 definiciones comentadas anteriormente.

El operador IOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DIOWAWA) y ascendentes (AIOWAWA). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DIOWAWA (o IOWAWA) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AIOWAWA.

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador IOWAWA puede ser expresado como:

$$IOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = W^T B \tag{8.14}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones OWA o el WA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador IOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$IOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \frac{\beta}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \tag{8.15}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$IOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.16}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Otro aspecto a comentar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media aritmética.

El operador IOWAWA incluye a un gran número de casos particulares a través de analizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones *W*, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- El operador IOWA ($\beta = 1$).
- El operador WA ($\beta = 0$).
- El operador OWA ($i = j$ y $\beta = 1$)
- El máximo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{a_i\}$).
- El mínimo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{a_i\}$).
- La media aritmética ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El IOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{a_i\}$, $u_q = \min\{a_i\}$).
- El *step-IOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-IOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-IOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-IOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-IOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z IOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-IOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-IOWAWA*.
- El *dependent-IOWAWA*.
- Etc.

Obsérvese que estos casos se pueden desarrollar desde la perspectiva de la ordenación tradicional independientemente del significado que tenga a nivel de grado de optimismo, o a través de escoger el máximo, mínimo, y así sucesivamente, independientemente del orden en el que se encuentren en la agregación.

8.2.3. *Linguistic OWAWA operator*

El *linguistic OWAWA* (LOWAWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador OWAWA. Por tanto, este operador permite considerar al mismo tiempo el grado de optimismo y de importancia de una serie de variables representadas por información lingüística. Se puede definir de la siguiente manera. En primer lugar se define el caso de *immediate weighted LOWA* (IWLOWA).

Definición. Un operador IWLOWA es una función IWLOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWLOWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{8.17}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores LOWA y LWA. Se le conoce en este caso como el operador LOWAWA.

Definición. Un operador LOWAWA es una función LOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$LOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{8.18}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

Como se ha comentado para el operador OWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador LOWAWA es una función LOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$LOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} \tag{8.19}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada lingüística o operador LWA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador LOWA a partir del cual se podría estudiar todos sus casos particulares (véase el capítulo 4.2.2).

Cabe destacar que esta es la formulación general, pero dentro de esta formulación, se podrían utilizar un gran número de diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo. Es decir, a partir del análisis interno, tendríamos:

- Variables lingüísticas simples (con y sin representación interna).
- Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas.
- Variables lingüísticas intervalo valoradas.
- Variables lingüísticas generalizadas (simples, 2-tuplas, intervalo valoradas, etc.).
- Variables lingüísticas de tipo 2 y *n*.
- Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas, etc.).
- Etc.

Por el otro lado, también se podrían utilizar variables lingüísticas procedentes del análisis externo. Es decir, se podrían utilizar (obsérvese que la denominación de estas variables es propia de la tesis y en la actualidad no se utiliza en la comunidad científica):

- Intervalos de confianza lingüísticos.
- Números borrosos lingüísticos.
- NBT lingüísticos.
- NBTp lingüísticos.
- Números borrosos generalizados lingüísticos.
- Números borrosos intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos L-R lingüísticos (simples, generalizados, intervalo valorados, etc.).
- Números borrosos intuicionistas lingüísticos (simples, intervalo valorados, generalizados, etc.).
- Números borrosos generalizados intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos no convexos lingüísticos.
- Expertones lingüísticos (simples, cuádruplos, etc.).
- Etc.

A continuación, se va a considerar diferentes aspectos de este operador. Para evitar redundancia, se explicará una sola vez sobreentendiendo que es igualmente válido para las 3 definiciones comentadas anteriormente.

El operador LOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DLOWAWA) y ascendentes (ALOWAWA). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DLOWAWA (o LOWAWA) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del ALOWAWA.

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial en la que se supone que si B es el vector de argumentos ordenados de s_{Y_j}, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador LOWAWA puede ser expresado de la siguiente forma:

$$LOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = W^T B \tag{8.20}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LOWA o el LWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador LOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$LOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \frac{\beta}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + \frac{(1-\beta)}{V}\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} \tag{8.21}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$LOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{8.22}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador LOWAWA incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes procedentes de analizar el vector de ponderaciones del operador LOWA.

- El operador LOWA ($\beta = 1$).
- El operador LWA ($\beta = 0$).
- El máximo ponderado lingüístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado lingüístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El LOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-LOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-LOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-LOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-LOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-LOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z LOWAWA (2 alternativas).

- 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
- 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.

- El *centered-LOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-LOWAWA*.
- El *dependent-LOWAWA*.
- Etc.

Finalmente, también destacar la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

8.2.4. *Uncertain OWAWA operator*

El *uncertain OWAWA operator* o operador UOWAWA, es un operador OWAWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa de tal forma que resulta posible considerar los resultados más optimistas y los más pesimistas. Siguiendo con la metodología explicada en las anteriores extensiones, se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar se considera el operador *immediate weighted UOWA* (IWUOWA).

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador IWUOWA es una función *IWUOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWUOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \qquad (8.23)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

A continuación, se presenta el caso que según esta tesis se considera como el más completo para unificar al operador UOWA y al UWA.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UOWAWA es una función *UOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$UOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.24}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UOWAWA es una función *UOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{8.25}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

Otro aspecto a destacar es que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. Para evitar excesivas dificultades, se recomienda seguir con el mismo criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y a las V como inciertos. Es decir, se puede definir la información de estas variables mediante intervalos de confianza. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. A modo de resumen, decir que la formulación sería la siguiente.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UOWAWA con ponderaciones inciertas es una función *UOWAWA'*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W' asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j' \approx 1$ y $w_j' \in [0, 1]$ tal que:

$$UOWAWA'\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j' b_j \tag{8.26}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i’ con $\sum_{i=1}^{n} v_j' = 1$ y v_i’ $\in$ [0, 1], $\hat{v}_j' = \beta w_j' + (1-\beta) v_j'$ con $\beta \in$ [0, 1] y v_j’ es la ponderación v_i’ ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

En este caso, también se podría formular de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UOWAWA es una función *UOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W’ asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j' \approx 1$ y w_j’ $\in$ [0, 1] y un vector de ponderaciones V’, con $\sum_{i=1}^{n} v_i' \approx 1$ y v_i’ $\in$ [0, 1], tal que:

$$UOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j' b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i' \tilde{a}_i \tag{8.27}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza y $\beta \in$ [0, 1].

El operador UOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUOWAWA) y ascendentes (AUOWAWA).

Cabe destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador OWAWA puede ser expresado como:

$$UOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{8.28}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UOWA o el UWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador UOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$UOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{\beta}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{8.29}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$UOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.30}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector W siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

El operador UOWAWA abarca a muchos casos particulares de entre los cuales se pueden destacar los siguientes procedentes del vector de ponderaciones W.

- El operador UOWA ($\beta = 1$).
- El operador UWA ($\beta = 0$).
- El operador OWA y WA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El máximo incierto ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo incierto ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El UOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-UOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-UOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-UOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-UOWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-UOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z UOWAWA (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-UOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-UOWAWA*.
- El *dependent-UOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

8.2.5. *Fuzzy OWAWA operator*

El *fuzzy OWAWA operator* o operador FOWAWA, es un operador OWAWA similar al UOWAWA pero con la diferencia de que en el operador UOWAWA se representa la información mediante intervalos de confianza, mientras que en el FOWAWA se utiliza números borrosos (NB). Por lo demás, estos dos operadores son muy similares. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el *immediate weighted FOWA* (IWFOWA).

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador IWFOWA es una función *IWFOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones *W*, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWFOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.31}$$

donde b_j es el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

A continuación, se presenta el caso que según esta tesis se considera como el más completo para unificar al operador FOWA y al FWA.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FOWAWA es una función *FOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$FOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.32}$$

donde b_j es el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FOWAWA es una función *FOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones *V*, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$FOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{8.33}$$

donde b_j es el *j*-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son NBs y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados

- Números borrosos de tipo 2 y *n*.
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y *n* generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y *n*, generalizados, etc.)
- Etc.

También resulta conveniente señalar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones *W* y *V* como NBs. Es decir, debido al grado de incertidumbre o al deseo del decisor de representar diferentes escenarios, se puede definir la información de estas variables mediante NBs. Debido a que estos conceptos implican un análisis mucho más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo. A modo de resumen:

	W	*V*	Argumentos
Caso 1	-	-	Intervalos
Caso 2	-	Intervalos	Intervalos
Caso 3	Intervalos	-	Intervalos
Caso 4	Intervalos	-	-
Caso 5	-	Intervalos	-
Caso 6	Intervalos	Intervalos	-
Caso 7	Intervalos	Intervalos	Intervalos
Caso 8	Intervalos	Intervalos	NBs
Caso 9	Intervalos	NBs	Intervalos
Caso 10	Intervalos	NBs	NBs
Caso 11	NBs	Intervalos	Intervalos
Caso 12	NBs	Intervalos	NBs
Caso 13	NBs	NBs	Intervalos
Caso 14	NBs	NBs	NBs
Caso 15	-	-	NBs
Caso 16	-	NBs	NBs
Caso 17	NBs	-	NBs
Caso 18	NBs	-	-
Caso 19	-	NBs	-
Caso 20	NBs	NBs	-
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas, expertones, etc.

El operador FOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DFOWAWA) y ascendentes (AFOWAWA). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DFOWAWA (o FOWAWA) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AFOWAWA.

Cabe destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador OWAWA puede ser expresado como:

$$FOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{8.34}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FOWA o el FWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador FOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$FOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{\beta}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{8.35}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$FOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.36}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector W siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

El operador FOWAWA abarca a muchos casos particulares de entre los cuales se pueden destacar los siguientes procedentes del vector de ponderaciones W.

- El operador FOWA ($\beta = 1$).
- El operador FWA ($\beta = 0$).
- El operador OWA y WA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El máximo borroso ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo borroso ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El FOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-FOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).

- El *window-FOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-FOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-FOWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-FOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z FOWAWA (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-FOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-FOWAWA*.
- El *dependent-FOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares procedentes del vector de ponderaciones de la parte OWA del operador OWAWA siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

8.2.6. Extensiones de nivel 2

Se pueden desarrollar un gran número de extensiones de nivel 2 a través de ir añadiendo diferentes características en el problema. En este trabajo se comentarán brevemente 3 casos: el *induced linguistic OWAWA* (ILOWAWA), el *uncertain induced OWAWA* (UIOWAWA) y el *fuzzy induced OWAWA* (FIOWAWA).

8.2.6.1. *Induced linguistic OWAWA operator*

El *induced linguistic OWAWA* (ILOWAWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador OWAWA y un proceso de reordenación de los argumentos lingüísticos que no depende de sus valores sino de unas variables inducidas de ordenación. Por tanto, este operador permite considerar al mismo tiempo un carácter actitudinal complejo del decisor, los grados de importancia de los argumentos y información incierta expresada por variables lingüísticas. En primer lugar, se define el caso de *immediate weighted induced LOWA* (IWILOWA).

Definición. Un operador IWILOWA es una función IWILOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWILOWA\ (\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{8.37}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *IWILOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores ILOWA y LWA. Se le conoce en este caso como el operador ILOWAWA (*induced linguistic OWAWA operator*).

Definición. Un operador ILOWAWA es una función ILOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$ILOWAWA\ (\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{8.38}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *ILOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

Como se ha comentado para el operador LOWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador ILOWAWA es una función ILOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$ILOWAWA\ (\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} \tag{8.39}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *ILOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada lingüística o operador LWA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador ILOWA a partir del cual se podría estudiar todos sus casos particulares (véase el capítulo 4.3.1).

Cabe destacar que esta es la formulación general, pero dentro de esta formulación, se podrían considerar diferentes tipos de variables lingüísticas. Por ejemplo, a partir del análisis interno, tendríamos:

- Variables lingüísticas simples (con y sin representación interna).
- Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas.
- Variables lingüísticas intervalo valoradas.
- Variables lingüísticas generalizadas (simples, 2-tuplas, intervalo valoradas, etc.).
- Variables lingüísticas de tipo 2 y *n*.
- Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas, etc.).
- Etc.

Por el otro lado, también se podrían utilizar variables lingüísticas procedentes del análisis externo. Es decir, se podrían utilizar (obsérvese que la denominación de estas variables es propia de la tesis y en la actualidad no se utiliza en la comunidad científica):

- Intervalos de confianza lingüísticos.
- Números borrosos lingüísticos.
- NBT lingüísticos.
- NBTp lingüísticos.
- Números borrosos generalizados lingüísticos.
- Números borrosos intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos L-R lingüísticos (simples, generalizados, intervalo valorados, etc.).
- Números borrosos intuicionistas lingüísticos (simples, intervalo valorados, generalizados, etc.).
- Números borrosos generalizados intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos no convexos lingüísticos.
- Expertones lingüísticos (simples, cuádruplos, etc.).
- Etc.

El operador ILOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DILOWAWA) y ascendentes (AILOWAWA). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DILOWAWA (o ILOWAWA) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AILOWAWA.

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial de la siguiente forma:

$$ILOWAWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = W^T B \tag{8.40}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones ILOWA o el LWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador ILOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$ILOWAWA\ (\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \frac{\beta}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + \frac{(1-\beta)}{V}\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} \qquad (8.41)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$ILOWAWA\ (\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \qquad (8.42)$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador ILOWAWA incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes procedentes de analizar el vector de ponderaciones del operador ILOWA.

- El operador ILOWA ($\beta = 1$).
- El operador LWA ($\beta = 0$).
- El operador LOWA ($i = j$ y $\beta = 1$).
- El máximo ponderado lingüístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado lingüístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El ILOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-ILOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-ILOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-ILOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-ILOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-ILOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z ILOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-ILOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-ILOWAWA*.
- El *dependent-ILOWAWA*.
- Etc.

Finalmente, también destacar la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones siguiendo a Yager (1988; 1996a; 2002).

8.2.6.2. *Uncertain induced OWAWA operator*

El *uncertain induced OWAWA operator* o operador UIOWAWA, es un operador OWAWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Además, el proceso de reordenación de los argumentos no se llevará a cabo según sus valores, sino que dependerá de unas variables de ordenación inducidas que reflejan un carácter más complejo al grado de optimismo del decisor. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa de tal forma que resulta posible considerar los resultados más optimistas y los más pesimistas. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar se considera el operador *immediate weighted UIOWA* (IWUIOWA).

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador IWUIOWA es una función *IWUIOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones *W*, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWUIOWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.43}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *IWUIOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

A continuación, se presenta el caso que según esta tesis se considera como el más completo para unificar al operador UIOWA y al UWA.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UIOWAWA es una función *UIOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$UIOWAWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.44}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UIOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UIOWAWA es una función *UIOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UIOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \qquad (8.45)$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

En el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. Para evitar excesivas dificultades, se recomienda seguir con el criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y a las V como inciertos. Es decir, se puede definir la información de estas variables mediante intervalos de confianza. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

El operador UIOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUIOWAWA) y ascendentes (AUIOWAWA).

Cabe destacar que el operador UIOWA puede ser expresado mediante la siguiente notación vectorial:

$$UIOWAWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = W^T B \qquad (8.46)$$

Si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UIOWA o el UWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador UIOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$UIOWAWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \frac{\beta}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \qquad (8.47)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$UIOWAWA(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.48}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

También cabe mencionar la posibilidad de utilizar diferentes medidas para analizar el vector de ponderaciones (Yager, 1988; 1996a; 2002).

El operador UIOWAWA abarca a muchos casos particulares de entre los cuales se pueden destacar los siguientes procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador UIOWA ($\beta = 1$).
- El operador UWA ($\beta = 0$).
- El operador IOWA y WA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El operador UOWA ($i = j$ y $\beta = 1$).
- El máximo incierto ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{\tilde{a}_i\}$).
- El mínimo incierto ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{\tilde{a}_i\}$).
- La media aritmética incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El UIOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{\tilde{a}_i\}$, $u_q = \min\{\tilde{a}_i\}$).
- El *step-UIOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-UIOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-UIOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-UIOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-UIOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z UIOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-UIOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-UIOWAWA*.
- El *dependent-UIOWAWA*.
- Etc.

Obsérvese que es posible estudiar estos casos desde la perspectiva tradicional de máximo y mínimo o través de las variables inducidas. Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

8.2.6.3. *Fuzzy induced OWAWA operator*

El *fuzzy induced OWAWA operator* o operador FIOWAWA, es un operador OWAWA similar al UIOWAWA pero con la diferencia de que en el operador UOWAWA se representa la información mediante intervalos de confianza, mientras que en el FIOWAWA se utiliza números borrosos (NB). Por lo demás, estos dos operadores son muy similares. Es decir, además de este aspecto, también se podría destacar el proceso de reordenación de argumentos que depende de variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el *immediate weighted FIOWA* (IWFIOWA).

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador IWFIOWA es una función *IWFIOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones *W*, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWFIOWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.49}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *IWFIOWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

A continuación, se presenta el caso que según esta tesis se considera como el más completo para unificar al operador FIOWA y al FWA.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FIOWAWA es una función *FIOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$FIOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.50}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FIOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FIOWAWA es una función *FIOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$FIOWAWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \qquad (8.51)$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$ son NBs y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados
- Números borrosos de tipo 2 y *n*.
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y *n* generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y *n*, generalizados, etc.)
- Etc.

En el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones *W* y *V* como NBs. Es decir, debido al grado de incertidumbre, se puede definir la información de estas variables mediante NBs. Debido a que estos conceptos implican un análisis mucho más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo Véase el cuadro comentado en el anterior subapartado). Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas, expertones, etc.

El operador FIOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. También se puede distinguir entre órdenes descendentes (DFIOWAWA) y ascendentes (AFIOWAWA). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DFIOWAWA (o FIOWAWA) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AFIOWAWA.

Obsérvese que también se puede expresar en forma vectorial:

$$FIOWAWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = W^T B \qquad (8.52)$$

Si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FIOWA o el FWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador FIOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$FIOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \frac{\beta}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V}\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{8.53}$$

También se podría expresar de la siguiente forma:

$$FIOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{8.54}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador FIOWAWA abarca a muchos casos particulares de entre los cuales se pueden destacar los siguientes procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador FIOWA ($\beta = 1$).
- El operador FWA ($\beta = 0$).
- El operador IOWA y WA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El operador FOWA ($i = j$ y $\beta = 1$).
- El máximo borroso ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{\tilde{a}_i\}$).
- El mínimo borroso ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{\tilde{a}_i\}$).
- La media aritmética borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El FIOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{\tilde{a}_i\}$, $u_q = \min\{\tilde{a}_i\}$).
- El *step-FIOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-FIOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-FIOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-FIOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-FIOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z FIOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-FIOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-FIOWAWA.*

- El *dependent-FIOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares procedentes del vector de ponderaciones FIOWA del operador FIOWAWA de la misma forma que se ha explicado en los capítulos anteriores.

8.2.7. Extensiones de nivel *N*

Además de estos casos, se podrían considerar muchos otros más a partir de ir considerando otras características como por ejemplo el modelo generalizado de Schaefer y Mitchell (1999), el uso de t-normas y conormas (ST-OWAWA) y sus extensiones, etc.

Obsérvese que algunas de estas extensiones se analizarán o comentarán en los próximos apartados aunque no se refieran a ellos como extensiones de nivel *N*.

8.3. Introducción al generalized OWAWA operator

8.3.1. Conceptos básicos

Una forma de generalizar el operador OWAWA es mediante el uso de medias generalizadas o cuasi-aritméticas. Entonces, se consigue una formulación mucho más completa que abarca a un gran número de casos particulares como el OWAWA geométrico, el OWAWA cuadrático, etc. A esta generalización se la denominará *generalized OWAWA operator* o Quasi-OWAWA, según se utilicen medias generalizadas o cuasi-aritméticas. La gran ventaja que ofrece es una visión mucho más completa del problema ya que permite considerar muchos casos que anteriormente no se habían incluido en el análisis. Se define de la siguiente forma. En primer lugar, se analiza el *immediate weighted generalized OWA* (IWGOWA).

Definición. Un operador IWGOWA es una función IWGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.55}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se ha comentado, se puede formular un caso más completo que además de unificar al operador OWA y al operador WA, permita reflejar en qué grado se quiere considerar cada uno. Se define de la siguiente forma

Definición. Un operador GOWAWA es una función GOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$GOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.56}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también podría expresarse de la siguiente forma.

Definición. Un operador GOWAWA es una función GOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$GOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\beta)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.57}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos a_i, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, en este caso se da un tratamiento separado a ambos casos a través de utilizar una ponderación simple que refleja la importancia de cada caso en el problema. En este caso también se observa que si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada generalizada o operador GWA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador GOWA.

En el operador GOWAWA se puede distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending GOWAWA* (*DGOWAWA*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending GOWAWA* (*AGOWAWA*) *operator*.

Este operador también puede ser expresado en forma vectorial como:

$$GOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{8.58}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWA o el GWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador GOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$GOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.59}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$GOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.60}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador GOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $a_i \geq e_i$ para todo i, entonces, $GOWAWA(a_1, \ldots, a_n) \geq GOWAWA(e_1, \ldots, e_n)$, siendo a_i y e_i los argumentos del problema. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo i, entonces, $GOWAWA(a_1,\ldots, a_n) = a$. Finalmente, es limitado porque $\min\{a_i\} \leq GOWAWA(a_1,\ldots, a_n) \leq \max\{a_i\}$.

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{8.61}$$

Se puede demostrar que $\alpha \in [0, 1]$. A mayor parte de la ponderación concentrada en la parte inicial de W, más cerca estará α de 1 y a mayor parte de dicha ponderación en la parte final de W, más cerca estará α de 0.

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones W. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{8.62}$$

Esta medida puede ser utilizada para medir la cantidad de información utilizada en el problema.

Una tercera medida es aquella que mide el grado de tendencia hacia valores optimistas o pesimistas, es decir, el *balance operator* ($Bal(W)$) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{8.63}$$

Como se puede observar, $Bal(W) \in [-1, 1]$. Para el criterio optimista o también conocido como operador máximo se obtiene $Bal(W) = 1$. Para el criterio pesimista o operador mínimo se obtiene $Bal(W) = -1$. Para el criterio de Laplace o media aritmética se obtiene $Bal(W) = 0$.

Una cuarta medida para estudiar el vector W es aquella que mide el grado de divergencia de W (Yager, 2002). Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{8.64}$$

Como se puede observar, para el caso optimista y pesimista, $Div(W) = 0$. De forma general, podemos decir que si $w_j = 1$ para algún j, entonces $Div(W) = 0$.

8.3.2. Tipos de *GOWAWA operators*

A continuación, se van a desarrollar diferentes casos particulares de operadores *GOWAWA*. Se pueden distinguir entre casos procedentes del vector de ponderaciones y casos procedentes del parámetro λ.

En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *OWAWA operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *ordered weighted quadratic averaging weighted averaging* (*OWQAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *ordered weighted geometric averaging weighted averaging* (*OWGAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *ordered weighted harmonic averaging weighted averaging* (*OWHAWA*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se pueden analizar los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWA ($\beta = 1$).
- El operador GWA ($\beta = 0$).
- El máximo ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada simple ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El GOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-GOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-GOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-GOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-GOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-GOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z GOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-GOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-GOWAWA*.
- El *dependent-GOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

8.3.3. Generalización mediante el uso de medias cuasi-aritméticas

El operador GOWAWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. Entonces, se obtiene una generalización mucho mayor del problema. A este operador se le denominará como *Quasi-OWAWA operator*.

Definición: Una función *QOWAWA*: $R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-OWAWA de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g(b_j)\right) \tag{8.65}$$

donde b_j es el *j*-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los a_i, y *g(b)* es una función monótona estrictamente continua.

El operador *Quasi-OWAWA* también puede ser expresado en una notación vectorial como:

$$Quasi\text{-}OWAWA\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(W^T B\right) \tag{8.66}$$

En esta expresión, *W* es el vector *Quasi-OWAWA* de ponderaciones asociado con la agregación, y *B* es el vector argumento ordenado donde el *j*-ésimo componente en *B* es $g(b_{(j)})$ siendo este el *j*-ésimo más grande de los a_i.

Otro aspecto a destacar son las medidas para caracterizar un vector de pesos y el tipo de agregación que ejecuta. Siguiendo con las ideas desarrolladas para el operador *GOWAWA*, el carácter actitudinal quasi-aritmético $\alpha(W)$ se puede formular de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{8.67}$$

Y así sucesivamente se podrían analizar otras medidas y propiedades del operador Quasi-OWAWA.

Desde una perspectiva general del proceso de reordenación, se puede distinguir entre ordenaciones descendentes o ascendentes. Cabe destacar que los vectores de ponderaciones del *Quasi-DOWAWA* y *Quasi-AOWAWA* son simétricos entre sí. Es decir, se encuentran relacionados mediante $w_j = w^*_{n+1-j}$, siendo w_j el j-ésimo coeficiente del *Quasi-DOWAWA* (o *Quasi-OWAWA*) *operator* y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del *Quasi-AOWAWA operator*.

Finalmente, destacar que el operador *Quasi-OWAWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores *GOWAWA* e incluye a muchos otros más. Es decir, a partir de esta generalización se puede obtener la media cuasi-aritmética, la media ponderada cuasi-aritmética, el operador *Quasi-OWA*, el operador *OWGAWA*, el operador *OWQAWA*, el *olympic-Quasi-OWAWA operator*, el *S-Quasi-OWAWA operator*, el *centered-Quasi-OWAWA operator*, el *ME-Quasi-OWAWA operator*, y mucho otros más.

8.3.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de inversiones

Supongamos que a una empresa inversora se le plantean cinco posibles inversiones y se desea seleccionar aquella que mejor se adapta a sus necesidades.

- A_1: invertir en una empresa de ordenadores.
- A_2: invertir en una empresa farmacéutica.
- A_3: invertir en una empresa de comida.
- A_4: invertir en una empresa de televisores.
- A_5: invertir en una empresa de coches.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada inversión pueda reportar a la empresa. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza S_k que podrían ocurrir en el futuro. Estos estados de la naturaleza van relacionados con la situación económica de la economía y dicen lo siguiente: S_1 = Situación económica muy positiva, S_2 = situación económica positiva, S_3 = situación económica media, S_4 = situación económica negativa y S_5 = situación económica muy negativa. Los resultados esperados para cada inversión son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados esperados.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	50	70	80	40	20
A_2	60	70	90	30	10
A_3	20	40	70	70	70
A_4	10	50	60	70	80
A_5	30	40	50	60	80

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones $W = (0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1)$ y el siguiente $V = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3)$. En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la inversión mas adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (AM), media ponderada (WA) y OWA. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*AM*	*WA*	*OWA*
A_1	80	20	52	46	58
A_2	90	10	52	43	60
A_3	70	20	54	62	59
A_4	80	10	54	63	61
A_5	80	30	52	59	57

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones OWAWA mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente. Se va a considerar el máximo y el mínimo con OWAWA, la mediana OWAWA, el OWAWA y el AOWAWA. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores OWAWA son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *OWA*

	Max-OWAWA	*Min-OWAWA*	*Median*	*OWAWA*	*AOWAWA*
A_1	59.6	35.6	47.6	50.8	53.2
A_2	61.8	29.8	49.8	49.8	53
A_3	65.2	45.2	65.2	60.8	47.2
A_4	69.8	41.8	61.8	62.2	45.8
A_5	67.4	47.4	55.4	58.2	45.8

Como se puede observar, se obtienen diferentes resultados según el método utilizado. Por tanto, esto puede llevar a que el decisor adopte diferentes decisiones según el método utilizado.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las inversiones. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una inversión. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las inversiones

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_2 \succ A_1=A_4=A_5 \succ A_3$	*Max-OWAWA*	$A_4 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1$
Mínimo	$A_5 \succ A_1=A_3 \succ A_2=A_4$	*Min-OWAWA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
AM	$A_3=A_4 \succ A_1=A_2=A_5$	*Median-OWAWA*	$A_3 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1$
WA	$A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2$	*OWAWA*	$A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2$
OWA	$A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5$	*AOWAWA*	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4=A_5$

Como se puede observar según el tipo de agregación *OWAWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del inversor también.

8.4. Extensiones a los GOWAWA operators

8.4.1. Introducción

Los operadores GOWAWA pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que se incorporen a dicho operador. Obsérvese que el operador GOWAWA generaliza al operador OWAWA, OWQAWA, etc. Por tanto, al introducir extensiones a los operadores GOWAWA, automáticamente, también se estarán introduciendo extensiones a los operadores OWAWA, OWQAWA, etc. También cabe destacar que para cada operador generalizado, se comentará su formulación a través de utilizar medias generalizadas y medias cuasi-aritméticas aunque la denominación GOWAWA se utilice para referirse al uso de medias generalizadas.

También cabe destacar que un operador GOWAWA es una extensión de nivel 1 a los operadores GOWA y OWAWA y de nivel 2 a los operadores OWA. Por tanto, las extensiones a los operadores GOWAWA, también cumplirán esta diferencia. Es decir, las extensiones de nivel 1, serán extensiones de nivel 2 a los operadores GOWA y OWAWA y de nivel 3 a los operadores OWA, y así sucesivamente.

A modo de resumen, se comentarán las siguientes extensiones a los GOWAWA.

- Extensiones de nivel 1.
  - *Induced GOWAWA operator*
  - *Linguistic GOWAWA operator*
  - *Uncertain GOWAWA operator*
  - *Fuzzy GOWAWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel 2.
  - *Induced linguistic GOWAWA operator*
  - *Uncertain induced GOWAWA operator*
  - *Fuzzy induced GOWAWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel *N*.
  - *Uncertain induced linguistic GOWAWA operator*
  - Etc.

8.4.2. *Induced GOWAWA operator*

El *induced GOWAWA operator* o operador IGOWAWA, es un operador similar al GOWAWA con la ventaja adicional de que su proceso de ordenación no depende de los valores de los argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el resultado obtenido con el concepto de *immediate weighted OWA* (IWGOWA). En este caso, se obtendría el *induced IWGOWA* (IWIGOWA).

Definición. Un operador IWIGOWA es una función IWIGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWIGOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.68}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IWIGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores IGOWA y GWA. En este caso, se le conoce como el operador IGOWAWA.

Definición. Un operador IGOWAWA es una función IGOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.69}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador IGOWAWA es una función IGOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$IGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.70}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si β = 0, se obtiene estrictamente la media ponderada generalizada o operador GWA y si β = 1, se obtiene estrictamente el operador IGOWA.

El operador IGOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DIGOWAWA) y ascendentes (AIGOWAWA). Las ponderaciones de estos operadores están relacionados por $w_j = w^*_{n+1-j}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del DIGOWAWA (o IGOWAWA) y w^*_{n+1-j} el j-ésimo coeficiente del AIGOWAWA.

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador IGOWAWA puede ser expresado como:

$$IGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{8.71}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWA o el GWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador IGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$IGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.72}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$IGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.73}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Otro aspecto a comentar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en este caso se utilizará la media generalizada.

El operador IGOWAWA generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *induced OWAWA* (*IOWAWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *induced OWQAWA* (*IOWQAWA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *induced OWGAWA* (*IOWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *induced OWHAWA* (*IOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

También incluye a un gran número de casos particulares a través de analizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones W.

- El operador IGOWA ($\beta = 1$).
- El operador GWA ($\beta = 0$).
- El operador GOWA ($i = j$ y $\beta = 1$)
- El máximo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{a_i\}$).
- El mínimo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{a_i\}$).
- La media generalizada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El IGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{a_i\}$, $u_q = \min\{a_i\}$).
- El *step-IGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-IGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-IGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-IGOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-IGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z IGOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-IGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-IGOWAWA*.
- El *dependent-IGOWAWA*.
- Etc.

Cabe destacar que estos casos se pueden analizar desde la perspectiva de la ordenación tradicional independientemente del significado que tenga a nivel de grado de optimismo, o a través de escoger el máximo, mínimo, y así sucesivamente, independientemente del orden en el que se encuentren en la agregación.

El operador IGOWAWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-IOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-IOWAWA es una función Quasi-IOWAWA: $R^n \rightarrow R$ si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QIOWAWA\left(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.74}$$

donde b_j es el valor a_i del par *QIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-IOWAWA se convierte en el operador IGOWAWA.

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador IGOWAWA también son aplicables al operador Quasi-IOWAWA.

8.4.3. *Linguistic GOWAWA operator*

El *linguistic GOWAWA* (LGOWAWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador GOWAWA. Se puede definir de la siguiente manera. En primer lugar se define el caso de *immediate weighted LGOWA* (IWLGOWA).

Definición. Un operador IWLGOWA es una función IWLGOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWLGOWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.75}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores LGOWA y LGWA. Se le conoce en este caso como el operador LGOWAWA.

Definición. Un operador LGOWAWA es una función LGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$LGOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.76}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se ha comentado para el operador GOWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador LGOWAWA es una función LGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$LGOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.77}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada generalizada lingüística o operador LGWA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador LGOWA.

Cabe destacar que dentro de esta formulación, se podrían utilizar diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo. Es decir, a partir del análisis interno, tendríamos:

- Variables lingüísticas simples (con y sin representación interna).
- Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas.
- Variables lingüísticas intervalo valoradas.
- Variables lingüísticas generalizadas (simples, 2-tuplas, intervalo valoradas, etc.).
- Variables lingüísticas de tipo 2 y *n*.
- Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas, etc.).
- Etc.

Por el otro lado, también se podrían utilizar variables lingüísticas procedentes del análisis externo.

- Intervalos de confianza lingüísticos.
- Números borrosos lingüísticos.
- NBT lingüísticos.
- NBTp lingüísticos.
- Números borrosos generalizados lingüísticos.
- Números borrosos intervalo valorados lingüísticos.

- Números borrosos L-R lingüísticos (simples, generalizados, intervalo valorados, etc.).
- Números borrosos intuicionistas lingüísticos (simples, intervalo valorados, generalizados, etc.).
- Números borrosos generalizados intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos no convexos lingüísticos.
- Expertones lingüísticos (simples, cuádruplos, etc.).
- Etc.

El operador LGOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También se puede distinguir entre órdenes descendentes (DLGOWAWA) y ascendentes (ALGOWAWA).

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial de la siguiente forma:

$$LGOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{8.78}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LOWA o el LWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador LGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$LGOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.79}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$LGOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.80}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador LGOWAWA incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes. En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *linguistic OWAWA* (*LOWAWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *linguistic OWQAWA* (*LOWQAWA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *linguistic OWGAWA* (*LOWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *linguistic OWHAWA* (*LOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

Otros casos particulares son aquellos que proceden del vector de ponderaciones.

- El operador LGOWA ($\beta = 1$).
- El operador LGWA ($\beta = 0$).
- El máximo ponderado lingüístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado lingüístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generlizada lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El LGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-LGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-LGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-LGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-LGOWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-LGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z LGOWAWA (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-LGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-LGOWAWA.*
- El *dependent-LGOWAWA.*
- Etc.

Finalmente, también destacar la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

El operador LGOWAWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-LOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-LOWAWA es una función QLOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QLOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right)\right) \tag{8.81}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(s_\beta) = s_\beta^{\lambda}$, el Quasi-LOWAWA se convierte en el operador LGOWAWA.

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador LGOWAWA también son aplicables al operador Quasi-LOWAWA.

8.4.4. *Uncertain GOWAWA operator*

El *uncertain GOWAWA operator* o operador UGOWAWA, es un operador GOWAWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar se considera el operador *immediate weighted UGOWA* (IWUGOWA).

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador IWUGOWA es una función *IWUGOWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWUGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.82}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se presenta el caso que se considera como el más completo para unificar al operador UGOWA y al UGWA.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UGOWAWA es una función *UGOWAWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$UGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.83}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$,

$\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UGOWAWA es una función *UGOWAWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.84}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

Otro aspecto a destacar en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos. Para evitar excesivas dificultades, se recomienda seguir con el criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y a las V como inciertos. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

El operador UGOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUGOWAWA) y ascendentes (AUGOWAWA).

Cabe destacar que también es posible expresarlo en forma vectorial siguiendo con la metodología explicada en los anteriores apartados.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UGOWA o el UGWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador UGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$UGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{\beta}{W} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.85}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$UGOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.86}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector *W* siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

El operador UGOWAWA generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *uncertain OWAWA* (*UOWAWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *uncertain OWQAWA* (*UOWQAWA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *uncertain OWGAWA* (*UOWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *uncertain OWHAWA* (*UOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

También incluye a muchos otros casos procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador UGOWA ($\beta = 1$).
- El operador UGWA ($\beta = 0$).
- El operador GOWA y GWA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El máximo incierto ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo incierto ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El UGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-UGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-UGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-UGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n-2)$).
- La mediana-UGOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-UGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z UGOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.

- El *centered-UGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-UGOWAWA*.
- El *dependent-UGOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

Finalmente, destacar que también se puede generalizar el operador UGOWAWA a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UOWAWA es una función *QUOWAWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QUOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{8.87}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, el Quasi-UOWAWA se convierte en el operador UGOWAWA.

A partir de aquí, se podrían analizar todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador UGOWAWA ya que estos también son aplicables al operador Quasi-UOWAWA.

8.4.5. *Fuzzy GOWAWA operator*

El *fuzzy GOWAWA operator* o operador FGOWAWA, es un operador GOWAWA para situaciones inciertas en donde la información puede ser representada mediante NBs. Su principal ventaja es la posibilidad de ofrecer una información mucho más completa al decisor en situaciones de incertidumbre ya que considera todos los casos pesimistas y optimistas que se pueden producir. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el *immediate weighted FGOWA* (IWFGOWA).

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador IWFGOWA es una función *IWFGOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W, con $\sum_{j=1}^{n} w_j$ = 1 y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWFGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.88}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se presenta el caso que se considera como el más completo para unificar al operador FGOWA y al FGWA.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FGOWAWA es una función *FGOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$FGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.89}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FGOWAWA es una función *FGOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$FGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.90}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son NBs, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados

- Números borrosos de tipo 2 y *n*.
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y *n* generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y *n*, generalizados, etc.)
- Etc.

También cabe destacar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente para comparar NBs (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y V como NBs. Debido a que estos conceptos implican un análisis mucho más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo (véase apartado 8.2.5). Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas, expertones, etc.

El operador FGOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DFGOWAWA) y ascendentes (AFGOWAWA).

Cabe destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador FGOWAWA puede ser expresado como:

$$FGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \qquad (8.91)$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FGOWA o el FGWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador FGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$FGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (8.92)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$FGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (8.93)$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

También cabe señalar la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector *W* siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

Al igual que las anteriores extensiones, el operador FGOWAWA generaliza a un gran número de casos particulares. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *fuzzy OWAWA* (*FOWAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *fuzzy OWQAWA* (*FOWQAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *fuzzy OWGAWA* (*FOWGAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *fuzzy OWHAWA* (*FOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

Y por el otro, los casos procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador FGOWA ($\beta = 1$).
- El operador FGWA ($\beta = 0$).
- El operador GOWA y GWA (cuando los NBs se reducen a números simples).
- El máximo borroso ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo borroso ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El FGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-FGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-FGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-FGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-FGOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-FGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z FGOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-FGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-FGOWAWA*.
- El *dependent-FGOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

El operador FGOWAWA puede ser generalizado mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. Como resultado se obtiene el *Quasi-FOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador Quasi-FOWAWA es una función *QFOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QFOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{8.94}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-FOWAWA se convierte en el operador FGOWAWA.

Finalmente, decir que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador FGOWAWA también son aplicables al operador Quasi-FOWAWA.

8.4.6. Extensiones de nivel 2

8.4.6.1. Introducción

De entre las diferentes extensiones de nivel 2 que se podrían desarrollar sobre el operador OWAWA, se van a destacar el *induced linguistic GOWAWA*, el *uncertain induced GOWAWA* y el *fuzzy induced GOWAWA*. Cabe destacar que otras extensiones de nivel 2, se comentarán implícitamente en otros apartados posteriores aunque no se introducirán como extensiones de nivel 2.

En este caso, simplemente se va a mostrar su definición básica sin entrar en más detalle ya que el resto de propiedades y características se dan por sobreentendidas a partir de lo comentado en los anteriores apartados.

8.4.6.2. *Induced linguistic generalized OWAWA operator*

El *induced linguistic GOWAWA operator* o operador ILGOWAWA es una extensión al operador GOWAWA a través de utilizar procesos de ordenación que dependen de variables de ordenación inducidas e información incierta representada mediante variables lingüísticas. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador ILGOWAWA es una función ILGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$ILGOWAWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.95}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *ILGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se ha comentado para el operador GOWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador ILGOWAWA es una función ILGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$LGOWAWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.96}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *ILGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada generalizada lingüística o operador LGWA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador ILGOWA.

También cabe destacar la posibilidad de realizar una generalización mayor a través de utilizar medias cuasi-aritméticas.

Definición. Un operador Quasi-ILOWAWA es una función QILOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QILOWAWA(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right) \right) \tag{8.97}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *ILGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta)v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y g es una función monótona estrictamente continua.

A partir de aquí, decir que todo lo mencionado en el apartado 8.4.3, también es aplicable en este caso.

8.4.6.3. *Uncertain induced generalized OWAWA operator*

El *uncertain induced GOWAWA operator* o operador UIGOWAWA, es un operador GOWAWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Además, el proceso de reordenación no depende de los valores de los argumentos sino que depende de otro mecanismo basado en variables de ordenación inducidas. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa ya que considera diferentes situaciones optimistas y pesimistas que se pueden producir. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UIGOWAWA es una función *UIGOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$UIGOWAWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.98}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta)v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UIGOWAWA es una función *UIGOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UGOWAWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\beta)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8.99}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *UIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

También se puede generalizar el operador UIGOWAWA a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UIOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UIOWAWA es una función *QUIOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QUIOWAWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{8.100}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *QUIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, el Quasi-UIOWAWA se convierte en el operador UIGOWAWA.

A partir de aquí, se podrían analizar todas las propiedades y casos particulares comentados en los anteriores apartados tanto para el operador UIGOWAWA como para el operador Quasi-UIOWAWA.

8.4.6.4. *Fuzzy induced generalized OWAWA operator*

El *fuzzy induced GOWAWA operator* o operador FIGOWAWA, es un operador GOWAWA para situaciones inciertas en donde la información puede ser representada mediante NBs y el carácter del decisor se representa mediante un mecanismo de reordenación de argumentos basado en variables de ordenación inducidas. Su principal ventaja es la posibilidad de ofrecer una información mucho más completa al decisor en situaciones de incertidumbre ya que considera todos los casos pesimistas y optimistas que se pueden producir. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FIGOWAWA es una función *FIGOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$FIGOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.101}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FIGOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador FIGOWAWA es una función *FIGOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones *V*, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$FIGOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.102}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *FIGOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$ son NBs, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

El operador FIGOWAWA puede ser generalizado mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. Como resultado se obtiene el *Quasi-FIOWAWA operator*. Se define de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador Quasi-FIOWAWA es una función *QFIOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QFIOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{8.103}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *QFIOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^\lambda$, el Quasi-FIOWAWA se convierte en el operador FIGOWAWA.

Finalmente, decir que todas las propiedades y casos particulares comentados en los anteriores apartados, también son aplicables en el FIGOWAWA y en el Quasi-FIOWAWA.

8.4.7. Extensiones de nivel *N*

Finalmente, decir que se podrían desarrollar muchas otras extensiones a los operadores OWAWA a través de añadir nuevas características en el problema como por ejemplo, mediante el uso de distancias o índices de selección. Obsérvese que este aspecto se comentará brevemente en el siguiente apartado aunque no se verá como una extensión de nivel *N* a los operadores OWAWA, sino que se volverá a empezar a partir del operador OWAWA de distancias (OWAWAD).

También destacar que otras posibles extensiones serán comentadas brevemente en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWA.

Por poner algún ejemplo, se podría haber elaborado extensiones a partir de las t-normas y conormas, es decir, a partir del *ST-GOWAWA operator* y todas sus posibles extensiones como el *ST-IGOWAWA operator*.

8.5. Otras extensiones

Para finalizar este capítulo, se van a comentar brevemente otros casos en donde se podría utilizar el operador OWAWA y sus respectivas extensiones. Cabe destacar que en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWAWA se muestran muchos otros casos en donde se podrían implementar como por ejemplo en diferentes métodos de decisión como la estructura de credibilidad de Dempster-Shafer, en la minimización del coste de Savage, en el AHP, en las decisiones secuenciales, en las decisiones de grupo con sus diferentes variantes, etc.

Obsérvese que únicamente se comentan los operadores OWAWA con distancias y en algunos índices de selección como el coeficiente de adecuación y el índice del máximo y el mínimo nivel.

8.5.1. Operadores OWAWA en la noción de distancia

8.5.1.1. Introducción

Los operadores OWAWA también pueden ser utilizados en los métodos de distancias. Entonces, se obtiene el *ordered weighted averaging weighted averaging distance operator* o operador OWAWAD. La gran ventaja que tiene es que permite agregar un problema de distancias con operadores OWA y WA al mismo tiempo de tal forma que se refleja el grado de optimismo y el grado de importancia en la misma formulación. Con el operador OWAWAD se consigue una formulación mucho más general a los métodos de distancias, lo cual permite mostrar un abanico mucho más amplio de resultados según los intereses del problema.

Además, la utilización de operadores OWAWAD puede ser considerado en un gran número de aplicaciones como se mostrará en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWA ya sea en diferentes aspectos estadísticos, etc. En resumen, decir que todo concepto que utiliza el concepto de media (en especial de media ponderada) es susceptible de ser analizada con el operador OWAWA. Obsérvese que en este caso, esto afectaría a los diferentes tipos de distancias existentes en la literatura como la distancia de Hamming, de Euclides, de Minkowski, etc.

A continuación, se van a mostrar algunos casos de operadores OWAWAD. Se van a considerar los siguientes:

- *OWAWA distance operator*
- *Generalized OWAWA distance operator*
- *Induced generalized OWAWA distance operator*
- *Linguistic generalized OWAWA distance operator*
- *Uncertain generalized OWAWA distance operator*
- Etc.

Obsérvese que también se podrían haber considerado otros casos como el *heavy OWAWAD*, el *induced heavy OWAWAD*, el *uncertain induced OWAWAD*, etc.

8.5.1.2. *OWAWA distance operator*

El *OWAWA distance operator* o el operador OWAWAD es un operador OWAWA de distancias. La gran ventaja que presenta es la posibilidad de calcular las distancias entre elementos considerando grados de importancia y grados de optimismo en la misma formulación. En otras palabras, lo que permite es unificar la distancia de Hamming ponderada con el operador OWAD en un mismo modelo. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se presenta el caso con el *immediate weighted OWAD* (IWOWAD).

Definición. Un operador IWOWAD es una función IWOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWOWAD\ (P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j \tag{8.104}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$.

Como se ha comentado en los anteriores apartados, se puede formular un caso más completo que además de unificar al operador OWAD y al operador WAD, permita reflejar en qué grado se quiere considerar cada uno. Es decir, en algunos casos puede que se quiera tener en cuenta ambos casos pero por las circunstancias del problema, puede que sólo se quiera considerar uno de los casos y el otro con carácter residual, o simplemente, en un grado inferior. Obsérvese que este es el modelo al que estrictamente se denomina como operador OWAWAD.

Definición. Un operador OWAWAD es una función OWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$OWAWAD\ (P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j \tag{8.105}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$.

Obsérvese que este caso es mucho más completo ya que aparte de unificar al operador OWA y WA, también permite introducirlos en la formulación en mayor o menor medida según el grado de importancia que se les quiera dar. Entonces, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia de Hamming ponderada o operador WAD y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWAD.

Obsérvese que también es posible formular la anterior definición de la siguiente forma. En este caso, se separan la parte WAD de la parte OWAD mientras que en la anterior formulación se buscaba un mismo vector de ponderaciones para los 2.

Definición. Un operador OWAWAD es una función OWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$OWAWAD\ (P, P_k) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j D_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i d_i \tag{8.106}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, en este caso se da un tratamiento separado a ambos casos a través de utilizar una ponderación simple que refleja la importancia de cada caso en el problema. En este caso también se observa que si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada o operador WA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWA.

A partir de estas definiciones, se podrían considerar diferentes propiedades y casos particulares de estos operadores siguiendo con la metodología explicada para los otros operadores. Es decir, se podría distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes, expresarlo en una notación vectorial, establecer un caso general de normalización de las ponderaciones, estudiar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones, etc.

8.5.1.3. *Generalized OWAWA distance operator*

El *generalized OWAWA distance operator* o el operador GOWAWAD es una generalización del operador OWAWAD a través de utilizar medias generalizadas o cuasi-aritméticas. La gran ventaja que presenta es la posibilidad de ofrecer un caso mucho más completo que incluye a un gran número de distancias no incluidas en el operador OWAWAD como por ejemplo a las diferentes variantes de la distancia de Euclides, de Minkowski, etc. En términos genéricos, el caso con medias o distancias generalizadas, lo que hace es unificar a la distancia de Minkowski ponderada con el operador GOWAWAD. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se presenta el caso con el *immediate weighted GOWAD* (IWGOWAD).

Definición. Un operador IWGOWAD es una función IWGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWGOWAD\ (P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.107}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Una formulación más completa, siguiendo con lo explicado en los anteriores casos, es la siguiente. Obsérvese que este es el caso que se conoce propiamente como operador GOWAWAD.

Definición. Un operador GOWAWAD es una función GOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$GOWAWAD\ (P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.108}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Este caso es mucho más completo ya que aparte de unificar al operador GOWAD y GWAD, también permite introducirlos en la formulación en mayor o menor medida según el grado de importancia que se les quiera dar. Entonces, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia de Minkowski ponderada o operador GWAD y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador GOWAD.

Obsérvese que también es posible formular la anterior definición de la siguiente forma.

Definición. Un operador GOWAWAD es una función GOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$GOWAWAD\ (P, P_k) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i d_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.109}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, en este caso se da un tratamiento separado a ambos casos a través de utilizar una ponderación simple que refleja la importancia de cada caso en el problema.

Una generalización mayor a esta formulación se consigue a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, se consigue el operador Quasi-OWAWAD.

Definición: Una función *QOWAWAD*: $R^n \times R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-OWAWAD de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QOWAWAD\ (P, P_k) = g^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g(D_j) \right) \tag{8.110}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, y $g(D)$ es una función monótona estrictamente continua.

A partir de estas definiciones, se podrían considerar diferentes propiedades y casos particulares de estos operadores siguiendo con la metodología explicada para los otros operadores. Es decir, se podría distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes, expresarlo en una notación vectorial, establecer un caso general de normalización de las ponderaciones, estudiar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones, etc.

8.5.1.4. *Induced generalized OWAWA distance operator*

El *induced generalized OWAWA distance operator* o el operador IGOWAWAD es una extensión al operador GOWAWAD a través de utilizar un proceso de reordenación basado en variables de ordenación inducidas. De esta forma, se consigue un operador de distancias mucho más completo, ya sea mediante el uso de medias generalizadas o mediante medias cuasi-aritméticas. Se puede definir del siguiente modo dado el conjunto $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de variables inducidas y los dos conjuntos X y Y de argumentos. En primer lugar, se considera el *immediate weighted induced generalized OWAWA* (IWIGOWAWA).

Definición. Un operador IWIGOWAD es una función IWIGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWIGOWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.111}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta IWIGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores IGOWAD y GWAD. En este caso, se le conoce como el operador IGOWAWAD.

Definición. Un operador IGOWAWAD es una función IGOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IGOWAWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.112}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta IGOWAWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador IGOWAWAD es una función IGOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$IGOWAWAD\ (\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\beta)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (8.113)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta IGOWAWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la media ponderada generalizada o operador GWA y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador IGOWA.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWAD o el GWAD, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador IGOWAWAD se puede expresar de la siguiente forma:

$$IGOWAWAD\ (\langle u_1,x_1,y_1\rangle,\ldots,\langle u_n,x_n,y_n\rangle) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i d_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (8.114)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$IGOWAWAD\ (\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (8.115)$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador IGOWAWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-IOWAWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-IOWAWAD es una función Quasi-IOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QIOWAWAD\ (\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (8.116)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta QIOWAWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta)v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y g es la función monótona estrictamente continua.

A partir de aquí, se podrían estudiar todas las propiedades habituales y casos particulares de la misma forma a como se ha visto en los otros operadores OWA explicados anteriormente.

8.5.1.5. *Linguistic generalized OWAWA distance operator*

El *linguistic GOWAWAD* (LGOWAWAD) *operator* es un operador de agregación de distancias que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador GOWAWAD. Para dos conjuntos $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ e $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar se define el caso de *immediate weighted LGOWAD* (IWLGOWAD).

Definición. Un operador IWLGOWAD es una función IWLGOWAD: $S^n \times S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWLGOWAD\,(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{\delta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.117}$$

donde s_{δ_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según s_{δ_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Una formulación más completa a la anterior que unifica al operador LGOWAD y al LGWAD y que a su vez los incluye en mayor o menor medida según los intereses del problema, es el siguiente. A este operador se le conoce como el operador LGOWAWAD.

Definición. Un operador LGOWAWAD es una función LGOWAWAD: $S^n \times S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$LGOWAWAD\,(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{\delta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.118}$$

donde $s_{\delta j}$ es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según $s_{\delta j}$, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se ha comentado para el operador LGOWAWAD, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador LGOWAWAD es una función LGOWAWAD: $S^n \times S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$LGOWAWAD\,(X, Y) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\delta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \left| s_{X_i} - s_{Y_i} \right|^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.119}$$

donde $s_{\delta j}$ es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia media ponderada generalizada lingüística o operador LGWAD y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador LGOWAD.

El operador LGOWAWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas obteniendo así, el *Quasi-LOWAWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-LOWAWAD es una función QLOWAWAD: $S^n \times S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QLOWAWAD\,(X, Y) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right) \right) \tag{8.120}$$

donde $s_{\delta j}$ es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j

es la ponderación v_i ordenada según $s_{\delta j}$, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(s_\beta) = s_\beta^{\lambda}$, el Quasi-LOWAWAD se convierte en el operador LGOWAWAD.

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares de los operadores OWA comentados en anteriores apartados, también serían aplicables para el LGOWAWAD y el Quasi-LOWAWAD.

8.5.1.6. *Uncertain generalized OWAWA distance operator*

El *uncertain GOWAWAD operator* o operador UGOWAWAD, es un operador GOWAWAD para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa. Se puede definir de la siguiente forma para dos conjuntos A y E. En primer lugar se considera el operador *immediate weighted UGOWAD* (IWUGOWAD).

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador IWUGOWAD es una función $IWUGOWAD$: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IWUGOWAD\ (\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.121}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se presenta el caso que se considera como el más completo para unificar al operador UGOWAD y al UGWAD.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UGOWAWAD es una función $UGOWAWAD$: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$UGOWAWAD\ (\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.122}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta)v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UGOWAWAD es una función $UGOWAWAD$: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$UGOWAWAD\,(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\beta)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i d_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (8.123)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $d_i = |\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

Otro aspecto a destacar en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos. Para evitar excesivas dificultades, se recomienda seguir con el criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y a las V como inciertos. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DUGOWAWAD) y ascendentes (AUGOWAWAD). Cabe destacar que también es posible expresarlo en forma vectorial siguiendo con la metodología explicada en los anteriores apartados.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UGOWAD o el UGWAD, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador UGOWAWAD se puede expresar de la siguiente forma:

$$UGOWAWAD\,(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i d_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (8.124)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$UGOWAWAD\ (\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.125}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector *W* siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

El operador UGOWAD generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. En primer lugar destacar que si uno de los 2 conjuntos considerados es el conjunto vacío, entonces el operador UGOWAWAD se convierte en el operador UGOWAWA con todas sus particularidades.

Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *uncertain OWAWAD* (*UOWAWAD*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *uncertain OWQAWAD* (*UOWQAWAD*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *uncertain OWGAWAD* (*UOWGAWAD*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *uncertain OWHAWAD* (*UOWHAWAD*) *operator*.
- Etc.

También incluye a muchos otros casos procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador UGOWAD (β = 1).
- El operador UGWAD (β = 0).
- El operador GOWAD, GWAD y GOWAWAD (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- Operador GOWAWA, UGOWAWA, etc. (si uno de los 2 conjuntos es el conjunto vacío).
- La distancia máxima incierta ponderada ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- La distancia mínima incierta ponderada ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La distancia media generalizada incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El UGOWAWAD según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-UGOWAWAD* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-UGOWAWAD* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-UGOWAWAD operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n-2)$).
- La mediana-UGOWAWAD.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.

- El *S-UGOWAWAD* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z UGOWAWAD (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-UGOWAWAD* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-UGOWAWAD.*
- El *dependent-UGOWAWAD.*
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

Finalmente, destacar que también se puede generalizar el operador UGOWAWAD a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-UOWAWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UOWAWAD es una función *QUOWAWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QUOWAWAD\ (\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1 \rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n \rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{8.126}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, el Quasi-UOWAWAD se convierte en el operador UGOWAWAD.

A partir de aquí, se podrían analizar todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador UGOWAWAD ya que estos también son aplicables al operador Quasi-UOWAWAD.

8.5.2. Operadores OWAWA en los índices de selección

Los operadores OWAWA también pueden ser introducidos en el análisis de los índices de selección como por ejemplo en el coeficiente de adecuación y en el índice del máximo y el mínimo nivel. A continuación, se presenta las principales definiciones de estos operadores. Se mostrará la versión aritmética y generalizada simple. En primer lugar se presenta el *OWAWA adequacy coefficient* (OWAWAAC) para dos conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$

Definición. Un operador OWAWAAC de dimensión n, es una función *OWAWAAC*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$OWAWAAC\,(A, E) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j K_j \tag{8.127}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $k_i = [1 \wedge (1 - a_i + e_i)]$, cada argumento k_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según K_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los k_i.

A continuación, se presenta el caso generalizado mediante medias generalizadas. Es decir, mediante el *GOWAWA adequacy coefficient* (GOWAWAAC).

Definición. Un operador GOWAWAAC de dimensión n es una función GOWAWAAC: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$GOWAWAAC\,(A, E) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.128}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $k_i = [1 \wedge (1 - a_i + e_i^{(k)})]$, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$, las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0, 1]$, cada argumento k_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según K_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los k_i.

.

La siguiente definición hace referencia al caso aritmético con el índice del máximo y el mínimo nivel. Es decir con el *OWAWA index of maximum and minimum level* (OWAWAIMAM).

Definición. Un operador OWAWAIMAM de dimensión n, es una función *OWAWAIMAM*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$OWAWAIMAM\ (p_1, p_2,\ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j P_j \tag{8.129}$$

donde P_j representa el j-ésimo más grande de todos los $p_i^y = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $p_i^z = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, $y + z = n$, cada argumento p_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según P_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los p_i.

La versión generalizada del operador OWAWAIMAM es la siguiente. Obsérvese que entonces se obtiene el *GOWAWA index of maximum and minimum level* (GOWAWAIMAM).

Definición. Un operador GOWAWAIMAM de dimensión n es una función GOWAWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \to [0, 1]$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W con las siguientes propiedades:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y tal que

$$GOWAWAIMAM\ (p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j P_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8.130}$$

donde P_j representa el j-ésimo más grande de todos los $p_i^y = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $p_i^z = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, $y + z = n$, cada argumento p_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según P_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los p_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y así sucesivamente se podrían desarrollar muchas otras extensiones siguiendo con la metodología explicada para el resto de operadores OWAWA y OWA en general. Además, para cada caso se podrían estudiar sus propiedades, diferentes casos particulares y muchos otros aspectos que pudiesen resultar de interés.

9. Operadores *OWA* en la noción de probabilidad

9.1. Introducción

9.1.1. Conceptos básicos

En este capítulo se presenta una nueva formulación para unificar el operador OWA con la noción de probabilidad. De esta forma, se obtendrá un nuevo modelo que podrá representar en la misma formulación a la probabilidad de ocurrencia de los elementos y al grado de optimismo que se desee utilizar en el problema. Por así decirlo, este modelo transformará las probabilidades iniciales a través de sobrevalorar o infravalorar el problema.

La motivación de este modelo radica en lo siguiente. La probabilidad es una medida (ya sea objetiva o subjetiva, en este capítulo se entenderá como objetiva ya que la subjetiva se encuentra implícitamente dentro del concepto de media ponderada explicada en el capítulo 8) que permite modelizar la incertidumbre con un cierto carácter de arbitrariedad. El problema es que independientemente de la arbitrariedad, la incertidumbre sigue existiendo en el problema y por tanto nadie puede garantizar que los resultados probabilísticos sean los correctos. Son los que tienen mayor probabilidad de ocurrencia pero no por ello son correctos. Por tanto, en muchos casos puede darse la situación de que los resultados probabilísticos no son del todo satisfactorios. También puede darse el caso de que simplemente el analista del problema desea sobrevalorar o infravalorar los resultados arbitrarios obtenidos con la probabilidad debido a que es un tipo de decisor que prefiere ser más optimista o pesimista que los resultados probabilísticos. Este hecho es el que se suele tratar con el operador OWA. Pero el problema del operador OWA es que se concentra exclusivamente en este hecho y a veces esto puede ser erróneo. Una mejor forma de considerar el problema es utilizando al operador OWA, pero al mismo tiempo considerando el conocimiento probabilístico (objetivo o subjetivo) disponible. En algunos casos, el conocimiento basado en probabilidades será mínimo, en otros casos será adecuado y en otros casos, independientemente del conocimiento, se le querrá dar más o menos importancia.

Cabe destacar que este concepto se acerca al concepto de utilidad en el sentido de que los resultados no son estrictamente los disponibles en las probabilidades. Sino que se pueden considerar otras situaciones según las circunstancias del decisor. En teoría de la utilidad esto se ve desde el punto de vista de *la utilidad que puede implicar un resultado* mientras que en el operador OWA esto se ve desde la perspectiva del grado de optimismo del decisor que combinado con extensiones más complejas (versiones inducidas (IOWA) y similar), se cree que llevan a un concepto unificador entre el operador OWA y la noción de utilidad. Obsérvese que el concepto de utilidad puede ser estudiado en estos modelos según lo que se comenta en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWA. Pero aquí se esta comentando de que 2 ramas de la teoría de la decisión converjan en una misma y única dirección. Como se ha dicho, se cree que esta misma dirección se conseguirá mediante extensiones IOWA y similar (con probabilidades, etc.) aún así, esto queda para futuras investigaciones postdoctorales del doctorando y de la comunidad científica en general.

A este operador, en términos generales, se le denominará como *probabilistic ordered weighted averaging operator* o el operador POWA. Obsérvese que también se comentará la aproximación de (Engemann et al., 1996; Yager, 1999) sobre el concepto de *immediate probabilities*. Como se mostrará, este concepto es un paso hacia delante en la unificación del operador OWA con la probabilidad, pero el modelo que se cree en esta tesis origina el inicio de una perfecta unificación es el operador POWA.

Cabe destacar que también sería posible considerar los conceptos de *hybrid averaging* y operador WOWA como modelos probabilísticos ya que la metodología sería la misma en el sentido de que analizan medias ponderadas que pueden ser vistas como probabilidades subjetivas. Por tanto, también resulta posible extender estos modelos a situaciones con probabilidades objetivas. Estos 2 casos no se considerarán en la tesis ya que da la sensación de que estos modelos son incompletos aunque en algunos casos particulares pueden resultar de interés. Se comentará brevemente el concepto de *immediate probabilistic OWA* (IP-OWA) ya que a pesar de ser también un modelo incompleto, se considera que esta aproximación está mejor encaminada y en cualquier caso es el paso previo al desarrollo del nuevo modelo propuesto en esta tesis.

La gran ventaja del operador POWA, además de unificar el concepto de probabilidad con el operador OWA, es la posibilidad de unificar estos conceptos en mayor o menor medida según el problema estudiado. Esto resulta de gran interés porque en muchos casos se desea considerar ambos conceptos pero por las circunstancias del problema, puede que uno de ellos sea más relevante o se le quiera dar más relevancia.

La versión simple del operador POWA se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar se empieza con el paso previo, es decir, con el *immediate probabilistic OWA* (IP-OWA).

Definición. Un operador IPOWA es una función IPOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPOWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.1}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i.

A continuación, se presenta la formulación que se considera en esta tesis como la unificación entre el operador OWA y la noción de probabilidad. A este operador se le denominará como el operador POWA o *probabilistic OWA*.

Definición. Un operador POWA es una función POWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.2}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i.

Obsérvese que este caso es mucho más completo ya que aparte de unificar al operador OWA y a las probabilidades, también permite introducirlos en la formulación en mayor o menor medida según el grado de importancia que se les quiera dar. Entonces, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la probabilidad y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWA.

Esta definición también puede expresarse de la siguiente forma.

Definición. Un operador POWA es una función POWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$POWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \qquad (9.3)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos a_i y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, en este caso se da un tratamiento separado a ambos casos a través de utilizar una ponderación simple que refleja la importancia de cada caso en el problema. En este caso también se observa que si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la probabilidad y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWA.

En este caso, también se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPOWA) y ascendentes (APOWA).

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de expresar el operador POWA en forma vectorial:

$$POWA\ (a_1, \ldots, a_n) = W^T B \qquad (9.4)$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones OWA o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador POWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$POWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \frac{\beta}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{(1-\beta)}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \qquad (9.5)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$POWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.6}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

También se puede observar como el operador OWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia.

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. La primera medida, $\alpha(W)$, el carácter actitudinal, se define de la siguiente forma:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1}\right) w_j \tag{9.7}$$

La segunda medida (Yager, 1988) se denomina la entropía de la dispersión del vector de ponderaciones *W*. Se define como:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{9.8}$$

Una tercera medida que se puede desarrollar en el análisis del operador POWA para estudiar el vector *W* es el *balance operator* (*Bal*(*W*)) (Yager, 1996a) y se define de la siguiente forma:

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{9.9}$$

Una cuarta medida para estudiar el vector *W* es aquella que mide el grado de divergencia de *W* (Yager, 2002). Su formulación es la siguiente:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{9.10}$$

9.1.2. Tipos de *POWA operators*

A través de utilizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones *W*, se pueden obtener diferentes casos particulares de operadores POWA. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes. Obsérvese que este apartado se desarrolla de forma resumida ya que se sigue con la misma metodología que se ha desarrollado a lo largo de toda la tesis.

- El operador OWA (β = 1).

- El operador de probabilidades ($\beta = 0$).
- El máximo probabilístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo probabilístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El POWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-POWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-POWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-POWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-POWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-POWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z POWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-POWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-POWA*.
- El *dependent-POWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

9.2. Extensiones a los POWA operators

9.2.1. Introducción

Los operadores POWA pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que incorporemos en dicho operador. Para no entrar en una excesiva redundancia y teniendo en cuenta lo explicado en capítulos anteriores, en este apartado se considerarán brevemente las siguientes extensiones:

A modo de resumen, distinguiremos entre extensiones a los operadores POWA de nivel 1 y de nivel *N*.

- Extensiones de nivel 1.
  - *Induced POWA operator*
  - *Linguistic POWA operator*
  - *Uncertain POWA operator*
  - *Fuzzy POWA operator*
  - *Heavy POWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel *N*.
  - *Induced linguistic POWA operator*
  - *Uncertain induced POWA operator*
  - *Fuzzy induced POWA operator*
  - *Induced heavy POWA operator*
  - *Uncertain induced heavy POWA operator*
  - Etc.

9.2.2. *Induced POWA operator*

El *probabilistic induced OWA operator* o operador PIOWA, es un operador similar al POWA con la diferencia de que su proceso de ordenación no depende de los valores de los argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el resultado obtenido con el concepto de *immediate probabilistic induced OWA* (IPIOWA).

Definición. Un operador IPIOWA es una función IPIOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPIOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.11}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IPIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

A continuación, se presenta la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores OWA y probabilísticos. Se le conoce en este caso como el operador PIOWA.

Definición. Un operador PIOWA es una función PIOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PIOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.12}$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

Como se ha comentado para el operador PIOWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIOWA es una función PIOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PIOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i a_i \tag{9.13}$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente el operador de probabilidades y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador IOWA.

A partir de aquí, se podrían analizar diversas propiedades y casos particulares del operador PIOWA, siguiendo una metodología similar al resto de operadores vistos en esta tesis.

9.2.3. *Linguistic POWA operator*

El *probabilistic linguistic OWA* (PLOWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador POWA. Por tanto, este operador permite considerar al mismo tiempo el grado de optimismo y de importancia de una serie de variables representadas mediante información lingüística. Se puede definir de la siguiente manera. En primer lugar se define el caso de *immediate probabilistic LOWA* (IPLOWA).

Definición. Un operador IPLOWA es una función IPLOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPLOWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{9.14}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores LOWA y las probabilidades. Este caso se conoce como el operador PLOWA.

Definición. Un operador PLOWA es una función PLOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PLOWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{9.15}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

Como se ha comentado para el operador OWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PLOWA es una función PLOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PLOWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} \tag{9.16}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente el operador de probabilidades con información lingüística y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador LOWA.

Cabe destacar que esta es la formulación general, pero dentro de esta formulación, se podrían utilizar un gran número de diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo.

Además, siguiendo con la misma metodología explicada en capítulos anteriores, se podrían analizar diversos tipos de operadores POWA, diferentes propiedades, etc.

9.2.4. *Uncertain POWA operator*

El *probabilistic uncertain OWA operator* o operador PUOWA, es un operador POWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa de tal forma que resulta posible considerar los resultados más optimistas y pesimistas. En primer lugar se considera el operador *immediate probabilistic UOWA* (IPUOWA).

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador IPUOWA es una función *IPUOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPUOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.17}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

A continuación, se presenta el caso que según esta tesis se considera como el más completo para unificar al operador UOWA y a las probabilidades.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUOWA es una función *PUOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.18}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUOWA es una función *PUOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PUOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{9.19}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

Cabe destacar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos. En esta tesis, se recomienda seguir con el mismo criterio comentado en (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

9.2.5. *Fuzzy POWA operator*

El *probabilistic fuzzy OWA operator* o operador PFOWA, es un operador POWA similar al PUOWA pero con la diferencia de que se representa la información incierta mediante NBs. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el *immediate probabilistic FOWA* (IPFOWA).

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador IPFOWA es una función *IPFOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPFOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.20}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

A continuación, se presenta el caso que se considera como el más completo para unificar al operador FOWA y a las probabilidades.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFOWA es una función $PFOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PFOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.21}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFOWA es una función $PFOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PFOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{9.22}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son NBs y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo NBT, NBTp, NB generalizados, NB intervalo valorados, NB de tipo 2 y n, etc.

9.2.6. Extensiones de nivel *N*

Siguiendo con la metodología desarrollada en el anterior apartado, se podrían comentar una amplia gama de extensiones de mayor complejidad. En este apartado se van a comentar 3 de estas extensiones como son el *probabilistic induced linguistic OWA* (PILOWA), el *probabilistic uncertain induced OWA* (PUIOWA) y el *probabilistic fuzzy induced OWA* (PFIOWA).

9.2.6.1. *Probabilistic induced linguistic OWA operator*

Este operador utiliza variables de ordenación inducidas e información incierta representada mediante variables lingüísticas. Su definición principal, la del operador PILOWA, es la siguiente.

Definición. Un operador PILOWA es una función PILOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PILOWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{9.23}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

Como se ha comentado para el operador PLOWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PILOWA es una función PILOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PILOWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} \tag{9.24}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y $\beta \in [0, 1]$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente el operador de probabilidades con información lingüística y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador ILOWA.

9.2.6.2. *Probabilistic uncertain induced OWA operator*

El operador PUIOWA es un operador POWA que utiliza información incierta representada mediante intervalos de confianza y variables de ordenación inducidas. Se define de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUIOWA es una función *PUIOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUIOWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.25}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PUIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUIOWA es una función *PUIOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PUIOWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{9.26}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PUIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$ son intervalos de confianza y $\beta \in [0, 1]$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc. Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros aspectos particulares del operador PUIOWA siguiendo con la metodología explicada para el resto de operadores OWA.

9.2.6.3. *Probabilistic fuzzy induced OWA operator*

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFIOWA es una función *PFIOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PFIOWA\ (\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{9.27}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PFIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFIOWA es una función *PFIOWA*: $\Psi^n \to \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PFIOWA\left(\langle u_1, \tilde{a}_1 \rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n \rangle\right) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i \tag{9.28}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PFIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$ son NBs y $\beta \in [0, 1]$.

La información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB y así sucesivamente, se podrían ir considerando otras propiedades del operador PFIOWA.

9.3. Introducción al generalized POWA operator

9.3.1. Conceptos básicos

El operador POWA puede ser generalizado mediante el uso de medias generalizadas o cuasi-aritméticas. De esta forma se consigue una formulación mucho más completa porque aparte de abarcar al operador POWA como un caso particular, se incluye a muchos otros casos como el operador POWA geométrico, el cuadrático, etc. A esta generalización se la denominará como el *probabilistic generalized OWA operator* o el operador PGOWA, en el caso de que se utilicen medias generalizadas. Cuando se utilicen medias cuasi-aritméticas en este operador, entonces, se le denominará *Quasi-POWA operator*. Se define de la siguiente forma. En primer lugar, se analiza el *immediate probabilistic generalized OWA* (IPGOWA).

Definición. Un operador IPGOWA es una función IPGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.29}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación se muestra una formulación más completa que además de unificar al operador OWA y a las probabilidades, permite reflejar en qué grado se quiere considerar cada uno. Se define de la siguiente forma

Definición. Un operador PGOWA es una función PGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.30}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también podría expresarse de la siguiente forma.

Definición. Un operador PGOWA es una función PGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.31}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos a_i, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la probabilidad generalizada y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador GOWA.

En el operador PGOWA se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPGOWA) y ascendentes (APGOWA).

Este operador también puede ser expresado en forma vectorial como:

$$PGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(W^T B \right)^{1/\lambda} \tag{9.32}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWA o el GWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PGOWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \frac{\beta}{W} \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V} \left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.33}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PGOWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.34}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Este operador también cumple las propiedades tradicionalmente analizadas en los operadores OWA, las medidas para caracterizar el vector de ponderaciones W, etc. Para más información sobre estos aspectos, véase los capítulos anteriores en relación a los operadores OWA y sus extensiones.

9.3.2. Tipos de *PGOWA operators*

Los operadores PGOWA incluyen como casos particulares a un gran número de operadores de agregación probabilísticos de entre los cuales se destacan los siguientes.

En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *POWA operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *probabilistic ordered weighted quadratic averaging* (*POWQA*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *probabilistic ordered weighted geometric averaging* (*POWGA*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *probabilistic ordered weighted harmonic averaging* (*POWHA*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se pueden analizar los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones W.

- El operador GOWA ($\beta = 1$).
- La probabilidad generalizada ($\beta = 0$).
- El máximo probabilístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo probabilístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada simple ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PGOWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PGOWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PGOWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-POWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PGOWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PGOWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PGOWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PGOWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PGOWA*.
- El *dependent-PGOWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar un gran número de casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

9.3.3. Generalización mediante el uso de medias cuasi-aritméticas

El operador PGOWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. Entonces, se obtiene una generalización mucho mayor del problema. A este operador se le denominará como *Quasi-POWA operator*.

Definición: Una función *QPOWA*: $R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-POWA de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPOWA\,(a_1, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g(b_j)\right) \tag{9.35}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y $g(b)$ es una función monótona estrictamente continua.

El operador *Quasi-POWA* generaliza a todos los casos comentados para los operadores PGOWA e incluye a muchos otros más. Además, todas las propiedades y particularidades comentadas en los operadores PGOWA y en los operadores OWA en general, también serían aplicables en este caso.

9.3.4. Ejemplo ilustrativo: Selección de estrategias

Supongamos que a una empresa que opera en Europa y Norte América está considerando la posibilidad de expandirse a otro continente. Se le plantean 5 estrategias posibles.

- A_1: Expandirse al mercado asiático.
- A_2: Expandirse al mercado africano.
- A_3: Expandirse al mercado Sudamericano.
- A_4: Expandirse a los 3 continentes.
- A_5: No realizar ninguna expansión.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada estrategia. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza S_k

que podrían ocurrir en el futuro. Los resultados esperados para cada estrategia son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados esperados.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	60	60	50	10	50
A_2	40	10	80	70	40
A_3	60	40	60	20	80
A_4	30	40	60	20	90
A_5	50	70	30	60	60

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3) y el siguiente vector de probabilidades V = (0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la inversión mas adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética probabilística (AM), media ponderada probabilística (WA) y POWA. Obsérvese que este ejemplo se elabora con el concepto de *immediate probabilities*. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados

	Max	*Min*	*IPAM*	*IPWA*	*IPOWA*
A_1	60	10	52	50.5	48.3
A_2	80	10	42	42.2	33.7
A_3	80	20	52	52.2	49
A_4	90	20	44	48.8	40.5
A_5	70	30	54	55	48.8

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones POWA mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente. Se va a considerar el *Step-IPOWA*, el *Olymic-IPOWA*, el *Orlike* y el *Andlike S-IPOWA*, y el *Median-IPOWA*. Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores IPOWA son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores *OWA*

	IP-Step	*IP-Olympic*	*IP-Or-S*	*IP-And-S*	*IP-Median*
A_1	60	55	56.8	22.6	50
A_2	70	46	64.8	19.6	40
A_3	60	52.5	68.8	29.6	60
A_4	60	41.2	71.6	27.2	40
A_5	60	54	63.6	37.2	60

Como se puede observar, se obtienen diferentes resultados según el método utilizado. Por tanto, esto puede llevar a que el decisor adopte diferentes decisiones según el método utilizado.

Otra alternativa en el proceso de decisión consiste en establecer una ordenación de las estrategias. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las estrategias

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_4 \succ A_2 = A_3 \succ A_5 \succ A_1$	*IP-Step*	$A_2 \succ A_1 = A_3 = A_4 = A_5$
Mínimo	$A_5 \succ A_3 = A_4 \succ A_1 = A_2$	*IP-Olympic*	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$
IPAM	$A_5 \succ A_1 = A_3 \succ A_4 \succ A_2$	*IP-Or-S*	$A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1$
IPWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	*IP-And-S*	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
IPOWA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	*IP-Median*	$A_3 = A_5 \succ A_1 \succ A_2 = A_4$

Como se puede observar según el tipo de agregación *IPOWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del inversor también.

9.3.5. Extensiones al *PGOWA operator*

9.3.5.1. Introducción

Los operadores PGOWA pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que se incorporen a dicho operador. Obsérvese que el operador PGOWA generaliza al operador POWA, POWQA, etc. Por tanto, al introducir extensiones a los operadores PGOWA, automáticamente, también se estarán introduciendo extensiones a estos operadores. Debido a todo lo comentado en capítulos anteriores y para evitar caer en una excesiva redundancia, estas extensiones se comentarán con la mayor brevedad posible.

A modo de resumen, se comentarán las siguientes extensiones a los PGOWA.

- Extensiones de nivel 1.
  - *Induced PGOWA operator*
  - *Linguistic PGOWA operator*
  - *Uncertain PGOWA operator*
  - *Fuzzy PGOWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel 2.
  - *Induced linguistic PGOWA operator*
  - *Uncertain induced PGOWA operator*
  - *Fuzzy induced PGOWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel *N*.
  - *Uncertain induced linguistic PGOWA operator*
  - Etc.

9.3.5.2. *Induced PGOWA operator*

El *induced PGOWA operator* o operador PIGOWA, es un operador similar al PGOWA con la característica de que su proceso de ordenación no depende de los valores de los argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se considera el resultado obtenido con el *induced IPGOWA* (IPIGOWA).

Definición. Un operador IPIGOWA es una función IPIGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPIGOWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.36}$$

donde b_j es el valor a_i del par *IPIGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se muestra la formulación que se considera la más correcta para unificar los operadores IGOWA y probabilísticos. En este caso, se le conoce como el operador PIGOWA.

Definición. Un operador PIGOWA es una función PIGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PIGOWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.37}$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIGOWA es una función PIGOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PIGOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \beta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\beta)\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (9.38)$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la probabilidad generalizada y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador IGOWA.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWA o el GWA, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PIGOWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PIGOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (9.39)$$

Otro aspecto a comentar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en este caso se utilizará la media generalizada.

El operador PIGOWA generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *induced POWA* (*PIOWA*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *induced POWQA* (*PIOWQA*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *induced POWGA* (*PIOWGA*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *induced POWHA* (*PIOWHA*) *operator*.
- Etc.

También incluye a un gran número de casos particulares a través de analizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones *W*.

- El operador IGOWA ($\beta = 1$).
- El operador probabilístico generalizado y sus casos particulares ($\beta = 0$).
- El operador GOWA ($i = j$ y $\beta = 1$)
- El máximo probabilístico ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{a_i\}$).
- El mínimo probabilístico ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{a_i\}$).
- La media generalizada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PIGOWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{a_i\}$, $u_q = \min\{a_i\}$).
- El *step-PIGOWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).

- El *window-PIGOWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PIGOWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PIGOWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PIGOWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PIGOWA (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PIGOWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PIGOWA*.
- El *dependent-PIGOWA*.
- Etc.

Cabe destacar que estos casos se pueden analizar desde la perspectiva de la ordenación tradicional independientemente del significado que tenga a nivel de grado de optimismo, o a través de escoger el máximo, mínimo, y así sucesivamente, independientemente del orden en el que se encuentren en la agregación.

El operador PIGOWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas obteniéndose así, el *Quasi-PIOWA operator*. Su definición es la siguiente.

Definición. Un operador Quasi-PIOWA es una función Quasi-PIOWA: $R^n \rightarrow R$ si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPIOWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9.40}$$

donde b_j es el valor a_i del par *QPIOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-PIOWA se convierte en el operador PIGOWA. Por tanto, todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador PIGOWA también son aplicables al operador Quasi-PIOWA.

9.3.5.3. *Linguistic PGOWA operator*

El *linguistic PGOWA* (PLGOWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador PGOWA. Se puede definir de la siguiente manera. Obsérvese que se muestra directamente la formulación general sin mostrar el caso con *immediate probabilities* ya que el resultado es muy similar sólo que utilizando información lingüística. En los casos que se muestran a continuación, se presenta la formulación debido a la importancia y relevancia que tiene este operador de agregación. Obsérvese que en esta tesis resulta redundante el observar tantos operadores OWA pero cabe destacar que esto se debe a los magníficos resultados obtenidos en esta tesis ya que cada caso comentado (aunque sólo se haya comentado su definición y algunos comentarios adicionales) podría ser motivo de un artículo en revistas internacionales de la *ISI Web of knowledge*.

Definición. Un operador PLGOWA es una función PLGOWA: $S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PLGOWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.41}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PLGOWA es una función PLGOWA: $S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PLGOWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.42}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la probabilidad generalizada lingüística y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador LGOWA.

Cabe destacar que dentro de esta formulación, se podrían utilizar diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o externo. Para más información sobre distintos tipos de variables lingüísticas, véase por ejemplo, el apartado 8.4.3. de la tesis.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LOWA o el de probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PLGOWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PLGOWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.43}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador PLGOWA incluye a un gran número de casos particulares ya sea a partir del parámetro λ o a partir del vector de ponderaciones. Estos casos particulares se consiguen siguiendo con la metodología vista en los capítulos anteriores.

El operador PLGOWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-PLOWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-PLOWA es una función QPLOWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión *n,* si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPLOWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right) \right) \tag{9.44}$$

donde s_{Y_j} es el *j*-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los s_{X_i} y *g* es una función monótona estrictamente continua.

Cabe destacar que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador PLGOWA también son aplicables al operador Quasi-PLOWA.

9.3.5.4. *Uncertain PGOWA operator*

El *uncertain PGOWA operator* o operador PUGOWA, es un operador PGOWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa ya que considera los casos más optimistas y pesimistas que se pueden producir. Se puede definir de la siguiente forma.

A continuación, se presenta el caso que se considera como el más completo para unificar al operador PUGOWA y a las probabilidades.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUGOWA es una función *PUGOWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.45}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUGOWA es una función *PUGOWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PUGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.46}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

En cuanto al proceso de reordenación intervalos, se recomienda seguir con el criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y a las V como inciertos. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

El operador UGOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. También es simétrico, lo cual lleva a distinguir entre órdenes descendentes (DPUGOWA) y ascendentes (APUGOWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UGOWA o de probabilidades incierta generalizadas (GUP), es decir, W

$= \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PUGOWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PUGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9.47}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PUGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9.48}$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador PUGOWA generaliza a un gran número de casos particulares de forma similar a como se ha visto para el resto de operadores OWA.

Finalmente, señalar que también se puede generalizar el operador PUGOWA a través de las medias cuasi-aritméticas obteniéndose así, el *Quasi-PUOWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-PUOWA es una función *QPUOWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de probabilidades W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPUOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{9.49}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y g es la función monótona estrictamente continua.

A partir de aquí, se podrían analizar todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador PUGOWA ya que también son aplicables al operador Quasi-PUOWA.

9.3.5.5. *Fuzzy PGOWA operator*

El *fuzzy PGOWA operator* o operador PFGOWA, es un operador PGOWA para situaciones inciertas en donde la información puede ser representada mediante NBs. Su principal ventaja es la posibilidad de ofrecer una información mucho más completa al decisor en situaciones de incertidumbre ya que considera todos los casos pesimistas y optimistas que se pueden producir y la posibilidad de que se produzcan los resultados dentro de estos extremos. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFGOWA es una función *PFGOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PFGOWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.50}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in$ [0, 1], v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFGOWA es una función *PFGOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in$ [0, 1], tal que:

$$PFGOWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.51}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$ son NBs, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB Para más información, véase por ejemplo, el apartado 8.4.5 de la tesis. También cabe destacar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente para comparar NBs (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y V como NBs. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo (véase apartado 8.2.5). Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas, expertones, etc.

El operador PFGOWA cumple las propiedades las propiedades básicas de los operadores OWA como la conmutatividad, la monotonía, la idempotencia y la delimitación entre el máximo y el mínimo. También se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPFGOWA) y ascendentes (APFGOWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FGOWA o el probabilístico borroso generalizado, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PFGOWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PFGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (9.52)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PFGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (9.53)$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

Al igual que las anteriores extensiones, el operador PFGOWA generaliza a un gran número de casos particulares siguiendo con la misma metodología comentada en anteriores apartados. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *fuzzy POWA* (*PFOWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *fuzzy POWQA* (*PFOWQA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *fuzzy POWGA* (*PFOWGA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *fuzzy POWHA* (*PFOWHA*) *operator*.
- Etc.

Y por el otro, los casos procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador FGOWA ($\beta = 1$).
- El operador probabilístico generalizado borroso ($\beta = 0$).
- El operador GOWA y GWA (cuando los NBs se reducen a números simples).
- El máximo probabilístico borroso ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo probabilístico borroso ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El PFGOWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PFGOWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).

- El *window-PFGOWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PFGOWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PFGOWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PFGOWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PFGOWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PFGOWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PFGOWA.*
- El *dependent-PFGOWA.*
- Etc.

El operador PFGOWA puede ser generalizado mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. Como resultado se obtiene el *Quasi-PFOWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador Quasi-PFOWA es una función *QPFOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de probabilidades W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPFOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{9.54}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1 - \beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-PFOWA se convierte en el operador PFGOWA.

Finalmente, decir que todas las propiedades y casos particulares comentados en el operador PFGOWA también son aplicables al operador Quasi-PFOWA.

9.3.5.6. Extensiones de nivel 2 y *N*

A partir de aquí, se podrían añadir más características a estos casos y así obtener operadores cada vez más complejos y completos. A continuación se muestra algunos ejemplos.

<u>*Induced linguistic PGOWA operator*</u>

El *induced linguistic PGOWA operator* es una extensión al operador PGOWA a través de utilizar procesos de ordenación que dependen de variables de ordenación inducidas e información incierta representada mediante variables lingüísticas.

Definición. Un operador PILGOWA es una función PILGOWA: $S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PILGOWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.55}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

<u>*Uncertain induced PGOWA operator*</u>

El *uncertain induced PGOWA operator*, es un operador PGOWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Además, el proceso de reordenación no depende de los valores de los argumentos sino que depende de otro mecanismo basado en variables de ordenación inducidas.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUIGOWA es una función *PUIGOWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \to \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUIGOWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.56}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PUIGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$,

$\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Fuzzy induced PGOWA operator

El *fuzzy induced PGOWA operator*, es un operador PGOWA para situaciones inciertas en donde la información puede ser representada mediante NBs y el carácter del decisor se representa mediante un mecanismo de reordenación de argumentos basado en variables de ordenación inducidas. Obsérvese que la definición que se muestra a continuación es equivalente a la estructura utilizada en el operador PUIGOWA.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFIGOWA es una función *PFIGOWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PFIGOWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \qquad (9.57)$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PFIGOWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$ son NBs, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

9.4. Operador POWA en la noción de distancia

9.4.1. Introducción

Los operadores POWA también pueden ser utilizados en los métodos de distancias. Entonces, se obtiene el *probabilistic ordered weighted averaging distance operator* o el operador POWAD. La gran ventaja que tiene es que permite agregar un problema de distancias con operadores OWA y probabilidades al mismo tiempo de tal forma que se refleja el grado de optimismo y la probabilidad en la misma formulación.

Además, la utilización de operadores POWAD puede ser considerado en un gran número de aplicaciones como se mostrará en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWA ya sea en diferentes aspectos estadísticos, etc. En resumen, decir que todo concepto que utiliza el concepto de probabilidad es susceptible de ser analizada con el operador POWA. Obsérvese que en este caso, esto afectaría a los diferentes tipos de distancias existentes en la literatura como la distancia de Hamming, de Euclides, de Minkowski, etc.

A continuación, se van a mostrar algunos casos de operadores POWA. Se van a considerar los siguientes:

- *POWA distance operator*
- *Generalized POWA distance operator*
- *Induced generalized POWA distance operator*
- *Linguistic generalized POWA distance operator*
- *Uncertain generalized POWA distance operator*
- Etc.

9.4.2. *POWA distance operator*

El *POWA distance operator* o el operador POWAD es un operador POWA de distancias. La gran ventaja que presenta es la posibilidad de calcular las distancias entre elementos considerando grados de importancia y grados de optimismo en la misma formulación. Se puede definir de la siguiente forma. En primer lugar, se presenta el caso con el *immediate probabilistic OWAD* (IPOWAD).

Definición. Un operador IPOWAD es una función IPOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPOWAD\ (P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j \tag{9.58}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$.

Como se ha comentado en los anteriores apartados, se puede formular un caso más completo que además de unificar al operador OWAD y al operador WAD, permita reflejar en qué grado se quiere considerar cada uno. A este operador se le denomina el operador POWAD.

Definición. Un operador POWAD es una función POWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAD\,(P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j \tag{9.59}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$.

Entonces, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia probabilística y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador OWAD.

Obsérvese que también es posible formular la anterior definición de la siguiente forma. En este caso, se separan la parte probabilística de la parte OWAD.

Definición. Un operador POWAD es una función POWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$POWAD\,(P, P_k) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j D_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i d_i \tag{9.60}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado y $\beta \in [0, 1]$.

A partir de estas definiciones, se podrían considerar diferentes propiedades y casos particulares de estos operadores siguiendo con la metodología explicada para los otros operadores.

9.4.3. *Probabilistic generalized OWA distance operator*

El *probabilistic generalized OWA distance operator* o el operador PGOWAD es una generalización del operador POWAD a través de utilizar medias generalizadas o cuasi-aritméticas. La gran ventaja que presenta es la posibilidad de ofrecer un caso mucho más completo que incluye a un gran número de distancias no incluidas en el operador POWAD. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PGOWAD es una función PGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PGOWAD\,(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.61}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Este caso es mucho más completo ya que aparte de unificar al operador GOWAD y GWAD, también permite introducirlos en la formulación en mayor o menor medida según el grado de importancia que se les quiera dar. Entonces, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia probabilística generalizada (PGD) y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador GOWAD.

Obsérvese que también es posible formular la anterior definición de la siguiente forma.

Definición. Un operador PGOWAD es una función PGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PGOWAD\,(P, P_k) = \beta \sum_{j=1}^{n} w_j D_j + (1-\beta) \sum_{i=1}^{n} v_i d_i \tag{9.62}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Una generalización mayor a esta formulación se consigue a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, se consigue el operador Quasi-POWAD.

Definición: Una función *QPOWAD*: $R^n \times R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-POWAD de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPOWAD\,(P, P_k) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g(D_j)\right) \tag{9.63}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento a_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, y $g(D)$ es una función monótona estrictamente continua.

A partir de estas definiciones, se podrían considerar diferentes propiedades y casos particulares de estos operadores siguiendo con la metodología explicada para los otros operadores. Es decir, se podría distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes, expresarlo en una notación vectorial, establecer un caso general de normalización de las ponderaciones, estudiar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones, etc.

9.4.4. *Probabilistic induced generalized OWA distance operator*

El *probabilistic induced generalized OWA distance operator* o el operador PIGOWAD es una extensión al operador PGOWAD a través de utilizar un proceso de reordenación basado en variables de ordenación inducidas. De esta forma, se consigue un operador de distancias mucho más completo, ya sea mediante el uso de medias generalizadas o mediante medias cuasi-aritméticas. Se puede definir del siguiente modo dado el conjunto $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de variables inducidas y los dos conjuntos X y Y de argumentos. En primer lugar, se considera el *immediate probabilistic induced generalized OWA* (IPIGOWA).

Definición. Un operador IPIGOWAD es una función IPIGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPIGOWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9.64}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta IPIGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociad una probabilidad

v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j)$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

A continuación, se muestra la formulación que según esta tesis sería la más completa para unificar los operadores IGOWAD y PGD. En este caso, se le conoce como el operador PIGOWAD.

Definición. Un operador PIGOWAD es una función PIGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PIGOWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.65}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta PIGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIGOWAD es una función PIGOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PIGOWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \beta \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + (1-\beta) \left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.66}$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta PIGOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, $\beta \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia probabilística generalizada y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador IGOWA.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWAD o el PGD, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PIGOWAD se puede expresar de la siguiente forma:

$$PIGOWAD\ (\langle u_1,x_1,y_1\rangle,\ldots,\langle u_n,x_n,y_n\rangle) = \frac{\beta}{W}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\beta)}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i d_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (9.67)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PIGOWAD\ (\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (9.68)$$

con $\hat{v}_j = (\beta w_j / W) + ((1-\beta) v_j / V)$.

El operador PIGOWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-PIOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-PIOWAD es una función Quasi-PIOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPIOWAD\ (\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (9.69)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta QPIOWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y g es la función monótona estrictamente continua.

A partir de aquí, se podrían estudiar todas las propiedades habituales y casos particulares de la misma forma a como se ha visto en los otros operadores OWA explicados anteriormente. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes casos particulares.
Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *probabilistic induced OWAD* (*PIOWAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *probabilistic induced OWQAD* (*PIOWQAD*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *probabilistic induced OWGAD* (*PIOWGAD*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *probabilistic induced OWHAD* (*PIOWHAD*) *operator*.
- Etc.

También incluye a un gran número de casos particulares a través de analizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones W.

- El operador IGOWAD ($\beta = 1$).

- La distancia probabilística generalizada (PGD) ($\beta = 0$).
- El operador GOWAD ($i = j$ y $\beta = 1$)
- La distancia máxima probabilística ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{a_i\}$).
- La distancia mínima probabilística ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{a_i\}$).
- La distancia media generalizada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PIGOWAD según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{a_i\}$, $u_q = \min\{a_i\}$).
- El *step-PIGOWAD* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PIGOWAD* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PIGOWAD operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PIGOWAD.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PIGOWAD* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PIGOWAD (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PIGOWAD* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PIGOWAD.*
- El *dependent-PIGOWAD*.
- Etc.

9.4.5. *Probabilistic linguistic generalized OWA distance operator*

El *probabilistic linguistic GOWAD* (PLGOWAD) *operator* es un operador de agregación de distancias probabilísticas que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador PGOWAD. Para dos conjuntos $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ e $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PLGOWAD es una función PLGOWAD: $S^n \times S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PLGOWAD\,(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{\delta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.70}$$

donde s_{δ_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{δ_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, si $\beta = 0$, se obtiene estrictamente la distancia probabilística generalizada lingüística y si $\beta = 1$, se obtiene estrictamente el operador LGOWAD.

El operador PLGOWAD puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas obteniendo así, el *Quasi-PLOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-PLOWAD es una función QPLOWAD: $S^n \times S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPLOWAD\,(X, Y) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right)\right) \tag{9.71}$$

donde s_{δ_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según s_{δ_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(s_\beta) = s_\beta^{\lambda}$, el Quasi-PLOWAD se convierte en el operador PLGOWAD.

Finalmente, destacar que todas las propiedades y casos particulares de los operadores OWA comentados en anteriores apartados, también serían aplicables para el PLGOWAD y el Quasi-PLOWAD.

9.4.6. *Probabilistic uncertain generalized OWA distance operator*

El *probabilistic uncertain GOWAD operator* o operador PUGOWAD, es un operador GOWAD para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa al incluir las situaciones extremas del problema. Se puede definir de la siguiente forma para dos conjuntos A y E.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUGOWAD es una función *PUGOWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUGOWAD\ (\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.72}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Cabe señalar que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc. En el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se necesita definir un criterio de ordenación de intervalos. En este trabajo se recomienda seguir a (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y a las V como inciertos. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

Finalmente, destacar que también se puede generalizar el operador PUGOWAD a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-PUOWAD operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-PUOWAD es una función *QPUOWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPUOWAD\ (\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{9.73}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, el Quasi-PUOWAD se convierte en el operador PUGOWAD. A partir de aquí, se podrían analizar todas las propiedades y casos particulares comentados en el resto de operadores OWA.

9.5. Otras extensiones

Otras extensiones al operador POWA se podrían ir realizando a través de añadir más características en dicho operador. Por ejemplo, se podría considerar su utilización en el coeficiente de adecuación y en el índice del máximo y el mínimo nivel como se muestran a continuación. En primer lugar se presenta el *POWA adequacy coefficient* (POWAAC) para dos conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$

Definición. Un operador POWAAC de dimensión n, es una función *POWAAC*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAAC\ (A, E) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j K_j \tag{9.74}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $k_i = [1 \wedge (1 - a_i + e_i)]$, cada argumento k_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la ponderación v_i ordenada según K_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los k_i.

A continuación, se presenta el caso generalizado mediante medias generalizadas. Es decir, mediante el *PGOWA adequacy coefficient* (PGOWAAC).

Definición. Un operador PGOWAAC de dimensión n es una función PGOWAAC: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$PGOWAAC\ (A, E) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.75}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $k_i = [1 \wedge (1 - a_i + e_i^{(k)})]$, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$, las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0, 1]$, cada argumento k_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según K_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los k_i.

.

La siguiente definición hace referencia al caso aritmético con el índice del máximo y el mínimo nivel. Es decir con el *POWA index of maximum and minimum level* (POWAIMAM).

Definición. Un operador POWAIMAM de dimensión n, es una función *POWAIMAM*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAIMAM\ (p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j P_j \tag{9.76}$$

donde P_j representa el j-ésimo más grande de todos los $p_i^y = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $p_i^z = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, $y + z = n$, cada argumento p_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$ y v_j es la probabilidad v_i ordenada según P_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los p_i.

La versión generalizada del operador POWAIMAM es la siguiente. Obsérvese que entonces se obtiene el *PGOWA index of maximum and minimum level* (PGOWAIMAM).

Definición. Un operador PGOWAIMAM de dimensión n es una función PGOWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W con las siguientes propiedades:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y tal que

$$PGOWAIMAM\ (p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j P_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9.77}$$

donde P_j representa el j-ésimo más grande de todos los $p_i^y = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $p_i^z = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, $y + z = n$, cada argumento p_i tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la probabilidad v_i ordenada según P_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los p_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y así sucesivamente se podrían desarrollar muchas otras extensiones siguiendo con la metodología explicada para el resto de operadores POWA y OWA en general. Además, para cada caso se podrían estudiar sus propiedades, diferentes casos particulares y muchos otros aspectos que pudiesen resultar de interés.

10. Unificación entre operadores *OWA*, medias ponderadas y probabilidades: *POWAWA operator*

10.1. Introducción al POWAWA operator

10.1.1. Conceptos básicos

En este capítulo se analiza un nuevo modelo que permite unificar los conceptos de probabilidad, media ponderada y media ponderada ordenada, en una misma formulación superior a partir de la cual estos conceptos son casos particulares de adoptar una postura concreta en dicha formulación. En otras palabras, con esta formulación se pretende introducir los aspectos básicos de la auténtica formulación que describe a estos conceptos. A este operador se le denominará el *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging operator* o operador POWAWA. Por tanto, se puede observar que esta formulación demuestra que los operadores OWA, las medias ponderadas y las probabilidades, están englobadas dentro de un mismo contexto el cual puede adoptar distintas direcciones según lo que se este analizando. Es decir, por ejemplo, cuando se analiza un problema de probabilidades, realmente, lo que se está haciendo es coger un caso particular del modelo que se propone en esta tesis y desarrollarlo.

Al utilizar un caso particular, los resultados son satisfactorios (ejemplo de probabilidades) parcialmente, pero no reflejan todo el contexto del problema. Por ejemplo, al analizar probabilidades, se establecen predicciones de sucesos futuros pero se desconoce cuál será el resultado hasta que se produzca el suceso en cuestión. Por tanto, a la hora de establecer predicciones, además de establecer probabilidades, entran en juego otros conceptos como por ejemplo, el concepto de subjetividad (probabilidad o creencia subjetiva) expresado mediante medias ponderadas o el concepto de aversión al riesgo (grados de optimismo) expresado por el operador OWA. A partir de estos conceptos, los resultados obtenidos con la probabilidad objetiva se ven alterados según las circunstancias del problema y los intereses del decisor, de tal forma que los resultados obtenidos se adecuen lo máximo posible al carácter del decisor.

El proceso de unificación de estos conceptos se cree que es el correcto y está bien encaminado para futuras investigaciones porque además de incluirlos en una misma formulación, permite representar en qué grado de importancia se quiere incluir a cada concepto en el problema. Por ejemplo, habrá problemas en donde se desee tener más en consideración a la probabilidad objetiva, en otros problemas a la probabilidad subjetiva y en otros casos al grado de optimismo del decisor. Entonces, esta formulación permitirá dar mayor o menor importancia a cada caso según su importancia en el problema. En términos generales, se puede decir lo siguiente en relación a cuándo se dará mayor importancia a cada caso:

- Probabilidades (objetivas): En las situaciones en las que se puedan hacer experimentos que permitan establecer información probabilística objetiva, se tendrá en cuenta este concepto. A mayor relevancia de estos experimentos en relación al establecimiento de predicciones del futuro mayor será la importancia de la probabilidad en la formulación general.

- Por ejemplo, un caso extremo en donde se dará mayor importancia al concepto de probabilidad, sería el caso del lanzamiento de la moneda a cara o cruz. Esto se debe porque si después del experimento de lanzar la moneda el suficiente número de veces y comprobar que la moneda no está trucada y que por tanto el número de resultados cara prácticamente coincide con los de cruz, entonces, se tendrá una firme credibilidad de que la probabilidad de ocurrencia del próximo lanzamiento será del 50% cara y 50% cruz. Obviamente, en estos casos se tendrá muy en cuenta la probabilidad objetiva aunque siempre pueden haber circunstancias excepcionales.
- Un caso extremo contrario en donde no se da mucha importancia a la probabilidad objetiva haría referencia a experimentos muy puntuales y que no son representativos del problema. Por ejemplo, un problema en el que sólo se dispone de un experimento que únicamente predice a una pequeña variable poco influyente del problema.

- Operadores OWA (grados de optimismo): Son de gran utilidad en aquellas situaciones en las que se desee modificar las predicciones obtenidas con las probabilidades según el grado de optimismo (o aversión al riesgo) del decisor. Como se ha comentado en el capítulo 8, este concepto está fuertemente relacionado con el concepto de utilidad. Es más, se puede decir que tanto el concepto de utilidad como el operador OWA, son conceptos similares vistos o utilizados desde perspectivas diferentes. Se cree que en el futuro se formularán modelos que mostrarán que estos dos conceptos forman parte de un esquema mucho más general que abarca a ambos casos como aspectos particulares del análisis de la aversión al riesgo o de la posibilidad de infravaloración o sobrevaloración del problema. A continuación, se muestra un ejemplo que muestra la necesidad de utilizar operadores OWA (o aquel modelo general que unifica los operadores OWA con utilidades, etc.).

  Supongamos 2 alternativas, con dos posibles situaciones con probabilidad de 0.5. La primera alternativa puede dar un beneficio de 1.000.000 de euros pero en el otro 50% puede dar 0. En cambio, la segunda alternativa garantiza un beneficio de 200.000 euros.

  Utilizando los métodos clásicos de probabilidad, se obtendría:

  $0.5 \times 1000000 + 0.5 \times 0 = 500.000$ euros
  $0.5 \times 200000 + 0.5 \times 200000 = 200.000$ euros

  Como se puede observar, la mayoría de la gente optaría por la opción 2. Entonces, queda claro que el uso únicamente del concepto de probabilidad resulta incompleto (o en este caso erróneo). Por tanto, se necesita una formulación adicional que describa este problema. En muchos estudios este problema se ha visto desde el punto de vista de la utilidad pero también se puede observar desde el punto de vista del operador OWA. Con este operador, se tendría que manipular la información dando un grado de optimismo del 20%

a la información o de pesimismo del 80%. Entonces, los resultados serían los siguientes:

$0.2 \times 1000000 + 0.8 \times 0 = 200.000$ euros
$0.2 \times 200000 + 0.8 \times 200000 = 200.000$ euros

Por tanto, en este problema, utilizando únicamente el operador OWA, se concluye que para grados de optimismo superiores al 20%, se preferirá la alternativa 1. Mientras que para grados de optimismo por debajo del 20%, se preferirá la alternativa 2.

Ahora, vamos a analizar este mismo problema teniendo en cuenta que se dispone de una noción de probabilidad del 50% para ambos sucesos posibles. Entonces, se tendrá que recurrir al operador POWA explicado en el capítulo 9. Por ejemplo, vamos a suponer que la información probabilística tiene una importancia en el problema del 10% y el grado de optimismo del 90%. Siguiendo con la formulación del operador POWA se tendría lo siguiente. Como la segunda alternativa siempre va a dar 200.000 euros y las probabilidades objetivas son del 50%, se tiene que calcular el grado de optimismo de umbral, a partir del cual se preferirá una alternativa u otra. Se hará lo siguiente:

$$0.9 \times (\alpha \times 1000000 + (1 - \alpha) \times 0) + 0.1 \times (0.5 \times 1000000 + 0.5 \times 0) = 200.000.$$

$$\alpha = 0.166.$$

Es decir, el grado de optimismo a partir del cual se preferiría la alternativa 1 sería del 16.6%. Mientras que grados de optimismo inferiores a este resultado, llevarán a que se prefiera la alternativa 2.

Cabe destacar que si se da una importancia mayor al 40% a la parte probabilística, en este problema veríamos que es imposible que se prefiera la alternativa 2. Esto no es del todo correcto, <u>visto desde la perspectiva de teoría de la decisión</u>, porque falta lo que se ha comentado antes en relación a un esquema más general al propuesto en la tesis que también incluya a la noción de utilidad (o similar) en estos problemas. Se espera poder resolver esta problemática mediante el desarrollo de un modelo más general en investigaciones postdoctorales futuras. No obstante, cabe destacar que en una esquema general en el que sólo interviene la probabilidad, la media ponderada y el operador OWA, este modelo sí es correcto. El problema surge cuando se añaden otros conceptos en el problema como es el caso de teoría de la decisión donde implícitamente se encuentra en muchos casos la noción de utilidad. Pero en muchos problemas de teoría de la decisión en donde no interviene la utilidad y en muchos otros ámbitos como en la estadística, este modelo encaja a la perfección. Como se ha dicho, este modelo se tiene que ver como un primer paso unificado al que hay que ir incorporando ingredientes en el futuro ya que resuelve un gran número de problemas, pero todavía no los resuelve todos como es el caso ante situaciones en donde interviene la utilidad. De forma simple, el problema de la utilidad se solucionaría sustituyendo los argumentos del objeto por utilidades de dichos argumentos. Debido a la gran extensión de esta tesis, este aspecto se desarrollará en investigaciones postdoctorales.

- Medias ponderadas (probabilidad subjetiva o grados de importancia): Son de gran utilidad en aquellos problemas en donde no se dispone de mucha información probabilística objetiva o esta información es demasiado compleja como para establecer información fiable. En cambio, sí se dispone de ciertas creencias establecidas por personas con conocimiento del problema que indican cierta predicción hacia unos resultados determinados. También resulta de gran utilidad en aquellas circunstancias en las que se desea dar mayor importancia a ciertos aspectos del problema por las razones particulares que sean. Obsérvese que se podría analizar una problemática similar a la comentada anteriormente con el operador OWA. Esto llevará al concepto de *probabilistic weighted averaging operator* que se comentará en el apartado 10.2.6. También cabe destacar la existencia de casos problemáticos como lo comentado con el operador POWA ante situaciones en donde se necesita utilizar otros conceptos adicionales como sería el caso de la noción de utilidad en teoría de la decisión.

Analizando la aplicabilidad de este modelo decir que se puede aplicar en muchos ámbitos como se observará en el capítulo 11 sobre aplicabilidad de los operadores OWA en general. Pero hay dos aspectos a destacar.

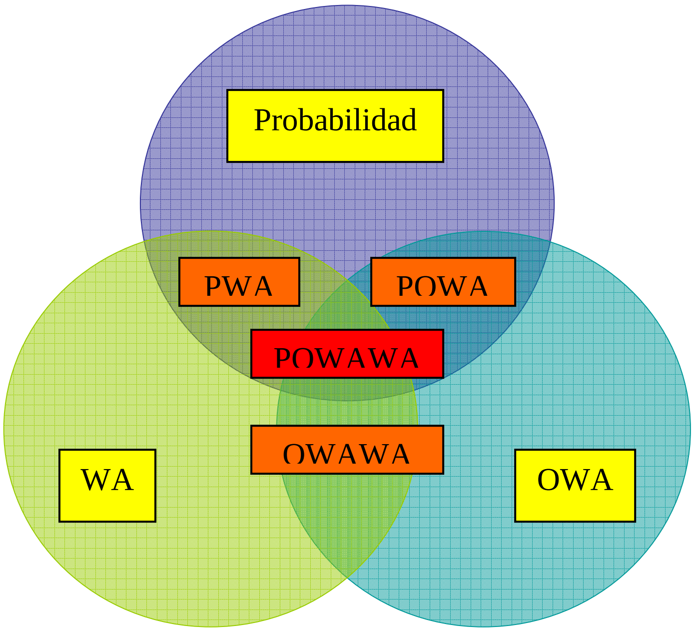
En primer lugar, desde el punto de vista de teoría de la decisión se tiene que señalar el gran interés en continuar con esta formulación sobre el operador POWAWA a diferentes contextos que podrían implicar la introducción de los modelos de utilidad en dicha formulación, la introducción del *prospect theory* (Kahneman y Tversky, 1979), y muchas otras extensiones. Desde un punto de vista parcial, no parece muy complicado el introducir estas teorías o conceptos ya que simplemente consistiría en utilizarlos en la parte que les corresponde, ya sea en probabilidades, medias ponderadas u operadores OWA. Aun así en un esquema o formulación general, puede que resulte algo más complicado el obtener una unificación perfecta.

En segundo lugar y con carácter más general, destacar la posibilidad de desarrollar aplicaciones en diferentes ámbitos como los que se mencionan a continuación:

- En teoría de la decisión en general.
- En estadística en general.
- En economía y empresa.
- En teorías del *Soft Computing* y similar.
- En ingeniería en general.
- En matemáticas.
- En física.
- En química.
- En biología.
- En medicina.
- Etc.

Analizando esta unificación, se podría establecer un pequeño esquema que representa a esta unificación. Se podría decir que esta unificación se puede representar gráficamente de la siguiente forma:

Gráfica: Esquema de la unificación conseguida con el operador POWAWA



Como se puede observar, el operador POWAWA abarca a la probabilidad, al operador OWA y a la media ponderada. En la gráfica es la intersección de los 3 conceptos. También permite considerar diferentes casos particulares como es el caso del POWA (probabilidades y OWAs), el PWA (probabilidades y medias ponderadas) y el OWAWA (OWAs y WAs).

A continuación, se presenta la formulación y aspectos principales del operador POWAWA. Cabe destacar que su gran ventaja es el poder unificar a la probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA en una misma formulación. De esta forma, se consigue una visión mucho más completa del proceso decisional ya que se pueden considerar muchos más casos en la misma formulación.

Definición. Un operador POWAWA es una función POWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.1}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociada una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i.

Obsérvese que esta definición también se podría presentar utilizando la siguiente formulación equivalente.

Definición. Un operador POWAWA es una función POWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$POWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i a_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \tag{10.2}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos a_i y C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Como se puede observar, la probabilidad, la media ponderada y el operador OWA, están incluidos en esta formulación como casos particulares de este modelo. A través de analizar los coeficientes C_1, C_2 y C_3, se puede observar la importancia que tiene cada concepto en el problema. C_1 hace referencia a la importancia del operador OWA. C_2 a la importancia de la media ponderada (WA). Y C_3 a la importancia de la probabilidad en el problema. A mayor puntuación de uno de los coeficientes, mayor será la importancia de dicho concepto en el problema. En los casos extremos, se obtienen una serie de casos particulares de gran interés que abarcan a una parte importante de la tesis. Obsérvese que al incorporar medidas de distancia y medias generalizadas y cuasi-aritméticas, se obtendrá una formulación general capaz de englobar a toda la tesis. Los casos particulares a destacar son los siguientes:

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador OWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada (WA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad tradicional.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *probabilistic weighted average* (PWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic OWA* (POWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *OWAWA operator*.

También cabe destacar que se podrían considerar otras formulaciones más amplias combinando otros métodos. Entonces, se establecería que $\sum_{h=1}^{m} C_h = 1$ y $C_h \in [0, 1]$. Obviamente, la unificación que se presenta en esta tesis hace referencia a 3 conceptos de vital importancia que pueden recibir un tratamiento individualizado y ser unificados con esta formulación. En cambio, hacer esto en otros métodos donde se combinan (o unifican) artificialmente diferentes métodos, aunque resulta de interés, se trata de una unificación natural por lo que puede no ser tan interesante.

En relación al proceso de reordenación de argumentos, en especial en la primera definición, cabe destacar la posibilidad de distinguir entre órdenes descendentes y ascendentes. Las ponderaciones de estos operadores están relacionados mediante $w_j = w^*_{n-j+1}$, donde w_j es el j-ésimo coeficiente del *descending POWAWA* (*DPOWAWA*) y w^*_{n-j+1} el j-ésimo coeficiente del *ascending POWAWA* (*APOWAWA*) *operator*.

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador POWAWA puede ser expresado como:

$$POWAWA\ (a_1, \dots, a_n) = W^T B \tag{10.3}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones OWA, el WA, o el de probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador POWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$POWAWA\ (a_1, \dots, a_n) = \frac{C_1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{C_2}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i a_i + \frac{C_3}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \tag{10.4}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$POWAWA\ (a_1, \dots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.5}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

También se puede observar como el operador POWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $a_i \geq e_i$ para todo i, entonces, $POWAWA(a_1, \dots, a_n) \geq POWAWA(e_1, \dots, e_n)$, siendo a_i y e_i las distancias individuales entre los dos conjuntos. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo i, entonces, $POWAWA(a_1, \dots, a_n) = a$. Finalmente, es limitado porque $\min\{a_i\} \leq POWAWA(a_1, \dots, a_n) \leq \max\{a_i\}$.

Otro factor a considerar son las medidas (Yager, 1988; 1996a; 2002) para caracterizar un vector de ponderaciones y el tipo de agregación que realiza. Obsérvese que se analiza el vector OWA ya que es el que se puede manipular según grados de optimismo o tendencia al máximo.

Aunque el concepto de *immediate probability* parece resultar algo incompleto, se ha visto que era un paso adelante que ha permitido llegar a la generalización que se ha comentado en este capítulo. Por ello, resulta de interés ver como se podría haber extendido este caso a una situación con probabilidades, operadores OWA y además, medias ponderadas.

Definición. Un operador IPWOWA es una función IPWOWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$IPWOWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \qquad (10.6)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = (w_j v_j p_j / \sum_{j=1}^{n} w_j v_j p_j)$ y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i.

10.1.2. Tipos de *POWAWA operator*

Una de las grandes ventajas del operador POWAWA es la posibilidad de incluir como casos particulares a un gran número de situaciones. Estos se pueden estudiar a través de considerar diferentes particularidades en las diferentes ponderaciones posibles. Los casos particulares principales son los que se han comentado anteriormente. Es decir:

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador OWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada (WA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad tradicional.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *probabilistic weighted average* (PWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic OWA* (POWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *OWAWA operator*.

Para cada uno de estos casos, se podría estudiar sus respectivos casos particulares como se ha comentado en los capítulos anteriores para el operador OWA, OWAWA y POWA.

Además, también se podrían analizar estos casos particulares desde la perspectiva del operador POWAWA, es decir:

- El máximo ponderado probabilístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado probabilístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).

- La media aritmética OWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media aritmética ponderada OWA ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística OWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El POWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-POWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-POWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-POWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-POWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-POWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z POWAWA (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-POWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-POWAWA*.
- El *dependent-POWAWA*.
- Etc.

10.1.3. Ejemplo ilustrativo: Selección de inversiones

Supongamos que a una empresa inversora se le plantean cinco posibles inversiones y se desea seleccionar aquella que mejor se adapta a sus necesidades.

- A_1: invertir en una empresa de coches.
- A_2: invertir en una empresa de televisores.
- A_3: invertir en una empresa de ordenadores.
- A_4: invertir en una empresa farmacéutica.
- A_5: invertir en una empresa de comida.

Se considera como factor determinante en el proceso decisional la obtención de un mayor beneficio procedente de la inversión. El comité de expertos de la empresa establece los beneficios que se espera que cada inversión pueda reportar a la empresa. Como el entorno es muy incierto, estos resultados están condicionados a diferentes estados de la naturaleza S_k que podrían ocurrir en el futuro. Estos estados de la naturaleza van relacionados con la situación económica de la economía y dicen lo siguiente: S_1 = Situación económica muy positiva, S_2 = situación económica positiva, S_3 = situación económica media, S_4 = situación económica negativa y S_5 = situación económica muy negativa. Los resultados esperados para cada inversión son los siguientes:

Tabla: Matriz de resultados esperados.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	100	80	50	30	20
A_2	80	70	60	40	20
A_3	90	70	70	40	10
A_4	60	60	60	60	30
A_5	90	80	60	40	10

Para los casos en donde se requiera, los expertos establecen el siguiente vector de ponderaciones W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3) para las ponderaciones OWA, el siguiente vector de ponderaciones para los grados de importancia o probabilidad subjetiva V = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3) y P = (0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1). En este problema, se da una importancia del 50% a la probabilidad (C_3 = 0.6), a la media ponderada o probabilidad subjetiva del 30% (C_2 = 0.2) y al operador OWA del 20% (C_1 = 0.2). En primer lugar, se va a desarrollar la agregación con los operadores genéricos para poder tomar una decisión sobre cuál es la inversión mas adecuada para la empresa. Para ello, se va a considerar el resultado obtenido con el operador máximo, mínimo, media aritmética (AM), media ponderada (WA), OWA y probabilístico. Los resultados obtenidos son los siguientes:

Tabla: Resultados agregados con operadores POWAWA simples

	Max	*Min*	*AM*	*WA*	*OWA*	*Prob.*
A_1	100	20	56	43	48	64
A_2	80	20	54	45	48	60
A_3	90	10	56	45	48	64
A_4	60	30	54	51	51	57
A_5	90	10	56	44	48	64

A continuación, se va a estudiar otros tipos de agregaciones POWAWA mediante el uso de algunas de las familias explicadas anteriormente. Se va a considerar el POWAWA y sus tres casos particulares principales, es decir, el PWA, el OWAWA y el POWA. Obsérvese que se tendrá que normalizar los coeficientes C. Para el PWA nos queda C_3 = 0.75 y C_2 = 0.25. Para el OWAWA, C_2 = 0.5 y C_1 = 0.5. Y para el POWA, C_3 = 0.75 y C_1 = 0.25. Obsérvese que los vectores de ponderaciones surgidos de esta información son los siguientes:

- PWA = (0.25, 0.175, 0.2, 0.225, 0.15).
- OWAWA = (0.1, 0.15, 0.2, 0.25, 0.3).
- POWA = (0.25, 0.2, 0.2, 0.2, 0.15).
- POWAWA = (0.22, 0.18, 0.2, 0.22, 0.18).

Los resultados obtenidos mediante estos tipos de operadores POWAWA son los siguientes:

Tabla: Resultados obtenidos con otros tipos de operadores POWAWA

	PWA	*OWAWA*	*POWA*	*POWAWA*
A_1	58.75	45.5	60	56.6
A_2	56.25	46.5	57	54.6
A_3	59.25	46.5	60	57
A_4	55.5	51	55.5	54.6
A_5	59	46	60	56.8

Como se puede observar, se obtienen diferentes resultados según el método utilizado. Por tanto, esto puede llevar a que el decisor adopte diferentes decisiones según el método utilizado.

Otro aspecto a destacar en la toma de decisiones es la elaboración de una ordenación de las inversiones. Cabe destacar que este hecho resulta relevante cuando se desea seleccionar más de una inversión. Los resultados se muestran a continuación. Obsérvese que $\succ$ significa *preferido a*.

Tabla: Ordenación de las inversiones

	Ordenación		*Ordenación*
Máximo	$A_1 \succ A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$	*Probabilidad*	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$
Mínimo	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_3=A_5$	*PWA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
AM	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	*OWAWA*	$A_4 \succ A_2=A_3 \succ A_5 \succ A_1$
WA	$A_4 \succ A_2=A_3 \succ A_5 \succ A_1$	*POWA*	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$
OWA	$A_4 \succ A_1=A_2=A_3=A_5$	*POWAWA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2=A_4$

Como se puede observar según el tipo de agregación *POWAWA* escogida, la ordenación será diferente y por tanto, la decisión del inversor también.

10.2. Extensiones a los POWAWA operators

10.2.1. Introducción

Los operadores POWAWA pueden ser extendidos de diferentes formas según las características o condiciones adicionales que se incorporen en el operador. Para no entrar en una excesiva redundancia y teniendo en cuenta lo explicado en el capítulo 10.1, en este apartado se presentarán diferentes extensiones a los operadores POWAWA de forma resumida.

Siguiendo con la metodología comentada en capítulos anteriores, se podría decir que un operador POWAWA es una extensión de nivel 2 a los operadores OWA. Por tanto, las extensiones a los operadores OWAWA, también cumplirán esta diferencia. Es decir, las extensiones de nivel 1, serán extensiones de nivel 3 a los operadores OWA, y así sucesivamente.

Aun así, cabe destacar que se considerará a los operadores POWAWA como un nuevo punto de partida ya que unifican a tres grandes conceptos como son la probabilidad, la media ponderada (WA) y la media ponderada ordenada (OWA).

A modo de resumen, distinguiremos entre extensiones a los operadores POWAWA de nivel 1, de nivel 2 y de nivel *N*.

- Extensiones de nivel 1.
  - *Induced POWAWA operator*
  - *Linguistic POWAWA operator*
  - *Uncertain POWAWA operator*
  - *Fuzzy POWAWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel 2.
  - *Induced linguistic POWAWA operator*
  - *Uncertain induced POWAWA operator*
  - *Fuzzy induced POWAWA operator*
  - Etc.
- Extensiones de nivel *N*.
  - *Uncertain induced linguistic POWAWA operator*
  - *Fuzzy induced linguistic POWAWA operator*
  - Etc.

Además, también se comentará el tercer caso general que constituye el operador POWAWA. Es decir el probabilistic weighted average (PWA). Los otros dos grandes casos son el operador OWAWA y el operador POWA. La razón por la que no se ha dedicado un capítulo exclusivo a este concepto es porque no es un operador OWA y esta tesis está orientada al estudio de los operadores OWA. Aun así, este es uno de los conceptos más importantes que se proponen en la tesis ya que es un concepto esencial para el desarrollo de la ciencia en general ya que se trata del modelo que unifica a los grandes conceptos clásicos de probabilidad y media ponderada. Este caso está incluido en el operador POWAWA por lo que queda explicado con el estudio de dicha generalización. Pero debido a su importancia, se ha considerado adecuado el explicar este caso particular de forma individualizada dentro del operador POWAWA y analizar algunas de sus principales extensiones. En este caso, se ha considerado el operador PWA y las siguientes extensiones.

- PWA
- *Linguistic probabilistic weighted average* (LPWA).
- *Uncertain probabilistic weighted average* (UPWA).
- *Fuzzy probabilistic weighted average* (FPWA).
- *Generalized probabilistic weighted average* (GPWA).
- *Linguistic generalized probabilistic weighted average* (LGPWA).
- *Uncertain generalized probabilistic weighted average* (UGPWA).
- *Fuzzy generalized probabilistic weighted average* (FGPWA).
- *Generalized probabilistic weighted averaging distance* (GPWAD).
- *Etc.*

Aun así, cabe destacar que para evitar redundancia, todos estos casos se explican de forma muy resumida ya que se sobreentienden sus diferentes propiedades a través de observar las propiedades estudiadas en los otros capítulos sobre los operadores OWA.

10.2.2. *Induced POWAWA operator*

El *induced POWAWA operator* o operador PIOWAWA, es un operador similar al POWAWA con la diferencia de que su proceso de ordenación de los argumentos no depende de los valores de dichos argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIOWAWA es una función PIOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PIOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.7}$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

Como se ha comentado para el operador POWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIOWAWA es una función PIOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PIOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i a_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \qquad (10.8)$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación y C_1 , C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

En este caso, también se obtienen como casos particulares al operador OWA, a la media ponderada y a la probabilidad. La diferencia es que ahora el operador OWA esta representado de una forma más completa a través de un proceso de reordenación más complejo que permite incluir muchos otros conceptos adicionales.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador IOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada (WA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad tradicional.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *probabilistic weighted average* (PWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic IOWA* (PIOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *IOWAWA operator*.

También cabe destacar que se podrían considerar otras formulaciones más amplias combinando otros métodos. Entonces, se establecería que $\sum_{h=1}^{m} C_h = 1$ y $C_h \in [0, 1]$.

El operador IOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPIOWAWA) y ascendentes (APIOWAWA).

Otro aspecto a destacar es que si B es un vector que corresponde a los argumentos ordenados b_j, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador PIOWAWA puede ser expresado como:

$$PIOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = W^T B \qquad (10.9)$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de probabilidades, el OWA o el WA, es decir, $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, o $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, entonces, el operador PIOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PIOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \frac{C_1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{C_2}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i a_i + \frac{C_3}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \qquad (10.10)$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PIOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.11}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

Otro aspecto a comentar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media aritmética.

El operador PIOWAWA incluye a un gran número de casos particulares. Los principales casos se han comentado anteriormente. Pero también se pueden analizar muchos otros casos a través de estudiar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones *W*, de entre los cuales, se destacan los siguientes.

- El máximo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{a_i\}$).
- El mínimo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{a_i\}$).
- La media aritmética ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética IOWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media aritmética ponderada IOWA ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística IOWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PIOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{a_i\}$, $u_q = \min\{a_i\}$).
- El *step-PIOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PIOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PIOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PIOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PIOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PIOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PIOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PIOWAWA*.

- El *dependent-PIOWAWA*.
- Etc.

Obsérvese que estos casos se pueden desarrollar desde la perspectiva de la ordenación tradicional independientemente del significado que tenga a nivel de grado de optimismo, o a través de escoger el máximo, mínimo, y así sucesivamente, independientemente del orden en el que se encuentren en la agregación.

10.2.3. *Linguistic POWAWA operator*

El *linguistic POWAWA* (PLOWAWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador POWAWA. Por tanto, este operador permite considerar al mismo tiempo el grado de optimismo, información probabilística y la importancia de una serie de variables representadas por información lingüística. Se puede definir de la siguiente manera.

Definición. Un operador PLOWAWA es una función PLOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PLOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{10.12}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i}.

Como se ha comentado para el operador POWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PLOWAWA es una función PLOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PLOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i s_{X_i} \tag{10.13}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, y C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Cabe destacar que esta es la formulación general, pero dentro de esta formulación, se podrían utilizar un gran número de diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo. Es decir, a partir del análisis interno, tendríamos:

- Variables lingüísticas simples (con y sin representación interna).
- Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas.
- Variables lingüísticas intervalo valoradas.
- Variables lingüísticas generalizadas (simples, 2-tuplas, intervalo valoradas, etc.).
- Variables lingüísticas de tipo 2 y *n*.
- Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas, etc.).
- Etc.

Por el otro lado, también se podrían utilizar variables lingüísticas procedentes del análisis externo. Es decir, se podrían utilizar (obsérvese que la denominación de estas variables es propia de la tesis y en la actualidad no se utiliza en la comunidad científica):

- Intervalos de confianza lingüísticos.
- Números borrosos lingüísticos.
- NBT lingüísticos.
- NBTp lingüísticos.
- Números borrosos generalizados lingüísticos.
- Números borrosos intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos L-R lingüísticos (simples, generalizados, intervalo valorados, etc.).
- Números borrosos intuicionistas lingüísticos (simples, intervalo valorados, generalizados, etc.).
- Números borrosos generalizados intervalo valorados lingüísticos.
- Números borrosos no convexos lingüísticos.
- Expertones lingüísticos (simples, cuádruplos, etc.).
- Etc.

En este caso, también se obtienen como casos particulares al operador OWA, a la media ponderada y a la probabilidad. La diferencia es que ahora estos conceptos analizan problemas en donde la información es incierta y viene representada por variables lingüísticas. Entonces, se obtienen los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador LOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada lingüística (LWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad en problemas lingüísticos.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *linguistic probabilistic weighted average* (LPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic LOWA* (PLOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *LOWAWA operator*.

También cabe destacar que se podrían considerar otras formulaciones más amplias combinando otros métodos. Entonces, se establecería que $\sum_{h=1}^{m} C_h = 1$ y $C_h \in [0, 1]$.

El operador PLOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DLOWAWA) y ascendentes (ALOWAWA). También cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial en la que se supone que si *B* es el vector de argumentos ordenados de s_{Y_j}, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador LOWAWA puede ser expresado de la siguiente forma:

$$PLOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = W^T B \tag{10.14}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LOWA, el LWA, o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PLOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PLOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \frac{C_1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + \frac{C_2}{V}\sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} + \frac{C_3}{P}\sum_{i=1}^{n} p_i s_{X_i} \tag{10.15}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PLOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{10.16}$$

Con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

El operador PLOWAWA incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes procedentes de analizar el vector de ponderaciones del operador LOWA.

- El máximo ponderado probabilístico lingüístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado probabilístico lingüístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética LOWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada probabilística lingüística ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media aritmética ponderada LOWA ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística LOWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PLOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PLOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).

- El *window-PLOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PLOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PLOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PLOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PLOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PLOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PLOWAWA*.
- El *dependent-PLOWAWA*.
- Etc.

Finalmente, también destacar la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector de ponderaciones siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

10.2.4. *Uncertain POWAWA operator*

El *uncertain POWAWA operator* o operador PUOWAWA, es un operador POWAWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa de tal forma que resulta posible considerar los resultados más optimistas y los más pesimistas. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUOWAWA es una función *PUOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.17}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUOWAWA es una función *PUOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PUOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{a}_i \tag{10.18}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza y C_1 , C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

Obsérvese que es necesario definir un criterio de ordenación de intervalos en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones. Para evitar excesivas dificultades, se recomienda seguir con el mismo criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones P, W y V como inciertos. Es decir, se puede definir la información de estas variables mediante intervalos de confianza. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. A modo de resumen, decir que la formulación sería la siguiente.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUOWAWA es una función *PUOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W' asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j' \approx 1$ y $w_j' \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V', con $\sum_{i=1}^{n} v_i' \approx 1$ y $v_i' \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PUOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{a}_i \tag{10.19}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son intervalos de confianza y C_1 , C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

El operador PUOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. También se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPUOWAWA) y ascendentes (APUOWAWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UOWA, el UWA o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PUOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PUOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{C_1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + \frac{C_2}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i + \frac{C_3}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{a}_i \tag{10.20}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PUOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.21}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

Otro aspecto a mencionar es la posibilidad de utilizar diferentes medidas para caracterizar el vector *W* siguiendo con la metodología de Yager (1988; 1996a; 2002).

El operador PUOWAWA abarca a muchos casos particulares de entre los cuales se pueden destacar los siguientes. Los principales casos particulares surgen de estudiar los coeficientes C_1, C_2 y C_3.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador UOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada incierta (UWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad en problemas con información incierta representada mediante intervalos de confianza.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *uncertain probabilistic weighted average* (UPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic UOWA* (PUOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *UOWAWA operator*.

Y si se analiza el vector de ponderaciones *W* se obtiene lo siguiente.

- El operador POWAWA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El máximo incierto ponderado probabilístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo incierto ponderado probabilístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética probabilística incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética OWA incierta ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada probabilística incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media aritmética ponderada OWA incierta ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística OWA incierta ($v_i = 1/n$, para todo a_i).

- El PUOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PUOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PUOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PUOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PUOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PUOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PUOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PUOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PUOWAWA*.
- El *dependent-PUOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

10.2.5. *Fuzzy POWAWA operator*

El *fuzzy POWAWA operator* o operador PFOWAWA, es un operador POWAWA similar al PUOWAWA pero con la diferencia de que la información se representa mediante números borrosos (NB). Por lo demás, estos dos operadores son muy similares. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFOWAWA es una función *PFOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PFOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.22}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$,

$C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Obsérvese que también se podría definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFOWAWA es una función *PFOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PFOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{a}_i \qquad (10.23)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos $\tilde{a}_i$, los $\tilde{a}_i$, son NBs y C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados
- Números borrosos de tipo 2 y n.
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y n generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y n, generalizados, etc.)
- Etc.

Como se puede observar, el operador PFOWAWA abarca como casos particulares a los siguientes operadores de agregación.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador FOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada borrosa (FWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad en problemas con información incierta representada mediante NBs.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *fuzzy probabilistic weighted average* (FPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic FOWA* (PFOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *FOWAWA operator*.

También resulta conveniente señalar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones *P*, *W* y *V* como NBs.. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo. A modo de resumen:

El operador FOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, idempotencia, delimitación entre el máximo y el mínimo, y la simetría que permite distinguir entre órdenes descendentes (DPFOWAWA) y ascendentes (APFOWAWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FOWA, el FWA o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PFOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PFOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.24}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

El operador FOWAWA abarca a muchos casos particulares, además de los comentados anteriormente, de entre los cuales se pueden destacar los siguientes procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El operador POWAWA (cuando los intervalos se reducen a números simples).
- El máximo borroso ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo borroso ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media aritmética borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$ y $p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética probabilística borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética ponderada borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética OWA borrosa ($v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$ y $p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética ponderada probabilística borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media aritmética ponderada OWA borrosa ($p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética probabilística OWA borrosa ($v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El PFOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PFOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PFOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PFOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PFOWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.

- Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.

- El *S-PFOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PFOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PFOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PFOWAWA*.
- El *dependent-PFOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

10.2.6. *Probabilistic weighted averaging operator* y sus extensiones

10.2.6.1. Introducción

Un caso particular del operador POWAWA de gran repercusión debido a su significado y su utilidad en diferentes aplicaciones es el *probabilistic weighted averaging operator* (PWA). Es un operador que unifica dos grandes conceptos clásicos en una misma formulación como son las probabilidades y las medias ponderadas. Por tanto, es una formulación que permite utilizar el concepto de probabilidad objetiva y el de subjetiva (o grados de importancia) en el mismo problema.

Obviamente, con esta formulación se consigue un modelo mucho más completo en donde los modelos de probabilidad y de medias ponderadas clásicos no son más que casos particulares de adoptar una postura particular en esta formulación. El gran interés que proporciona este modelo se debe a que en la actualidad no existen muchos trabajos sobre los operadores OWA en comparación con los trabajos desarrollados con medias ponderadas o con probabilidades. Por tanto, a simple vista la aplicabilidad de estos dos casos se muestra muy superior en comparación con el operador OWA (cabe destacar que esta es la situación actual), lo cual hace que aparentemente sean mucho más útiles. En otras palabras, en este caso se podría decir que sí se ve que la aplicabilidad de este operador es ilimitada. Esto se podría expresar con el siguiente enunciado:

“*La aplicabilidad del probabilistic weighted averaging operator y sus extensiones es ilimitada*”

A modo de resumen, se podría mencionar la posibilidad de realizar aplicaciones en los siguientes ámbitos:

- En teoría de la decisión en general.
- En estadística en general.
- En economía y empresa.
- En teorías del *Soft Computing* y similar.
- En ingeniería en general.
- En matemáticas.
- En física.
- En química.
- En biología.
- En medicina.
- Etc.

A pocos conocimientos que se tengan en estas áreas, es evidente que la aplicabilidad es increíblemente amplia ya que todo problema tratado con probabilidades o con medias ponderadas, es susceptible de ser tratado con este operador.

El operador PWA puede ser definido de la siguiente forma.

Definición. Un operador PWA es una función PWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$PWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i \tag{10.25}$$

donde cada argumento a_i tiene asociada una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$.

Obsérvese que esta definición también se podría presentar utilizando la siguiente formulación equivalente.

Definición. Un operador PWA es una función PWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \alpha \sum_{i=1}^{n} v_i a_i + (1-\alpha) \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \tag{10.26}$$

donde a_i son los argumentos del problema y $\alpha \in [0, 1]$.

Como se puede observar:

- Si $\alpha = 1$, el operador PWA se convierte en la media ponderada clásica (WA).
- Si $\alpha = 0$, el operador PWA se convierte en la probabilidad clásica.

Cabe destacar es que si A es un vector que corresponde a los argumentos a_i, y W^T es el transpuesto del vector de ponderaciones, entonces, el operador PWA puede ser expresado como:

$$PWA\ (a_1, \ldots, a_n) = W^T B \tag{10.27}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones WA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \frac{\alpha}{V} \sum_{i=1}^{n} v_i a_i + \frac{(1-\alpha)}{P} \sum_{i=1}^{n} p_i a_i \tag{10.28}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$PWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i \tag{10.29}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

También se puede observar como el operador PWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $a_i \geq e_i$ para todo i, entonces, $PWA(a_1,\ldots, a_n) \geq PWA(e_1,\ldots, e_n)$, siendo a_i y e_i los argumentos de los dos conjuntos. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo i, entonces, $PWA(a_1,\ldots, a_n) = a$. Finalmente, es limitado porque $\min\{a_i\} \leq PWA(a_1,\ldots, a_n) \leq \max\{a_i\}$.

También se tiene que destacar la posibilidad de analizar otros casos particulares diferentes del coeficiente α.

- La media aritmética simple ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética probabilística ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media aritmética ponderada ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador PWA.

Finalmente, cabe destacar que se podrían haber elaborado otros modelos para intentar unificar la media ponderada con las probabilidades como por ejemplo, siguiendo la metodología del *immediate probability*, del operador HA y del operador WOWA. A continuación, se muestra la formulación con el *immediate probability*.

Definición. Un operador IPWA es una función IPWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$IPWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i \tag{10.30}$$

donde cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = (v_i p_i / \sum_{j=1}^{n} v_i p_i)$.

Tanto este caso, como el modelo que se hubiese obtenido con el operador HA (*probabilistic hybrid averaging*), como el modelo obtenido con el WOWA, se cree que pueden ser de utilidad en algunos casos particulares, pero resultan incompletos a la hora de ofrecer una formulación completa que unifique a la probabilidad con la media ponderada. Además, el operador PWA permite unificarlos de tal forma que se puede reflejar en qué grado se quiere incluir a cada concepto en la formulación.

10.2.6.2. *Linguistic PWA operator*

El *linguistic PWA operator* (LPWA) es un operador PWA que representa la información incierta disponible mediante variables lingüísticas. Se puede definir de la siguiente forma

Definición. Un operador LPWA es una función LPWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, tal que:

$$LPWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i s_{X_i} \tag{10.31}$$

donde cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$.

Como se puede observar:

- Si α = 1, el operador LPWA se convierte en la media ponderada lingüística clásica (LWA).
- Si α = 0, el operador LPWA se convierte en la probabilidad con información lingüística clásica.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LWA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador LPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$LPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i \tag{10.31}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

También resulta de interés el analizar otros casos particulares diferentes de *α*.

- La media aritmética lingüística simple (v_i = 1/n, para todo s_{X_i} y p_i = 1/n, para todo s_{X_i}).
- La media aritmética lingüística probabilística (v_i = 1/n, para todo s_{X_i}).
- La media aritmética lingüística ponderada (p_i = 1/n, para todo s_{X_i}).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador LPWA.

10.2.6.3. *Uncertain PWA operator*

El *uncertain PWA operator* es un operador PWA que representa la información incierta mediante intervalos de confianza. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa ya que abarca a todos los resultados comprendidos entre el máximo y el mínimo. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador UPWA es una función UPWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$UPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i \tilde{a}_i \tag{10.32}$$

donde cada argumento $\tilde{a}_i$ tiene asociada una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y los $\tilde{a}_i$ son intervalos de confianza.

Como se puede observar:

- Si α = 1, el operador UPWA se convierte en la media ponderada incierta clásica (UWA).
- Si α = 0, el operador UPWA se convierte en la probabilidad con información incierta clásica.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UWA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador UPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$UPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i \tilde{a}_i \tag{10.33}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

También se pueden analizar otros casos particulares diferentes del coeficiente α.

- La media aritmética incierta simple ($v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$ y $p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética probabilística incierta ($v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética ponderada incierta ($p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador UPWA.

10.2.6.4. *Fuzzy PWA operator*

El *fuzzy PWA operator* es un operador PWA que representa la información incierta mediante NBs. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa ya que abarca a todos los resultados comprendidos entre el máximo y el mínimo indicando su posibilidad de ocurrencia. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador FPWA es una función FPWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$FPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i \tilde{a}_i \tag{10.34}$$

donde cada argumento $\tilde{a}_i$ tiene asociada una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y los $\tilde{a}_i$ son NBs.

Como se puede observar:

- Si $\alpha = 1$, el operador FPWA se convierte en la media ponderada borrosa clásica (FWA).
- Si $\alpha = 0$, el operador FPWA se convierte en la probabilidad con información borrosa clásica.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FWA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador FPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$FPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i \tilde{a}_i \tag{10.35}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

También se pueden analizar otros casos particulares diferentes del coeficiente α.

- La media aritmética borrosa simple ($v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$ y $p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética probabilística borrosa ($v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media aritmética ponderada borrosa ($p_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador FPWA.

10.2.7. Extensiones de nivel 2

Siguiendo con la metodología desarrollada en el anterior apartado, se podrían comentar una amplia gama de extensiones de mayor complejidad. En este apartado se van a comentar 3 de estas extensiones como son el *probabilistic induced linguistic OWAWA* (PILOWAWA), el *probabilistic uncertain induced OWAWA* (PUIOWAWA) y el *probabilistic fuzzy induced OWAWA* (PFIOWAWA).

9.2.6.1. ***Probabilistic induced linguistic OWAWA operator***

Este operador utiliza variables de ordenación inducidas e información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador POWAWA. Su definición principal es la siguiente.

Definición. Un operador PILOWAWA es una función PILOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PILOWAWA\ (\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j} \tag{10.36}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

Como se ha comentado para el operador PLOWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PILOWAWA es una función PILOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de probabilidades *V*, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PILOWAWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j s_{Y_j} + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i s_{X_i} + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i s_{X_i} \quad (10.37)$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, y C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

Como se puede observar, en este operador se obtienen los siguientes casos particulares a partir de los coeficientes C_1, C_2 y C_3.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador ILOWA.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada lingüística (LWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad en problemas lingüísticos.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *linguistic probabilistic weighted average* (LPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic ILOWA* (PILOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *ILOWAWA operator*.

9.2.6.2. *Probabilistic uncertain induced OWAWA operator*

El operador PUIOWAWA es un operador POWAWA que utiliza información incierta representada mediante intervalos de confianza y variables de ordenación inducidas. Se define de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUIOWAWA es una función *PUIOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión *n*, si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUIOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \quad (10.38)$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PUIOWAWA* que tiene el *j*-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociada una probabilidad v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el *j*-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Como se puede observar, en este caso se obtienen los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador UIOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada incierta (UWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad en problemas con información incierta representada mediante intervalos de confianza.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *uncertain probabilistic weighted average* (UPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic UIOWA* (PUIOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *UIOWAWA operator*.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc. Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros aspectos particulares del operador PUIOWAWA siguiendo con la metodología explicada para el resto de operadores OWA.

9.2.6.3. *Probabilistic fuzzy induced OWAWA operator*

El operador PFIOWAWA es un operador POWAWA que utiliza información incierta representada mediante NBs y variables de ordenación inducidas. Se define de la siguiente forma

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFIOWAWA es una función *PFIOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PFIOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = C_1 \sum_{j=1}^{n} w_j b_j + C_2 \sum_{i=1}^{n} v_i \tilde{a}_i + C_3 \sum_{i=1}^{n} p_i \tilde{a}_i \tag{10.39}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PFIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, los $\tilde{a}_i$ son NBs y C_1 , C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$.

En este caso, se obtienen los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador FIOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada borrosa (FWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad en problemas con información incierta representada mediante NBs.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *fuzzy probabilistic weighted average* (FPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic FIOWA* (PFIOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *FIOWAWA operator*.

La información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB. Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otras propiedades del operador PFIOWA.

10.2.8. Otras extensiones

Y así sucesivamente se podrían desarrollar muchas otras extensiones a los operadores POWAWA como por ejemplo mediante el uso de distancias, t-normas y conormas (ST-POWAWA), diferentes conceptos estadísticos como la varianza, etc. Obsérvese que el uso de distancias se verá en el apartado 10.4.

También se tiene que recordar que estas extensiones también son aplicables a todas las aplicaciones comentadas para el operador POWAWA al principio del capítulo o en el capítulo 11 de aplicabilidad del operador POWAWA.

Por ejemplo, se podría comentar la siguiente extensión basada en agregaciones heavy. Se trata del operador *fuzzy induced heavy POWAWA operator* (PFIHOWAWA). Se puede definir de la siguiente forma.

Definición: Sea Ψ el conjunto de los NB. Una función PFIHOWAWAA: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ es un operador PFIHOWAWA de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n con $w_j \in [0, 1]$ y $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$, tal que:

$$PFIHOWAWA\,(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \tag{10.40}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PFIHOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una probabilidad v_i con $1 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i \leq n$, y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $1 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \leq n$, y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$.

Como se puede observar, si todos los sumatorios son iguales a 1, entonces se obtiene el operador PFIOWAWA y si son iguales a n, entonces se obtiene el operador total que representa la suma de todos los argumentos del problema, es decir, de todos los NBs. También cabe destacar los siguientes casos particulares:

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador FIHOWA.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada borrosa heavy (FHWA).
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad borrosa *heavy*.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *fuzzy heavy probabilistic weighted average* (FHPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic FIHOWA* (PFIHOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *fuzzy induced heavy OWAWA operator* (FIHOWAWA).

10.3. Generalizaciones a los POWAWA operators

10.3.1. Introducción al *generalized POWAWA operator*

El operador POWAWA puede ser generalizado mediante el uso de medias generalizadas o cuasi-aritméticas. Mediante el uso de medias generalizadas se le denominará el *probabilistic generalized OWAWA operator* o el operador PGOWAWA y mediante el uso de medias cuasi-aritméticas, el *probabilistic Quasi-OWAWA operator* (Quasi-POWAWA). La gran ventaja de estas generalizaciones es que abarcan a muchos más casos que el operador POWAWA por lo que se consigue una formulación mucho más general y completa que permite considerar muchas situaciones distintas en el mismo operador. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PGOWAWA es una función PGOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PGOWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.41}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también podría expresarse de la siguiente forma.

Definición. Un operador PGOWAWA es una función PGOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$$PGOWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = C_1 \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + C_2 \left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} + C_3 \left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.42}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los argumentos a_i, C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

En este caso, se obtienen los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador GOWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada generalizada (GWA) tradicional.

- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad generalizada.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *generalized probabilistic weighted average* (GPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic GOWA* (PGOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *GOWAWA operator*.

También se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPGOWAWA) y ascendentes (APGOWAWA).

Este operador también puede ser expresado en forma vectorial como:

$$PGOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{10.43}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GOWA, el GWA o el de probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PGOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.44}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

El operador PGOWAWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia.

También se pueden distinguir diferentes casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *POWAWA operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *probabilistic ordered weighted quadratic averaging weighted averaging* (*POWQAWA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *probabilistic ordered weighted geometric averaging weighted averaging* (*POWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *probabilistic ordered weighted harmonic averaging weighted averaging* (*POWHAWA*) *operator*.
- Etc.

Por el otro lado, se pueden analizar los casos particulares procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El máximo ponderado ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo ponderado ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada simple ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo a_i, $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).

- La media generalizada ponderada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada OWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada ponderada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media generalizada ponderada OWA ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada probabilística OWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PGOWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PGOWAWA (2 alternativas).
    - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
    - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PGOWAWA*.
- El *dependent-PGOWAWA*.
- Etc.

El operador PGOWAWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. Entonces, se obtiene una generalización mucho mayor del problema. A este operador se le denominará como *Quasi-POWAWA operator*.

Definición: Una función *QPOWAWA*: $R^n \to R$ es un operador Quasi-POWAWA de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPOWAWA\,(a_1, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g(b_j)\right) \qquad (10.45)$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los a_i, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los a_i, y $g(b)$ es una función monótona estrictamente continua.

En este caso, se pueden destacar los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador Quasi-OWA tradicional.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada cuasi-aritmética (Quasi-WA).
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad cuasi-aritmética.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *quasi-arithmetic probabilistic weighted average* (Quasi-PWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic Quasi-OWA* (Quasi-POWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *Quasi-OWAWA operator*.

10.3.2. *Induced generalized POWAWA operator*

El *induced PGOWAWA operator* o operador PIGOWAWA, es un operador similar al PGOWAWA con la ventaja adicional de que su proceso de ordenación no depende de los valores de los argumentos, sino que depende de un proceso de ordenación basado en variables de ordenación inducidas. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIGOWAWA es una función PIGOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PIGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.46}$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PIGOWAWA es una función PIGOWAWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

$PIGOWAWA\,(\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) =$

$$= C_1\left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + C_2\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + C_3\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.47}$$

donde b_j es el valor a_i del par *PIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, C_1 , C_2 y $C_3 \in [0, 1]$ con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

En este caso, se obtienen los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador IGOWA.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada generalizada (GWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad generalizada.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *generalized probabilistic weighted average* (GPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic IGOWA* (PIGOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *IGOWAWA operator*.

El operador PIGOWAWA es conmutativo, monótono, limitado e idempotente. También es simétrico, es decir, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPIGOWAWA) y ascendentes (APIGOWAWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones IGOWA, el GWA o el de probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PIGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PIGOWAWA\ (a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.48}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

Otro aspecto a comentar es el problema de empates en el proceso de ordenación de las variables de ordenación inducidas. Para solucionar este problema, se recomienda seguir la metodología de (Yager y Filev, 1999) en donde se reemplaza los argumentos empatados por su media. Obsérvese que en este caso se utilizará la media generalizada.

El operador PIGOWAWA generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *induced POWAWA* (*PIOWAWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *induced POWQAWA* (*PIOWQAWA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *induced POWGAWA* (*PIOWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *induced POWHAWA* (*PIOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

También incluye a un gran número de casos particulares a través de analizar diferentes expresiones en el vector de ponderaciones *W*.

- El operador GOWA ($i = j$ y $\beta = 1$)
- El máximo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \max\{a_i\}$).
- El mínimo ponderado ($w_p = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p$, y $u_p = \min\{a_i\}$).
- La media generalizada ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo a_i, $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada ponderada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada IOWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada ponderada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La media generalizada ponderada IOWA ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada probabilística IOWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PIGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq p, q$; y $u_p = \max\{a_i\}$, $u_q = \min\{a_i\}$).
- El *step-PIGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PIGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PIGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n-2)$).
- La mediana-PIGOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PIGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PIGOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PIGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PIGOWAWA.*
- El *dependent-PIGOWAWA.*
- Etc.

El operador PIGOWAWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-PIOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-PIOWAWA es una función Quasi-PIOWAWA: $R^n \rightarrow R$ si tiene un vector de ponderaciones *W* asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPIOWAWA\ (\langle u_1, a_1\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.49}$$

donde b_j es el valor a_i del par *QPIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, a_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-PIOWAWA se convierte en el operador PIGOWAWA.

10.3.3. *Linguistic generalized POWAWA operator*

El *linguistic PGOWAWA* (PLGOWAWA) *operator* es un operador de agregación que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador PGOWAWA. Se puede definir de la siguiente manera.

Definición. Un operador PLGOWAWA es una función PLGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PLGOWAWA\ (s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.50}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se ha comentado para el operador PGOWAWA, esta formulación también se podría expresar de la siguiente forma.

Definición. Un operador PLGOWAWA es una función PLGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$, un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, y un vector de probabilidades P, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, tal que:

PLGOWAWA (s_{X_1}, …, s_{X_n}) =

$$C_1\left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{X_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + C_2\left(\sum_{i=1}^{n} v_i s_{Y_i}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + C_3\left(\sum_{i=1}^{n} p_i s_{Y_i}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (10.51)$$

donde s_{Y_j} es el *j*-ésimo más grande de los s_{X_i}, C_1 , C_2 y $C_3 \in$ [0, 1] con $C_1 + C_2 + C_3 = 1$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in$ (–∞, ∞).

En este caso, también se observan los siguientes casos particulares.

- Si C_1 = 1, se obtiene el operador LGOWA.
- Si C_2 = 1, se obtiene la media ponderada lingüística generalizada (LGWA) tradicional.
- Si C_3 = 1, se obtiene la probabilidad generalizada en problemas lingüísticos.
- Si C_1 = 0, se obtiene el *linguistic generalized probabilistic weighted average* (LGPWA).
- Si C_2 = 0, se obtiene el *probabilistic LGOWA* (PLGOWA).
- Si C_3 = 0, se obtiene el *LGOWAWA operator*.

Cabe destacar que dentro de esta formulación, se podrían utilizar diferentes tipos de variables lingüísticas ya sea a partir del análisis interno o del externo.

Cabe destacar la posibilidad de expresar esta formulación mediante una notación vectorial de la siguiente forma:

$$PLGOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \qquad (10.52)$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LOWA, el LWA o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PLGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PLGOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (10.53)$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

El operador PLGOWAWA incluye a un gran número de casos particulares como son los siguientes. En primer lugar, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *linguistic POWAWA* (*PLOWAWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *linguistic POWQWAD* (*PLOWQAWA*) *operator*.

- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *linguistic POWGAWA* (*PLOWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *linguistic POWHAWA* (*PLOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

Otros casos particulares son aquellos que proceden del vector de ponderaciones. Obsérvese que estos casos siguen la misma metodología que en los apartados anteriores.

El operador PLGOWAWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-PLOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-PLOWAWA es una función QPLOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPLOWAWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right)\right) \tag{10.54}$$

donde s_{Y_j} es el j-ésimo más grande de los s_{X_i}, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(s_\beta) = s_\beta^{\lambda}$, el Quasi-PLOWAWA se convierte en el operador PLGOWAWA.

10.3.4. *Uncertain generalized POWAWA operator*

El *uncertain PGOWAWA operator* o operador PUGOWAWA, es un operador PGOWAWA para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUGOWAWA es una función *PUGOWAWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUGOWAWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.55}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de intervalo de confianza, ya sea de 2-tuplas, tripletas, cuádruplos, etc.

Otro aspecto a destacar en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, es la necesidad de definir un criterio de ordenación de intervalos en donde se recomienda seguir con el criterio utilizado en los anteriores capítulos (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del intervalo.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones P, W y a las V como inciertos. Debido a que estos conceptos requieren de un tratamiento más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UGOWA, el UGWA o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PUGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PUGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \qquad (10.56)$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

El operador PUGOWAWA generaliza a un gran número de casos particulares de entre los cuales se destacan los siguientes. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *uncertain POWAWA* (*PUOWAWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *uncertain POWQAWA* (*PUOWQAWA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *uncertain POWGAWA* (*PUOWGAWA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *uncertain POWHAWA* (*PUOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

También incluye a muchos otros casos procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- El máximo incierto ponderado probabilístico ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo incierto ponderado probabilístico ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).

- La media generalizada incierta ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$, $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PUGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PUGOWAWA* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *olympic-PUGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PUGOWAWA.
    - Si n es impar asignamos $w_{(n + 1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
    - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PUGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- El *centered-PUGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- Etc.

Finalmente, destacar que también se puede generalizar el operador PUGOWAWA a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. A este operador se le denominará *Quasi-PUOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-PUOWAWA es una función $QPUOWAWA$: $\Omega^n \to \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPUOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{10.57}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y g es la función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, el Quasi-PUOWAWA se convierte en el operador PUGOWAWA.

10.3.5. *Fuzzy generalized POWAWA operator*

El *fuzzy PGOWAWA operator* o operador PFGOWAWA, es un operador PGOWAWA para situaciones inciertas en donde la información puede ser representada mediante NBs. Su principal ventaja es la posibilidad de ofrecer una información mucho más completa al decisor en situaciones de incertidumbre ya que considera todos los casos pesimistas y optimistas que se pueden producir. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFGOWAWA es una función *PFGOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PFGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.58}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados
- Números borrosos de tipo 2 y *n*.
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y *n* generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y *n*, generalizados, etc.)
- Etc.

También cabe destacar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente para comparar NBs (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones W y V como NBs. Debido a que estos conceptos implican un análisis mucho más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo (véase apartado 8.2.5). A modo de resumen.

	W	V	Argumentos
Caso 1	-	-	Intervalos
Caso 2	-	Intervalos	Intervalos
Caso 3	Intervalos	-	Intervalos
Caso 4	Intervalos	-	-
Caso 5	-	Intervalos	-
Caso 6	Intervalos	Intervalos	-
Caso 7	Intervalos	Intervalos	Intervalos
Caso 8	Intervalos	Intervalos	NBs
Caso 9	Intervalos	NBs	Intervalos
Caso 10	Intervalos	NBs	NBs
Caso 11	NBs	Intervalos	Intervalos
Caso 12	NBs	Intervalos	NBs
Caso 13	NBs	NBs	Intervalos
Caso 14	NBs	NBs	NBs
Caso 15	-	-	NBs
Caso 16	-	NBs	NBs
Caso 17	NBs	-	NBs
Caso 18	NBs	-	-
Caso 19	-	NBs	-
Caso 20	NBs	NBs	-
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas, expertones, etc.

El operador PFGOWAWA cumple las propiedades básicas de los operadores de agregación OWA como la conmutatividad, monotonía, idempotencia y delimitación entre el máximo y el mínimo. Desde un punto de vista generalizado del proceso de reordenación, se puede distinguir entre órdenes descendentes (DPFGOWAWA) y ascendentes (APFGOWAWA).

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FGOWA, el FGWA o las probabilidades, es decir, $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador PFGOWAWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$PFGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.59}$$

con $\hat{v}_j = (C_1 w_j / W) + (C_2 v_j / V) + (C_3 p_j / P)$.

El operador PFGOWAWA puede ser generalizado mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. Como resultado se obtiene el *Quasi-PFOWAWA operator*. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador Quasi-PFOWAWA es una función *QPFOWAWA*: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPFOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{10.60}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y g es una función monótona estrictamente continua.

Como se puede observar, cuando $g(b) = b^{\lambda}$, entonces, el Quasi-PFOWAWA se convierte en el operador PFGOWAWA.

Al igual que las anteriores extensiones, tanto el operador PFGOWAWA como el Quasi-PFOWAWA generalizan a un gran número de casos particulares. Principalmente se destacan los siguientes. Obsérvese que se utiliza la denominación *generalized* para los dos casos.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador FGOWA.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la media ponderada generalizada borrosa (FGWA) tradicional.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la probabilidad generalizada borrosa.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *fuzzy generalized probabilistic weighted average* (FGPWA).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic FGOWA* (PFGOWA).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *FGOWAWA operator*.

Por el otro lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ o de la función g.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *fuzzy POWAWA* (*PFGOWAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *fuzzy POWQAWA* (*PFOWQAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *fuzzy POWGAWA* (*PFOWGAWA*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *fuzzy POWHAWA* (*PFOWHAWA*) *operator*.
- Etc.

Y por el otro, los casos procedentes del vector de ponderaciones W.

- El máximo borroso ponderado (w_1 = 1 y w_j = 0, para todo $j \neq 1$).
- El mínimo borroso ponderado (w_n = 1 y w_j = 0, para todo $j \neq n$).
- La media generalizada borrosa ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo $\tilde{a}_i$).
- El PFGOWAWA según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PFGOWAWA* (w_k = 1 y w_j = 0, para todo $j \neq k$).
- El *window-PFGOWAWA* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PFGOWAWA operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PFGOWAWA.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PFGOWAWA* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PFGOWAWA (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PFGOWAWA* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PFGOWAWA*.
- El *dependent-PFGOWAWA*.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían ir considerando otros casos particulares siguiendo con la metodología explicada en los capítulos anteriores.

10.3.6. *Generalized PWA operator* y sus extensiones

10.3.6.1. Introducción

Un caso particular del operador PGOWAWA de gran interés es el *generalized PWA operator*. Este operador es una generalización del operador PWA mediante el uso de medias generalizadas (GPWA) o cuasi-aritméticas (Quasi-PWA). Como se ha comentado en el apartado 10.2.6 donde se explicaba el operador PWA, a este concepto no se le ha dedicado un capítulo exclusivo como era el caso del operador OWAWA y POWA ya que no es un operador OWA. A pesar de ello, se es consciente de que este es uno de los principales resultados de la tesis a nivel de importancia. Por tanto, a pesar de que no se le ha dedicado un capítulo exclusivo, se desea remarcar su importancia. La gran ventaja del operador GPWA es su aspecto más general que permite abarcar a muchos casos no considerados con el operador PWA. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador GPWA es una función GPWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$GPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.61}$$

donde cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación también podría expresarse de la siguiente forma.

Definición. Un operador GPWA es una función GPWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones P asociado, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$GPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.62}$$

donde a_i son los argumentos del problema, $\alpha \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Este operador también puede ser expresado en forma vectorial como:

$$GPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{10.63}$$

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones GWA o el de probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador GPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$GPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \frac{\alpha}{V}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + \frac{(1-\alpha)}{P}\left(\sum_{i=1}^{n} p_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.64}$$

Obsérvese que también se podría expresar de la siguiente forma:

$$GPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.65}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

El operador GPWA cumple las propiedades de conmutatividad, monotonía, delimitación entre el mínimo y el máximo y la idempotencia. Es conmutativo porque cualquier permutación de los argumentos tiene la misma evaluación. Es monótono porque si $a_i \geq e_i$ para todo *i*, entonces, $GPWA(a_1,\ldots, a_n) \geq GPWA(e_1,\ldots, e_n)$, siendo a_i y e_i los argumentos del problema. Es idempotente porque si $a_i = a$, para todo *i*, entonces, $GPWA(a_1,\ldots, a_n) = a$. Finalmente, es limitado porque $\min\{a_i\} \leq GPWA(a_1,\ldots, a_n) \leq \max\{a_i\}$.

El operador PGWA puede ser generalizado a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. Entonces, se obtiene una generalización mucho mayor del problema. A este operador se le denominará como *Quasi-PWA operator*.

Definición: Una función $QPWA$: $R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-PWA de dimensión *n*, tal que:

$$QPWA\,(a_1,\,\ldots,\,a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i g(a_i)\right) \tag{10.66}$$

donde cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$, y $g(b)$ es una función monótona estrictamente continua.

También se tiene que destacar la posibilidad de analizar otros casos particulares diferentes del coeficiente α procedentes del parámetro λ o de la función *g*.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *PWA operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *probabilistic weighted quadratic averaging* (*PWQA*) *operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *probabilistic weighted geometric averaging* (*PWGA*) *operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *probabilistic weighted harmonic averaging* (*PWHA*) *operator*.
- Etc.

O también procedentes del vector de ponderaciones *W*.

- La media generalizada simple ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada probabilística ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La media generalizada ponderada ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador GPWA

10.3.6.2. *Linguistic generalized PWA operator*

El *linguistic GPWA operator* (LGPWA) es un operador GPWA que representa la información incierta disponible mediante variables lingüísticas. Se puede definir de la siguiente forma

Definición. Un operador LGPWA es una función LGPWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, tal que:

$$LGPWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i s_{X_i}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.67}$$

donde cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar:

- Si $\alpha = 1$, el operador LGPWA se convierte en la media generalizada ponderada lingüística clásica (LGWA).
- Si $\alpha = 0$, el operador LGPWA se convierte en la probabilidad generalizada con información lingüística clásica.

Cabe destacar la posibilidad de considerar una amplia gama de variables lingüísticas en el problema ya sea a través del análisis interno o externo de dichas variables.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones LGWA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador LGPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$LGPWA\,(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i \tag{10.68}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

También resulta de interés el analizar otros casos particulares diferentes de α.

- La media generalizada lingüística simple ($v_i = 1/n$, para todo s_{X_i} y $p_i = 1/n$, para todo s_{X_i}).
- La media generalizada lingüística probabilística ($v_i = 1/n$, para todo s_{X_i}).
- La media generalizada lingüística ponderada ($p_i = 1/n$, para todo s_{X_i}).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador LGPWA.

Finalmente, cabe destacar una generalización mayor al operador LGPWA mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. Entonces, se obtiene el operador Quasi-LPWA y se define de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-LPWA es una función QLPWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, tal que:

$$QLPWA\,(s_{X_1}, \ldots, s_{X_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right)\right) \tag{10.69}$$

donde cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y g es una función monótona estrictamente continua.

10.3.6.3. *Uncertain generalized PWA operator*

El *uncertain GPWA operator* es un operador GPWA que representa la información incierta mediante intervalos de confianza. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa ya que abarca a todos los resultados comprendidos entre el máximo y el mínimo. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador UGPWA es una función UGPWA: $R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$UGPWA\,(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.70}$$

donde cada argumento $\tilde{a}_i$ tiene asociada una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y los $\tilde{a}_i$ son intervalos de confianza y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar:

- Si α = 1, el operador UGPWA se convierte en la media ponderada incierta clásica (UGWA).
- Si α = 0, el operador UGPWA se convierte en la probabilidad con información incierta clásica.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones UGWA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador UGPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$UGPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.71}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

También se pueden analizar otros casos particulares diferentes del coeficiente α.

- La media generalizada incierta simple (v_i = 1/n, para todo $\tilde{a}_i$ y p_i = 1/n, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media generalizada incierta (v_i = 1/n, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media generalizada incierta (p_i = 1/n, para todo $\tilde{a}_i$).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador UGPWA.

En este caso, también se podría establecer una generalización superior mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. En este caso, se obtiene el operador Quasi-UPWA y se define de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-UPWA es una función *QUPWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, tal que:

$$QUPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{10.72}$$

donde cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i$ = 1 y $v_i \in$ [0, 1], una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i$ = 1 y $p_i \in$ [0, 1], $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in$ [0, 1] y g es la función monótona estrictamente continua.

10.3.6.4. *Fuzzy generalized PWA operator*

El *fuzzy GPWA operator* es un operador GPWA que representa la información incierta mediante NBs. Tiene la gran ventaja de que permite representar la información de una forma más completa ya que abarca a todos los resultados comprendidos entre el máximo y el mínimo indicando su posibilidad de ocurrencia. Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador FGPWA es una función FGPWA: $R^n \to R$ de dimensión n, tal que:

$$FGPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.73}$$

donde cada argumento $\tilde{a}_i$ tiene asociada una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$, los $\tilde{a}_i$ son NBs y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar:

- Si $\alpha = 1$, el operador FGPWA se convierte en la media ponderada generalizada borrosa clásica (FGWA).
- Si $\alpha = 0$, el operador FGPWA se convierte en la probabilidad generalizada con información borrosa.

Obsérvese que la información incierta disponible puede venir representada por cualquier tipo de NB como por ejemplo:

- Números borrosos triangulares
- Números borrosos trapezoidales
- Números borrosos intervalo valorados
- Números borrosos de tipo 2 y *n*.
- Números borrosos L-R
- Números borrosos generalizados
- Números borrosos intervalo valorados generalizados
- Números borrosos de tipo 2 y *n* generalizados
- Números borrosos L-R (de tipo 2 y *n*, generalizados, etc.)
- Etc.

También cabe destacar que en el proceso de ordenación de argumentos y en la toma de decisiones, se seguirá con el criterio explicado anteriormente para comparar NBs (Kaufmann y Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994) en donde se busca un valor medio del NB.

También obsérvese que resulta posible considerar a las ponderaciones *W* y *V* como NBs. Debido a que estos conceptos implican un análisis mucho más detallado e incluyen dificultades adicionales, se deja su estudio para investigaciones postdoctorales. Obsérvese que también sería posible considerar casos con intervalos y con NBs al mismo tiempo (véase apartado 8.2.5). Además, se podrían buscar muchas más combinaciones si se considerasen otras técnicas para representar la información incierta como el uso de variables lingüísticas, expertones, etc.

Obsérvese que si el vector de ponderaciones no está normalizado, ya sea el vector de ponderaciones FGWA o las probabilidades, es decir, $V = \sum_{i=1}^{n} v_i \neq 1$, o $P = \sum_{j=1}^{n} p_i \neq 1$, entonces, el operador FGPWA se puede expresar de la siguiente forma:

$$FGPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.74}$$

con $\hat{v}_i = (\alpha v_i / V) + ((1-\alpha) p_i / P)$.

Una generalización mayor a esta formulación se consigue mediante el uso de medias cuasi-aritméticas. En este caso, se obtiene el operador Quasi-FPWA y se define de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-FPWA es una función *QFPWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión *n*, tal que:

$$QFPWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{10.75}$$

donde cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y *g* es la función monótona estrictamente continua.

También resulta de interés el analizar otros casos particulares diferentes del coeficiente *α*. Tanto en el operador FGPWA y en el Quasi-FPWA. Por un lado, se tienen los casos particulares procedentes del parámetro λ.

- Si λ = 1, se obtiene el *fuzzy GPWA* (*FGPWA*) *operator*.
- Si λ = 2, se obtiene el *fuzzy GPWQA* (*FGPWQA*) *operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *fuzzy GPWGA* (*FGPWGA*) *operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *fuzzy GPWHA* (*FGPWHA*) *operator*.
- Etc.

Y por el otro lado, el análisis de los vectores de ponderaciones.

- La media generalizada borrosa simple (v_i = 1/*n*, para todo $\tilde{a}_i$ y p_i = 1/*n*, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media generalizada probabilística borrosa (v_i = 1/*n*, para todo $\tilde{a}_i$).
- La media generalizada ponderada borrosa (p_i = 1/*n*, para todo $\tilde{a}_i$).
- Etc.

Y así sucesivamente se podrían ir considerando otras propiedades y particularidades del operador FGPWA.

10.3.7. Extensiones de nivel 2

10.3.7.1. Introducción

Otras extensiones se podrían ir introduciendo al operador POWAWA mediante el uso de conceptos o características adicionales. De entre el gran número de extensiones que se podrían realizar, en este apartado se destacan el *induced linguistic generalized POWAWA* (PILGOWAWA), el *uncertain induced generalized POWAWA* (PUIGOWAWA) y el *fuzzy induced generalized POWAWA* (PFIGOWAWA).

Obsérvese que estas extensiones se presentan muy brevemente ya que los diferentes aspectos, propiedades, etc., siguen la misma metodología que en las anteriores extensiones.

10.3.7.2. *Induced linguistic generalized POWAWA operator*

Definición. Un operador PILGOWAWA es una función PILGOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PILGOWAWA\,(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{Y_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.76}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i} tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Esta formulación puede ser generalizada mediante medias cuasi-aritméticas de la siguiente forma.

Definición. Un operador Quasi-PILOWAWA es una función QPILOWAWA: $S^n \rightarrow S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPILOWAWA(\langle u_1, s_{X_1}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{X_n}\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right) \right) \tag{10.77}$$

donde s_{Y_j} es el valor s_{X_i} del par *PILGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, s_{X_i}\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento s_{X_i}

tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{Y_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los s_{X_i} y g es una función monótona estrictamente continua.

10.3.7.3. *Uncertain induced generalized POWAWA operator*

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUIGOWAWA es una función *PUIGOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUIGOWAWA\left(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.78}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PUIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y mediante el uso de medias cuasi-aritméticas, se obtiene lo siguiente.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-PUIOWAWA es una función *QPUIOWAWA*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPUIOWAWA\left(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle\right) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{10.79}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PUIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un intervalo de confianza y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$, y g es la función monótona estrictamente continua.

10.3.7.4. *Fuzzy induced generalized POWAWA operator*

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador PFIGOWAWA es una función *PFIGOWAWA*: $\Psi^{n} \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PFIGOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.80}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *PFIGOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y mediante el uso de medias cuasi-aritméticas, se obtiene lo siguiente.

Definición. Sea Ψ el conjunto de los NBs. Un operador Quasi-PFIOWAWA es una función *QPFIOWAWA*: $\Psi^{n} \rightarrow \Psi$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPFIOWAWA\ (\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{10.81}$$

donde b_j es el valor $\tilde{a}_i$ del par *QPFIOWAWA* que tiene el j-ésimo más grande de los u_i, u_i en $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ hace referencia a la variable inducida de ordenación, cada argumento $\tilde{a}_i$ es un NB y tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $\tilde{a}_i$ y g es una función monótona estrictamente continua.

10.4. Operadores POWAWA en la noción de distancia

10.4.1. Introducción al *POWAWA distance operator*

Los operadores POWAWA también pueden ser utilizados en los métodos de distancias. Entonces, se obtiene el *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging distance operator* o operador POWAWAD. La gran ventaja que tiene es que permite agregar un problema de distancias con operadores OWA, WA y probabilidades al mismo tiempo de tal forma que se refleja el grado de optimismo, el grado de importancia y la probabilidad en la misma formulación. Con el operador POWAWAD se consigue una formulación mucho más general a los métodos de distancias, lo cual permite mostrar un abanico mucho más amplio de resultados según los intereses del problema.

Además, la utilización de operadores POWAWAD puede ser considerado en un gran número de aplicaciones como se mostrará en el capítulo de aplicabilidad de los operadores OWA ya sea en diferentes aspectos estadísticos, etc. En resumen, decir que todo concepto que utiliza el concepto de media (en especial de media ponderada) es susceptible de ser analizada con el operador POWAWA. Obsérvese que en este caso, esto afectaría a los diferentes tipos de distancias existentes en la literatura como la distancia de Hamming, de Euclides, de Minkowski, etc.

A continuación, se van a mostrar algunos casos de operadores POWAWAD. Como los operadores generalizados incluyen a los aritméticos como casos particulares, únicamente se considerará el caso aritmético básico, es decir, el *probabilistic ordered weighted averaging weighted averaging distance operator* (POWAWAD). A continuación se considerarán los siguientes casos generalizados:

- *Generalized POWAWA distance operator*
- *Induced generalized POWAWA distance operator*
- *Linguistic generalized POWAWA distance operator*
- *Uncertain generalized POWAWA distance operator*
- Etc.

Para cada caso simplemente se presentará sus principales definiciones y algún comentario fundamental. No se entrará en más detalle ya que el análisis de las distintas propiedades y casos particulares se deduce de la metodología vista en los anteriores apartados. Obsérvese que no se entra en excesivos detalles para evitar una excesiva redundancia en la tesis. A continuación se presenta el operador POWAWAD.

Definición. Un operador POWAWAD es una función POWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAWAD\ (P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j \tag{10.82}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$.

Cabe destacar la existencia de los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador OWAD.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la distancia media ponderada (WAD) tradicional, es decir la distancia de Hamming ponderada (también se podría ver como la distancia de Manhattan).
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la distancia probabilística.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *probabilistic weighted averaging distance* (PWAD).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic OWAD* (POWAD).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *OWAWAD operator*.

10.4.2. *Generalized POWAWA distance operator*

Un caso más general al operador POWAWAD es aquel que utiliza medias generalizadas o cuasi-aritméticas. A este operador se le conoce como el *probabilistic generalized OWAWA distance operator* (PGOWAWAD) cuando se utilizan medias generalizadas, y como el *Quasi-POWAWAD operator* cuando se utilizan medias cuasi-aritméticas. Se definen de la siguiente forma.

Definición. Un operador PGOWAWAD es una función PGOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PGOWAWAD\,(P, P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.83}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y mediante el uso de medias cuasi-aritméticas.

Definición: Una función *QPOWAWAD*: $R^n \times R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-POWAWAD de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPOWAWAD\,(P, P_k) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g(D_j)\right) \tag{10.84}$$

donde D_j representa el j-ésimo más grande de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según D_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, y $g(D)$ es una función monótona estrictamente continua.

En este caso, se podrían destacar los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador GOWAD.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la distancia media ponderada generalizada (GWAD), es decir, la distancia de Minkowski ponderada.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la distancia generalizada probabilística.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *generalized probabilistic weighted averaging distance* (GPWAD).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic GOWAD* (PGOWAD).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *GOWAWAD operator*.

Además, también se podrían considerar los casos particulares procedentes del parámetro λ y del vector de ponderaciones W. Analizando el parámetro λ, se podría destacar los siguientes casos.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *GOWAWAD operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *GOWQAWAD operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *GOWGAWAD operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *GOWHAWAD operator*.
- Etc.

Y analizando el vector de ponderaciones W se obtienen los casos habituales como por ejemplo:

- La distancia máxima ponderada probabilística ($w_1 = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1$).
- La distancia mínima ponderada probabilística ($w_n = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq n$).

- La distancia generalizada simple ($w_j = 1/n$, para todo b_i, $v_i = 1/n$, para todo a_i, $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La distancia generalizada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $v_i = 1/n$, para todo a_i).
- La distancia generalizada ponderada ($w_j = 1/n$, para todo b_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La distancia generalizada OWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i y $p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La distancia generalizada ponderada probabilística ($w_j = 1/n$, para todo b_i).
- La distancia generalizada ponderada OWA ($p_i = 1/n$, para todo a_i).
- La distancia generalizada probabilística OWA ($v_i = 1/n$, para todo a_i).
- El PGOWAWAD según el criterio de Hurwicz ($w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq 1, n$).
- El *step-PGOWAWAD* ($w_k = 1$ y $w_j = 0$, para todo $j \neq k$).
- El *window-PGOWAWAD* ($w_j = 1/m$ para $k \leq j \leq k + m - 1$ y $w_j = 0$ para $j > k + m$ y $j < k$).
- El *olympic-PGOWAWAD operator* ($w_1 = w_n = 0$, y para todos los demás $w_j = 1/(n - 2)$).
- La mediana-PGOWAWAD.
  - Si n es impar asignamos $w_{(n+1)/2} = 1$ y $w_j = 0$ para todos los demás.
  - Si n es par, se pueden utilizar diferentes criterios. Por ejemplo, se puede asignar $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, y $w_j = 0$ para todos los demás.
- El *S-PGOWAWAD* ($w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, y $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ para $j = 2$ hasta $n - 1$ donde $\alpha, \beta \in [0, 1]$ y $\alpha + \beta \leq 1$).
- E-Z PGOWAWAD (2 alternativas).
  - 1) Se asigna $w_j = (1/k)$ para $j = 1$ hasta k y $w_j = 0$ para $j > k$.
  - 2) Se asigna $w_j = 0$ para $j = 1$ hasta $n - k$ y $w_j = (1/k)$ para $j = n - k + 1$ hasta n.
- El *centered-PGOWAWAD* (si es simétrico, estrictamente decreciente con respecto al centro e inclusivo).
- El *nonmonotonic-PGOWAWAD*.
- El *dependent-PGOWAWAD*.
- Etc.

10.4.3. *Induced generalized POWAWA distance operator*

El *induced generalized POWAWA distance operator* o el operador PIGOWAWAD es una extensión al operador PGOWAWAD a través de utilizar un proceso de reordenación basado en variables de ordenación inducidas. De esta forma, se consigue un operador de distancias mucho más completo, ya sea mediante el uso de medias generalizadas o mediante medias cuasi-aritméticas. Se puede definir del siguiente modo dado el conjunto $U = \{u_1, \ldots, u_n\}$ de variables inducidas y los dos conjuntos X y Y de argumentos.

Definición. Un operador PIGOWAWAD es una función PIGOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PIGOWAWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (10.85)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta PIGOWAWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y mediante el uso de medias cuasi-aritméticas.

Definición. Un operador Quasi-PIOWAWAD es una función Quasi-PIOWAWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPIOWAWAD\,(\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (10.86)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta QPIOWAWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = \beta w_j + (1-\beta) v_j$ con $\beta \in [0, 1]$, v_j es la ponderación v_i ordenada según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i, y g es la función monótona estrictamente continua.

En este caso, se podrían destacar los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador IGOWAD.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la distancia media ponderada generalizada (GWAD), es decir, la distancia de Minkowski ponderada.
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la distancia generalizada probabilística.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *generalized probabilistic weighted averaging distance* (GPWAD).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic IGOWAD* (PIGOWAD).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *IGOWAWAD operator*.

Además, también se podrían considerar los casos particulares procedentes del parámetro λ y del vector de ponderaciones W. Analizando el parámetro λ, se podría destacar los siguientes casos.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *IGOWAWAD operator*.

- Si λ = 2, se obtiene el *IGOWQAWAD operator*.
- Si λ = 0, se obtiene (por aproximación) el *IGOWGAWAD operator*.
- Si λ = –1, se obtiene el *IGOWHAWAD operator*.
- Etc.

Y analizando el vector de ponderaciones W también se obtienen los casos habituales siguiendo con la metodología explicada para el operador PGOWAWAD e IGOWAD.

10.4.4. *Linguistic generalized POWAWA distance operator*

El *linguistic PGOWAWAD* (PLGOWAWAD) *operator* es un operador de agregación de distancias que utiliza información incierta representada mediante variables lingüísticas en el operador PGOWAWAD. Para dos conjuntos $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ e $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PLGOWAWAD es una función PLGOWAWAD: $S^n \times S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PLGOWAWAD\,(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j s_{\delta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.87}$$

donde s_{δ_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{δ_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y si se utilizan medias cuasi-aritméticas, se obtiene el Quasi-PLOWAWAD.

Definición. Un operador Quasi-PLOWAWAD es una función QPLOWAWAD: $S^n \times S^n \to S$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPLOWAWAD\,(X, Y) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(s_{Y_j}\right) \right) \tag{10.88}$$

donde s_{δ_j} es el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$, $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, cada argumento $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y

$p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según s_{δ_j}, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ y g es una función monótona estrictamente continua.

En este caso, se podrían destacar los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador LGOWAD.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la distancia media ponderada generalizada lingüística (LGWAD).
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la distancia generalizada probabilística lingüística.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *linguistic generalized probabilistic weighted averaging distance* (LGPWAD).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic LGOWAD* (PLGOWAD).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *LGOWAWAD operator*.

Además, también se podrían considerar los casos particulares del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *LOWAWAD operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *LOWQAWAD operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *LOWGAWAD operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *LOWHAWAD operator*.
- Etc.

Y analizando el vector de ponderaciones W también se obtienen los casos habituales siguiendo con la metodología explicada para el operador PLGOWAWAD.

10.4.5. *Uncertain generalized POWAWA distance operator*

El *uncertain PGOWAWAD operator* o operador PUGOWAWAD, es un operador PGOWAWAD para situaciones en donde la información disponible sea incierta y venga representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja reside en la posibilidad de representar la información de una forma más completa ya que abarca todos los resultados comprendidos entre el máximo y el mínimo. Se puede definir de la siguiente forma para dos conjuntos A y E.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador PUGOWAWAD es una función $PUGOWAWAD$: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$PUGOWAWAD\,(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.89}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Mediante el uso de medias cuasi-aritméticas se obtendría el Quasi-PUOWAWAD.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador Quasi-PUOWAWAD es una función *QPUOWAWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$QPUOWAWAD\,(\langle \tilde{a}_1, \tilde{e}_1\rangle, \ldots, \langle \tilde{a}_n, \tilde{e}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{10.90}$$

donde b_j es el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias individuales, $\tilde{a}$ y $\tilde{e}$ son intervalos de confianza y tienen asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los $|\tilde{a}_i - \tilde{e}_i|$, y g es la función monótona estrictamente continua.

En este caso, se podrían destacar los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador UGOWAD.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la distancia media ponderada generalizada incierta (UGWAD).
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la distancia generalizada probabilística incierta.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *unceratin generalized probabilistic weighted averaging distance* (UGPWAD).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic UGOWAD* (PUGOWAD).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *UGOWAWAD operator*.

Además, también se podrían considerar los casos particulares del parámetro λ.

- Si $\lambda = 1$, se obtiene el *PUOWAWAD operator*.
- Si $\lambda = 2$, se obtiene el *PUOWQAWAD operator*.
- Si $\lambda = 0$, se obtiene (por aproximación) el *PUOWGAWAD operator*.
- Si $\lambda = -1$, se obtiene el *PUOWHAWAD operator*.
- Etc.

Y analizando el vector de ponderaciones W también se obtienen los casos habituales siguiendo con la metodología explicada para el operador PUGOWAWAD.

10.4.6. *Generalized PWA distance operator* y sus extensiones

Como se ha comentado anteriormente, un caso particular del operador GPOWAWA de gran interés y el cual no ha sido estudiado en ningún otro capítulo, es el operador PWA. En este apartado, se podría extender dicho operador al uso de distancias. Entonces, se obtendrá el *probabilistic weighted averaging distance operator* (PWAD) o en su versión generalizada, el *generalized probabilistic weighted averaging distance operator* (GPWAD). A continuación se muestra brevemente los conceptos principales de estos dos casos y del *uncertain GPWAD operator* (IGPWAD). Se podrían estudiar muchos otros casos pero como el PWA está incluido en el operador POWAWA, con el análisis del operador POWAWAD, se obtienen todos estos casos. Por tanto, no resulta necesario volver a comentarlo en este apartado. El objetivo de este apartado es resaltar la importancia del operador PWA en los métodos de distancias. Para un análisis exhaustivo se puede analizar el operador POWAWAD el cual contiene al operador PWAD y al resto de capítulos de operadores OWA para observar diferentes casos particulares y extensiones que se podrían desarrollar.

10.4.6.1. *Probabilistic weighted averaging distance operator*

El operador PWAD, se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Un operador PWAD es una función PWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$PWAD\,(P, P_k) = \sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i D_i \qquad (10.91)$$

donde D_i representa la distancia individual i-ésima de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$.

10.4.6.2. *Generalized probabilistic weighted averaging distance operator*

El operador PWAD puede ser generalizado mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas. De esta forma, se consigue una formulación mucho más general que incluye al operador PWAD como un caso particular y abarca mucho más. Mediante el uso de medias generalizadas, se obtendrá el *generalized probabilistic weighted averaging distance operator* (GPWAD) y se define de la siguiente forma.

Definición. Un operador GPWAD es una función GPWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, tal que:

$$GPWAD\,(P, P_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i D_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.92}$$

donde D_i representa la distancia individual i-ésima de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Obsérvese que también es posible formular la anterior definición de la siguiente forma.

Definición. Un operador GPWAD es una función GPWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ de dimensión n, si tiene un vector de ponderaciones P asociado, con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$ y un vector de ponderaciones V, con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, tal que:

$$GPWAD\,(P, P_k) = \alpha\left(\sum_{i=1}^{n} v_i D_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} + (1-\alpha)\left(\sum_{i=1}^{n} p_i d_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10.93}$$

donde D_i representa la distancia individual i-ésima de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, $\alpha \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, en este caso se obtienen los siguientes casos principales.

- Si α = 1, el operador GPWAD se convierte en la distancia ponderada generalizada clásica (GWAD), es decir en la distancia de Minkowski ponderada.
- Si α = 0, el operador GPWAD se convierte en la distancia probabilística generalizada (*generalized probabilistic distance*).

Una generalización mayor a esta formulación se consigue a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, se consigue el operador Quasi-PWAD.

Definición: Una función *QPWAD*: $R^n \times R^n \rightarrow R$ es un operador Quasi-PWAD de dimensión n, tal que:

$$QPWAD\,(P, P_k) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i g(D_i)\right) \tag{10.94}$$

donde D_i representa la distancia individual i-ésima de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado, cada argumento a_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$

y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y $g(D)$ es una función monótona estrictamente continua.

A partir de estas definiciones, se podrían considerar diferentes propiedades y casos particulares de estos operadores siguiendo con la metodología explicada para los otros operadores. Es decir, se podría expresarlo en una notación vectorial, establecer un caso general de normalización de las ponderaciones, etc.

10.4.6.3. *Uncertain generalized probabilistic weighted averaging distance operator*

El operador UGPWAD es un operador GPWAD en donde la información incierta disponible viene representada mediante intervalos de confianza. Su gran ventaja es la posibilidad de abarcar todas las situaciones posibles desde el máximo hasta el mínimo. A este operador se le denominará el *uncertain generalized probabilistic weighted averaging distance operator* (UGPWAD). Se puede definir de la siguiente forma.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Un operador UGPWAD es una función UGPWAD: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ de dimensión n, tal que:

$$UGPWAD\,(P, P_k) = \left(\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i D_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.95}$$

donde D_i representa la distancia individual i-ésima de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P representada mediante intervalos de confianza, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado representada mediante intervalos de confianza, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Como se puede observar, en este caso se obtienen los siguientes casos principales.

- Si $\alpha = 1$, se convierte en la distancia ponderada generalizada incierta clásica (UGWAD), es decir en la distancia de Minkowski ponderada incierta.
- Si $\alpha = 0$, se convierte en la distancia probabilística generalizada incierta (*uncertain generalized probabilistic distance*).

Una generalización mayor a esta formulación se consigue a través de utilizar medias cuasi-aritméticas. En este caso, se consigue el operador Quasi-UPWAD.

Definición. Sea Ω el conjunto de los intervalos de confianza. Una función *QUPWAD*: $\Omega^n \times \Omega^n \rightarrow \Omega$ es un operador Quasi-UPWAD de dimensión n, tal que:

$$QUPWAD\ (P, P_k) = g^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{v}_i g(D_i)\right) \quad (10.96)$$

donde D_i representa la distancia individual i-ésima de los $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto ideal P representada mediante intervalos de confianza, $\mu_i^{(k)}$ es la valuación en [0, 1] de la característica i-ésima de los elementos del conjunto k-ésimo considerado representada mediante intervalos de confianza, cada argumento (distancia individual) $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, y $\hat{v}_i = \alpha v_i + (1-\alpha) p_i$, con $\alpha \in [0, 1]$ y $g(D)$ es una función monótona estrictamente continua.

10.4.7. Otras extensiones

Así sucesivamente se podría ir elaborando un gran número de otras extensiones a través de considerar diferentes características en la formulación. También obsérvese que las generalizaciones obtenidas en este apartado ya son bastante amplias ya que si se comparan con el operador OWA nos encontramos con extensiones de nivel elevado. Por ejemplo, el operador POWAWAD es una extensión al operador OWA de nivel 3 y el PIGOWAWAD una extensión de nivel 5. Así sucesivamente se podrían ir buscando casos más complejos como el *uncertain induced linguistic PGOWAWAD operator* (PUILGOWAWAD) que vendría a ser una extensión de nivel 7.

No obstante, se tiene que destacar lo comentado al principio de este capítulo. Es decir, el operador POWAWA y sus extensiones, más que ser una extensión al operador OWA, se trata de una nueva formulación general que unifica a una serie de conceptos fundamentales, en especial, a la probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA. Por ello, se tiene que ver como un nuevo punto de partida más general que lleva a todo un nuevo mundo de aplicaciones y extensiones posibles dentro de una formulación mucho más general en la cual se incluye al operador OWA como un caso particular.

Para finalizar, también cabe destacar un caso que puede resultar de gran utilidad en algunas situaciones como es el *induced heavy POWAWAD operator* (PIHOWAWAD). Para dos conjuntos X e Y, se puede definir de l siguiente forma.

Definición: Una función *PIHOWAWAD*: $R^n \times R^n \rightarrow R$ es un operador PIHOWAWAD de dimensión n si tiene un vector asociado W de dimensión n con $w_j \in [0, 1]$ y $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$, tal que:

$$PIHOWAWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j b_j \quad (10.97)$$

donde b_j es el valor $|x_i - y_i|$ de la tripleta PIHOWAWAD $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ con el j-ésimo más grande u_i, u_i es la variable de ordenación inducida, $|x_i - y_i|$ es la variable argumento representada mediante distancias, cada argumento $|x_i - y_i|$ tiene asociado una ponderación v_i con $1 \leq \sum_{i=1}^{n} v_i \leq n$, y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $1 \leq \sum_{i=1}^{n} p_i \leq n$, y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según b_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los u_i.

Como se puede observar, si todos los sumatorios son iguales a 1, entonces se obtiene el operador PIOWAWAD, y si son iguales a n, entonces se obtiene la distancia absoluta del operador PIOWAWAD.

Además, se podrían destacar los siguientes casos particulares.

- Si $C_1 = 1$, se obtiene el operador IHOWAD.
- Si $C_2 = 1$, se obtiene la distancia media ponderada *heavy* (HWAD).
- Si $C_3 = 1$, se obtiene la distancia probabilística *heavy*.
- Si $C_1 = 0$, se obtiene el *heavy probabilistic weighted averaging distance* (HPWAD).
- Si $C_2 = 0$, se obtiene el *probabilistic IHOWAD* (PIHOWAD).
- Si $C_3 = 0$, se obtiene el *induced heavy OWAWAD operator* (IHOWAWAD).

Y así, sucesivamente se podrían ir considerando un gran número de casos particulares a través de estudiar diferentes partes del operador PIHOWAWAD.

10.5. Otras consideraciones generales

Muchas otras extensiones y aplicaciones pueden ser desarrolladas siguiendo con la metodología comentada hasta ahora en la tesis y junto con los diferentes comentarios generales que se comentarán en el próximo capítulo sobre aplicabilidad de los operadores OWA.

Dentro de estas extensiones, en el ámbito de decisión o selección empresarial, resultan de interés el coeficiente de adecuación y el índice del máximo y el mínimo nivel. A continuación se presenta una breve definición de estos casos con el operador POWAWA.
En primer lugar se presenta el *POWAWA adequacy coefficient* (POWAWAAC) para dos conjuntos $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ y $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$

Definición. Un operador POWAWAAC de dimensión n, es una función *POWAWAAC*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAWAAC\ (A, E) = \sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j K_j \tag{10.98}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $k_i = [1 \wedge (1 - a_i + e_i)]$, cada argumento k_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según K_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los k_i.

A continuación, se presenta el caso generalizado mediante medias generalizadas. Es decir, mediante el *PGOWAWA adequacy coefficient* (PGOWAWAAC).

Definición. Un operador PGOWAWAAC de dimensión n es una función PGOWAWAAC: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ definida por:

$$PGOWAWAAC\ (A, E) = \left(\sum_{j=1}^{n} \hat{v}_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.99}$$

donde K_j representa el j-ésimo más grande de los $k_i = [1 \wedge (1 - a_i + e_i^{(k)})]$, λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$, las ponderaciones satisfacen que su suma es 1 y $w_j \in [0, 1]$, cada argumento k_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según K_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los k_i.
.

La siguiente definición hace referencia al caso aritmético con el índice del máximo y el mínimo nivel. Es decir con el *POWAWA index of maximum and minimum level* (POWAWAIMAM).

Definición. Un operador POWAWAIMAM de dimensión n, es una función *POWAWAIMAM*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene un vector de ponderaciones W asociado, con $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ y $w_j \in [0, 1]$ tal que:

$$POWAWAIMAM\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{10.100}$$

donde Q_j representa el j-ésimo más grande de todos los $q_i^y = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $q_i^z = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, $y + z = n$, cada argumento q_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según Q_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los q_i.

La versión generalizada del operador POWAWAIMAM es la siguiente. Obsérvese que entonces se obtiene el *PGOWAWA index of maximum and minimum level* (PGOWAWAIMAM).

Definición. Un operador PGOWAWAIMAM de dimensión n es una función PGOWAWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ que tiene asociado un vector de ponderaciones W con las siguientes propiedades:

(3) $w_j \in [0, 1]$
(4) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

y tal que

$$PGOWAWAIMAM\ (q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10.101}$$

donde Q_j representa el j-ésimo más grande de todos los $q_i^y = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ y los $q_i^z = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, $y + z = n$, cada argumento q_i tiene asociado una ponderación v_i con $\sum_{i=1}^{n} v_i = 1$ y $v_i \in [0, 1]$, una probabilidad p_i con $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ y $p_i \in [0, 1]$, $\hat{v}_j = C_1 w_j + C_2 v_j + C_3 p_j$, con C_1, C_2 y $C_3 \in [0, 1]$, $C_1 + C_2 + C_3 = 1$, y v_j y p_j son las ponderaciones v_i y p_i ordenadas según Q_j, es decir, según el j-ésimo más grande de los q_i y λ es un parámetro tal que $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Y así sucesivamente se podrían desarrollar muchas otras extensiones siguiendo con la metodología explicada para el resto de operadores OWAWA y OWA en general como por ejemplo:

- *Induced POWAWAAC*
- *Induced PGOWAWAAC*
- *Induced POWAWAIMAM*
- *Induced PGOWAWAIMAM*
- Etc.

Además, para cada caso se podrían estudiar sus propiedades, diferentes casos particulares y muchos otros aspectos que pudiesen resultar de interés.

11. Aplicabilidad de los operadores *OWA*

11.1. Introducción

11.1.1. Aplicabilidad en los métodos de gestión empresarial

La aplicabilidad de los operadores OWA en los métodos de gestión empresarial es muy amplia, en especial, en situaciones de decisión empresarial. La gran ventaja de poder utilizar los operadores OWA es la posibilidad de diseñar unos mecanismos de decisión que reflejan el grado de optimismo del decisor. De esta forma, el decisor puede tomar decisiones en función de sus intereses y sin tener que recurrir a mecanismos objetivos.

Además, cabe tener en consideración las ventajas de utilizar toda la amplia gama de extensiones a los operadores OWA propuestos en este trabajo. En estas extensiones, se añaden toda una serie de conceptos que permiten un mejor tratamiento de dichos problemas, ya sea mediante el uso de un modelo más generalizado, mediante distancias, mediante la media ponderada o mediante probabilidades.

A modo de resumen, podemos decir que la aplicabilidad de los OWA afecta a toda la empresa y puede proporcionar modelos de gestión en diferentes problemas como:

- Gestión financiera
- Gestión comercial
- Gestión estratégica
- Gestión de recursos humanos
- Gestión de la producción
- Etc.

Al analizar estos problemas, se pueden considerar diferentes procesos de decisión como son:

- Las decisiones en sentido amplio
  - Decisiones individuales
  - Decisiones de grupo
  - Decisiones secuenciales
- Los procesos de asignación
  - Con decisión individual
  - Con decisión de grupo
- Los procesos de agrupación
  - Con decisión individual
  - Con decisión de grupo
- Los procesos de ordenación
  - Con decisión individual
  - Con decisión de grupo

A su vez, no se tiene que olvidar la posibilidad de utilizar una amplia gama de instrumentos para el tratamiento de la incertidumbre en dichos problemas como son:

- Los intervalos de confianza
  - Tripletas
  - Cuádruplos
  - Etc.
- Los números borrosos
  - Números borrosos triangulares
  - Números borrosos trapezoidales
  - Números borrosos intervalo valorados
  - Números borrosos de tipo 2 y *n*.
  - Números borrosos L-R
  - Números borrosos generalizados
  - Números borrosos intervalo valorados generalizados
  - Números borrosos de tipo 2 y *n* generalizados
  - Números borrosos L-R (de tipo 2 y *n*, generalizados, etc.)
  - Etc.
- Las variables lingüísticas
  - Variables lingüísticas simples
    - Sin representación interna
    - Representación interna mediante números borrosos
    - Con conjuntos de términos lingüísticos continuos
  - Variables lingüísticas basadas en 2-tuplas
    - Versión original
    - Versión combinada con computación directa con palabras
  - Variables lingüísticas generalizadas
    - Simples
    - De 2-tuplas
  - Variables lingüísticas intervalo valoradas
  - Variables lingüísticas intervalo valoradas generalizadas (simples y de 2-tuplas)
  - Variables lingüísticas de tipo 2 y *n* (simples, de 2-tuplas, generalizadas, etc.)
  - Variables lingüísticas L-R (simples, generalizadas, de tipo 2 y *n*, etc.)
  - Etc.
- Los expertones
  - Simples
  - m-expertones
  - R-expertones
  - El contraexpertizaje
    - Con expertones simples
    - Con m-expertones
    - Con R-expertones
    - Etc.
  - Etc.
- Etc.

En el apartado 10.2, se analizará con más detalle todas estas posibilidades. Aun así, cabe destacar que sólo se mencionarán las posibles aplicaciones ya que el número de aplicaciones posibles es ilimitado.

11.1.2. Aplicabilidad en otros métodos de decisión

Los operadores OWA son unas técnicas de gran utilidad en la teoría de la decisión. Se pueden implementar en diferentes contextos decisionales (Alonso et al., 2006; 2008a; 2008b; Canós y Liern, 2008; Carlsson et al., 2003a; 2003b; Chiclana et al., 1998; 2001a; 2001b; 2007; 2008; Vanicek et al., 2008; Y.J. Xu y Da, 2008; Xu, 2007a; 2007b; 2007c; 2008b; 2008c; Xu y Chen, 2007; 2008; Xu et al., 2008; Xu y Yager, 2006; 2008; Yager, 1995a; 2004c; 2006a; 2006b; 2008a; 2008b; 2008c; Yager y Ribalov, 1996; Yager y Xu, 2006; Zarghami y Szidarovszky, 2008; Zarghami et al., 2008; Zopounidis y Pardalos, 1998; Zopounidis et al., 2001). A modo de ejemplo, se podrían destacar los siguientes métodos de decisión.

- La teoría de la evidencia
- El método de minimización del coste
- El AHP
- El TOPSIS
- Las decisiones de grupo
- Las decisiones secuenciales
- La utilidad
- Los procesos de asignación
- Los procesos de agrupación

En términos generales, en estos métodos se podrían utilizar diferentes tipos de operadores OWA como por ejemplo:

- *OWA operator*
- *IOWA operator*
- *HOWA operator*
- *GOWA operator*
- *OWAD operator*
- *GOWAD operator*
- *OWAWA operator*
- *GOWAWA operator*
- *OWAWAD operator*
- *GOWAWAD operator*
- *IP-OWA operator*
- *IP-OWAWA operator*
- Etc.

También se podrían utilizar diferentes técnicas para el tratamiento de la incertidumbre como por ejemplo:

- Los intervalos de confianza (tripletas, cuádruplos, etc.)
- Los números borrosos (triangulares, trapezoidales, generalizados, etc.)
- Las variables lingüísticas (simples, de 2-tuplas, generalizadas, etc.)
- Expertones
- Etc.

En algunos casos, también se podrían mezclar entre ellos. Por ejemplo:

- La teoría de la evidencia en la minimización del coste
- La teoría de la evidencia en el AHP
- La teoría de la evidencia en el TOPSIS
- Decisiones de grupo en la teoría de la evidencia
- Decisiones secuenciales en la teoría de la evidencia
- Utilidad en la teoría de la evidencia
- La teoría de la evidencia en los procesos de asignación
- La teoría de la evidencia en los procesos de agrupación
- La minimización del coste en el AHP
- Decisiones de grupo en la minimización del coste
- Decisiones secuenciales en la minimización del coste
- Minimización del coste mediante utilidades
- El AHP en el TOPSIS
- Decisiones de grupo en el AHP
- El AHP en las decisiones secuenciales
- El AHP en la teoría de la utilidad
- Decisiones de grupo en el TOPSIS
- El TOPSIS en las decisiones secuenciales
- El TOPSIS en la teoría de la utilidad
- Decisiones de grupo en las decisiones secuenciales
- Decisiones de grupo en la teoría de la utilidad
- Decisiones de grupo en los procesos de asignación
- Decisiones de grupo en los procesos de agrupación
- Decisiones secuenciales en la teoría de la utilidad
- La teoría de la utilidad en problemas de asignación
- La teoría de la utilidad en procesos de agrupación
- Etc.

Cabe destacar que también se podrían considerar el método de minimización del coste, el AHP, el TOPSIS y las decisiones secuenciales en los procesos de asignación y agrupación aunque su aplicabilidad sería más reducida y de carácter parcial.

11.1.3. Aplicabilidad de los OWA en las ciencias en general

La aplicabilidad de los operadores OWA es increíblemente amplia. A modo de resumen, se puede decir que son aplicables a cualquier problema que utilice medias aritméticas o ponderadas. En otras palabras, se podría establecer el siguiente enunciado o proposición:

“***La aplicabilidad de los operadores OWA y de la incertidumbre en general es ilimitada***”

Por tanto, conscientes de que la aplicabilidad es ilimitada, se llega a la conclusión de que únicamente se podrá conocer todas las posibles aplicaciones en grandes rasgos. De aquí, se podría establecer el siguiente enunciado:

“*Debido a que la aplicabilidad de los operadores OWA y de la incertidumbre en general es ilimitada, sólo se podrán conocer estas teorías en grandes rasgos*”

También es conveniente destacar que este enunciado es extensible a muchas especializaciones ya sea de los operadores OWA o del mundo *fuzzy* (incertidumbre) en general por el hecho de que la propia noción de incertidumbre es ilimitada.

“*A medida que se analizan especialidades de los operadores OWA y de la incertidumbre en general, se puede tener un mayor conocimiento de dichas áreas superior al caso general, pero debido a que las especialidades también abarcan una aplicabilidad ilimitada, su conocimiento sólo se podrá producir en grandes rasgos*”

Esto se demuestra en su versión más simple a partir de los intervalos, ya que estos pueden ser de tres números, de cuatro, y así sucesivamente de forma ilimitada. A día de hoy, puede que no se vea mucho sentido a esto pero puede que para los estudios de las próximas generaciones, ya sea dentro de unos siglos o dentro de unos milenios, etc., esto sí que resulte de utilidad. De aquí, se establecen las siguientes proposiciones básicas sobre la incertidumbre:

“*La propia noción de incertidumbre es ilimitada por el hecho de que siempre se podrá analizar con más detalle*”

Por tanto, en incertidumbre total, nunca podremos saber el resultado aunque podremos establecer un número ilimitado de estudios para hacer frente a ella de la mejor forma posible.

“En incertidumbre total no se puede predecir el resultado pero sí establecer un número ilimitado de estudios que reflejen correctamente la situación”

También se podría establecer el siguiente enunciado:

“El objetivo en incertidumbre es poder analizar el problema de la forma más completa posible para que el decisor sea consciente de la situación y a partir de aquí se mueva en una dirección o en otra”

A modo de resumen, estos son algunos de los principales enunciados que se pueden establecer sobre la aplicabilidad de los operadores OWA y del mundo *fuzzy* en general. Obviamente, se podrían establecer muchos más, pero hemos mencionado aquellos que consideramos de gran relevancia.

Al ser el operador OWA una técnica estadística y de gran utilidad en teoría de la decisión, se puede ver que inicialmente una parte importante de las aplicaciones irán en esta dirección. Al analizar aplicaciones en la estadística, se podrían considerar todo tipo de aplicaciones en donde se utilizan los conceptos de media aritmética y ponderada. Por ejemplo, se podrían destacar los problemas de:

- Temas *fuzzy* o similar
- Estadística descriptiva
- Modelos de regresión
- Inferencia estadística
- Estadística teórica
- Aspectos econométricos
- Temas actuariales
- Económicos
- Matemáticos
- Físicos
- Químicos
- Biológicos
- Etc.

En lo referente a la teoría de la decisión, destacar que la aplicabilidad de los operadores OWA se ha visto a lo largo de todo este trabajo. Por tanto, simplemente referirnos a la aplicabilidad que se ha observado a lo largo del trabajo y de este capítulo 10 exclusivamente dedicado a la aplicabilidad.

Y así sucesivamente, se podrían ir buscando y desarrollando muchas otras aplicaciones. Por tanto, en este trabajo hemos abierto un poco más las puertas para que la comunidad científica tenga un conocimiento mucho mayor de los operadores OWA, de sus extensiones y del mundo de la incertidumbre en general. Pero todavía queda mucho por hacer en el futuro.

11.2. Aplicabilidad en los métodos de gestión empresarial

11.2.1. Esquema general

La aplicabilidad de los operadores OWA en la empresa es muy amplia por ser unas técnicas de gran utilidad en teoría de la decisión. Como se ha comentado en el anterior apartado, la aplicabilidad de esta especialidad es ilimitada por muchas razones de entre las cuales se destaca la propia noción de incertidumbre.

Debido a que la aplicabilidad es ilimitada, es obvio que el doctorando sólo podrá desarrollar algunas de las posibles aplicaciones y dejar el camino abierto para trabajos futuros hechos por otras personas.

Para observar algunas de las posibles aplicaciones de los operadores OWA, se recomienda (Yager y Kacprzyk, 1997; Calvo et al., 2002). Véase también por ejemplo (Carlsson et al., 2003a; Figueira et al., 2005; Gil-Aluja, 1996; 1997; 1999; A.M. Gil-Lafuente, 2001; 2004; J. Gil-Lafuente, 1997; 2002; Jones et al., 1986; Kaufmann y Gil-Aluja, 1986; 1987; 1992; 1993; Kaufmann y Gupta, 1988; Ribeiro et al., 1998; Ruan et al., 2001; Zopounidis y Pardalos, 1998; Zopounidis et al., 2001). Aunque estos libros no analizan los operadores OWA en exceso, son diferentes problemas en donde la utilización de los operadores OWA podría resultar adecuada.

Haciendo un resumen general de las diferentes aportaciones que se podrían desarrollar a partir de esta tesis, tanto las ya elaboradas como las que están pendientes para investigación postdoctoral, se podrían destacar las siguientes.

En primer lugar, destacar la posibilidad de utilizar una amplia gama de operadores OWA con sus diferentes extensiones. Estos casos se muestran en el siguiente cuadro. Obsérvese que sólo se consideran los casos de mayor relevancia ya que sino el número de casos sería excesivamente elevado. Por ejemplo, obsérvese que en el caso de generalizados se incluye tanto el caso con medias generalizadas como el caso con medias cuasi-aritméticas. Se utiliza la denominación “generalizado”, para simplificar.

Simples	Generalizados	Con distancias	Con distancias generalizadas
OWA	GOWA	OWAD	GOWAD
IOWA	IGOWA	IOWAD	IGOWAD
HOWA	UGOWA	HOWAD	UGOWAD
UOWA	FGOWA	UOWAD	FGOWAD
FOWA	LGOWA	FOWAD	LGOWAD
LOWA	GHA	LOWAD	GHAD
HA	IUGOWA	IHOWAD	IUGOWAD
IHOWA	FIGOWA	UIOWAD	FIGOWAD
UIOWA	ILGOWA	FIOWAD	ILGOWAD
FIOWA	IULGOWA	ILOWAD	IULGOWAD
ILOWA	IGHA	IUHOWAD	IGHAD
IHA	UGHA	HAD	UGHAD
UHA	FGHA	IUHAD	FGHAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Con medias ponderadas	Con medias ponderadas generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
OWAWA	GOWAWA	OWAWAD	GOWAWAD
IOWAWA	IGOWAWA	IOWAWAD	IGOWAWAD
HOWAWA	UGOWAWA	HOWAWAD	UGOWAWAD
UOWAWA	FGOWAWA	UOWAWAD	FGOWAWAD
FOWAWA	LGOWAWA	FOWAWAD	LGOWAWAD
LOWAWA	IUGOWAWA	LOWAWAD	IUGOWAWAD
IHOWAWA	FIGOWAWA	IHOWAWAD	FIGOWAWAD
IUOWAWA	ILGOWAWA	IUOWAWAD	ILGOWAWAD
IFOWAWA	IULGOWAWA	IFOWAWAD	IULGOWAWAD
ILOWAWA	Etc.	ILOWAWAD	Etc.
IUHOWAWA		IUHOWAWAD	
FIHOWAWA		FIHOWAWAD	
IULOWAWA		IULOWAWAD	
Etc.		Etc.	

Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas	Con distancias probabilísticas	Dist. Prob. generalizadas
POWA	PGOWA	POWAD	PGOWAD
PIOWA	PIGOWA	PIOWAD	PIGOWAD
PUOWA	PUGOWA	PUOWAD	PUGOWAD
PFOWA	PFGOWA	PFOWAD	PFGOWAD
PLOWA	PLGOWA	PLOWAD	PLGOWAD
PIUOWA	PIUGOWA	PIUOWAD	PIUGOWAD
PFIOWA	PFIGOWA	PFIOWAD	PFIGOWAD
PILOWA	PILGOWA	PILOWAD	PILGOWAD
PIULOWA	PIULGOWA	PIULOWAD	PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
POWAWA	PGOWAWA	POWAWAD	PGOWAWAD
PIOWAWA	PIGOWAWA	PIOWAWAD	PIGOWAWAD
PUOWAWA	PUGOWAWA	PUOWAWAD	PUGOWAWAD
PFOWAWA	PFGOWAWA	PFOWAWAD	PFGOWAWAD
PLOWAWA	PLGOWAWA	PLOWAWAD	PLGOWAWAD
PIUOWAWA	PIUGOWAWA	PIUOWAWAD	PIUGOWAWAD
PFIOWAWA	PFIGOWAWA	PFIOWAWAD	PFIGOWAWAD
PILOWAWA	PILGOWAWA	PILOWAWAD	PILGOWAWAD
PIULOWAWA	PIULGOWAWA	PIULOWAWAD	PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Como se puede observar, el número de posibles casos a considerar es incalculable. Además, dentro de los operadores OWA, se pueden considerar un gran número de casos particulares o familias de operadores OWA, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- Máximo y mínimo
- Media aritmética
- Media ponderada
- Criterio de Hurwicz
- Step-OWA
- Window-OWA
- S-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-OWA
- Olympic-OWA (Simple y generalizado)
- Median-OWA
- Centered-OWA
- Gaussian-OWA
- Dependent-OWA
- Maximal entropy OWA (MEOWA) weights
- Minimal variability OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-OWA
- Nonmonotonic-OWA
- Etc.

Obsérvese que cuando hablamos de intervalos de confianza (UOWA y extensiones), de números borrosos (FOWA y extensiones), de variables lingüísticas (LOWA y extensiones), etc., estamos considerando todas sus diferentes formas y casos particulares comentados en el apartado 10.1.1.

También destacar la posibilidad de utilizar otros métodos de decisión como los comentados en el apartado 10.1.2. Por ejemplo, se podrían destacar los siguientes:

- La teoría de la evidencia de Dempster-Shafer
- La minimización del coste
- El AHP
- El TOPSIS
- Las decisiones de grupo
- Las decisiones secuenciales
- La teoría de la utilidad
- Los procesos de selección
- Los procesos de asignación
- Los procesos de agrupación
- Los procesos de ordenación
- Etc.

Dentro de lo que se denomina como procesos de selección, aparecerían los conceptos de coeficiente de adecuación y el índice del máximo y el mínimo nivel los cuales han sido estudiados en el capítulo 7 utilizando diferentes tipos de operadores OWA y sus extensiones. Obsérvese, que al utilizar operadores OWA, estos índices se conocen como OWAAC y OWAIMAM, respectivamente. Entonces, a modo de resumen, se podría destacar los siguientes casos a aplicar en diferentes problemas empresariales.

OWAAC	OWAWAAC	POWAAC
IOWAAC	IOWAWAAC	PIOWAAC
HOWAAC	HOWAWAAC	PUOWAAC
UOWAAC	UOWAWAAC	PHAAC
HAAC	GOWAWAAC	PGOWAAC
WOWAAC	IGOWAWAAC	PIGOWAAC
GOWAAC	UGOWAWAAC	POWAWAAC
IGOWAAC	UIGOWAWAAC	PIOWAWAAC
UGOWAAC	Etc.	PGOWAWAAC
HGAAC		PIGOWAWAAC
Etc.		PUIGOWAWAAC
		Etc.

OWAIMAM	OWAWAIMAM	POWAIMAM
IOWAIMAM	IOWAWAIMAM	PIOWAIMAM
HOWAIMAM	HOWAWAIMAM	PUOWAIMAM
UOWAIMAM	UOWAWAIMAM	PHAIMAM
HAIMAM	GOWAWAIMAM	PGOWAIMAM
WOWAIMAM	IGOWAWAIMAM	PIGOWAIMAM
GOWAIMAM	UGOWAWAIMAM	POWAWAIMAM
IGOWAIMAM	UIGOWAWAIMAM	PIOWAWAIMAM
UGOWAIMAM	Etc.	PGOWAWAIMAM
HGAIMAM		PIGOWAWAIMAM
Etc.		PUIGOWAWAIMAM
		Etc.

Obviamente, en estos casos también se podría considerar lo comentado anteriormente sobre utilizar una gran variedad de operadores OWA, diferentes casos particulares y diferentes instrumentos para tratar la información incierta disponible.

11.2.2. Operadores OWA en la gestión estratégica

La aplicabilidad de los operadores OWA en la gestión estratégica es muy amplia ya que se pueden considerar un gran número de situaciones, etc. Como se ha comentado en el apartado 10.1.3., la aplicabilidad es ilimitada. A modo de resumen, se puede decir que los principales problemas irían orientados en problemas decisionales relacionados con el proceso de decisión o selección, asignación y agrupación de estrategias.

Obsérvese que al hablar de estrategias, se puede estar refiriendo a una amplia gama de situaciones de entre las que se destacan las siguientes:

- Estrategias generales
    - Política general del próximo ejercicio
    - Grandes decisiones
    - Etc.
- Estrategias financieras
    - Estrategias de inversión
    - Estrategias de financiación
    - Etc.
- Estrategias comerciales
    - Estrategias de producto
    - Estrategias de precio
    - Estrategias de promoción
    - Estrategias de distribución
    - Etc.
- Estrategias de producción
- Estrategias de recursos humanos
- Etc.

Para llevar a cabo estas estrategias, se podría utilizar cualquiera de las técnicas comentadas en el apartado 10.2.1. Es decir:

- Procesos de selección (y ordenación) de estrategias
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión que a su vez pueden utilizar o no los operadores OWA
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de asignación de estrategias
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de agrupación de estrategias
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)

    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.

11.2.3. Operadores OWA en la gestión financiera

La aplicabilidad de los operadores OWA en la gestión financiera es muy amplia. Podríamos establecer como punto de partida, las diferentes estrategias financieras a desarrollar comentadas en el apartado 10.2.2. A partir de aquí, se observan diferentes ámbitos de aplicabilidad de entre los cuales se destacan la inversión y la financiación.

A modo de resumen, se podrían considerar los siguientes problemas:

- Gestión de la financiación
    - Análisis de productos financieros
    - Análisis de la estructura financiera de la empresa
    - Análisis de la situación financiera de la empresa
    - Etc.
- Gestión de las inversiones
    - Análisis de inversiones disponibles y potenciales
    - Análisis de inversión o desinversión
    - Análisis de diferentes tipos de inversiones
    - Sectores para la inversión
    - Etc.
- Gestión de otro proyectos financieros
- Gestión de la tesorería, del capital y de las reservas
- Etc.

Para llevar a cabo esta gestión financiera, se podría utilizar cualquiera de las técnicas mencionadas en el apartado 10.2.1. Por ejemplo, se podría destacar:

- Procesos de selección (y ordenación) financiera o de inversiones
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de asignación financiera o de inversiones
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de agrupación financiera o de inversiones
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.

11.2.4. Operadores OWA en la gestión de los recursos humanos

La aplicabilidad de los operadores OWA en la gestión de los recursos humanos es muy amplia, pero a modo de resumen se puede destacar su aplicación en problemas de selección, asignación y agrupación de recursos humanos.

Cuando se habla de recursos humanos, se habla de una gran variedad de situaciones como pueden ser:

- Directivos (generales, financieros, comerciales, etc.)
- Rangos medios de una empresa (responsable, técnico, etc.)
- Otros puestos en la empresa (administrativo, obrero, transportista, etc.)
- Deportistas (futbolistas, tenistas, etc.)
- Recursos humanos en el sector público (políticos, funcionarios, etc.)
- Etc.

Analizando los problemas, se podría elaborar un breve esquema de posibles casos, como son los siguientes:

- Procesos de selección (y ordenación) de recursos humanos
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de asignación de recursos humanos
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de agrupación de recursos humanos
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.

11.2.5. Operadores OWA en la gestión de productos en general

Al analizar la aplicabilidad de los operadores OWA en la gestión de productos en general, se tiene que tener en cuenta que abarca mucho más que a la propia empresa. En muchos casos, se podría decir que este aspecto es decisivo para el análisis de las decisiones de los consumidores. Esto se produce debido a que cualquier persona en su vida cotidiana está constantemente tomando decisiones, y en muchos de estos casos tomando decisiones sobre productos. Por tanto, este problema se convierte de gran relevancia en muchas situaciones.

A modo orientativo, considerando tanto problemas de la empresa como de los consumidores, se puede estar considerando diferentes productos como:

- En la empresa
    - Gestión de inmovilizado (material, inmaterial, etc.)
    - Gestión de existencias
    - Gestión de otros productos
    - Etc.
- En los consumidores
    - Vivienda
    - Productos de alta tecnología (ordenadores, teléfonos móviles, etc.)
    - Productos de tecnología media (coches, electrodomésticos, etc.)
    - Productos de tecnología baja (alimentos, muebles, etc.)
    - Viajes
    - Etc.
- Etc.

Analizando estos problemas, se puede establecer el siguiente esquema resumido de técnicas para el tratamiento de dichos problemas:

- Procesos de selección (y ordenación) de productos
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de asignación de productos
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.
- Procesos de agrupación de productos
    - Simples
    - Con OWAs y sus extensiones
    - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
    - Con diferentes instrumentos para representar la información
    - Etc.

11.2.6. Operadores OWA en la gestión de la empresa en general

Además de las aplicaciones comentadas, también se podrían considerar otros aspectos de la empresa que podrían quedar ubicados en otros ámbitos como por ejemplo:

- La gestión de clientes
- La gestión de proveedores
- La gestión de las deudas
- La gestión del precio
- La gestión publicitaria
- La gestión de la producción
- Etc.

Estos y otros aspectos también podrían verse afectados por diferentes problemas de decisión de entre los cuales se vuelven a destacar los mismos. Es decir:

- Procesos de selección (y ordenación)
  - Simples
  - Con OWAs y sus extensiones
  - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
  - Con diferentes instrumentos para representar la información
  - Etc.
- Procesos de asignación
  - Simples
  - Con OWAs y sus extensiones
  - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
  - Con diferentes instrumentos para representar la información
  - Etc.
- Procesos de agrupación
  - Simples
  - Con OWAs y sus extensiones
  - Con otros métodos de decisión (con y sin OWAs)
  - Con diferentes instrumentos para representar la información
  - Etc.

Para más información, véase el esquema general elaborado en el apartado 10.2.2.

11.2.7. Operadores OWA en otros problemas de decisión

Además de estos problemas empresariales, existen muchos otros problemas en los cuales se llevan a cabo procesos de decisión. La realidad es que el proceso de decisión se produce en todos los ámbitos y en cualquier sentido. Por ello, podemos decir que están constantemente entre la gente y se producen de forma ilimitada ya que cualquier acto implica una decisión. Desde la más simple señal que se da al cuerpo humano para que ejecute una acción hasta los distintos procesos selectivos de optar por una dirección u otra. Obviamente las posibilidades no consideradas hasta ahora son incalculables, pero a modo de resumen para que ilustre un poco la amplia gama de decisiones existentes, se destacan las siguientes:

- Decisiones económicas
    - Decisiones empresariales
    - Decisiones económicas familiares
    - Decisiones económicas nacionales
    - Decisiones económicas internacionales
    - Etc.
- Decisiones políticas
    - Decisiones globales
    - Decisiones internas de un país
    - Acciones específicas
    - Etc.
- Decisiones personales
    - Escoger unos estudios
    - Decisiones sobre ocio y pareja
    - Decisiones familiares
    - Decisiones individuales
    - Decisiones en grupo
    - Etc.
- Decisiones inconscientes
    - Instrucciones del cuerpo humano
    - Decisiones sin razonamiento
    - Etc.
- Decisiones de trabajo
    - Escoger un trabajo u otro
    - Escoger una línea de investigación u otra
    - Escoger unos lugares de investigación, publicación, etc.
    - Etc.
- Etc.

Y así sucesivamente, se podrían considerar muchas otras situaciones posibles de decisión, en los cuales, se podría utilizar muchas de las técnicas comentadas en los anteriores apartados. Normalmente el estudio del proceso de decisión se lleva cuando se considera que la decisión es lo suficientemente significativa como para dedicar un tiempo a su estudio consciente y basado en el razonamiento.

11.3. Aplicabilidad en otros métodos de decisión

11.3.1. Operador OWA en la teoría de la evidencia

La utilización del operador OWA y sus extensiones en la teoría de la evidencia, ha sido una de las principales líneas de investigación que se han llevado a cabo en esta fase inicial predoctoral. Obviamente, todos los otros aspectos comentados en la tesis también pueden ser estudiados en detalle con publicaciones en revista, etc. Desafortunadamente, hasta ahora no ha sido posible considerar muchos de estos casos (capítulos 8, 9, 10.3.3, 10.3.4. 10.3.5, etc.) por falta de tiempo. Obviamente, esperamos poder publicar todas (o los aspectos principales) estas nuevas aportaciones en la comunidad científica.

En el caso de la teoría de la evidencia, o también conocida como de Dempster-Shafer, sí se han desarrollado diferentes publicaciones sobre nuevas aportaciones (Casanovas y Merigó, 2007; 2008a; 2008b; 2008c; Merigó y Casanovas, 2006; 2007b; 2008d; 2008f; 2008m; 2008p; 2008s; 2009b; Merigó et al., 2007; 2008a; 2008b).

Para más información sobre el funcionamiento de la teoría de Dempster-Shafer, véase las referencias mencionadas en el párrafo anterior y las aportadas por otros autores como (Dempster, 1967; 1968; Denouex, 1999; 2000; Engemann et al., 1996; Le et al., 2007; Reformat y Yager, 2008; Shafer, 1976; Srivastava y Mock, 2002; Yager, 1992b; 2001; 2002c; 2004a; 2004d; Yager et al., 1994; Yager y Liu, 2008) .

Haciendo un resumen general de las diferentes aportaciones que se podrían desarrollar a partir de esta tesis, tanto las ya elaboradas como las que están pendientes para investigación postdoctoral, se podrían destacar las siguientes.

En primer lugar, destacar la posibilidad de utilizar una amplia gama de operadores OWA con sus diferentes extensiones. Estos casos se muestran en el siguiente cuadro. Obsérvese que sólo se consideran los casos de mayor relevancia ya que sino el número de casos sería excesivamente elevado. Por ejemplo, obsérvese que en el caso de generalizados se incluye tanto el caso con medias generalizadas como el caso con medias cuasi-aritméticas. Se utiliza la denominación “generalizado”, para simplificar.

Simples	Generalizados	Con distancias	Con distancias generalizadas
OWA	GOWA	OWAD	GOWAD
IOWA	IGOWA	IOWAD	IGOWAD
HOWA	UGOWA	HOWAD	UGOWAD
UOWA	FGOWA	UOWAD	FGOWAD
FOWA	LGOWA	FOWAD	LGOWAD
LOWA	GHA	LOWAD	GHAD
HA	IUGOWA	IHOWAD	IUGOWAD
IHOWA	FIGOWA	UIOWAD	FIGOWAD
UIOWA	ILGOWA	FIOWAD	ILGOWAD
FIOWA	IULGOWA	ILOWAD	IULGOWAD
ILOWA	IGHA	IUHOWAD	IGHAD
IHA	UGHA	HAD	UGHAD
UHA	FGHA	IUHAD	FGHAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Con medias ponderadas	Con medias ponde-radas generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
OWAWA	GOWAWA	OWAWAD	GOWAWAD
IOWAWA	IGOWAWA	IOWAWAD	IGOWAWAD
HOWAWA	UGOWAWA	HOWAWAD	UGOWAWAD
UOWAWA	FGOWAWA	UOWAWAD	FGOWAWAD
FOWAWA	LGOWAWA	FOWAWAD	LGOWAWAD
LOWAWA	IUGOWAWA	LOWAWAD	IUGOWAWAD
IHOWAWA	FIGOWAWA	IHOWAWAD	FIGOWAWAD
IUOWAWA	ILGOWAWA	IUOWAWAD	ILGOWAWAD
IFOWAWA	IULGOWAWA	IFOWAWAD	IULGOWAWAD
ILOWAWA	Etc.	ILOWAWAD	Etc.
IUHOWAWA		IUHOWAWAD	
FIHOWAWA		FIHOWAWAD	
IULOWAWA		IULOWAWAD	
Etc.		Etc.	

Con probabilidades	Con generalizacio-nes probabilísticas	Con distancias probabilísticas	Dist. Prob. generalizadas
POWA	PGOWA	POWAD	PGOWAD
PIOWA	PIGOWA	PIOWAD	PIGOWAD
PUOWA	PUGOWA	PUOWAD	PUGOWAD
PFOWA	PFGOWA	PFOWAD	PFGOWAD
PLOWA	PLGOWA	PLOWAD	PLGOWAD
PIUOWA	PIUGOWA	PIUOWAD	PIUGOWAD
PFIOWA	PFIGOWA	PFIOWAD	PFIGOWAD
PILOWA	PILGOWA	PILOWAD	PILGOWAD
PIULOWA	PIULGOWA	PIULOWAD	PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
POWAWA	PGOWAWA	POWAWAD	PGOWAWAD
PIOWAWA	PIGOWAWA	PIOWAWAD	PIGOWAWAD
PUOWAWA	PUGOWAWA	PUOWAWAD	PUGOWAWAD
PFOWAWA	PFGOWAWA	PFOWAWAD	PFGOWAWAD
PLOWAWA	PLGOWAWA	PLOWAWAD	PLGOWAWAD
PIUOWAWA	PIUGOWAWA	PIUOWAWAD	PIUGOWAWAD
PFIOWAWA	PFIGOWAWA	PFIOWAWAD	PFIGOWAWAD
PILOWAWA	PILGOWAWA	PILOWAWAD	PILGOWAWAD
PIULOWAWA	PIULGOWAWA	PIULOWAWAD	PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Como se puede observar, el número de posibles casos a considerar es incalculable y más si se tiene en cuenta que cada agregación interna de los elementos focales se puede utilizar un operador OWA distinto. Cabe destacar que en el caso que se utilizase el mismo operador OWA en toda la agregación, por defecto el caso más completo que abarca al resto, la agregación se conocerá como BS-OWA, BS-IOWA, etc.

Además, dentro de los operadores OWA, se pueden considerar un gran número de casos particulares o familias de operadores OWA, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- Máximo y mínimo
- Media aritmética
- Media ponderada
- Criterio de Hurwicz
- Step-OWA
- Window-OWA
- S-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-OWA
- Olympic-OWA (Simple y generalizado)
- Median-OWA
- Centered-OWA
- Gaussian-OWA
- Dependent-OWA
- Maximal entropy OWA (MEOWA) weights
- Minimal variability OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-OWA
- Nonmonotonic-OWA
- Etc.

Obsérvese también la posibilidad de considerar cualquier tipo de intervalo de confianza (tripletas, cuádruplos, etc.) en el UOWA y extensiones, cualquier tipo de número borroso (triangular, trapezoidal, generalizado, intervalo valorado, etc.) en el FOWA y extensiones, cualquier tipo de variable lingüística (simple, de 2-tuplas, generalizadas, etc.) en el LOWA y extensiones, etc.

También destacar lo comentado en el apartado 10.1.2. sobre combinar el método de Dempster-Shafer con otros métodos de decisión como por ejemplo:

- Con la minimización del coste
- Con el AHP
- Con el TOPSIS
- Con las decisiones de grupo
- Con las decisiones secuenciales
- Con la teoría de la utilidad
- En los procesos de asignación
- En los procesos de agrupación

Obviamente, en estos casos también se podría considerar lo comentado anteriormente sobre utilizar una gran variedad de operadores OWA, diferentes casos particulares y diferentes instrumentos para tratar la información incierta disponible.

Por último, decir que la aplicabilidad de estos métodos es muy amplia y sigue un poco las posibilidades comentadas en los apartados 10.1.1 y 10.1.3. Por tanto, a modo de resumen, se podría desarrollar diferentes aplicaciones sobre estos métodos en las siguientes direcciones:

- En estadística en general
- En teoría de la decisión
- En ciencias actuariales
- En la mayoría de problemas en donde interviene la noción de probabilidad
- En problemas empresariales como:
    - Gestión financiera
    - Gestión estratégica
    - Gestión comercial
    - Gestión de la producción
    - Etc.
- Etc.

11.3.2. Operador OWA en el método de minimización del coste

La utilización de los operadores OWA en el método de minimización del coste (Savage, 1951) es bastante reciente (Yager, 2004a; Merigó y Casanovas, 2006c; 2007c; 2008a; 2008b). En los artículos mencionados, los del doctorando disponibles en el anexo de artículos, se puede consultar más información sobre el funcionamiento básico de este método.

Haciendo un resumen general de las aportaciones que se podrían desarrollar en este ámbito de investigación, se podrían destacar las siguientes. En primer lugar, se considerarán las diferentes aportaciones posibles mediante los operadores OWA y sus extensiones. En este caso también se simplifica las generalizaciones con medias generalizadas o cuasi-aritméticas utilizando la denominación "generalizado".

Simples	Generalizados	Con medias ponderadas	Con medias ponderadas generalizadas
MR-OWA	MR-GOWA	MR-OWAWA	MR-GOWAWA
MR-IOWA	MR-IGOWA	MR-IOWAWA	MR-IGOWAWA
MR-HOWA	MR-UGOWA	MR-HOWAWA	MR-UGOWAWA
MR-UOWA	MR-FGOWA	MR-UOWAWA	MR-FGOWAWA
MR-FOWA	MR-LGOWA	MR-FOWAWA	MR-LGOWAWA
MR-LOWA	MR-GHA	MR-LOWAWA	MR-IUGOWAWA
MR-HA	MR-IUGOWA	MR-IHOWAWA	MR-FIGOWAWA
MR-UIOWA	MR-FIGOWA	MR-IUOWAWA	MR-ILGOWAWA
MR-IHOWA	MR-IGHA	MR-IFOWAWA	MR-IULGOWAWA
MR-IHA	MR-UGHA	MR-ILOWAWA	Etc.
MR-UHA	MR-UIGHA	Etc.	
MR-UIHA	MR-ILGHA		
MR-ILHA	Etc.		
MR-UIHOWA			
Etc.			

Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas	Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. Prob. Generalizadas
MR-POWA	MR-PGOWA	MR-POWAWA	MR-PGOWAWA
MR-PIOWA	MR-PIGOWA	MR-PIOWAWA	MR-PIGOWAWA
MR-PUOWA	MR-PUGOWA	MR-PUOWAWA	MR-PUGOWAWA
MR-PFOWA	MR-PFGOWA	MR-PFOWAWA	MR-PFGOWAWA
MR-PLOWA	MR-PLGOWA	MR-PLOWAWA	MR-PLGOWAWA
MR-PIUOWA	MR-PIUGOWA	MR-PIUOWAWA	MR-PIUGOWAWA
MR-PFIOWA	MR-PFIGOWA	MR-PFIOWAWA	MR-PFIGOWAWA
MR-PILOWA	MR-PILGOWA	MR-PILOWAWA	MR-PILGOWAWA
MR-PIULOWA	MR-PIULGOWA	MR-PIULOWAWA	MR-PIULGOWAWA
MR-PHOWA	Etc.	Etc.	Etc.
MR-PIHOWA			
Etc.			

Con distancias	Con distancias generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
MR-OWAD	MR-GOWAD	MR-OWAWAD	MR-GOWAWAD
MR-IOWAD	MR-IGOWAD	MR-IOWAWAD	MR-IGOWAWAD
MR-UOWAD	MR-UGOWAD	MR-UOWAWAD	MR-UGOWAWAD
MR-HOWAD	MR-UIGOWAD	MR-HOWAWAD	MR-UIGOWAWAD
MR-UIOWAD	MR-LGOWAD	MR-UIOWAWAD	MR-LGOWAWAD
MR-LOWAD	MR-ILGOWAD	MR-LOWAWAD	MR-ILGOWAWAD
MR-ILOWAD	MR-FGOWAD	MR-FOWAWAD	MR-FGOWAWAD
MR-IHOWAD	MR-GHAD	MR-ILOWAWAD	MR-FIGOWAWAD
MR-FOWAD	MR-IGHAD	MR-IHOWAWAD	MR-IULGOWAWAD
MR-HAD	Etc.	MR-FIOWAWAD	Etc.
Etc.		Etc.	

Con distancias probabilísticas	Dist. Prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
MR-POWAD	MR-PGOWAD	MR-POWAWAD	MR-PGOWAWAD
MR-PIOWAD	MR-PIGOWAD	MR-PIOWAWAD	MR-PIGOWAWAD
MR-PUOWAD	MR-PUGOWAD	MR-PUOWAWAD	MR-PUGOWAWAD
MR-PFOWAD	MR-PFGOWAD	MR-PFOWAWAD	MR-PFGOWAWAD
MR-PLOWAD	MR-PLGOWAD	MR-PLOWAWAD	MR-PLGOWAWAD
MR-PIUOWAD	MR-PIUGOWAD	MR-PIUOWAWAD	MR-PIUGOWAWAD
MR-PFIOWAD	MR-PFIGOWAD	MR-PFIOWAWAD	MR-PFIGOWAWAD
MR-PILOWAD	MR-PILGOWAD	MR-PILOWAWAD	MR-PILGOWAWAD
MR-PIULOWAD	MR-PIULGOWAD	Etc.	Etc.
Etc.	Etc.		

Obsérvese que los casos con distancias se han considerado como último aspecto. La razón se debe a que la minimización del coste ya hace un proceso de comparación mediante distancias. Por ello, puede resultar algo abstracto la utilización de otro proceso de distancias.

En este caso, también se podría considerar diferentes familias de operadores OWA a utilizar en el modelo con cualquier tipo de extensión. Por ejemplo:

- Máximo y mínimo
- Media aritmética
- Media ponderada
- Criterio de Hurwicz
- Step-MR-OWA
- Window-MR-OWA
- S-MR-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-MR-OWA
- Olympic-MR-OWA (Simple y generalizado)
- Median-MR-OWA
- Centered-MR-OWA

- Gaussian-MR-OWA
- Dependent-MR-OWA
- Maximal entropy MR-OWA (ME-MR-OWA) weights
- Minimal variability MR-OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-MR-OWA
- Nonmonotonic-MR-OWA
- Etc.

También obsérvese en este caso la posibilidad de utilizar cualquier tipo de intervalo de confianza en los operadores MR-UOWA y sus extensiones, cualquier tipo de número borroso en el operador MR-FOWA y sus extensiones, cualquier tipo de variable lingüística en el operador MR-LOWA y sus extensiones, etc.

Otro aspecto a considerar sería el combinar la minimización del coste con otros métodos como por ejemplo:

- Con la teoría de la evidencia
- Con el AHP
- Con el TOPSIS
- Con las decisiones de grupo
- Con las decisiones secuenciales
- Con la teoría de la utilidad
- En los procesos de asignación
- En los procesos de agrupación

Además, se podrían considerar en estas combinaciones, todas las diferentes extensiones disponibles sobre el OWA y el MR-OWA, sus casos particulares y las diferentes técnicas disponibles para el tratamiento de información incierta.

Por último, mencionar la aplicabilidad de este método. Principalmente, su orientación está dirigida a la teoría de la decisión, pero también se podrían buscar otras aplicaciones. A modo de resumen, se pueden destacar las siguientes aplicaciones:

- En teoría de la decisión
- En teoría de la decisión empresarial que afectaría a problemas como:
    - Gestión financiera
    - Gestión estratégica
    - Gestión comercial
    - Gestión de la producción
    - Etc
- En estadística en general
- Etc.

11.3.3. Operador OWA en el *Analytic Hierarchy Process* (AHP)

La utilización de los operadores OWA en el método analítico jerárquico, del inglés *Analytc Hierarchy Process* (*AHP*), únicamente ha sido considerado en trabajos muy puntuales como (Yager y Kelman, 1999; Smith, 2004). Para más información sobre el funcionamiento del AHP, se recomienda consultar (Figueira et al., 2005; Saaty, 1977; 1978; 1980; Triantaphyllou, 2001). En el futuro, se espera poder abrir una nueva línea de investigación con trabajos postdoctorales sobre estos temas. A continuación, se muestra un breve resumen de las diferentes aportaciones que se podrían realizar siguiendo con estas ideas. Obviamente, debido al gran número de trabajos posibles a desarrollar, resulta imposible que el doctorando se encargue de todos los trabajos, por lo que se espera la participación de otras personas, ya sean del grupo de investigación, otros colaboradores u otros investigadores de la comunidad científica en general.

En primer lugar, se considerarán las diferentes aportaciones posibles mediante los operadores OWA y sus extensiones. En este caso también se simplifica a "generalizado" las generalizaciones con medias generalizadas o cuasi-aritméticas.

Simples	Generalizados	Con medias ponderadas
AHP-OWA	AHP-GOWA	AHP-OWAWA
AHP-IOWA	AHP-IGOWA	AHP-IOWAWA
AHP-HOWA	AHP-UGOWA	AHP-HOWAWA
AHP-UOWA	AHP-FGOWA	AHP-UOWAWA
AHP-FOWA	AHP-LGOWA	AHP-FOWAWA
AHP-LOWA	AHP-GHA	AHP-LOWAWA
AHP-HA	AHP-IUGOWA	AHP-IHOWAWA
AHP-IHOWA	AHP-FIGOWA	AHP-IUOWAWA
AHP-UIOWA	AHP-ILGOWA	AHP-IFOWAWA
AHP-FIOWA	AHP-IULGOWA	AHP-ILOWAWA
AHP-ILOWA	AHP-IGHA	AHP-IUHOWAWA
AHP-UIHA	AHP-UGHA	AHP-FIHOWAWA
AHP-IWOWA	AHP-FGHA	AHP-IULOWAWA
AHP-IWLOWA	AHP-FIGHA	Etc.
AHP-UIWOWA	AHP-UIGHA	
Etc.	Etc.	

Con medias ponderadas generalizadas	Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas
AHP-GOWAWA	AHP-POWA	AHP-PGOWA
AHP-IGOWAWA	AHP-PIOWA	AHP-PIGOWA
AHP-UGOWAWA	AHP-PUOWA	AHP-PUGOWA
AHP-FGOWAWA	AHP-PFOWA	AHP-PFGOWA
AHP-LGOWAWA	AHP-PLOWA	AHP-PLGOWA
AHP-IUGOWAWA	AHP-PIUOWA	AHP-PIUGOWA
AHP-FIGOWAWA	AHP-PFIOWA	AHP-PFIGOWA
AHP-ILGOWAWA	AHP-PILOWA	AHP-PILGOWA
AHP-IULGOWAWA	AHP-PIULOWA	AHP-PIULGOWA
Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. Generalizadas
AHP-POWAWA	AHP-PGOWAWA
AHP-PIOWAWA	AHP-PIGOWAWA
AHP-PUOWAWA	AHP-PUGOWAWA
AHP-PFOWAWA	AHP-PFGOWAWA
AHP-PLOWAWA	AHP-PLGOWAWA
AHP-PIUOWAWA	AHP-PIUGOWAWA
AHP-PFIOWAWA	AHP-PFIGOWAWA
AHP-PILOWAWA	AHP-PILGOWAWA
AHP-PIULOWAWA	AHP-PIULGOWAWA
Etc.	Etc.

Con distancias	Con distancias generalizadas	Con distancias ponderadas
AHP-OWAD	AHP-GOWAD	AHP-OWAWAD
AHP-IOWAD	AHP-IGOWAD	AHP-IOWAWAD
AHP-HOWAD	AHP-UGOWAD	AHP-HOWAWAD
AHP-UOWAD	AHP-FGOWAD	AHP-UOWAWAD
AHP-FOWAD	AHP-LGOWAD	AHP-FOWAWAD
AHP-LOWAD	AHP-GHAD	AHP-LOWAWAD
AHP-IHOWAD	AHP-IUGOWAD	AHP-IHOWAWAD
AHP-UIOWAD	AHP-FIGOWAD	AHP-IUOWAWAD
AHP-FIOWAD	AHP-ILGOWAD	AHP-IFOWAWAD
AHP-ILOWAD	AHP-IULGOWAD	AHP-ILOWAWAD
AHP-IUHOWAD	AHP-IGHAD	AHP-IUHOWAWAD
AHP-HAD	AHP-UGHAD	AHP-FIHOWAWAD
AHP-IUHAD	AHP-FGHAD	AHP-IULOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.

Dist. ponderadas generalizadas	Con distancias probabilísticas	Dist. probabilísticas generalizadas
AHP-GOWAWAD	AHP-POWAD	AHP-PGOWAD
AHP-IGOWAWAD	AHP-PIOWAD	AHP-PIGOWAD
AHP-UGOWAWAD	AHP-PUOWAD	AHP-PUGOWAD
AHP-FGOWAWAD	AHP-PFOWAD	AHP-PFGOWAD
AHP-LGOWAWAD	AHP-PLOWAD	AHP-PLGOWAD
AHP-IUGOWAWAD	AHP-PIUOWAD	AHP-PIUGOWAD
AHP-FIGOWAWAD	AHP-PFIOWAD	AHP-PFIGOWAD
AHP-ILGOWAWAD	AHP-PILOWAD	AHP-PILGOWAD
AHP-IULGOWAWAD	AHP-PIULOWAD	AHP-PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.

Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias ponderadas prob. generalizadas
AHP-POWAWAD	AHP-PGOWAWAD
AHP-PIOWAWAD	AHP-PIGOWAWAD
AHP-PUOWAWAD	AHP-PUGOWAWAD
AHP-PFOWAWAD	AHP-PFGOWAWAD
AHP-PLOWAWAD	AHP-PLGOWAWAD
AHP-PIUOWAWAD	AHP-PIUGOWAWAD
AHP-PFIOWAWAD	AHP-PFIGOWAWAD
AHP-PILOWAWAD	AHP-PILGOWAWAD
AHP-PIULOWAWAD	AHP-PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.

Obsérvese que los casos con distancias se han considerado como último aspecto. La razón se debe a que el AHP ya hace un proceso de comparación de las alternativas. Por ello, puede resultar algo abstracto la utilización de un proceso de distancias aunque no por ello sería incorrecto.

En este caso, también se podría considerar diferentes familias de operadores OWA a utilizar en el modelo con cualquier tipo de extensión. Por ejemplo:

- AHP-máximo y AHP-mínimo
- Media aritmética en el AHP
- Media ponderada en el AHP
- Criterio de Hurwicz en el AHP
- Step-AHP-OWA
- Window-AHP-OWA
- S-AHP-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-AHP-OWA
- Olympic-AHP-OWA (Simple y generalizado)
- Median-AHP-OWA
- Centered-AHP-OWA
- Gaussian-AHP-OWA
- Dependent-AHP-OWA
- Maximal entropy AHP-OWA (ME-AHP-OWA) weights
- Minimal variability AHP-OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-AHP-OWA
- Nonmonotonic-AHP-OWA
- Etc.

Cabe destacar que estos casos particulares se muestran a partir del operador OWA pero es conveniente destacar que se podrían haber planteado a partir de cualquiera de las extensiones OWA comentados en el cuadro anterior como el IOWA, el OWAD, el OWAWA, el IP-OWAWA, etc.

También obsérvese en este caso la posibilidad de utilizar cualquier tipo de intervalo de confianza en los operadores AHP-UOWA y sus extensiones, cualquier tipo de número borroso en el operador AHP-FOWA y sus extensiones, cualquier tipo de variable lingüística en el operador AHP-LOWA y sus extensiones, etc.

Otro aspecto a considerar sería el combinar el AHP con otros métodos de decisión como por ejemplo:

- Con la teoría de la evidencia
- Con la minimización del coste
- Con el TOPSIS
- Con las decisiones de grupo
- Con las decisiones secuenciales
- Con la teoría de la utilidad
- En los procesos de asignación
- En los procesos de agrupación

Además, se podrían considerar en estas combinaciones, todas las diferentes extensiones disponibles sobre el OWA y el AHP-OWA, sus casos particulares y las diferentes técnicas disponibles para el tratamiento de información incierta.

Por último, mencionar la aplicabilidad de este método. Principalmente, su orientación está dirigida a la teoría de la decisión, pero también se podrían buscar otras aplicaciones. A modo de resumen, se pueden destacar las siguientes aplicaciones:

- En teoría de la decisión
- En teoría de la decisión empresarial que afectaría a problemas como:
    - Gestión financiera
    - Gestión estratégica
    - Gestión comercial
    - Gestión de la producción
    - Gestión de recursos humanos
    - Etc
- En estadística en general
- Etc.

11.3.4. Operador OWA en el TOPSIS

La utilización de los operadores OWA en el método TOPSIS (*Technique for order performance by similarity to ideal solution*) hasta donde el autor conoce, todavía no ha sido publicado en revistas internacionales. A pesar de que es un método muy utilizado en la literatura de teoría de la decisión (T.Y. Chen y Tsao, 2008; Hwang y Yoon, 1981; Y.J. Xu y Da, 2008), en temas fuzzy y en diferentes aplicaciones, su utilización con operadores OWA todavía no ha sido considerado. Por tanto, esto muestra un camino muy interesante a seguir en el futuro con investigaciones postdoctorales. Debido a la gran cantidad de trabajos que se pueden hacer en esta dirección utilizando diferentes tipos de operadores OWA, combinaciones con otros métodos, con diferentes instrumentos para tratar la información y en diferentes aplicaciones, el doctorando sólo podrá desarrollar algunos de estos trabajos. Por tanto, para desarrollar estos temas de una forma mucho más completa, se necesitará de la participación de otras personas en el desarrollo de esta línea de investigación. A continuación, se muestra un breve resumen de las diferentes aportaciones que se podrían realizar siguiendo con estas ideas. En primer lugar, se considerarán las diferentes aportaciones posibles mediante los operadores OWA y sus extensiones. En este caso también se simplifica a "generalizado" las generalizaciones con medias generalizadas o cuasi-aritméticas.

Simples	Generalizados	Con medias ponderadas
TOPSIS-OWA	TOPSIS-GOWA	TOPSIS-OWAWA
TOPSIS-IOWA	TOPSIS-IGOWA	TOPSIS-IOWAWA
TOPSIS-HOWA	TOPSIS-UGOWA	TOPSIS-HOWAWA
TOPSIS-UOWA	TOPSIS-FGOWA	TOPSIS-UOWAWA
TOPSIS-FOWA	TOPSIS-LGOWA	TOPSIS-FOWAWA
TOPSIS-LOWA	TOPSIS-GHA	TOPSIS-LOWAWA
TOPSIS-HA	TOPSIS-IUGOWA	TOPSIS-IHOWAWA
TOPSIS-IHOWA	TOPSIS-FIGOWA	TOPSIS-IUOWAWA
TOPSIS-UIOWA	TOPSIS-ILGOWA	TOPSIS-IFOWAWA
TOPSIS-FIOWA	TOPSIS-IULGOWA	TOPSIS-ILOWAWA
TOPSIS-ILOWA	TOPSIS-IGHA	TOPSIS-IUHOWAWA
TOPSIS-IHA	TOPSIS-UIGHA	TOPSIS-FIHOWAWA
TOPSIS-IWOWA	TOPSIS-FIGHA	TOPSIS-IULOWAWA
Etc.	Etc.	Etc.

Con medias ponderadas generalizadas	Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas
TOPSIS-GOWAWA	TOPSIS-POWA	TOPSIS-PGOWA
TOPSIS-IGOWAWA	TOPSIS-PIOWA	TOPSIS-PIGOWA
TOPSIS-UGOWAWA	TOPSIS-PUOWA	TOPSIS-PUGOWA
TOPSIS-FGOWAWA	TOPSIS-PFOWA	TOPSIS-PFGOWA
TOPSIS-LGOWAWA	TOPSIS-PLOWA	TOPSIS-PLGOWA
TOPSIS-IUGOWAWA	TOPSIS-PIUOWA	TOPSIS-PIUGOWA
TOPSIS-FIGOWAWA	TOPSIS-PFIOWA	TOPSIS-PFIGOWA
TOPSIS-ILGOWAWA	TOPSIS-PILOWA	TOPSIS-PILGOWA
TOPSIS-IULGOWAWA	TOPSIS-PIULOWA	TOPSIS-PIULGOWA
Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. Generalizadas
TOPSIS-POWAWA	TOPSIS-PGOWAWA
TOPSIS-PIOWAWA	TOPSIS-PIGOWAWA
TOPSIS-PUOWAWA	TOPSIS-PUGOWAWA
TOPSIS-PFOWAWA	TOPSIS-PFGOWAWA
TOPSIS-PLOWAWA	TOPSIS-PLGOWAWA
TOPSIS-PIUOWAWA	TOPSIS-PIUGOWAWA
TOPSIS-PFIOWAWA	TOPSIS-PFIGOWAWA
TOPSIS-PILOWAWA	TOPSIS-PILGOWAWA
TOPSIS-PIULOWAWA	TOPSIS-PIULGOWAWA
Etc.	Etc.

Con distancias	Con distancias generalizadas	Con distancias ponderadas
TOPSIS-OWAD	TOPSIS-GOWAD	TOPSIS-OWAWAD
TOPSIS-IOWAD	TOPSIS-IGOWAD	TOPSIS-IOWAWAD
TOPSIS-HOWAD	TOPSIS-UGOWAD	TOPSIS-HOWAWAD
TOPSIS-UOWAD	TOPSIS-FGOWAD	TOPSIS-UOWAWAD
TOPSIS-FOWAD	TOPSIS-LGOWAD	TOPSIS-FOWAWAD
TOPSIS-LOWAD	TOPSIS-GHAD	TOPSIS-LOWAWAD
TOPSIS-IHOWAD	TOPSIS-IUGOWAD	TOPSIS-IHOWAWAD
TOPSIS-UIOWAD	TOPSIS-FIGOWAD	TOPSIS-IUOWAWAD
TOPSIS-FIOWAD	TOPSIS-ILGOWAD	TOPSIS-IFOWAWAD
TOPSIS-ILOWAD	TOPSIS-IULGOWAD	TOPSIS-ILOWAWAD
TOPSIS-IUHOWAD	TOPSIS-IGHAD	TOPSIS-IUHOWAWAD
TOPSIS-HAD	TOPSIS-UGHAD	TOPSIS-FIHOWAWAD
TOPSIS-IUHAD	TOPSIS-FGHAD	TOPSIS-IULOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.

Dist. ponderadas generalizadas	Con distancias probabilísticas	Dist. probabilísticas generalizadas
TOPSIS-GOWAWAD	TOPSIS-POWAD	TOPSIS-PGOWAD
TOPSIS-IGOWAWAD	TOPSIS-PIOWAD	TOPSIS-PIGOWAD
TOPSIS-UGOWAWAD	TOPSIS-PUOWAD	TOPSIS-PUGOWAD
TOPSIS-FGOWAWAD	TOPSIS-PFOWAD	TOPSIS-PFGOWAD
TOPSIS-LGOWAWAD	TOPSIS-PLOWAD	TOPSIS-PLGOWAD
TOPSIS-IUGOWAWAD	TOPSIS-PIUOWAD	TOPSIS-PIUGOWAD
TOPSIS-FIGOWAWAD	TOPSIS-PFIOWAD	TOPSIS-PFIGOWAD
TOPSIS-ILGOWAWAD	TOPSIS-PILOWAD	TOPSIS-PILGOWAD
TOPSIS-IULGOWAWAD	TOPSIS-PIULOWAD	TOPSIS-PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.

Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias ponderadas prob. generalizadas
TOPSIS-POWAWAD	TOPSIS-PGOWAWAD
TOPSIS-PIOWAWAD	TOPSIS-PIGOWAWAD
TOPSIS-PUOWAWAD	TOPSIS-PUGOWAWAD
TOPSIS-PFOWAWAD	TOPSIS-PFGOWAWAD
TOPSIS-PLOWAWAD	TOPSIS-PLGOWAWAD
TOPSIS-PIUOWAWAD	TOPSIS-PIUGOWAWAD
TOPSIS-PFIOWAWAD	TOPSIS-PFIGOWAWAD
TOPSIS-PILOWAWAD	TOPSIS-PILGOWAWAD
TOPSIS-PIULOWAWAD	TOPSIS-PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.

Obsérvese que los casos con distancias se han considerado como último aspecto. La razón se debe a que el TOPSIS ya hace un proceso de comparación de las alternativas mediante distancias. Por ello, puede resultar algo abstracto la utilización de otro proceso de distancias aunque no por ello sería incorrecto.

En este caso, también se podría considerar diferentes familias de operadores TOPSIS-OWA a utilizar en el modelo con cualquier tipo de extensión. Por ejemplo:

- TOPSIS-máximo y TOPSIS-mínimo
- Media aritmética en el TOPSIS
- Media ponderada en el TOPSIS
- Criterio de Hurwicz en el TOPSIS
- Step-TOPSIS-OWA
- Window-TOPSIS-OWA
- S-TOPSIS-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-TOPSIS-OWA
- Olympic-TOPSIS-OWA (Simple y generalizado)
- Median-TOPSIS-OWA
- Centered-TOPSIS-OWA
- Gaussian-TOPSIS-OWA
- Dependent-TOPSIS-OWA
- Maximal entropy TOPSIS-OWA (ME-TOPSIS-OWA) weights
- Minimal variability TOPSIS-OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-TOPSIS-OWA
- Nonmonotonic-TOPSIS-OWA
- Etc.

Cabe destacar que estos casos particulares se muestran a partir del operador TOPSIS-OWA pero es conveniente destacar que se podrían haber planteado a partir de cualquiera de las extensiones TOPSIS-OWA comentados en el cuadro anterior como el TOPSIS-IOWA, el TOPSIS-OWAD, el TOPSIS-OWAWA, etc.

En este caso, también conviene destacar la posibilidad de utilizar cualquier tipo de intervalo de confianza en los operadores TOPSIS-UOWA y sus extensiones, cualquier tipo de número borroso en el operador TOPSIS-FOWA y sus extensiones, cualquier tipo de variable lingüística en el operador TOPSIS-LOWA y sus extensiones, etc.

Otro aspecto a considerar sería el combinar el método TOPSIS con otros métodos de decisión como por ejemplo:

- En la teoría de la evidencia
- En la minimización del coste
- En el AHP
- En las decisiones de grupo
- En las decisiones secuenciales
- En la teoría de la utilidad
- En los procesos de asignación
- En los procesos de agrupación

Además, se podrían considerar en estas combinaciones, todas las diferentes extensiones disponibles sobre el OWA y el TOPSIS-OWA, sus casos particulares y las diferentes técnicas disponibles para el tratamiento de información incierta.

Por último, mencionar la aplicabilidad de este método. Principalmente, su orientación está dirigida a la teoría de la decisión, pero también se podrían buscar otras aplicaciones. A modo de resumen, se pueden destacar las siguientes aplicaciones:

- En teoría de la decisión
- En teoría de la decisión empresarial que afectaría a problemas como:
    - Gestión estratégica
    - Gestión comercial
    - Gestión financiera
    - Gestión de la producción
    - Etc
- En estadística en general
- Etc.

11.3.5. Operador OWA en la toma de decisiones de grupo

La utilización del operador OWA y sus extensiones en las decisiones de grupo es un tema de gran actualidad y que ha sido considerado a lo largo de los años por un gran número de estudios de entre los cuales se puede destacar por ejemplo, (Alonso et al., 2006; 2008a; 2008b; Chiclana et al., 1998; 2000; 2001a; 2001b; 2004; 2007; 2008; Herrera et al., 1996b; 1997; Herrera y Martínez, 2001b; Herrera-Viedma, 2005; Kacprzyk et al., 1996; Xu, 2004a; 2004b; 2004c; 2006a; 2006b; 2006c; 2007a; 2008; Xu y Chen, 2007; Yager y Kacprzyk, 1997).

A pesar de que ya se han considerado un gran número de estudios de operadores OWA y algunas extensiones en las decisiones de grupo, todavía existe un camino muy amplio por explorar. Esto se puede observar desde el punto de vista de implementar diferentes tipos de extensiones OWA o en otros estudios relacionados que a su vez utilizan los operadores OWA como en nuevas formas de interpretar las relaciones de preferencia (Xu, 2007) (ya sea borrosa, lingüística, etc.), etc.

Obviamente, todas las nuevas extensiones a los operadores OWA propuestas en esta tesis son aplicables a problemas de decisión de grupo. Por tanto, todavía no se han considerado por la comunidad científica. Algunos de estos casos pueden ser de gran utilidad como podrían ser el OWAWA y sus extensiones, y el IP-OWAWA con sus respectivas extensiones. Como sucede en el resto de casos, el doctorando no podrá abarcar de forma individual todos los posibles casos. Por tanto, se necesitará de la colaboración de otras personas. Aún así, los casos de mayor relevancia sí serán considerados por el doctorando como sería el OWAWA y sus extensiones, etc.

Haciendo un resumen general de las diferentes aportaciones que se podrían desarrollar a partir de esta tesis, teniendo en cuenta que algunos casos clásicos de OWA ya han sido considerados por la comunidad científica, se podrían destacar las siguientes. Obsérvese que los casos generalizados con medias generalizadas, cuasi-aritméticas, etc., se han simplificado a un caso "generalizado". También obsérvese la posibilidad de considerar diferentes contextos de decisiones de grupo, ya sea vía relaciones de preferencia, multiexperto, etc.

Simples	Generalizados	Con distancias	Con distancias generalizadas
OWA	GOWA	OWAD	GOWAD
IOWA	IGOWA	IOWAD	IGOWAD
HOWA	UGOWA	HOWAD	UGOWAD
UOWA	FGOWA	UOWAD	FGOWAD
FOWA	LGOWA	FOWAD	LGOWAD
LOWA	GHA	LOWAD	GHAD
HA	IUGOWA	IHOWAD	IUGOWAD
IHOWA	FIGOWA	UIOWAD	FIGOWAD
UIOWA	ILGOWA	FIOWAD	ILGOWAD
FIOWA	IULGOWA	ILOWAD	IULGOWAD
ILOWA	IGHA	IUHOWAD	IGHAD
FIHOWA	UGHA	HAD	UGHAD
UIHA	FGHA	IUHAD	FGHAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Con medias ponderadas	Con medias ponderadas generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
OWAWA	GOWAWA	OWAWAD	GOWAWAD
IOWAWA	IGOWAWA	IOWAWAD	IGOWAWAD
HOWAWA	UGOWAWA	HOWAWAD	UGOWAWAD
UOWAWA	FGOWAWA	UOWAWAD	FGOWAWAD
FOWAWA	LGOWAWA	FOWAWAD	LGOWAWAD
LOWAWA	IUGOWAWA	LOWAWAD	IUGOWAWAD
IHOWAWA	FIGOWAWA	IHOWAWAD	FIGOWAWAD
IUOWAWA	ILGOWAWA	IUOWAWAD	ILGOWAWAD
IFOWAWA	IULGOWAWA	IFOWAWAD	IULGOWAWAD
ILOWAWA	Etc.	ILOWAWAD	Etc.
IUHOWAWA		IUHOWAWAD	
FIHOWAWA		FIHOWAWAD	
IULOWAWA		IULOWAWAD	
Etc.		Etc.	

Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas	Con distancias probabilísticas	Dist. prob. generalizadas
POWA	PGOWA	POWAD	PGOWAD
PIOWA	PIGOWA	PIOWAD	PIGOWAD
PUOWA	PUGOWA	PUOWAD	PUGOWAD
PFOWA	PFGOWA	PFOWAD	PFGOWAD
PLOWA	PLGOWA	PLOWAD	PLGOWAD
PIUOWA	PIUGOWA	PIUOWAD	PIUGOWAD
PFIOWA	PFIGOWA	PFIOWAD	PFIGOWAD
PILOWA	PILGOWA	PILOWAD	PILGOWAD
PIULOWA	PIULGOWA	PIULOWAD	PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
POWAWA	PGOWAWA	POWAWAD	PGOWAWAD
PIOWAWA	PIGOWAWA	PIOWAWAD	PIGOWAWAD
PUOWAWA	PUGOWAWA	PUOWAWAD	PUGOWAWAD
PFOWAWA	PFGOWAWA	PFOWAWAD	PFGOWAWAD
PLOWAWA	PLGOWAWA	PLOWAWAD	PLGOWAWAD
PIUOWAWA	PIUGOWAWA	PIUOWAWAD	PIUGOWAWAD
PFIOWAWA	PFIGOWAWA	PFIOWAWAD	PFIGOWAWAD
PILOWAWA	PILGOWAWA	PILOWAWAD	PILGOWAWAD
PIULOWAWA	PIULGOWAWA	PIULOWAWAD	PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Como se puede observar, el número de casos a considerar es incalculable y más si se tiene en cuenta que cada agregación interna puede utilizar un operador OWA distinto ya que la formación de los resultados representativos del grupo de expertos puede producirse por diferentes métodos, etc.

Además, dentro de los operadores OWA, se pueden considerar un gran número de casos particulares o familias de operadores OWA, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- Máximo y mínimo
- Media aritmética
- Media ponderada
- Criterio de Hurwicz
- Step-OWA
- Window-OWA
- S-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-OWA
- Olympic-OWA (Simple y generalizado)
- Median-OWA
- Centered-OWA
- Gaussian-OWA
- Dependent-OWA
- Maximal entropy OWA (MEOWA) weights
- Minimal variability OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-OWA
- Nonmonotonic-OWA
- Etc.

Obsérvese también la posibilidad de considerar cualquier tipo de intervalo de confianza en el UOWA y extensiones similares, cualquier tipo de número borroso en el FOWA y extensiones, cualquier tipo de variable lingüística en el LOWA y extensiones, etc.

También destacar la posibilidad de utilizar problemas de decisiones de grupo en otros contextos de decisión como por ejemplo:

- Con la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer
- Con la minimización del coste de Savage
- Con el AHP
- Con el TOPSIS
- Con las decisiones secuenciales
- Con la teoría de la utilidad
- En los procesos de asignación
- En los procesos de agrupación

Conviene destacar que en estos casos también se podría considerar una gran variedad de operadores OWA, diferentes casos particulares y diferentes instrumentos para tratar la información incierta disponible.

Por último, decir que la aplicabilidad de estos métodos es muy amplia. A modo de resumen, se podría desarrollar diferentes aplicaciones sobre estos métodos en las siguientes direcciones:

- En estadística en general
- En matemáticas en general
- En teoría de la decisión
- En ciencias actuariales
- En la mayoría de problemas en donde se puede asesorar la información con decisiones de grupo
- En problemas empresariales como:
    - Gestión financiera
        - Gestión de productos financieros
        - Gestión de inversiones
        - Gestión de proyectos financieros
        - Etc.
    - Gestión estratégica
        - Estrategias generales
        - Estrategias financieras
        - Estrategias comerciales
        - Etc.
    - Gestión comercial
        - Gestión de productos
        - Gestión del precio
        - Gestión publicitaria
        - Etc.
    - Gestión de recursos humanos
    - Gestión de la producción
    - Etc.
- Etc.

Obsérvese que dentro de la teoría de la decisión de grupo existen un gran número de ramificaciones que analizan dichas decisiones desde diferentes perspectivas. De entre las distintas ramificaciones existentes, se pueden destacar por ejemplo, la teoría de juegos, las decisiones colectivas, los expertones, etc. Para más información, véase por ejemplo (Edwards et al., 2007; Herrera-Viedma, 2005; Kaufmann y Gil-Aluja, 1993; López-Cachero, 1989; Kacprzyk y Fedrizzi, 1989; Kacprzyk et al., 1996; Luce y Raiffa, 1989; Samson, 1988; Turban y Aronson, 1998).

11.3.6. Operador OWA en las decisiones secuenciales

El estudio de los operadores OWA en las decisiones secuenciales es un tema que en la actualidad no se ha considerado demasiado por la comunidad científica. Aún así, cabe destacar la existencia de algún trabajo reciente que sí ha considerado el uso del operador OWA en las decisiones secuenciales (Liu y Da, 2005). Obsérvese que en muchos casos, las decisiones secuenciales, también conocidas como decisiones multietapa, pueden ser estudiadas mediante los árboles de decisión. Para más información sobre el funcionamiento de esta metodología, véase por ejemplo (Gracia-Ramos et al., 2007; López-Cachero, 1989; Liu y Da, 2005).

En este caso, también se pueden desarrollar un número incalculable de aplicaciones ya sea a través de utilizar diferentes tipos de operadores OWA, diferentes representaciones, diferentes aplicaciones, etc. Por tanto, el doctorando no podrá abarcar todos estos trabajos, por lo que se necesitará de la colaboración de otras personas para llevar a cabo todas estas investigaciones.

A continuación, se presenta un breve esquema de las diferentes aportaciones que se podrían desarrollar en esta línea de investigación. Obsérvese que los casos generalizados con medias generalizadas, cuasi-aritméticas, etc., se simplifican bajo la denominación de "generalizado". También obsérvese que cada ramificación en el proceso de decisión puede ser tratada con un caso distinto según los intereses del decisor. Por tanto, en un mismo árbol, etc., pueden utilizarse diferentes tipos de operadores OWA al mismo tiempo.

Simples	Generalizados	Con distancias	Con distancias generalizadas
OWA	GOWA	OWAD	GOWAD
IOWA	IGOWA	IOWAD	IGOWAD
HOWA	UGOWA	HOWAD	UGOWAD
UOWA	FGOWA	UOWAD	FGOWAD
FOWA	LGOWA	FOWAD	LGOWAD
LOWA	GHA	LOWAD	GHAD
HA	IUGOWA	IHOWAD	IUGOWAD
IHOWA	FIGOWA	UIOWAD	FIGOWAD
UIOWA	ILGOWA	FIOWAD	ILGOWAD
FIOWA	IULGOWA	ILOWAD	IULGOWAD
ILOWA	IGHA	IUHOWAD	IGHAD
IHA	UGHA	HAD	UGHAD
UIHA	FGHA	IUHAD	FGHAD
FIHA	UIGHA	WOWAD	UIGHAD
WOWA	FIGHA	IWOWAD	FIGHAD
IWOWA	LGHA	LWOWAD	LGHAD
UIWOWA	ILGHA	UIWOWAD	ILGHAD
ILWOWA	UILGHA	LHAD	Etc.
FIWOWA	Etc.	ILHAD	
UIHOWA		Etc.	
FIHOWA			
Etc.			

Con medias ponderadas	Con medias ponderadas generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
OWAWA	GOWAWA	OWAWAD	GOWAWAD
IOWAWA	IGOWAWA	IOWAWAD	IGOWAWAD
HOWAWA	UGOWAWA	HOWAWAD	UGOWAWAD
UOWAWA	FGOWAWA	UOWAWAD	FGOWAWAD
FOWAWA	LGOWAWA	FOWAWAD	LGOWAWAD
LOWAWA	IUGOWAWA	LOWAWAD	IUGOWAWAD
IHOWAWA	FIGOWAWA	IHOWAWAD	FIGOWAWAD
IUOWAWA	ILGOWAWA	IUOWAWAD	ILGOWAWAD
IFOWAWA	IULGOWAWA	IFOWAWAD	IULGOWAWAD
ILOWAWA	Etc.	ILOWAWAD	Etc.
IUHOWAWA		IUHOWAWAD	
FIHOWAWA		FIHOWAWAD	
IULOWAWA		IULOWAWAD	
Etc.		Etc.	

Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas	Con distancias probabilísticas	Dist. Prob. generalizadas
POWA	PGOWA	POWAD	PGOWAD
PIOWA	PIGOWA	PIOWAD	PIGOWAD
PUOWA	PUGOWA	PUOWAD	PUGOWAD
PFOWA	PFGOWA	PFOWAD	PFGOWAD
PLOWA	PLGOWA	PLOWAD	PLGOWAD
PIUOWA	PIUGOWA	PIUOWAD	PIUGOWAD
PFIOWA	PFIGOWA	PFIOWAD	PFIGOWAD
PILOWA	PILGOWA	PILOWAD	PILGOWAD
PIULOWA	PIULGOWA	PIULOWAD	PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
POWAWA	PGOWAWA	POWAWAD	PGOWAWAD
PIOWAWA	PIGOWAWA	PIOWAWAD	PIGOWAWAD
PUOWAWA	PUGOWAWA	PUOWAWAD	PUGOWAWAD
PFOWAWA	PFGOWAWA	PFOWAWAD	PFGOWAWAD
PLOWAWA	PLGOWAWA	PLOWAWAD	PLGOWAWAD
PIUOWAWA	PIUGOWAWA	PIUOWAWAD	PIUGOWAWAD
PFIOWAWA	PFIGOWAWA	PFIOWAWAD	PFIGOWAWAD
PILOWAWA	PILGOWAWA	PILOWAWAD	PILGOWAWAD
PIULOWAWA	PIULGOWAWA	PIULOWAWAD	PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Como se puede observar, el número de posibles casos a considerar es incalculable y más si se tiene en cuenta que cada agregación interna puede utilizar un operador OWA distinto. Cabe recordar que los modelos clásicos de árboles de decisión dependían de la probabilidad. Obsérvese que en estos casos, esta situación estaría incluída dentro de la gama de operadores IP-OWA en el caso particular que el OWA es neutro y el resultado depende exclusivamente de la probabilidad.

Además, dentro de la agregación OWA en los árboles (o decisiones secuenciales), se pueden considerar un gran número de casos particulares o familias de operadores OWA, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- Máximo y mínimo
- Media aritmética
- Media ponderada
- Criterio de Hurwicz
- Step-OWA
- Window-OWA
- S-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-OWA
- Olympic-OWA (Simple y generalizado)
- Median-OWA
- Centered-OWA
- Gaussian-OWA
- Dependent-OWA
- Maximal entropy OWA (MEOWA) weights
- Minimal variability OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-OWA
- Nonmonotonic-OWA
- Etc.

Obsérvese también la posibilidad de considerar cualquier tipo de intervalo de confianza (tripletas, cuádruplos, etc.) en el UOWA y extensiones, cualquier tipo de número borroso (triangular, trapezoidal, generalizado, intervalo valorado, etc.) en el FOWA y extensiones, cualquier tipo de variable lingüística (simple, de 2-tuplas, generalizadas, etc.) en el LOWA y extensiones, etc.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar otros métodos de decisión dentro de las decisiones secuenciales o dentro de los árboles, como por ejemplo:

- La teoría de la evidencia de Dempster-Shafer
- La minimización del coste
- El AHP
- El TOPSIS
- Las decisiones de grupo
- Las decisiones secuenciales
- La teoría de la utilidad
- Los procesos de asignación

- Los procesos de agrupación

Obviamente, en estos casos también se podría considerar lo comentado anteriormente sobre utilizar una gran variedad de operadores OWA, diferentes casos particulares, diferentes instrumentos para tratar la información incierta disponible, etc.

Por último, decir que la aplicabilidad de estos métodos es muy amplia y sigue un poco las posibilidades comentadas en los apartados 10.1.1 y 10.1.3. Por tanto, a modo de resumen, se podría desarrollar diferentes aplicaciones sobre estos métodos en las siguientes direcciones:

- En estadística en general
- En teoría de la decisión
- En problemas empresariales como:
    - Gestión financiera
    - Gestión estratégica
    - Gestión comercial
    - Gestión de la producción
    - Etc.
- Etc.

11.3.7. Operador OWA en el concepto de utilidad

Para desarrollar el análisis mediante el concepto de utilidad, la clave se encuentra en interpretar los argumentos a agregar como utilidades. A partir de aquí, los procesos de decisión, seguirían la misma metodología. Es decir, se podrían desarrollar una gran variedad de aplicaciones de entre las cuales se destacan las siguientes. Obsérvese que también sería posible utilizar los operadores OWA y sus extensiones en los diferentes métodos clásicos en donde se ha utilizado el concepto de utilidad. Para más información, véase por ejemplo (Cachero, 1989).

Obsérvese que este campo no ha sido considerado en exceso. Por tanto, esta temática también resultará de interés para investigaciones postdoctorales. De la misma forma como se ha comentado en los anteriores casos, debido a la gran cantidad de trabajos que se podrían desarrollar en esta línea de investigación, el doctorando sólo se podrá encargar de algunos casos por lo que se necesitará de la participación de más investigadores para llevar a cabo todas estas investigaciones.

En primer lugar, destacar la posibilidad de utilizar una amplia gama de operadores OWA con sus diferentes extensiones. Obsérvese que sólo se consideran los casos de mayor relevancia ya que sino el número de casos sería excesivamente elevado. También destacar la simplificación de “generalizado” para los casos con medias generalizadas, cuasi-aritméticas o similares.

Simples	Generalizados	Con distancias	Con distancias generalizadas
Ut-OWA	Ut-GOWA	Ut-OWAD	Ut-GOWAD
Ut-IOWA	Ut-IGOWA	Ut-IOWAD	Ut-IGOWAD
Ut-HOWA	Ut-UGOWA	Ut-HOWAD	Ut-UGOWAD
Ut-UOWA	Ut-FGOWA	Ut-UOWAD	Ut-FGOWAD
Ut-FOWA	Ut-LGOWA	Ut-FOWAD	Ut-LGOWAD
Ut-LOWA	Ut-GHA	Ut-LOWAD	Ut-GHAD
Ut-HA	Ut-IUGOWA	Ut-IHOWAD	Ut-IUGOWAD
Ut-IHOWA	Ut-FIGOWA	Ut-UIOWAD	Ut-FIGOWAD
Ut-UIOWA	Ut-ILGOWA	Ut-FIOWAD	Ut-ILGOWAD
Ut-FIOWA	Ut-IULGOWA	Ut-ILOWAD	Ut-IULGOWAD
Ut-ILOWA	Ut-Ut-IGHA	Ut-IUHOWAD	Ut-IGHAD
Ut-IHA	Ut-UGHA	Ut-HAD	Ut-UGHAD
Ut-UHA	Ut-FGHA	Ut-IUHAD	Ut-FGHAD
Ut-FIHA	Ut-UIGHA	Ut-FIHAD	Etc.
Ut-UIHA	Ut-FIGHA	Etc.	
Ut-WOWA	Ut-LGHA		
Ut-IWOWA	Ut-ILGHA		
Ut-UIWOWA	Etc.		
Ut-ILWOWA			
Ut-FWOWA			
Ut-FIWOWA			
Etc.			

Con medias ponderadas	Con medias ponderadas generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
Ut-OWAWA	Ut-GOWAWA	Ut-OWAWAD	Ut-GOWAWAD
Ut-IOWAWA	Ut-IGOWAWA	Ut-IOWAWAD	Ut-IGOWAWAD
Ut-HOWAWA	Ut-UGOWAWA	Ut-HOWAWAD	Ut-UGOWAWAD
Ut-UOWAWA	Ut-FGOWAWA	Ut-UOWAWAD	Ut-FGOWAWAD
Ut-FOWAWA	Ut-LGOWAWA	Ut-FOWAWAD	Ut-LGOWAWAD
Ut-LOWAWA	Ut-IUGOWAWA	Ut-LOWAWAD	Ut-IUGOWAWAD
Ut-IHOWAWA	Ut-FIGOWAWA	Ut-IHOWAWAD	Ut-FIGOWAWAD
Ut-IUOWAWA	Ut-ILGOWAWA	Ut-IUOWAWAD	Ut-ILGOWAWAD
Ut-IFOWAWA	Ut-IULGOWAWA	Ut-IFOWAWAD	Ut-IULGOWAWAD
Ut-ILOWAWA	Etc.	Ut-ILOWAWAD	Etc.
Ut-IUHOWAWA		Ut-IUHOWAWAD	
Ut-FIHOWAWA		Ut-FIHOWAWAD	
Ut-IULOWAWA		Ut-IULOWAWAD	
Etc.		Etc.	

Con probabilidades	Con generalizaciones probabilísticas	Con distancias probabilísticas	Dist. Prob. generalizadas
Ut-POWA	Ut-PGOWA	Ut-POWAD	Ut-PGOWAD
Ut-PIOWA	Ut-PIGOWA	Ut-PIOWAD	Ut-PIGOWAD
Ut-PUOWA	Ut-PUGOWA	Ut-PUOWAD	Ut-PUGOWAD
Ut-PFOWA	Ut-PFGOWA	Ut-PFOWAD	Ut-PFGOWAD
Ut-PLOWA	Ut-PLGOWA	Ut-PLOWAD	Ut-PLGOWAD
Ut-PIUOWA	Ut-PIUGOWA	Ut-PIUOWAD	Ut-PIUGOWAD
Ut-PFIOWA	Ut-PFIGOWA	Ut-PFIOWAD	Ut-PFIGOWAD
Ut-PILOWA	Ut-PILGOWA	Ut-PILOWAD	Ut-PILGOWAD
Ut-PIULOWA	Ut-PIULGOWA	Ut-PIULOWAD	Ut-PIULGOWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Medias ponderadas probabilísticas	Medias pond. prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
Ut-POWAWA	Ut-PGOWAWA	Ut-POWAWAD	Ut-PGOWAWAD
Ut-PIOWAWA	Ut-PIGOWAWA	Ut-PIOWAWAD	Ut-PIGOWAWAD
Ut-PUOWAWA	Ut-PUGOWAWA	Ut-PUOWAWAD	Ut-PUGOWAWAD
Ut-PFOWAWA	Ut-PFGOWAWA	Ut-PFOWAWAD	Ut-PFGOWAWAD
Ut-PLOWAWA	Ut-PLGOWAWA	Ut-PLOWAWAD	Ut-PLGOWAWAD
Ut-PIUOWAWA	Ut-PIUGOWAWA	Ut-PIUOWAWAD	Ut-PIUGOWAWAD
Ut-PFIOWAWA	Ut-PFIGOWAWA	Ut-PFIOWAWAD	Ut-PFIGOWAWAD
Ut-PILOWAWA	Ut-PILGOWAWA	Ut-PILOWAWAD	Ut-PILGOWAWAD
Ut-PIULOWAWA	Ut-PIULGOWAWA	Ut-PIULOWAWAD	Ut-PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Como se puede observar, el número de posibles casos a considerar es incalculable. Además, dentro de los operadores OWA o Ut-OWA, se pueden considerar un gran número de casos particulares o familias de operadores OWA, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- Ut-máximo y Ut-mínimo
- Media aritmética con utilidades
- Media ponderada con utilidades
- Criterio de Hurwicz con utilidades
- Step-Ut-OWA
- Window-Ut-OWA
- S-Ut-OWA (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-Ut-OWA
- Olympic- Ut-OWA (Simple y generalizado)
- Median-Ut-OWA
- Centered-Ut-OWA
- Gaussian-Ut-OWA
- Dependent-Ut-OWA
- Maximal entropy Ut-OWA (ME-Ut-OWA) weights
- Minimal variability Ut-OWA weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-Ut-OWA
- Nonmonotonic-Ut-OWA
- Etc.

Obsérvese también la posibilidad de considerar cualquier tipo de intervalo de confianza en el Ut-UOWA y extensiones, cualquier tipo de número borroso en el Ut-FOWA y extensiones, cualquier tipo de variable lingüística en el Ut-LOWA y extensiones, etc.

También destacar la posibilidad de utilizar el concepto de utilidad en otros métodos de decisión como:

- En la teoría de Dempster-Shafer
- En la minimización del coste
- En el AHP
- En el TOPSIS
- En las decisiones de grupo
- En las decisiones secuenciales
- En la teoría de la utilidad
- En el coeficiente de adecuación
- En el índice del máximo y el mínimo nivel
- En los procesos de asignación
- En los procesos de agrupación

Obviamente, en estos caso también se podría considerar lo comentado anteriormente sobre utilizar una gran variedad de operadores OWA, diferentes casos particulares y diferentes instrumentos para tratar la información incierta disponible. Por tanto, se podría volver a comentar todo lo comentado en los apartados anteriores 10.3.1., etc.

Por último, decir que la aplicabilidad de estos métodos es muy amplia y sigue un poco las posibilidades comentadas en los apartados 10.1.1 y 10.1.3. Por tanto, a modo de resumen, se podría desarrollar diferentes aplicaciones sobre estos métodos en las siguientes direcciones:

- En estadística en general
- En teoría de la decisión
- En la mayoría de problemas en donde interviene la noción de utilidad
- En problemas empresariales como:
    - Gestión financiera
        - Selección de inversiones
        - Selección de productos financieros
        - Selección de proyectos
    - Gestión estratégica
        - Gestión estratégica general
        - Gestión estratégica comercial
        - Gestión estratégica financiera
        - Etc.
    - Gestión comercial
    - Gestión de la producción
    - Etc.
- Etc.

11.3.8. Operador OWA en los procesos de asignación y agrupación

El estudio de los operadores OWA en los procesos de asignación y agrupación parte de la base de utilizar medidas de distancia en el análisis. Por tanto, podemos decir que estos métodos son aplicables con los operadores OWA basados en distancias. Es decir, en el operador OWAD y sus extensiones. También se podría considerar algunos casos sin el uso de distancias pero estos métodos seguirían una metodología diferente. Por ejemplo, en casos en los que se toman como referencia el máximo, el mínimo, etc., y a partir de aquí establecer el proceso de asignación o agrupación.

Los problemas de asignación y agrupación no se han estudiado en la actualidad con los operadores OWA. Por tanto, representa una línea de investigación de gran interés a desarrollar que el doctorando espera poder iniciar en la etapa postdoctoral. Aún así, debido al gran número de trabajos que se pueden hacer en esta línea de investigación, cabe destacar que el doctorando no podrá realizar todos los trabajos y se espera la participación de otros investigadores en el desarrollo de esta línea de investigación.

A continuación, se muestran algunos de los operadores OWA con los que se podrían desarrollar modelos en esta línea de investigación. Obsérvese que los casos generalizados con medias generalizadas, cuasi-aritméticas, etc., se simplifican bajo la denominación de "generalizado".

Con distancias	Con distancias generalizadas	Con distancias ponderadas	Dist. ponderadas generalizadas
OWAD	GOWAD	OWAWAD	GOWAWAD
IOWAD	IGOWAD	IOWAWAD	IGOWAWAD
UOWAD	UGOWAD	HOWAWAD	UGOWAWAD
FOWAD	FGOWAD	UOWAWAD	FGOWAWAD
LOWAD	LGOWAD	FOWAWAD	LGOWAWAD
IHOWAD	GHAD	LOWAWAD	IUGOWAWAD
UIOWAD	IUGOWAD	IHOWAWAD	FIGOWAWAD
FIOWAD	FIGOWAD	IUOWAWAD	ILGOWAWAD
ILOWAD	ILGOWAD	IFOWAWAD	IULGOWAWAD
HAD	IULGOWAD	ILOWAWAD	Etc.
IUHAD	IGHAD	IUHOWAWAD	
WOWAD	UGHAD	FIHOWAWAD	
IWOWAD	FGHAD	IULOWAWAD	
LWOWAD	UIGHAD	Etc.	
UIWOWAD	FIGHAD		
ILWOWAD	LGHAD		
LHAD	ILGHAD		
ILHAD	Etc.		
FIWOWAD			
UILOWAD			
Etc.			

Con distancias probabilísticas	Dist. prob. generalizadas	Distancias medias ponderadas prob.	Dist. medias pond. prob. generalizadas
POWAD	PGOWAD	POWAWAD	PGOWAWAD
PIOWAD	PIGOWAD	PIOWAWAD	PIGOWAWAD
PUOWAD	PUGOWAD	PUOWAWAD	PUGOWAWAD
PFOWAD	PFGOWAD	PFOWAWAD	PFGOWAWAD
PLOWAD	PLGOWAD	PLOWAWAD	PLGOWAWAD
PIUOWAD	PIUGOWAD	PIUOWAWAD	PIUGOWAWAD
PFIOWAD	PFIGOWAD	PFIOWAWAD	PFIGOWAWAD
PILOWAD	PILGOWAD	PILOWAWAD	PILGOWAWAD
PIULOWAD	PIULGOWAD	PIULOWAWAD	PIULGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Sin distancias			
OWA	IGOWA	IOWAWA	PIOWAWA
IOWA	OWAWA	IGOWAWA	PIGOWAWA
Etc.			

Como se puede observar, se puede desarrollar un gran número de casos. Además, se tiene que tener en cuenta que estos operadores son aplicables en los diferentes algoritmos de asignación y agrupación. Por ejemplo, en procesos de asignación, se podría utilizar:

- El algoritmo por eliminación de filas y columnas
- El algoritmo húngaro de asignación
- El algoritmo Branch and Bound
- Etc.

En procesos de agrupación, se podría utilizar en el cálculo de las afinidades, en las subrelaciones máximas de similitud dentro de un mismo conjunto, etc. Obsérvese que la intervención de los operadores OWAD y extensiones se producirían en la fase inicial de análisis de similitud entre elementos mediante el uso de distancias.

- El algoritmo de la correspondencia inversa máxima para el cálculo de afinidades dentro de un mismo conjunto.
- El algoritmo de las submatrices completas máximas para el cálculo de las afinidades dentro de un mismo conjunto.
- El algoritmo de la correspondencia inversa máxima para el cálculo de subrelaciones máximas de similitud dentro de un mismo conjunto.
- El algoritmo de Pichat para el cálculo de las subrelaciones máximas de similitud dentro de un mismo conjunto.
- La agrupación a partir del concepto de clan para el cálculo de afinidades dentro de un mismo conjunto.
- El análisis del cierre de Moore con elementos de un mismo conjunto
- Etc.

Además, dentro de la agregación OWAD en los procesos de asignación y agrupación, se pueden considerar un gran número de casos particulares o familias de operadores OWAD, de entre los cuales se destacan los siguientes.

- Distancia máxima y mínima
- Distancia media aritmética
- Distancia media ponderada
- Criterio de Hurwicz con distancias
- Step-OWAD
- Window-OWAD
- S-OWAD (orlike, andlike y generalizado)
- EZ-OWAD
- Olympic-OWAD (Simple y generalizado)
- Median-OWAD
- Centered-OWAD
- Gaussian-OWAD
- Dependent-OWAD
- Maximal entropy OWAD (MEOWAD) weights
- Minimal variability OWAD weights
- Maximal Renyi entropy weights
- Constrained-OWAD
- Nonmonotonic-OWAD
- Etc.

Obsérvese también la posibilidad de considerar cualquier tipo de intervalo de confianza en el UOWAD y extensiones, cualquier tipo de número borroso en el FOWAD y extensiones, cualquier tipo de variable lingüística en el LOWAD y extensiones, etc.

Otro aspecto a destacar es la posibilidad de utilizar otros métodos de decisión dentro de los procesos de asignación y agrupación mediante distancias, como por ejemplo:

- La teoría de la evidencia de Dempster-Shafer
- La minimización del coste
- El AHP
- El TOPSIS
- Las decisiones de grupo
- Las decisiones secuenciales
- La teoría de la utilidad
- Los procesos de asignación
- Los procesos de agrupación

Obviamente, en estos casos también se podría considerar lo comentado anteriormente sobre utilizar una gran variedad de operadores OWA, diferentes casos particulares, diferentes instrumentos para tratar la información incierta disponible, etc.

Por último, decir que la aplicabilidad de estos métodos es muy amplia y sigue un poco las posibilidades comentadas en los apartados 10.1.1 y 10.2. Por tanto, a modo de resumen, se podría desarrollar diferentes aplicaciones sobre estos métodos en las siguientes direcciones:

- En estadística en general
- En teoría de la decisión
- En problemas empresariales como:
    - Gestión financiera
        - Asignación y agrupación de productos financieros
        - Asignación y agrupación de inversiones
        - Asignación y agrupación de proyectos
        - Etc.
    - Gestión estratégica
        - Asignación y agrupación de estrategias generales
        - Asignación y agrupación de estrategias financieras
        - Etc.
    - Gestión comercial
        - Asignación y agrupación de productos
        - Asignación y agrupación de precios
        - Asignación y agrupación de promociones
        - Etc.
    - Gestión de la producción
        - Asignación y agrupación de sistemas de producción
        - Asignación y agrupación de maquinaria
        - Etc.
    - Gestión en otros aspectos de la empresa
    - Etc.
- Etc.

11.3.9. Otros métodos de decisión con el operador OWA

A modo de resumen, decir que la aplicabilidad de los operadores OWA en los métodos de decisión es mucho más amplia de lo que se ha comentado en este trabajo. Simplemente destacar que en aquellos casos en donde se utilizan medias aritméticas ponderadas es muy probable que también se puedan utilizar operadores OWA y sus respectivas extensiones. Evidentemente, en función del significado del problema analizado, la relevancia de introducir estos operadores será mayor o menor.

En problemas de decisión se podrían destacar por ejemplo, el uso de redes neuronales, los algoritmos genéticos, el uso de otras variantes a los operadores OWA como los ST-OWA, la integral de Choquet y sus extensiones, otros tipos de medias como las de Bajraktarevic o de Losonczi, el uso de series temporales, etc.

Resumiendo:

El uso de normas, uninormas (Yager y Ribalov, 1996), etc., en los operadores OWA se conoce, de forma general, como ST-OWA. A partir de este operador se podrían hacer un gran número de extensiones, de entre las cuales se destacan las siguientes:

ST-OWA	ST-GOWA	ST-OWAWA	ST-GOWAWA
ST-IOWA	ST-IGOWA	ST-IOWAWA	ST-IGOWAWA
ST-UOWA	ST-UGOWA	ST-UOWAWA	ST-UGOWAWA
ST-FOWA	ST-FGOWA	ST-FOWAWA	ST-FGOWAWA
ST-POWA	ST-PGOWA	ST-POWAWA	ST-PGOWAWA
ST-PIOWA	ST-PIGOWA	ST-PIOWAWA	ST-IGOWAWA
ST-PUOWA	ST-PUGOWA	ST-PUOWAWA	ST-UGOWAWA
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

El uso de la integral de Choquet (Grabisch et al., 2000) (o similares) nos podría llevar por ejemplo:

- A la integral de Choquet inducida
- A la integral de Choquet generalizada (con medias generalizadas, cuasi-aritméticas, etc.)
- A la integral de Choquet generalizada inducida (con medias generalizadas, cuasi-aritméticas, etc.)
- A la integral de Choquet con distancias
- A la integral de Choquet con distancias inducidas
- A la integral de Choquet con distancias generalizadas
- A la integral de Choquet con distancias inducidas generalizadas
- A la integral de Choquet probabilística (simple, inducida, generalizada, etc.)
- Etc.

En el análisis de las redes neuronales, de los algoritmos genéticos, de series temporales, de medias de Bajraktarevic o de Losonczi, en diferentes conceptos estadísticos como la varianza o la desviación estándar, etc., en muchos casos se podrían utilizar diferentes tipos de OWA. A modo de esquema resumido se destacan los siguientes:

Simples	Generalizados	Con medias ponderadas	Con medias ponderadas generalizadas
OWA	GOWA	OWAWA	GOWAWA
IOWA	IGOWA	IOWAWA	IGOWAWA
IHOWA	UIGOWA	IHOWAWA	UIGOWAWA
UIOWA	ILGOWA	UIOWAWA	ILGOWAWA
ILOWA	FIGOWA	ILOWAWA	FIGOWAWA
FIOWA	IGHA	FIOWAWA	Etc.
IHA	Etc.	Etc.	
IWOWA			
Etc.			

Con probabilidades	Probabilidades generalizadas	Medias pond. probabilísticas	Medias pond. prob. generalizadas
POWA	PGOWA	POWAWA	PGOWAWA
PIOWA	PIGOWA	PIOWAWA	PIGOWAWA
PUIOWA	PUIGOWA	PUIOWAWA	PUIGOWAWA
PFIOWA	PFIGOWA	PFIOWAWA	PFIGOWAWA
PILOWA	PILGOWA	PILOWAWA	PILGOWAWA
PUIHOWA	PUIGHA	Etc.	Etc.
PUIHA	Etc.		
Etc.			

Con distancias			
OWAD	GOWAD	OWAWAD	GOWAWAD
IOWAD	IGOWA	IOWAWAD	IGOWAWAD
POWAD	PGOWAD	POWAWAD	PGOWAWAD
PIOWAD	PIGOWAD	PIOWAWAD	PIGOWAWAD
Etc.	Etc.	Etc.	Etc.

Obviamente, se podrían considerar muchos otros casos, otro tipo de aplicaciones, etc. Pero a modo de resumen de las diferentes aplicaciones que se pueden hacer sobre los operadores OWA, aquí se ha presentado un esquema general.

12. Conclusiones

12.1. Conclusiones por capítulos

En este apartado se presenta una síntesis de cada capítulo así como las conclusiones de cada uno de ellos para de esta manera poder observar con mayor claridad cuáles son las principales aportaciones procedentes de cada capítulo de la tesis.

12.1.1. Conclusiones del capítulo 2

Después de haber introducido la tesis dando información sobre la metodología de la tesis, sus principales objetivos y las publicaciones elaboradas, se ha desarrollado el capítulo 2. Este capítulo ha ido destinado a analizar el estado de la cuestión a tratar en la tesis desde un punto de vista bibliométrico utilizando como soporte la *ISI Web of knowledge*. La *ISI Web of knowledge* es una base de datos que recoge las publicaciones que la comunidad científica en general reconoce como de mayor prestigio internacional. Con esta base de datos se ha analizado diferentes aspectos sobre las publicaciones que afectan a esta tesis que han dado a conocer mucho mejor cuál es la situación en esta área de investigación.

Se ha desarrollado el análisis distinguiendo entre un análisis genérico sobre temas *fuzzy* en general y uno específico sobre operadores OWA. El análisis genérico nos ha permitido obtener una visión global sobre la situación de esta área de investigación. No obstante, esta visión ha sido orientativa ya que en los procesos de búsqueda siempre hay entradas erróneas y además un área tan grande como el mundo *fuzzy* que abarca a decenas de miles de investigadores no puede ser analizado con una palabra clave ya que muchos trabajos relacionados no utilizan la palabra clave en cuestión.

En el análisis genérico sobre la borrosidad se ha distinguido entre los artículos más citados, otras publicaciones muy citadas, los autores con más publicaciones con el *keyword fuzzy*, las principales revistas en este ámbito, la evolución histórica del número de publicaciones anuales y una clasificación por países del número de publicaciones y citaciones. También se ha estudiado los resultados obtenidos en la principal revista sobre el mundo *fuzzy* y se han obtenido resultados similares. La principal conclusión es que esta área de investigación ha experimentado una auténtica revolución y a día de hoy es un área sobradamente consolidada que abarca a decenas de miles de investigadores.

En el análisis específico sobre los operadores OWA se ha desarrollado una metodología similar distinguiendo entre artículos más citados, principales autores, principales revistas, evolución por años del número de publicaciones y clasificación por países. La principal conclusión que se observa es que los operadores OWA representan un área de investigación más reciente que poco a poco está cogiendo mayor impacto en la comunidad científica.

Finalmente, este capítulo ha finalizado con un listado de las principales revistas y asociaciones en esta área de investigación. Se ha distinguido entre revistas en la *ISI Web of knowledge* y otras revistas. En cuanto a las asociaciones y congresos sobre estos temas, se ha dado mayor importancia a aquellos que se encuentran en el ámbito nacional o europeo. Este apartado nos ha permitido detectar cuáles son los principales medios de difusión de las investigaciones en estas disciplinas.

12.1.2. Conclusiones del capítulo 3

En el capítulo 3 se desarrolla una introducción sobre la teoría de la decisión en la incertidumbre. En este capítulo se presenta un resumen de la información necesaria para desarrollar los posteriores capítulos de la tesis. Con este capítulo lo que se consigue es un repaso de conceptos básicos para poder entender la tesis. Se distinguen 3 bloques.

En el primer apartado se estudian las nociones básicas sobre la teoría de la decisión. En el segundo apartado se analizan diferentes instrumentos matemáticos para el tratamiento de la incertidumbre como son la valuación, los intervalos de confianza, los subconjuntos borrosos, los NBs, la noción de distancia y los expertones. En el subapartado de NBs, se desarrollan unos comentarios finales en donde se proponen nuevos tipos de NBs como los NBs generalizados L-R, los números borrosos generalizados de tipo n, etc. A pesar de ello, sólo se han mencionado y no se han estudiado con detalle debido a la gran extensión que ya tiene la tesis y que su principal objetivo es el análisis de los operadores OWA.

En el tercer apartado se han comentado otros elementos para la toma de decisiones como son la relación, asignación, agrupación y ordenación. Estos conceptos han servido para posteriormente entender como se desarrollan aplicaciones de los operadores OWA en estos modelos (véase capítulo 11). A pesar de que estos nuevos métodos no se han desarrollado en la tesis, viendo este apartado resulta bastante fácil entender como se implementarían en situaciones en donde intervienen los operadores OWA.

12.1.3. Conclusiones del capítulo 4

En el cuarto capítulo se ha presentado una introducción a los operadores OWA que ha permitido conocer con más detalle cuáles son los conocimientos actuales en la comunidad científica sobre dicho operador. El operador OWA generaliza a los criterios clásicos de decisión como son el criterio optimista, pesimista, de Laplace y de Hurwicz. Además, representa un instrumento de gran utilidad en otras áreas, en especial en temas estadísticos. También se han estudiado diferentes casos particulares del operador OWA que pueden resultar de gran utilidad en algunos casos particulares como la mediana OWA, el *olympic-OWA*, etc.

A continuación, se han desarrollado diferentes extensiones a los operadores OWA. Estos apartados han permitido conocer con más detalle modelos más complejos y perfeccionados sobre el operador OWA. Se ha distinguido entre extensiones de nivel 2, 3 y N, para poder observar el grado de complejidad de cada operador. En general, se trata de operadores recientemente introducidos por la comunidad científica pero en algún caso particular, han resultado ser aportaciones de la tesis como por ejemplo, el *induced heavy OWA*, el *uncertain heavy OWA*, el *fuzzy heavy OWA* y el *uncertain* *induced heavy OWA*. Algunos de estos resultados ya han sido aceptados o enviados en revistas y congresos internacionales (Merigó y Casanovas, 2006b; 2008e; 2008g).

También se han desarrollado a lo largo del capítulo diferentes aplicaciones en el ámbito empresarial. La motivación de estas aplicaciones es el mostrar la aplicabilidad de los operadores OWA en diferentes problemas decisionales relacionados con la empresa como es la selección de inversiones, productos financieros, recursos humanos, inmovilizado, productos en general en donde se ha destacado la vivienda, deportistas, etc.

12.1.4. Conclusiones del capítulo 5

En el quinto capítulo han empezado los capítulos con un gran número de aportaciones relacionadas con nuevos operadores OWA. Se ha analizado la generalización a los operadores OWA mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas. Es decir, el operador GOWA y el Quasi-OWA. A partir de una introducción sobre estos operadores recientemente propuestos en la literatura, se ha pasado a desarrollar diferentes aportaciones mediante la proposición de un gran número de extensiones a los operadores GOWA y Quasi-OWA. Cabe destacar que también se han estudiado un gran número de casos particulares que tampoco han sido analizados en la literatura aunque siguen una metodología muy similar a la utilizada en los operadores OWA y por tanto se deducen de forma bastante directa.

En primer lugar, se han propuesto extensiones de nivel 1 a los operadores GOWA y Quasi-OWA. Estas aportaciones han sido el operador IGOWA, el LOWA, el UGOWA, el FGOWA y el GHA. Cabe destacar la existencia de otras posibles extensiones, pero las presentadas se han considerado como las más representativas, además teniendo en cuenta las generalizaciones propuestas en los siguientes capítulos. Estas aportaciones ya han sido presentadas en congresos y en revistas internacionales (Merigó y Casanovas, 2007a; 2007d; 2008h; 2008i; 2008j; 2008l; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2007c; 2008e; 2008h; 2008n).

A continuación, se han presentado diferentes extensiones de nivel 2, 3 y N. Principalmente, se ha propuesto el operador ILGOWA, UIGOWA, FIGOWA, ULGOWA, IGHA, LGHA, UGHA y FGHA. Muchos de estos operadores ya han sido presentados en congresos y revistas (Merigó y Casanovas, 2008k; 2008n; 2008t; 2008v; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2008r; 2009a).

La gran ventaja de estos operadores es que ofrecen una visión mucho más completa del problema en cuestión ya que abarcan a los operadores OWA como casos particulares y también a muchas otras situaciones como el operador OWA geométrico, el cuadrático y el harmónico. De esta forma el analista puede considerar muchas situaciones distintas y según sus intereses particulares, se decantará por un caso particular u otro.

También se han desarrollado algunas aplicaciones en el ámbito de la empresa sobre problemas de decisión como la selección de recursos humanos, de estrategias y de automóviles.

12.1.5. Conclusiones del capítulo 6

En el sexto capítulo se ha introducido el uso de los operadores OWA en la noción de distancia. A este operador se le ha denominado como el operador OWAD. Tiene la gran ventaja que permite parametrizar las distancias del problema entre el máximo y el mínimo. Como el operador GOWAD y el Quasi-OWAD generalizan al operador OWAD, después de un apartado introductorio sobre el operador OWAD, el resto del capítulo se ha desarrollado a partir del operador GOWAD y Quasi-OWAD. Por tanto, las distintas aportaciones posteriores han sido presentadas a partir de estas generalizaciones y simplemente mencionando que la versión OWAD es un caso particular para así también observar las distintas extensiones desde la perspectiva OWAD. También cabe destacar que al estudiar el operador GOWAD y Quasi-OWAD, se han podido observar un gran número de casos particulares de especial relevancia como el operador OWAD geométrico, cuadrático (o de Euclides), harmónico, etc. También cabe señalar que la distancia de Minkowski y la distancia cuasi-aritmética son casos particulares de estas formulaciones.

Una vez propuesto el operador OWAD, GOWAD y Quasi-OWAD, se ha pasado a desarrollar diferentes extensiones a estos operadores. En primer lugar, se han considerado los operadores IGOWAD, LGOWAD, UGOWAD y FGOWAD, con sus respectivos casos aritméticos, geométricos y cuadráticos. Algunos de estos operadores ya han sido presentados o enviados a congresos y revistas (Merigó y Casanovas, 2008o; 2008q; 2008r; 2008u; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2006d; 2006e; 2007b; 2007d; 2007e; 2007f; 2007g; 2007h; 2008a; 2008b; 2008c; 2008d; 2008f; 2008i; 2008k; 2008s).

A continuación se han presentado las extensiones de nivel 2 y N. En este caso, no se ha entrado con tanto detalle como en el apartado anterior ya que el uso de información incierta puede llevar dificultades adicionales que se ha preferido dejar para investigaciones postdoctorales. Se ha propuesto el operador ILGOWAD, UIGOWAD, FIGOWAD, UILGOWAD y UILGHAD. En el desarrollado del operador UILGOWAD también se ha presentado brevemente un nuevo modelo lingüístico a partir de analizar las variables lingüísticas desde un contexto externo y no interno como se había hecho anteriormente. Esto ha llevado a la proposición de los números borrosos lingüísticos (NBL) ya sean triangulares, generalizados, intervalo valorados, etc.

La gran ventaja de estos operadores reside en la posibilidad de considerar los métodos clásicos de distancias de una forma más completa mediante el uso de distintos tipos de operadores OWA. Entonces, el decisor dispone de una información mucho más completa que le permitirá considerar diferentes casos posibles y escoger el que más se adapte a sus intereses.

En este capítulo se ha desarrollado una aplicación en el ámbito empresarial sobre toma de decisiones en problemas de selección de estrategias. Con la utilización de los operadores GOWAD se han podido considerar un gran número de situaciones a partir de las cuales el decisor escogerá las que más se adapten a sus intereses.

12.1.6. Conclusiones del capítulo 7

Este capítulo ha ido destinado a analizar la utilización de los operadores OWA en distintos índices de selección. De esta forma, se han propuesto unos modelos mucho más completos que aparte de representar los modelos clásicos, permiten distinguir entre diferentes situaciones según el grado de optimismo del decisor. Se ha introducido el operador OWAAC, GOWAAC, OWAIMAM y GOWAIMAM. Es decir, la utilización del operador OWA en el coeficiente de adecuación y en el índice del máximo y el mínimo nivel. También se han comentado brevemente algunas otras extensiones pero no se ha entrado a analizarlas con detalle.

Se ha considerado distintos aspectos de estos operadores como algunos casos particulares, distintas propiedades, etc. También se ha desarrollado una aplicación para cada índice sobre su utilización en problemas empresariales. En el operador GOWAAC se ha desarrollado un problema de selección de estrategias mientras que en el operador GOWAIMAM se ha desarrollado un problema de selección de productos. La gran ventaja de estos operadores es que ofrecen una información mucho más completa al decisor ya que se pueden considerar diferentes situaciones según el grado de optimismo que quiera adoptar el decisor. Algunas de estas aportaciones ya han sido presentadas en congresos y revistas (A.M. Gil-Lafuente y Merigó, 2006; Merigó y A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2006d; 2006e; 2007f; 2007g; 2007h; 2007i; 2008a; 2008f; 2008g; 2008i; 2008j; 2008k; 2008l; 2008m; 2008o; 2008p; 2008q; 2008s).

12.1.7. Conclusiones del capítulo 8

En este capítulo se propone un modelo que unifica el operador OWA con la noción de media ponderada de tal forma que ambos casos son resultados particulares de esta unificación. A este operador se le denomina OWAWA. Cabe destacar que se podría haber denominado WOWA pero como esta denominación ya existe para explicar otro tipo de operador, se ha optado por otra denominación. La unificación obtenida da la sensación de ser un inicio hacia una unificación muy completa en el sentido de que además de unificarlos, permite considerar en qué grado de importancia interviene cada uno, siendo los casos extremos el operador OWA y WA considerados individualmente.

La gran ventaja de este operador está en la posibilidad de representar problemas considerando la media ponderada y el operador OWA al mismo tiempo. Entonces, se consigue una formulación mucho más completa ya que conceptualmente permite considerar el grado de optimismo del decisor y el grado de importancia (o probabilidad subjetiva) que se le da a cada situación que puede ocurrir en el problema.

Cabe destacar la existencia de otros modelos similares como el operador WOWA y el HA. Pero por lo que se ha observado a lo largo de la investigación en la tesis, da la sensación que estos modelos son incompletos aunque en algunos casos particulares pueden resultar de utilidad. También se ha comentado una alternativa que sigue la metodología que según el doctorando es la más acertada de las disponibles en la comunidad científica y es mediante el uso del concepto de *immediate probability*. Entonces, lo que se ha desarrollado es el *immediate weighted* OWA (IWOWA). Aún así, cabe destacar que este modelo también es incompleto aunque representa un paso adelante que se acerca más al operador OWAWA.

Las aportaciones de este capítulo se han dividido en 5 bloques. En el primer bloque se ha desarrollado una introducción al operador OWAWA explicando el significado de su unificación y las diferentes aplicaciones posibles a realizar. También se han considerado diferentes casos particulares en donde se ha podido observar que el operador OWA y WA son casos particulares de esta formulación superior.

En el segundo bloque se han introducido diferentes extensiones a los operadores OWAWA. Se han considerado las extensiones que según el doctorando (y desde la perspectiva de los OWA) son más representativas como son el operador IOWAWA, el LOWAWA, el UOWAWA y el FOWAWA. También se han considerado algunas extensiones de nivel 2 como el operador ILOWAWA, el UIOWAWA y el FIOWAWA.

En el tercer bloque se ha presentado una generalización al operador OWAWA mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas. A estos operadores se les ha denominado GOWAWA y Quasi-OWAWA. La gran ventaja que presentan es la posibilidad de incluir al operador OWAWA como un caso particular de una generalización mayor que entre otros, ha incluido al operador OWAWA geométrico (OWGAWA), al cuadrático (OWQAWA) y al harmónico (OWHAWA). También se ha desarrollado una aplicación en el ámbito empresarial sobre toma de decisiones en la selección de inversiones. Se ha observado que con esta formulación se pueden considerar un amplio abanico de situaciones a partir de los cuales, el decisor escogerá aquel o aquellos que se adapten más a sus intereses.

En el cuarto bloque se proponen un gran número de extensiones a los operadores GOWAWA y Quasi-OWAWA como son el operador IGOWAWA, el LGOWAWA, el UGOWAWA y el FGOWAWA. También se han propuesto extensiones de nivel 2 y superior como el operador ILGOWAWA, el UIGOWAWA y el FIGOWAWA. Con estas extensiones se han conseguido unos operadores GOWAWA y Quasi-OWAWA mucho más completos capaces de representar problemas con información imprecisa ya sea mediante el uso de información lingüística, intervalos de confianza o NBs.

En el quinto bloque se han comentado otras extensiones posibles a los operadores OWAWA. Se ha distinguido entre extensiones mediante el uso de distancias y mediante el uso de índices de selección. Mediante el uso de distancias se ha obtenido el operador OWAWAD a partir del cual se han desarrollado modelos más completos como la generalización que lleva al GOWAWAD y al Quasi-OWAWAD, la que lleva al IGOWAWAD y al Quasi-OWAWAD, y otros modelos para representar información incierta como el operador LGOWAWAD, Quasi-LOWAWAD, UGOWAWAD y Quasi-UOWAWAD. Finalmente, se ha comentado brevemente la utilización de los índices de selección en donde se ha presentado el operador OWAWAAC, el GOWAWAAC, el OWAWAIMAM y el GOWAWAIMAM.

En resumen, se puede decir que en este capítulo se ha introducido la unificación entre el operador OWA y la media ponderada y se han desarrollado un gran número de operadores de gran utilidad a partir de dicha unificación. En cuanto a publicaciones, decir que estas investigaciones son más recientes y todavía no se ha presentado ningún artículo en congresos o revistas. No obstante, cabe destacar que en el 2009 y años posteriores se espera poder presentar un gran número de artículos que versarán sobre las nuevas ideas propuestas en este capítulo.

12.1.8. Conclusiones del capítulo 9

En este capítulo se propone un modelo bastante similar al del capítulo 8 que unifica el operador OWA con la noción de probabilidad. De esta forma se obtiene una formulación que abarca como casos particulares al operador OWA y a la probabilidad. Se le ha denominado como el operador POWA y la gran ventaja que presenta es la posibilidad de considerar en un mismo problema el grado de optimismo del decisor e información probabilística. Esta unificación también de la sensación de ser el inicio del camino correcto a seguir en el futuro ya que además de unificar ambos conceptos, permite incluirlos según el grado de importancia que se les quiera dar de tal forma que los casos extremos serían el operador OWA y la probabilidad propiamente dicho.

Cabe destacar la existencia de un modelo denominado como *immediate probability* que representa un primer paso previo al modelo presentado en este capítulo. Debido a ello, también se ha comentado y se han desarrollado nuevas extensiones como el IP-IOWA y el IP-UOWA. Aun así, como este modelo no es el correcto, simplemente se ha comentado en algunos casos de forma muy resumida. También cabe la posibilidad de extender el operador WOWA y HA a problemas probabilísticos ya que simplemente sería interpretar la media ponderada como la probabilidad.

Las aportaciones de este capítulo también se dividen en cinco bloques. En el primer bloque se presenta esta nueva unificación introduciendo el operador POWA y comentando diferentes propiedades y aplicaciones posibles. También se consideran diferentes casos particulares que pueden surgir de adoptar una postura concreta por parte del decisor.

En el segundo bloque se introducen diferentes extensiones a los operadores POWA. Se presentan aquellos casos que se consideran como más representativos y son el operador PIOWA, PLOWA, PUOWA y PFOWA. También se consideran extensiones más complejas como son el operador PILOWA, PUIOWA y PIFOWA. La ventaja de estas extensiones es que representan los problemas en donde interviene el operador POWA de forma más completa ya sea mediante el uso de información incierta representada por variables lingüísticas, intervalos de confianza o NBs.

En el tercer bloque se desarrolla una generalización al operador POWA mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas, con lo que se obtiene el operador PGOWA y Quasi-POWA. Estos casos son de gran interés e incluyen a un gran número de casos particulares como al operador POWA, al operador POWA geométrico, cuadrático y harmónico. También se incluyen a casos más simples de gran interés como la probabilidad generalizada, la probabilidad geométrica, cuadrática, harmónica, etc. A continuación, se desarrollan diferentes extensiones a los operadores PGOWA siguiendo con la metodología del segundo bloque. Por tanto, se propone el operador PIGOWA, el PLGOWA, el PUGOWA y el PFGOWA. A continuación, también se desarrollan extensiones de nivel 2 a los operadores PGOWA como son el PILGOWA, el PUIGOWA y el PIFGOWA. Estas extensiones representan una formulación más completa al operador PGOWA y permiten tratar diferentes problemas en donde la información disponible es más compleja y se necesita de formas alternativas de representación como pueden ser las variables lingüísticas, los intervalos de confianza y los NBs.

En este bloque también se presenta una aplicación de este modelo en un problema empresarial sobre selección de estrategias. Con este modelo se puede utilizar información probabilística y operadores OWA al mismo tiempo, consiguiendo así una representación mucho más completa del problema. Además, el análisis permite considerar diferentes situaciones posibles según el grado de optimismo del decisor lo cual puede llevar a decisiones distintas.

En el cuarto bloque se presenta la utilización de las medidas de distancia en el operador POWA. Esto lleva a sugerir el operador POWAD y sus distintos casos particulares entre los cuales se destaca la distancia probabilística. La gran ventaja que presenta es la posibilidad de utilizar probabilidades y grados de optimismo en los modelos de distancia. A continuación, se desarrollan distintas generalizaciones mediante el uso de distancias generalizadas y cuasi-aritméticas obteniéndose así el operador PGOWAD y Quasi-POWAD y otras extensiones como el PIGOWAD y el Quasi-PIOWAD, el PLGOWAD y Quasi-PLOWAD, y el PUGOWAD y Quasi-PUOWAD.

En el quinto bloque se introducen otras extensiones sobre el uso del operador POWA en los índices de selección como son el coeficiente de adecuación y el índice del máximo y el mínimo nivel. Se introducen las nuevas versiones desde una perspectiva aritmética y generalizada, es decir, se introduce el operador POWAAC, PGOWAAC, POWAIMAM y PGOWAIMAM.

12.1.9. Conclusiones del capítulo 10

En este capítulo se propone un modelo todavía más general que probablemente representa la aportación más importante de la tesis debido a que incluye a todos los otros grandes conceptos como casos particulares. Se trata del operador POWAWA. Es un operador que unifica a la probabilidad, a la media ponderada y al operador OWA en la misma formulación, de tal forma que estos conceptos son casos particulares de esta estructura superior. La gran ventaja que ofrece es la posibilidad de incluir estos casos en este modelo general de tal forma que se pueden analizar los problemas utilizando probabilidades, medias ponderadas y operadores OWA. Esta unificación también se muestra bastante flexible lo cual da la sensación de ser el camino a seguir en el futuro ya que además de unificarlos, permite incluirlos en mayor o menor medida según la información disponible o los intereses del análisis. También resulta de interés el observar que en los casos extremos se obtiene el operador OWA, o la media ponderada, o la probabilidad, propiamente dicho. Además, también tiene otros casos intermedios de gran interés como son el operador POWA, el OWAWA y el PWA.

El PWA no se analiza en un capítulo exclusivo porque no es un operador OWA. Pero se tiene que destacar que es extremadamente relevante y representa una de las principales aportaciones de la tesis. Este operador se ha ido comentando sucesivamente como un caso particular del operador POWAWA para aquellas situaciones en donde únicamente se desee considerar la probabilidad y la media ponderada, lo cual en la actualidad es un hecho muy frecuente ya que la mayoría de estudios suelen estar enfocados en la noción de probabilidad o de media ponderada.

Este modelo también se podría haber formulado a partir del concepto de *immediate probability*. Se obtendría otra forma de combinar a las probabilidades, a la media ponderada y al operador OWA, pero esta formulación se ha comprobado que es incompleta ya que es una forma artificial de unificarlos y se podrían haber utilizado muchas otras formas similares. Por lo visto en esta tesis, se podría decir que el *immediate probability* (o en este caso *immediate weighted probability*) es un caso muy particular de Quasi-POWAWA.

Las aportaciones de este capítulo se dividen en cinco bloques. En el primer bloque se presenta el operador POWAWA y la unificación conseguida con este modelo. Se estudian distintos aspectos relacionados con este operador y distintos casos particulares de entre los cuales surgen muchos de gran interés como el PWA, el POWA, el OWAWA, la media parcialmente aritmética en donde se distingue la ponderada, la probabilística, la OWA, la ponderada probabilística, la ponderada OWA y la probabilística OWA. También se obtienen otros resultados de interés como son el máximo y el mínimo ponderado probabilístico y muchos otros casos similares.

En el segundo bloque se analizan diferentes extensiones a los operadores POWAWA de forma que se obtienen unas formulaciones más completas según el problema analizado. Se desarrolla el operador PIOWAWA, PLOWAWA, PUOWAWA y PFOWAWA, de los cuales, los tres últimos van destinados a analizar problemas en donde la información es incierta y se necesita de algún método alternativo para representarla como es el uso de variables lingüísticas, intervalos de confianza y NBs. En cuanto al operador PIOWAWA, decir que es un caso más completo en donde el operador OWA representa un concepto más complejo y general al grado de optimismo. A continuación, se estudia individualmente el operador PWA ya que a este caso no se le ha dedicado un capítulo exclusivo como el POWA y el OWAWA. Se presenta sus conceptos principales y se estudian algunas extensiones básicas como son el LPWA, el UPWA y el FPWA. Seguidamente, se presentan otras extensiones al operador POWAWA como son el PILOWAWA, el PUIOWAWA y el PFIOWAWA. Todos estos casos son de gran relevancia y es importante destacar que a pesar de presentarse en la tesis de forma muy breve, se espera que en el futuro se puedan desarrollar artículos en revistas internacionales sobre cada uno de estos casos. Por tanto, es evidente que de este bloque surgirán un gran número de artículos.

En el tercer bloque se desarrolla una generalización mayor mediante el uso de medias generalizadas y cuasi-aritméticas. Se les denomina como operador GPOWAWA y Quasi-POWAWA. Estas generalizaciones son de gran utilidad en el sentido que abarcan a un gran número de casos particulares ya que se trata de una de las formulaciones más completas de la tesis (junto con las versiones de distancias explicadas en el cuarto bloque). Aparte de los casos particulares comentados en el operador POWAWA, también se incluyen como casos particulares al operador POWAWA geométrico (POWGAWA), cuadrático (POWQAWA) y harmónico (POWHAWA). Además, la unificación obtenida en este caso, engloba a la probabilidad generalizada, a la media ponderada generalizada y al operador GOWA. Cabe destacar que esta formulación da mucho juego a la hora de estudiar casos particulares ya que se pueden combinar casos particulares de los 3 grandes conceptos, considerando el parámetro λ que lleva a versiones geométricas, cuadráticas, etc., analizando diferentes vectores de ponderaciones. Y todo esto combinado entre sí. Es decir, considerar geométrico la parte OWA, cuadrático la parte WA, etc. A continuación, se han introducido diferentes extensiones a los operadores PGOWAWA como son el operador PIGOWAWA, el PLGOWAWA, el PUGOWAWA y el PFGOWAWA. También se ha destacado el caso particular del GPWA y sus principales extensiones como son el LGPWA, el UGPWA y el FGPWA. Este bloque ha finalizado con la presentación de extensiones de nivel 2 a los PGOWAWA como el PILGOWAWA, el PUIGOWAWA y el PFGOWAWA.

En el cuarto bloque se ha desarrollado el uso de los métodos de distancia en el operador POWAWA obteniéndose el operador POWAWAD. La gran ventaja de este operador está en la posibilidad de utilizar al mismo tiempo probabilidades, medias ponderadas y operadores OWA, en las medidas de distancia. A continuación se ha generalizado el modelo mediante el uso de medias (o distancias) generalizadas y cuasi-aritméticas. Entonces, se ha obtenido el operador PGOWAWAD y el Quasi-POWAWAD. La gran ventaja de estas generalizaciones es que además de incluir al POWAWAD como un caso particular, también incluyen a otras versiones geométricas, cuadráticas, etc., de dicho operador. Seguidamente, se desarrollan algunas de sus principales extensiones como el operador PIGOWAWAD y Quasi-PIOWAWAD, el PLGOWAWAD y Quasi-PLOWAWAD, y el PUGOWAWAD y Quasi-PUOWAWAD. Posteriormente se analiza el caso particular del PWA con distancias es decir, el PWAD o en su versión general, el GPWAD y Quasi-PWAD. También se comentan alguna de sus principales extensiones como es el operador UGPWAD y Quasi-UPWAD. Este bloque ha finalizado comentado otras posibles extensiones. En resumen, se han introducido un gran número de operadores POWAWA basados en medidas de distancia.

El capítulo ha finalizado con un quinto bloque sobre otras extensiones en donde se ha desarrollado la utilización de los índices de selección en el operador POWAWA. De esta forma se han obtenido el operador POWAWAAC, el PGOWAWAC, el POWAWAIMAM y el PGOWAWAIMAM. Estos operadores son de gran utilidad en diferentes problemas empresariales ya que permiten considerar una gran variedad de situaciones en función de las probabilidades y medias ponderadas disponibles y del grado de optimismo del decisor.

12.1.10. Conclusiones del capítulo 11

En el capítulo 11 se analiza la aplicabilidad de los operadores OWA y se sugieren distintas aplicaciones posibles a desarrollar en el futuro. La principal conclusión a la que se llega en este capítulo es que la aplicabilidad de los operadores OWA y de la incertidumbre en general es ilimitada. Debido a ello, el número de aplicaciones que se podrían realizar es incalculable. Por tanto, en la tesis se presenta un resumen desde la perspectiva de investigación del doctorando en donde principalmente se consideran aplicaciones en otros métodos de decisión y en distintos problemas empresariales. Aun así, también se menciona la posibilidad de realizar aplicaciones en otros ámbitos de la ciencia como en la estadística, en la física, etc.

Para desarrollar el análisis de las aplicaciones, se distinguen 3 bloques. En el primer bloque se da una visión general de todas las aplicaciones considerando problemas de gestión empresarial, diferentes métodos de decisión y aplicabilidad de las ciencias en general. En el análisis de aplicaciones empresariales se resume algunas áreas fundamentales de aplicación y diferentes tipos de aplicación, y utilizando diferentes instrumentos para el tratamiento de la incertidumbre. En el análisis de la aplicabilidad en otros métodos de decisión se comenta brevemente algunas aplicaciones posibles y la posibilidad de combinar varios métodos en un mismo problema. En el estudio de la aplicabilidad en las ciencias en general se elaboran unos enunciados que resumen la situación en relación a las aplicaciones diciendo que la aplicabilidad es ilimitada. A partir de estos enunciados se adquiere una mejor comprensión de cual es la situación en la que nos encontramos en esta área de investigación..

En el segundo bloque se analiza con más detalle un gran número de aplicaciones posibles a desarrollar en el futuro sobre los operadores OWA en distintos problemas empresariales. Este apartado se introduce presentando un resumen de una gran parte de las diferentes técnicas disponibles sobre los operadores OWA de entre los cuales se presentan los operadores OWA clásicos y todas las nuevas aportaciones procedentes de esta tesis. También se consideran los casos en los que intervienen otros métodos de decisión. Estas aplicaciones no se desarrollan en el trabajo (a excepción de los problemas de selección comentados a lo largo del trabajo) ya que la cifra es incalculable y se considera que con lo visto en los anteriores capítulos se puede sobreentender como llevar a cabo las aplicaciones. Principalmente, se comentan aplicaciones en problemas de gestión estratégica, gestión financiera, gestión de recursos humanos, gestión de productos en general, gestión de la empresa en general y en otros problemas de decisión que podría abarcar diferentes tipos de decisiones económicas, políticas, personales, inconscientes, etc. La conclusión a la que se llega es que los problemas de decisión se encuentran en todas partes hasta el punto de que el propio texto que escribe el doctorando ahora mismo esta condicionado por un constante proceso de decisión inconsciente en relación a qué tipo de texto utilizar para desarrollar las explicaciones, etc. Esto demuestra la gran importancia que tiene el proceso de decisión y la importancia de ir desarrollando cada vez más modelos y aplicaciones que incrementen el conocimiento de la teoría de la decisión.

En el tercer bloque se estudia la aplicabilidad de los operadores OWA en distintos métodos de decisión. Las aplicaciones simplemente se comentan de forma resumida indicando distintos operadores o técnicas que se podrían utilizar en el problema. Se consideran como métodos de decisión a la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer, la minimización del coste de Savage, el AHP, el TOPSIS, las decisiones de grupo, las decisiones secuenciales, la noción de utilidad y los procesos de asignación y agrupación. También se consideran brevemente otros aspectos relacionados como son las series temporales, instrumentos estadísticos como la varianza, el uso de uninormas, la integral de Choquet, etc. La conclusión a la que se llega es que para cada método se pueden desarrollar un gran número de aplicaciones que pueden desembocar en un gran número de artículos de investigación. Prueba de ello es el primer método estudiado en relación a la teoría de la evidencia en donde ya se han desarrollado un gran número de aportaciones a lo largo de la etapa doctoral. Cabe destacar que de forma similar, sería posible desarrollar diferentes aplicaciones en los otros métodos. Por tanto, se observa que la cifra de artículos a desarrollar en el futuro sobre estos temas es incalculable y por tanto, se espera la participación de otras personas para poder desarrollar de una forma más eficiente todas estas ideas.

12.1.11. Conclusiones de los artículos del anexo

En este capítulo se presentan todos los artículos que el doctorando ha ido desarrollando a lo largo de la etapa predoctoral. Como el idioma internacional es el inglés, todos los artículos están en dicho idioma. Se distinguen entre artículos de congreso y de revista. Como se puede observar, los resultados obtenidos son muy positivos y a la vez prometedores. Además, viendo la parte que representan las aportaciones sobre la tesis, se puede observar que el número de publicaciones futuras procedentes de la tesis doctoral es realmente elevado. Abarcando los grandes conceptos, se puede observar que la cifra de artículos tendría que superar tranquilamente la cifra de cien por parte del doctorando y podría superar la cifra de mil si se incluyen trabajos de otras personas sobre algunas de las aplicaciones que se comentan en la tesis. Por tanto, parece evidente que los resultados de esta tesis son increíblemente buenos.

Resumiendo las publicaciones, se puede decir que en la actualidad se ha publicado lo siguiente en relación a la tesis doctoral (y sin olvidar que el grueso de publicaciones está por llegar en los próximos meses y años).:

- 31 artículos de revista
  - 15 artículos de revista publicados
  - 3 artículos de revista aceptados
    - 2 artículos de revista *SCI* aceptados
  - 13 artículos de revista enviados
    - 12 artículos de revista *SCI* enviados
    - 2 artículos de revista *SCI* en segunda ronda de revisión con "*major revision*".
  - + 3 artículos de revista *SCI* en preparación en el muy corto plazo.
  - + versión de revista de la mayoría de artículos de congreso más reciente.
  - + 2 *Working papers*
- 40 artículos de congreso
  - 40 artículos de congreso publicados
    - 6 artículos de congreso en la *ISI Proceedings*
  - + varios artículos de congreso en preparación en el muy corto plazo (congresos del 2009 con *deadline* en los primeros meses del año).

Como se puede observar, estos resultados son muy buenos y prometedores aunque todavía falta por acabar de consolidarse en el mundo de las revistas de la *ISI Web of knowledge*. De momento las cosas van bien aunque al principio cuesta y se espera que poco a poco los artículos enviados vayan entrando en dichas revistas ya que el doctorando cada vez va cogiendo más experiencia y práctica en la investigación y en como elaborar los trabajos para que estos se publiquen en estas revistas. También cabe destacar que es probable que cuando se presente la tesis, alguno de los artículos aceptados en revistas SCI ya esté en Internet en el sistema "*in press*", en especial el artículo aceptado en *Information Sciences* (*Impact Factor* 2007 – 2.147) que según la confirmación que recibimos, se nos dijo que el trabajo estaría disponible en el sistema "*in press*" hacia la segunda semana de diciembre. Como es bien sabido el sistema "in press" es la publicación de los artículos que ya están aceptados totalmente en la revista y que están a la espera de recibir numeración. Esto se hace para que la comunidad científica pueda disponer de los avances más recientes unos meses por adelantado para así incrementar la eficiencia de la investigación.

También destacar que gracias a los 6 artículos en la *ISI Proceedings*, el doctorando ya entra en las clasificaciones relacionadas con los operadores OWA en el Top-100 mundial. Concretamente, con el *keyword* OWA y con artículos que citan al trabajo de Yager de 1988 sobre la introducción de los operadores OWA. Aún así, estas clasificaciones son simplemente orientativas. Y también cabe destacar que en el corto plazo se espera poder ir ganando posiciones en esta área bastante deprisa. Además, si se valora la cifra total de trabajos del doctorando en la actualidad sobre operadores OWA, se observa que la cifra llega a 40 trabajos. Por tanto, el objetivo del doctorando es poder asentarse en los próximos años como una de las principales autoridades mundiales en relación a los operadores OWA y temas relacionados. Y además se espera que se puedan abrir nuevos caminos a partir de esta tesis como sería el operador POWAWA o el PWA que pueden ser tratados como nuevos puntos de partida de forma similar al operador OWA.

12.2. Conclusiones generales

Las conclusiones generales de la tesis se pueden resumir diciendo que "*esta tesis ha aportado un elevado número de nuevos operadores OWA y nuevas formulaciones generales en combinación con otros grandes conceptos como la probabilidad, la media ponderada y la noción de distancia*".

Entrando un poco más en detalle se podría decir que las grandes aportaciones de la tesis han sido las siguientes:

- Elaboración de nuevas extensiones a los operadores OWA en su versión más simplificada.
- Elaboración de diferentes extensiones a los operadores OWA mediante la noción de media generalizada y cuasi-aritmética.
- Elaboración de diferentes medidas de distancia basadas en los diferentes tipos de operadores OWA disponibles.
- Utilización de los operadores OWA en los índices de selección.
- Unificación del operador OWA con la media ponderada (WA) y desarrollo de diferentes extensiones y generalizaciones.
- Unificación del operador OWA con la probabilidad y desarrollo de diferentes extensiones y generalizaciones.
- Unificación entre la probabilidad, la media ponderada y el operador OWA, y elaboración de diferentes extensiones y generalizaciones.
- Unificación entre la probabilidad y la media ponderada y elaboración de diferentes extensiones y generalizaciones.
- Elaboración esquemática de un gran número de posibles aplicaciones en diferentes problemas empresariales y en diferentes métodos de decisión.
- Todas las publicaciones hechas por el doctorando a lo largo de su periodo como estudiante de doctorado.

Como se puede observar, cada una de estas grandes aportaciones va muy relacionada con uno de los capítulos de la tesis.

Además, se tiene que destacar otras grandes aportaciones que aun no estando estrictamente relacionadas con las aportaciones de la tesis por no tratarse de operadores OWA, se tiene que destacar que pueden ser de gran utilidad en el futuro. De entre estas aportaciones se pueden destacar las siguientes:

- Elaboración de un análisis bibliométrico sobre la situación de las investigaciones en el mundo *fuzzy* y de los operadores OWA.
- Enumeración de diferentes tipos de NBs todavía no considerados en la comunidad científica.
- Comentarios sobre diferentes tipos de variables lingüísticas todavía no consideradas en la comunidad científica ya sea mediante un análisis interno de dichas variables o mediante un análisis externo que ha llevado a la introducción de los NB lingüísticos.
- Comentarios sobre aplicabilidad de los operadores OWA en las ciencias en general que llevan a la conclusión de que la aplicabilidad de los operadores OWA y de las ciencias en general es ilimitada.

Cabe destacar que es de esperar que se desarrollen muchos de estos aspectos en el futuro aunque obviamente es imposible que el doctorando abarque por sí solo todos estos problemas ya que la cuantía de trabajo a desarrollar es incalculable.

Analizando estas grandes conclusiones, se puede decir que de cada conclusión pueden surgir un número incalculable de artículos. Analizando únicamente los casos estudiados en la tesis y que en el futuro se espera poder ampliar para presentar en diferentes revistas internacionales, se puede decir que se han conseguido los siguientes resultados o aportaciones a la comunidad científica.

En el capítulo 4 de introducción a los operadores OWA

Aunque la mayoría de los operadores explicados en este capítulo son los disponibles por la comunidad científica, cabe destacar que el doctorando también ha aportado algunos operadores nuevos:

- *Induced heavy OWA operator.*
- *Uncertain heavy OWA operator.*
- *Fuzzy heavy OWA operator.*
- *Uncertain induced heavy OWA operator.*
- *Fuzzy induced heavy OWA operator.*
- Algunas extensiones a los *hybrid averaging operators* aunque se desconoce con exactitud porque algunos de estos operadores se presentan en revistas chinas utilizando el idioma chino.

Obsérvese que estas aportaciones ya han dado resultados positivos como la aceptación de un trabajo en la revista SCI *Fuzzy Sets and Systems*, y la publicación del FHOWA en una revista internacional. También se ha enviado el FIHOWA a una revista internacional SCI.

En el capítulo 5 de generalizaciones a los operadores OWA

- *Induced GOWA operator.*
- *Linguistic GOWA operator.*
- *Uncertain GOWA operator.*
- *Fuzzy GOWA operator.*
- *Generalized hybrid averaging operator.*
- *Induced linguistic GOWA operator.*
- *Uncertain induced GOWA operator.*
- *Fuzzy induced GOWA operator.*
- *Uncertain linguistic GOWA operator.*
- *Induced generalized hybrid averaging operator.*
- *Linguistic generalized hybrid averaging operator.*
- *Uncertain generalized hybrid averaging operator.*
- *Fuzzy generalized hybrid averaging operator.*

Cabe destacar que el *Induced GOWA operator* es el operador OWA que ha sido aceptado en la revista SCI *Information Sciences*. También hay cinco más (LGOWA, UGOWA, FGOWA, GHA y FGHA) enviados a revista y otros tres (ILGOWA, UIGOWA y FIGOWA) que ya han sido preparados para congresos, y en el corto plazo se desarrollará su versión extendida de revista.

<u>En el capítulo 6 de medidas de distancia con los operadores OWA</u>

- *OWA distance operator.*
- *Euclidean OWA distance operator.*
- *Minkowski OWA distance operator.*
- *Quasi-OWA distance operator.*
- *Induced generalized* (*Minkowski OWAD y Quasi-OWAD*) *OWA distance operator.*
    - *Induced OWAD.*
    - *Induced OWGAD.*
    - *Induced OWQAD.*
    - *Induced OWHAD.*
- *Linguistic generalized OWA distance operator.*
    - *Linguistic OWAD.*
    - *Linguistic OWQAD.*
    - Etc.
- *Uncertain generalized OWA distance operator.*
- *Fuzzy generalized OWA distance operator.*
- *Induced heavy OWA distance operator.*
- *Induced linguistic generalized OWA distance operator.*
- *Uncertain induced generalized OWA distance operator.*
- *Fuzzy induced generalized OWA distance operator.*
- *Uncertain induced linguistic generalized OWA distance operator.*
- *Uncertain induced generalized hybrid averaging distance operator.*

Cabe destacar que el operador *OWA distance* en un artículo orientado a la toma de decisiones está en segunda ronda de revisión con "*major revision*" en la revista SCI *Information Sciences*. También hay otros trabajos publicados en revistas sobre los operadores EOWAD, MOWAD y Quasi-OWAD y en congresos sobre el IOWAD, EIOWAD, IMOWAD y el LOWAD.

<u>En el capítulo 7 de índices de selección con los operadores OWA</u>

- *OWAWAAC.*
- *GAC.*
- *GOWAAC.*
- *Quasi-OWAAC.*
- *OWAIMAM.*
- *GIMAM.*
- *GOWAIMAM.*
- *Quasi-OWAIMAM.*

Cabe destacar que este capítulo ya ha dado resultados en congresos y en la actualidad los operadores OWAAC y GOWAAC ya han sido aceptados en revistas internacionales mientras que el OWAIMAM y el GOWAIMAM están en proceso de revisión.

En el capítulo 8 de unificación entre el operador OWA y la media ponderada

- *OWAWA operator.*
- *IOWAWA operator.*
- *LOWAWA operator.*
- *UOWAWA operator.*
- *FOWAWA operator.*
- *ILOWAWA operator.*
- *UIOWAWA operator.*
- *FIOWAWA operator.*
- *Generalized OWAWA operator*
- *Quasi-OWAWA operator.*
- *Induced GOWAWA operator.*
- *Linguistic GOWAWA operator.*
- *Uncertain GOWAWA operator.*
- *Fuzzy GOWAWA operator.*
- *Induced linguistic GOWAWA operator.*
- *Uncertain induced GOWAWA operator.*
- *Fuzzy induced GOWAWA operator.*
- *OWAWA distance operator.*
- *Generalized OWAWA distance operator.*
- *Quasi-OWAWA distance operator.*
- *Induced GOWAWA distance operator.*
- *Linguistic GOWAWA distance operator.*
- *Uncertain GOWAWA distance operator.*
- *OWAWA adequacy coefficient.*
- *GOWAWA adequacy coefficient.*
- *OWAWA index of maximum and minimum level.*
- *GOWAWA index of maximum and minimum level.*

Estas aportaciones y las de los dos próximos capítulos son las más recientes y todavía no se han presentado en congresos o en revistas. A lo largo del año que viene se espera elaborar las primeras publicaciones sobre estas aportaciones.

En el capítulo 9 de unificación entre la probabilidad y el operador OWA

- *Probabilistic OWA operator.*
- *PIOWA operator.*
- *PLOWA operator.*
- *PUOWA operator.*
- *PFOWA operator.*

- *PILOWA operator.*
- *PUIOWA operator.*
- *PFIOWA operator.*
- *Generalized POWA operator*
- *Quasi-POWA operator.*
- *Induced PGOWA operator.*
- *Linguistic PGOWA operator.*
- *Uncertain PGOWA operator.*
- *Fuzzy PGOWA operator.*
- *Induced linguistic PGOWA operator.*
- *Uncertain induced PGOWA operator.*
- *Fuzzy induced PGOWA operator.*
- *POWA distance operator.*
- *Generalized POWA distance operator.*
- *Quasi-POWA distance operator.*
- *Induced PGOWA distance operator.*
- *Linguistic PGOWA distance operator.*
- *Uncertain PGOWA distance operator.*
- *POWA adequacy coefficient.*
- *PGOWA adequacy coefficient.*
- *POWA index of maximum and minimum level.*
- *PGOWA index of maximum and minimum level.*

En el capítulo 10 de unificación entre probabilidad, media ponderada y operador OWA

- *POWAWA operator.*
- *PIOWAWA operator.*
- *PLOWAWA operator.*
- *PUOWAWA operator.*
- *PFOWAWA operator.*
- *PILOWAWA operator.*
- *PUIOWAWA operator.*
- *PFIOWAWA operator.*
- *PFIHOWAWA operator.*
- *Generalized POWAWA operator*
- *Quasi-POWAWA operator.*
- *Induced PGOWAWA operator.*
- *Linguistic PGOWAWA operator.*
- *Uncertain PGOWAWA operator.*
- *Fuzzy PGOWAWA operator.*
- *Induced linguistic PGOWAWA operator.*
- *Uncertain induced PGOWAWA operator.*
- *Fuzzy induced PGOWAWA operator.*
- *POWAWA distance operator.*
- *Generalized POWAWA distance operator.*
- *Quasi-POWAWA distance operator.*

- *Induced PGOWAWA distance operator.*
- *Linguistic PGOWAWA distance operator.*
- *Uncertain PGOWAWA distance operator.*
- *Induced heavy POWAWA distance operator.*
- *POWAWA adequacy coefficient.*
- *PGOWAWA adequacy coefficient.*
- *POWAWA index of maximum and minimum level.*
- *PGOWAWA index of maximum and minimum level.*
- *Probabilistic weighted averaging operator.*
- *Linguistic PWA operator.*
- *Uncertain PWA operator.*
- *Fuzzy PWA operator.*
- *Generalized PWA operator.*
- *Linguistic GPWA operator.*
- *Uncertain GPWA operator*
- *Fuzzy GPWA operator.*
- *PWA distance operator.*
- *Generalized PWA distance operator.*
- *Linguistic GPWA distance operator.*
- *Uncertain GPWA distance operator.*

Cabe destacar que estas son a grandes rasgos las aportaciones de la tesis sobre nuevos operadores OWA. Cabe señalar que bien presentados y desarrollando diferentes problemáticas, aplicaciones, etc., para cada uno de ellos, entonces, por cada uno de estos casos, se podría presentar un artículo de revista internacional y en muchos casos (más de la mitad para los comentados en la tesis ya que son los más significativos) en revistas SCI.

Además, no se tiene que olvidar las diferentes aportaciones obtenidas sobre utilización de los operadores OWA en diferentes métodos de decisión como son la teoría de la evidencia y la minimización del coste. Aunque estos temas sólo se han comentado brevemente en el capítulo de aplicabilidad del operador OWA, los trabajos ya desarrollados, se han incluido en el anexo. Obviamente, cada artículo presentado en el anexo, representa una contribución a la comunidad científica internacional.

12.3. Líneas futuras de investigación

La principal línea futura de investigación a desarrollar una vez finalizada la tesis doctoral consistirá en materializar todo el trabajo de la tesis mediante publicaciones en congresos y en revistas internacionales. De momento ya se ha hecho una parte, pero todavía queda mucho por hacer y este es el aspecto fundamental para que mundialmente se reconozca esta investigación con todo su esplendor. La estrategia de publicación más o menos ya está encaminada y ya se conocen la mayoría de congresos y revistas en donde se cree que estas aportaciones tienen mejor aceptación. Pero todavía queda mucho camino por recorrer.

En esta tesis se han presentado un elevadísimo número de nuevos operadores OWA procedentes de diferentes extensiones o generalizaciones. Pero aun queda mucho por hacer y se pueden desarrollar muchos otros tipos de operadores OWA. Una línea a la cual el doctorando dará importancia es a seguir con el proceso de unificación no sólo del operador OWA sino también de la media ponderada y de la probabilidad. En este ámbito se estudiará el uso de la noción de utilidad y otros conceptos próximos a partir de los cuales se tratará de diseñar una mejor teoría de la decisión.

Esta línea de investigación también se desarrollará mediante la elaboración de nuevas aplicaciones de los operadores OWA en diferentes métodos de decisión como en la teoría de la evidencia, en la minimización del coste, en el AHP, en el TOPSIS, en las decisiones de grupo, en las decisiones secuenciales y en los procesos de asignación y agrupación. Debido al gran número de aplicaciones posibles en esta línea de investigación es imposible que se lleve de forma individual y se espera la participación de otras personas en el futuro para poder desarrollar estos nuevos modelos. Cabe destacar que ya se han hecho muchas aplicaciones en la teoría de la evidencia y alguna en la minimización del coste, pero todavía falta mucho por desarrollar porque el abanico de posibilidades es incalculable.

También se considerarán diferentes aplicaciones posibles en diferentes ámbitos, dando especial relevancia a los problemas empresariales. Con el desarrollo de diferentes operadores OWA, se suele mostrar su aplicabilidad con la elaboración de un problema de decisión empresarial o similar. Esta faceta se seguirá desarrollando en los nuevos operadores OWA que se presenten en la comunidad científica internacional ya sea en problemas de gestión de inversiones, estrategias, finanzas, recursos humanos, productos en general, otros problemas empresariales, otros problemas decisionales ya sean de tipo político, económico, personal, etc.

También se tienen que destacar las aportaciones en otras ramas de la ciencia diferentes de la teoría de la decisión, en especial, en la estadística. Se espera que en el futuro se puedan desarrollar algunas aportaciones en la estadística con el diseño de algunas técnicas estadísticas nuevas mediante el uso de diferentes tipos de operadores OWA. Y se puede preveer que en el futuro cada vez irán apareciendo más aportaciones en este ámbito y no sólo en la estadística sino que en diferentes ramas de la ciencia en general, ya sea en la física, en la química, en la medicina, etc.

Otro aspecto que se tiene que destacar como futuras líneas de investigación son aquellos aspectos que se han comentado muy brevemente en la tesis como son el análisis de nuevos tipos de variables o técnicas para el tratamiento de la información lingüística.

Como se ha comentado, el análisis externo de las variables lingüísticas es un tema prácticamente nuevo ya que con esta tesis ha surgido el concepto de NB lingüístico lo cual puede ser de gran utilidad en el futuro. Además, también se han comentado diferentes aportaciones respecto al análisis interno como sería el caso de variables lingüísticas generalizadas (simples, intervalo valoradas, etc.), de tipo 2 y *n*, L-R, etc.

También se han comentado un gran número de NBs de los cuales, algunos son nuevas aportaciones a la comunidad científica y por tanto, resulta de interés dedicar algún artículo a su estudio ya que es probable que tengan una aplicabilidad muy amplia.

Además, el análisis bibliométrico presentado en el capítulo dos de la tesis ha mostrado una nueva metodología para analizar la información disponible en este ámbito. Por tanto, también se espera poder publicar esto en revistas internacionales ya que en el futuro se prevé ampliar este análisis incluyendo muchos otros aspectos que irán complementando esta línea de investigación a través de considerar otras revistas, grupos de revistas, otras áreas, etc.

Finalmente, también se tiene que destacar que a medida que la investigación avanza, van apareciendo nuevas ideas, nuevas perspectivas, etc., lo cual obliga a señalar que estas futuras líneas de investigación irán evolucionando en función de los futuros descubrimientos hechos por el doctorando y por la comunidad científica en general.

13. Bibliografía

[1] J. Aczél, Z. Daróczy, *On Measures of Information and their Characterizations*, Academic Press, New York, 1975.

[2] B.S. Ahn, On the properties of OWA operator weights functions with constant level of orness, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14* (2006) 511-515.

[3] B.S. Ahn, The OWA aggregation with uncertain descriptions on weights and input arguments, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15 (2007) 1130-1134.

[4] B.S. Ahn, Preference relation approach for obtaining OWA operator weights, *International Journal of Approximate Reasoning* 47 (2008) 166-178.

[5] B.S. Ahn, H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, *International Journal of Intelligent Systems* 23 (2008) 33-49.

[6] R.A. Aliev, R.R. Aliev, *Soft computing and its applications*, World Scientific, Singapore, 2001.

[7] R.A. Aliev, R.R. Aliev, *Soft computing and its applications in business and economics*, Springer-Verlag, Heidelberg, 2004.

[8] S. Alonso, F.J. Cabrerizo, F. Chiclana, F. Herrera and E. Herrera-Viedma, An Interactive Decision Support System Based on Consistency Criteria, *Journal of Multiple-Valued Logic & Soft Computing* 14 (2008a) 371-386.

[9] S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J. Alcalá-Fdez, C. Porcel, A Consistency Based Procedure to Estimate Missing Pairwise Preference Values. *International Journal of Intelligent Systems* 23 (2008b) 155-175.

[10] S. Alonso, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, C. Porcel, Strategies to Manage Ignorance Situations in Multiperson Decision Making Problems. *Modeling Decisions for Artificial Intelligence 2006 (MDAI 2006), Lecture Notes in Artificial Intelligence 3885* (2006) 34-45.

[11] G.R. Amin, A note on “a preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, *Information Sciences* 177 (2007) 3636-3638.

[12] G.R. Amin, A. Emrouznejad, An extended minimax disparity to determine the OWA operator weights, *Computers & Industrial Engineering 50* (2006) 312-316.

[13] K. Atanassov, Intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy sets and Systems 20* (1986) 87-96.

[14] K. Atanassov, More on intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems 33* (1989) 37-45.

[15] K. Atanassov, *Intuitionistic Fuzzy Sets*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1999.

[16] K. Atanassov, G. Gargov, Interval valued intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems 31* (1989) 343-349.

[17] G. Beliakov, Learning Weights in the Generalized OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making 4* (2005) 119-130.

[18] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[19] G. Belov, G. Scheithauer, A branch-and-cut-and-price algorithm for one dimensional stock cutting and two-dimensional two-stage cutting, *European Journal of Operational Research* 171 (2006) 85-106.

[20] J.C. Bezdek, *Analysis of Fuzzy Information*, CRC Press, Florida, USA, 1987.

[21] P.P. Bonissone, A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications, in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, (North-Holland, 1982) 329-339.

[22] P.P. Bonissone, K.S. Decker, Selecting Uncertainty Calculi and Granularity: An Experiment in Trading-off Precision and Complexity, in: L.H. Kanal, J.F. Lemmer, Eds., *Uncertainty in Artificial Intelligence*, (North-Holland, 1986) 217-247.

[23] G. Bordogna, M. Fedrizzi, G. Pasi, A linguistic modelling of consensus in group decision making based on OWA Operator, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 27* (1997) 126-132.

[24] G. Bordogna, G. Pasi, Linguistic aggregation operators of selection criteria in fuzzy information retrieval, *International Journal of Intelligent Systems 10*, 233-248, 1995.

[25] G. Bortolan, R. Degani, A review of some methods for ranking fuzzy subsets, *Fuzzy Sets and Systems* 15 (1985) 1-19.

[26] P.W. Bridgman, *Dimensional Analysis*, Yale University Press, New Haven, CT, USA, 1922.

[27] J. Buckley, Ranking alternatives using fuzzy numbers, *Fuzzy Sets and Systems 15*, (1985) 21-31.

[28] H. Bustince, F. Herrera, J. Montero, *Fuzzy Sets and their Extensions: Representation, Aggregation and Models*, Springer, Berlin Heidelberg, 2008.

[29] M.L. Cachero, *Análisis y Adopción de decisiones*, Ed. Pirámide Madrid, 1989.

[30] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[31] G. Canfora, L. Troiano, An Extensive Comparison between OWA and OFNWA Aggregation, in: *Proceedings of the 8th SIGEF Congress*, Napoli, Italy, 2001.

[32] L. Canós, V. Liern, Soft computing-based aggregation methods for human resource management, *European Journal of Operational Research* 189 (2008) 669-681.

[33] C. Carlsson, M. Fedrizzi, R. Fuller, *Fuzzy logic in management*, Springer, Heidelberg, 2003a.

[34] C. Carlsson, R. Fullér, P. Majlender, A note on constrained OWA aggregation, *Fuzzy Sets and Systems*, 139 (2003b) 543-546.

[35] M. Casanovas, J.M. Merigó, Using fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Proceedings of the AEDEM International Conference*, Krakow, Poland, 2007, pp. 475-486.

[36] M. Casanovas, J.M. Merigó, Decision making with Dempster-Shafer theory and uncertain induced aggregation operators, *Journal of International Business Disciplines* 3 (2008a).

[37] M. Casanovas, J.M. Merigó, Fuzzy aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *International Journal of Approximate Reasoning* (2008b - submitted – SCI Journal).

[38] M. Casanovas, J.M. Merigó, Decision making with Dempster-Shafer theory and uncertain induced aggregation operators, *IABD – AEDEM 2008*, Salamanca, Spain, 2008c, CD-ROM Proceedings.

[39] C.L. Chang, Fuzzy Topological Spaces, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 24* (1968) 182-190.

[40] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 2* (1972) 30-34.

[41] S.-H. Chen, Ranking fuzzy numbers with maximizing set and minimizing set, *Fuzzy Sets and Systems 17*, (1985) 113-129.

[42] S.J. Chen, S.M. Chen, A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, *Cybernetics and Systems 34* (2003a) 109-137.

[43] S.J. Chen, S.M. Chen, Fuzzy Risk Analysis Based on Similarity Measures of Generalized Fuzzy Numbers, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 11* (2003b) 45-56.

[44] S.J. Chen, S.M, Chen, A Prioritized Information Fusion Method for Handling Fuzzy Decision-Making Problems, *Applied Intelligence 22* (2005) 219-232.

[45] S.J. Chen, S.M, Chen, Fuzzy risk analysis based on the ranking of generalized trapezoidal fuzzy numbers, *Applied Intelligence* 26 (2007) 1-11.

[46] S.J. Chen, S.M. Chen, Fuzzy risk analysis based on measures of similarity between interval-valued fuzzy numbers, *Computers & Mathematics with Applications* 55 (2008) 1670-1685.

[47] T.Y. Chen, C.Y. Tsao, The interval-valued fuzzy TOPSIS method and experimental analysis, *Fuzzy Sets and Systems* 159 (2008) 1410-1428.

[48] C.H. Cheng and J.R. Chang, MCDM aggregation model using situational ME-OWA and ME-OWGA operators, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 14 (2006) 421-443.

[49] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations, *Fuzzy Sets and Systems 97* (1998) 33-48.

[50] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[51] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, *Fuzzy Sets and Systems 122* (2001a) 277-291.

[52] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Multiperson Decision Making Based on Multiplicative Preference Relations, *European Journal of Operational Research 129* (2001b) 372-385.

[53] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, *International Journal of Intelligent Systems 19* (2004) 233-255.

[54] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Herrera, A Note on the Estimation of Missing Pairwise Preference Values: A Uninorm Consistency based Method, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 16:2 Supp (2008) 19-32*.

[55] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, S. Alonso, Some Induced Ordered Weighted Averaging Operators and Their Use for Solving Group Decision-Making Problems based on Fuzzy Preference Relations, *European Journal of Operational Research* 182 (2007) 383-399.

[56] S.B. Cho, Fuzzy aggregation of modular neural networks with ordered weighted averaging operators, *International Journal of Approximate Reasoning 13* (1995) 359-375.

[57] Z. Daróczy, Generalized information measures, *Information and Control 16* (1970) 36–51.

[58] R. Degani, G. Bortolan, The problem of linguistic approximation in clinical decision making, *International Journal of Approximate Reasoning 2* (1988) 143-162.

[59] M. Delgado, J.L. Verdegay and M.A. Vila, On aggregation operations of linguistic labels, *International Journal of Intelligent Systems 8* (1993) 351-370.

[60] A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Annals of Mathematical Statistics 38* (1967) 325-339.

[61] A.P. Dempster, A generalization of Bayesian inference, Journal of the Royal Statistical Society B 30 (1968) 205-247.

[62] T. Denoeux, Reasoning with imprecise belief structures, *International Journal of Approximate Reasoning* 20 (1999) 79-111.

[63] T. Denoeux, Modeling vague beliefs using fuzzy-valued belief structures, *Fuzzy Sets and Systems* 116 (2000) 167-199

[64] D. Dubois, H. Prade, Operations on fuzzy numbers, *International Journal of Systems Science 9* (1978) 613-626.

[65] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[66] D. Dubois, H. Prade, Ranking of fuzzy numbers in the setting of possibility theory, *Information Sciences 30* (1983) 183-224.

[67] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets in Approximate Reasoning 1. Inference with possibility distributions, *Fuzzy Sets and Systems* 40 (1991) 143-202.

[68] D. Dubois, H. Prade, R.R. Yager, *Readings in Fuzzy Sets for Intelligent Systems*, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo, CA, USA, 1993.

[69] D. Dubois, H. Prade, R.R. Yager, *Fuzzy Information Engineering: A guided tour of information engineering applications*, John Wiley & Sons, New York, 1997.

[70] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika, No. 483, pp. 147-158, 1974.

[71] P. S. Dwyer, *Linear Computations*, John Wiley, N.Y., 1951.

[72] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.

[73] W. Edwards, R.F. Miles Jr., D. von Winterfeldt, *Advances in Decision Analysis: From foundations to applications*, Cambridge University Press, New York, 2007.

[74] A. Emrouznejad, MP-OWA: The most preferred OWA operator, *Knowledge-Based Systems* 21 (2008) 847-851.

[75] K.J. Engemann, R.R. Yager, A general approach to decision making with interval probabilities, *International Journal of General Systems 30* (2001) 623-647.

[76] K.J. Engemann, D.P. Filev, R.R. Yager, Modeling decision making using immediate probabilities, *International Journal of General Systems 24* (1996) 281-294.

[77] K.J. Engemann, M.E. Holmes, R.R. Yager, Decision making with attitudinal expected values, *International Journal of Technology, Policy and Management 4* (2004) 353-364.

[78] K.J. Engemann, H.E. Miller, R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4* (1996) 1-26.

[79] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, *Multiple Criteria Decision Analysis: State of the Art Surveys*, Springer, Boston, 2005.

[80] D.P. Filev, R.R. Yager, Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators, *Information Sciences 85* (1995) 11-27.

[81] D.P. Filev, R.R. Yager, On the issue of obtaining OWA operator weights, *Fuzzy Sets and Systems 94* (1998) 157-169.

[82] P.C. Fishburn, Additive Utilities with Incomplete Product Set: Applications to Priorities and Assignments, *Operations Research Society of America (ORSA)*, Baltimore, MD, USA, 1967.

[83] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3* (1995) 236-240.

[84] R. Fullér, P. Majlender, An analytic approach for obtaining maximal entropy OWA operador weights, *Fuzzy Sets and Systems 124* (2001) 53-57.

[85] R. Fullér, P. Majlender, On obtaining minimal variablity OWA operator weights, *Fuzzy Sets and Systems* 136 (2003) 203-215.

[86] J. Gil-Aluja, *La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1996.

[87] J. Gil-Aluja, *Invertir en la incertidumbre*, Ed. Pirámide, Madrid, 1997.

[88] J. Gil-Aluja, *Elementos para una teoría de la decisión en la incertidumbre*, Ed. Milladoiro, Vigo, 1999.

[89] J. Gil-Aluja, *Handbook of Management under Uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2001.

[90] J. Gil-Aluja, *Introducción de la teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[91] J. Gil-Aluja, A.M. Gil-Lafuente, *Algoritmos para el tratamiento de fenómenos económicos complejos*, Editorial Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 2007.

[92] A.M. Gil-Lafuente, *Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*, Ariel Economía, Barcelona, 2001.

[93] A.M. Gil-Lafuente, *El análisis de las inmovilizaciones en la incertidumbre*, Ariel Economía, Barcelona, 2004.

[94] A.M. Gil-Lafuente, J. Gil-Lafuente, *Modelos y algoritmos para el tratamiento de la creatividad en la gestión empresarial*, Editorial Milladoiro, Vigo, 2007.

[95] A.M. Gil-Lafuente, J.M. Merigó, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Lectures on Modelling and Simulation* 2 (2006) 42-48.

[96] J. Gil-Lafuente, *Marketing para el nuevo milenio: nuevas técnicas para la gestión comercial en la incertidumbre*, Ed. Pirámide, Madrid, 1997.

[97] J. Gil-Lafuente, El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista, *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM)*, Reggio Calabria, Italia, 2001.

[98] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[99] J. Gil-Lafuente, A New Instrument for Selection: the Index of Elimination by Excess-Distance, *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Valladolid, Spain, 2004.

[100] J.A. Goguen, L-Fuzzy Sets, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 18* (1967) 145-174.

[101] C. Gómez-Alonso, A. Valls, A similarity measure for sequences of categorical data based on the ordering of common elements, in: *Modeling Decisions for Artificial Intelligence 2008*, (eds.) V. Torra, Y. Narukawa, Springer-Verlag, Heidelberg, 2008, pp. 134-145.

[102] M. Grabisch, T. Murofushi, M. Sugeno, *Fuzzy Measures and Integrals*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2000.

[103] M.C. Gracia-Ramos, M. Yagüez, P. López-Jurado, M. Casanovas, *Guía práctica de economía de la empresa* II: *áreas de gestión y producción* (*teoría y ejercicios*), Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona, Barcelona, 2007.

[104] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[105] J. Havrda, F. Charvat, Quantification method of classification processes: concept of structural α-entropy, *Kybernetika 3* (1967) 30–35.

[106] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Aggregation operators for linguistic weighted information, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 27* (1997) 646-655.

[107] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, *International Journal of Intelligent Systems 18* (2003) 689-707.

[108] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, A fusion approach for managing multigranularity linguistic term sets in decision making, *Fuzzy Sets and Systems 114* (2000) 43-58.

[109] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, L. Martínez, A Fuzzy Linguistic Methodology To Deal With Unbalanced Linguistic Term Sets, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (2008) 354-370.

[110] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, *Information Sciences 85* (1995) 223-239.

[111] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA Operators, *Fuzzy Sets and Systems 79* (1996a) 175-190.

[112] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A model of consensus in group decision making under linguistic assessments, *Fuzzy Sets and Systems 78* (1996b) 73-87.

[113] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A rational consensus model in group decision making using linguistic assessments, *Fuzzy Sets and Systems 88* (1997) 31-49.

[114] F. Herrera, L. Martínez, A 2-Tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8* (2000a) 746-752.

[115] F. Herrera, L. Martínez, An Approach for Combining Numerical and Linguistic Information based on the 2-tuple fuzzy linguistic representation model in Decision Making, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 8* (2000b) 539-562.

[116] F. Herrera, L. Martínez, The 2-tuple Linguistic Computational Model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 9* (2001a) 33-48.

[117] F. Herrera, L. Martínez, A model based on linguistic 2-tuples for dealing with multigranularity hierarchical linguistic contexts in Multiexpert Decision-Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B: 31* (2001b) 227.234.

[118] E. Herrera-Viedma, *Procesos de Toma de Decisiones, Modelado y Agregación de Preferencias*, Copicentro Granada, 2005.

[119] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group Decision-Making Model with Incomplete Fuzzy Preference Relations Based on Additive

Consistency, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 37 (2007a) 176-189.

[120] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, A Consensus Model for Group Decision Making with Incomplete Fuzzy Preference Relations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15 (2007b) 863-877.

[121] D.H. Hong, A note on the minimal variability OWA operator weights, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 14* (2006) 747-752.

[122] H.L. Huang, F.G. Shi, *L*-fuzzy numbers and their properties, *Information Sciences* 178 (2008) 1141-1151.

[123] L. Hurwicz, Optimality criteria for decision making under ignorance, *Cowles Communication Discussion paper*, Statistics No. 370, 1951.

[124] C.L. Hwang, K. Yoon, *Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[125] J.S.R. Jang, ANFIS – Adaptative Network Based Fuzzy Inference System, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 23* (1993) 665-685.

[126] A. Jones, A. Kaufmann, H.J. Zimmermann, *Fuzzy set theory and its applications*, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, The Netherlands, 1986.

[127] J. Kacprzyk, *Multistage Fuzzy Control: A Model-Based Approach to Control and Decision-Making*, Wiley, Chichester, 1997.

[128] J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, *Multiperson decision making models using fuzzy sets and possibility theory*, Spinger, Heidelberg, 1989.

[129] J. Kacprzyk, H. Nurmi, M. Fedrizzi, *Consensus under Fuzziness*, Kluwer, Boston, 1996.

[130] D. Kahneman, A. Tversky, Prospect theory: An analysis of decision under risk, *Econometrica* 47 (1979) 263-292.

[131] N. Karayiannis, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks 11* (2000) 1093-1105.

[132] N. Karayiannis, M. Randolph-Gips, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Non-Euclidean Norms: Single-Norm Algorithms, *IEEE Transactions on Neural Networks 16* (2005) 423-435.

[133] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*. Tomo I. Ed. Masson, París, 1973.

[134] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*. Tomo II. Ed. Masson, París, 1975a.

[135] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*. Tomo III. Ed. Masson, París, 1975b.

[136] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.

[137] A. Kaufmann, *Introduction à la théorie des sous-ensembles flous*. Tomo IV. Ed. Masson, París, 1976.

[138] A. Kaufmann, J. Gil Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, 1986.

[139] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.

[140] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Models per a la recerca d'efectes oblidats*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1988.

[141] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1990.

[142] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Inversiones, certeza, riesgo e incertidumbre*, Facultad de ciencias económicas y empresariales, Barcelona, 1991.

[143] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Nuevas técnicas para la dirección estratégica*, Ed. Universidad de Barcelona, Barcelona, 1991.

[144] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*, Ed. Pirámide, Madrid, 1992.

[145] A. Kaufmann, J. Gil Aluja, *Técnicas especiales para la gestión de expertos*, Ed. Milladoiro, 1993.

[146] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Grafos neuronales para la economía y la gestión de empresas*, Ed. Pirámide, 1995.

[147] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A.M. Gil-Lafuente, *La creatividad en la gestión de las empresas*, Ed. Pirámide, 1994.

[148] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Ed. Foro Científico, 1994.

[149] A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.

[150] A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Fuzzy mathematical models in engineering and management science*, Elsevier Science Publishers, Amsterdam, The Netherlands, 1988.

[151] K. Kim, K. Park, Ranking fuzzy numbers with index of optimism, *Fuzzy Sets and Systems 35* (1990) 143-150.

[152] G.J. Klir, B. Yuan, *Fuzzy Sets and Fuzzy Logic: Theory and Applications*, Prentice Hall, 1995.

[153] A.N. Kolmogoroff, Sur la motion de la moyenne, *Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez., 12* (1930) 388-391.

[154] P.S. Laplace, *A Philosophical Essay on Probabilities*, New Cork, Dover Publications, Inc., (1951) (primera edición 1814).

[155] E.L. Lawler, D.E. Wood, Branch-and-Bound methods: A survey, *Operations Research* 14 (1966) 699-719.

[156] C.A. Le, V.N. Huynh, A. Shimazu, Y. Nakamori, Combining classifiers for word sense disambiguation based on Dempster-Shafer theory and OWA operators, *Data and Knowledge Engineering* 63 (2007) 381-396.

[157] C.C. Lee, Fuzzy Logic in Control Systems – Fuzzy Logic Controller 1, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 20* (1990a) 404-418.

[158] C.C. Lee, Fuzzy Logic in Control Systems – Fuzzy Logic Controller 2, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 20* (1990b) 419-435.

[159] C.T. Lin, C.S.G. Lee, Neural Network Based Fuzzy Logic Control and Decision System, *IEEE Transactions on Computers 40* (1991) 1320-1336.

[160] J.D.C. Little, K.G. Murty, D.W. Sweeney, C. Karel, An algorithm for the travelling salesman problem, *Operations Research* 11 (1963) 972-989.

[161] X. Liu, On the properties of equidifferent OWA operator, *International Journal of Approximate Reasoning 43* (2006) 90-107.

[162] X. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, *International Journal of Approximate Reasoning* 45 (2007) 68-81.

[163] X. Liu, A general model of parameterized OWA aggregation with given orness level, *International Journal of Approximate Reasoning* 48 (2008) 598-627.

[164] X. Liu, Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems,* (2009) to be published.

[165] X. Liu, Q.L. Da, A decision tree solution considering the decision maker's attitude, *Fuzzy Sets and Systems* 152 (2005) 437-454.

[166] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, *International Journal of Approximate Reasoning* 48 (2008) 77-97.

[167] R.D. Luce, H. Raiffa, *Games and decisions: introduction and critical survey*, Dover Publications, New York, 1989.

[168] B. Llamazares, Choosing OWA operator weights in the field of Social Choice, *Information Sciences* 177 (2007) 4745-4756.

[169] P. Majlender, OWA operators with maximal Rényi entropy, *Fuzzy Sets and Systems 155* (2005) 340-360.

[170] E.H. Mamdani, Application of Fuzzy Algorithms for Control of Simple Dynamic Farm, *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers – London 121* (1974) 1585-1588.

[171] E.H. Mamdani, S. Assilian, Experiment in Linguistic Synthesis with Fuzzy Logic Controller, *International Journal of Man-Machine Studies 7* (1975) 1-13.

[172] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, 2006a, pp.709-727.

[173] J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced and Uncertain Heavy OWA operators, *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, 2006b, pp.728-746.

[174] J.M. Merigó, M. Casanovas, Methods for decision making using minimization of regret, *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, 2006c, pp.747-763.

[175] J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain generalized OWA operator, *Proceedings of the AEDEM International Conference*, Krakow, Poland, 2007a, pp. 547-556.

[176] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators, *International Summer School on Aggregation Operators (AGOP),* Ghent, Belgium, 2007b, pp. 95-100.

[177] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making using maximization of negret, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007c, pp. 518-530.

[178] J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized ordered weighted averaging operator, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007d, pp. 504-517.

[179] J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez, Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007, pp. 658-671.

[180] J.M. Merigó, M. Casanovas, Geometric operators in decision making with minimization of regret, *International Journal of Computer Systems Science and Engineering* 1 (2008a) 111-118.

[181] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision Making using Maximization of Negret, *International Journal of Computational Intelligence* 4 (2008b) 171-178.

[182] J.M. Merigó, M. Casanovas, Using Fuzzy Numbers in Heavy Aggregation Operators, *International Journal of Information Technology* 4 (2008c) 177-182.

[183] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory of evidence using geometric operators, *International Journal of Computational Intelligence* 4 (2008d) 261-268.

[184] J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators, *Fuzzy Sets and Systems* (2008e - accepted – SCI Journal).

[185] J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *International Journal of Intelligent Systems* (2008f - submitted – SCI Journal).

[186] J.M. Merigó, M. Casanovas, Fuzzy induced heavy OWA operators, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* (2008g - submitted – SCI Journal).

[187] J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making, *Cybernetics and Systems* (2008h - submitted – SCI Journal).

[188] J.M. Merigó, M. Casanovas, The generalized hybrid averaging operator and its application in decision making, *Knowledge Based Systems* (2008i - submitted – SCI Journal).

[189] J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain generalized OWA operator and its application in financial decision making, *International Journal of Information Technology and Decision Making* (2008j - submitted – SCI Journal).

[190] J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized hybrid averaging operator, *International Journal of Fuzzy Systems* (2008k - submitted – SCI Journal).

[191] J.M. Merigó, M. Casanovas, The generalized hybrid averaging operator and its application in financial decision making, *ICEIS 2008,* Barcelona, Spain, 2008l, pp. 467-471 (ISI Proceedings).

[192] J.M. Merigó, M. Casanovas, Fuzzy induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *ICEIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008m, pp. 548-552 (ISI Proceedings).

[193] J.M. Merigó, M. Casanovas, The induced generalized hybrid averaging operator and its application in financial decision making, *IABD – AEDEM 2008*, Salamanca, Spain, 2008n, CD-ROM Proceedings.

[194] J.M. Merigó, M. Casanovas, Linguistic decision making with distance measures, *ASEPELT 2008*, Barcelona, Spain, 2008o, pp. 1621-1634.

[195] J.M. Merigó, M. Casanovas, Uncertain decision making with Dempster-Shafer theory, *IPMU 2008*, Málaga, Spain, 2008p, pp. 425-432.

[196] J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced aggregation operators in decision making with minimization of regret, *FUR 2008*, Barcelona, Spain, 2008q. (Papers available in internet).

[197] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with distance measures and induced aggregation operators, *FLINS 2008*, Madrid, Spain, 2008r, pp. 483-488 (ISI Proceedings).

[198] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory of evidence using the 2-tuple linguistic representation model, *FLINS 2008*, Madrid, Spain, 2008s, pp. 325-330 (ISI Proceedings).

[199] J.M. Merigó, M. Casanovas, The fuzzy generalized hybrid averaging operator, *ESTYLF 2008*, Langreo – Oviedo, Spain, 2008t, pp. 15-21.

[200] J.M. Merigó, M. Casanovas, The induced Minkowski ordered weighted averaging distance operator, *ESTYLF 2008*, Langreo – Oviedo, Spain, 2008u, pp. 35-41.

[201] J.M. Merigó, M. Casanovas, The uncertain induced generalized OWA operator, *MDAI 2008*, Sabadell – Barcelona, Spain, 2008v, pp. 1-12.

[202] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with distance measures and induced aggregation operators, *TOP* (2009a - SCI Journal - in preparation for a special issue of the FLINS 2008 conference).

[203] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory using the 2-tuple linguistic representation model, *Journal of Universal Computer Science* (2009b - SCI Journal - in preparation for a special issue of the FLINS 2008 conference).

[204] J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez, Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007, pp. 658-671.

[205] J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez, Linguistic aggregation operators for linguistic decision making based on the Dempster-Shafer theory of evidence, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* (2008a - submitted – SCI Journal).

[206] J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martinez, A decision making model based on Dempster-Shafer theory and linguistic hybrid aggregation operators, *HIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008b, pp. 180-185.

[207] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using OWG Operators in the selection of financial products, *Lectures on Modelling and Simulation 2006* (2006a) 49-55.

[208] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006b, CD-ROM Proceedings.

[209] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006c, CD-ROM Proceedings.

[210] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006d, 719-723.

[211] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWG operators in the selection of financial products, *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006e, pp. 725-728.

[212] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Economic Review* 12 (2007a) 35-50.

[213] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The ordered weighted averaging distance operator, *Lectures on Modelling and Simulation 2007* (2007b) 1-11.

[214] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *Proceedings of the 5th EUSFLAT Conference*, Ostrava, Czech Republic, 2007c, vol. 2, pp. 463-470.

[215] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The ordered weighted averaging distance operator, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Alger, Algeria, 2007d, CD-ROM Proceedings.

[216] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the Euclidean distance, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Alger, Algeria, 2007e, CD-ROM Proceedings.

[217] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWG operators in the selection of human resources, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Alger, Algeria, 2007f, CD-ROM Proceedings.

[218] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Analysing the unification point in methods for the selection of polyvalent financial products, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, 2007g, CD-ROM Proceedings.

[219] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of human resources, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, 2007h, CD-ROM Proceedings.

[220] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient, *AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, 2007i, CD-ROM Proceedings.

[221] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Geometric Operators in the Selection of Human Resources, *International Journal of Computer and Information Science and Engineering* 2 (2008a) 45-51.

[222] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the Euclidean distance, *International Journal of Computer Science and Engineering* 2 (2008b) 170-176.

[223] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operator in the Minkowski distance, *International Journal of Computer Science* 3 (2008c) 149-157.

[224] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, OWA operators in generalized distances, *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science* 5 (2008d) 11-18.

[225] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *Information Sciences* (2008e – SCI Journal), doi: 10.1016/j.ins.2008.11.013.

[226] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Analysing the unification point in the selection of polyvalent financial products, *Modelling, Measurement and Control D*, (2008f) 37-54.

[227] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized adequacy coefficient and its application in strategic decision making, *Fuzzy Economic Review*, (2008g - accepted).

[228] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A generalization of the linguistic aggregation operators and its application in decision making, *Information Fusion*, (2008h - submitted – SCI Journal).

[229] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Decision making techniques for the selection of financial products, *Information Sciences*, (2008i - submitted – SCI Journal).

[230] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient, *Modelling, Measurement and Control D*, (2008j) 1-15.

[231] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, OWA operators in human resource management, *Cuadernos de Gestión* (2008k - submitted).

[232] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A method for decision making based on the OWA operator, *Knowledge Based Systems*, (2008l – submitted).

[233] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A general method for decision making based on generalized OWA operators, *European Journal of Operational Research*, (2008m – submitted).

[234] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The linguistic generalized OWA operator and its application in strategic decision making, *ICEIS 2008*, Barcelona, Spain, 2008n, pp. 219-224 (ISI Proceedings).

[235] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized adequacy coefficient, *AMSE 2008*, Mallorca, Spain, 2008o, pp. 243-254.

[236] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the index of maximum and minimum level, *AMSE 2008*, Mallorca, Spain, 2008p, pp. 233-242.

[237] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The generalized index of maximum and minimum level, *ASEPELT 2008*, Barcelona, Spain, 2008q, pp. 1685-1701.

[238] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced linguistic generalized OWA operator, *FLINS 2008*, Madrid, Spain, 2008r, pp. 513-518 (ISI Proceedings).

[239] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Decision making with the OWA operator in sport management, *ESTYLF 2008*, Langreo – Oviedo, Spain, 2008s, pp. 1-7.

[240] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced linguistic generalized OWA operator, *Fuzzy Optimization and Decision Making* (2009a - SCI Journal - in preparation for a special issue of the FLINS 2008 conference).

[241] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, A generalization of the fuzzy induced OWA operator and its application in decision making, *SIGEF 2008*, Lugo, Spain, 2009b, (in preparation).

[242] J.M. Mendel, *Uncertain Rule-Based Fuzzy Logic Systems: Introduction and New Directions*, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.

[243] D.W. Miller, M.K. Starr, *Executive Decisions and Operations Research*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, USA, 1969.

[244] H.B. Mitchell, An Intuitionistic OWA Operator, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12* (2004) 843-860.

[245] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems 5* (1997) 429-436.

[246] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, An OWA operator with fuzzy ranks, *International Journal of Intelligent Systems 13* (1998) 69-81.

[247] M. Mizumoto, K. Tanaka, The four operations of arithmetic on fuzzy numbers, *Systems, Computing and Control 7* (1976) 73-81.

[248] R. E. Moore, Automatic error analysis in digital computation, *Technical Report Space Div. Report LMSD84821*, Lockheed Missiles and Space Co., 1959.

[249] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1966.

[250] M. Nagumo, Uber eine klasse der mittelwerte, *Japanese Journal of Mathematics 6* (1930) 71-79.

[251] S. Nahmias, Fuzzy variables, *Fuzzy Sets and Systems 1* (1978) 97-110.

[252] M. O'Hagan, Using maximum entropy-ordered weighted averaging to construct a fuzzy neuron, *Proceedings of the 24th Annual IEEE Asilomar Conference on Signals, Systems and Computing*; Pacific Grove, California, 1990.

[253] E.Orlowska, *Incomplete information: Rough Set Analysis*, Physica-Verlag, Heidelberg, 1998.

[254] N.R. Pal, S.K. Pal, A Review on Image Segmentation Techniques, *Pattern Recognition 26* (1993) 1277-1294.

[255] R. Pastor, A. Corominas, Branch and Win: OR tree search algorithms for solving combinatorial optimisation problems, *TOP* 12 (2004) 169-191.

[256] Z. Pawlak, Rough Sets, *International Journal of Computer & Information Sciences 11* (1982) 341-356.

[257] Z. Pawlak, *Rough Sets: Theoretical aspects of reasoning about data*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1991.

[258] W. Pedrycz, *Fuzzy Sets Engineering*, CRC Press, Florida, USA, 1995.

[259] J.I. Peláez, J.M. Doña, Majority Additive – Ordered Weighting Averaging: A New Neat Ordered Weighting Averaging Operator Based on the Majority Process, *International Journal of Intelligent Systems 18* (2003) 469-481.

[260] M.J. Pereira-Lopes, J.M. Valério-de-Carvalho, A branch-and-price algorithm for scheduling parallel machines with sequence dependent setup times, *European Journal of Operational Research* 176 (2007) 1508-1527.

[261] *Proceedings of the AGOP International Summer School*. Vol. 1-4, 2001-2007.

[262] *Proceedings of the ESTYLF Conferences*. Vol. 1-14, 1991-2008.

[263] *Proceedings of the EUSFLAT Conferences*. Vol. 1-5, 1999-2007.

[264] *Proceedings of the FLINS Conferences*. Vol. 1-8, 1994-2008.

[265] *Proceedings of the FUZZ-IEEE Conferences*. Vol. 1-16, 1992-2008.

[266] *Proceedings of the IFSA Conferences*. Vol. 1-12, 1985-2007.

[267] *Proceedings of the IPMU Conferences*. Vol. 1-12, 1986-2008.

[268] *Proceedings of the MDAI Conferences*. Vol. 1-5, 2004-2008.

[269] *Proceedings of the SIGEF Conferences*. Vol. 1-13, 1994-2006.

[270] M. Reformat, R.R. Yager, Building ensemble classifiers using belief functions and OWA operators, *Soft Computing* 12 (2008) 543-558.

[271] A. Rényi, On measures of information and entropy, *Proceedings of the 4th Berkeley Symposium on Mathematics, Statistics and Probability 1961*, pp. 547-561.

[272] R. Ribeiro, R.R. Yager, H.J. Zimmermann, J. Kacprzyk, *Soft Computing in Financial Engineering*, Physica-Verlag, Heidelberg, 1999.

[273] C. Romero, *Teoría de la decisión multicriterio: Conceptos, técnicas y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1993.

[274] A. Rosenfeld, Fuzzy Groups, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 35* (1971) 512-517.

[275] B. Roy, Classement et choix en présence de points de vue multiples (la méthode ELECTRE), *RIRO 8* (1968) 57-75.

[276] D. Ruan, J. Kacprzyk, M. Fedrizzi, *Soft computing for risk evaluation and management*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2001.

[277] T.L. Saaty, Scaling Method for Priorities in Hierarchical Structures, *Journal of Mathematical Psychology 15* (1977) 234-281.

[278] T.L. Saaty, Exploring the Interface between Hierarchies, Multiple Objects and Fuzzy Sets, *Fuzzy Sets and Systems 1* (1978) 57-68.

[279] T.L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[280] R. Sadiq, S. Tesfamariam, Developing environmental indices using fuzzy numbers ordered weighted averaging (FN-OWA) operators, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 22 (2008) 495-505.

[281] D. Samson, *Managerial Decision Analysis*, Irwin, Illinois, 1988.

[282] L.J. Savage, The theory of statistical decision, *Journal of American Statistical Association 46* (1951) 55-67.

[283] P.A. Schaefer, H.B. Mitchell, A generalized OWA operator, *International Journal of Intelligent Systems 14* (1999) 123-143.

[284] G.A. Shafer, *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[285] C.E. Shannon, A mathematical theory of communication, *The Bell System Technical Journal 27* (1948) 379-423, 623-656.

[286] P.N. Smith, Alternative forms of aggregation in the analytic hierarchy process: The ordered weighted averaging operator, *Journal of Environmental Systems* 31 (2004) 49-68.

[287] R.P. Srivastava, T. Mock, *Belief Functions in Business Decisions*, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.

[288] M. Sugeno, G.T. Kang, Structure Identification of Fuzzy Model, *Fuzzy Sets and Systems 28* (1988) 15-33.

[289] E. Szmidt, J. Kacprzyk, Distances between intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems 114* (2000) 505-518.

[290] T. Takagi, M. Sugeno, Fuzzy Identification of Systems and its Applications to Modeling and Control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 15* (1985) 116-132.

[291] K. Tanaka, M. Sugeno, Stability Analysis and Design of Fuzzy Control Systems, *Fuzzy Sets and Systems 45* (1992) 135-156.

[292] V. Torra, The Weighted OWA Operator, *International Journal of Intelligent Systems 12* (1997) 153-166.

[293] V. Torra, Learning weights for the quasi-weighted means, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10*, (2002) 653-666.

[294] V. Torra, *Information fusion in data mining*, Springer, New York, 2004.

[295] V. Torra, Y. Narukawa, *Modelling decisions: Information Fusion and Aggregation Operators*, Springer, Berlin-Heidelberg, 2007.

[296] E. Triantaphyllou, *Multi-Criteria Decision Making Methods: A Comparative Study*, Kluwer Academic Publishers, 2001.

[297] L. Troiano, R.R. Yager, Recursive and Iterative OWA Operators, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 13* (2005) 579-599.

[298] E. Turban, J.E. Aroson, *Decision Support Systems and Intelligent Systems*, Prentice Hall (5th edition), New Jersey, 1998.

[299] J. Vanicek, I. Vrana, S. Aly, Fuzzy aggregation and averaging for group decision making: A generalization and survey, *Knowledge-Based Systems* 21 (2008), doi:10.1016/j.knosys.2008.07.002.

[300] A. Wald, *Statistical Decisions Functions*, Wiley, New Cork, NY, USA, 1950.

[301] J.H. Wang, J. Hao, A New Version of 2-Tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing With Words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14* (2006) 435-444.

[302] L.X. Wang, J.M. Mendel, Generating Fuzzy Rules by Learning from Examples, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 22* (1992a) 1414-1427.

[303] L.X. Wang, J.M. Mendel, Fuzzy Basis Functions, Universal Approximation, and Ortogonal Least Squares Learning, *IEEE Transactions on Neural Networks 3* (1992b) 807-814.

[304] X. Wang, Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Arithmetic Aggregation Operators, *International Journal of Fuzzy Systems* 10 (2008) 104-111.

[305] Y.M. Wang, Y. Luo, Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, *Information Sciences* 177 (2007) 3356-3363.

[306] Y.M. Wang, Y. Luo, X. Liu, Two new models for determining OWA operator weights, *Computers & Industrial Engineering 52* (2007) 203-209.

[307] Y.M. Wang, C. Parkan, A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights, *Information Sciences 175* (2005) 20-29.

[308] Y.M. Wang, C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, *Information Sciences* 177 (2007) 1867-1877.

[309] M. Warmus, Approximations and Inequalities in the Calculus of Approximations, Classification of Approximate Numbers, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1961, Vol. 9, pp. 241-245.

[310] J. Wu, C.Y. Liang, Y.Q. Huang, An argument dependent approach to determining OWA operator weights based on the rule of maximum entropy, *International Journal of Intelligent* Systems *22* (2007) 209-221.

[311] Y.J. Xu, Q.L. Da, A method for multiple attribute decision making with incomplete weight information under uncertain linguistic environment, *Knowledge-Based Systems* 21 (2008) 837-841.

[312] Z.S. Xu, A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP, *Systems, Engineering and Electronics 24* (2002) 31-33.

[313] Z.S. Xu, EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12* (2004a) 791-810.

[314] Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, *Information Sciences 166* (2004b) 19-30.

[315] Z.S. Xu, Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment, *Information Sciences 168* (2004c) 171-184.

[316] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, *International Journal of Intelligent Systems 20* (2005) 843-865.

[317] Z.S. Xu, Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, *Information Fusion 7* (2006a) 231-238.

[318] Z.S. Xu, A note on linguistic hybrid arithmetic averaging operator in multiple attribute group decision making with linguistic information, *Group Decision and Negotiation 15* (2006b) 593-604.

[319] Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, *Decision Support Systems 41* (2006c) 488-499.

[320] Z.S. Xu, Dependent OWA operators, *Lecture Notes in Artificial Intelligence 3885* (2006d) 172-178.

[321] Z.S. Xu, Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 6 (2007a) 221-236.

[322] Z.S. Xu, Intuitionistic fuzzy aggregation operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15 (2007b) 1179-1187.

[323] Z.S. Xu, A survey of preference relations, *International Journal of General Systems* 36 (2007c) 179-203.

[324] Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, *Information Fusion* 9 (2008a) 310-316.

[325] Z.S. Xu, On multi-period multi-attribute decision making, *Knowledge-Based Systems* 21 (2008b) 164-171.

[326] Z.S. Xu, Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations, *Information Sciences* 178 (2008c) 452-467.

[327] Z.S. Xu, J. Chen, An interactive method for fuzzy multiple attribute group decision making, *Information Sciences* 177 (2007) 248-263.

[328] Z.S. Xu, J. Chen, An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 16 (2008) 529-555.

[329] Z.S. Xu, J. Chen, J. Wu, Clustering algorithm for intuitionistic fuzzy sets, *Information Sciences* 178 (2008) 3775-3790.

[330] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Uncertain OWA Operator, *International Journal of Intelligent Systems 17* (2002a) 569-575.

[331] Z.S. Xu, Q.L. Da, The ordered weighted geometric averaging operators, *International Journal of Intelligent Systems 17* (2002b) 709-716.

[332] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, *International Journal of Intelligent Systems 18* (2003) 953-969.

[333] Z.S. Xu, Q.L. Da, An uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator and its application, *Information 7* (2004) 175-182.

[334] Z.S. Xu, R.R. Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, *International Journal of General Systems 35* (2006) 417-433.

[335] Z.S. Xu, R.R. Yager, Dynamic intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making, *International Journal of Approximate Reasoning* 48 (2008) 246-262.

[336] R.R.Yager, On a general class of fuzzy connectives, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 235-242.

[337] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18* (1988) 183-190.

[338] R.R. Yager, On Generalized Realizations in Uncertain Environments, *Theory and Decision 33* (1992a) 41-69.

[339] R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, *International Journal of General Systems 20* (1992b) 233-245.

[340] R.R. Yager, Applications and extensions of OWA aggregations, *International Journal of Man-Machine Studies 37* (1992c) 103-132.

[341] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems 59* (1993) 125-148.

[342] R.R. Yager, On Weighted Median Aggregation, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2* (1994) 101-113.

[343] R.R. Yager, On the inclusion of variance in decision making under uncertainty, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4* (1995a) 401–419.

[344] R.R. Yager, An Approach to Ordinal Decision Making, *International Journal of Approximate Reasoning 12* (1995b) 237-261.

[345] R.R. Yager, Constrained OWA Aggregation, *Fuzzy Sets and Systems 81* (1996a) 89-101.

[346] R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, *International Journal of Intelligent Systems 11* (1996b) 49-73.

[347] R.R. Yager, Nonmonotonic OWA operators, *Soft Computing 3* (1999a) 187-196.

[348] R.R. Yager, Including decision attitude in probabilistic decision making, *International Journal of Approximate Reasoning 21* (1999b) 1-21.

[349] R.R. Yager, Decision making with fuzzy probability assessments, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 7* (1999c) 462-467.

[350] R.R. Yager, Dempster-Shafer belief structures with interval valued focal weights, *International Journal of Intelligent Systems 16* (2001) 497-512.

[351] R.R. Yager, Heavy OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making 1* (2002a) 379-397.

[352] R.R. Yager, The induced fuzzy integral aggregation operator, *International Journal of Intelligent Systems 17* (2002b) 1049-1065.

[353] R.R. Yager, On the valuation of alternatives for decision making under uncertainty, *International Journal of Intelligent Systems 17* (2002c) 687-707.

[354] R.R. Yager, E-Z OWA weights, in: *Proceedings of the 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, 2003a, pp. 39-43.

[355] R.R. Yager, Monitored heavy fuzzy measures and their role in decision making under uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems 139* (2003b) 491-513.

[356] R.R. Yager, Induced aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems 137* (2003c) 59-69.

[357] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, *International Journal of Approximate Reasoning 36* (2004a) 109-128.

[358] R.R. Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making 3* (2004b) 93-107.

[359] R.R. Yager, OWA aggregation over a continuous interval argument with applications to decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics Part B 34* (2004c) 1952-1963.

[360] R.R. Yager, Uncertainty modeling and decision support, *Reliability Engineering and Systems Safety 85* (2004d) 341-354.

[361] R.R. Yager, Choquet aggregation using order inducing variables, *International Journal of Fuzziness, Uncertainty and Knowledge-Based Systems 12* (2004e) 69-88.

[362] R.R. Yager, OWA trees and their role in security modeling using attack trees, *Information Sciences 176* (2006a) 2933-2959.

[363] R.R. Yager, Generalizing variance to allow the inclusion of decision attitude in decision making under uncertainty, *International Journal of Approximate Reasoning 42* (2006b) 137-158.

[364] R.R. Yager, Centered OWA operators, *Soft Computing 11* (2007a) 631-639.

[365] R.R. Yager, Using stress functions to obtain OWA operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15 (2007b) 1122-1129.

[366] R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, *Information Sciences* 178 (2008a) 363-380.

[367] R.R. Yager, A knowledge-based approach to adversarial decision making, *International Journal of Intelligent Systems* 23 (2008b) 1-21.

[368] R.R. Yager, Time series smoothing and OWA aggregation, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 16 (2008c) 994-1007.

[369] R.R. Yager, K.J. Engemann, D.P. Filev, On the Concept of Immediate Probabilities, *International Journal of Intelligent Systems 10* (1995) 373-397.

[370] R.R. Yager, M. Fedrizzi, J. Kacprzyk, *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*, John Wiley & Sons, New York, 1994.

[371] R.R. Yager, D.P. Filev, Essentials of Fuzzy Modeling and Control, John Wiley & Sons, USA, 1994.

[372] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized "andlike" and "orlike" OWA Operators, *International Journal of General Systems 22* (1994) 297-316.

[373] R.R. Yager, D.P. Filev, Induced ordered weighted averaging operators, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics B 29* (1999) 141-150.

[374] R.R. Yager, J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

[375] R.R. Yager, A. Kelman, An extension of the analytical hierarchy process using OWA operators, *International Journal of Fuzzy and Intelligent Systems 7* (1999) 401-417.

[376] R.R. Yager, V. Kreinovich, Decision making under interval probabilities, *International Journal of Approximate Reasoning 22* (1999) 195-215.

[377] R.R. Yager, L. Liu, *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[378] R.R. Yager, A. Rybalov, Uninorm aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems 80* (1996) 111-120.

[379] R.R. Yager, Z.S. Xu, The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making, *Fuzzy Sets and Systems 157* (2006) 1393-1402.

[380] R.R. Yager, L.A. Zadeh, *Fuzzy Sets, Neural Networks and Soft Computing*, Van Nostrand Reinhold, New York, 1994.

[381] X. Yu, J. Kacprzyk, *Applied Decision Support with Soft Computing*, Springer, Heidelberg, 2003.

[382] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, *Information and control 8* (1965) 338-353.

[383] L.A. Zadeh, Probability measures of fuzzy events, *Journal of Mathematical Analysis and Applications 10* (1968) 421-427.

[384] L.A. Zadeh, Similarity Relations and Fuzzy Orderings, *Information Sciences* 3 (1971) 177-200.

[385] L.A. Zadeh, Outline of a New Approach to Analysis of Complex Systems and Decision Processes, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 3* (1973) 28-44.

[386] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning 1, *Information Sciences 8* (1975a) 199-249.

[387] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning 2, *Information Sciences 8* (1975b) 301-357.

[388] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning 3, *Information Sciences 9* (1975c) 43-80.

[389] L.A. Zadeh, Fuzzy Sets as a Basis for a Theory of Possibility, *Fuzzy Sets and Systems 1* (1978) 3-28.

[390] L.A. Zadeh, The role of fuzzy logic in the management of uncertainty in expert systems, *Fuzzy Sets and Systems* 11 (1983) 199-227.

[391] L.A. Zadeh, Fuzzy logic = computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 4* (1996) 103-111.

[392] L.A. Zadeh, Toward a generalized theory of uncertainty (GTU) – an outline, *Information Sciences* 172 (2005) 1-40.

[393] L.A. Zadeh, Generalized theory of uncertainty (GTU) – principal components and ideas, *Computational Statistics and Data Analysis* 51 (2006) 15-46.

[394] L.A. Zadeh, Is there a need for fuzzy logic?, *Information Sciences* 178 (2008) 2751-2779.

[395] L.A. Zadeh, J. Kacprzyk, *Computing with Words in Information/Intelligent Systems. Vol.* 1-2, Physica-Verlag, New York, 1999.

[396] M. Zarghami, F. Szidarovszky, Revising the OWA operator for fuzzy stochastic multi criteria decision making. *European Journal of Operational Research* (2008), doi: 10.1016/j.ejor.2008.09.014.

[397] M. Zarghami, F. Szidarovszky, R. Ardakanian, A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 7 (2008) 11-15.

[398] H.J. Zimmermann, Fuzzy programming and linear programming with several objective functions, *Fuzzy Sets and Systems 1* (1978) 45-55.

[399] H.J. Zimmermann, *Fuzzy Set Theory and Its Applications*, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1986.

[400] H.J. Zimmermann, P. Zysno, Latent connectives in human decision making, *Fuzzy Sets and Systems* 4 (1980) 37-51.

[401] C. Zopounidis, P.M. Pardalos, *Managing in Uncertainty: theory and practice*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[402] C. Zopounidis, P.M. Pardalos, G. Baourakis, *Fuzzy Sets in Management, Economics and Marketing*, World Scientific, Singapore, 2001.

14. Anexo: Publicaciones sobre las aportaciones

14.1. Artículos de congreso

14.1.1. Artículo de congreso 1. – Publicado en CLADEA 2006

Using the OWA Operators in the selection of financial products

Abstract

In this paper, we develop a method that combines the Ordered Weighted Averaging (OWA) operators with different indexes used for the selection of financial products. The objective of this new model is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select financial products according to his degree of optimism or pessimism. In order to elaborate this model, first a short revision of the OWA operators is developed. Here, we will distinguish between the Descending OWA (DOWA) operators and the Ascending OWA (AOWA) operators because each selection index has a different reordering step. Second, we will briefly explain the general model for the selection of financial products. Then, we will propose the three new indexes consisting in a combination between the OWA operator and the Hamming distance, a combination between the OWA operator and the adequacy coefficient, and a combination between the OWA operator and the index of maximum and minimum level. The work will finish with an illustrative example that will show how these three new instruments function. It will be also shown that depending on the attitudinal character of the decision maker, the final decision will select different financial products.

Keywords: OWA operators, selection, financial products, characteristic, selection index.

1. Introduction

The selection of the more adequate financial products for the company represents a fundamental problem for its good development. With the great variety of alternatives that exist in the market, the enterprise needs to know which the best financial products are for them. In order to solve this problem, the company has to elaborate a selection process in which they have to compare the different characteristics of each product found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-3] about selection of human resources, the models developed in [4-5] about selection of financial products and the models developed in [6] about selection of players in sports.

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results depending on if the decision maker has a high level of optimism or pessimism. This problem can become important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. Our objective in this paper will consist in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of financial products. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the Ordered Weighted Averaging (OWA) operators because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWA operators.

2. OWA Operators

The OWA operator introduced in [7] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [8-13]. In the following, we provide a definition of the OWA operators as introduced by Yager [7].
Definition 1: An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension *n* having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$F_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the *j*th largest of the a_i.

A fundamental aspect of this operator is the reordering of the arguments, based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case of the usual weighted average [14], are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If *B* is a vector corresponding to the ordered arguments, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWA aggregation can be expressed as [14]:

$$F_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = W^T B \tag{2}$$

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operators and the Ascending OWA (AOWA) operators.

Definition 2: A DOWA operator of dimension *n* is a mapping $G:R^n \to R$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$G_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i. As it can be seen, the elements b_j (j= 1, 2,…, n) are ordered in a decreasing way: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$; taking the same form as the traditional OWA operators [7].

Definition 3: An AOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$H_w(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, c_j \tag{4}$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way [15]: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator has the following properties [7]:

Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
Monotonicity: If $a_i \geq d_i \ \forall_i \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$.
Boundedness: $\mathrm{Min}_i \{a_i\} \leq F(a_1,\ldots, a_n) \leq \mathrm{Max}_i \{a_i\}$.

Is this third property that effectively makes this a mean operator. An important implication of this third property is the idempotency of the operator, if $a_i = a, \ \forall_i \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = a$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Max}\{a_j\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Min}\{a_j\}$
3) Average/Laplace criteria: $w_j = 1/n \ \ \forall_j \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1\text{-}\alpha$ and $w_j = 0$, $\forall_j \neq 1,n \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \alpha \mathrm{Max}_j\{a_j\}+(1\text{-}\alpha)\mathrm{Min}_j\{a_j\}$

And with the AOWA operators, we get:

1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $wj = 0 \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Max}\{a_j\}$
2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $wj = 0 \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Min}\{a_j\}$
3) Average/Laplace criteria: $w_j = 1/n \ \ \forall_j \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
4) Hurwicz: $w_1 = 1\text{-}\alpha$, $w_n = \alpha$ and $w_j = 0$, $\forall_j \neq 1,n \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = (1\text{-}\alpha)\mathrm{Min}_j\{a_j\}+\alpha \mathrm{Max}_j\{a_j\}$

Other examples of aggregations with OWA operators can be seen in [16].

Another factor to consider, are the two measures introduced in [7] for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure $\alpha(W)$, the attitudinal character, is defined as: $\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n\text{-}j)/(n\text{-}1)] \, w_j$. It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria α(W) = 1, for the pessimistic criteria α(W) = 0, and for the average criteria α(W) = 0.5.

The second measure introduced in [7], is called the entropy of dispersion of W. It is defined as: $H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j)$. This can be used to provide a measure of the information being used. That is, if $w_j = 1$ for some *j*, known as step-OWA [16], then H(W) = 0, and the least amount of information is used.

3. Selection of financial products with the OWA Operators

The use of the OWA operators in the selection of financial products appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. The problem comes from the fact that the traditional methods in selection of financial products [1-6], are neutral against the attitude of the decision maker. Then, introducing the OWA operators in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase [14]. This can be useful in a lot of situations as for example in the situations where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more prudent decision than in normal cases. Obviously, this increase in the prudence can affect our decision doing that we select a different financial product than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of financial products with the OWA operators, is similar to the process developed in [1-3] for human resources and in [4-5] for financial products, with the difference that the instruments used will include the OWA operators in the selection process. Then, the 5 steps to follow will be:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. That is: $C = \{C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots, C_n\}$.
Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal financial product. That is:

$$P = \begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & \ldots\ldots & C_i & \ldots\ldots & C_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots\ldots & \mu_i & \ldots\ldots & \mu_n \end{array}$$

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. That is:

$$P_j = \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_i & C_n \\ \mu_1^{(j)} & \mu_2^{(j)} & \mu_i^{(j)} & \mu_n^{(j)} \end{array} \quad ; \quad j = 1,2,\ldots,m$$

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWA

operators. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them.
Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps..

In the fourth step, the objective is to express numerically the removal between the ideal financial product and the different financial products considered. For this, it can be used the different selection indexes [1-6], with the difference that here they will be mixed with the OWA operators. In the following, it will be shown how to use the OWA operators in the principal selection indexes.

4. Combination between the OWA Operators and the Hamming distance in the selection of financial products

Definition 4: An OWA operator of dimension *n* combined with the Hamming distance, is a mapping $\beta:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ such that:

$$\beta(P,P_j) = \sum_{i=1}^{n} w_i \; D_i \qquad (5)$$

where D_i represents the *i*th lowest of the $|\mu_i - \mu_i^{(j)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and j =1,2,…,m. As it can be seen, it has been introduced an AOWA operator in the Hamming distance because the reordering step is ascendant.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_i = 0$ $\forall_{i \neq 1} \Rightarrow \beta(P,P_j) = \text{Min}\{D_i\} = \text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(j)}|\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_i = 0$ $\forall_{i \neq n} \Rightarrow \beta(P,P_j) = \text{Max}\{D_i\} = \text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(j)}|\}$
3) Laplace criteria: $w_i = 1/n$ $\forall_i \Rightarrow \beta(P,P_j) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} D_i = (1/n) \sum_{i=1}^{n} \{|\mu_i - \mu_i^{(j)}|\}$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1-\alpha$ and $w_i = 0$ $\forall_i \neq 1, n \Rightarrow \beta(P,P_j) = \alpha\text{Min}\{D_i\} + (1-\alpha)\text{Max}\{D_i\} = \alpha\text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(j)}|\} + (1-\alpha)\text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(j)}|\}$

In the case of tie, especially for the optimistic and pessimistic criteria, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

5. Combination between the OWA Operators and the adequacy coefficient in the selection of financial products

Definition 5: An OWA operator of dimension *n* combined with the adequacy coefficient, is a mapping $K:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ such that:

$$K(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i K_i \tag{6}$$

where K_i represents the ith largest of the $[1\wedge(1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})]$, and j =1,2,…,m. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWA operator used in the adequacy coefficient is the DOWA operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_n$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic: $w_1 = 1$ and $w_i = 0$ $\forall_{i \neq 1} \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = Max\{K_i\} = Max\{1\wedge(1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})\}$
2) Pessimistic: $w_n = 1$ and $w_i = 0$ $\forall_{i \neq n} \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = Min\{K_i\} = Min\{1\wedge(1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})\}$
3) Laplace criteria: $w_i = 1/n$, $\forall_i \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} K_i = (1/n)\sum_{i=1}^{n} [1\wedge(1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})]$
4) Hurwicz criteria: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1\text{-}\alpha$ and $w_i = 0$ $\forall_i \neq 1, n \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = \alpha Max\{K_i\} + (1\text{-}\alpha)Min\{K_i\} = \alpha Max\{1\wedge(1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})\} + (1\text{-}\alpha)Min\{1\wedge(1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})\}$

Analogously to the adequacy coefficient, we can propose an equivalent removal index.

Definition 6: An OWA operator of dimension n combined with the removal index, is a mapping $Q:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ such that:

$$Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i Q_i \tag{7}$$

where Q_i represents the ith smallest of the $[0\vee(\mu_i - \mu_i^{(j)})]$, and j = 1,2,…,m. In this case, as it is a removal index, the reordering step is done in an increasing order as the best result is the smallest number. Then, the type of OWA operator used in the removal index is the AOWA operator: $Q_1 \leq Q_2 \leq \ldots \leq Q_n$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_i = 0$ $\forall_{i \neq 1} \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = Min\{Q_i\} = Min\{0\vee(\mu_i - \mu_i^{(j)})\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_i = 0$ $\forall_{i \neq n} \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = Max\{Q_i\} = Max\{0\vee(\mu_i - \mu_i^{(j)})\}$
3) Laplace criteria: $w_i = 1/n$ $\forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} Q_i = (1/n)\sum_{i=1}^{n} [0\vee(\mu_i - \mu_i^{(j)})]$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1\text{-}\alpha$ and $w_i = 0$, $\forall_i \neq 1,n \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \alpha Min\{Q_i\}+(1\text{-}\alpha)Max\{Q_i\} = \alpha Min\{0\vee(\mu_i - \mu_i^{(j)})\} + (1\text{-}\alpha)Max\{0\vee(\mu_i - \mu_i^{(j)})\}$

As it can be seen, the removal index and the adequacy coefficient are inversely related:

$$Q\,(P_j \rightarrow P) = 1 - K\,(P_j \rightarrow P) \tag{8}$$

6. Combination between the OWA Operators and the index of maximum and minimum level

Definition 7: An OWA operator of dimension *n* combined with the index of maximum and minimum level, is a mapping $S{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_i \in [0,1]$ y $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ such that:

$$S\,(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i S_i \tag{9}$$

where S_i represents the *i*th smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(j)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]$; with j = 1,2,…,m. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$) with the particularity that it always selects the *i*th smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ y $w_i = 0$ $\forall_{i \neq 1} \Rightarrow S(P,P_j) = \mathrm{Min}\,\{S_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ y $w_i = 0$ $\forall_{i \neq n} \Rightarrow S(P,P_j) = \mathrm{Max}\{S_i\}$
3) Laplace criteria: $w_i = 1/n$ $\forall_i \Rightarrow S(P,P_j) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} S_i$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1-\alpha$ y $w_i = 0$ $\forall_i \neq 1, n \Rightarrow S(P,P_j) = \alpha\mathrm{Min}\{S_i\} + (1-\alpha)\mathrm{Max}\{S_i\}$

As it is a removal index, it can be found its approximation index inversely related:

$$V\,(P,P_j) = 1 - S(P,P_j) \tag{10}$$

From these results obtained for the different instruments of selection, we can study the two measures proposed by Yager [7] for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. With the first measure, we can study the degree of optimism used in the decision with: $\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n-j)/(n-1)]\, w_j$. As we can see: $\alpha \in [0, 1]$. Values near 1, show that the selection process has been developed with a high level of optimism, while values near 0, show that the selection process has been developed with a low level of optimism or with a high level of pessimism. This instrument can be very useful when the result obtained is not clear and the decision maker wants to reconsider the decision changing his degree of optimism. The second measure proposed by Yager in [7] is the entropy of dispersion of W and it is defined as:

$H(W) = - \sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j)$. In this case, this measure is useful to study the information used about the characteristics of the financial products in the selection process. Values near 0, show that the information used is minimum and higher values of H(W), means that there is more information used in the selection process.

7. Illustrative example

The information about the example is found in [5].

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company.

It is supposed that in a financial market exist three products P_1, P_2 y P_3 with different characteristics in relation to:

C_1 = prize of the money
C_2 = devolution period
C_3 = renewal possibilities
C_4 = the break up of the amortization
C_5 = velocity in the concession

It is considered for each characteristic a property. For C_1 *cheap money,* for C_2 *a good devolution period*, for C_3 *renewal possibilities*, for C_4 *ideal break up of the amortization*, for C_5 *velocity in the concession*.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic.

It is defined the fuzzy subset of ideals for the company as:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P* =	0,9	0,83	0,66	0,66	0,33

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered.

For each of these characteristics, it is found the following information:

For C_1:
The price of P_1 is 20%
The price of P_2 is 22%
The price of P_3 is 18%

For C_2:
The devolution period of P_1 is 5 years
The devolution period of P_2 is 6 years
The devolution period of P_3 is 4 years

For C_3:
The renewal possibilities of P_1 are half of P_2 and 1/3 of P_3.

For C_4:
The amortization of P_1 is accomplished quarterly
The amortization of P_2 is accomplished monthly
The amortization of P_3 is accomplished quarterly

For C_5:

The renewal of P_1 is estimated to be three times faster than P_2 and five times faster than P_3

With this information, we can obtain a matrix with the descriptors that are collocated as files of it. Then, each column will represent the characteristics of each of the products considered P_j, j = 1, 2, 3. That is:

	P_1	P_2	P_3
C_1	0,9	0,81	1
C_2	0,83	1	0,66
C_3	0,33	0,66	1
C_4	1	0,33	1
C_5	1	0,33	0,2

This, permits find a fuzzy subset for each of the financial products. Then, we will obtain:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0,9	0,83	0,33	1	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_2 =	0,81	1	0,66	0,33	0,33

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_3 =	1	0,66	1	1	0,2

That shows the level that each product has about the different characteristics considered: C_i, i = 1, 2, 3, 4, 5.

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWA operators.

In this example, we will suppose that the company decides to use the following weighting vector: W = (0'1, 0'1, 0'2, 0'3, 0'3).

With this weighting vector, we can calculate the degree of optimism of the decision as: $\alpha(W)$ = 0'1x1 + 0'1x0'75 + 0'2x0'5 + 0'3x0'25 + 0'3x0 = 0'35 $\Rightarrow$ 35%; and the degree of dispersion as: H(W) = - (0'1xln0'1 + 0'1xln0'1 + 0'2xln0'2 + 0'3xln0'3 + 0'3xln0'3) = 1'504.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each financial product. That is:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\|P - P_1\|$ =	0	0	0,33	0,33	0,66

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\|P - P_2\| =$	0,09	0,17	0	0,33	0

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$\|P - P_3\| =$	0,1	0,17	0,33	0,33	0,13

Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using equation (5).

P_1 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0'33x0'2 + 0'33x0'3 + 0'66x0'3 = 0'363
P_2 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0'09x0'2 + 0'17x0'3 + 0'33x0'3 = 0'168
P_3 = 0'1x0'1 + 0'13x0'1 + 0'17x0'2 + 0'33x0'3 + 0'33x0'3 = 0'255

In this case, our decision will consist in choose the financial product with the smallest distance, because this will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_2.

If we elaborate the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal financial product.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$1\wedge(1- \mu_i + \mu_i^{(1)}) =$	1	1	0,66	1	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$1\wedge(1- \mu_i + \mu_i^{(2)}) =$	0,91	1	1	0,66	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$1\wedge(1- \mu_i + \mu_i^{(3)}) =$	1	0,83	1	1	0,86

Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered in a decreasing way using equation (6).

P_1 = 1x0'1 + 1x0'1 + 1x0'2 + 1x0'3 + 0'66x0'3 = 0'9
P_2 = 1x0'1 + 1x0'1 + 1x0'2 + 0'91x0'3 + 0'66x0'3 = 0'875
P_3 = 1x0'1 + 1x0'1 + 1x0'2 + 0'86x0'3 + 0'83x0'3 = 0'91

The decision will consist in choose the financial product with a highest result, because that will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_3.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained from equation (8).

P_1 = 1 – 0'9 = 0'1
P_2 = 1 – 0'875 = 0'125
P_3 = 1 – 0'91 = 0'09

If we calculate it with the complete process, first we have to calculate the individual removal of each characteristic to the ideal.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(1)}) =$	0	0	0,33	0	0

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(2)}) =$	0,08	0	0	0,33	0

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(3)}) =$	0	0,16	0	0	0,13

Once calculated the individual removal for all the values, we will construct the aggregation. In this case, we will develop an increasing order using equation (7):

P_1 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0x0'2 + 0x0'3 + 0'33x0'3 = 0'1
P_2 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0x0'2 + 0'08x0'3 + 0'33x0'3 = 0'125
P_3 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0x0'2 + 0'13x0'3 + 0'16x0'3 = 0'09

Then, we can see that the results are the same as in the abbreviated form. As it is a removal index, our decision will consist in select P_3, because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

Finally, we will elaborate an instrument that combines at the same time both the Hamming distance and the adequacy coefficient. In this example we will suppose that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will have to calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index.

	C_1	C_2		C_3	C_4	C_5
$0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(1)}) =$	0	0	$\lvert P - P_1 \rvert =$	0,33	0,33	0,66

	C_1	C_2		C_3	C_4	C_5
$0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(2)}) =$	0,08	0	$\lvert P - P_2 \rvert =$	0	0,33	0

	C_1	C_2		C_3	C_4	C_5
$0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(3)}) =$	0	0,16	$\lvert P - P_3 \rvert =$	0,33	0,33	0,13

Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using equation (9). Here, we note that in the reordering phase, it will only be considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained by the adequacy coefficient or by the Hamming distance.

P_1 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0'33x0'2 + 0'33x0'3 + 0'66x0'3 = 0'366
P_2 = 0x0'1 + 0x0'1 + 0x0'2 + 0'08x0'3 + 0'33x0'3 = 0'125
P_3 = 0x0'1 + 0'13x0'1 + 0'16x0'2 + 0'33x0'3 + 0'33x0'3 = 0'246

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

8. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have proposed the possibility of change this neutrality with the introduction of the OWA operators in the selection process. As we have seen, the OWA operators permit under estimate or over estimate the selection process according to a degree of optimism, which has permitted manipulate the initial neutrality. With this in mind, we have proposed three new instruments for the selection of financial products, consisting in combine the old selection indexes with the OWA operators. Then, we have obtained a new method that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of financial products.

This work represents a first analysis about the possibility of combining the OWA operators with different selection indexes. In this paper, we have concentrated in the selection of financial products but it is important to note that these new methods can also be applied to other selection processes as the selection of human resources. In future research we will analyse how these methods can be applied to other selection processes and how can the OWA operators be combined with other selection indexes.

References

[1] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1986), "*Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*", Ed. Milladoiro.

[2] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1987), "*Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*", Ed. Hispano-europea.

[3] Gil Aluja, J., (2002), "*Introducción de la teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas*", Ed. Milladoiro.

[4] Gil Lafuente, A.M., (1990), "Técnicas de selección de un instrumento financiero", V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica, Vigo, España.

[5] Gil Lafuente, A.M., (2001), "*Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*", Ariel Economía.

[6] Gil Lafuente, J., (2001), "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italia.

[7] Yager, R., (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18, 183-190.

[8] Yager, R., Kacprzyck, J., (1997), "*The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*", Kluwer Academic Publishers.

[9] Mitchell, H.B., Estrakh, D.D., (1998), "An OWA operator with fuzzy ranks", International Journal of Intelligent Systems 13, 69-81.

[10] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), "The Uncertain OWA Operator", International Journal of Intelligent Systems 17, 569-575.
[11] Yager, R., (1992), "Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties", International Journal of General Systems 20, 233-245.
[12] Yager, R., (2004), "Decision making using minimization of regret", International Journal of Approximate Reasoning 36, 109-128.
[13] Yager, R., Kelman, A., (1999), "An extension of the analytical hierarchy process using OWA operators", International Journal of Fuzzy and Intelligent Systems 7, 401-417.
[14] Yager, R., Filev, D. P., (1999), "Induced ordered weighted averaging operators", IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 29, 141-150.
[15] Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., (1995), "Characterization of the ordered weighted averaging operators", IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3, 236-240.
[16] Yager, R., (1993), "Families of OWA operators", Fuzzy Sets and Systems 59, 125-148.

14.1.2. Artículo de congreso 2. – Publicado en CLADEA 2006

Unification point in methods for the selection of financial products

Abstract

In this paper we analyse in detail the selection of financial products. We apply the index of maximum and minimum level for the selection of financial products and we analyse what we have called the unification point between the Hamming distance and the adequacy coefficient. First, we study this situation for the case of maximum levels in the characteristics of the ideal financial product. Then, we generalize it for all the possible situations where it can be found. Finally, we study the unification point in the index of maximum and minimum level. The result found shows a transformation of this index into the Hamming distance.

1. Introduction

The selection of the best financial products for the company represents a fundamental problem to be solved in order for its good development. Nowadays, there are a lot of different financial products in the market that the company needs to know so they can find the ones that are more appropriated for their necessities. This situation makes that the enterprise has to elaborate a decision process because they need to choose the best financial products in each moment of its life. For doing this, they need to consider the different characteristics of the financial products, and compare them with the ideals the company has. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-4] about selection of human resources, the models developed in [5-6] about selection of financial products and the models developed in [7-8] about selection of players in sports.

Our objective in this work is to analyse in more detail the selection of financial products. We will propose a version of the index of maximum and minimum level for the case of financial products and we will analyse what we have called the unification point. This situation has been studied for a special case where it always happens as it is the situation with maximum ideals. Then, we have generalized this concept for all the possible cases where it can appear. These results have been studied for the case of selection of financial products, but we are concerned that the same problem is found for other selection processes as the selection of human resources.

2. Selection of financial products

In order to select the most appropriated financial product, the process to follow will consist in five steps [1-6]:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2, \ldots, Ci, \ldots, C_n\}$, where C_i is the *i*th characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number *n* of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal financial product. Theoretically, it will be represented as:

$$P = \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \ldots.. & C_i & \ldots.. & C_n \\ \hline \mu_1 & \mu_2 & \ldots.. & \mu_i & \ldots.. & \mu_n \end{array}$$

where P is the ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. Theoretically, it will be represented as:

$$P_j = \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \ldots.. & C_i & \ldots.. & C_n \\ \hline \mu_1^{(j)} & \mu_2^{(j)} & \ldots.. & \mu_i^{(j)} & \ldots.. & \mu_n^{(j)} \end{array}$$

with $j = 1, 2, \ldots, m$; where P_j is the *j*th financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *j*th financial product.

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal.

In this step, we have to express numerically the approximation between the ideal financial product and the different financial products considered. To solve this problem, we have a lot of different selection indexes that can be used. A first instrument could be the use of the notion of distance. Among the large variety of distances that it can be developed, we will use the Hamming distance as it is very easy to work with. It is defined as:

$$D(P,P_j) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = |\mu_1 - \mu_1^{(j)}| + |\mu_2 - \mu_2^{(j)}| + \ldots.. + |\mu_n - \mu_n^{(j)}| \qquad (1)$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall (P,P_j) \in \varepsilon \times \varepsilon$, $\mu_i, \mu_i^{(j)} \in [0,1]$.

In some cases, we should prefer to use the relative Hamming distance. Then, its formulation would be:

$$\delta(P,P_j) = (1/n)\, D(P,P_j) \qquad \text{with: } \delta \in [0,1] \qquad (2)$$

About the results obtained, we see that they refer to the removal of each product to the ideal one. Then, our preference relation will be constructed in an increasing order being the lowest value the best result.

A second instrument that could be used is the adequacy coefficient. Theoretically, it is defined as:

$$K(P_j \rightarrow P) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} K_i(P_j \rightarrow P) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] \quad (3)$$

with: j = 1,2,…,m

About the results obtained, we should note that they refer to the approximation of the financial products to the ideal. Then, our preference relation will be constructed in a decreasing order being the highest value the best result. Analogously to this index, we could calculate its equivalent removal index. Its formulation for the case of financial products is:

$$Q(P_j \rightarrow P) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} Q_i(P_j \rightarrow P) = (1/n)\sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] \quad (4)$$

In this case, the preference relation will be ascendant. That is, we will select the lowest result.

Apart from these two instruments, we could also consider other aspects as the case in which the ideal financial product is maximum. That is, it gets valuation 1 for all the characteristics. Then, the fuzzy subset that describes the ideal financial product will be constituted only by 1s. From here, the resolution process would be the same as in the two previous instruments, with the only difference about the values of the ideal. Then, the formulation will be the same that in the case of the Hamming distance or in the case of the adequacy coefficient.

Another factor to consider would be the situation in which it is impossible to specify an ideal financial product. In this case, the solution would consist in suppose that the valuations obtained for the different products would strictly refer to an ascending or a descending order depending if the results are expressed with maximums or with minimums. For solving these situations, we could use the traditional decision methods as the Laplace criteria [9], the Weighted Sum Model (WSM) [10] or the Ordered Weighted Averaging (OWA) operators [11]. In this case, the aggregation would consist in directly apply the values from the characteristics without a previous phase of determination of the individual distances.

It is important to note that until now we have always supposed that all the characteristics have the same level of importance. Obviously, this is not always the case, so we could analyse these models giving different levels of importance to the characteristics of the financial products. In order to use different degrees of importance, we can use a convex weighting so the result is still in [0,1]:

$$V_i = w_i \Big/ \sum_{i=1}^{n} w_i \quad (5)$$

where V_i refers to the degree of importance of the characteristic C_i, w_i is the valuation done for the characteristic C_i and $\sum_{i=1}^{n} w_i$ is the sum of all the valuations done for all the characteristics of each financial product.

From this convex weighting, we could obtain the different instruments in which we would reflect the degree of importance of each characteristic. The formulation would be:

- For the Hamming distance:

$$\pi(P,P_j) = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } |\mu_i - \mu_i^{(j)}| \; ; \quad \text{With: } j = 1,2,\ldots,m \tag{6}$$

- For the adequacy coefficient:

a) Approximation index or adequacy coefficient:

$$K(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] \; ; \quad \text{With: } j = 1,2,\ldots,m \tag{7}$$

b) Removal index:

$$Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] \; ; \quad \text{With: } j = 1,2,\ldots,m \tag{8}$$

Obviously, we see that the adequacy coefficient and the removal index are inversely related:

$$K(P_j \rightarrow P) = 1 - Q(P_j \rightarrow P) \tag{9}$$

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

Finally, we should take the decision about which financial product select. Obviously, our decision will consist in choose the financial product with the best results according to the index used.

3. Unification point between the Hamming distance and the adequacy coefficient

The unification point is a situation where the Hamming distance and the adequacy coefficient become the same index. This point is always found when the ideal financial product is maximum. Then, the analysis done with the Hamming distance is the same as in the adequacy coefficient. With the initial results, we get the complementary result of the other index [7], but if we use the removal index of the adequacy coefficient, then the results are exactly the same. The reason is that the adequacy coefficient consists in not penalize the values over the ideal. But in this case, it is impossible to get values over it, so the calculation consists only in calculate the distance to the ideal. Then, the calculation is the same as in the Hamming distance.

Theorem 1:

If $\mu_i = 1, \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i$.

As we can see, $\mu_i^{(j)}$ will never be higher than μ_i, so the result will never use 0 in the relation $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]$. Simplifying this result, we see that it becomes the relative Hamming distance.

This unification point can also be found for the case with different degrees of importance in the characteristics of the financial products. In this case, the process will be the same with the only difference that in the equations we will include equation (5).

Theorem 2:

If $\mu_i = 1, \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i$. Again, we see the same situation as before.

The unification point appears always in the cases where the ideal is maximum, but there are other situations where we could find it. In the following, we are going to generalize all the possible situations in which the unification point appears.

Theorem 3:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

This happens because the condition to become the same index is not only the maximum ideal. It is enough that we do not use the part of the equation of the adequacy coefficient that uses the compensation result. That is, when $\mu_i < \mu_i^{(j)}$.

This general unification point can also be found for the case with different degrees of importance in the characteristics of the financial products. The process will be the same with the difference that in the equations we have to consider equation (5).

Theorem 4:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

These formulations represent the unification point for one financial product. This unification could be considered as a partial unification point in the selection process because not all the financial products are affected by this situation. In the following we show the situation found when all the financial products of the selection process are affected by the unification point. We will call it the total unification point. We will use the same equations as in theorems (1-4) with the difference that here we will consider all the existing financial products in the selection process.

Theorem 5:

If $\mu_i = 1, \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \forall_j$.

This is the case of the maximum ideal with the same levels of importance. If we look for the case with different degrees of importance we will get a similar result as in theorem 2.

Theorem 6:

If $\mu_i = 1, \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \forall_j$.

If we generalize this total unification point to all the possible situations where we could find it, we will get a similar result as in theorem 3 for the case with same level of importance.

Theorem 7:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

And if we apply the total unification point for the case with different degrees of importance we will get a similar result as in theorem 4.

Theorem 8:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

As we have seen, the result found for the eight theorems is that the adequacy coefficient gets the form of the Hamming distance when this situation occurs.

These results can also be obtained from the primitive adequacy coefficient. Here we will only show the most generalized case for the partial unification point and for the total unification point. First we will study the partial unification point.

Theorem 9:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times \{1 - [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]\} = \sum_{i=1}^{n} V_i \times \{1 - (\mu_i - \mu_i^{(j)})\} = 1 - \pi(P,P_j) = 1 - Q(P_j \rightarrow P)$

As we can see, with the initial adequacy coefficient, we get the complementary to the Hamming distance. And as we now, this result is the removal index. If we analyse the total unification point we will get a similar result with the difference that it affects all the financial products in the selection process.

Theorem 10:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}\ \forall_i \forall_j \Rightarrow K(P_j \to P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times \{1 - [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]\} = \sum_{i=1}^{n} V_i \times \{1 - (\mu_i - \mu_i^{(j)})\} = 1 - \pi(P,P_j) = 1 - Q(P_j \to P)$

Here we get that all the financial products gets the form of the complementary of the Hamming distance.

4. Selection of financial products with the index of maximum and minimum level

The index of maximum and minimum level was introduced in [8], and consists in use the Hamming distance and the adequacy coefficient in the same index. Then, each index will only use a certain number of characteristics of the fuzzy subset. In the following, we are going to formulate the index of maximum and minimum level for the case of financial products as:

$$\eta(P,P_j) = (1/(u+v))\ \left[\sum_{u} |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_{v} [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))]\right] \qquad (10)$$

where *u* refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and *v* refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. It is important to note that $u + v = n$. That is, the sum of both groups of characteristics is equal to the total number of characteristics.

As in the previous indexes, we could consider the case where the characteristics have different levels of importance. To solve this problem, we should introduce a version of equation (5) in equation (10). Then, the formulation is:

$$\eta(P,P_j) = \sum_{u} Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_{v} Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] \qquad (11)$$

with: $Z_i = w_i / \sum_{i=1}^{n} w_i$; which represents the level of importance of the characteristic C_i.

Analogously to this removal index, we could calculate the approximation index as:

$$\upsilon(P,P_j) = 1 - \eta(P,P_j). \qquad (12)$$

5. Unification point in the index of maximum and minimum level

The unification point in the index of maximum and minimum level is a situation which transforms the index in the Hamming distance. In the following we are going to demonstrate this result using the generalization obtained for different degrees of importance. First we are going to suppose the situation were the ideal financial product is maximum. As we now from theorems (1-5), in this situation, we always arrive to the unification point.

Theorem 11:

If $\mu_i = 1, \forall_i \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))]$

$= \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$; and $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$ $\forall_i$.

This result can be generalized for all the possible situations in where we can find the unification point in the index of maximum and minimum level.

Theorem 12:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$ $\forall_i \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))]$

$= \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$; and $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$ $\forall_i$. As we can see, the unification appears when $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$.

Theorems 11 and 12 show the unification point for the case of one financial product. As it was explained in theorems 1-10, this situation is called partial unification point and it can affect several financial products of the selection process with the condition that at least one financial product of the selection is not affected by it. Obviously, we could make a classification of situations with higher number of cases affected by the unification point. A higher percentage of financial products affected by the unification point would mean that the partial unification point is closer to the total unification point. When the 100% of the financial products would be affected by the unification point, then we would enter in a situation of total unification point.

Now, we are going to show the total unification point for the index of maximum and minimum level. Again, we will see that the result obtained is that the index of maximum and minimum level gets the form of the Hamming distance with the difference that now it is for all the financial products of the selection process.

Theorem 13:

If $\mu_i = 1, \forall_i \forall_j \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$; and $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \forall_j$.

This result is for the case of the maximum ideal. If we generalize this result for all the possible cases we get a similar result as in theorem 12.

Theorem 14:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \forall_j \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$.

As we can see, the index of maximum and minimum level gets the form of the Hamming distance.

7. Conclusions

In this paper we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Analysing the different situations that can occur we have found that there are situations in where the adequacy coefficient becomes the Hamming distance. We have called these situations as the unification point. Initially, we have analysed the situation with an ideal financial product with maximum levels and we have found that in this case we always arrive to the unification point. Then, we have extended this concept to all the possible situations in where we can find the unification point. As we have seen, this result appears when all the valuations of the characteristics of the ideal financial product are higher than the ones from the real financial products. In these results we have distinguished between cases with partial unification point and total unification point. The first one refers to cases when not all the financial products of the selection process are affected by the unification point but at least one is. The second one refers to cases where all the financial products are affected by the unification point. With this result in mind, we have proposed the index of maximum and minimum level for the case of selection of financial products and we have analysed its unification point. As we have seen, when the unification point appears, the index of maximum and minimum level is transformed into the Hamming distance. This result has also been studied for the case of maximum level and for the generalized version with all the cases that it could occur.

This work represents an extension in the field of selection of financial products. In future research we expect to develop more extensions in the selection of financial products and we will also analyse the unification point with more detail, studying different alternatives in other selection processes.

References

[1] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1986), "*Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*", Ed. Milladoiro.

[2] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1987), "*Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*", Ed. Hispano-europea.

[3] Gil Aluja, J., (1996), "*La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*", Centro de Estudios Ramón Areces.

[4] Gil Aluja, J., (2002), "*Introducción de la teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas*", Ed. Milladoiro.

[5] Gil Lafuente, A.M., (1990), "Técnicas de selección de un instrumento financiero", V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica, Vigo, España.

[6] Gil Lafuente, A.M., (2001), "*Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*", Ariel Economía.

[7] Gil Lafuente, J., (1999), "*L'optimització del fitxatge d'un esportista en l'àmbit de l'esport*", Les Universitats en el Centenari del F.C.Barcelona. Estudis en l'àmbit de l'esport, 3-55.

[8] Gil Lafuente, J., (2001), "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italia.

[9] Laplace, P.S, (1814), "*A Philosophical Essay on Probabilities*", New Cork, Dover Publications, Inc.

[10] Fishburn, P.C, (1967), "*Additive Utilities with Incomplete Product Set: Applications to Priorities and Assignments*", Operations Research Society of America (ORSA), Baltimore, MD, USA.

[11] Yager, R.R, (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria decision Making", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18, p.183-190.

14.1.3. Artículo de congreso 3. – Publicado en AMSE 2006

Using the OWG Operators in the selection of financial products

J.M. Merigó Lindahl, A.M. Gil Lafuente

University of Barcelona, Diagonal Avenue 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

In this paper, we develop a method that combines the Ordered Weighted Geometric (OWG) operators with different indexes used for the selection of financial products. The objective of this new model is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select financial products according to his attitude. In order to elaborate this model, first a short revision of the OWG operators is developed. Here, we will distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators because each selection index has a different reordering step. Second, we will briefly explain the general model for the selection of financial products. Then, we will propose the three new indexes consisting in a combination between the OWG operator and the Hamming distance, a combination between the OWG operator and the adequacy coefficient, and a combination between the OWG operator and the index of maximum and minimum level. The work will finish with an illustrative example that will show how these three new instruments function.

Keywords: OWG operators, financial products, Hamming distance, adequacy coefficient, index of maximum and minimum level.

1. Introduction

The selection of the more adequate financial products for the company represents a fundamental problem for its good development. With the large variety of alternatives that exist in the market, the enterprise needs to know which the best financial products according to their interests are. In order to solve this problem, the company has to elaborate a selection process in which they have to compare the different characteristics of each product found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-3] about selection of human resources, the models developed in [4-5] about selection of financial products and the models developed in [6] about selection of players in sports.

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results depending on if the decision maker has a high level of optimism or pessimism. This problem can become important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. Our objective in this paper will consist in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of financial products. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the Ordered Weighted Geometric (OWG) operators because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWG operators.

2. OWG Operators

The OWG operator was introduced in [7] and provides a family of aggregation operators similar to the OWA operators [8-9]. In the following, we provide a definition of the OWG operators as introduced by [10].

Definition 1: An OWG operator of dimension n is a mapping $F:R^{+n}\rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$F_w(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{wj} \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators.

Definition 2 [10]: A DOWG operator of dimension n is a mapping $G:R^{+n}\rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$G_w(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{wj} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i. As it can be seen, the elements b_j (j= 1, 2,…, n) are ordered in a decreasing way: $b_1 \geq b_2 \geq\ldots \geq b_n$; taking the same form as the typical OWG operators [7].

Definition 3 [10]: An AOWG operator of dimension n is a mapping $H:R^{+n}\rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$H_w(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{wj} \tag{3}$$

where c_j is the jth largest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq\ldots \leq c_n$.

As it is seen in [7,10], the OWG operator has the following properties:

Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
Monotonicity: If $a_i \geq d_i \ \forall_i \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$.
Boundedness: $Min_i \{a_i\} \leq F(a_1,\ldots, a_n) \leq Max_i \{a_i\}$.
Idempotency: $F(a_1,\ldots, a_n) = a$, if $a_i = a, \forall i$

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [10]. For example, with the DOWG operators we get:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = Max\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = Min\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n \ \ \forall_j \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/m}$

And with the AOWG operators, we get:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = Min\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = Max\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n \ \ \forall_j \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/m}$

Other examples of aggregations with OWG operators can be seen in [10].

3. Selection of financial products with the OWG Operators

The use of the OWG operators in the selection of financial products appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Then, due to the fact that the traditional methods in selection of financial products [1-6] are neutral against the attitude of the decision maker, introducing the OWG operators in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but as it is explained for the OWA operators, the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase [11]. This can be useful in a lot of situations as for example, in the situations in where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more prudent decision than in normal cases. Obviously, this increase in the prudence can affect our decision doing that we select a different financial product than we would have chosen with a neutral criteria.

The procedure to follow in the selection of financial products with the OWG operators, is similar to the process developed in [1-3] for human resources and in [4-5] for financial products, with the difference that the instruments used will include the OWG operators in the selection process. Then, the 5 steps to follow will be:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. That is: $C = \{C_1, C_2,\ldots C_i,\ldots, C_n\}$.
Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal financial product. That is:

$$P = \begin{array}{ccccccc} C_1 & C_2 & \ldots\ldots & C_i & \ldots\ldots & C_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots\ldots & \mu_i & \ldots\ldots & \mu_n \end{array}$$

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. That is:

$$P_k = \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_i & C_n \\ \mu_1^{(k)} & \mu_2^{(k)} & \mu_i^{(k)} & \mu_n^{(k)} \end{array} \quad ; \quad k = 1,2,\ldots,m$$

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWG operators. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

In the fourth step, the objective is to express numerically the removal between the ideal financial product and the different financial products considered. For this, it can be used the different selection indexes [1-6], with the difference that here they will be mixed with the OWG operators. In the following, it will be shown how to use the OWG operators in the principal selection indexes.

4. Combination between the OWG Operators and the Hamming distance in the selection of financial products

Definition 4: An OWG operator of dimension n combined with the Hamming distance, is a mapping $\beta: R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$\beta(P,P_k) = \prod_{j=1}^{n} D_j^{wj} \tag{4}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and k =1,2,…,m. As it can be seen, it has been introduced an AOWG operator in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0; \forall_j$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow \beta(P,P_k) = \text{Min}\{D_j\} = \text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow \beta(P,P_k) = \text{Max}\{D_j\} = \text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n \ \ \forall_j \Rightarrow \beta(P,P_k) = \prod_{i=1}^{n} (D_j)^{1/m}$

In the case of tie, especially for the optimistic and pessimistic criteria, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

5. Combination between the OWG Operators and the adequacy coefficient in the selection of financial products

Definition 5: An OWG operator of dimension *n* combined with the adequacy coefficient, is a mapping $K:R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$K\,(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{wj} \tag{5}$$

where K_j represents the *j*th largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and k =1,2,…,m. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWG operator used in the adequacy coefficient is the DOWG operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_n$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow K\,(P_k \rightarrow P) = \mathrm{Max}\,\{K_j\} = \mathrm{Max}\{1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})\}$
2) Pessimistic: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow K\,(P_k \rightarrow P) = \mathrm{Min}\{K_j\} = \mathrm{Min}\{1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall_j \Rightarrow$ $K\,(P_k \rightarrow P) = \prod_{i=1}^{n} (K_j)^{1/m}$

6. Combination between the OWG Operators and the index of maximum and minimum level

Definition 6: An OWG operator of dimension *n* combined with the index of maximum and minimum level, is a mapping $S:R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ y $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$S\,(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} S_j^{wj} \tag{6}$$

where S_j represents the *j*th smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with k = 1,2,…,m. In this case, an AOWG operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$) with the particularity that it always selects the *j*th smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$; $\forall_j$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ y $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow S(P,P_k) = \text{Min}\{S_j\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ y $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow S(P,P_k) = \text{Max}\{S_j\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall_j \Rightarrow S(P_k \rightarrow P) = \prod_{i=1}^{n} (S_j)^{1/m}$

7. Illustrative example

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company: It is considered for each characteristic a property. For C_1 *cheap money*, for C_2 *a good devolution period*, for C_3 *renewal possibilities*, for C_4 *ideal break up of the amortization*, for C_5 *velocity in the concession*.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic.
It is defined the fuzzy subset of ideals for the company as:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P* =	0,9	0,83	0,66	0,66	0,33

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered.
For each of these characteristics, it is found the following information:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0,8	0,7	0,33	1	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_2 =	0,81	1	0,6	0,33	0,3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_3 =	1	0,66	1	1	0,2

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWG operators. We suppose: W = (0’1, 0’1, 0’2, 0’3, 0’3).

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each financial product. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using equation (4).

$P_1 = 0'1^{0'1} \times 0'13^{0'1} \times 0'33^{0'2} \times 0'33^{0'3} \times 0'66^{0'3} = 0'328$
$P_2 = 0'03^{0'1} \times 0'06^{0'1} \times 0'09^{0'2} \times 0'17^{0'3} \times 0'33^{0'3} = 0'165$
$P_3 = 0'1^{0'1} \times 0'13^{0'1} \times 0'17^{0'2} \times 0'33^{0'3} \times 0'33^{0'3} = 0'233$

In this case, our decision will consist in choose the financial product with the smallest distance. Then, we will select P_2.

If we elaborate the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal financial product. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered in a decreasing way using equation (5).

$P_1 = 1^{0'1} \times 1^{0'1} \times 0'9^{0'2} \times 0'87^{0'3} \times 0'66^{0'3} = 0'829$
$P_2 = 1^{0'1} \times 0'97^{0'1} \times 0'94^{0'2} \times 0'91^{0'3} \times 0'66^{0'3} = 0'845$
$P_3 = 1^{0'1} \times 1^{0'1} \times 1^{0'2} \times 0'87^{0'3} \times 0'83^{0'3} = 0'906$

The decision will consist in choose the financial product with the highest result, because that will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_3.

Finally, we will elaborate an instrument that combines at the same time both the Hamming distance and the adequacy coefficient. In this example we will suppose that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using equation (6). Here, we note that in the reordering phase, it will only be considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained by the adequacy coefficient or by the Hamming distance.

$P_1 = 0'1^{0'1} \times 0'13^{0'1} \times 0'33^{0'2} \times 0'33^{0'3} \times 0'66^{0'3} = 0'328$
$P_2 = 0'03^{0'1} \times 0'06^{0'2} \times 0'09^{0'3} \times 0'33^{0'3} = 0'139$
$P_3 = 0'13^{0'1} \times 0'17^{0'2} \times 0'33^{0'3} \times 0'33^{0'3} = 0'294$

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

8. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have proposed the possibility of change this neutrality with the introduction of the OWG operators in the selection process. As we have seen, the OWG operators permit under estimate or over estimate the selection process, which has permitted manipulate the initial neutrality. With this information, we have proposed three new instruments for the selection of financial products, consisting in combine the old selection indexes with the OWG operators. Then, we have obtained three new methods that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of financial products.

This work represents a first analysis about the possibility of combining the OWG operators with different selection indexes. In this paper, we have concentrated in the selection of financial products but it is important to note that these new methods can also be applied to other selection processes as the selection of human resources. In future research, we will analyse how these methods can be applied to other selection processes and combined with other selection indexes.

References

[1] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1986), "*Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*", Ed. Milladoiro.

[2] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1987), "*Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*", Ed. Hispano-europea.

[3] Gil Aluja, J., (2002), "*Introducción de la teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas*", Ed. Milladoiro.

[4] Gil Lafuente, A.M., (1990), "Técnicas de selección de un instrumento financiero", *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, Spain.

[5] Gil Lafuente, A.M., (2001), "*Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*", Ariel Economía.

[6] Gil Lafuente, J., (2001), "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM)*, Reggio Calabria, Italy.

[7] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2000), "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*. Madrid, Spain.

[8] Yager, R., (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190.

[9] Yager, R., Kacprzyck, J., (1997), "*The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*", Kluwer Academic Publishers.

[10] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *International Journal of Intelligent Systems 17*, 709-716.

[11] Yager, R., Filev, D. P., (1999), "Induced ordered weighted averaging operators", *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 29*, 141-150.

14.1.4. Artículo de congreso 4. – Publicado en AMSE 2006

Acquisition of financial products that adapt to different environments

J.M. Merigó Lindahl, A.M. Gil Lafuente

University of Barcelona, Diagonal Avenue 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

In this paper, we study how to select financial products when the company has different necessities depending on the situation that it will happen in the future. Initially, we start explaining the process to follow in these situations. Then, we define different techniques that could be used in the selection process of polyvalent financial products. In this work, we analyse the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. For the three instruments, we analyse the case where the characteristics have the same degree of importance, the case where the characteristics have different degrees of importance, the case where the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator is used and the case where the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator is used.

Keywords: Hamming distance, adequacy coefficient, index of maximum and minimum level, polyvalent financial product, OWA operator.

1. Introduction

Selecting the best financial product for the company is one of the key problems to be solved in order for its good development. Nowadays, there are a lot of financial products in the market that the company needs to analyse so they can find the most adequate for their necessities. In order to solve this problem, the company has to develop a selection process of financial products because they need to choose the best financial product in each moment of its life. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-2] about selection of human resources, the models developed in [3-4] about selection of financial products and the models developed in [5-6] about selection of players in sports.

Sometimes, depending on the situation that happens in the future, the company has different necessities and this also affects their needs about financial products. Our objective in this paper will consist in develop different techniques to solve this problem. First, we will analyse how to consider mathematically these different situations that could happen in the future. Then, we will develop the different indexes that could be used in these cases. Basically, we will analyse the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. For each technique we will consider the case where the characteristics of the financial products have the same degree of importance, the case where the characteristics have different degrees of importance, the case where the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator is used and the case where the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator is used.

2. Selection of financial products that adapt to different environments

This type of selection is very similar to the traditional selection of financial products with the difference that here it can occur different situations in the future. Then, the selection needs to consider this aspect and search for the financial product that better adapts to the different possible situations that could occur. The mathematical process will be equal with the difference that here we will have more than one ideal fuzzy subset. With this additional information, the fuzzy subsets of each product will be compared with all the ideal fuzzy subsets that we have. Then, the process to follow will consist in the following steps similar to [1-2, 5]:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2,\ldots C_i,\ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Identification of the different possible scenarios that could occur in the future where we should need different ideal fuzzy subsets. These z fuzzy subsets will be considered as: $h = 1, 2,\ldots, z$; where each fuzzy subset would represent the necessities of the company in each situation h.

Step 3: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the different ideal financial products for all the possible situations that could occur. Mathematically, it will be represented as:

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
P_h =	μ_1^h	μ_2^h	…..	μ_i^h	…..	μ_n^h

where P_h is the hth ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the hth ideal financial product.

Step 4: Grouping of all the different ideal financial products in one fuzzy subset.

	C_1	…	C_n	C_1	…..	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_{1, 2,\ldots, z}$ =	μ_1^1	…	μ_n^1	μ_1^2	…..	μ_n^2	…	μ_1^z	…	μ_n^z

where $P_{1, 2, \ldots, z}$ refers to the grouping of the hth ideal financial products expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the hth ideal financial product.

Step 5: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. Theoretically, it will be represented as:

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
P_k =	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…..	$\mu_i^{(k)}$	…..	$\mu_n^{(k)}$

with k = 1, 2, …, m; where P_k is the kth financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; i = 1, 2, …, n, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth financial product.

Step 6: Construction of a fuzzy subset for each financial product that is adapted to the ideal financial product with different situations. It consists in create a fuzzy subset with the subset of the financial product k repeated z times.

	C_1	…	C_n	C_1	…..	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_k^{(p)}$ =	$\mu_1^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$	$\mu_1^{(k)}$	…..	$\mu_n^{(k)}$	…	$\mu_1^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$
		1				2			z	

Step 7: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal. In this step, we have to express numerically the approximation between the ideal financial product and the different financial products considered. To solve this problem, we have a lot of different selection indexes that can be used. In this paper, we will use the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. In these three cases, we will consider the situation that the characteristics have the same level of importance, the situation with different degrees of importance, the situation found with the OWA operators and the situation found with the OWG operators. These different indexes in the selection of financial products that adapt to different environments will be considered in the next chapters.

Step 8: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

3. Using the Hamming Distance in the selection of polyvalent financial products

A first index that can be used in the selection process is the Hamming distance. Here we will consider four cases where the Hamming distance could be used. First, we could consider the case where the characteristics have the same level of importance. Then, we could define the Hamming distance as:

$$\delta(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = (1/zn) \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} |\mu_i^h - \mu_i^{(k)}| \qquad (1)$$

With: i = 1,2,…,n; and $\forall$ ($P_{1,2,\ldots,z}$, $P_k^{(p)}$) $\in$ μ_i^h, $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$. Analysing the results, we see that they refer to the removal of each financial product to the ideal one for all the different situations that could occur. The result will be between 0 and 1. Values near 0 will mean that the financial product is interesting because it has similar valuations than the ideal one. Values near 1 will mean that the financial product is not interesting for the company because it is not similar to the ideal one. Then, our preference relation will be constructed in an increasing order being the lowest value the best result.

A second case that we could consider is the case where the characteristics have different degrees of importance. In order to use different degrees of importance, we can use a convex weighting so the result is still in [0,1]:

$$V_i^h = w_i^h \,/\, \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} w_i^h \qquad (2)$$

where V_i^h refers to the degree of importance of the characteristic C_i^h, w_i^h is the valuation done for the characteristic C_i^h and $\sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} w_i^h$ is the sum of all the valuations done for all the characteristics of each financial product.

From this convex weighting, we could obtain the Hamming distance as:

$$\pi(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} V_i^h \times |\mu_i^h - \mu_i^{(k)}| ; \quad \text{With: } k = 1,2,\ldots,m \qquad (3)$$

With: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall\, (P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$. Analysing the results, we see that the interpretation is the same as before with the difference that now the characteristics have different degrees of importance.

A third case could be the introduction of the OWA operators in the selection process in order to introduce the attitudinal character of the decision maker in the decision. The OWA operator was introduced in [7] and it has been applied in different fields [8]. Recently [9], an application to the selection of financial products has also been developed. In this case, using the same methodology as in [9], the formulation will be:

$$\beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j D_j \qquad (4)$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and k =1,2,…,m. As it can be seen, it has been introduced an Ascending OWA (AOWA) operator [10] in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$. With this weighting vector, we can calculate the attitudinal character of the decision maker [7] as: $\alpha(W) = \sum_{j=1}^{zn} [(zn-j)/(zn-1)]\, w_j$. As we can see: $\alpha \in [0, 1]$. Values near 1, show that the selection process has been developed with a high level of optimism, while values near 0, show that the selection process has been developed with a low level of optimism or with a high level of pessimism. This instrument can be very useful when the result obtained is not clear and the decision maker wants to reconsider the decision changing his degree of optimism.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [7]. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \text{Min}\{D_j\} = \text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
2) Pessimistic criteria: $w_{zn} = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq zn} \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \text{Max}\{D_j\} = \text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$

3) Laplace criteria: $w_j = 1/zn \quad \forall_j \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = (1/zn) \sum_{j=1}^{zn} D_j = (1/zn) \sum_{j=1}^{zn} \{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_{zn} = 1\text{-}\alpha$ and $w_j = 0 \quad \forall_j \neq 1, zn \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \alpha\text{Min}\{D_j\} + (1\text{-}\alpha)\text{Max}\{D_j\} = \alpha\text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\} + (1\text{-}\alpha)\text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$

In the case of tie, especially for the optimistic and pessimistic criteria, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

A fourth case could be the introduction of the OWG operators in the selection process in order to introduce a geometric version of the OWA operators. The OWG operator was introduced in [11] and it has also been used in different studies as in [12] for the selection of financial products. Using the same methodology as in [12], we could formulate this case as:

$$\beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \prod_{j=1}^{zn} D_j^{wj} \tag{5}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and k =1,2,…,m. As it can be seen, it has been introduced an Ascending OWG (AOWG) operator [13] in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. It is important to note that we will not include in the aggregation the $D_j = 0$; $\forall_j$. Here, w_j represents a weighting vector with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [11-13]. In the case of tie, it could be used the second best or worst result, and so on. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \quad \forall_{j \neq 1} \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \text{Min}\{D_j\} = \text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
2) Pessimistic criteria: $w_{zn} = 1$ and $w_j = 0 \quad \forall_{j \neq zn} \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \text{Max}\{D_j\} = \text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
3) 3) Geometric mean: $w_j = (1/zn) \ \forall_j \Rightarrow \beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \prod_{j=1}^{zn} (D_j)^{1/zn}$

4. Using the adequacy coefficient in the selection of polyvalent financial products

Another index that could be used in the selection process is the adequacy coefficient. Here, we will also consider four cases where the adequacy coefficient could be used. First, we could consider the case where the characteristics have the same level of importance. In this case, the adequacy coefficient will be:

$$K(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = (1/zn) \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} [1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})] \tag{6}$$

with: k = 1,2,…,m. About the results obtained, we should note that they refer to the approximation of the financial products to the ideal. Then, our preference relation will be constructed in a decreasing order being the highest value the best result.

Analogously to this index, we could calculate its equivalent removal index. Its formulation for the case of financial products is:

$$Q\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = (1/zn)\sum_{h=1}^{z}\ \sum_{i=1}^{n}\ [0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] \tag{7}$$

In this case, the preference relation will be ascendant. That is, we will select the lowest result. Obviously, we see that the adequacy coefficient and the removal index are inversely related:

$$K\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = 1 - Q\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) \tag{8}$$

A second case that we could consider is the case where the characteristics have different degrees of importance. In order to use different degrees of importance, we could use a convex weighting so the result is still in [0,1]. For this case, we will use the same convex weighting as in equation (2). Then, the adequacy coefficient will be:

$$K\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z}\ \sum_{i=1}^{n}\ V_i^h \ \mathrm{x}\ [1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})] \ ; \text{With: } k = 1,2,\ldots,m \tag{9}$$

And for the removal index:

$$Q(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z}\ \sum_{i=1}^{n}\ V_i^h \ \mathrm{x}\ [0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] \ ; \ \text{With: } k = 1,2,\ldots,m \tag{10}$$

A third case that could be used, would be the introduction of the OWA operators in the adequacy coefficient in order to change the neutrality of the coefficient. Using the same methodology as in [9], the formulation will be:

$$K\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j K_j \tag{11}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})]$, and k =1,2,…,m. In this case, the reordering step is done in a decreasing way as the best result is the largest number. Then, the type of OWA operator used is the Descending OWA (DOWA) operator [7]: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_{zn}$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$. Here, we could also calculate the attitudinal character $\alpha(W)$ [7].

Analogously we could formulate its removal index as:

$$Q\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j\, Q_j \tag{12}$$

where Q_j represents the jth smallest of the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$, and k = 1,2,…,m. In this case, as it is a removal index, the reordering step is done in an increasing order as the best result is the smallest number. Then, the type of OWA operator used in the removal index is the AOWA operator: $Q_1 \leq Q_2 \leq \ldots \leq Q_{zn}$. Here, w_j also represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Here, we are also able to obtain different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector [9].

Finally, a fourth case that could be used with the adequacy coefficient would be the introduction of the OWG operators in the index in order to use the attitudinal character of the decision maker in the selection process. Here the formulation would be:

$$K\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \prod_{j=1}^{zn} K_j^{wj} \tag{13}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})]$, and k =1,2,…,m. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWG operator used is the Descending OWG (DOWG) operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_{zn}$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1. And w_j represents a weighting vector with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Similar to [12], we could also get different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector.

5. Using the index of maximum and minimum level in the selection of polyvalent financial products

The third index that we will consider in the selection of polyvalent financial products is the index of maximum and minimum level introduced in [6]. A first case that we could consider is the case where all the characteristics have the same degree of importance. Then, the formulation will be:

$$\eta(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = (1/(u+v))\,[\sum_u |\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)| + \sum_v [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]] \tag{14}$$

where u refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and v refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. It is important to note that $u + v = zn$. That is, the sum of both groups of characteristics is equal to the total number of characteristics.

As in the previous indexes, we could consider the case where the characteristics have different levels of importance. To solve this problem, we should introduce a version of equation (2) in equation (14). Then, the formulation is:

$$\eta(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_u Z_i^h(u) \text{ x } |\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)| +$$

$$\sum_v Z_i^h(v) \text{ x } [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))] \tag{15}$$

$Z_i^h = w_i^h / \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} w_i^h$; which represents the level of importance of the characteristic C_i^h.

Analogously to this removal index, we could calculate the approximation index as:

$$\upsilon(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = 1 - \eta(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) \tag{16}$$

A third case that we could consider is the introduction of the OWA operators in the index of maximum and minimum level in order to modify the neutrality of the index. Using the same methodology as in [9], the formulation will be:

$$S\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j S_j \tag{17}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$; with k = 1,2,…,m. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_{zn}$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient. Here, w_j represents a weighting vector W = (w_1, w_2, …, w_{zn})^T, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$, and we could also calculate the attitudinal character α(W) as in [7].

Here, we are also able to obtain different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector [9].

Finally, the last case we will consider in this paper is the introduction of the OWG operator in the index of maximum and minimum level in order to change the neutrality of the selection process. Here, the formulation will be:

$$S\,(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \prod_{i=1}^{zn} S_j^{wj} \tag{18}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$; with k = 1,2,…,m. In this case, an AOWG operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_{zn}$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$; $\forall_j$. For this case, w_j represents a weighting vector, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Similar to [12], we could also get different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector.

6. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Due to the fact that the company does not know the necessities they will have in the future, we have developed a selection process that considers the different necessities the company could have in the future. Initially, we have established the different steps to do in the selection process. Then, we have defined different indexes that could be used in this type of selection. First, we have used the Hamming distance in these situations. Second, we have studied how the adequacy coefficient can be used when there are different ideals to consider. And third, we have analysed the index of maximum and minimum level in these situations. For these three indexes, we have considered the case where the characteristics have the same level of importance, the case where the characteristics have different degrees of importance, the case where the technique can be combined with the OWA operator and the case where the technique is combined with the OWG operator.

This work represents a first analysis in the selection of financial products that have to adapt to different situations. We should note that these techniques can also be applied to other types of selection as the selection of human resources. In future research we expect to continue developing this problem creating more methods to solve it.

References

[1] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1986), "*Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*", Ed. Milladoiro.

[2] Gil Aluja, J., (1996), "*La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*", Centro de Estudios Ramón Areces.

[3] Gil Lafuente, A.M., (1990), "Técnicas de selección de un instrumento financiero", *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, España.

[4] Gil Lafuente, A.M., (2001), "*Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*", Ariel Economía.

[5] Gil Lafuente, J., (1999), "*L'optimització del fitxatge d'un esportista en l'àmbit de l'esport*", Les Universitats en el Centenari del F.C.Barcelona. Estudis en l'àmbit de l'esport, 3-55.

[6] Gil Lafuente, J., (2001), "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", *X Congreso Internacional de la AEDEM*, Reggio Calabria, Italia.

[7] Yager, R., (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190.

[8] Yager, R., Kacprzyck, J., (1997), "*The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*", Kluwer Academic Publishers.

[9] Merigó, J.M., Gil Lafuente, A.M., (2006), "Using the OWA operators in the selection of financial products", *Proceedings of the CLADEA 41th Conference*, Montpellier, France (To appear).

[10] Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., (1995), "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3*, 236-240.

[11] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2000), "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*. Madrid, Spain.

[12] Merigó, J.M., Gil Lafuente, A.M., (2006), "Using the OWG operators in the selection of financial products", *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey (To appear).

[13] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *International Journal of Intelligent Systems 17*, 709-716.

14.1.5. Artículo de congreso 5. – Publicado en SIGEF 2006

ORDERED WEIGHTED GEOMETRIC OPERATOR IN DECISION MAKING WITH DEMPSTER-SHAFER BELIEF STRUCTURE

Abstract

In this paper, we study the decision making process with Dempster-Shafer belief structure. We analyze the work developed by Yager about using the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator in the aggregation step of the Dempster-Shafer decision process. We suggest the possibility of use an ascending order in the OWA operator for the cases where the smallest value is the best result. We also propose to use the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator in the Dempster-Shafer framework. Here, we also suggest the possibility of use an ascending order and we find that for these cases it is completely necessary as the OWG operator cannot aggregate negative numbers. Finally, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using the OWA operator, the Ascending OWA (AOWA) operator, the OWG operator and the Ascending OWG (AOWG) operator.

1. Introduction

The Ordered Weighted Averaging (OWA) operator was introduced by Yager in [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators. Since then, a lot of new advances have been developed about it [2-21]. Recently, Chiclana et al. [22] have developed a geometric version of the OWA operator, the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator. Since its appearance, the OWG operator has been extensively analysed by different authors [23-31]. Basically, it consists in combine in the same aggregation the OWA operator with the geometric mean. Among the great variety of extensions developed for the OWA and the OWG operator, this work will focus on an article published by Yager [3] consisting in introduce the OWA aggregation in the Dempster-Shafer belief structure. In this paper, we propose to use the OWG operator in situations of decision making under uncertainty where the Dempster-Shafer belief structure plays a major role.

In order to do that, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly comment the OWA operator. In Section 3, we analyze in detail the OWG operator describing its main concepts such as the definition, the main properties and the basic aggregations obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. In this analysis, we specially focus in distinguish between OWG aggregations that have a descending or an ascending order. In Section 4, we briefly comment the main concepts of the Dempster-Shafer belief structure. In Section 5, we study the process to follow in decision making with Dempster-Shafer belief structure. We analyze the process using the OWA operators in the aggregations as suggested by Yager [3]. The difference with Yager's work is that we distinguish between aggregations that use a Descending OWA (DOWA) operator or an Ascending OWA (AOWA) operator. In Section 6, we propose to use the OWG operator in the aggregation step of the decision making process with Dempster-Shafer belief structure. We develop the analysis distinguishing between aggregations with a Descending OWG (DOWG) operator or with an Ascending OWG (AOWG) operator. In Section 7, we give an illustrative example where we can see how the Dempster-Shafer belief structure functions in decision making with the OWA and the OWG operator. Finally, in Section 8 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Ordered Weighted Averaging (OWA) operator

The OWA operator was introduced in [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [2-21]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [1].

Definition 1: An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{OWA_w}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step of the input arguments, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator. The DOWA operator is defined as in definition 1.

Definition 2: An AOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{AOWA_w}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, c_j \tag{2}$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way [8]: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotone, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the OWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the average criteria [1, 8].

3. Ordered Weighted Geometric (OWG) operator

The OWG operator was introduced in [22] and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator. It consists in combine the OWA operator with the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by [26].

Definition 3: An OWG operator of dimension n is a mapping $F{:}R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$OWG_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^{+} is the set of positive real numbers.

From a generalized perspective of the reordering step in the OWG operator, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators [26]. The DOWG operator is defined as in definition 3.

Definition 4: An AOWG operator of dimension n is a mapping $H{:}R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, having the properties:

1) $w_j \in [0,1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$AOWG_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{w_j} \tag{4}$$

where c_j is the jth largest of the a_i, and R^{+} is the set of positive real numbers. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

As it is seen in [22, 26], the OWG operator has the following properties:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $a_i \geq d_i \;\; \forall_i \Rightarrow OWG_w(a_1, \ldots, a_n) \geq OWG_w(d_1, \ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $Min_i\{a_i\} \leq OWG_w(a_1, \ldots, a_n) \leq Max_i\{a_i\}$.
4) Idempotency: $OWG_w(a_1, \ldots, a_n) = a$, if $a_i = a$, $\forall i$

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [22]. For example, with the DOWG operator we get:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow \text{OWG}_w (a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow \text{OWG}_w (a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall_j \Rightarrow \text{OWG}_w (a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

And with the AOWG operator [26], we get:

1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow \text{OWG}_w (a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow \text{OWG}_w (a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall_j \Rightarrow \text{OWG}_w (a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

Other examples of aggregations with OWG operators can be seen in [26].

4. Dempster-Shafer belief structure

The Dempster-Shafer belief structure was introduced by Dempster in [32] and by Shafer in [33]. Since then, a lot of new developments have been developed about it such as in [3, 34-36]. It provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include in the same formulation the cases of risk and ignorance. Obviously, the case of certainty is also included as it can be seen as a particular case of risk or ignorance. For the case of risk, we find a situation of certainty when the probability of some outcome is one. For the case of ignorance, we find a situation of certainty when there is only one element in the set of events. Apart from these traditional cases, the Dempster-Shafer framework allows to represent various other forms of information a decision maker may have about the states of nature.

A Dempster-Shafer belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_i for i = 1 to n, called focal elements and a mapping m, called the basic assignment function, defined as:

$$m:\ 2^X \rightarrow [0, 1]$$

such that:

1) $m(B_j) \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1.$
3) $m(A) = 0,\ \forall\ A \neq B_j.$

As we said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the Dempster-Shafer framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure [33] if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

For the case of ignorance, the belief structure consists in only one focal element *B*, where *m(B)* essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, *m(B)* = 1. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in [33].

The following example is given in order to see how the Dempster-Shafer environment works.

Example: Assume we have 3 workers searching for the same job. After some previous studies before the selection process, it is stated that the worker *A* has a probability of 0'5 to get the job, the worker *B* has a probability of 0'2 and the worker *C* a probability of 0'3. However, our interest is not with who will get the job but with the brand of the clock the selected worker is wearing. The following information is known about the clocks owned by the workers:

	Rolex	Breitling	Omega	Time Force	Casio
Worker *A*	1	0	1	0	1
Worker *B*	0	0	1	1	1
Worker *C*	1	1	0	0	0

In this table, a one indicates that a particular brand of clock is owned by an individual. However, we do not have enough information about how many clocks a worker has of a given brand and we do not know how a worker chooses which clock he shall bring. In this situation, the focal elements are:

- $B_{\text{Worker } A}$ = {Rolex, Omega, Casio}
- $B_{\text{Worker } B}$ = {Omega, Time Force, Casio}
- $B_{\text{Worker } C}$ = {Rolex, Breitling}

In this case, the probability that the set $B_{\text{Worker } A}$ will be used as the set from which the clock is chosen is 0'5, the probability that the set $B_{\text{Worker } B}$ will be used is 0'2 and the probability that the set $B_{\text{Worker } C}$ is used is 0'3.

5. Decision making with Dempster-Shafer belief structures

The problem of selecting an appropriate alternative in situations in which our knowledge about the state of nature is in the form of a belief structure, has been studied by different authors such as in [34-36]. In [3], Yager proposed a more generalized methodology by using the OWA operators. In the following, we are going to summarize the process as suggested by Yager.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives {A_1, …, A_q} with states of nature {S_1, …, S_n}. C_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. In addition, the knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure *m*. The focal elements of *m* are B_1, …, B_r and associated with each of these is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate the belief function *m* about the states of nature.
Step 3: Calculate the decision makers degree of optimism α.
Step 4: Determine the collection of weights, *w*, to be used in the OWA aggregation function for each different cardinality of focal elements.
Step 5: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of *i* and *k*. Hence $M_{ik} = \{C_{ij} \mid S_j \in B_k\}$.
Step 6: Determine the aggregated payoff, V_{ik} = OWA(M_{ik}), using Eq. 1, for all the values of *i* and *k*.
Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik}\ m(B_k) \tag{5}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

In this process, we could also introduce the AOWA operators instead of the traditional OWA operators. The reason for considering both aggregations is because of the different types of decisions we can find depending on the problem analyzed. Basically, we could distinguish between situations where the highest payoff is the best alternative such as in situations where we analyze benefits, and situations where the highest payoff is the worst alternative such as in situations where we analyze costs. Then, if for a situation of costs we use the OWA operator, our aggregation would not reflect correctly the situation as it would take first the worst result and the weighting vector is prepared for taking the best one. This can be demonstrated with an example:

Example: Assume we want to aggregate the following arguments (10, 40, 20, 30) and (10, 0, 50, 40) representing the costs of two projects depending on the state of the nature that will happen in the future. As the decision maker is very conservative, he will have a low degree of optimism α. Assume he uses the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4). As we can see, this weighting vector gives more importance to the last weight because this one is supposed to aggregate the worst case. As the decision maker is conservative, he wants to consider a pessimistic scenario in order to select between these two projects. If we look to the projects before making the aggregation, we could say that the first one is more conservative as its possible results are more stable than the second project. Then, we should expect that the aggregation will give us a result that shows the first project as the best one. But if we use the OWA operator (Eq. 1), that will not be the case.

OWA(10, 40, 20, 30) = $40 \times 0.1 + 30 \times 0.2 + 20 \times 0.3 + 10 \times 0.4 = 20$
OWA(10, 0, 50, 40) = $50 \times 0.1 + 40 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 0 \times 0.4 = 16$

As we can see, we should select the second alternative as it gives us a smaller expected cost. But as it was mentioned before, this is wrong because the arguments are more instable than the first project and the decision maker was supposed to be conservative. The explanation is that the traditional OWA operator takes first the highest value, and in this case, the highest value was the worst possible scenario. From this example, it is very easy to see that these results are wrong. Then, this problem can be extended to more complex situations where it is not so easy to see directly the conflict of using the OWA operator in a situation of costs.

In order to aggregate correctly in a situation of costs, we need to use the AOWA operator because then we consider first the lowest value which is the best result and so on. In this example, we will get (Eq. 2):

AOWA(10, 40, 20, 30) = $10 \times 0.1 + 20 \times 0.2 + 30 \times 0.3 + 40 \times 0.4 = 30$
AOWA(10, 0, 50, 40) = $0 \times 0.1 + 10 \times 0.2 + 40 \times 0.3 + 50 \times 0.4 = 34$

As we can see, with the AOWA operator we decide to select the first alternative as it has the lowest expected cost. This is in accordance with our intuition because the decision maker is selecting the project with more stable results as he is conservative.

From this example, we can conclude that we should use the traditional OWA operator or also called DOWA operator, in situations concerning benefits. But in situations where we analyze costs, we should use the AOWA operator. This conclusion could also be extended for other situations different from benefits and costs. In general, we should use the traditional OWA when we want to aggregate arguments where the highest value is the best result. And we should use the AOWA operator when we want to aggregate arguments where the smallest value is the best result. We should note that for the particular case of costs, we could solve the problem by using negative numbers instead of the AOWA operator as it is shown in [34]. But for other cases, this alternative would not be possible such as in the OWG operator or would be inadequate such as in the regret methods [21].

For the case of decision making with Dempster-Shafer belief structure, if we use the AOWA operator, we should make the following changes in the decision process:

In Step 4: When determining the collection of weights, *w*, to be used in the AOWA aggregation function for each different cardinality of focal elements, we should consider that now the attitudinal character $\alpha(W)$ is:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(j-1)/(n-1)]\, w_j \tag{6}$$

It can be shown that here we also get $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 0, and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 1. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. This new measure should be considered instead of the traditional measure used for the OWA operator [1]. This traditional measure has a very similar form to Eq. 6:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n-j)/(n-1)]\, w_j \tag{7}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to

0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W)$ = 1, for the pessimistic criteria $\alpha(W)$ = 0, and for the average criteria $\alpha(W)$ = 0.5.

An interesting result found when comparing both measures is that they are dual between them. That is:

$$\alpha_{OWA}(W) = 1 - \alpha_{AOWA}(W). \tag{8}$$

In Step 6: When determining the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AOWA(M_{ik}), using Eq. 2, for all the values of i and k.

In Step 8: We should select the alternative with the lowest C_i as the optimal because the best result is the one which predicts the lowest expected costs.

6. Using the OWG operators in decision making with Dempster-Shafer belief structures

An alternative method when taking decisions with Dempster-Shafer belief structure is using the OWG operator in the aggregation step instead of the OWA operator. The motivation for using the OWG operator is because there are some cases where we could prefer to aggregate with a geometric operator instead of the traditional methods used previously. Here, the procedure will be the same as for the case with the OWA operators with the difference that now we will use the OWG operator in the aggregation step. Then, we can summarize the procedure as follows:

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. C_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. In addition, the knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m. The focal elements of m are $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.
Step 3: Determine the collection of weights, w, to be used in the OWG aggregation function for each different cardinality of focal elements.
Step 4: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{C_{ij} \mid S_j \in B_k\}$.
Step 5: Determine the aggregated payoff, V_{ik} = OWG(M_{ik}), using Eq. 3, for all the values of i and k.
Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} \; m(B_k) \tag{9}$$

Step 7: Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

As in the case with OWA operators, we could use in the aggregation step the AOWG operators. The reason for using them is also because they are necessary when analysing a situation of costs or a situation where the smallest value is the best result. We should note that in this case, it is completely necessary because the OWG operator cannot aggregate negative numbers [26]. Then, the alternative method that could be used with the OWA operator [34], here is not applicable. Then, if we use the AOWG operators in the decision process, we should make the following changes to the 7 steps mentioned before:

In Step 5: When determining the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AOWG(M_{ik}), using Eq. 4, for all the values of i and k.

In Step 7: We should select the alternative with the lowest C_i as the optimal because now we are in a situation of costs and the best result is the lowest one.

7. Illustrative example

In the following, we are going to develop an example in order to understand numerically all the procedures commented previously. We will distinguish four cases: the aggregation phase with the OWA operators, with the AOWA operators, with the OWG operators and with the AOWG operators. We will use the same payoff matrix for all the cases. But we have to implicitly assume that when using the OWA and OWG operator we are considering a decision with benefits and when using the AOWA and AOWG, a decision with costs.

Step 1: Assume we have the following payoff matrix:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	20	30	10	40	40
A_2	35	20	10	50	25
A_3	30	40	30	30	10
A_4	20	35	40	25	20

Step 2: Assume the following belief function m about the states of nature:

Focal element
$B_1 = \{S_1, S_2, S_5\} = 0.4$
$B_2 = \{S_2, S_3, S_4, S_5\} = 0.3$
$B_3 = \{S_1, S_3\} = 0.3$

Step 3: This step should only be considered for the case with OWA operators. Assume the decision maker has a degree of optimism of 0.6 or 60%. Assume we have used one of the different methods existing [37] for determining the OWA weights or the OWG weights and we have obtained the following weighting vector for different number of arguments.

Number of arguments	w_1	w_2	w_3	w_4
2	0.6	0.4		
3	0.4	0.4	0.2	
4	0.3	0.3	0.3	0.1

Step 4: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Then, we calculate the bags M_{ik}.

$M_{11} = \langle 20, 30, 40 \rangle$ $M_{12} = \langle 30, 10, 40, 40 \rangle$ $M_{13} = \langle 20, 10 \rangle$
$M_{21} = \langle 35, 20, 25 \rangle$ $M_{22} = \langle 20, 10, 50, 25 \rangle$ $M_{23} = \langle 35, 10 \rangle$
$M_{31} = \langle 30, 40, 10 \rangle$ $M_{32} = \langle 40, 30, 30, 10 \rangle$ $M_{33} = \langle 30, 30 \rangle$
$M_{41} = \langle 20, 35, 20 \rangle$ $M_{42} = \langle 35, 40, 25, 20 \rangle$ $M_{43} = \langle 20, 40 \rangle$

From the 5^{th} step, we will distinguish 4 cases: the aggregation with the OWA operator, with the AOWA operator, with the OWG operator and with the AOWG operator.

Step 5.1: Determine the aggregated payoff, V_{ik} = OWA(M_{ik}), using Eq. 1, for all the values of i and k.

$V_{11} = 40 \times 0.4 + 30 \times 0.4 + 20 \times 0.2 = 32$
$V_{12} = 40 \times 0.3 + 40 \times 0.3 + 30 \times 0.3 + 10 \times 0.1 = 34$
$V_{13} = 20 \times 0.6 + 10 \times 0.4 = 16$
$V_{21} = 35 \times 0.4 + 25 \times 0.4 + 20 \times 0.2 = 28$
$V_{22} = 50 \times 0.3 + 25 \times 0.3 + 20 \times 0.3 + 10 \times 0.1 = 29.5$
$V_{23} = 35 \times 0.6 + 10 \times 0.4 = 25$
$V_{31} = 40 \times 0.4 + 30 \times 0.4 + 10 \times 0.2 = 30$
$V_{32} = 40 \times 0.3 + 30 \times 0.3 + 30 \times 0.3 + 10 \times 0.1 = 31$
$V_{33} = 30 \times 0.6 + 30 \times 0.4 = 30$
$V_{41} = 35 \times 0.4 + 20 \times 0.4 + 20 \times 0.2 = 26$
$V_{42} = 40 \times 0.3 + 35 \times 0.3 + 25 \times 0.3 + 20 \times 0.1 = 32$
$V_{43} = 40 \times 0.6 + 20 \times 0.4 = 32$

Step 6.1: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. 5. Then:

$C_1 = 32 \times 0.4 + 34 \times 0.3 + 16 \times 0.3 = 27.8$
$C_2 = 28 \times 0.4 + 29.5 \times 0.3 + 25 \times 0.3 = 27.55$
$C_3 = 30 \times 0.4 + 31 \times 0.3 + 30 \times 0.3 = 30.3 \leftarrow$
$C_4 = 26 \times 0.4 + 32 \times 0.3 + 32 \times 0.3 = 29.6$

Step 7.1: In this case, the optimal alternative is A_3.

Step 5.2: Determine the aggregated payoff, V_{ik} = AOWA(M_{ik}), using Eq. 2, for all the values of i and k.

$V_{11} = 20 \times 0.4 + 30 \times 0.4 + 40 \times 0.2 = 28$
$V_{12} = 10 \times 0.3 + 30 \times 0.3 + 40 \times 0.3 + 40 \times 0.1 = 28$
$V_{13} = 10 \times 0.6 + 20 \times 0.4 = 14$
$V_{21} = 20 \times 0.4 + 25 \times 0.4 + 35 \times 0.2 = 25$

$V_{22} = 10 \times 0.3 + 20 \times 0.3 + 25 \times 0.3 + 50 \times 0.1 = 21.5$
$V_{23} = 10 \times 0.6 + 35 \times 0.4 = 20$
$V_{31} = 10 \times 0.4 + 30 \times 0.4 + 40 \times 0.2 = 24$
$V_{32} = 10 \times 0.3 + 30 \times 0.3 + 30 \times 0.3 + 40 \times 0.1 = 25$
$V_{33} = 30 \times 0.6 + 30 \times 0.4 = 30$
$V_{41} = 20 \times 0.4 + 20 \times 0.4 + 35 \times 0.2 = 23$
$V_{42} = 20 \times 0.3 + 25 \times 0.3 + 35 \times 0.3 + 40 \times 0.1 = 28$
$V_{43} = 20 \times 0.6 + 40 \times 0.4 = 28$

Step 6.2: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. 5. Then:

$C_1 = 28 \times 0.4 + 28 \times 0.3 + 14 \times 0.3 = 23.8$
$C_2 = 25 \times 0.4 + 21.5 \times 0.3 + 20 \times 0.3 = 22.45 \leftarrow$
$C_3 = 24 \times 0.4 + 25 \times 0.3 + 30 \times 0.3 = 26.1$
$C_4 = 23 \times 0.4 + 28 \times 0.3 + 28 \times 0.3 = 26$

Step 7.2: In this case, the optimal alternative is A_2, because we are in a situation with costs where the best result is the alternative with the lowest value.

Step 5.3: Determine the aggregated payoff, V_{ik} = OWG(M_{ik}), using Eq. 3, for all the values of *i* and *k*.

$V_{11} = 40^{0.4} \times 30^{0.4} \times 20^{0.2} = 31.03$
$V_{12} = 40^{0.3} \times 40^{0.3} \times 30^{0.3} \times 10^{0.1} = 31.94$
$V_{13} = 20^{0.6} \times 10^{0.4} = 15.15$
$V_{21} = 35^{0.4} \times 25^{0.4} \times 20^{0.2} = 27.35$
$V_{22} = 50^{0.3} \times 25^{0.3} \times 20^{0.3} \times 10^{0.1} = 26.26$
$V_{23} = 35^{0.6} \times 10^{0.4} = 21.2$
$V_{31} = 40^{0.4} \times 30^{0.4} \times 10^{0.2} = 27.01$
$V_{32} = 40^{0.3} \times 30^{0.3} \times 30^{0.3} \times 10^{0.1} = 29.3$
$V_{33} = 30^{0.6} \times 30^{0.4} = 30$
$V_{41} = 35^{0.4} \times 20^{0.4} \times 20^{0.2} = 25.01$
$V_{42} = 40^{0.3} \times 35^{0.3} \times 25^{0.3} \times 20^{0.1} = 31.14$
$V_{43} = 40^{0.6} \times 20^{0.4} = 30.31$

Step 6.3: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. 9. Then:

$C_1 = 31.03 \times 0.4 + 31.94 \times 0.3 + 15.15 \times 0.3 = 26.54$
$C_2 = 27.35 \times 0.4 + 26.26 \times 0.3 + 21.2 \times 0.3 = 25.18$
$C_3 = 27.01 \times 0.4 + 29.3 \times 0.3 + 30 \times 0.3 = 28.59 \leftarrow$
$C_4 = 25.01 \times 0.4 + 31.14 \times 0.3 + 30.31 \times 0.3 = 28.44$

Step 7.3: In this case, the optimal alternative is also A_3.

Step 5.4: Determine the aggregated payoff, V_{ik} = AOWG(M_{ik}), using Eq. 4, for all the values of *i* and *k*.

$V_{11} = 20^{0.4} \times 30^{0.4} \times 40^{0.2} = 27.02$
$V_{12} = 10^{0.3} \times 30^{0.3} \times 40^{0.3} \times 40^{0.1} = 24.2$
$V_{13} = 10^{0.6} \times 20^{0.4} = 13.19$
$V_{21} = 20^{0.4} \times 25^{0.4} \times 35^{0.2} = 24.45$
$V_{22} = 10^{0.3} \times 20^{0.3} \times 25^{0.3} \times 50^{0.1} = 19.03$
$V_{23} = 10^{0.6} \times 35^{0.4} = 16.5$
$V_{31} = 10^{0.4} \times 30^{0.4} \times 40^{0.2} = 20.47$
$V_{32} = 10^{0.3} \times 30^{0.3} \times 30^{0.3} \times 40^{0.1} = 22.2$
$V_{33} = 30^{0.6} \times 30^{0.4} = 30$
$V_{41} = 20^{0.4} \times 20^{0.4} \times 35^{0.2} = 22.37$
$V_{42} = 20^{0.3} \times 25^{0.3} \times 35^{0.3} \times 40^{0.1} = 27.11$
$V_{43} = 20^{0.6} \times 40^{0.4} = 26.39$

Step 6.4: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. 9. Then:

$C_1 = 27.02 \times 0.4 + 24.2 \times 0.3 + 13.19 \times 0.3 = 22.025$
$C_2 = 24.45 \times 0.4 + 19.03 \times 0.3 + 16.5 \times 0.3 = 20.439 \leftarrow$
$C_3 = 20.47 \times 0.4 + 22.2 \times 0.3 + 30 \times 0.3 = 23.848$
$C_4 = 22.37 \times 0.4 + 27.11 \times 0.3 + 26.39 \times 0.3 = 24.998$

Step 7.4: In this case, the optimal alternative is A_2 because we are in a situation with costs or similar where the best result is the alternative with the lowest value.

7. Conclusions

In this paper, we have proposed to use the OWG operator in decision making with Dempster-Shafer belief structure. For doing this, we have distinguished between aggregations with an ascending and a descending order. We have seen that there are some problems to aggregate with descending operators when we are in a situation where the smallest value is the best result. We have demonstrated this situation with an example. Although for a situation of costs there are alternative solutions with the OWA operator such as using negative numbers, we have seen that for the OWG operator it is completely necessary to use an ascending order because this operator cannot aggregate negative numbers. We have developed the decision making process distinguishing in the aggregation step between the OWA operator, the AOWA operator, the OWG operator and the AOWG operator. Finally, an illustrative example has been given by using the four different cases in the aggregation step.

References

[1] Yager, R. R., (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190.
[2] Yager, R. R., (1992), "Applications and extensions of OWA aggregations", *International Journal of Man-Machine Studies 37*, 103-132.

[3] Yager, R. R., (1992), “Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties”, *International Journal of General Systems 20*, 233-245.
[4] Yager, R. R., (1993), “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems* 59, 125-148.
[5] Yager, R. R., Filev, D.P., (1994), “Parameterized andlike and orlike OWA operators”, *International Journal of General Systems 22*: 297-316.
[6] Bordogna, G., Pasi, G., (1995), “Linguistic aggregation operators of selection criteria in fuzzy information retrieval”, *International Journal of Intelligent Systems 10*, 233-248.
[7] Filev, D. P., Yager, R. R., (1995), “Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators”, *Information Sciences 85*, 11-27.
[8] Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., (1995), “Characterization of the ordered weighted averaging operators”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3*, 236-240.
[9] Yager, R. R., (1995), “Fuzzy aggregation of modular neural networks with ordered weighted averaging operators”, *International Journal of Approximate Reasoning 13*: 359-375.
[10] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J.L., (1996), “Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA Operators”, *Fuzzy Sets and Systems 79*, 175-190.
[11] Yager, R. R., (1996), “Quantifier guided aggregation using OWA operators”, *International Journal of Intelligent Systems 11*, 49-73.
[12] Mitchell, H.B., Estrakh, D.D., (1997), “A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems 5*, 429-436.
[13] Yager, R. R., Kacprzyck, J., (1997), “*The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*”, Kluwer Academic Publishers.
[14] Filev, D. P., Yager, R. R., (1998), “On the issue of obtaining OWA operator weights”, *Fuzzy Sets and Systems 94*, 157-169.
[15] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (1998), “Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations”, *Fuzzy Sets and Systems 97*, 33-48.
[16] Mitchell, H.B., Estrakh, D.D., (1998), “An OWA operator with fuzzy ranks”, *International Journal of Intelligent Systems 13*, 69-81.
[17] Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R., (2002), “*Aggregation Operators: New Trends and Applications”*, Physica-Verlag, New York.
[18] Torra, V., (2002), “*Information Fusion in Data Mining”*, Springer, New York.
[19] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), “The Uncertain OWA Operator”, *International Journal of Intelligent Systems 17*, 569-575.
[20] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2003), “An Overview of Operators for Aggregating Information”, *International Journal of Intelligent Systems 18*, 953-969.
[21] Yager, R., (2004), “Decision making using minimization of regret”, *International Journal of Approximate Reasoning 36*, 109-128.
[22] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2000), “The ordered weighted geometric operator: Properties and application”, *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*. Madrid, Spain.
[23] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2001), “Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations”, *Fuzzy Sets and Systems 122*, 277-291.

[24] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., (2001), “Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations”, *European Journal of Operations Research 129*, 372-385.
[25] Xu, Z.S., (2002), “A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP”, *Systems, Engineering and Electronics 24*, 31-33.
[26] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators”, *International Journal of Intelligent Systems 17*, 709-716.
[27] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., (2003), “A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making”, *International Journal of Intelligent Systems 18*, 689-707.
[28] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Alonso, S., (2004), “Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations”, *International Journal of Intelligent Systems 19*, 233-255.
[29] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2004), “An uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator and its application”, *Information 7*, 175-182.
[30] Xu, Z.S., (2006), “An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations”, *Decision Support Systems 41*, 488-499.
[31] Yager, R.R., Xu, Z.S., (2006), “The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making”, *Fuzzy Sets and Systems 157*, 1393-1402.
[32] Dempster, A.P., (1967), “Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping”, *Annals of Mathematical Statistics 38*, 325-339.
[33] Shafer, G.A., (1976), *“Mathematical Theory of Evidence”*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
[34] Engemann, K. J., Miller, H. E., Yager, R. R., (1996), “Decision making with belief structures: an application in risk management”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4*, 1-26.
[35] Yager, R. R., (2000), “Hierarchical aggregation functions generated from belief structures”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8*, 481-490.
[36] Yager, R. R., (2001), “Dempster-Shafer belief structures with interval valued focal weights”, *International Journal of Intelligent Systems 16*, 497-512.
[37] Xu, Z.S. (2005), “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, *International Journal of Intelligent Systems 20*, p.843-865.

14.1.6. Artículo de congreso 6. – Publicado en SIGEF 2006

INDUCED AND UNCERTAIN HEAVY ORDERED WEIGHTED AVERAGING OPERATORS

Abstract

In this paper, we analyse in detail the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator and some of the extensions developed about it. We specially focus in distinguish between operators that have a descending and an ascending order. We also introduce some aspects about using an ascending order. With this introduction, we suggest some new extensions about the OWA operator such as the Induced Heavy OWA (IHOWA) operator, the Uncertain Heavy OWA (UHOWA) operator and the Uncertain Induced Heavy OWA (UIHOWA) operator. For these three new extensions, we consider some of its main properties and provide some examples of special cases found in the weighting vector.

1. Introduction

The Ordered Weighted Averaging (OWA) operator was introduced by Yager in [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators. In the last years, a lot of new advances have been developed about it [2-12] and it has been applied to a lot of fields [13-17]. Among the great variety of extensions developed for the OWA operators, this work will concentrate in the Induced OWA (IOWA) operator [18-19], in the Heavy OWA (HOWA) operator [20-21] and in the Uncertain OWA (UOWA) operator [11]. In this paper, we propose three new extensions to the OWA operator called the Induced Heavy OWA (IHOWA) operator, the Uncertain Heavy OWA (UHOWA) operator and the Uncertain Induced Heavy OWA (UIHOWA) operator. Basically, the IHOWA operator consists in combining the main characteristics of the IOWA operator with the HOWA operator, the UHOWA operator consists in use uncertain information in the HOWA operator and the UIHOWA operator consists in use uncertain information in the IHOWA operator. For each aggregation, we will study its definition and some of its main properties distinguishing between the descending and the ascending order of the operator.

The paper is organized as follows. In Section 2, we analyze the main concepts of the OWA operator such as the definition, the main properties, the basic aggregations obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector and the principal measures to characterize the weighting vector. In this analysis, we specially focus in distinguish between OWA aggregations that have a descending or an ascending order. In Section 3 and 4, we describe the IOWA and the HOWA operator. In Section 5, we introduce the IHOWA operator. We give its definition, the principal properties found in the operator and different types of basic aggregations obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. In Section 6, we describe the UOWA operator.

Here, we also focus in distinguish between aggregations with a descending or an ascending order. In Section 7, we introduce the UHOWA operator. We explain its definition, the main properties and the basic aggregations obtained from particular cases of the weighting vector. In Section 8, we introduce the UIHOWA operator. We give its definition, the main properties found in the operator and the basic aggregations obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. We specially focus in distinguish between aggregations with a descending or an ascending order. Finally, in Section 9, we summarize the main conclusions found in the paper.

2. OWA operator

The OWA operator introduced in [1] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [2-17]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [1].

Definition 1: An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$OWA_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \qquad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operators and the Ascending OWA (AOWA) operators. The DOWA operator is defined as in definition 1.

Definition 2: An AOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$AOWA_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; c_j \qquad (2)$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way [8]: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator has the following properties both for the DOWA and the AOWA operator [1, 8]:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $a_i \geq d_i \;\; \forall_i \Rightarrow OWA_w(a_1,\ldots, a_n) \geq OWA_w(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $Min\{a_i\} \leq OWA_w(a_1,\ldots, a_n) \leq Max\{a_i\}$.
4) Idempotency: If $a_i = a, \;\; \forall_i \Rightarrow OWA_w(a_1,\ldots, a_n) = a$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [1]:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq 1} \Rightarrow OWA_w(a_1,\ldots, a_n) = Max\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq n} \Rightarrow OWA_w(a_1,\ldots, a_n) = Min\{a_i\}$
3) Average/Laplace criteria: $w_j = 1/n \;\; \forall_j \Rightarrow OWA_w(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1-\alpha$ and $w_j = 0$, $\forall_j \neq 1,n \Rightarrow OWA_w(a_1,\ldots, a_n) = \alpha Max\{a_i\} + (1-\alpha)Min\{a_i\}$

And with the AOWA operators, we get the following [8]:

1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq n} \Rightarrow AOWA_w(a_1,\ldots, a_n) = Max\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq 1} \Rightarrow AOWA_w(a_1,\ldots, a_n) = Min\{a_i\}$
3) Average/Laplace criteria: $w_j = 1/n \;\; \forall_j \Rightarrow AOWA_w(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
4) Hurwicz: $w_1 = 1-\alpha$, $w_n = \alpha$ and $w_j = 0$, $\forall_j \neq 1,n \Rightarrow AOWA_w(a_1,\ldots, a_n) = (1-\alpha)Min\{a_i\} + \alpha Max\{a_i\}$

Another factor to consider, are the three measures introduced by Yager [1, 20] for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure $\alpha(W)$, the attitudinal character, is defined as: $\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n-j)/(n-1)]\, w_j$. It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure introduced also in [1] by Yager, is called the entropy of dispersion of W. It is defined as: $H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j)$. This can be used to provide a measure of the information being used. That is, if $w_j = 1$ for some j, known as step-OWA [5], then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

The third measure introduced in [20], is called the divergence of W and it is useful in some exceptional situations. It is defined as:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2$$

These three measures can also be used with the AOWA operators. Then, the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined as: $\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(j-1)/(n-1)]\, w_j$. It can be shown that here we also get $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 0, and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 1. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. For the second measure, we will get the same index as in [1], so the measure is the same for both the DOWA and the AOWA operator. For the third measure, we get the following:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2$$

3. Induced OWA operator

The Induced OWA (IOWA) operator was introduced in [18] and it represents an extension to the OWA operator. In this case, the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. Here, the reordering step is induced by another mechanism represented as u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the inducing variable u_i. In the following, we provide a definition of the IOWA operator as suggested by Yager and Filev [18].

Definition 3: An IOWA operator of dimension n is a mapping F: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{IOWA}_w(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, b_j \tag{3}$$

where b_j is the a_i value of the OWA pair $\langle u_i, a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator. The DIOWA Operator is defined as in definition 3.

Definition 4: An AIOWA operator of dimension n is a mapping H: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{AIOWA}_w(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, c_j \tag{4}$$

where c_j is the a_i value of the OWA pair $\langle u_i, a_i\rangle$ having the jth lowest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way according to the values of u_i: $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator has the following properties [18] both for the DIOWA and the AIOWA operator:

1) Monotonicity: If $a_i \geq d_i \quad \forall_i \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) \geq \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, d_1\rangle, \langle u_2, d_2\rangle\ldots, \langle u_n, d_n\rangle)$.
2) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
3) Boundedness: $\mathrm{Min}\,\{a_i\} \leq \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) \leq \mathrm{Max}\,\{a_i\}$.
4) Idempotency: If $a_i = a, \ \forall_i \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = a$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [18, 22]:

1) Optimistic: $w_p = 1$ and $w_j = 0 \quad \forall_{j \neq p}$, and $u_p = \mathrm{Max}\{a_i\} \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1,a_1\rangle,\langle u_2,a_2\rangle\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \mathrm{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic: $w_p = 1$ and $w_j = 0 \quad \forall_{j\neq p}$, and $u_p = \mathrm{Min}\{a_i\} \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1,a_1\rangle,\langle u_2,a_2\rangle\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \mathrm{Min}\{a_i\}$
3) Average criteria: $w_j = 1/n \quad \forall_j \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(a_1,\ldots, a_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} a_j$
4) Hurwicz criteria: $w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$, $w_j = 0 \quad \forall_{j \neq p,q}$, and $u_p = \mathrm{Max}\{a_i\}$, $u_q = \mathrm{Min}\{a_i\} \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, a_1\rangle,\langle u_2, a_2\rangle,\ldots,\langle u_n, a_n\rangle) = \alpha\,\mathrm{Max}\{a_i\} + (1 - \alpha)\,\mathrm{Min}\{a_i\}$
5) Weighted average: $u_i = i \quad \forall i$, where i is the ordered position of the $a_i \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, a_1\rangle,\langle u_2, a_2\rangle\ldots,\langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i\, a_i$
6) OWA operator: $u_i = a_i \ \ \forall i \Rightarrow \mathrm{IOWA_w}(\langle u_1, a_1\rangle,\langle u_2, a_2\rangle\ldots,\langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j\, b_j$

We should note that a similar analysis could be developed for the AIOWA operator. The difference would be that the analysis would start from an ascending order.

In the case of tie between two order inducing variables u_i and u_j, we recommend to follow the policy developed by Yager and Filev in [18] where they replace each argument of the tied OWA pairs $\langle u_i, a_i\rangle$ and $\langle u_j, a_j\rangle$, by their average: $(a_i + a_j) / 2$. If there is a tie between more than two order inducing variables [18,22], then the policy to follow is to replace the arguments of these order inducing variables by their average.

4. Heavy OWA operator

The Heavy OWA operator was introduced in [20] and it represents an extension to the OWA operator. In this case, the difference with the OWA operator is that the sum of the weights is allowed to be between 1 and n instead of being restricted to sum up to 1. With this, we get a wider class of aggregation operators that include mean operators and totalling operators. In the following, we provide a definition of the HOWA operator as suggested by Yager [20].

Definition 5: The Heavy OWA operator of dimension n is a mapping H: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{HOWA}_{\text{w}}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases, we have to distinguish between the Descending HOWA (DHOWA) operator and the Ascending HOWA (AHOWA) operator. The DHOWA Operator is defined as in definition 5.

Definition 6: An AHOWA operator of dimension n is a mapping H: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{AHOWA}_{\text{w}}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; c_j \tag{6}$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

The HOWA operator has the following properties [20] both for the DHOWA and the AHOWA operator:

1) Monotonicity: If $a_i \geq d_i \;\; \forall_{\text{i}} \Rightarrow \text{HOWA}_{\text{w}}(a_1,\ldots, a_n) \geq \text{HOWA}_{\text{w}}(d_1,\ldots, d_n)$.
2) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [20]:

1) OWA operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow \text{HOWA}_{\text{w}}(a_1,\ldots, a_n) = \text{OWA}_{\text{w}}(a_1,\ldots, a_n)$
2) Total operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = n \Rightarrow \text{HOWA}_{\text{w}}(a_1,\ldots, a_n) = \text{Total}\ (a_1,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} a_j$

3) Pessimistic criteria: $w_n = 1$, $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n}$, and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ HOWA$_W(a_1,\ldots, a_n)$ = Min$\{a_i\}$

For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector can be higher than 1. We should note that these results could also be obtained for the AHOWA operators.

5. Induced Heavy OWA operator

The induced heavy OWA (IHOWA) operator represents an extension to the OWA operator and it consists in combining in the same operator, the characteristics of the HOWA operator with the characteristics of the IOWA operator. In general, this operator uses at the same time an inducing order u_i and a sum of the weights that can range from 1 to n.

Definition 7: An IHOWA operator of dimension n is a mapping F: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{IHOWA}_W(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j \ b_j \qquad (7)$$

where b_j is the a_i value of the OWA pair $\langle u_i, a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

Analysing the reordering step, we see that we have to distinguish between the Descending IHOWA (DIHOWA) operator and the Ascending IHOWA (AIHOWA) operator. The DIHOWA Operator is defined as in definition 7.

Definition 8: An AIHOWA operator of dimension n is a mapping H: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{AIHOWA}_W(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle\ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j \ c_j \qquad (8)$$

where c_j is the a_i value of the OWA pair $\langle u_i, a_i\rangle$ having the jth lowest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way according to the values of u_i: $u_1 \leq u_2 \leq\ldots \leq u_n$.

The IHOWA operator has the following properties both for the DIHOWA and the AIHOWA operator:

1) Monotonicity: If $a_i \geq d_i$ $\forall_i$ $\Rightarrow$ IHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) $\geq$ IHOWA$_w$($\langle u_1, d_1\rangle$, $\langle u_2, d_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, d_n\rangle$).
2) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) OWA operator: $u_i = a_i$ $\forall i$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ IHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = OWA$_w$($a_1,\ldots, a_n$)
2) IOWA operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ IHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = IOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$)
3) HOWA operator: $u_i = a_i$ $\forall i \Rightarrow$ IHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = HOWA$_w$($a_1,\ldots, a_n$)
4) Total operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = n \Rightarrow$ IHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = Total ($a_1,\ldots, a_n$) = $\sum_{j=1}^{n} a_j$
5) Weighted average: $u_i = i$ $\forall i$, where i is the ordered position of the a_i and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ IHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = $\sum_{i=1}^{n} w_i\ a_i$
6) Pessimistic criteria: $w_n = 1$, $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n}$, and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ HOWA$_w$($a_1,\ldots, a_n$) = Min{a_i}

For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector has a lot of different possible transformations. For example, the optimistic criteria could come from the particular case found in the OWA operator where the largest argument has a weight of 1, or the particular case found in the IOWA operator where the largest argument has a weight of 1.

These different manifestations of the weighting vector can also be found with the AIHOWA operator. For example:

1) AOWA operator: $u_i = a_i$ $\forall i$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ AIHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = AOWA$_w$($a_1,\ldots, a_n$)
2) AIOWA operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ AIHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = AIOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$)
3) AHOWA operator: $u_i = a_i$ $\forall i \Rightarrow$ AIHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = AHOWA$_w$($a_1,\ldots, a_n$)
4) Total operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = n \Rightarrow$ AIHOWA$_w$($\langle u_1, a_1\rangle$, $\langle u_2, a_2\rangle\ldots$, $\langle u_n, a_n\rangle$) = Total ($a_1,\ldots, a_n$) = $\sum_{j=1}^{n} a_j$

5) Weighted average: $u_i = i \quad \forall i$, where i is the ordered position of the a_i and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow \text{AIHOWA}_{\text{w}}(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i \; a_i$
6) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$, $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq 1}$, and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow \text{AHOWA}_{\text{w}}(a_1, \ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$

For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector has a lot of different possible transformations. For example, the optimistic criteria could come from the particular case found in the AOWA operator where the largest argument has a weight of 1, or the particular case found in the AIOWA operator where the largest argument has a weight of 1.

If there is a tie between two order inducing variables u_i and u_j, we recommend to use the same policy as in [18] but for the case of the IHOWA operators. Here, we also replace each argument of the tied OWA pairs $\langle u_i, a_i\rangle$ and $\langle u_j, a_j\rangle$, by their average: $(a_i + a_j) / 2$. If there is a tie between more than two order inducing variables, then the policy to follow is also to replace the arguments of these order inducing variables by their average. The difference for the IHOWA operators is the weight given to these values.

6. Uncertain OWA operator

The Uncertain OWA (UOWA) operator was introduced in [11] and it represents an extension to the OWA operator. The main difference with the OWA operator is that the information given in the UOWA operator is uncertain. For the weighting vector, the parameters cannot be specified but value ranges can be obtained and each input argument is given in the form of an interval number. In the following, we provide a definition of the UOWA operator as suggested by Xu and Da in [11]:

Definition 9: An UOWA operator of dimension n is a mapping $F: R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:
1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{UOWA}_{\text{w}}(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{9}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers. We should note that for the ordering of the interval numbers, we should use one of the traditional criteria used for comparing interval numbers such as the method suggested in [11].

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases, we have to distinguish between the Descending UOWA (DUOWA) operator and the Ascending UOWA (AUOWA) operator. The DUOWA Operator is defined as in definition 9.

Definition 10: An AUOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{AUOWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{10}$$

where b_j is the jth lowest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

The UOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator has the following properties both for the DUOWA and the AUOWA operator:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i \;\; \forall_i \Rightarrow \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) \geq \text{UOWA}_w(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$.
3) Boundedness: Min $\{\tilde{a}_i\} \leq \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) \leq$ Max $\{\tilde{a}_i\}$.
4) Idempotency: If $\tilde{a}_i = \tilde{a}, \;\; \forall_i \Rightarrow \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq 1} \Rightarrow \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq n} \Rightarrow \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$
3) Average/Laplace criteria: $w_j = 1/n \;\; \forall_j \Rightarrow \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} b_j$
4) Hurwicz: $w_1 = \alpha$, $w_n = 1-\alpha$ and $w_j = 0$, $\forall_j \neq 1, n \Rightarrow \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \alpha\text{Max}\{\tilde{a}_i\} + (1-\alpha)\text{Min}\{\tilde{a}_i\}$

And if we use the AUOWA operators, we get the following:

1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq n} \Rightarrow \text{AUOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0 \;\; \forall_{j \neq 1} \Rightarrow \text{AUOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$
3) Average/Laplace criteria: $w_j = 1/n \;\; \forall_j \Rightarrow \text{AUOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = (1/n) \sum_{j=1}^{n} b_j$
4) Hurwicz: $w_1 = 1-\alpha$, $w_n = \alpha$ and $w_j = 0$, $\forall_j \neq 1, n \Rightarrow \text{AUOWA}_w(\tilde{a}_1, \ldots, \tilde{a}_n) = (1-\alpha)\text{Min}\{\tilde{a}_i\} + \alpha\text{Max}\{\tilde{a}_i\}$

When analysing the weighting vector, we should use a method to obtain these weights by using the partial information given. For example, we could use the method proposed in [11]. Once obtained the weights, we could analyse the three measures proposed by Yager in [1, 20] to characterize the weighting vector for the case of the UOWA operator. These measures should use in the UOWA operator the same methodology as in the OWA operator as we only consider the weighting vector. We should also note that we could develop this analysis both from the perspective of the DUOWA or the AUOWA operator.

7. Uncertain Heavy OWA operators

The uncertain heavy OWA (UHOWA) operator represents an extension to the OWA operator. It consists in combine in the same operator the characteristics of the UOWA operator with the characteristics of the HOWA operator. Then, the same operator will use uncertain information with a weighting vector that ranges from the OWA operator to the total operator.

Definition 11: An UHOWA operator of dimension n is a mapping F: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{UHOWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{11}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers. We should note that for the ordering of the interval numbers, we should use one of the traditional criteria used for comparing interval numbers as for example, the method proposed in [11].

Analysing the reordering step, we see that we have to distinguish between the Descending UHOWA (DUHOWA) operator and the Ascending UHOWA (AUHOWA) operator. The DUHOWA Operator is defined as in definition 11.

Definition 12: An AUHOWA operator of dimension n is a mapping H: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{AUHOWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{12}$$

where b_j is the jth lowest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers. As it can be seen, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

The UHOWA operator has the following properties both for the DUHOWA and the AUHOWA operator:

1) Monotonicity: If $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i \;\; \forall_i \Rightarrow \text{UHOWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) \geq \text{UHOWA}_w(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$.
2) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) UOWA operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow \text{UHOWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \text{UOWA}_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n)$

2) Total operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = n \Rightarrow$ UHOWA$_w$($\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n$) = Total ($\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n$) $= \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j$

3) Pessimistic criteria: $w_n = 1$, $w_j = 0 \quad \forall_{j \neq n}$, and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ UHOWA$_w$($\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n$) = Min{$\tilde{a}_i$}

For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector can be higher than 1. We should note that these results could also be obtained for the AUHOWA operator.

8. Uncertain Induced Heavy OWA operator

The uncertain induced heavy OWA (UIHOWA) operator represents also an extension to the OWA operator. It consists in use in the same operator the characteristics of the UOWA operator, the characteristics of the IOWA operator and the characteristics of the HOWA operator. In general, this operator uses uncertain information with an inducing order u_i and a sum of the weights that can range from 1 to n.

Definition 13: An UIHOWA operator of dimension n is a mapping F: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{UIHOWA}_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{13}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the OWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is an interval number. In this case, we should also note that for the ordering of the interval numbers, we should use one of the traditional criteria used for comparing interval numbers such as the method suggested in [11].

Analysing the reordering step, we see that we have to distinguish between the Descending UIHOWA (DUIHOWA) operator and the Ascending UIHOWA (AUIHOWA) operator. The DUIHOWA Operator is defined as in definition 13.

Definition 14: An AUIHOWA operator of dimension n is a mapping H: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

and such that:

$$\text{AUIHOWA}_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{14}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the OWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth lowest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable in the form of an interval number. As it can be seen, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way according to the values of u_i: $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$.

The UIHOWA operator has the following properties both for the DUIHOWA and the AUIHOWA operator:

1) Monotonicity: If $a_i \geq d_i\ \forall_i \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) \geq$ UIHOWA$_w(\langle u_1, d_1\rangle, \langle u_2, d_2\rangle\ldots, \langle u_n, d_n\rangle)$.
2) Commutativity: any permutation of the argument has the same evaluation.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) UOWA operator: $u_i = a_i\ \ \forall i$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ UOWA$_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n)$
2) UIOWA operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ UIOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle)$
3) UHOWA operator: $u_i = a_i\ \ \forall i \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ UHOWA$_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n)$
4) Total operator: $u_i = a_i\ \ \forall i$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = n \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ Total $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j$
5) Weighted average: $u_i = i\ \ \forall i$, where i is the ordered position of the a_i and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i\ a_i$
6) Pessimistic criteria: $w_n = 1$, $w_j = 0\ \ \forall_{j \neq n}$, and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ UIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ Min$\{\tilde{a}_i\}$

For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector has a lot of different possible transformations. For example, the optimistic criteria could come from the particular case found in the OWA operator where the largest argument has a weight of 1, or the particular case found in the IOWA operator where the largest argument has a weight of 1.

These different manifestations of the weighting vector can also be found with the AUIHOWA operator. For example:

1) AUOWA operator: $u_i = a_i\ \ \forall i$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ AUIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ AUOWA$_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n)$
2) AUIOWA operator: If $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ AUIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ AUIOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle)$
3) AUHOWA operator: $u_i = a_i\ \ \forall i \Rightarrow$ AUIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) =$ AUHOWA$_w(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n)$

4) Total operator: $u_i = a_i \quad \forall i$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = n \Rightarrow$ AUIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle)$ = Total $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{a}_j$
5) Weighted average: $u_i = i \quad \forall i$, where i is the ordered position of the a_i and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ AUIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle) = \sum_{i=1}^{n} w_i \, a_i$
6) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$, $w_j = 0 \ \forall_{j \neq 1}$, and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1 \Rightarrow$ AUIHOWA$_w(\langle u_1, \tilde{a}_1\rangle, \langle u_2, \tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n, \tilde{a}_n\rangle)$ = Min$\{\tilde{a}_i\}$

For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector has a lot of different possible transformations. For example, the optimistic criteria could come from the particular case found in the AOWA operator where the largest argument has a weight of 1, or the particular case found in the AIOWA operator where the largest argument has a weight of 1.

If there is a tie between two order inducing variables u_i and u_j, we recommend to use the same policy as in [18] but for the case of the UIHOWA operators. Here, we also replace each argument of the tied OWA pairs $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ and $\langle u_j, \tilde{a}_j\rangle$, by their average: $(\tilde{a}_i + \tilde{a}_j) / 2$. If there is a tie between more than two order inducing variables, then the policy to follow is also to replace the arguments of these order inducing variables by their average. The difference for the UIHOWA operators is the weight given to these values.

9. Conclusions

In this paper, we have extensively analysed the OWA operators and we have proposed some new extensions such as the Induced Heavy OWA (IHOWA) operator, the Uncertain Heavy OWA (UHOWA) operator and the Uncertain Induced Heavy OWA (UIHOWA) operator. First, we have commented the basic concepts of the OWA operators giving special emphasis in distinguish the cases with descending order and the cases with ascending order. Second, we have discussed the IOWA and the HOWA operator. Here, we have also suggested considering these extensions distinguishing between the descending and the ascending order. Third, we have proposed the IHOWA operator and we have considered some of its main properties. Fourth, we have discussed the UOWA operator and some of its main concepts. Finally, we have introduced the UHOWA and the UIHOWA operator and we have studied some of its main properties.

10. References

[1] Yager, R., (1988), “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190.

[2] Yager, R., Kacprzyck, J., (1997), “*The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*”, Kluwer Academic Publishers.

[3] Yager, R. R., (1992), “Applications and extensions of OWA aggregations”, *International Journal of Man-Machine Studies 37*, 103-132.

[4] Yager, R. R., (1992), “Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties”, *International Journal of General Systems 20*, 233-245.

[5] Yager, R., (1993), “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems* 59, 125-148.
[6] Yager, R., Filev, D.P., (1994), “Parameterized andlike and orlike OWA operators”, *International Journal of General Systems 22*: 297-316.
[7] Filev, D. P., Yager, R. R., (1995), “Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators”, *Information Sciences 85*, 11-27.
[8] Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., (1995), “Characterization of the ordered weighted averaging operators”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3*, 236-240.
[9] Filev, D. P., Yager, R. R., (1998), “On the issue of obtaining OWA operator weights”, *Fuzzy Sets and Systems 94*, 157-169.
[10] Mitchell, H.B., Estrakh, D.D., (1998), “An OWA operator with fuzzy ranks”, *International Journal of Intelligent Systems 13*, 69-81.
[11] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), “The Uncertain OWA Operator”, *International Journal of Intelligent Systems 17*, 569-575.
[12] Yager, R., (2004), “Decision making using minimization of regret”, *International Journal of Approximate Reasoning 36*, 109-128.
[13] Yager, R. R., Goldstein, L. S. and Mendels, E., (1994), “FUZMAR: An Approach to Aggregating Market Research Data Based on Fuzzy Reasoning”, *Fuzzy Sets and Systems 68*, 1-12.
[14] Yager, R., (1995), “Fuzzy aggregation of modular neural networks with ordered weighted averaging operators”, *International Journal of Approximate Reasoning 13*: 359-375.
[15] Bordogna, G., Pasi, G., (1995), “Linguistic aggregation operators of selection criteria in fuzzy information retrieval”, *International Journal of Intelligent Systems 10*, 233-248.
[16] Yager, R. R., (1996), “Quantifier guided aggregation using OWA operators”, *International Journal of Intelligent Systems 11*, 49-73.
[17] Mitchell, H.B., Estrakh, D.D., (1997), “A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems 5*, 429-436.
[18] Yager, R. R. and Filev, D. P., (1999), “Induced ordered weighted averaging operators”, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 29*, 141-150.
[19] Yager, R. R., (2003), “Induced aggregation operators”, *Fuzzy Sets and Systems 137*, 59-69.
[20] Yager, R. R., (2002), “Heavy OWA Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making 1*, 379-397.
[21] Yager, R. R., (2003), “Monitored heavy fuzzy measures and their role in decision making under uncertainty”, *Fuzzy Sets and Systems 139*, 491-513.
[22] Xu, Z.S., (2006), “Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making”, *Information Fusion 7*, 231-238.

14.1.7. Artículo de congreso 7. – Publicado en SIGEF 2006

METHODS FOR DECISION MAKING USING MINIMIZATION OF REGRET

Abstract

In this paper, we study the decision making process with minimization of regret. We analyze the original work developed by Savage consisting in the paradigm of minimization with maximal regret (MMR). We also study the recent work developed by Yager that generalizes the MMR method creating a parameterized family of minimal regret methods. In this generalization, Yager uses the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator in order to obtain the parameterized family of minimal regret methods. In our work, we suggest to use the Ascending OWA (AOWA) operator because it seems to be more practical when aggregating values where the smallest one is the best result. We also propose to use the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator to generalize the MMR method obtaining another parameterized family of minimal regret methods. In this case, we also suggest distinguishing between a descending and an ascending order. Finally, an illustrative example is given.

1. Introduction

The Ordered Weighted Geometric (OWG) operator was introduced by Chiclana et al. [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators similar to the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator introduced by Yager in [2]. Since their appearance, a lot of new extensions have been developed about them. For the OWA operator, we could mention [3-14] and for the OWG operator [15-23]. Basically, the OWG operator consists in combine in the same aggregation the OWA operator with the geometric mean. Among the great variety of extensions developed for the OWA and the OWG operator, this work will focus on an article published recently by Yager [14] consisting in introduce the OWA aggregation in decision making with minimization of regret. The first methods for decision making with minimization of regret were introduced by Savage in [24-25] and they consisted in use the paradigm of minimization of maximal regret (MMR). These methods have been generalized by Yager in [14] with the introduction of the OWA operators in the paradigm of MMR creating a parameterized family of minimal regret methods. In this paper, we propose a method that uses the OWG operator for generalize the MMR method obtaining another parameterized family of minimal regret methods.

In order to do that, this paper is organized as follows. In Section 2 and 3, we briefly comment the OWA operator and the geometric mean. In Section 4, we analyze in detail the OWG operator describing its main concepts such as the definition, the main properties and the basic aggregations obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. In this analysis, we specially focus in distinguish between OWG aggregations that have a descending or an ascending order and in the case where some of the arguments of the aggregation have value zero. In Section 5, we briefly comment the main concepts of the traditional MMR method. We summarize it constructing the basic steps to follow when taking decisions with this method. In Section 6, we study the generalization for the MMR methods developed by Yager consisting in introduce the OWA operator in the aggregation step. We extend the work developed by Yager distinguishing between aggregations that use a Descending OWA (DOWA) operator and an Ascending OWA (AOWA) operator. In Section 7, we propose to generalize the MMR method using the OWG operator in the aggregation step. In this case, we will also distinguish between using aggregations with a descending order or with an ascending order. In Section 8, we give an illustrative example in order to see numerically the methodology proposed. Finally, in Section 9 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Ordered Weighted Averaging (OWA) operator

The OWA operator was introduced in [2] and it provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in a wide range of applications [3-14]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [2].

Definition 1: An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{OWA}_{\mathrm{w}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator. The DOWA operator is defined as in definition 1.

Definition 2: An AOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{AOWA}_{\mathrm{w}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; c_j \tag{2}$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing order [7]: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotone, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the OWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the average criteria [2, 7].

Another factor to consider, are the two measures introduced by Yager [2] for characterizing the weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure, the attitudinal character, is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n-j)/(n-1)]\, w_j. \tag{3}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.
The second measure introduced in [2], is called the entropy of dispersion of W and it is used to provide a measure of the information being used. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4}$$

That is, if $w_j = 1$ for some j, known as step-OWA [4], then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then $H(W) = \ln n$, and the amount of information used is maximum.
These two measures can also be used with the AOWA operators. Then, the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(j-1)/(n-1)]\, w_j \tag{5}$$

It can be shown that here we also get $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 0, and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 1. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. An interesting result found when comparing the descending and the ascending version of the measure is that they are dual between them. That is: $\alpha_{OWA}(W) = 1 - \alpha_{AOWA}(W)$. For the second measure, we will get the same index as in [2], so the measure is the same for both the DOWA and the AOWA operator although the reordering step is different.

3. Geometric mean

The geometric mean is a traditional aggregation operator which has been used for different applications such as in [26-27] for ratio-scale judgements. It is defined as follows:

Definition 3: A geometric mean operator of dimension n is a mapping F: $R^{+n} \rightarrow R^{+}$, defined as:

$$\mathrm{GM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

where R^+ is the set of positive real numbers. The geometric mean is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

4. Ordered Weighted Geometric (OWG) operator

The OWG operator was introduced in [1] and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator. It consists in combine the OWA operator with the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by [18].

Definition 4: An OWG operator of dimension n is a mapping $F{:}R^{+n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{OWG_w}\,(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{wj} \tag{7}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^+ is the set of positive real numbers.

From a generalized perspective of the reordering step in the OWG operator, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators [18]. The DOWG operator is defined as in definition 4.

Definition 5: An AOWG operator of dimension n is a mapping $H{:}R^{+n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, having the properties:

1) $w_j \in [0,1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{AOWG_w}\,(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{wj} \tag{8}$$

where c_j is the jth largest of the a_i, and R^+ is the set of positive real numbers. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

As it is seen in [1, 18], the OWG operator has the following properties:

1) Commutativity: $\mathrm{OWG_w}\,(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{OWG_w}\,(d_1,\ldots, d_n)$; where $(d_1,\ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1,\ldots, a_n)$.
2) Monotonicity: If $a_i \geq d_i \;\; \forall_i \Rightarrow \mathrm{OWG_w}\,(a_1,\ldots, a_n) \geq \mathrm{OWG_w}\,(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $\mathrm{Min_i}\,\{a_i\} \leq \mathrm{OWG_w}\,(a_1,\ldots, a_n) \leq \mathrm{Max_i}\,\{a_i\}$.

4) Idempotency: $OWG_w(a_1,\ldots, a_n) = a$, if $a_i = a$, $\forall i$

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [1]. For example, with the DOWG operators we get:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0\ \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow OWG_w(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0\ \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow OWG_w(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Min}\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n\ \ \forall_j \Rightarrow OWG_w(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

And with the AOWG operators [18], we get:

1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0\ \ \forall_{j \neq n} \Rightarrow AOWG_w(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0\ \ \forall_{j \neq 1} \Rightarrow AOWG_w(a_1,\ldots, a_n) = \mathrm{Min}\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n\ \ \forall_j \Rightarrow AOWG_w(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

Other examples of aggregations with OWG operators can be seen in [18].

5. Decision making using minimization of maximal regret

The use of minimization of maximal regret in decision making was introduced by Savage [24-25]. In the following, we are going to summarize the basic steps to follow when taking decisions with this method.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix R whose components are the r_{ij}, is the regret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \mathrm{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \mathrm{Max}_j\{r_{ij}\}$ for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \mathrm{Min}_i\{R_i\}$.

As we can see, once established the regret matrix, this method uses a pessimistic criteria. With a similar methodology, we could use other criteria instead of the pessimistic one. For example, we could use the average criteria. Then, the procedure would be the same with the difference that now, in step 4, we should use the average criteria in the regret matrix instead of the pessimistic criteria. That is to say, the procedure would be as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \mathrm{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.

Step 4: Calculate R_i = (1/n) $\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ for each A_i.

Step 5: Select A_{i*} such that R_{i*} = Min$_i\{R_i\}$.

As we can see, in this case we aggregate the regret matrix with the average criteria. Other aggregations could be used such as Hurwicz criteria, the weighted mean, the OWA operator or the OWG operator.

6. Using the OWA operators in decision making with minimization of regret

The use of the OWA operators in decision making with minimization of regret was suggested by Yager in [14]. He proposed a generalization for the different regrets methods by using the OWA operator in the regret matrix. Then, all the other criteria could be included in this aggregation as particular cases of using an established attitudinal character. Yager called this generalization the Min-W-Regret (MWR) procedure. It can be summarized as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate C_j = Max$_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate R_i = OWA$_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 1, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that R_{i*} = Min$_i\{R_i\}$.

As we can see, by choosing a different manifestation in the weighting vector of step 4, we can obtain different criteria such as the original work developed by Savage [24]:

1) When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\, j \neq 1$; we get the traditional Min-Max regret method. Thus, the original work developed by Savage [24] is a particular case of this generalization.
2) When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\, j \neq n$; we associate with each alternative the minimal regret.
3) When w_j = 1/n, $\forall\, j$; we are aggregating the regret matrix with the average criteria.

Another interesting issue to consider is the properties of this generalized Min-W-Regret method:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $r_i \geq d_i$ $\forall_i \Rightarrow$ OWA$_w(r_1,\ldots, r_n) \geq$ OWA$_w(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: Min $\{r_i\} \leq$ OWA$_w(r_1,\ldots, r_n) \leq$ Max $\{r_i\}$.
4) Idempotency: If $r_i = r$, $\forall_i \Rightarrow$ OWA$_w(r_1,\ldots, r_n) = r$.

As we can see, the generalized Min-W-Regret method accomplishes the same properties as the original OWA operator.

In order to adequate the generalized Min-W-Regret approach to a degree of optimism with the weighting vector used in the regret matrix, Yager defined R-OPT(W) = 1 – $\alpha(W)$. Here $\alpha(W)$ represents the attitudinal character introduced in [2] for the original OWA operator, and R-OPT(W) is the adapted version for the Min-W-Regret approach.

We see that for $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq 1$; $\alpha(W) = 1$ and hence R-OPT(W) = 0, while for $w_n = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq n$; $\alpha(W) = 0$ and hence R-OPT(W) = 1.

Analysing the attitudinal character, we see that Yager developed a method that adapted the generalized Min-W-Regret approach to the degree of optimism of the weighting vector but it could be simplified by using the AOWA operator. Then, the aggregation would reflect automatically the attitudinal character. The reason for this problem could come from a theoretical point of view where we could say that the OWA operator is appropriate to use in situations involving benefits while the AOWA operator is appropriate to use in situations involving costs. From a more generalized perspective, we could say that we should use the OWA operator in situations where the highest value of the payoff matrix is the best result while we should use the AOWA operator in situations where the smallest value is the best result.

The procedure to follow with the AOWA operator is very similar with the difference that now the reordering step is developed in ascending order. We can summarize it as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{AOWA}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 2, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

As we can see, by choosing a different manifestation in the weighting vector of step 4, we can obtain different criteria such as the original work developed by Savage [24]:

1) When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq n$; we get the traditional Min-Max regret method. Thus, the original work developed by Savage [24] is a particular case of this generalization.
2) When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq 1$; we associate with each alternative the minimal regret.
3) When $w_j = 1/n$, $\forall\ j$; we are aggregating the regret matrix with the average criteria.

In this case, we can see that we obtain directly the degree of optimism. For example, if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq n$; $\alpha(W) = 0$; and if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq 1$; $\alpha(W) = 1$.

If we consider the properties of this generalized Min-W-Regret method with the AOWA operator, we find the following:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $r_i \geq d_i\ \ \forall_i \Rightarrow \text{AOWA}_w(r_1,\ldots, r_n) \geq \text{AOWA}_w(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $\text{Min}\ \{r_i\} \leq \text{AOWA}_w(r_1,\ldots, r_n) \leq \text{Max}\ \{r_i\}$.
4) Idempotency: If $r_i = r,\ \ \forall_i \Rightarrow\ \text{AOWA}_w(r_1,\ldots, r_n) = r$.

As we can see, the generalized Min-W-Regret method accomplishes the same properties as the original OWA operator both for a descending and for an ascending order in the aggregation.

7. Using the OWG operator in decision making with minimization of regret

The use of the OWG operator in decision making with minimization of regret is an alternative when taking decisions with regret methods. It consists in introduce the OWG operator in the aggregation step of the regret matrix. The motivation for using the OWG operator is because there are some cases where we could prefer to aggregate with a geometric operator instead of the traditional methods used previously. Here, the procedure will be the same as for the case with the OWA operator with the difference that now we will use the OWG operator in the aggregation phase. Then, we can summarize the procedure as follows:

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix R whose components are the r_{ij}, is the regret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij} + 1$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{OWG}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 7, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

Here, we should note that in the construction of the regret matrix, we add one unit because if we do not add this value, we would not get consistent results as the OWG operator cannot aggregate arguments with value 0. The reason is because when aggregating with 0, the whole aggregation automatically becomes 0. Analysing this change, we see that now the aggregation is stable because for the best cases, when multiplying by 1, the result continues to be the same. Then, the result obtained is similar as in the previous cases where the best value of each state of nature did not add any regret in the whole aggregation.

In this case, we could also obtain different aggregations in step 4 by choosing a different weighting vector such as the original regret work developed by Savage [24]:

1) When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\, j \neq 1$; we get the traditional Min-Max regret method with the difference that now the result has one unit more. Thus, the original work developed by Savage can be considered as a particular case of this generalization.
2) When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\, j \neq n$; we associate with each alternative the minimal regret.
3) When $w_j = 1/n$, $\forall\, j$; we are aggregating the regret matrix with the geometric mean.

Another interesting issue to consider is the properties of this type of generalized Min-W-Regret method:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.

2) Monotonicity: If $r_i \geq d_i \;\; \forall_i \Rightarrow \text{OWG}_w(r_1,\ldots, r_n) \geq \text{OWG}_w(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $\text{Min}\ \{r_i\} \leq \text{OWG}_w(r_1,\ldots, r_n) \leq \text{Max}\ \{r_i\}$.
4) Idempotency: If $r_i = r, \;\; \forall_i \;\Rightarrow\; \text{OWG}_w(r_1,\ldots, r_n) = r$.

As we can see, this type of generalized Min-W-Regret method accomplishes the same properties as the original OWG operator.

Another alternative that we could use in the aggregation of the regret matrix is the AOWG operator. The motivation for use an ascending order appears in situations where the smallest value is the best result because then, the weighting vector will consider first the best result and so on. The procedure to follow with the AOWG operator is very similar with the difference that now the reordering step is developed in ascending order. We can summarize it as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij} + 1$, for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{AOWG}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 8, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

Again, in this case we also add one unit in order to keep stable the aggregation. By choosing a different weighting vector we could also obtain different aggregations in step 4 such as the original regret work developed by Savage [24]:

1) When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq n$; we get the traditional Min-Max regret method with one unit more. Thus, the original work developed by Savage can be considered as a particular case of this generalization.
2) When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, $\forall\ j \neq 1$; we associate with each alternative the minimal regret.
3) When $w_j = 1/n$, $\forall\ j$; we are aggregating the regret matrix with the geometric mean.

Analysing the properties of this type of generalized Min-W-Regret method with the AOWG operator, we find the same properties as with the original OWG operator:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $r_i \geq d_i \;\; \forall_i \Rightarrow \text{AOWG}_w(r_1,\ldots, r_n) \geq \text{AOWG}_w(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $\text{Min}\ \{r_i\} \leq \text{AOWG}_w(r_1,\ldots, r_n) \leq \text{Max}\ \{r_i\}$.
4) Idempotency: If $r_i = r, \;\; \forall_i \;\Rightarrow\; \text{AOWG}_w(r_1,\ldots, r_n) = r$.

8. Illustrative example

In the following, we are going to develop an example in order to understand numerically all the procedures commented previously. We will distinguish four cases: the aggregation step with the OWA operators, with the AOWA operators, with the OWG operators and with the AOWG operators. We will use the same payoff matrix for all the cases with the difference that for the geometric operators we will add one unit to keep stable the aggregation. But we have to implicitly assume that when using the OWA and OWG operators, we are considering a decision with Yager's perspective [14] where he corrected the attitudinal character with R-OPT(W) = 1 - $\alpha(W)$ and when using the AOWA and AOWG, a simplified methodology where we obtain automatically $\alpha(W)$. In this example, we will assume the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.3, 0.3, 0.1).

Step 1: Assume we have the following payoff matrix:

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	20	30	10	40	40
A_2	35	20	10	50	30
A_3	30	40	30	30	10
A_4	25	35	40	25	20

Case 1: Using OWA operators

Step 2.1 – Step 3.1: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j and $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	15	10	30	10	0
A_2	0	20	30	0	10
A_3	5	0	10	20	30
A_4	10	5	0	25	20

Step 4.1: Calculate $R_i = \text{OWA}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 1, for each A_i.

$A_1 = 30 \times 0.1 + 15 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 10 \times 0.3 + 0 \times 0.1 = 12$
$A_2 = 30 \times 0.1 + 20 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 0 \times 0.3 + 0 \times 0.1 = 10 \leftarrow$
$A_3 = 30 \times 0.1 + 20 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 5 \times 0.3 + 0 \times 0.1 = 11.5$
$A_4 = 25 \times 0.1 + 20 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 5 \times 0.3 + 0 \times 0.1 = 11$

Step 5.1: We select alternative A_2.

Case 2: Using the AOWA operator in the aggregation.

Step 2.2 – Step 3.2: We assume the same regret matrix as in Step 2.1 – Step 3.1.

Step 4.2: Calculate $R_i = \text{AOWA}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 2, for each A_i.

$A_1 = 0 \times 0.1 + 10 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 15 \times 0.3 + 30 \times 0.1 = 12.5$
$A_2 = 0 \times 0.1 + 0 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 20 \times 0.3 + 30 \times 0.1 = 12 \leftarrow$
$A_3 = 0 \times 0.1 + 5 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 20 \times 0.3 + 30 \times 0.1 = 13$
$A_4 = 0 \times 0.1 + 5 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 20 \times 0.3 + 25 \times 0.1 = 12.5$

Step 5.2: We select alternative A_2.

Case 3: Using the OWG operator.

Step 2.3 – Step 3.3: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j and $r_{ij} = C_j - c_{ij} + 1$; for each pair A_i and S_j.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	16	11	31	11	1
A_2	1	21	31	1	11
A_3	6	1	11	21	31
A_4	11	6	1	26	21

Step 4.3: Calculate $R_i = \text{OWG}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 7, for each A_i.

$A_1 = 31^{0.1} \times 16^{0.2} \times 11^{0.3} \times 11^{0.3} \times 1^{0.1} = 10.34$
$A_2 = 31^{0.1} \times 21^{0.2} \times 11^{0.3} \times 1^{0.3} \times 1^{0.1} = 5.32 \leftarrow$
$A_3 = 31^{0.1} \times 21^{0.2} \times 11^{0.3} \times 6^{0.3} \times 1^{0.1} = 9.11$
$A_4 = 26^{0.1} \times 21^{0.2} \times 11^{0.3} \times 6^{0.3} \times 1^{0.1} = 8.95$

Step 5.3: We select alternative A_2.

Case 4: Using the AOWG operator.

Step 2.4 – Step 3.4: We assume the same regret matrix as in Step 2.3 – Step 3.3.

Step 4.4: Calculate $R_i = \text{AOWG}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 8, for each A_i.

$A_1 = 1^{0.1} \times 11^{0.2} \times 11^{0.3} \times 16^{0.3} \times 31^{0.1} = 10.74$
$A_2 = 1^{0.1} \times 1^{0.2} \times 11^{0.3} \times 21^{0.3} \times 31^{0.1} = 7.21 \leftarrow$
$A_3 = 1^{0.1} \times 6^{0.2} \times 11^{0.3} \times 21^{0.3} \times 31^{0.1} = 10.32$
$A_4 = 1^{0.1} \times 6^{0.2} \times 11^{0.3} \times 21^{0.3} \times 26^{0.1} = 10.14$

Step 5.4: We select alternative A_2.

9. Conclusions

In this paper, we have proposed to use the OWG operator in situations of decision making with minimization of regret. For doing this, we have made some changes in the construction of the regret matrix in order to adapt it to the aggregation characteristics of the OWG operator. We have also distinguished between descending and ascending aggregations. We have seen that it is better to use the descending aggregations in cases where the highest value is the best result while it is better to use the ascending aggregations in cases where the smallest value is the best result. We have developed the decision making process distinguishing in the aggregation step between the use of the OWA operator, the AOWA operator, the OWG operator and the AOWG operator. Finally, an illustrative example has been given by using the four different cases in the aggregation step.

References

[1] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2000), "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*. Madrid, Spain.
[2] Yager, R., (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190.
[3] Yager, R. R., (1992), "Applications and extensions of OWA aggregations", *International Journal of Man-Machine Studies 37*, 103-132.
[4] Yager, R., (1993), "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems* 59, 125-148.
[5] Yager, R., Filev, D.P., (1994), "Parameterized andlike and orlike OWA operators", *International Journal of General Systems 22*: 297-316.
[6] Filev, D. P., Yager, R. R., (1995), "Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators", *Information Sciences 85*, 11-27.
[7] Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., (1995), "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3*, 236-240.
[8] Yager, R., Kacprzyck, J., (1997), "*The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*", Kluwer Academic Publishers.
[9] Mitchell, H.B., Estrakh, D.D., (1998), "An OWA operator with fuzzy ranks", *International Journal of Intelligent Systems 13*, 69-81.
[10] Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R., (2002), "*Aggregation Operators: New Trends and Applications*", Physica-Verlag, New York.
[11] Torra, V., (2002), "*Information Fusion in Data Mining*", Springer, New York.
[12] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), "The Uncertain OWA Operator", *International Journal of Intelligent Systems 17*, 569-575.
[13] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2003), "An Overview of Operators for Aggregating Information", *International Journal of Intelligent Systems 18*, 953-969.
[14] Yager, R., (2004), "Decision making using minimization of regret", *International Journal of Approximate Reasoning 36*, 109-128.
[15] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2001), "Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations", *Fuzzy Sets and Systems 122*, 277-291.
[16] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., (2001), "Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations", *European journal of Operations Research 129*, 372-385.
[17] Xu, Z.S., (2002), "A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP", *Systems, Engineering and Electronics 24*, 31-33.
[18] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *International Journal of Intelligent Systems 17*, 709-716.
[19] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., (2003), "A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making", *International Journal of Intelligent Systems 18*, 689-707.
[20] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Alonso, S., (2004), "Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations", *International Journal of Intelligent Systems 19*, 233-255.

[21] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2004), "An uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator and its application", *Information 7*, 175-182.
[22] Xu, Z.S., (2006), "An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations", *Decision Support Systems 41*, 488-499.
[23] Yager, R. R., Xu, Z.S., (2006), "The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making", *Fuzzy Sets and Systems 157*, 1393-1402.
[24] Savage, L.J, (1951), "The theory of statistical decision", *Journal of American Statistical Association 46*, 55-67.
[25] Savage, L.J., (1954), *"The foundations of statistics"*, John Wiley & Sons, NY.
[26] Azcel, J., Alsina, C., (1983), "Procedures for synthesizing ratio judgements", *Journal of Mathematical Psychology 27*, 93-102.
[27] Azcel, J., Alsina, C., (1987), "Synthesizing judgements: A functional equations approach", *Mathematical Modelling 9*, 311-320.

14.1.8. Artículo de congreso 8. – Publicado en EUSFLAT 2007

The induced generalized OWA operator

José M. Merigó
Department of Business Administration,
University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona
Email: josema_merigo@hotmail.com

Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration,
University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona
Email: amgil@ub.edu

Abstract

We study different types of aggregation operators. We focus on the generalized OWA (GOWA) operator developed by Yager which represents a generalization to a wide range of aggregation operators. We distinguish between aggregations with a descending or with an ascending order. We introduce the induced generalized OWA (IGOWA) operator which represents an extension to the GOWA operator. It generalizes a wider range of aggregation operators as the GOWA operator is a particular case of this type of generalization. We study its main properties and some particular cases obtained with it. Finally, we develop a further generalization to the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means.

Keywords: Aggregation operators, generalized mean, induced OWA operator.

1 Introduction

In the literature, we find a wide range of aggregation operators for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in [17]. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications such as [2,23]. It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average criteria.

In [22], Yager and Filev developed an extension to the OWA operator called induced ordered weighted averaging (IOWA) operator. The difference is that the reordering step is not developed with the values of the arguments. In this case, the reordering step is induced by another mechanism such that the ordered position of the arguments depends upon the values of their associated order inducing variables. In the last years, the IOWA operator has been receiving increasing attention as it is seen in the different works developed about it such as in [5,16,18-20].

Recently, Yager [21] has developed a generalized version of the OWA operator where he introduces a reordering step in the generalized mean according to the values of the arguments. The generalized mean was introduced in [6-7] and it consists in generalize a wide range of mean operators such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean and the quadratic mean. Then, with the generalized OWA operator, Yager offered a generalization that included the particular cases found in the OWA operator such as the maximum and the minimum and the particular cases found in the generalized mean such as the geometric or the harmonic mean. More recently, Beliakov [1] has suggested a further generalization to the GOWA operator by using quasi-arithmetic means. Then, the result obtained is the Quasi-OWA operator introduced in [8]. This operator has also been studied in [2,14]

In this paper, we suggest an induced generalized OWA (IGOWA) operator which represents an extension to the GOWA operator. In this generalization, we suggest a reordering step based on a mechanism such that the ordered position of the arguments depends upon their associated order inducing variables. Then, we can obtain a generalization that includes the special cases found in the IOWA operator such as the maximum, the minimum and the OWA operator, and the special cases found with the generalized mean such as the arithmetic or the geometric mean. We will also suggest a further generalization to the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call it the Quasi-IOWA operator. Note that the generalizations developed in this paper are different from the ones developed in [13,16].

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some aggregations operators such as the OWA operator, the IOWA operator and the generalized mean. In Section 3, we study the main concepts of the GOWA operator. In Section 4, we introduce the IGOWA operator. Finally, in Section 5, we summarize the main conclusions found in the paper.

2 Aggregation operators

In this Section we will briefly describe the OWA operator, the IOWA operator and the generalized mean.

The OWA operator was introduced by Yager in [17] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \ b_j \qquad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [8]. The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [17].It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) = OWA(d_1,d_2\ldots,d_n)$, where $(d_1,\ldots,d_n)$ is any permutation of the arguments ($a_1,\ldots,a_n$). It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all a_i, then, $OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) \geq OWA(d_1,d_2\ldots,d_n)$. It is bounded because the OWA operator is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}_i\{a_i\} \leq OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) \leq \text{Max}_i\{a_i\}$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all a_i, then, $OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) = a$.

The IOWA operator was introduced by Yager and Filev [22] and it represents an extension to the OWA operator. Its main difference is that the reordering step is not developed with the values of the arguments a. In this case, the reordering step is developed with order inducing variables. The IOWA operator also includes as particular cases the maximum, the minimum and the average criteria. In the following, we provide a definition of the IOWA operator as suggested in [22].

Definition 2. An IOWA operator of dimension n is a mapping $IOWA$: $R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{2}$$

where b_j is the a_i value of the IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator. The IOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, bounded, idempotent and commutative [22] for both the DIOWA and the AIOWA operator.

The generalized mean was introduced in [6-7] and it represents a generalization to a wide range of mean aggregations such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean or the quadratic mean. It can be defined as follows.

Definition 3. A generalized mean of dimension n is a mapping GM:$R^n \to R$ such that:

$$GM(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that depending on the value of the parameter λ, we obtain different types of means. When $\lambda = \infty$, we obtain the maximum. When $\lambda = 1$, the arithmetic mean. When $\lambda = 0$, the geometric mean. When $\lambda = -1$, the harmonic mean. When $\lambda = 2$, the quadratic mean. When $\lambda = -\infty$, the minimum.

Another type of generalized mean is the case when the weights of the arguments are different. Then, we obtain the weighted generalized mean. It can be defined as follows.

Definition 4. A weighted generalized mean of dimension n is a mapping WGM:$R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$WGM(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (4)$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

3 Generalized OWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced by Yager in [21]. In the following, we are going to define it.

Definition 5. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (5)$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The DGOWA operator has the same definition than the GOWA operator.

Definition 6. An AGOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$AGOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (6)$$

where b_j is the jth lowest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. As we can see, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

As it is demonstrated in [21], the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent for both the DGOWA and the AGOWA operator. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum and the minimum. For the DGOWA operator, the maximum is obtained when w_1 = 1 and w_j = 0, for all $j \neq 1$. The minimum is found when w_n = 1 and w_j = 0, for all $j \neq n$. For the AGOWA operator, the maximum is found when w_n = 1 and w_j = 0, for all $j \neq n$. The minimum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. As we can see, the maximum and the minimum are obtained independently of the value of the parameter λ. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest or lowest of the arguments.

Other special cases obtained with the weighting vector of the GOWA operator [21] are the generalized mean and the weighted generalized mean. The generalized mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted generalized mean is obtained when when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of a_i. Note that both the DGOWA and the AGOWA operator obtain these particular cases.

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator [17], the ordered weighted geometric (OWG) operator [3-4,10,15], the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator [21] and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator [21]. When $\lambda = 1$, then, with the DGOWA operator, we obtain the usual OWA operator and with the AGOWA operator, we obtain the AOWA operator. When $\lambda = 0$, then, with the DGOWA operator, we obtain the descending OWG (DOWG) operator and with the AGOWA operator, we obtain the ascending OWG (AOWG) operator. When $\lambda = -1$, we obtain the descending OWHA (DOWHA) operator by using the DGOWA operator and the ascending OWHA (AOWHA) operator by using the AGOWA operator. When $\lambda = 2$, we obtain the descending OWQA (DOWQA) operator and the ascending OWQA (AOWQA) operator respectively.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the GOWA operator. In [21], Yager defined it as:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

Here, we could also make a distinction between descending and ascending orders. Assuming that we consider for both orderings a situation where the highest argument is the best result, we could formulate the attitudinal character for the AGOWA operator as follows:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

Note that if we consider a situation where the smallest argument is the best result, then, we should use Eq. (4) for the GOWA operator and Eq. (3) for the AGOWA operator.

4 Induced generalized OWA operator

The induced generalized OWA (IGOWA) operator represents an extension to the GOWA operator. The main difference between them is that the reordering step of the IGOWA operator is not developed with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is induced by another mechanism represented as u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the order inducing variable u_i.

Definition 7. An IGOWA operator of dimension n is a mapping $IGOWA$: $R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (9)$$

where b_j is the a_i value of the IGOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending induced generalized OWA (DIGOWA) operator and the ascending induced generalized OWA (AIGOWA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The DIGOWA operator has the same definition than the IGOWA operator.

Definition 8. An AIGOWA operator of dimension n is a mapping $AIGOWA$: $R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$AIGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad (10)$$

where b_j is the a_i value of the IGOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth lowest u_i, u_i is the order inducing variable, a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. As we can see, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

The IGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent for both the DIGOWA and the AIGOWA operator. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $IGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = IGOWA_w(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle\ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$, where $(d_1,\ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1,\ldots, a_n)$. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all a_i, then, $IGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq IGOWA_w(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle\ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$. It is bounded because the IGOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\mathrm{Min}_i\{a_i\} \leq IGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \leq \mathrm{Max}_i\{a_i\}$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all a_i, then, $IGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = a$.

An interesting issue when analysing induced aggregation operators is the problem of ties in the reordering step. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy developed by Yager and Filev [22] where they replace each argument of the tied IOWA pairs by their average. For the GOWA operator, instead of using the arithmetic mean, we will replace each argument of the tied IGOWA pairs by its generalized mean. Then, depending on the parameter of λ, we will use a different type of mean to replace the tied arguments.

As it is explained in [22] for the IOWA operator, when studying the order inducing variable of the IGOWA operator, we should note that the values used can be drawn from a space such that the only requirement is to have a linear ordering. Then, it is possible to use different kinds of attributes for the order inducing variables that permit us, for example, to mix numbers with words in the aggregations. For the IGOWA operator, this would mean that we have numerical arguments to be ordered by linguistic order inducing variables. Note that the reordering of the linguistic inducing variables can be ascendant or descendant according to the interests of the aggregation. It is also worth of noting that in some situations it is possible to use the implicit lexicographic ordering associated with words such as the ordering of words in dictionaries [22].

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the IGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the generalized mean, the weighted generalized mean and the GOWA operator.

With the DIGOWA operator, the maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$, then, $DIGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$. The minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$, then, $DIGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $DIGOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The generalized mean is found when $w_j = 1/n$, for all a_i. The weighted generalized mean is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the DGOWA operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i.

With the AIGOWA operator, the maximum is found if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$, then, $AIGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$. The minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$, then, $AIGOWA_w(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $AIGOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth smallest argument a_i. The generalized mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. The weighted generalized mean is found if $u_i < u_{i+1}$, for all i, and the AGOWA operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth smallest of a_i.

As we can see, we get the same results for all the cases for both the descending and the ascending order, excepting for the weighted generalized mean and for the GOWA operator where the results are different. Note that we consider for both orderings a situation where the highest value is the best result.

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual IOWA operator, the induced OWG (IOWG) operator, the induced OWHA (IOWHA) operator and the induced OWQA (IOWQA) operator.

When $\lambda = 1$, the IGOWA operator becomes the IOWA operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{11}$$

With the DIGOWA operator we obtain the DIOWA operator and with the AIGOWA operator, the AIOWA operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DIGOWA operator has a descending order and the AIGOWA operators an ascending order.

When $\lambda = 0$, the IGOWA operator becomes the IOWG operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{12}$$

With the DIGOWA operator we obtain the descending IOWG (DIOWG) operator and with the AIGOWA operator, the ascending IOWG (AIOWG) operator. The difference between these two cases is that the DIGOWA operator has a descending order and the AIGOWA operator an ascending order.

When $\lambda = -1$, we get the IOWHA operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{13}$$

With the DIGOWA operator we obtain the descending IOWHA (DIOWHA) operator and with the AIGOWA operator, the ascending IOWHA (AIOWHA) operator. In both cases, the formulation is the same although the reordering step is different.

When $\lambda = 2$, we get the IOWQA operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2\right)^{1/2} \tag{14}$$

With the DIGOWA operator we obtain the descending IOWQA (DIOWQA) operator and with the AIGOWA operator, the ascending IOWQA (AIOWQA) operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DIGOWA operator has a descending order and the AIGOWA operator an ascending order.

As it is explained in [1], a further generalization to the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means [9,11-12]. Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between ascending and descending orderings in the Quasi-OWA operators [8]. Then, we will get the Quasi-DOWA and the Quasi-AOWA operators.

Following the same methodology as in [1], we can suggest a similar generalization to the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We can call this generalization as the Quasi-IOWA operator.

$$\textit{Quasi-IOWA}(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{15}$$

As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, we have also to distinguish between ascending and descending orderings. Then, we will have to distinguish between the Quasi-DIOWA operator and the Quasi-AIOWA operator. Obviously, all the particular cases commented in the IGOWA operator, are also included in this generalization.

5 Conclusions

We have studied different types of aggregation operators. First, we have reviewed some basic operators such as the OWA operator, the IOWA operator and the generalized mean. Then, we have analysed the GOWA operator introduced by Yager. We have considered its main properties and some of the particular cases found in the weighting vector W and in the parameter λ. The whole analysis has been developed distinguishing between aggregations with a descending or with an ascending order. With this information, we have introduced the IGOWA operator. It represents an extension to the GOWA operator with the main difference that the reordering step is developed with order inducing variables. We have briefly studied its main properties and some of the particular cases found in the weighting vector W and in the parameter λ such as the IOWA operator, the IOWG operator, the IOWHA operator and the IOWQA operator. Finally, we have developed the Quasi-IOWA operator which represents a generalization to the IGOWA operator.

References

[1] G. Beliakov, Learning Weights in the Generalized OWA Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 4 (2005) 119-130.

[2] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[4] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 277-291.

[5] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative

preference relations, International Journal of Intelligent Systems 19 (2004) 233-255.
[6] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika, No. 483, pp. 147-158, 1974.
[7] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.
[8] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.
[9] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
[10] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 689-707.
[11] A.N. Kolmogoroff, Sur la motion de la moyenne, Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez., 12 (1930) 388-391.
[12] M. Nagumo, Uber eine klasse der mittelwerte, Japanese Journal of Mathematics 6 (1930) 71-79.
[13] P.A. Schaefer, H.B. Mitchell, A generalized OWA operator, International Journal of Intelligent Systems 14 (1999) 123-143.
[14] V. Torra, Learning Weights for the Quasi-Weighted Means, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 10 (2002) 653-666.
[15] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[16] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[17] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 18 (1988) 183-190.
[18] R.R. Yager, The induced fuzzy integral aggregation operator, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 1049-1065.
[19] R.R. Yager, Induced aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003) 59-69.
[20] R.R. Yager, Choquet aggregation using order inducing variables, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12 (2004) 69-88.
[21] R.R. Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (2004) 93-107.
[22] R.R. Yager, D.P. Filev, Induced Ordered Weighted Averaging Operators, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 29 (1999) 141-150.
[23] R.R. Yager, J. Kacprzyck, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.9. Artículo de congreso 9. – En preparación

The Minkowski ordered weighted averaging distance operator

José M. Merigó
Department of Business Administration,
University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona
Email: josema_merigo@hotmail.com

Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration,
University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona
Email: amgil@ub.edu

Abstract

We study different types of aggregation operators such as the ordered weighted averaging (OWA) operator or the generalized OWA (GOWA) operator. We focus on distance measures. We introduce the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator. We give a general overview of this type of generalization and some of the main particular cases found in it such as the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator and the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator. Finally, we further generalize the MOWAD operator by using quasi-arithmetic means.

Keywords: Aggregation operators, Minkowski distance, OWA operator.

1 Introduction

The distance measures are very useful techniques that have been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, multicriteria decision making, business decisions, etc. Among the great variety of distances we can find in the literature, the Minkowski distance represents a generalization to a wide range of them such as the Hamming distance, the Euclidean distance, the geometric distance and the harmonic distance.

Often, when calculating distances, we want an average result of all the individual distances. We call this the normalization process. In the literature, we find principally two types of normalized distances. The first type is the case when we normalize the distance giving the same weight to all the individual distances. The second type is the case when we normalize the distance giving different weights to the individual distances. Then, assuming that we are using the Minkowski distance, for the first type we will obtain the normalized Minkowski distance and for the second type the weighted Minkowski distance.

Sometimes, when calculating the normalized distance, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for the aggregation of the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced by Yager in [18]. The OWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria. It has been used in a wide range of applications such as [2,20].

In this paper, we suggest a new type of distance measure consisting in normalize the Minkowski distance with the OWA operator. Then, the normalization developed will reflect the attitudinal character of the decision maker and it will provide a parameterized family of distance operators that include the maximum distance, the minimum distance and the average distance. We will call this generalization as the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator. By studying special cases of the MOWAD operator, we will be able to develop a wide range of distance operators such as the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the ordered weighted geometric averaging distance (OWGAD) operator and the ordered weighted harmonic averaging distance (OWHAD) operator. We will also suggest a further generalization to the MOWAD operator by using quasi-arithmetic means. We will call it the Quasi-OWAD operator.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some aggregation operators such as the OWA operator or the generalized OWA operator. In Section 3, we comment the Minkowski distance. In Section 4, we develop the MOWAD operator. In Section 5, we generalize the MOWAD operator by using quasi-arithmetic means. Finally, in Section 6, we summarize the main conclusions found in the paper.

2 Aggregation operators

In this Section, we will briefly analyze the OWA operator, the generalized mean and the GOWA operator.

2.1 OWA operator

The OWA operator was introduced by Yager in [18] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the arithmetic mean. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [7]. Note that this distinction in the reordering step is relevant in order to distinguish between situations where the highest argument is the best result and situations where the lowest argument is the best result. The OWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [18]. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) = OWA(d_1,d_2\ldots,d_n)$, where $(d_1,\ldots,d_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1,\ldots,a_n)$. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all a_i, then, $OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) \geq OWA(d_1,d_2\ldots,d_n)$. It is bounded because the OWA operator is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\mathrm{Min}_i\{a_i\} \leq OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) \leq \mathrm{Max}_i\{a_i\}$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all a_i, then, $OWA(a_1,a_2\ldots,a_n) = a$.

2.2 GOWA operator

The GOWA operator [19] is a generalization of the OWA operator by using generalized means. The generalized mean was introduced in [5-6] and it represents a generalization to a wide range of mean aggregations such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean or the quadratic mean. It can be defined as follows.

Definition 2. A generalized mean of dimension n is a mapping GM:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$GM(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that depending on the value of the parameter λ, we obtain different types of means. When $\lambda = \infty$, we obtain the maximum. When $\lambda = 1$, the arithmetic mean. When $\lambda = 0$, the geometric mean. When $\lambda = -1$, the harmonic mean. When $\lambda = 2$, the quadratic mean. When $\lambda = -\infty$, the minimum.

Note that if the arguments have different weights, then, the generalized mean is transformed in the weighted generalized mean. It can be defined as follows.

Definition 3. A weighted generalized mean of dimension n is a mapping WGM:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$WGM(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

With this information, we can define the GOWA operator as follows.

Definition 4. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator.

It can be demonstrated that the GOWA operator generalizes a wide range of aggregation operators [19]. For example, with the DGOWA operator, the maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. With the AGOWA operator, the maximum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The minimum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. As we can see, the maximum and the minimum are obtained independently of the value of the parameter λ.

Other special cases obtained with the weighting vector of the GOWA operator [19] are the generalized mean and the weighted generalized mean. The generalized mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted generalized mean is obtained when when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of a_i. Then, the GOWA operator also includes the particular cases of the generalized mean such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean and the quadratic mean, and the particular cases of the weighted generalized mean such as the weighted average, the weighted geometric mean, the weighted harmonic mean and the weighted quadratic mean.

If we analyze the parameter λ, we can also obtain another group of special cases such as the usual OWA operator [18], the ordered weighted geometric (OWG) operator [3-4,9,17], the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator [19] and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator [19]. Note that this group of particular cases can be constructed with a descending or with an ascending order.

3 The normalized Minkowski distance

The normalized Minkowski distance is a distance measure that generalizes a wide range of distances such as the normalized Hamming distance, the normalized Euclidean distance, the normalized geometric distance or the normalized harmonic distance. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets or interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It can be formulated for two sets A and B as follows.

Definition 5. A normalized Minkowski distance of dimension n is a mapping d_m:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_m(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

If we give different values of the parameter λ, we can obtain a wide range of special cases. For example, if $\lambda = 1$, we obtain the normalized Hamming distance. If $\lambda = 2$, the normalized Euclidean distance. If $\lambda = 0$, the normalized geometric distance. If $\lambda = -1$, the normalized harmonic distance. Note that the formulation shown above is the general expression. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [10-11,16].

Sometimes, when normalizing the Minkowski distance, we prefer to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Minkowski distance. It can be defined as follows.

Definition 6. A weighted Minkowski distance of dimension n is a mapping $d_{wm}:R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{wm}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i |^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

In this case, we can also obtain a wide range of special cases by using different values in the parameter λ. For example, if $\lambda = 1$, we obtain the weighted Hamming distance. If $\lambda = 2$, the weighted Euclidean distance. If $\lambda = 0$, the weighted geometric distance. If $\lambda = -1$, the weighted harmonic distance.

4 The Minkowski ordered weighted averaging distance operator

The Minkowski OWAD (MOWAD) operator represents an extension of the traditional normalized Minkowski distance by using OWA operators. The difference is that we reorder the arguments of the individual distances according to their values. Then, we can calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, etc., modifying the results according to the attitudinal character of the decision maker. For example, this type of distance is useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the highest individual distance because he believes that it will be more significant in the analysis. Note that this type of normalized distance operator can be constructed by mixing the Minkowski distance with OWA operators, by mixing the Hamming distance with GOWA operators or by mixing the Hamming OWAD operator with generalized means. It can be defined as follows.

Definition 7. A Minkowski OWAD operator of dimension n is a mapping $MOWAD:R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

where D_j is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. As we can see, we adapt the characteristics of the Minkowski distance to the characteristics of the OWA operator. Note that different notations are possible in order to formulate this type of aggregation such as: *MOWAD(A,B)*.

A fundamental aspect of the MOWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual Minkowski distance, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If D is a vector corresponding to the ordered arguments D_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the MOWAD aggregation can be expressed as:

$$MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(W^T D\right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Minkowski OWAD (DMOWAD) and the ascending Minkowski OWAD (AMOWAD) operators. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient way, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation, as it is explained in [13-14] for the OWA operator. The DMOWAD operator has the same definition than the MOWAD operator.

Definition 8. An AMOWAD operator of dimension n is a mapping $AMOWAD: R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$AMOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. As we can see, the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$.

The MOWAD operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent for both the DMOWAD and the AMOWAD operator. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = MOWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, where $(e_1, \ldots, e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1, \ldots, d_n)$. It is monotonic because if $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \geq MOWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. It is bounded because the MOWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{d_i\} \leq MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \leq \text{Max}\{d_i\}$. It is idempotent because if $d_i = d$, for all d_i, then, $MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the attitudinal character of the MOWAD operator. Based on the measure developed for the GOWA operators in [19], it can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending on if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the MOWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized Minkowski distance and the weighted Minkowski distance.

For the DMOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $MOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_1 = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $MOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_n = \text{Min}\{d_i\}$. For the AMOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $AMOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_n = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $AMOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_1 = \text{Min}\{d_i\}$. As we can see, the maximum and the minimum distances are obtained independently of the value of the parameter λ. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $MOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i.

The normalized Minkowski distance and the weighted Minkowski distance are also particular cases of the MOWAD operator. The normalized Minkowski distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Minkowski distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DMOWAD and the AMOWAD operators obtain these particular cases.

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the ordered weighted geometric averaging distance (OWGAD) operator and the ordered weighted harmonic averaging distance (OWHAD) operator.

The Hamming OWAD operator or simply OWAD operator is found when the parameter λ of the MOWAD operator is equal to one. In this type of distance, we introduce a reordering in the individual distances in order to aggregate them in the most efficient way according to the interests of the decision maker. It can be constructed as a particular case of the MOWAD operator, but it is also possible to construct it by mixing the OWA operator with the Hamming distance.

$$HOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{12}$$

With the DMOWAD operator, we obtain the descending HOWAD (DHOWAD or DOWAD) operator and with the AMOWAD operator, we obtain the ascending HOWAD (AHOWAD or AOWAD) operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the reordering step is developed in descending order for the DHOWAD operator and in ascending order for the AMOWAD operator.

In this case, the attitudinal character $\alpha(W)$ has the same formulation than the measure used for the traditional OWA operator [18]. Depending on the ordering of the arguments and the specific problem found we will define the attitudinal character in two different ways. For example, if we assume that we are in a situation where the highest distance is the best result, then, for the DHOWAD operator the attitudinal character is:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{13}$$

And for the AHOWAD operator is:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right) \tag{14}$$

Note that if we are in a situation where the lowest distance is the best result, a common situation in distances, then, the attitudinal character of the DHOWAD operator is Eq. (14) and for the AHOWAD operator is Eq.(13).

With the HOWAD operator it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance and the weighted Hamming distance. The maximum and the minimum distances are obtained as it has been explained with the MOWAD operator. The normalized Hamming distance is found when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Hamming distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DHOWAD and the AHOWAD operators obtain these particular cases.

The Euclidean OWAD operator or also the ordered weighted quadratic averaging distance (OWQAD) operator is found when the parameter λ of the MOWAD operator is equal to two. Note that it can be constructed as a particular case of the MOWAD operator or by mixing the Euclidean distance with the OWA operator or by mixing the Hamming distance with the OWQA operator.

$$EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} \tag{15}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending EOWAD (DEOWAD) operator and the ascending EOWAD (AEOWAD) operator.

With the EOWAD operator it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators that include for example, the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance and the weighted Euclidean distance. The maximum and the minimum distances are found in the same way as it has been explained with the MOWAD operator. The normalized Euclidean or quadratic distance is found when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Euclidean or quadratic distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DEOWAD and the AEOWAD operators obtain these particular cases.

Another particular case obtained with the MOWAD operator is the OWGAD operator. This case is found when λ is equal to zero. Note that it is possible to construct it in another way such as by mixing the Hamming distance with the OWGA operator or by mixing the geometric distance with the OWA operator.

$$OWGAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} D_j^{w_j} \tag{16}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWGAD (DOWGAD) operator and the ascending OWGAD (AOWGAD) operator. Note that the geometric operators cannot aggregate negative numbers. But in the case of distances, this is not a problem because the arguments are always positive as the results obtained in the individual distances are given in absolute values.

In this case, it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators. With the OWGAD operator, we can obtain among others the maximum distance, the minimum distance, the normalized geometric distance and the weighted geometric distance. The maximum and minimum distances are found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, and when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, respectively. Note that if we use ascending orders, the maximum and minimum distances are found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, and when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, respectively. The normalized geometric distance is found when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted geometric distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i.

Another special case found in the MOWAD operator is the OWHAD operator. In this case, $\lambda = -1$. Note that the OWHAD operator can also be constructed by mixing the harmonic distance with the OWA operator or by mixing the Hamming distance with the OWHA operator.

$$OWHAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{D_j}} \tag{17}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWHAD (DOWHAD) operator and the ascending OWHAD (AOWHAD) operator. Note that both are very similar with the difference that one reorders in ascending order and the other in descending order. Also note that this distinction is necessary in order to consider problems where we have to deal with situations where the highest argument is the best result and situations where the lowest argument is the best result.

With the OWHAD operator it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators. We can obtain among others the maximum distance the minimum distance, the normalized harmonic distance and the weighted harmonic distance. With descending orders, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, and the minimum distance when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. With ascending orders, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, and the minimum distance when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The normalized harmonic distance is found when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted harmonic distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i.

5 Quasi-arithmetic means in distance measures

The MOWAD operator generalizes a wide range of distance measures. But a further generalization is possible by using quasi-arithmetic means [8,12,15]. We will call this generalization the Quasi-OWAD operator. This type of distance operator generalizes a wide range of distance measures that includes the MOWAD operator with all its particular cases. Similar to the MOWAD operator, this type of distance reorders the arguments (the individual distances) in order to adequate the analysis to the interests of the decision maker. Both the MOWAD and the Quasi-OWAD operator are applicable to a wide range of applications. For example, they can be used for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets or interval-valued intuitionistic fuzzy sets. They can be also used in multicriteria decision making problems such as the selection of human resources, financial products, investments, etc. The Quasi-OWAD operator can be defined as follows.

Definition 9. A Quasi-OWAD operator of dimension n is a mapping $QOWAD$:$R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$QOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(D_{(j)}\right)\right) \tag{18}$$

where $D_{(j)}$ is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. g is a continuous strictly monotonic function. As we can see, we adapt the characteristics of the quasi-arithmetic mean to the characteristics of the OWAD operator.

A fundamental aspect of the Quasi-OWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual quasi-arithmetic mean, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process. Note that the Quasi-OWAD operator follows a similar methodology than the Quasi-OWA operator [1-2,7].

If D is a vector corresponding to the ordered arguments $g(D_{(j)})$, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the Quasi-OWAD aggregation can be expressed as:

$$QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = g^{-1}\left(W^T D\right) \tag{19}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Quasi-OWAD (Quasi-DOWAD) and the ascending Quasi-OWAD (Quasi-AOWAD) operators. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The Quasi-DOWAD operator has the same definition than the Quasi-OWAD operator.

Definition 10. A Quasi-AOWAD operator of dimension n is a mapping $QAOWAD{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$QAOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(D_{(j)}\right)\right) \tag{20}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. g is a continuous strictly monotonic function. As we can see, the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$.

The Quasi-OWAD operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent for both the Quasi-DOWAD and the Quasi-AOWAD operator. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = QOWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, where $(e_1, \ldots, e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1, \ldots, d_n)$. It is monotonic because if $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \geq QOWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. It is bounded because the Quasi-OWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\mathrm{Min}\{d_i\} \leq QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \leq \mathrm{Max}\{d_i\}$. It is idempotent because if $d_i = d$, for all d_i, then, $QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the attitudinal character of the Quasi-OWAD operator. Based on the measure developed for the Quasi-OWA operators in [1], it can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{21}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{j-1}{n-1}\right)\right) \tag{22}$$

Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending on if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the Quasi-OWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized quasi-arithmetic distance and the weighted quasi-arithmetic distance.

For the Quasi-DOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $QDOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_1 = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $QOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_n = \text{Min}\{d_i\}$. For the Quasi-AOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $QAOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_n = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $QAOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_1 = \text{Min}\{d_i\}$. As we can see, the maximum and the minimum distances are obtained independently of the value of the parameter λ. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $QOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i.

The normalized quasi-arithmetic distance and the weighted quasi-arithmetic distance are also particular cases of the Quasi-OWAD operator. The normalized quasi-arithmetic distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted quasi-arithmetic distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the Quasi-DOWAD and the Quasi-AOWAD operators obtain these particular cases.

If we analyze the continuous strictly monotonic function g, we obtain another group of particular cases. Among others, we find the special cases found in the parameter λ of the MOWAD operator such as the HOWAD operator, the EOWAD operator, the OWGAD operator and the OWHAD operator.

6 Conclusions

We have introduced different types of distance measures. First, we have reviewed some basic aggregation operators such as the OWA operator, the GOWA operator and the Quasi-OWA operator. Then, we have analysed the Minkowski distance and we have briefly commented some of its particular cases such as the Hamming and the Euclidean distance. We have focussed on the normalized distances. With this initial information, we have introduced the MOWAD operator. We have distinguished between ascending and descending orders. We have considered some of its main properties and some of its special cases such as the HOWAD operator, the EOWAD operator, the OWGAD operator and the OWHAD operator. We have seen that these special cases also provide a parameterized family of aggregation operators with similar properties than the MOWAD operator. Finally, we have generalized the MOWAD operator by using quasi-arithmetic means. We have called this generalization the Quasi-OWAD operator.

References

[1] G. Beliakov, Learning Weights in the Generalized OWA Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 4 (2005) 119-130.

[2] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[4] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 277-291.

[5] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika, No. 483, pp. 147-158, 1974.

[6] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.

[7] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.

[8] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[9] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 689-707.

[10] A. Kaufmann, Introduction to the theory of fuzzy subsets, Academic Press, New York, 1975.

[11] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, Matemática para la economía y la gestión de empresas, Ediciones Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.

[12] A.N. Kolmogoroff, Sur la notion de la moyenne, Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei 12 (1930) 388-391.

[13] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, Proceedings of the 13th Congress of International Association for Fuzzy-Set Management and Economy (SIGEF), Hammamet, Tunisia, 2006, pp. 709-727.

[14] J.M. Merigó, M. Casanovas, Methods for decision making using minimization of regret, Proceedings of the 13th Congress of International Association for Fuzzy-Set Management and Economy (SIGEF), Hammamet, Tunisia, 2006, pp. 747-763.

[15] M. Nagumo, Uber eine klasse der mittelwerte, Japanese Journal of Mathematics 6 (1930) 71-79.
[16] E. Szmidt, J. Kacprzyck, Distances between intuitionistic fuzzy sets, Fuzzy Sets and Systems 114 (2000) 505-518.
[17] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[18] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 18 (1988) 183-190.
[19] R.R. Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (2004) 93-107.
[20] R.R. Yager, J. Kacprzyck, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.10. Artículo de congreso 10. – Publicado en AMSE 2007 Algeria

THE ORDERED WEIGHTED AVERAGING DISTANCE OPERATOR

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente

Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain.
Email: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

Abstract

We introduce the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. It consists in using the ordered weighted averaging (OWA) operator in the Hamming distance. We give a general overview of this type of distance measure studying some of its main properties. We also develop different families of OWAD operators such as the maximum distance, the step-OWAD operator and the OWAD median.

Keywords: Aggregation operators, Hamming distance, OWA operator.

1. Introduction

The Hamming distance is a very useful technique that has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, multicriteria decision making, business decisions, etc. It was introduced by Hamming in [3]. Often, when calculating the Hamming distance, we want an average result of all the individual distances. Then, we have to normalize the Hamming distance. Essentially, we can normalize the Hamming distance with the arithmetic mean obtaining the normalized Hamming distance or with the weighted average obtaining the weighted Hamming distance.

Sometimes, when calculating the normalized distance, it would be interesting to consider the possibility of parameterizing the results from the maximum distance to the minimum distance. A very common technique for the aggregation of the information providing a parameterized family of aggregation operators that ranges from the maximum to the minimum is the ordered weighted averaging (OWA) operator [14]. The OWA operator has been used in a wide range of applications such as [1-2,7,10-22].

The aim of this paper is to introduce a new type of distance measure by normalizing the Hamming distance with the OWA operator. Then, the normalization developed will provide a parameterized family of distance aggregation operators that will include the maximum distance, the minimum distance and the normalized Hamming distance as special cases. We will call this distance measure as the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. Note that it can also be called as the Hamming OWAD (HOWAD) operator. We will study its definition and some of its main properties. We will also study different families of OWAD operators such as the weighted Hamming distance, the step-OWAD operator, the window-OWAD operator, the olympic OWAD average, the E-Z OWAD weighted and the OWAD median.

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the Hamming distance and the OWA operator. In Section 3 we introduce the OWAD operator. In Section 4 we study different families of OWAD operators. Finally, in Section 5 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly describe the normalized Hamming distance and the OWA operator.

2.1. Normalized Hamming distance

The normalized Hamming distance [3] is a useful technique for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets *A* and *B*, it can be defined as follows.

Definition 2. A normalized Hamming distance of dimension n is a mapping d_H:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_H(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | \right) \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets *A* and *B* respectively.

Sometimes, when normalizing the Hamming distance we prefer to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Hamming distance. It can be defined as follows.

Definition 3. A weighted Hamming distance of dimension n is a mapping d_{WH}:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{WH}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i | \right) \tag{3}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets *A* and *B* respectively. Note that the formulations shown above are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [4-5,9].

2.2. OWA operator

The OWA operator [14] provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [2,15]. Note that this distinction in the reordering step is relevant in order to distinguish between situations where the highest argument is the best result and situations where the lowest argument is the best result. The OWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [14]. Different families of OWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector [14,16-22].

3. Ordered weighted averaging distance (OWAD) operator

The OWAD (or Hamming OWAD) operator is an extension of the traditional normalized Hamming distance by using OWA operators. The main difference is the reordering of the arguments of the individual distances according to their values. Then, it is possible to calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, etc., modifying the results according to the interests of the decision maker. For example, this type of distance is useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the highest individual distance because he believes that it will be more significant in the analysis. Different applications of this distance measure have been shown in [7-8]. It can be defined as follows.

Definition 4. An OWAD operator of dimension n is a mapping $OWAD:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j \right) \tag{4}$$

where D_j is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, we adapt the characteristics of the Hamming distance to the characteristics of the OWA operator. Note that we could also denote it as *OWAD(A,B)*.

A fundamental aspect of the OWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual Hamming distance, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If D is a vector corresponding to the ordered arguments D_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWAD aggregation can be expressed as:

$$OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = W^T D \tag{5}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWAD (DOWAD) and the ascending OWAD (AOWAD) operators. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result or in situations where the lowest value is the best result. The DOWAD operator has the same definition than the OWAD operator.

Definition 5. An AOWAD operator of dimension n is a mapping $AOWAD$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$AOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j \right) \tag{6}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$.

The OWAD operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = OWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, where $(e_1, \ldots, e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1, \ldots, d_n)$. It is monotonic because if $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \geq OWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. It is bounded because the OWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{d_i\} \leq OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \leq \text{Max}\{d_i\}$. It is idempotent because if $d_i = d$, for all d_i, then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the OWAD operator such as the attitudinal character, the dispersion and the divergence. Based on the measures developed for the OWA operators in [14,18], they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{7}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right) \tag{8}$$

It can be shown that $\alpha \in$ [0, 1]. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W)$ = 1, for the pessimistic criteria $\alpha(W)$ = 0, and for the average criteria $\alpha(W)$ = 0.5. Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending on if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{9}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{10}$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

Also note that in a similar way as in the OWA operator [10-11], we could also formulate different methods for determining the weights of the OWAD operator by using these measures.

4. Families of OWAD operators

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the OWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance and the weighted Hamming distance.

For the DOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Min}\{d_i\}$. For the AOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $AOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $AOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Min}\{d_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i. We will call this special type as step-OWAD operator.

The normalized Hamming distance and the weighted Hamming distance are also particular cases of the OWAD operator. The normalized Hamming distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Hamming distance is obtained when $j = i$, for all i

and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DOWAD and the AOWAD operators obtain these particular cases.

Other families of aggregation operators could be obtained by using a different manifestation in the weighting vector. For example, the Hurwicz OWAD criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$, then, $OWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \alpha$ Max$\{d_i\}$ + $(1 - \alpha)$ Min$\{d_i\}$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz OWAD criteria becomes the maximum distance and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum distance.

When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-OWAD operator that it is based on the window-OWA operator [16]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-OWAD is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, then, the window-OWAD becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-OWAD is transformed in the average criteria.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic OWAD average that it is based on the olympic average [19]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic OWAD average is transformed in the OWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-OWAD is transformed in the olympic OWAD average.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z OWAD weights that it is based on the E-Z OWA weights [20]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

We note that the median and the weighted median can also be used as OWAD operators. For the OWAD median, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument a_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest a_i. For the weighted OWAD median, we follow a different procedure than [17]. We select the argument that has the kth largest a_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Other families of OWAD operators that could be considered are the centered OWAD operator, the push up allocation, the push down allocation, the uniform allocation, the median allocation, the step-OWAD allocation and the olympic OWAD allocation.

5. Conclusions

We have introduced the OWAD operator. First we have reviewed some basic concepts such as the OWA operator and the normalized Hamming distance. Then, we have developed the OWAD operator. We have defined it and we have studied some of its main properties. Finally, we have given different examples of OWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the step-OWAD operator, the window-OWAD operator and the OWAD median.

References

[1] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[2] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3* (1995) 236-240.

[3] R.W. Hamming, Error-detecting and error-correcting codes, *Bell System Technical Journal 29* (1950) 147-160.

[4] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.

[5] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Ediciones Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.

[6] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Proceedings of the 13th Congress of International Association for Fuzzy-Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp. 709-727.

[7] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006, CD-ROM.

[8] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006, pp. 719-723.

[9] E. Szmidt, J. Kacprzyck, Distances between intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems 114* (2000) 505-518.

[10] Y.M. Wang, C. Parkan, A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights, *Information Sciences 175* (2005) 20-29.

[11] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, *International Journal of Intelligent Systems 20* (2005) 843-865.

[12] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Uncertain OWA Operator, *International Journal of Intelligent Systems 17* (2002) 569-575.

[13] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, *International Journal of Intelligent Systems 18* (2003) 953-969.

[14] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18* (1988) 183-190.

[15] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, *Theory and Decision 33* (1992) 41-69.

[16] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems 59* (1993) 125-148.

[17] R.R. Yager, On weighted median aggregation, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2* (1994) 101-113.

[18] R.R. Yager, Heavy OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making 1* (2002) 379-397.

[19] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, *International Journal of Approximate Reasoning 36* (2004) 109-128.

[20] R.R. Yager, An extension of the naive Bayesian classifier, *Information Sciences 176* (2006) 577-588.

[21] R.R. Yager, Centered OWA operators, *Soft Computing 11* (2007) 631-639.

[22] R.R. Yager, J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.11. Artículo de congreso 11. – Publicado en AMSE 2007 Algeria

ON THE USE OF THE OWA OPERATOR IN THE EUCLIDEAN DISTANCE

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente

Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain.
Email: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

Abstract

We introduce the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator. Basically, it consists in using the ordered weighted averaging (OWA) operator in the Euclidean distance or the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator in the Hamming distance. We give a general overview of this type of distance measure studying some of its main properties. We also develop different families of EOWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the window-EOWAD operator and the EOWAD median.

Keywords: Aggregation operators, Euclidean distance, OWA operator.

1. Introduction

The Euclidean distance is a very useful technique that has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. Often, we prefer to use the normalized Euclidean distance because we want an average result of all the individual distances. This type of distance is also known as weighted Euclidean distance when we prefer to give different degrees of importance to the individual distances instead of giving them the same importance.

Sometimes, when calculating the normalized Euclidean distance, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for the aggregation of the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in [14]. The OWA operator is an aggregation operator that includes the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It has been used in a wide range of applications [1-2,5-10,12-23].

In this paper we suggest a new type of distance measure, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator. It consists in normalizing the Euclidean distance with the OWA operator. Then, it is possible to develop a new type of distance measure that includes the maximum distance, the minimum distance and the normalized Euclidean distance as special cases. We will study the basic definitions and some of its main properties such as the measures for characterizing the weighting vector and the distinction between descending and ascending orders. We will also study different families of EOWAD operators such as the step-EOWAD operator, the EOWAD median, the window-EOWAD operator, the olympic EOWAD average and the E-Z EOWAD weights.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the OWA operator, the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator and the Euclidean distance. Section 3 introduces the EOWAD operator. Section 4 analyzes different families of EOWAD operators and Section 5 ends the paper with the conclusions.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly describe the OWA operator, the OWQA operator and the normalized Hamming distance.

2.1. OWA operator

The OWA operator was introduced by Yager in [14] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

The OWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [14]. Different families of OWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector [2,16-22]. From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [2,5,15].

2.2. OWQA operator

The OWQA operator [20] is an extension of the OWA operator that uses quadratic means. It provides another parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the quadratic mean as special cases. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWQA operator of dimension n is a mapping $OWQA$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWQA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

The OWQA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that it is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By using a different manifestation in the weighting vector, we are able to obtain different families of OWQA operators such as the weighted quadratic average, the step-OWQA operator, the window-OWQA operator, the OWQA median, the olympic OWQA average, the E-Z OWQA weights and the centered OWQA operator. From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWQA (DOWQA) operator and the ascending OWQA (AOWQA) operator.

2.3. Normalized Euclidean distance

The normalized Euclidean distance is a distance measure used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 3. A normalized Euclidean distance of dimension n is a mapping d_E:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_E(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |^2 \right)^{1/2} \quad (3)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the Euclidean distance it is better to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Euclidean distance. It can be defined as follows.

Definition 4. A weighted Euclidean distance of dimension n is a mapping d_{WE}:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{WE}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i |^2 \right)^{1/2} \quad (4)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively. Note that Definitions 3 and 4 are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [3-4,11].

3. Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator

The EOWAD operator is an extension of the traditional normalized Euclidean distance by using OWA operators. The main difference is that in this case, we reorder the arguments of the individual distances according to their values. Then, it is possible to calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, two intuitionistic fuzzy sets, etc., parameterizing the results according to the attitudinal character of the decision maker. For example, this type of distance is useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the lower individual distances because he believes that they will be more significant in the analysis. Note that it can be constructed by mixing the OWA operator with the Euclidean distance or the OWQA operator with the Hamming distance. Also note that the EOWAD operator can be obtained as a particular case of the Minkowski OWAD (MOWAD) operator [10]. It can be defined as follows.

Definition 5. An EOWAD operator of dimension n is a mapping $EOWAD{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1. Then, the distance between two sets A and B is:

$$EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} \tag{5}$$

where D_j is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, we adapt the characteristics of the Euclidean distance to the characteristics of the OWA operator. Note that we could also denote it as *EOWAD(A,B)*.

A fundamental aspect of the EOWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual Euclidean distance, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If D is a vector corresponding to the ordered arguments D_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the EOWAD aggregation can be expressed as:

$$EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = W^T D \tag{6}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending EOWAD (DEOWAD) and the ascending EOWAD (AEOWAD) operators. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result or in situations where the lowest value is the best result. The DEOWAD operator has the same definition than the EOWAD operator.

Definition 6. An AEOWAD operator of dimension n is a mapping $AEOWAD{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$AEOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2\right)^{1/2} \tag{7}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$.

The EOWAD operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that it accomplishes the following properties:

1. *Commutative*: Any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = EOWAD(e_1, e_2,\ldots, e_n)$, where $(e_1,\ldots,e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1,\ldots,d_n)$.
2. *Monotonic*: If $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) \geq EOWAD(e_1, e_2,\ldots, e_n)$.
3. *Bounded*: The EOWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{d_i\} \leq EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) \leq \text{Max}\{d_i\}$.
4. *Idempotent*: If $d_i = d$, for all d_i, then, $EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the EOWAD operator such as the attitudinal character, the dispersion and the divergence. Based on the measures developed for the OWA and the GOWA operator in [14,18,20], they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^2\right)^{1/2} \tag{8}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1}\right)^2\right)^{1/2} \tag{9}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. Using the same methodology as in [14], it can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{10}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{11}$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

Also note that in a similar way as in the OWA operator [12], we could also formulate different methods for determining the weights of the EOWAD operator by using the above measures.

4. Families of EOWAD operators

By using a different manifestation of the weighting vector in the EOWAD operator, we are able to obtain different types of distance aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance and the weighted Euclidean distance.

For the DEOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Min}\{d_i\}$. For the AEOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $AEOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $AEOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Min}\{d_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i. We will call this special type as step-EOWAD operator.

The normalized Euclidean distance and the weighted Euclidean distance are also particular cases of the EOWAD operator. The normalized Euclidean distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Euclidean distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DEOWAD and the AEOWAD operators obtain these particular cases.

Other families of aggregation operators could be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. For example, the Hurwicz EOWAD criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$, then, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \alpha\, \text{Max}\{d_i\} + (1 - \alpha)\, \text{Min}\{d_i\}$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz EOWAD criteria becomes the maximum distance and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum distance.

Note that the median and the weighted median can also be used as EOWAD operators. For the EOWAD median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument d_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest d_i. For the weighted EOWAD median, we use a different method than [17]. We select the argument that has the kth largest d_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-EOWAD operator that it is based on the window-OWA operator [16]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-EOWAD is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, then, the window-EOWAD becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-EOWAD is transformed in the average criteria.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic EOWAD average that it is based on the olympic average [19]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic EOWAD average is transformed in the EOWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-EOWAD is transformed in the olympic EOWAD average.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z EOWAD weights that it is based on the E-Z OWA weights [21]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n, and in the second class we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$.

Other families of EOWAD operators that could be considered are the centered EOWAD operator, the push up allocation, the push down allocation, the uniform allocation, the median allocation, the step-EOWAD allocation and the olympic EOWAD allocation.

5. Conclusions

We have developed the EOWAD operator. First we have reviewed some basic concepts such as the OWA operator, the OWQA operator and the normalized Euclidean distance. Then, we have developed the EOWAD operator. We have defined it and we have studied some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders and the measures for characterizing the weighting vector. Finally, we have given different examples of EOWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance, the weighted Euclidean distance, the step-EOWAD operator, the EOWAD median, the window-EOWAD operator, the olympic EOWAD average and the E-Z EOWAD weights.

References

[1] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[2] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3* (1995) 236-240.

[3] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.

[4] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Ediciones Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.

[5] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, *Proceedings of the 13th Congress of International Association for Fuzzy-Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp. 709-727.

[6] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006, CD-ROM.
[7] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006, pp. 719-723.
[8] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWG operators in the selection of financial products, *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006, pp. 725-728.
[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *5th EUSFLAT Conference*, Ostrava, Czech Republic, 2007 (submitted).
[10] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The Minkowski ordered weighted averaging distance operator, *5th EUSFLAT Conference*, Ostrava, Czech Republic, 2007 (submitted).
[11] E. Szmidt, J. Kacprzyck, Distances between intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets and Systems 114* (2000) 505-518.
[12] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, *International Journal of Intelligent Systems 20* (2005) 843-865.
[13] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, *International Journal of Intelligent Systems 18* (2003) 953-969.
[14] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18* (1988) 183-190.
[15] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, *Theory and Decision 33* (1992) 41-69.
[16] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems 59* (1993) 125-148.
[17] R.R. Yager, On weighted median aggregation, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2* (1994) 101-113.
[18] R.R. Yager, Heavy OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making 1* (2002) 379-397.
[19] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, *International Journal of Approximate Reasoning 36* (2004) 109-128.
[20] R.R. Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making 3* (2004) 93-107.
[21] R.R. Yager, An extension of the naive Bayesian classifier, *Information Sciences 176* (2006) 577-588.
[22] R.R. Yager, Centered OWA operators, *Soft Computing 11* (2007) 631-639.
[23] R.R. Yager, J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.12. Artículo de congreso 12. – Publicado en AMSE 2007 Algeria

GEOMETRIC OPERATORS IN THE SELECTION OF HUMAN RESOURCES

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente

Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain.
Email: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

Abstract

We develop three new methods that use the ordered weighted geometric (OWG) operator in different indexes used for the selection of human resources. The objective of these new models is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select human resources according to his attitude. In order to develop these models, first a short revision of the OWG operator is developed. Second, we briefly explain the general process for the selection of human resources. Then, we develop the three new indexes. They will use the OWG operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. Finally, we give an illustrative example about the process to follow in these new methods.

Keywords: OWG operators, human resources, Hamming distance, adequacy coefficient, index of maximum and minimum level.

1. Introduction

The selection of the more adequate human resources for the company represents a fundamental problem for its good development. With the large variety of alternatives existing in the market, the enterprise needs to know which is the most appropriate person according to their interests. In order to solve this problem, the company has to elaborate a selection process. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus on the methods developed in [1-3] about selection of human resources, the methods developed in [4-9] about selection of financial products and the methods developed in [10-11] about selection of players in sports.

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results according to the interests of the decision maker. This problem can become important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. One common method for aggregating the information considering the decision attitude of the decision maker is the ordered weighted geometric (OWG) operator introduced in [12]. Since its appearance, the OWG operator has been studied by different authors such as [13-15].

Our objective in this paper will consist in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of human resources. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the OWG operator because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWG operator. We will introduce in the selection of human resources, the ordered weighted geometric distance (OWGD) operator, the ordered weighted geometric adequacy coefficient (OWGAC) and the ordered weighted geometric index of maximum and minimum level (OWGIMAM).

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the OWG operator. Section 3 develops the process to follow when using the OWG operator in the selection of human resources. Section 4 gives an illustrative example of the suggested methodology and in Section 5 we finish with the main conclusions found in the paper.

2. OWG Operator

The OWG operator was introduced in [12] and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator [16-18]. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by [13].

Definition 1. An OWG operator of dimension n is a mapping $OWG{:}{R^{+}}^{n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWG(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{wj} \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in descending order, due to the large number of different existing cases, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators. The DOWG operator has the same definition than the OWG operator.

Definition 2. An AOWG operator of dimension n is a mapping $AOWG{:}{R^{+}}^{n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$AOWG(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{wj} \tag{2}$$

where c_j is the jth largest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

As it is seen in [12-13], the OWG operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$ for all i, then, OWG($a_1, \ldots, a_n$) $\geq$

OWG($d_1,\ldots, d_n$). It is bounded because Min{a_i} $\leq OWG(a_1,\ldots, a_n) \leq$ Max{a_i}. It is idempotent because $OWG(a_1,\ldots, a_n) = a$, if $a_i = a$, for all i.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the geometric mean and the weighted geometric mean [12-13]. For example, with the DOWG operator, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. With the AOWG operator, the maximum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The minimum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The geometric mean is found in both cases when $w_j = 1/n$ for all j and the weighted geometric mean when the ordered position of i is the same than the ordered position of j for all i and j. Other examples of aggregations with OWG operators can be seen in [12-13].

3. Selection of human resources with the OWG Operators

3.1. Introduction

The motivation for using the OWG operator in the selection of human resources appears because sometimes, the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Then, due to the fact that the traditional methods in the selection of human resources [1-3] are neutral against the attitude of the decision maker, introducing the OWG operator in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but as it is explained for the OWA operator [7-9], the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflect this change in the evaluation phase. This can be useful in a lot of situations such as in situations where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more prudent decision than in normal cases. Obviously, this increase in the prudence can affect our decision doing that we select a different worker than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of human resources with the OWG operator, is similar to the process developed in [1-3,10-11] for human resources and in [4-9] for financial products, with the difference that the instruments used will include the OWG operator in the selection process. Then, the 5 steps to follow will be:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting workers for the company. That is: $C = \{C_1, C_2,\ldots C_i,\ldots, C_n\}$.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal worker. That is:

$$P = \begin{array}{cccccc} C_1 & C_2 & \ldots & C_i & \ldots & C_n \\ \hline \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_i & \ldots & \mu_n \end{array}$$

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different workers considered. That is:

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different workers considered, and determination of the level of removal using the OWG operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

In *Step 4*, the objective is to express numerically the removal between the ideal worker and the different workers considered. For this, it can be used the traditional selection indexes [1-11]. In this paper, the difference will be that they will be mixed with the OWG operator. Then, with this operator we will be able to provide a parameterized family of aggregation operators in the selection indexes such as the maximum, the minimum, the geometric mean and the weighted geometric mean. In the following, it will be shown how to use the OWG operator in the main selection indexes.

3.2. Using the OWGD Operator in the selection of human resources

The ordered weighted geometric distance (OWGD) operator consists in combining the OWG operator with the normalized Hamming distance. It provides a parameterized family of distance operators that include the maximum distance, the minimum distance, the geometric normalized Hamming distance and the weighted geometric Hamming distance. It can be defined as follows.

Definition 4. An OWGD operator of dimension n, is a mapping $OWGD{:}R^{+^n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGD(P,P_k) = \prod_{j=1}^{n} D_j^{\,w_j} \tag{3}$$

where D_j represents the jth largest of the $|\mu_j - \mu_j^{(k)}|$, and $k = 1,2,\ldots,m$. Note that in distances, the best result is usually the smallest distance. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$ for all j.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the descending OWGD (DOWGD) operator and the ascending OWGD (AOWGD) operator. The DOWGD operator has the same definition than the OWGD operator. The AOWGD operator also has the same formulation with the difference that the reordering of the D_j is ascendant. Note that the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGD operator. Also note that this operator is commutative, monotonic, idempotent and bounded.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, with the DOWGD operator the maximum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The geometric normalized Hamming distance is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted geometric Hamming distance is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

3.3. Using the OWGAC Operator in the selection of human resources

The ordered weighted geometric adequacy coefficient (OWGAC) is an operator that uses in the same aggregation the OWG operator and the adequacy coefficient. It also provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum, the normalized adequacy coefficient and the weighted adequacy coefficient. It can be defined as follows.

Definition 5. An OWGAC operator of dimension n, is a mapping $OWGAC{:}R^{+^n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGAC(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{\,w_j} \tag{4}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_j + \mu_j^{(k)})]$, and k =1,2,…,m. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the descending OWGAC (DOWGAC) operator and the ascending OWGAC (AOWGAC) operator. The DOWGAC operator has the same definition than the OWGAC operator. The AOWGAC operator also has the same formulation with the difference that the reordering of the D_j is ascendant. Then, the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGAC operator. Note that the OWGAC operator also accomplishes the properties of monotonicity, commutativity, boundedness and idempotency.

Different types of aggregation operators can be obtained by choosing a different manifestation of the weighting vector. For example, the maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The geometric normalized adequacy coefficient (GAC) is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted geometric adequacy coefficient (WGAC) is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Analogously to the OWGAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWGAC because $Q(P_j \rightarrow P) = 1 - K(P_j \rightarrow P)$. Note that this index has already been studied for the selection of financial products in [8]. We will call it the ordered weighted geometric dual adequacy coefficient (OWGDAC). It can be defined as follows.

Definition 6. An OWGDAC operator of dimension n, is a mapping $OWGDAC:R^{+^n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGDAC(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{w_j} \tag{5}$$

where Q_j represents the jth largest of the $[0 \vee (\mu_j - \mu_j^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWGDAC (DOWGDAC) and the ascending OWGDAC (AOWGDAC) operator. The DOWGDAC has the same definition than the OWGDAC. The AOWGDAC has the same formulation but the reordering is different. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGDAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGDAC operator. Note that the OWGDAC operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent.

It is also possible to obtain different families of aggregation operators with the OWGDAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the geometric normalized dual adequacy coefficient (GDAC) and the weighted geometric dual adequacy coefficient (WGDAC). Note that the maximum is obtained in the same form than the minimum of the OWGAC and the minimum in the same form than the maximum of the OWGAC. The GAC is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WGAC is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in this case we could also use the same policy about ties in the final result as it has been explained for the OWGAC operator.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources. As it has been explained in [6], the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new methods suggested in this paper, we also find the unification point when the OWGD and the OWGAC accomplish the theorems explained in [6]. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point [6].

3.4. Using the OWGIMAM Operator in the selection of human resources

In this subsection we study the use of the OWG operator in the index of maximum and minimum level. We will call this operator as the ordered weighted geometric index of maximum and minimum level (OWGIMAM). This operator also provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum, the normalized index of maximum and minimum level and the weighted index of maximum and minimum level. It can be defined as follows.

Definition 7. An OWGIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWGIMAM:R^{+^n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGIMAM(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} S_j^{w_j} \qquad (6)$$

where S_j represents the jth largest of all the $|\mu_j - \mu_j^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_j - \mu_j^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$, for all j, as it gives inconsistent results.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the descending OWGIMAM (DOWGIMAM) operator and the ascending OWGIMAM (AOWGIMAM) operator. The DOWGIMAM operator has the same definition than the OWGIMAM operator. The AOWGIMAM operator also has the same formulation with the difference that the reordering of the D_j is ascendant. Then, the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGIMAM operator. Note that the OWGIMAM operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The geometric normalized index of maximum and minimum level (GIMAM) is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted geometric index of maximum and minimum level (WGIMAM) is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

In this case, we could also analyse the unification point. The unification implies that the OWGIMAM operator becomes the OWGD operator as it has been explained in [6] for the index of maximum and minimum level. The conditions to enter in a situation of unification point follow the same policy as the basic cases explained in [6]. Note that in this case we also have to distinguish between total unification point and partial unification point.

7. Illustrative example

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting workers for the company.

Assume that a company has to select a worker for a vacant and it has 3 candidates W_1, W_2, W_3 with different characteristics. It is considered for each characteristic a property.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic.

It is defined the fuzzy subset of ideals for the company as:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
W* =	0,9	0,83	0,66	0,66	0,33

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different workers considered.

For each of these characteristics, it is found the following information:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
W_1 =	0,8	0,7	0,33	1	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
W_2 =	0,81	1	0,6	0,33	0,3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
W_3 =	1	0,66	1	1	0,2

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different workers considered, and determination of the level of removal using the OWG operators. We will consider the geometric average or mean (GA), the weighted geometric average (WGA), the OWG operator and the AOWG operator. We assume that the weighting vector is W = (0'1, 0'1, 0'2, 0'3, 0'3), excepting for the geometric mean where all the weights are 0.2.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each worker. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using equation (4) and considering the type of aggregation we are developing.

	GAD	***WGAD***	***OWGD***	***AOWGD***
$\boldsymbol{W_1}$	0.250	0.328	0.187	0.328
$\boldsymbol{W_2}$	0.098	0.093	0.069	0.165
$\boldsymbol{W_3}$	0.191	0.210	0.153	0.233

In this case, our decision will consist in choose the candidate with the smallest distance. Then, we will select W_2 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal worker. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered using equation (5).

	GAC	***WGAC***	***OWGAC***	***AOWGAC***
$\boldsymbol{W_1}$	0.878	0.900	0.829	0.927
$\boldsymbol{W_2}$	0.889	0.859	0.845	0.931
$\boldsymbol{W_3}$	0.936	0.941	0.906	0.967

The decision will consist in choose the worker with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal worker. Then, we will select W_3 because it gives us the highest result for all the cases.

Finally, if we use the index of maximum and minimum level in the selection process as a combination of the normalized Hamming distance and the normalized adequacy coefficient, we will get the following. In this example we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using equation (6). Here, we note that in the reordering phase, it will be only considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained by the adequacy coefficient or by the Hamming distance.

	GIMAM	***WGIMAM***	***OWGIMAM***	***AOWGIMAM***
W_1	0.250	0.332	0.187	0.328
W_2	0.139	0.112	0.139	0.165
W_3	0.416	0.310	0.385	0.233

Then, our decision will consist in select W_2 because it is the worker with the smallest removal to the ideal.

8. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of human resources. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have suggested the possibility of change this neutrality with the introduction of the OWG operator in the selection process. As we have seen, the OWG operator permits under estimate or over estimate the selection process, which has allowed us to manipulate the initial neutrality. With this information, we have developed three new instruments for the selection of human resources, consisting in combine the old selection indexes with the OWG operator. Then, we have obtained three new methods that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of human resources. Moreover, these methods have generalized a wide range of aggregation operators in the selection process such as the geometric mean or the weighted geometric mean.

This work represents an extension about the possibility of combining the OWG operator with different selection indexes. In this paper, we have focussed in the selection of human resources but it is important to note that these new methods can also be applied to other selection processes as the selection of assets, investments, etc. In future research, we will analyse how these methods can be applied to other selection processes and combined with other selection indexes.

References

[1] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1986), "*Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*", Ed. Milladoiro.

[2] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1987), “*Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*”, Ed. Hispano-europea.
[3] Gil Aluja, J., (1998), “*The interactive management of human resources in uncertainty”*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
[4] Gil Lafuente, A.M., (1990), “Técnicas de selección de un instrumento financiero”, *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, Spain.
[5] Gil Lafuente, A.M., (2001), “*Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*”, Ariel Economía.
[6] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Economic Review 12* (2007) (Accepted).
[7] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of financial products, *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, 2006, CD-ROM.
[8] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWG operators in the selection of financial products, *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, 2006, pp.725-728.
[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Acquisition of financial products that adapt to different environments, *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation,* Konya, Turkey, 2006, pp.719-723.
[10] Gil Lafuente, J., (2001), “El “índice del máximo y mínimo nivel” en la optimización del fichaje de un deportista”, *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM),* Reggio Calabria, Italy.
[11] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.
[12] Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E., (2000), “The ordered weighted geometric operator: Properties and application”, in: *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems*. Madrid, Spain.
[13] Xu, Z.S., Da, Q.L., (2002), “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators”, *International Journal of Intelligent Systems 17*, 709-716.
[14] Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., (2003), “A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making”, *International Journal of Intelligent Systems 18*, 689-707.
[15] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, in: *Proceedings 13th Congress of the International Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp 709-727.
[16] Yager, R., (1988), “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, 183-190.
[17] Yager, R., Kacprzyck, J., (1997), “*The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
[18] Xu, Z.S. (2005), “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, *International Journal of Intelligent Systems 20*, p.843-865.

14.1.13. Artículo de congreso 13. – Publicado en AEDEM 2007

THE UNCERTAIN GENERALIZED OWA OPERATOR AND ITS APPLICATION IN THE SELECTION OF FINANCIAL STRATEGIES

José M. Merigó Lindahl, jmerigo@ub.edu, University of Barcelona
Montserrat Casanovas Ramón, mcasanovas@ub.edu, University of Barcelona

ABSTRACT

We study different types of aggregation operators used for decision making. We give special attention to the generalized OWA (GOWA) operator which generalizes a wide range of aggregation operators. We introduce the uncertain generalized OWA (UGOWA) operator which represents an extension to the GOWA operator for uncertain situations where the available information is given in the form of interval numbers. We study some of its main properties and some special cases found with it. We also develop a further generalization by using quasi-arithmetic means that we call the Quasi-UOWA operator. The paper ends with an illustrative example where we apply the new approach in the selection of financial strategies.

Keywords: Generalized mean, Uncertain OWA operator, Selection of financial strategies.

1. INTRODUCTION

Different types of aggregation operators are found in the literature for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the maximum, the minimum and the average criteria. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications (Calvo et al, 2002; Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997).

In 2002, Xu and Da developed an extension to the OWA operator called uncertain ordered weighted averaging (UOWA) operator. The main characteristic of this operator is that it uses uncertain information in the aggregation represented by interval numbers. In the last years, the UOWA operator has been studied by different authors (Merigó, 2007; Xu and Da, 2004).

Recently, Yager (2004) has suggested a generalized version of the OWA operator by using the generalized mean. He called this generalization the generalized OWA (GOWA) operator. Then, Yager offered a generalization that included the special cases found in the OWA operator such as the maximum or the minimum and the special cases found in the generalized mean such as the geometric mean or the harmonic mean. Note that this generalization has also been considered in (Karayiannis, 2000; Karayiannis and Randolph-Gips, 2005). Also note that this generalization is different from the one developed by Schaefer and Mitchell (1998). The GOWA operator has been further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005). Then, the result obtained is the Quasi-OWA operator suggested in (Fodor et al, 1995).

In this paper, we introduce the uncertain generalized OWA (UGOWA) operator. It represents an extension to the GOWA operator by using uncertain information. Its main characteristic is that the arguments are interval numbers instead of the usual exact numbers. With this generalization we can obtain a wide range of aggregation operators such as the uncertain generalized mean, the uncertain weighted generalized mean or the UOWA operator. We also develop a decision making problem where we use this model for selecting the most appropriate financial strategy in a company.

In order to do so, first we describe some basic aggregation operators such as the OWA operator, the UOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator. Next, we develop the UGOWA operator studying some of its main properties. We then suggest a further generalization to the UGOWA operator by using quasi-arithmetic means. Finally, we develop an illustrative example where we apply the new approach in a decision making problem about selection of financial strategies.

2. AGGREGATION OPERATORS

In this Section, we will briefly describe the OWA operator, the UOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator.

2.1. OWA OPERATOR

The OWA operator was introduced by Yager in (1988) and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of OWA operators can be obtained by choosing a different manifestation of the weighting vector (Yager, 1988; 1993; 2007).

2.2. UOWA OPERATOR

The UOWA operator was introduced by Xu and Da in (2002) and it represents an extension of the OWA operators. Essentially, its main difference is that it uses interval numbers in the arguments to be aggregated. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the environment is very uncertain and the information is not clear, then, it can only be assessed by using interval numbers. The UOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria among others.

In order to define the UOWA operator, first, we need to consider some basic aspects about the interval numbers. Its origins can be found in the works of Moore (1959; 1966) although there exist other papers in the literature that previously considered some basic aspects such as (Dwyer, 1951; Warmus, 1956). The interval numbers can be expressed in different forms. For example, if we assume a 4-tuple (*a*, *b*, *c*, *d*) we could consider that *a* and *d* represents the maximum and the minimum of the interval number and *b* and *c* the interval with the highest membership. Note that if $b = c$, we get a 3-tuple with only one value with highest membership. For further reading, we recommend for example, (Kaufmann and Gupta, 1985; Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al, 1994). With this information, we can define the UOWA operator as follows.

Definition 2. Let Ω be the set of interval numbers. An UOWA operator of dimension n is a mapping $UOWA{:}\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the *j*th largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

As with the OWA operator, from a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending UOWA (DUOWA) operator and the ascending UOWA (AUOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the *j*th weight of the DUOWA and w^*_{n-j+1} the *j*th weight of the AUOWA operator. The UOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of UOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-UOWA operator, the window-UOWA operator, the UOWA median operator or the centered-UOWA operator (Merigó, 2007).

2.3. GENERALIZED MEAN

The generalized mean (Dujmovic, 1974; Dyckhoff and Pedrycz, 1984) generalizes a wide range of mean aggregations such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean or the quadratic mean. It can be defined as follows.

Definition 3. A generalized mean of dimension n is a mapping GM:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$GM(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that depending on the value of the parameter λ, we obtain different types of means. For example, when $\lambda = \infty$, we obtain the maximum. When $\lambda = 1$, the arithmetic mean. When $\lambda = 0$, the geometric mean. When $\lambda = -1$, the harmonic mean. When $\lambda = 2$, the quadratic mean. When $\lambda = -\infty$, the minimum.

Another type of generalized mean is the case when the weights of the arguments have different values. Then, we obtain the weighted generalized mean. It can be defined as follows.

Definition 4. A weighted generalized mean of dimension n is a mapping WGM:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$WGM(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. In this case, we can also obtain different types of means depending on the value of the parameter λ. For example, when $\lambda = \infty$, we obtain the maximum. When $\lambda = 1$, the weighted mean. When $\lambda = 0$, the weighted geometric mean. When $\lambda = -1$, the weighted harmonic mean. When $\lambda = 2$, the weighted quadratic mean. When $\lambda = -\infty$, the minimum.

2.4. GENERALIZED OWA OPERATOR

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced by Yager in (2004). It generalizes a wide range of aggregation operators that includes the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. It can be defined as follows.

Definition 5. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators can be found in (Yager, 2004; Merigó, 2007).

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator (Yager, 1988), the ordered weighted geometric (OWG) operator (Chiclana et al, 2000; Herrera et al, 2003; Xu and Da, 2002), the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator (Yager, 2004) and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator (Yager, 2004). When $\lambda = 1$, then, with the DGOWA operator, we obtain the usual OWA operator and with the AGOWA operator, we obtain the AOWA operator. When $\lambda = 0$, we obtain the descending OWG (DOWG) operator and the ascending OWG (AOWG) operator. When $\lambda = -1$, we obtain the descending OWHA (DOWHA) operator and the ascending OWHA (AOWHA) operator. When $\lambda = 2$, we obtain the descending OWQA (DOWQA) operator and the ascending OWQA (AOWQA) operator, respectively.

3. UNCERTAIN GENERALIZED OWA OPERATOR

The uncertain generalized OWA (UGOWA) operator is an extension to the GOWA operator that uses uncertain information in the aggregation. The main difference between the UGOWA and the GOWA operator is that the UGOWA operator deals with uncertain information represented by interval numbers while the GOWA operator uses information represented by exact numbers. The reason for using this operator is that sometimes, the uncertain factors that affect our decisions are not clearly known and in order to assess the problem we need to use interval numbers in order to consider the different uncertain results that could happen in the future.

Definition 7. Let Ω be the set of interval numbers. An UGOWA operator of dimension n is a mapping $UGOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, the arguments $\tilde{a}_i$ are interval numbers and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using interval numbers. Then, in some cases, it is not clear which interval number is higher, so we need to establish an additional criteria for reordering the interval numbers. For simplicity, we recommend to follow the procedure commented in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987, Kaufmann et al, 1994). Also note that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights w_j are interval numbers.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending uncertain generalized OWA (DUGOWA) operator and the ascending uncertain generalized OWA (AUGOWA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUGOWA operator. As we can see, the main difference is that in the AUGOWA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the DUGOWA (or UGOWA) they are ordered in a decreasing way.

The UGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent for both the DUGOWA and the AUGOWA operator. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq UGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \ldots, \tilde{u}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = UGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \ldots, \tilde{u}_n)$, where $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \ldots, \tilde{u}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n)$. It is bounded because the UGOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$. It is idempotent because if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the UGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the uncertain generalized mean (UGM) and the uncertain weighted generalized mean (UWGM).

The maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument $\tilde{a}_i$. The UGM is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The UWGM is obtained if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$.

Following a similar methodology as it has been developed in (Yager, 1993; Merigó, 2007), we could study other particular cases of the UGOWA operator such as the UGOWA-median, the window-UGOWA, the olympic-UGOWA, the centered-UGOWA, the S-UGOWA, the maximal entropy UGOWA (MEUGOWA), etc.

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual UOWA operator introduced by Xu and Da (2002), the uncertain OWG (UOWG) operator (Xu and Da, 2004), the uncertain OWHA (UOWHA) operator and the uncertain OWQA (UOWQA) operator.

When $\lambda = 1$, the UGOWA operator becomes the UOWA operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{7}$$

With the DUGOWA operator we obtain the DUOWA operator and with the AUGOWA operator, the AUOWA operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DUGOWA operator has a descending order and the AUGOWA operators an ascending order. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain average (UA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted average (UWA).

When $\lambda = 0$, the UGOWA operator becomes the UOWG operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{8}$$

With the DUGOWA operator we obtain the descending UOWG (DUOWG) operator and with the AUGOWA operator, the ascending UOWG (AUOWG) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain geometric average (UGA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted geometric average (UWGA).

When $\lambda = -1$, we get the UOWHA operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{9}$$

With the DUGOWA operator we obtain the descending UOWHA (DUOWHA) operator and with the AUGOWA operator, the ascending UOWHA (AUOWHA) operator. In both cases, the formulation is the same although the reordering step is different. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain harmonic average (UHA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted harmonic average (UWHA).

When $\lambda = 2$, we get the UOWQA operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{10}$$

With the DUGOWA operator we obtain the descending UOWQA (DUOWQA) operator and with the AUGOWA operator, the ascending UOWQA (AUOWQA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain quadratic average (UQA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted quadratic average (UWQA).

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the UGOWA operator. Using a similar methodology as it was used by Yager (2004) for the GOWA operator we can define the following measure:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

In this case, we could also make a distinction between descending and ascending orders.

4. QUASI-ARITHMETIC MEANS IN THE UNCERTAIN OWA OPERATOR

As it is explained in (Beliakov, 2005), a further generalization to the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means (Hardy et al, 1934; Kolmogoroff, 1930; Nagumo, 1930). Following the same methodology as in (Fodor et al, 1995), we can suggest a similar generalization to the UOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-UOWA operator. Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between ascending and descending orders in the Quasi-UOWA operator. Then, we will get the Quasi-DUOWA and the Quasi-AUOWA operators.

Definition 9. Let Ω be the set of interval numbers. A Quasi-UOWA operator of dimension n is a mapping $QUOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{12}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$ and the arguments $\tilde{a}_i$ are interval numbers. As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the QUOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AQUOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the UGOWA operator, are also included in this generalization.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the Quasi-UOWA operator. Following a similar methodology as it was used by Beliakov (2005), we can formulate the following measure:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{13}$$

In this case, we could also make a distinction between descending and ascending orders.

5. APPLICATION IN THE SELECTION OF FINANCIAL STRATEGIES

In the following, we are going to develop an illustrative example about the use of the new approaches commented above. We will analyze a decision making problem where a company is studying which financial strategy is the most appropriate for them. As the environment is very uncertain the group of experts of the company needs to assess the available information with interval numbers. In this example, we will assume that the available information can be assessed with 3-tuples. We will also analyze the results obtained by using different types of uncertain aggregation operators in order to see that depending on the aggregation operator used the decision will be different. We will consider the maximum, the minimum, the uncertain average (UA), the uncertain geometric average (UGA), the uncertain quadratic average (UQA), the uncertain weighted average (UWA), the UOWA operator, the AUOWA operator, the UOWG operator and the UOWQA operator.

Assume a company is analyzing the financial policy for the next year and they consider 5 possible financial strategies to follow.

1) A_1: Financial strategy 1.
2) A_2: Financial strategy 2.
3) A_3: Financial strategy 3.
4) A_4: Financial strategy 4.
5) A_5: Financial strategy 5.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 6 possible situations for the next year: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in table 1.

Table 1: Payoff matrix.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(30,40,50)	(60,70,80)	(50,60,90)	(20,25,40)	(30,50,60)	(60,70,80)
A_2	(20,30,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(70,80,90)
A_3	(30,40,50)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)	(30,40,50)
A_5	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,70,80)

In this problem, the group of experts considers that the general attitudinal character of the company is given by the following weighting vector: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3).

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. First, we will consider some basic aggregation operators such as the maximum, the minimum, the UA, the UGA and the UQA. The results are shown in table 2.

Table 2: Aggregated results 1.

	Max	*Min*	*UA*	*UGA*	*UQA*
A_1	(60,70,80)	(20,25,40)	(41.6,52.5,66.6)	(38.4,49.4,64.0)	(44.5,54.9,69.0)
A_2	(70,80,90)	(20,30,50)	(41.6,51.6,63.3)	(39.1,49.6,62.2)	(44.1,53.6,64.5)
A_3	(70,80,90)	(30,40,50)	(45,55,65)	(42.2,52.7,63.0)	(47.7,57.3,66.9)
A_4	(60,70,80)	(20,30,40)	(40,50,60)	(37.3,47.9,58.2)	(42.4,51.9,61.6)
A_5	(40,70,80)	(30,40,50)	(40,53.3,63.3)	(39.5,52.5,62.6)	(40.4,54.1,64.0)

As we can see, the decision is different depending on the aggregation used. If we use the UA, the UGA or the UQA, then the optimal financial strategy is A_3. If we use the maximum (or optimistic), then, both A_2 and A_3 are optimal solutions. And if we use the minimum (or pessimistic), then, the optimal financial strategies are A_3 and A_5.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of UGOWA operators such as the UWA, the UOWA, the AUOWA, the UOWG or the UOWQA operator. The results are shown in table 3.

Table 3: Aggregated results 2.

	UWA	*UOWA*	*AUOWA*	*UOWG*	*UOWQA*
A_1	(42,53,66)	(35,45.5,59)	(48,58.5,73)	(32.1,42.3,56.5)	(38.0,48.4,61.5)
A_2	(47,57,68)	(37,47,60)	(47,57,68)	(34.3,44.9,59.1)	(39.6,49.0,60.9)
A_3	(49,59,69)	(39,49,59)	(52,62,72)	(36.8,47.2,57.4)	(41.5,51.0,60.7)
A_4	(37,47,57)	(34,44,54)	(46,56,66)	(31.5,42.0,52.4)	(36.6,46.0,55.6)
A_5	(40,56,66)	(38,50,60)	(41,57,67)	(37.5,49.2,59.3)	(38.4,50.7,60.6)

As we can see, in this case we also get different results depending on the operator used. If we use the UWA, the AUOWA or the UOWQA operator, then, the optimal choice is the financial strategy 3. And if we use the UOWA or the UOWG operator, then, the optimal decision is A_5.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in table 4. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 4: Ordering of the financial strategies.

	Ordering		*Ordering*
Max	$A_2=A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5$	*UWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
Min	$A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$	*UOWA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
UA	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$	*AUOWA*	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
UGA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	*UOWG*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
UQA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4$	*UOWQA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

As we can see, depending on the aggregation used, the ordering of the financial strategies is different.

6. CONCLUSIONS

We have studied different types of aggregation operators. First, we have briefly described some basic operators such as the OWA operator, the UOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator. Then, we have suggested a new type of aggregation operator that we have called UGOWA operator. Basically, it is an extension to the GOWA operator that uses information given in the form of interval numbers. We have briefly studied its main properties, some of the families found in the weighting vector W such as the generalized mean or the weighted generalized mean and some of the special cases found in the parameter λ such as the UOWA operator, the UOWG operator, the UOWHA operator and the UOWQA operator. We then have developed a further generalization to the UGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We have called this generalization Quasi-UOWA operator. Finally, we have developed an illustrative example where we have applied the new approach in the selection of financial strategies.

REFERENCES

[1] G. Beliakov, Learning Weights in the Generalized OWA Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 4 (2005) 119-130.

[2] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[4] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika, No. 483, pp. 147-158, 1974.

[5] P. S. Dwyer, *Linear Computations*, John Wiley, N.Y., 1951.

[6] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.

[7] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.

[8] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Pólya, Inequalities, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[9] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 689-707.

[10] N. Karayiannis, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks 11* (2000) 1093-1105.

[11] N. Karayiannis, M. Randolph-Gips, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Non-Euclidean Norms: Single-Norm Algorithms, *IEEE Transactions on Neural Networks 16* (2005) 423-435.

[12] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
[13] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1990.
[14] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Ed. Foro Científico, 1994.
[15] A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.
[16] A.N. Kolmogoroff, Sur la motion de la moyenne, Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez., 12 (1930) 388-391.
[17] J.M. Merigó, Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
[18] R. E. Moore, Automatic error analysis in digital computation, *Technical Report Space Div. Report LMSD84821*, Lockheed Missiles and Space Co., 1959.
[19] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs N. J., 1966.
[20] M. Nagumo, Uber eine klasse der mittelwerte, Japanese Journal of Mathematics 6 (1930) 71-79.
[21] P.A. Schaefer, H.B. Mitchell, A generalized OWA operator, International Journal of Intelligent Systems 14 (1999) 123-143.
[22] M. Warmus, Approximations and Inequalities in the Calculus of Approximations, Classification of Approximate Numbers, *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.*, 1956, Vol. 9, pp. 241-245.
[23] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Uncertain OWA Operator, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 569-575.
[24] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[25] Z.S. Xu, Q.L. Da, An uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator and its application, Information 7 (2004) 175-182.
[26] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 18 (1988) 183-190.
[27] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, Theory and Decision 33 (1992) 41-69.
[28] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[29] R.R. Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (2004) 93-107.
[30] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[31] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.14. Artículo de congreso 14. – Publicado en AGOP 2007

DECISION MAKING WITH DEMPSTER-SHAFER THEORY USING INDUCED AGGREGATION OPERATORS

José M. Merigó
Department of Business Administration,
University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona
Email: josema_merigo@hotmail.com

Montserrat Casanovas
Department of Business Administration,
University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona
Email: mcasanovas@ub.edu

Abstract

We study the problem of decision making with Dempster-Shafer (D-S) belief structure. We suggest the possibility of aggregating with induced aggregation operators in the D-S framework. We distinguish between ascending and descending orders in the aggregation. Finally, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using different types of aggregation operators.

Keywords: Decision making, Aggregation operators, Dempster-Shafer theory.

1. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence was developed by Dempster [7-8] and by Shafer [14]. Since then, it has been used in an astonishingly wide range of applications [1-2,9,14-18,26,30]. It provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include in the same formulation different information situations such as risk and ignorance. When using the D-S theory in decision making, we need to aggregate the decision information. A very common method for aggregating the information is the ordered weighted averaging (OWA) operator [22]. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications [3-6,9-13,19-32]. It provides a parameterized family of aggregation that includes the maximum, the minimum and the average criteria among others. Recently, Chiclana et al. [4] have developed a geometric version of the OWA operator, the ordered weighted geometric (OWG) operator. The OWG operator has also been studied by different authors such as [12]. Another extension developed about the OWA operator is the induced OWA (IOWA) operator introduced by Yager and Filev [31]. Similarly, [6,21] developed a geometric version of the IOWA operator called induced OWG (IOWG) operator. Since their appearance, they have been studied by different authors. The main characteristic of the induced aggregation operators is that the reordering step is not developed with the values of the arguments as in the OWA operator. In these cases, the reordering step is induced by another mechanism such that the ordered position of the arguments depends upon the values of their associated inducing variables.

A more general formulation for decision making in the face of evidential knowledge was suggested by Yager in [24]. He proposed to use the OWA operator in the aggregation step of the D-S framework. This problem has also been studied latter in

[9,12,26,30]. In this paper we suggest the use of induced aggregation operators in situations of decision making with D-S theory of evidence. The reason for doing this is because there are situations where we prefer to aggregate the variables with an inducing order instead of aggregating with the usual OWA operator. For example, this can be useful when the attitudinal character of the decision maker is very complex or there are some external factors affecting the decision analysis. We also propose the use of different types of orderings in the aggregation of the D-S process depending on the specific situation found.

In order to so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic aggregation operators. Section 3 develops the process to follow when using induced aggregation operators in decision making with D-S belief structure. Section 4 gives an illustrative example of the suggested methods. Finally, Section 5 summarizes the main conclusions found in the paper.

2. AGGREGATION OPERATORS

2.1. OWA OPERATOR

The OWA operator was introduced by Yager in [22] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum among others. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator. The OWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of OWA operators can be obtained by choosing a different manifestation of the weighting vector.

2.2. OWG OPERATOR

The OWG operator was introduced by Chiclana et al. [4] and it also provides a parameterized family of aggregation operators. Among others, the OWG operator includes as special cases the maximum, the minimum and the geometric mean. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWG operator of dimension n is a mapping $OWG{:}{R^+}^n \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWG(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \quad (2)$$

where b_j is the jth largest of the a_i and R^+ is the set of positive real numbers.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descening OWG (DOWG) operator and the ascending OWG (AOWG) operator [20]. The OWG operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation in the weighting vector, we are able to obtain different families of OWG operators [20].

2.3. IOWA OPERATOR

The IOWA operator was suggested by Yager and Filev [31]. Its fundamental characteristic is that the reordering step of the arguments is not developed with their values. In this case, the reordering step is developed with order inducing variables. The IOWA operator also includes the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It can be defined as follows.

Definition 3. An IOWA operator of dimension n is a mapping $IOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (3)$$

where b_j is the a_i value of the IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator [13]. The IOWA operator is monotonic, bounded, idempotent and commutative.

2.4. IOWG OPERATOR

The IOWG operator was introduced in [6,21]. Similar to the IOWA operator, its fundamental characteristic is that the reordering step of the arguments is developed with order inducing variables. In this case, we also find the maximum, the minimum and the geometric mean as special cases. It can be defined as follows.

Definition 4. An IOWG operator of dimension n is a mapping $IOWG$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IOWG(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \quad (4)$$

where b_j is the a_i value of the IOWG pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending IOWG (DIOWG) operator and the Ascending IOWG (AIOWG) operator. The IOWG operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent.

3. DEMPSTER-SHAFER THEORY OF EVIDENCE

3.1. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer theory of evidence was introduced by Dempster [7-8] and by Shafer [14]. This type of formulation provides a unifying framework for representing uncertainty. It includes different forms of information such as the cases of risk and ignorance It can be defined as follows.

Definition 5. A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.
(3) $m(A) = 0, \ \forall A \neq B_j$.

Two significant evidential functions associated with this belief structure are the measures of plausibility and belief. They can be defined as follows.

Definition 6. The plausibility measure Pl is defined as, Pl: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{A \cap B_j \neq \varnothing} m(B_j) \tag{5}$$

Definition 7. The belief measure Bel is defined as Bel: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B_j \subseteq A} m(B_j) \tag{6}$$

Bel(A) represents the exact support to A and Pl(A) represents the possible support to A. With these two measures we can form the interval of support to A as [Bel(A),Pl(A)]. This interval can be seen as the lower and upper bounds of the probability to which A is supported such that Bel(A) ≤ Prob(A) ≤ Pl(A). From this we see that Pl(A) ≥ Bel(A) for all A. Another interesting issue about these two measures is that they are connected by Bel(A) = 1 – Pl($\bar{A}$) or Pl(A) = 1 – Bel($\bar{A}$), where $\bar{A}$ is the complement of A.

3.2. DECISION MAKING WITH D-S BELIEF STRUCTURE USING IOWA OPERATORS

A new method for decision making with D-S belief structures is possible by using the IOWA operator in the aggregation step. Previously, Yager developed a method that used the OWA operator in the aggregation step of the D-S process. The motivation for using the IOWA operator in these cases is that sometimes, the decision maker may have an attitudinal character that is different from the values of the arguments. Then, in order to aggregate the arguments, he prefers to use another mechanism in the reordering step which is in accordance with his interests. Other similar explanations for using the IOWA operator in these situations are possible, but the main idea is the possibility of using different reordering methods in the aggregation.

The procedure to follow for taking decisions with the IOWA operator in D-S theory of evidence is similar to the procedure used with OWA operators with the difference that now we use the IOWA operators in the aggregation step. The procedure can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. C_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.

Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker by determining the values u_i. Note that in this case the measure $\alpha(W)$ is different from and it depends upon the mechanism used in the reordering step. Also note that in these cases the highest argument is not always the best or worst result.

Step 4: Calculate the collection of weights, w, to be used in the IOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker.

Step 5: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{C_{ij} \mid S_j \in B_k\}$.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik} = IOWA(M_{ik}), using Eq. (3), for all the values of i and k.

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{7}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal. Note that in a situation of costs or similar, we should select the alternative with the lowest C_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish in the IOWA aggregation between ascending or descending orders. The motivation for making this distinction is the reordering of the inducing variables. Sometimes, in the inducing variables, the highest value is the first result in the reordering step but in other situations the lowest value can be the first result. It depends on the mechanism used for the reordering of the arguments. Note that this distinction can also be done when the arguments are ordered with linguistic inducing variables. The procedure to follow if we use the AIOWA operator in the aggregation step is the same than the procedure used for the IOWA or DIOWA operator with the following differences:

In *Step 3*, when calculating the inducing variables we should consider that in these cases, the lowest inducing variable is the first result in the reordering of the arguments.

In *Step 4*, when calculating the collection of weights, we should consider that now the reordering is different in order to correctly associate each weight to its corresponding position.

In *Step 6*, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AIOWA(M_{ik}), that is, the ascending version of the IOWA operator, for all the values of i and k.

If there is a tie in the reordering step of the DIOWA or the AIOWA operator, we should follow, for example, the policy explained in [31]. Note that the reordering can also be done with words or with lexicographic orders that combine in the aggregation words with numbers.

3.3. DECISION MAKING WITH D-S BELIEF STRUCTURE USING IOWG OPERATORS

Another alternative for decision making with D-S theory is the use of IOWG operators in the aggregation step. The reason for using IOWG operators appears because there are situations where it is better to reorder the arguments with a different mechanism than their values. In this mechanism, we introduce an inducing variable for each argument from where we develop the reordering step. Then, it is possible to aggregate with a different method than the one used with the OWG operator.

The procedure to follow when taking decisions with the IOWG operator is very similar to the previous methods commented when using IOWA operators in the D-S belief structure. The difference is that in this case, the arguments are aggregated with the IOWG operator. Assuming the same variables as with the IOWA operator explained in Section 3.2, we could summarize the procedure with the following changes:

In *Step 3*, when calculating the inducing variables we should consider that in these cases, the attitudinal character is adapted to the characteristics of the IOWG operator.

In *Step 4*, when calculating the collection of weights, we should consider that now we such use a method adapted to the characteristics of the geometric aggregation operators.

In *Step 6*, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = IOWG(M_{ik}), using Eq. (4), for all the values of i and k.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DIOWG and the AIOWG operator. As the definition of the DIOWG operator is the same than the IOWG operator, its use in the D-S belief structure is also the same. The reason for using AIOWG operators is because sometimes it is better to use an ascending order in the inducing variable. The procedure to follow if we use the AIOWG operator in the aggregation step is the same than the procedure used for the IOWG operator with the following differences:

In *Step 3*, when calculating the inducing variables we should consider that in the AIOWG operator, the lowest inducing variable is the first result in the reordering of the arguments.

In *Step 4*, when calculating the collection of weights, we should consider that now the reordering is different and we have to give to each position its corresponding weight.

In *Step 6*, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AIOWG(M_{ik}), that is, the ascending version of the IOWG operator, for all the values of i and k.

If there is a tie in the reordering step of the DIOWG or the AIOWG operator, we should also follow, for example, the policy explained in [31]. Note that it is possible to use words in the inducing variables.

4. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example about the use of the methodologies commented above. We will analyze a decision making problem with D-S belief structure. We will use different types of aggregation operators to solve the problem such as the OWA operator, the OWG operator, the IOWA operator and the IOWG operator. Note that we assume for all the cases a situation where the highest value is the best result.

Step 1: Assume a decision maker has four possible investments and he wants to select the alternative that better adapts to his interests. The possible results depending on the state of nature that happens in the future are represented in Table 1. Note that the results are incomes.

Table 1: Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	20	40	50	80	50
A_2	30	30	60	70	40
A_3	50	60	20	40	70
A_4	40	50	30	60	60

Step 2: Assume the following belief function m about the states of nature.

Focal element
$B_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4, S_5\} = 0.4$
$B_2 = \{S_1, S_3, S_5\} = 0.3$
$B_3 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3$

Step 3: Assume the following attitudinal character of the decision maker when using induced aggregation operators.

Table 2: Inducing variables

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	25	16	24	18	14
A_2	18	34	22	12	26
A_3	13	21	28	22	26
A_4	20	24	14	31	18

Step 4: Assume we have used one of the existing methods for determining the weights and we have obtained the following results for different number of arguments.

Weighting vector
W_3 = (0.4, 0.4, 0.2)
W_4 = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2)
W_5 = (0.3, 0.2, 0.2, 0.2, 0.1)

Step 5: Calculate the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k.

A_1: $M_{11} = \langle 20, 40, 50, 80, 50\rangle$; $M_{12} = \langle 20, 50, 50\rangle$; $M_{13} = \langle 40, 50, 80\rangle$.
A_2: $M_{21} = \langle 30, 30, 60, 70, 40\rangle$; $M_{22} = \langle 30, 60, 40\rangle$; $M_{23} = \langle 30, 60, 70\rangle$.
A_3: $M_{31} = \langle 50, 60, 20, 40, 70\rangle$; $M_{32} = \langle 50, 20, 70\rangle$; $M_{33} = \langle 60, 20, 40\rangle$.
A_4: $M_{41} = \langle 40, 50, 30, 60, 60\rangle$; $M_{42} = \langle 40, 30, 60\rangle$; $M_{43} = \langle 50, 30, 60\rangle$.

From the sixth step, we will distinguish between four different types of aggregation operators. We will consider the OWA operator, the OWG operator, the IOWA operator and the IOWG operator.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik}, using Eq. (1) for the OWA operator, using Eq. (2) for the OWG operator, using Eq. (3) for the IOWA operator and using Eq. (4) for the IOWG operator.

Table 3: Aggregated payoff

	OWA	***OWG***	***IOWA***	***IOWG***
V_{11}	54	50.23	45	39.90
V_{12}	44	41.62	38	34.65
V_{13}	60	57.70	60	57.70
V_{21}	50	47.06	42	39.72
V_{22}	46	44.41	46	44.41
V_{23}	58	55.55	50	46.89
V_{31}	53	50.05	45	40.29
V_{32}	52	47.62	46	39.65
V_{33}	44	40.95	36	32.87
V_{41}	51	49.77	51	49.77
V_{42}	46	44.41	46	44.41
V_{43}	50	48.55	50	48.55

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. (7).

Table 4: Generalized expected value

	OWA	***OWG***	***IOWA***	***IOWG***
$\boldsymbol{A_1}$	52.8	49.88	47.4	43.66
$\boldsymbol{A_2}$	51.2	48.81	45.6	43.27
$\boldsymbol{A_3}$	50	46.59	42.6	37.87
$\boldsymbol{A_4}$	49.2	47.79	49.2	47.79

Step 8: Select the best alternative for each aggregation operator. With the OWA and the OWG operators, we will select alternative A_1. And with the IOWA and the IOWG operators, we will select alternative A_4.

5. CONCLUSIONS

In this paper we have suggested the use of induced aggregation operators in decision making with D-S belief structure. First, we have briefly described some basic aggregation operators. Next we have studied the D-S belief structure and its application in decision making. We then have developed the process to follow when using induced aggregation operators in D-S theory of evidence. Finally, we have shown an illustrative example where we have seen the results obtained with the OWA, the OWG, the IOWA and the IOWG operators in decision making with D-S belief structure.

References

[1] M. Beynon, B. Curry, P. Morgan, The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling, Omega 28 (2000) 37-50.

[2] M. Beynon, D. Cosker, D. Marshall, An expert system for multi-criteria decision making using Dempster-Shafer theory, Expert Systems with Applications 20 (2001) 357-367.

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proceedings 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[5] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 277-291.

[6] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, International Journal of Intelligent Systems 19 (2004) 233-255.

[7] A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, Annals of Mathematical Statistics 38 (1967) 325-339.
[8] A.P. Dempster, A generalization of Bayesian inference, Journal of the Royal Statistical Society B 30 (1968) 205-247.
[9] K.J. Engemann, H.E. Miller, R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1996) 1-26.
[10] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.
[11] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 689-707.
[12] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, in: Proceedings 13th Congress of the International Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF), Hammamet, Tunisia, 2006, pp 709-727.
[13] J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced and Uncertain Heavy OWA operators, in: Proceedings 13th Congress of the International Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF), Hammamet, Tunisia, 2006, pp 728-746.
[14] G. Shafer, Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
[15] R.P. Srivastava, The belief-function approach to aggregating audit evidence, International Journal of Intelligent Systems 10 (1995) 329-356.
[16] R.P. Srivastava, G. Shafer, Belief-function formulas for audit risk, The Accounting Review 67 (1992) 249-283.
[17] P. Wallery, Measures of uncertainty in expert systems, Artificial Intelligence 83 (1996) 1-58.
[18] D.L. Xu, J.B. Yang, Y.M. Wang, The ER approach for multi-attribute decision analysis under interval uncertainties, European Journal of Operational Research 174 (2006) 1914-1943.
[19] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[20] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[21] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[22] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 18 (1988) 183-190.
[23] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, Theory and Decision 33 (1992) 41-69.
[24] R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, International Journal of General Systems 20 (1992) 233-245.
[25] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[26] R.R. Yager, On the valuation of alternatives for decision making under uncertainty, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 687-707.
[27] R.R. Yager, The induced fuzzy integral aggregation operator, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 1049-1065.

[28] R.R. Yager, Induced aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003) 59-69.
[29] R.R. Yager, Choquet aggregation using order inducing variables, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12 (2004) 69-88.
[30] R.R. Yager, Uncertainty modeling and decision support, Reliability Engineering and System Safety 85 (2004) 341-354.
[31] R.R. Yager, D.P. Filev, Induced Ordered Weighted Averaging Operators, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 29 (1999) 141-150.
[32] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

USING FUZZY OWA OPERATORS IN DECISION MAKING WITH DEMPSTER-SHAFER BELIEF STRUCTURE

Montserrat Casanovas Ramón, mcasanovas@ub.edu, University of Barcelona
José M. Merigó Lindahl, jmerigo@ub.edu, University of Barcelona

ABSTRACT

We study the decision making problem with Dempster-Shafer theory of evidence. We analyze how to deal with this model when the available information is given in the form of fuzzy numbers. We use different types of aggregations operators that aggregate fuzzy numbers such as the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator and the fuzzy hybrid averaging (FHA). We also develop an illustrative example about selection of investments where we can see the different results obtained by using different types of aggregation operators.

Keywords: Decision making under uncertainty; Dempster-Shafer theory; FOWA operator; Investment selection.

1. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence was introduced by Dempster (1967; 1968) and by Shafer (1976). Since its appearance, this theory has been used in a lot of situations (Yager et al., 1994; Srivastava and Mock, 2002). It provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes as special cases the situations of risk and ignorance. The difference between their works is that each one associated a different semantics in the theory although their ideas were practically the same. Dempster was interested in a probabilistic framework while Shafer was more oriented to belief measurement. The two fundamental measures of the theory developed by Shafer, belief and plausibility, were previously studied by Dempster. He referred to them as upper and lower probabilities.

Usually, when using the D-S theory in decision making it is considered that the available information is exact numbers (Engemann et al., 1994; Merigó and Casanovas, 2006; 2007; Yager, 1992; 1995; 2004a; 2004b). However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, it is necessary to use another approach that is able to assess the uncertainty such as the use of fuzzy numbers (FN). With the use of FN, we are able to analyze the best and worst possible scenario and the possibility that the internal values of the fuzzy interval will occur. In this paper we will study the decision making problem with D-S belief structure using information given in the form of FN. In order to develop the fuzzy approach we will follow the ideas of (Chang and Zadeh, 1972; Zadeh, 1975; Mizumoto and Tanaka, 1976; Nahmias, 1978; Dubois and Prade, 1978; 1980; Kaufmann and Gupta, 1985; Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

In order to aggregate the information given in the form of FN, we will use different types of FN aggregation operators. The reason for using various types of FN aggregation operators is that we want to show that the fuzzy decision making problem with D-S theory can be modelled in different ways depending on the interests of the decision maker. We will use the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator (Mitchell and Estrakh, 1998; Canfora and Troiano, 2001; S.J. Chen and S.M. Chen, 2003) because it provides a parameterized family of fuzzy aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA) and the fuzzy weighted average (FWA), among others. The FOWA operator is an extension of the traditional ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988; 1992b; 1993; 1997; Calvo et al., 2002; Merigó, 2007) for the cases where the information is given in the form of FN. We will also use the fuzzy hybrid averaging (FHA) operator (Xu, 2006) because this operator uses in the same formulation the FWA and the FOWA operator. For all these types of fuzzy aggregation operators we will develop different families of operators that could be used in the fuzzy decision making problem with D-S belief structure such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the centered-FOWA operator, the FOWA median, etc. Note that these families are based on the original version developed for the OWA operator (Yager, 1993; 2007).

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts to be used throughout the paper such as the FOWA and the FHA operator. Section 3 describes the basic concepts of D-S theory of evidence. Section 4 develops the new approach about using information given in the form of FN in decision making with D-S theory of evidence. In Section 5, we give an illustrative example about the use of the proposed scheme. Finally, Section 6 summarizes the main conclusions found in the paper.

2. AGGREGATION OPERATORS

In this Section, we briefly describe some basic aggregation operators to be used throughout the paper. We will consider the FOWA operator and the FHA.

2.1. FUZZY OWA OPERATOR

The FOWA operator was introduced in (Mitchell and Estrakh, 1998; Canfora and Troiano, 2001; S.J. Chen and S.M. Chen, 2003) and it represents an extension to the OWA operator. Essentially, its main difference is that it uses uncertain information in the arguments represented in the form of FN. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FN. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

In order to define the FOWA operator, first, we need to consider some basic aspects about the FN. Its origins can be found in the works of Chang and Zadeh (1972) and Zadeh (1975). Since then, the FN have been studied by different authors such as

(Mizumoto and Tanaka, 1976; Nahmias, 1978; Dubois and Prade, 1978; 1980; Kaufmann and Gupta, 1985). Among the wide range of FN existing in the literature, we could mention for example, the triangular fuzzy numbers, trapezoidal fuzzy numbers, L-R fuzzy numbers, etc. Note that the triangular fuzzy numbers are a particular case of the trapezoidal fuzzy numbers when the interval with highest membership is just an exact number. For further reading about FN, see for example (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985; Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

Comparing FN with interval numbers, we see that the FN are more complete. This happens because they use a membership function to describe the possibility that an uncertain result will occur. Then, the FN give the same information than the interval numbers but they also explain the possibility that the internal values of the interval will occur. With the information explained above, it is possible to define the FOWA operator as follows.

Definition 1. Let Ψ be the set of fuzzy numbers. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (1)$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator. The FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of FOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the FOWA median operator, the S-FOWA, the centered-FOWA operator, etc. (Merigó, 2007).

Note that the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using FN. In some cases, it is not clear which FN is higher, then, we need to establish an additional criterion for reordering the FN. For simplicity, we recommend to follow the procedure commented in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987, Kaufmann et al., 1994). Also note that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights w_j are also FN. Another complex situation would be to mix in the same problem information given with interval numbers and information given with FN.

2.2. FUZZY HYBRID AVERAGING

The FHA operator is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator at the same time (Xu, 2006). Then, it is possible to consider in the same decision making problem, the attitudinal character of the decision maker and its subjective probability. It also deals with uncertain environments where the available information cannot be assessed with exact numbers but it is possible to find some good approximations with FN. The hybrid averaging operator has been studied by different authors such as (Xu, 2004; Merigó, 2007). The FHA provides another parameterized family of aggregation operators that includes the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA), the fuzzy weighted average (FWA) and the FOWA operator. In order to define it, first, we need to consider some basic aspects about the FN. Assuming the same considerations made in the previous subsection, we can define the FHA as follows.

Definition 2. Let Ψ be the set of fuzzy numbers. A FHA operator of dimension n is a mapping $FHA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \dots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\dots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are FN.

Similar to the FOWA operator, from a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending FHA (DFHA) operator and the ascending FHA (AFHA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFHA operator. Different families of FHA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FHA operator, the window-FHA operator, the FHA median operator, the centered-FHA operator, etc. (Merigó, 2007). Note that in this case, we should also consider the problem of comparing FN in the reordering process. For simplicity, we also recommend to follow the policy explained in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987, Kaufmann et al, 1994). Also note that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights are also FN and the possibility of combining in the same problem information given with interval numbers and information given with FN.

3. DEMPSTER-SHAFER THEORY OF EVIDENCE

The D-S theory of evidence was introduced by Dempster (1967; 1968) and by Shafer (1976). Since then, a lot of new developments have been developed about it such as (Yager et al., 1994; Srivastava and Mock, 2002). This type of formulation provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the cases of risk and ignorance as special cases. Obviously, the case of certainty is also included in this generalization as it can be seen as a particular situation of risk or ignorance. Note that the case of certainty could also appear in other particular situations of the D-S formulation. Apart from these traditional cases, the D-S framework allows to represent various other forms of information a decision maker may have about the states of nature.

Definition 3. A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

(4) $m(B_j) \in [0, 1]$.

(5) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.

(6) $m(A) = 0, \ \forall A \neq B_j$.

As we said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in (Shafer, 1976). Note that two important evidential functions associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief (Shafer, 1976).

4. FUZZY OWA OPERATORS IN DECISION MAKING WITH D-S THEORY

In (1992a), Yager suggested a more generalized methodology for decision making with D-S belief structure by using the OWA operator. Since then, this problem has been studied by different authors such as (Engemann et al., 1996; Merigó and Casanovas, 2006; 2007; Merigó et al., 2007; Yager, 1995; 2004a; 2004b).

A new method for decision making with D-S belief structures is possible by using FN in the problem. The motivation for using FN appears because sometimes, the available information is not clear and can only be assessed with FN. Although in these cases we do not know exactly the future outcomes, we can approximate them with FN so we know the best and worst possible scenario, and the most possible results. Then, the decision maker is able to take a decision according to the available information. In this problem, it becomes important to consider that now, we will use aggregation operators that uses FN such as the FOWA operators and the FHA operator. Note that other types of fuzzy operators could be considered in the problem, but for simplicity we will only use the two operators explained in Section 2 as they generalize a wide range of them.

The procedure to follow for taking decisions with FN in D-S theory of evidence is similar to the procedure used with exact numbers with the difference that now we use FN in the problem and this means that we need to use fuzzy operators such as the FOWA operator. The procedure can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ is the payoff, given in the form of FN, to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure *m* with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function *m* about the states of nature.

Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker $\alpha(W)$ (Yager, 1988).

Step 4: Calculate the collection of weights, *w*, to be used in the FOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker (Xu, 2005, Merigó, 2007).

Step 5: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of *i* and *k*. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik} = FOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of *i* and *k*.

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{3}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal. Note that in a situation of costs or similar, we should select the alternative with the lowest C_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we could distinguish in the FOWA aggregation between ascending and descending orders. The motivation for making this distinction is because of the different types of decisions we can find depending on the problem analyzed. From a business perspective, we could distinguish between situations involving costs or benefits. As we can see, in benefits, the highest result is the best one while in costs the highest result is the worst one. Then, in order to coordinate these situations we need to consider two different aggregations. For example, a descending aggregation for benefits such as the FOWA operator and an ascending aggregation for costs such as the AFOWA operator.

The procedure to follow if we use the AFOWA operator in the aggregation step is the same than the procedure used for the FOWA or DFOWA operator with the following differences.

In *Step 3*, when calculating the attitudinal character, we should consider that now we are using an ascending order in the aggregation.

In *Step 4*, when calculating the collection of weights, we should consider that now the reordering is different in order to correctly associate each weight to its corresponding position.

In *Step 6*, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AFOWA(M_{ik}), using the dual version of Eq. (1), for all the values of *i* and *k*.

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the FOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators in the decision process with D-S framework. For example, we can obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA), the Hurwicz fuzzy criteria, the fuzzy weighted average (FWA). Note that these operators can be obtained by using the FOWA or the AFOWA operator. These two parameterized families of aggregation operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the FOWA (or DFOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AFOWA operator.

More families of FOWA operators could be used in the aggregation step of the D-S framework such as the step-FOWA, the window-FOWA, the centered-FOWA, the FOWA median, the S-FOWA operator, the FOWA weights that depend on the aggregated objects, the FOWA weights that use a basic unit interval monotonic function (BUM) and the Gaussian-FOWA weights. Other families that could be obtained are the ones that use the orness and the dispersion measure for determining the FOWA weights. For example, we could mention the maximal entropy FOWA (MEFOWA) weights, the minimax disparity FOWA weights, the minimal variability FOWA weights or the maximal Rényi entropy FOWA weights, among others. Note that these methods follow the same methodology than the original version developed for the OWA operator, with the only difference that now the arguments are FN instead of exact numbers. See for example, Merigó (2007).

In some situations, we could prefer to use another type of fuzzy aggregation operator in the D-S decision process such as the FHA operator. The main advantage of this operator is that it uses in the same aggregation the characteristics of the FWA and the characteristics of the FOWA operator. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S belief structures, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, FWAs and FOWAs.

In order to use this type of aggregation operator in D-S framework, we should make the following changes to the decision process explained above for the FOWA operator.

In *Step* 3 and 4, when calculating the collection of weights, w, to be used in the FHA aggregation for each different cardinality of focal elements, we should consider that now we have to define two weighting vectors. Note that these two weighting vectors are used for combining in the same aggregation the FWA and the FOWA operator.

In *Step* 5, when calculating the fuzzy aggregated payoff, we should use V_{ik} = FHA(M_{ik}), using Eq. (2) for all the values of i and k.

In this case, we could also formulate in one equation the whole aggregation process as follows.

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} m(B_k) FHA(M_{ik}) \tag{4}$$

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the FHA operator, which combines in the same aggregation the FWA and the FOWA operator. Note that if all the weights ω_i are 1/*n*, for all *i*, then, Eq. (4) is transformed in Eq. (3).

In this case, it is also possible to find situations where it is better to use an ascending order in the aggregation. Then, we will use the AFHA operator in the decision process with D-S theory. We should note that the main differences against the FHA operator is that now, in *Step 3* we should use an ascending order in the collection of weights and in *Step 5* we should use V_{ik} = AFHA(M_{ik}).

When aggregating the collection of fuzzy payoffs of each focal element with the FHA operator, it is also possible to use a wide range of families of FHA operators. For example, we could obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the Hurwicz fuzzy criteria, the FA and the FWA. Note that these particular cases are obtained from the weighting vector w_j that affects the FOWA operator. Then, to obtain these families, it is necessary that ω_i is 1/*n*, for all *i*. Also note that other families could be obtained as it has been commented previously in the FOWA operator. Another possibility would be to consider these families mixed with the weighting vector ω_i which is related with the FWA. Then, the result would be the fuzzy hybrid maximum, the fuzzy hybrid minimum, the Hurwicz fuzzy hybrid criteria, the FA, the FWA, the step-FHA operator, the window-FHA operator, the olympic-FHA operator, the E-Z FHA weights, the FHA median, the weighted FHA median, the centered-FHA operator, the Gaussian-FHA weights, the S-FHA operator, etc. (Merigó, 2007).

5. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to understand numerically the new approach commented above. We will use the new approach in an investment selection problem. We will analyze a decision making problem with D-S belief structure and we will use different types of fuzzy aggregation operators such as the FA, the FWA, the FOWA, the AFOWA, the FHA and the AFHA operator in order to see the different results obtained depending on the aggregation operator used.

Step 1: Assume an investment company has five possible investments and they want to select the alternative that better adapts to his interests.

1) A_1 is a computer company.
2) A_2 is a chemical company.
3) A_3 is a car company.
4) A_4 is a TV company.
5) A_5 is a food company.

Depending on the different uncertain situations that happen in the future, the experts of the investment company establishes the payoff matrix. As the future states of nature are very imprecise, the experts cannot determine exact numbers in the payoff matrix. Instead, they use FN to calculate the future benefits of the companies depending on the state of nature that happens in the future. The results are shown in Table 1.

Table 1: Payoff matrix.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(50,60,70)	(40,50,60)	(20,40,60)	(50,60,70)	(70,80,90)	(70,80,90)
A_2	(40,50,60)	(60,70,80)	(70,80,90)	(30,40,50)	(20,30,40)	(70,80,90)
A_3	(60,70,80)	(60,70,80)	(60,70,80)	(50,60,70)	(50,60,70)	(40,50,60)
A_4	(10,20,30)	(10,20,30)	(60,70,80)	(60,70,80)	(70,80,90)	(70,80,90)
A_5	(30,40,50)	(60,70,80)	(40,50,60)	(40,50,60)	(60,70,80)	(60,70,80)

The states of nature represent different economical situations that affect the companies. These situations are evaluated by the world growth rate: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate.

Step 2: The decision maker has acquired a group of experts in order to solve the problem. After careful analysis, the experts have obtained some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief function *m* about the states of nature.

Focal element

- $B_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 0.4$
- $B_2 = \{S_4, S_5, S_6\} = 0.3$
- $B_3 = \{S_1, S_3, S_5\} = 0.3$

Step 3 - 4: Assume we have used one of the existing methods for determining the weights (Xu, 2005; Merigó, 2007) and we have obtained the following results for different number of arguments.

Weighting vector

- $W_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$
- $W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$

Step 5: Calculate the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of *i* and *k*.

- A_1: $M_{11} = \langle(50,60,70), (40,50,60), (20,40,60), (50,60,70)\rangle$; $M_{12} = \langle(50,60,70), (70,80,90), (70,80,90)\rangle$; $M_{13} = \langle(50,60,70), (20,40,60), (70,80,90)\rangle$.
- A_2: $M_{21} = \langle(40,50,60), (60,70,80), (70,80,90), (30,40,50)\rangle$; $M_{22} = \langle(30,40,50), (20,30,40), (70,80,90)\rangle$; $M_{23} = \langle(40,50,60), (70,80,90), (20,30,40)\rangle$.
- A_3: $M_{31} = \langle(60,70,80), (60,70,80), (60,70,80), (50,60,70)\rangle$; $M_{32} = \langle(50,60,70), (50,60,70), (40,50,60)\rangle$; $M_{33} = \langle(60,70,80), (60,70,80), (50,60,70)\rangle$.
- A_4: $M_{41} = \langle(10,20,30), (10,20,30), (60,70,80), (60,70,80)\rangle$; $M_{42} = \langle(60,70,80), (70,80,90), (70,80,90)\rangle$; $M_{43} = \langle(10,20,30), (60,70,80), (70,80,90)\rangle$.
- A_5: $M_{51} = \langle(30,40,50), (60,70,80), (40,50,60), (40,50,60)\rangle$; $M_{52} = \langle(40,50,60), (60,70,80), (60,70,80)\rangle$; $M_{53} = \langle(30,40,50), (40,50,60), (60,70,80)\rangle$.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik}, for the different types of fuzzy aggregation operators considered in the problem. Note that for the FHA and the AFHA, we also use the weighting vector ω = (0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2). The results are shown in Table 2.

Table 2: Aggregated payoff.

	FA	*FWA*	*FOWA*	*AFOWA*	*FHA*	*AFHA*
V_{11}	(40,52.5,65)	(39,52,65)	(38,51,64)	(42,54,66)	(33,43.8,54.6)	(36,49.2,62.4)
V_{12}	(63.3,73.3,83.3)	(64,74,84)	(62,72,82)	(59,68,77)	(74.4,86.4,98.4)	(76.8,88.8,100,8)
V_{13}	(46.6,60,73.3)	(49,62,75)	(44,58,72)	(49,62,75)	(44.4,57.6,70.8)	(49.8,63.6,77.4)
V_{21}	(50,60,70)	(50,60,70)	(47,57,67)	(53,63,73)	(42,50.4,58.8)	(48,57.6,67.2)
V_{22}	(40,50,60)	(43,53,63)	(38,48,58)	(43,53,63)	(45.6,57.6,69.6)	(51.6,63.6,75.6)
V_{23}	(43.3,53.3,63.3)	(41,51,61)	(41,51,61)	(46,56,66)	(42,51.6,61.2)	(48,58.2,68.4)
V_{31}	(57.5,67.5,77.5)	(57,67,77)	(57,67,77)	(58,68,78)	(48,56.4,64.8)	(54,63.6,73.2)
V_{32}	(46.6,56.6,66.6)	(46,56,66)	(46,56,66)	(47,57,67)	(55.2,67.2,79.2)	(56.4,68.4,80.4)
V_{33}	(56.6,66.6,76.6)	(56,66,76)	(56,66,76)	(57,67,77)	(54,63.6,73.2)	(57.6,67.8,78)
V_{41}	(35,45,55)	(40,50,60)	(30,40,50)	(40,50,60)	(32.4,40.8,49.2)	(45.6,55.2,64.8)
V_{42}	(66.6,76.6,86.6)	(67,77,87)	(66,76,86)	(67,77,87)	(79.2,91.2,103.2)	(80.4,92.4,104.4)
V_{43}	(46.6,56.6,66.6)	(49,59,69)	(43,53,63)	(49,59,69)	(49.2,58.8,68.4)	(57,67.2,77.4)
V_{51}	(42.5,52.5,62.5)	(42,52,62)	(41,51,61)	(44,54,64)	(35.4,43.8,52.2)	(39.6,49.2,58.8)
V_{52}	(53.3,63.3,73.3)	(54,64,74)	(52,62,72)	(54,64,74)	(62.4,74.4,86.4)	(64.8,76.8,88.8)
V_{53}	(43.3,53.3,63.3)	(45,55,65)	(42,52,62)	(45,55,65)	(43.2,52.8,62.4)	(48.6,58.8,69)

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. (3) for the FOWA operator and Eq. (4) for the FHA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3: Generalized expected value.

	FA	*FWA*	*FOWA*	*AFOWA*	*FHA*	*AFHA*
A_1	(49,61,73)	(49.5,61.6,73.7)	(47,59.4,71.8)	(49.2,60.6,72)	(48.8,60.7,72.6)	(52.3,65.4,78.4)
A_2	(45,55,65)	(45.2,55.2,65.2)	(42.5,52.5,62.5)	(47.9,57.9,67.9)	(43.0,52.9,62.8)	(49.1,59.5,70.1)
A_3	(54,64,74)	(53.4,63.4,73.4)	(53.4,63.4,73.4)	(54.4,64.4,74.4)	(51.9,61.8,71.7)	(55.8,66.3,76.8)
A_4	(48,58,68)	(50.8,60.8,70.8)	(44.7,54.7,64.7)	(50.8,60.8,70.8)	(51.4,61.3,71.2)	(59.4,69.9,80.4)
A_5	(46,56,66)	(46.5,56.5,66.5)	(44.6,54.6,64.6)	(47.3,57.3,67.3)	(45.8,55.6,65.5)	(49.8,60.3,70.8)

Note that the results given in the form of triangular fuzzy numbers, can also be shown by using their membership functions. For simplicity, we give the following results shown in Tables 4 and 5 for triangular fuzzy numbers when using their membership function.

Table 4: Generalized expected value using membership functions 1.

	FA	*FWA*	*FOWA*
A_1	(49+12α, 73–12α)	(49.5+12.1α, 73.7–12.1α)	(47+12.4α, 71.8–12.4α)
A_2	(45+10α, 65–10α)	(45.2+10α, 65.2–10α)	(42.5+10α, 62.5–10α)
A_3	(54+10α, 74–10α)	(53.4+10α, 73.4–10α)	(53.4+10α, 73.4–10α)
A_4	(48+10α, 68–10α)	(50.8+10α, 70.8–10α)	(44.7+10α, 64.7–10α)
A_5	(46+10α, 66–10α)	(46.5+10α, 66.5–10α)	(44.6+10α, 64.6–10α)

Table 5: Generalized expected value using membership functions 2.

	AFOWA	*FHA*	*AFHA*
A_1	(49.2+11.4α, 72–11.4α)	(48.8+11.9α, 72.6–11.9α)	(52.3+13.1α, 78.4–13α)
A_2	(47.9+10α, 67.9–10α)	(43.0+9.9α, 62.8–9.9α)	(49.0+10.5α, 70.0–10.5α)
A_3	(54.4+10α, 74.4–10α)	(51.9+9.9α, 71.7–9.9α)	(55.8+10.5α, 76.8–10.5α)
A_4	(50.8+10α, 70.8–10α)	(51.4+9.9α, 71.2–9.9α)	(59.4+10.5α, 80.4–10.5α)
A_5	(47.3+10α, 67.3–10α)	(45.8+9.8α, 65.5–9.9α)	(49.8+10.5α, 70.8–10.5α)

Step 8: Select the best alternative for each aggregation operator. As we can see, if we use the FA, the FWA, the FOWA, the AFOWA and the FHA operators, the optimal solution will be A_3. But if we use the AFHA operator, then, we will select the alternative A_4.

If we establish an order of the investments, a typical situation if we want to select more than one alternative, we can see that each aggregation operator gives us a different order of the investments. Note that $\succ$ means *preferred to*. The results are shown in Table 6.

Table 6: Ordering of the investments.

	Ordering		*Ordering*
FA	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2$	*AFOWA*	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$
FWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2$	*FHA*	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2$
FOWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2$	*AFHA*	$A_4 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2$

6. CONCLUSIONS

We have studied the decision making problem with Dempster-Shafer theory of evidence when the available information is given in the form of FN. First, we have described some basic concepts about using FN in the aggregation operators. Next, we have developed the new approach about using information given in the form of FN in decision making with D-S belief structure. We have considered two cases. In the first case, we have used the FOWA operator and in the second case, we have studied the FHA in order to use probabilities, WAs and OWAs in the same problem. Finally, we have shown an illustrative example about the new approach developed in the paper. We have developed an application in the selection of investments where we have considered the different results obtained by using a wide range of fuzzy aggregation operators.

REFERENCES

[1] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[2] G. Canfora, L. Troiano, An Extensive Comparison between OWA and OFNWA Aggregation, in: Proceedings of the 8th SIGEF Congress, Napoli, Italy, 2001.

[3] S.J. Chen, S.M. Chen, A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, Cybernetics and Systems 34 (2003) 109-137.

[4] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 2 (1972) 30-34.

[5] A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, Annals of Mathematical Statistics 38 (1967) 325-339.

[6] A.P. Dempster, A generalization of Bayesian inference, Journal of the Royal Statistical Society B 30 (1968) 205-247.

[7] D. Dubois, H. Prade, Operations on fuzzy numbers, International Journal of Systems Science 9 (1978) 613-626.

[8] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[9] K.J. Engemann, H.E. Miller and R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1996) 1-26.
[10] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
[11] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, Las matemáticas del azar y de la incertidumbre, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid, 1990.
[12] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, Matemática para la economía y la gestión de empresas, Ed. Foro Científico, 1994.
[13] A. Kaufmann, M.M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.
[14] J.M. Merigó, Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
[15] J.M. Merigó, M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, in: Proceedings of the 13th SIGEF Congress, Hammamet, Tunisia, 2006, pp.709-727.
[16] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators, in: Proceedings of the 4th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP), Ghent, Belgium, 2007, pp.95-100.
[17] J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez, Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, in: Proceedings of the 14th SIGEF Congress, Poiana-Brasov, Romania, 2007 (submitted).
[18] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, An OWA operator with fuzzy ranks, International Journal of Intelligent Systems 13 (1998) 69-81.
[19] M. Mizumoto, K. Tanaka, The four operations of arithmetic on fuzzy numbers, Systems, Computing and Control 7 (1976) 73-81.
[20] S. Nahmias, Fuzzy variables, Fuzzy Sets and Systems 1 (1978) 97-110.
[21] G.A. Shafer, Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
[22] R.P. Srivastava, T. Mock, Belief Functions in Business Decisions, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
[23] Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, Information Sciences 166 (2004) 19-30.
[24] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[25] Z.S. Xu, A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information, Group Decision and Negotiation 15 (2006) 593-604.
[26] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics, B 18 (1988) 183-190.
[27] R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, International Journal of General Systems 20 (1992a) 233-245.
[28] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, Theory and Decision 33 (1992b) 41-69.
[29] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.

[30] R.R. Yager, On the inclusion of variance in decision making under uncertainty, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1995) 401–419.
[31] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, International Journal of Approximate Reasoning 36 (2004a) 109-128.
[32] R.R. Yager, Uncertainty modeling and decision support, Reliability Engineering and System Safety 85 (2004b) 341-354.
[33] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[34] R.R. Yager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk, Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence, John Wiley & Sons, New York, 1994.
[35] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[36] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning, Part 1, Information Sciences 8 (1975) 199-249; Part 2, Information Sciences 8 (1975) 301-357; Part 3, Information Sciences 9 (1975) 43-80.

14.1.16. Artículo de congreso 16. – Publicado en AMSE 2007 Italia

Analysing the unification point in the selection of polyvalent financial products

J.M. Merigó* and A.M. Gil-Lafuente,

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We study the unification point in the selection of polyvalent financial products. First, we briefly describe the process to follow in the selection of polyvalent financial products. We consider some basic indexes such as the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. We also consider different aggregation operators such as the average, the weighted average and the ordered weighted average. Then, we analyze the unification point and we find that all the indexes get the same form than the Hamming distance. We distinguish between total and partial unification point. The paper ends with an illustrative example where we can see numerically the unification point in the selection of polyvalent financial products.

Keywords

Unification point, Selection of polyvalent financial products, Hamming distance, Adequacy coefficient, OWA operator

1. Introduction

The selection of the most appropriate financial products for the company represents a fundamental problem for its good development. With the great variety of alternatives existing in the market, the enterprise needs to analyze the products in order to find the best one for them. In order to do this, the company, with the help of its group of experts, has to develop a decision making problem to find the optimal choice. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus on the models developed in [1,4-7] about selection of human resources and the models developed in [2-3,9-11] about selection of financial products.

Sometimes when analysing the market, the experts find that the uncertain environment can evolve in different ways. Then, depending on the evolution of the market, the necessities of the enterprise about its optimal financial product can be completely different. For modelling this problem, it is necessary to use an approach that it is able to select the optimal financial product considering that the future evolution of the market is uncertain. Then, instead of using one financial product, it is better to use more than one in order to consider the different situations that could happen in the future. This problem has been studied in [10].

Another problem is that sometimes, the different selection indexes used in the decision problem become the same index. This situation is known as the unification point [11]. As it is shown in [11], the unification point appears when some special conditions are found in the financial products. Basically, the key condition is that the real results of the financial products have to be lower than the ideal ones.

The aim of this paper is to analyze the unification point in the selection of polyvalent financial products. That is, the unification point in situations where we need to select a financial product that can be used in different scenarios with different requirements. We will consider the unification point between the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. We will distinguish between cases that use the same degree of importance in the characteristics, different degrees of importance and different degrees of optimism in the selection process. We will also consider the total and partial unification point. That is, situations where all the financial products accomplish the conditions to be in the unification point, and situations where not all but at least one accomplishes the unification point.

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the selection of polyvalent financial products. Section 3 explains the basic concepts of the unification point in the selection of polyvalent financial products with the Hamming distance and the adequacy coefficient. In Section 4, we develop the unification point with the index of maximum and minimum level. Section 5 gives an illustrative example of the new approaches developed in the paper. Finally, Section 6 summarizes the main conclusions found in the paper.

2. Selection of polyvalent financial products

This type of selection is very similar to the traditional selection of financial products with the difference that here it can occur different situations in the future [10]. Then, the selection needs to consider this aspect and search for the financial product that better adapts to the different possible situations that could occur. The mathematical process will be equal with the difference that here we will have more than one ideal fuzzy subset. With this additional information, the fuzzy subsets of each product will be compared with all the ideal fuzzy subsets that we have. Then, the process to follow will consist in the following steps similar to [1-7,9-11]:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2,\ldots,C_i,\ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Identification of the different possible scenarios that could occur in the future where we should need different ideal fuzzy subsets. These z fuzzy subsets will be considered as: $h = 1, 2,\ldots, z$; where each fuzzy subset would represent the necessities of the company in each situation h.

Step 3: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form different ideal financial products for all the possible situations that could occur. Mathematically, it will be represented as:

Table 1. Ideals depending on the scenario

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
$P_h =$	μ_1^h	μ_2^h	…..	μ_i^h	…..	μ_n^h

where P_h is the *h*th ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *h*th ideal financial product.

Step 4: Grouping of all the different ideal financial products in one fuzzy subset.

Table 2. All the ideal financial products

	C_1	…	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_{1,..,z} =$	μ_1^1	…	μ_n^1	…	μ_1^z	…	μ_n^z

where $P_{1,\,2,\,\ldots,\,z}$ refers to the grouping of the *h*th ideal financial products expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *h*th ideal financial product.

Step 5: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. Theoretically, it will be represented as:

Table 3. Available financial products

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…..	$\mu_i^{(k)}$	…..	$\mu_n^{(k)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the *k*th financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to be considered and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *k*th financial product.

Step 6: Construction of a fuzzy subset for each financial product that is adapted to the ideal financial product with different situations. It consists in create a fuzzy subset with the fuzzy subset of the financial product *k* repeated *z* times.

Table 4. Financial product for different environments

	C_1	…	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_k^{(p)} =$	$\mu_1^{(j)}$	…	$\mu_n^{(j)}$	…	$\mu_1^{(j)}$	…	$\mu_n^{(j)}$
		1		…		z	

Step 7: Comparison between the ideal financial product and the different financial products, and determination of the level of removal.

In this step, we have to express numerically the approximation between the ideal financial product and the different financial products considered. To solve this problem, we have a lot of different selection indexes that can be used [1-17]. In this paper, we will use the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. In these three cases, we will consider the situation that the characteristics have the same level of importance, the situation with different degrees of importance and the situation found with the OWA operator. Note that the OWA operator is an aggregation operator introduced in [14] that provides a parameterized family of operators such as the maximum, the minimum and the average, and it has been used in different applications [8,15-17].

If we use the normalized Hamming distance (NHD), we will get the following:

$$\text{NHD}(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \tag{1}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall\ (P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

If we use the weighted Hamming distance (WHD), we will get the following:

$$\text{WHD}(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \tag{2}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall\ (P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$ and the sum of w_i^h is equal to 1 and $w_i^h \in [0,1]$.

If we use the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator [12], we will get:

$$\text{OWAD}(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h D_j \tag{3}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$. As it can be seen, it has been introduced an Ascending OWA (AOWA) operator [15] in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Note that it is possible to distinguish between the descending OWAD (DOWAD) and the ascending OWAD (AOWAD) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAD operator.

Also note that for the three distances, it is possible to consider their dual by using *Dual* = 1 − *Distance* and it is also possible to consider other measures such as the Euclidean distance, the Minkowski distance, etc [13].

If we use the adequacy coefficient, we also have to distinguish between these cases. For the normalized adequacy coefficient (NAC) we will get:

$$\text{NAC}(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})] \tag{4}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall\ (P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

If we use the weighted adequacy coefficient (WAC), we will get the following:

$$\text{WAC}(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})] \tag{5}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ ($P_{1,2,\ldots,z}$, $P_k^{(p)}$) $\in$ $\mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$ and the sum of w_i^h is equal to 1 and $w_i^h \in [0,1]$.

If we use the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator, we will get:

$$\mathrm{OWAAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} w_i^h K_j \tag{6}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Note that it is possible to distinguish between the descending OWAAC (DOWAAC) and the ascending OWAAC (AOWAAC) operator by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAAC operator.

Also note that for the three indexes, it is possible to consider their dual by using $\mathrm{NAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = 1 - \mathrm{NDAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z})$. Note that the dual version of the adequacy coefficient uses $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$ for comparing the subsets [10-11].

If we use the index of maximum and minimum level, we also have to distinguish between these cases. For the normalized index of maximum and minimum level (NIMAM) we will get the following:

$$\mathrm{NIMAM}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn} \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} \left(\left| \mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u) \right| + [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))] \right) \tag{7}$$

where u refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and v refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. We should note that $u + v = zn$. That is, the sum of both groups of characteristics is equal to the total number of characteristics. Also note that $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ ($P_{1,2,\ldots,z}$, $P_k^{(p)}$) $\in$ $\mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

If we use the weighted index of maximum and minimum level (WIMAM), we will get:

$$\mathrm{WIMAM}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} \left(w_i^h(u) \left| \mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u) \right| + w_i^h(v)[0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))] \right) \tag{8}$$

where u refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and v refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. Note that $u + v = zn$. Also note that: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ ($P_{1,2,\ldots,z}$, $P_k^{(p)}$) $\in$ $\mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$ and the sum of $w_i^h(\mathrm{u}) + w_i^h(\mathrm{v})$ is equal to 1 and $w_i^h \in [0,1]$.

If we use the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) operator, we will get:

$$\mathrm{OWAIMAM}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j S_j \tag{9}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_{zn}$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the dual index of the adequacy coefficient. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Note that it is possible to distinguish between the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAIMAM operator. Different families of OWAIMAM operators can be obtained following a similar methodology as in [16]. For example, we could get the step-OWAIMAM, the S-OWAIMAM, etc.

Also note that for the three indexes, it is possible to consider their dual by using NIMAM($P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}$) = 1 - NDIMAM($P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}$).

Step 8: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

3. Unification point between the Hamming distance and the adequacy coefficient

The unification point is a situation where the Hamming distance and the adequacy coefficient become the same index [11]. Then, the analysis done with the Hamming distance is the same than the adequacy coefficient. With the initial results, we get the complementary result of the other index [5], but if we use the removal index of the adequacy coefficient, then the results are exactly the same. The reason is that the adequacy coefficient consists in not penalize the values over the ideal. But in the unification point, it is impossible to get values over it, so the calculation consists only in calculate the distance to the ideal.

Before starting the analysis with polyvalent financial products, let us recall the unification point when there is only one possible scenario.

Theorem 1. Assume $NHD(P,P_k)$ is the selection of financial products with the normalized Hamming distance and $NDAC(P_k \rightarrow P)$ the selection of financial products with the dual adequacy coefficient. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$NHD(P,P_k) = NDAC(P_k \rightarrow P) \tag{10}$$

Proof. Let

$$NHD(P,P_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$$ and

$$NDAC(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, and then

$$NDAC(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(\mu_i - \mu_i^{(k)}) = NHD(P,P_k) \quad \blacksquare$$

Analysing this theorem, we could generalize it for all the financial products considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the financial products *k* [11].

Now, we are going to extend this theorem for the selection of polyvalent financial products. Then, we will have to consider the different scenarios of the uncertain problem. First, we will use the NHD and the NAC by using Eq. (1) and Eq. (4), respectively.

Theorem 2. Assume $NHD(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)})$ is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance and $NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z})$ the selection of polyvalent financial products with the dual adequacy coefficient for the financial product *k*. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then:

$$NHD(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) \tag{11}$$

Proof. Let

$$NHD(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \quad \text{and}$$

$$NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all *i* and *h*, and then

$$NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = NHD(P_{1,\ldots z}, P_k^{(p)}) \quad \blacksquare$$

This theorem can also be developed with the WHD and the WAC by using Eq. (2) and Eq. (5), respectively. Then, we get the following.

Theorem 3. Assume WHD_k is the selection of polyvalent financial products with the weighted Hamming distance and $WDAC_k$ the selection of polyvalent financial products with the weighted dual adequacy coefficient for the financial product *k*. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then:

$$WHD_k = WDAC_k \tag{12}$$

Proof. Let

$$WHD_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}w_i^h\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \quad \text{and}$$

$$WDAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h [0 \vee \mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i and h, and then

$$WDAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h (\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = WHD_k \qquad \blacksquare$$

A similar result can also be obtained when using the OWAD and the OWAAC operators by using Eq. (3) and Eq. (6), respectively. Then, we get the following.

Theorem 4. Assume $OWAD_k$ is the selection of polyvalent financial products with the ordered weighted averaging distance operator and $OWADAC_k$ the selection of polyvalent financial products with the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient for the financial product k. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h, then:

$$OWAD_k = OWADAC_k \qquad (13)$$

Proof. Let

$$OWAD_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h D_j$$ and

$$OWADAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h Q_j$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i and h, and then

$$OWADAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h D_j = OWAD_k \qquad \blacksquare$$

Note that a particular situation of these theorems is the case when $\mu_i^h = 1$, for all i and h. In this case, we always find the unification point because $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h.

These theorems represent the unification point for one financial product. As it is explained in [11], this unification could be considered as a partial unification point in the selection process because not all the financial products are affected by this situation. In the following we are going to show the situation when all the financial products of the problem are affected by the unification point. We will call it total unification point. We will just show the case with the NHD and the NAC because the other cases are straightforward from this one.

Theorem 5. Assume *NHD* is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance for all the available financial products and *NDAC* the selection of polyvalent financial products with the dual adequacy coefficient for all the available financial products. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then:

$$NHD = NDAC \tag{14}$$

Proof. Let

$$NHD = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right|$$ and

$$NDAC = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i, k and h, and then

$$NDAC = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = NHD \qquad \blacksquare$$

By using the weighted and the ordered weighted aggregations, the result is the same. We just need to consider that now, in theorems (3) and (4), all the financial products *k* are affected by this situation.

Note that it is also interesting to study the degree of partial unification point of the decision problem. This can be done with:

$$\%\text{Unification} = \frac{n^{\circ}\ \ of\ \ fin.\ prod.\ with\ unification}{total\ \ n^{\circ}\ \ of\ \ financial\ \ products} \tag{15}$$

As we can see, if the % of unification is 1, that means that we are in a situation of total unification point. If the % of unification is 0, then, we are in a situation without unification. From this, values near 1 means that there are a high percentage of financial products that accomplishes the conditions of the unification point while values near 0 means the opposite.

4. Unification point in the index of maximum and minimum level

The unification point in the index of maximum and minimum level is a situation that transforms the index in the Hamming distance. In the following, we are going to show the unification point with the normalized index of maximum and minimum level (NIMAM).

Theorem 6. Assume NHD_k is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance and $NIMAM_k$ the selection of polyvalent financial products with the normalized index of maximum and minimum level for the financial product *k*. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then:

$$NHD_k = NIMAM_k \tag{16}$$

Proof. Let

$$NHD_k = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right|$$ and

$$NIMAM_k = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]\right)$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i and h, and then

$$NIMAM_k = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = NHD_k$$ ■

Note that it is also possible to analyse the unification point with the WIMAM and with the OWAIMAM. Their analysis is straightforward by looking to theorem (6) and replacing their equations with Eq. (2) and (8) for the WIMAM, and with Eq. (3) and (9) for the OWAIMAM operator.

Theorem (6) shows the unification point in the NIMAM for one financial product. As it has been explained in Section 3, this situation represents the analysis done for the partial unification point and it can affect several financial products of the selection process with the condition that at least one of them is not affected by the unification.

Now, we are going to show the total unification point in the NIMAM and in the selection of polyvalent financial products. The result will be that the NIMAM will become the NHD for all the available financial products.

Theorem 7. Assume *NHD* is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance for all the available financial products and *NIMAM* the selection of polyvalent financial products with the normalized index of maximum and minimum level for all the available financial products. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then:

$$NHD = NIMAM \tag{17}$$

Proof. Let

$$NHD = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right|$$ and

$$NIMAM = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]\right)$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i, k and h, and then

$$NIMAM = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = NHD$$ ■

Note that it is also possible to analyse the total unification point with the WIMAM and with the OWAIMAM operator. Their analysis is straightforward by looking to theorem (7) and replacing their equations with Eq. (2) and (8) for the WIMAM, and with Eq. (3) and (9) for the OWAIMAM operator. Obviously, the theorems show that the WIMAM and the OWAIMAM become the WHD and the OWAD, respectively.

5. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to understand numerically the unification point in the selection of polyvalent financial products.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics for the company.

Assume that a company wants to select a financial product and it has 3 alternatives P_1, P_2, P_3, with different characteristics. It is considered for each characteristic a property.

Step 2: Identification of the different scenarios that could occur in the future.

The group of experts of the company has found three possible scenarios that affect the decision. These scenarios are: S_1 = High demand, S_2 = Medium demand, S_3 = Low demand.

Step 3 - 4: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the ideal financial products according to the scenario as:

Table 5. Ideals depending on the scenario

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P^*_1	0.9	0.8	0.9	0.8	0.7
P^*_2	0.8	0.7	0.8	0.7	0.7
P^*_3	0.8	0.9	0.9	1	1

Step 5 - 6: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. For each of these characteristics, it is found the following information. Note that we have to repeat each financial product three times in order to adequate the problem with the ideal financial products.

Table 6. Available financial products

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1	0.7	0.6	0.8	0.5	0.5
P_2	0.6	0.5	0.6	0.7	0.5
P_3	0.4	0.6	0.8	0.5	0.4

Step 7: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered. First, we will consider the NHD, the WHD, the OWAD and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the

following weighting vector: W = (0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0’1, 0’1, 0’1, 0’1, 0’1).

If we elaborate the selection process with the Hamming distance by using Eq. (1), (2) and (3), we will get the following. The results are shown in table 7.

Table 7. Aggregated results with the Hamming distance

	NHD	*WHD*	*OWAD*	*AOWAD*
P_1	0.206	0.23	0.175	0.245
P_2	0.246	0.27	0.22	0.275
P_3	0.286	0.31	0.245	0.335

In this case, our decision will consist in selecting the financial product with the smallest distance. Then, we will select P_1 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient by using Eq. (4), (5) and (6), we will get the following. The results are shown in table 8.

Table 8. Aggregated results with the adequacy coefficient

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
P_1	0.794	0.77	0.825	0.755
P_2	0.754	0.73	0.78	0.725
P_3	0.714	0.69	0.755	0.665

The decision will consist in selecting the financial product with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_1 because it gives us the highest result for all the cases.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in table 9.

Table 9. Aggregated results with the dual *AC*

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
P_1	0.206	0.23	0.175	0.245
P_2	0.246	0.27	0.22	0.275
P_3	0.286	0.31	0.245	0.335

Analysing the unification point, we see that the Hamming distance and the dual adequacy coefficient gets the same result because they accomplish the conditions explained in theorem (5). That is: $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h. In this particular case, we see that we are in a total unification point because all the financial products accomplish the conditions of the theorem.

Finally, if we use the IMAM in the selection process by using Eq. (7), (8) and (9), we will get the following. In this example we will assume that the characteristics C_1 and

C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. The results are shown in table 10.

Table 10. Aggregated results with the *IMAM*

	NIMAM	*WIMAM*	*OWAIMAM*	*AOWAIMAM*
P_1	0.206	0.23	0.175	0.245
P_2	0.246	0.27	0.22	0.275
P_3	0.286	0.31	0.245	0.335

Then, our decision will consist in select P_1 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

Analysing the unification point, we see that the IMAM gets the same results than the Hamming distance because it accomplishes the conditions of theorem (7). That is: $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h. As theorem (7) is for all the financial products, we are in a situation of total unification point.

6. Conclusion

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of polyvalent financial products by using the Hamming distance, the adequacy coefficient, the index of maximum and minimum level and the OWA operator. Analysing these indexes we have found that there are some situations where they become the same index. We have called these situations the unification point. We have developed a wide range of theorems that has proved the unification between these indexes. We have distinguished between the total and the partial unification point. Finally, we have developed an illustrative example where we have seen numerically the unification point.

This work represents an extension in the field of selection of financial products. The unifications we have considered have been applied for the selection of polyvalent financial products but it is also applicable to the selection of polyvalent human resources, polyvalent investments, polyvalent strategies, etc. These cases use the same theorems of this paper with the difference that they consider a different business application.

References

[1] J. Gil-Aluja, "The interactive management of human resources in uncertainty", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[2] A.M. Gil-Lafuente, "Técnicas de selección de un instrumento financiero", in: V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica, Vigo, Spain, 1990.

[3] A.M. Gil-Lafuente, "Fuzzy logic in financial analysis", Springer, Berlin, 2005.

[4] J. Gil-Lafuente, "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", in: X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italy, pp. 439-443, 2001.

[5] J. Gil-Lafuente, “Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva”, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.
[6] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, “Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas”, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.
[7] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, “Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre”, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
[8] J.M. Merigó, “Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial”, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Using the OWA operators in the selection of financial products”, in: Proceedings of the 41st CLADEA Congress, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.
[10] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Selection of financial products that adapt to different environments”, in: Proceedings of the MS International Conference, Konya, Turkey, pp. 719-723, 2006.
[11] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Unification point in methods for the selection of financial products”, Fuzzy Economic Review, 13: 35-50, 2007.
[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “The ordered weighted averaging distance operator”, in: Proceedings of the MS International Conference, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “On the use of the OWA operator in the Euclidean distance”, in: Proceedings of the MS International Conference, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[14] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 18: 183-190, 1988.
[15] R.R. Yager, “On generalized measures of realization in uncertain environments”, Theory and Decision, 33: 41-69, 1992.
[16] R.R. Yager, “Families of OWA operators”, Fuzzy Sets and Systems, 59: 125-148, 1993.
[17] R.R. Yager, J. Kacprzyk, “The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.17. Artículo de congreso 17. – Publicado en AMSE 2007 Italia

OWA Operators in the Selection of Human Resources

J.M. Merigó* and A.M. Gil-Lafuente,

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We develop a new approach that uses the ordered weighted averaging (OWA) operator in different indexes used for the selection of human resources. The objective of this new model is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select human resources according to his degree of optimism or pessimism. In order to develop this model, first, a short revision of the OWA operators is introduced. Next, we briefly explain the general model for the selection of human resources. Then, we suggest three new indexes for the selection of human resources that uses the OWA operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. The work ends with an illustrative example that shows the results obtained by using different types of aggregation operators in the new approaches.

Keywords

OWA operator, Selection of human resources, Hamming distance, Adequacy coefficient

1. Introduction

The selection of the most appropriate human resources for the company represents a fundamental problem for its good development. The enterprise needs to analyze how to select the best worker according to their interests. In order to solve this problem, the company has to develop a selection process in which they have to compare the different characteristics of each available candidate found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1,6-7] about selection of human resources, the models developed in [2-3,9-11] about selection of financial products and the models developed in [4-5] about selection of players in sport management.

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results according to the interests of the decision maker. This problem becomes important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. One common method for aggregating the information considering the decision attitude of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in [14]. Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors such as [8,13,15-17].

Our objective in this paper consists in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of human resources. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the OWA operator because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWA operator. We will introduce in the selection of human resources, the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator, the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) and the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM).

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the OWA operator. Section 3 explains the basic aspects of the selection of human resources with fuzzy techniques. In Section 4, we develop the process to follow when using the OWA operator with the Hamming distance in the selection of human resources. Section 5 analyzes the combination between the OWA operator and the adequacy coefficient and Section 6 the combination between the OWA operator and the index of maximum and minimum level. Finally, Section 7 gives an illustrative example of the suggested methodology and Section 8 ends the paper with the main conclusions.

2. OWA operators

The OWA operator introduced in [14] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [8,15-17]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [14].

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $F{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

A fundamental aspect of this operator is the reordering of the arguments, based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case of the usual weighted average, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWA aggregation can be expressed as:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = W^T B \tag{2}$$

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator [15]. Note that the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$ for all i, then, $F(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$. It is bounded because $\text{Min}\{a_i\} \leq F(a_1,\ldots, a_n) \leq \text{Max}\{a_i\}$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all i, then, $F(a_1,\ldots, a_n) = a$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average [14]. For example, the maximum is found when w_1 = 1 and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The average is found when $w_j = 1/n$ for all j and the weighted average when the ordered position of i is the same than the ordered position of j for all i and j. Note that other families of OWA operators can be found in [8,13,16].

Another factor to consider, are the two measures introduced in [14] for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure $\alpha(W)$, the attitudinal character, is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{3}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W)$ = 0, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure introduced in [14] is called the entropy of dispersion of W. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4}$$

This can be used to provide a measure of the information being used. That is, if w_j = 1 for some j, known as step-OWA [16], then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

3. Selection of human resources with the OWA operators

The reason for using the OWA operators in the selection of human resources appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Due to the fact that the traditional methods in selection of human resources [1,6-7] are neutral against the attitude of the decision maker, the introduction of the OWA operators in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase. This can be useful in a lot of situations, for example, in situations where the decision maker wants to over estimate the results in order to take a more risky decision than in normal cases. Obviously, this increase in the risk can affect our decision doing that we select a different person than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of human resources with the OWA operator, is similar to the process developed in [1,6-7] with the difference that the instruments used will include the OWA operator in the selection process. Note that similar models that use the OWA operator have been developed for the selection of financial products [9-10]. The 5 steps to follow are:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the available candidates for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider of the candidate and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal worker. That is:

Table 1. Ideal worker

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P =$	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

where P is the ideal worker expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. That is:

Table 2. Available candidates

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the kth candidate expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$; $i = 1, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth candidate.

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different candidates considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them. In this step, the objective is to express numerically the removal between the ideal worker and the different candidates considered. For this, it can be used the different available selection indexes such as the Hamming distance, the adequacy coefficient, the index of maximum and minimum level, etc. [11].

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps. Finally, we should take the decision about which person select. Obviously, our decision will consist in choose the candidate with the best results according to the index used.

4. Combination between the OWA operator and the Hamming distance in the selection of human resources

In this Section we introduce a new index for the selection of human resources that uses the OWA operator in the Hamming distance. We will call it the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWAD operator of dimension n, is a mapping $OWAD{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with the sum of the weights equal to 1 and $w_j \in [0,1]$ such that:

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{5}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$.

As it can be seen, it has been introduced an AOWA operator in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. Note that from a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between ascending and descending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the ascending OWAD (AOWAD) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the descending OWAD (DOWAD) operator.

As we can see, the OWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized Hamming distance is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted Hamming distance is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

5. Combination between the OWA operator and the adequacy coefficient in the selection of human resources

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the selection of human resources with the adequacy coefficient. We will call it the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWAAC operator of dimension n, is a mapping $OWAAC{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{6}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWA operator used in the adequacy coefficient is the DOWA operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_n$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAAC (DOWAAC) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAAC (AOWAAC) operator. Also note that the OWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized adequacy coefficient is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted adequacy coefficient is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Analogously to the OWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAAC because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (OWADAC). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWADAC operator of dimension n, is a mapping $OWADAC{:}R^{+n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{7}$$

where Q_j represents the jth largest of the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADAC (DOWADAC) and the ascending OWADAC (AOWADAC) operator with $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWADAC operator.

It is also possible to obtain different families of aggregation operators with the OWADAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the normalized dual adequacy coefficient (NDAC) and the weighted dual adequacy coefficient (WDAC). Note that the maximum is obtained in the same form than the minimum of the OWAAC and the minimum in the same form than the maximum of the OWAAC. The NDAC is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WDAC is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources. As it has been explained in [11], the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new methods suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAD and the OWAAC accomplish the theorems explained in [11]. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point [11]. In the following, we briefly show the main theorem when using the OWA operator.

Theorem 1. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the selection of human resources with the OWAD operator and $OWADAC(P_k \rightarrow P)$ the selection of human resources with the OWADAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWADAC(P_k \rightarrow P) \tag{8}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, | \, \mu_i - \mu_i^{(k)} \, |$$ and

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k)$$ ■

Analysing this theorem, we could generalize it for all the human resources considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the human resources *k*.

6. Combination between the OWA operator and the index of maximum and minimum level in the selection of human resources

In this Section, we develop an index for the selection of human resources that uses the OWA operator in the index of maximum and minimum level. We will call it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). It can be defined as follows.

Definition 5. An OWAIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWAIMAM{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$S(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j S_j \tag{9}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we could distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized index of maximum and minimum level is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted index of maximum and minimum level is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Analogously to the OWAIMAM operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAIMAM because $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level (OWADIMAM). It can be defined as follows.

Definition 6. An OWADIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWADIMAM{:}R^{+^n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j R_j \tag{10}$$

where R_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that in this case it is also possible to distinguish between the descending OWADIMAM (DOWADIMAM) and the ascending OWADIMAM (AOWADIMAM) operator. In this case, we are also able to obtain a wide range of operators by using a different manifestation in the weighting vector.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources for the index of maximum and minimum level. As it has been explained in [11], in these situations, the index of maximum and minimum level becomes the Hamming distance. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point [11]. In the following, we show the main theorem when using the OWA operator.

Theorem 2. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the selection of human resources with the OWAD operator and $OWAIMAM(P_k \rightarrow P)$ the selection of human resources with the OWAIMAM operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWAIMAM(P_k \rightarrow P) \tag{11}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid$$ and

$$OWAIMAM(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} [w_j * [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] + w_j' \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWAIMAM(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \quad \blacksquare$$

Note that $w_j^* + w_j' = w_j$.

Analysing this theorem, we could generalize it for all the human resources considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (2) with the difference that now we consider all the characteristics i and all the human resources k.

7. Illustrative example

The information about the example is found in [12] although we have made some changes in the paper.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics for the company.

Assume that a company wants to select a worker for a vacant and it has 3 candidates P_1, P_2, P_3, with different characteristics. It is considered for each characteristic a property.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the ideal worker for the company as:

Table 3. Characteristics of the ideal worker

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P^* =	0.9	0.8	0.6	0.8	0.3

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. For each of these characteristics, it is found the following information:

For each of these characteristics, it is found the following information:

Table 4. Available candidates

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0.8	0.7	0.3	1	1
P_2 =	0.8	1	0.6	0.3	0.3
P_3 =	1	0.6	1	1	0.2

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different candidates considered, and determination of the level of removal using the OWA operators. We will consider the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the

OWAD operator and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the following weighting vector: W = (0'1, 0'1, 0'2, 0'3, 0'3). With this weighting vector, we can calculate the degree of optimism of the decision as: $\alpha(W)$ = 0'35 $\Rightarrow$ 35%, and the degree of dispersion as: $H(W)$ = 1'504.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each candidate. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using equation (6) and considering the type of aggregation we are developing. The results are shown in table 5.

Table 5. Aggregated results with the Hamming distance.

	NHD	*WHD*	*OWAD*	*AOWAD*
P_1	0.28	0.35	0.2	0.36
P_2	0.16	0.18	0.09	0.23
P_3	0.2	0.2	0.16	0.24

In this case, our decision will consist in selecting the candidate with the smallest distance. Then, we will select P_2 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal worker. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered using equation (7). The results are shown in table 6.

Table 6. Aggregated results with the adequacy coefficient.

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
P_1	0.9	0.92	0.86	0.94
P_2	0.88	0.84	0.82	0.94
P_3	0.94	0.95	0.91	0.97

The decision will consist in selecting the candidate with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal worker. Then, we will select P_3 because it gives us the highest result for all the cases.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in table 7.

Table 7. Aggregated results with the dual adequacy coefficient.

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
P_1	0.1	0.08	0.14	0.06
P_2	0.12	0.16	0.18	0.06
P_3	0.06	0.05	0.09	0.03

Finally, if we use the index of maximum and minimum level in the selection process as a combination of the normalized Hamming distance and the normalized adequacy coefficient, we will get the following. In this example we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using equation (10). Here, we note that in the reordering step, it will be only considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained with the adequacy coefficient or with the Hamming distance. The results are shown in table 8.

Table 8. Aggregated results with the index of maximum and minimum level.

	NIMAM	*WIMAM*	*OWAIMAM*	*AOWAIMAM*
P_1	0.28	0.35	0.2	0.36
P_2	0.12	0.16	0.06	0.18
P_3	0.18	0.19	0.13	0.23

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the candidate with the smallest removal to the ideal.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent approximation index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in table 9.

Table 9. Aggregated results with the dual index of maximum and minimum level.

	NDIMAM	*WDIMAM*	*OWADIMAM*	*AOWADIMAM*
P_1	0.72	0.65	0.8	0.64
P_2	0.88	0.84	0.94	0.82
P_3	0.82	0.81	0.87	0.77

8. Conclusion

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of human resources. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have suggested the use of the OWA operator in the selection process. As we have seen, the OWA operator permits under estimate or over estimate the selection process according to a degree of optimism. With this in mind, we have suggested three new instruments for the selection of human resources that uses the OWA operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. Then, we have obtained a new method that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of human resources.

References

[1] J. Gil-Aluja, “The interactive management of human resources in uncertainty”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
[2] A.M. Gil-Lafuente, “Técnicas de selección de un instrumento financiero”, in: V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica, Vigo, Spain, 1990.
[3] A.M. Gil-Lafuente, “Fuzzy logic in financial analysis”, Springer, Berlin, 2005.
[4] J. Gil-Lafuente, “El “índice del máximo y mínimo nivel” en la optimización del fichaje de un deportista”, in: X Congreso Internacional de la Asociación Europea

de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italy, pp. 439-443, 2001.
[5] J. Gil-Lafuente, "Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva", Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.
[6] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, "Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas", Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.
[7] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, "Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre", Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
[8] J.M. Merigó, "Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial", Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA operators in the selection of financial products", in: Proceedings of the 41st CLADEA Congress, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.
[10] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Selection of financial products that adapt to different environments", in: Proceedings of the MS International Conference, Konya, Turkey, pp. 719-723, 2006.
[11] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Unification point in methods for the selection of financial products", Fuzzy Economic Review, 13: 35-50, 2007.
[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Geometric operators in the selection of human resources", in: Proceedings of the MS International Conference, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[13] Z.S. Xu, "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", International Journal of Intelligent Systems, 20: 843-865, 2005.
[14] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 18: 183-190, 1988.
[15] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", Theory and Decision, 33: 41-69, 1992.
[16] R.R. Yager, "Families of OWA operators", Fuzzy Sets and Systems, 59: 125-148, 1993.
[17] R.R. Yager, J. Kacprzyk, "The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications", Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.18. Artículo de congreso 18. – Publicado en AMSE 2007 Italia

On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient

J.M. Merigó* and A.M. Gil-Lafuente,

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We introduce the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator. Basically, it consists in using the ordered weighted averaging (OWA) operator in the adequacy coefficient. We give a general overview of this type of index studying some of its main properties such as the distinction between ascending and descending orders and different measures for characterizing its weighting vector. We also study different families of OWAAC operators such as the maximum, the minimum, the traditional adequacy coefficient, the step-OWAAC, the window-OWAAC, the OWAAC median, etc. Finally, we apply the suggested method in the selection of investments where we can see the different results obtained by using different types of OWAAC operators.

Keywords

OWA operator, Adequacy coefficient, Selection of investments

1. Introduction

The adequacy coefficient [1-6] is a very useful technique that has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. Often, we prefer to use the normalized adequacy coefficient because we want an average result of all the individual comparisons. This type of index is also known as weighted adequacy coefficient when we prefer to give different degrees of importance to the individual comparisons instead of giving them the same importance.

Sometimes, when calculating the normalized adequacy coefficient, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for aggregating the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in [14]. The OWA operator is an aggregation operator that includes the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It has been used in a wide range of applications [7-9,11-23].

In this paper we generalize the adequacy coefficient by introducing the attitudinal character of the decision maker in the index. We will call this generalization, the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator. The fundamental characteristic of this index is that it normalizes the adequacy coefficient with the OWA operator. Then, it is possible to develop a more general adequacy coefficient that includes the maximum, the minimum and the normalized adequacy coefficient as special cases. We will study the basic definitions and some of its main properties such as the measures for characterizing the weighting vector and the distinction between descending and ascending orders. We will also study different families of OWAAC operators such as the step-OWAAC operator, the OWAAC median, the window-OWAAC operator, the olympic-OWAAC operator, the E-Z OWAAC weights, etc.

We will also develop an application of this new method in a business problem. We will apply it in the selection of investments as this problem can be considered as a general one that includes a wide range of business problems. Summarizing the potential applications, we can see that this new approach can be used in almost all the situations where the normalized adequacy coefficient has been used.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the OWA operator and the adequacy coefficient. Section 3 introduces the OWAAC operator. Section 4 analyzes different families of OWAAC operators. Finally, Section 5 and 6 develop an application in the selection of investments.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly describe some basic aggregation operators to be used throughout the paper.

2.1. OWA operator

The OWA operator introduced in [14] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [7-9,11-23]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [14].

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$F(a_1, a_2,\dots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator [15]. Note that the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average [14]. For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The average is found when $w_j = 1/n$ for all j. Other families of OWA operators can be found in [7,13,16-23].

2.2. The adequacy coefficient

The normalized adequacy coefficient [1-6] is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is very similar to the Hamming distance with the difference that it neutralizes the result when the comparison shows that the real element is higher than the ideal one. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 2. A normalized adequacy coefficient of dimension n is a mapping $K{:}R^n \rightarrow R$ such that:

$$K(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[1 \wedge (1-\mu_i + \mu_i^{(k)}] \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the adequacy it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the weighted adequacy coefficient. It can be defined as follows.

Definition 3. A weighted adequacy coefficient of dimension n is a mapping $K{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$K(P_k \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i[1 \wedge (1-\mu_i + \mu_i^{(k)}] \tag{3}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

3. The ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the adequacy coefficient. We will call it the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWAAC operator of dimension n, is a mapping $OWAAC$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{4}$$

where K_j represents the jth largest of the $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAAC (DOWAAC) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAAC (AOWAAC) operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWAD aggregation can be expressed as:

$$OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{5}$$

Also note that the OWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = OWAAC(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, where $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ is any permutation of the arguments $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. It is monotonic because if $p_i \geq r_i$, for all p_i, then, $OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq OWAAC(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. It is bounded because $\text{Min}\{p_i\} \leq OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq \text{Max}\{p_i\}$. It is idempotent because if $p_i = p$, for all p_i, then, $OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p$.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the OWAAC operator. Based on the measures developed for the OWA operators in [14,19], they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{6}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right) \quad (7)$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \quad (8)$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (9)$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

Analogously to the OWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAAC because $Q(P_k \to P) = 1 - K(P_k \to P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (OWADAC). It can be defined as follows.

Definition 5. An OWADAC operator of dimension n, is a mapping $OWADAC{:}R^{+n} \to R^{+}$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADAC(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \quad (10)$$

where Q_j represents the jth largest of the $q_i = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADAC (DOWADAC) and the ascending OWADAC (AOWADAC) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWADAC operator. Note that the OWADAC operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection process. As it has been explained in [10], the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new approach suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAD and the OWAAC accomplish the theorems explained in [10]. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point [10]. In the following, we briefly show the main theorem when using the OWA operator.

Theorem 1. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the OWAD operator and $OWADAC(P_k \rightarrow P)$ the OWADAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWADAC(P_k \rightarrow P) \tag{11}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid$$ and

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k)$$ ■

Analysing this theorem, we could generalize it for all alternatives considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics i and all the alternatives k.

4. Families of OWAAC operators

By using a different manifestation of the weighting vector in the OWAAC operator, we are able to obtain different types of aggregation operators with the adequacy coefficient. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the normalized adequacy coefficient and the weighted adequacy coefficient.

The maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The normalized adequacy coefficient is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted adequacy coefficient is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of K_j and i is the ith argument of p_i. Note that both the DOWAAC and the AOWAAC operators obtain these particular cases. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAAC operator.

Other families of aggregation operators could be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector [7,13,16-22]. For example, the Hurwicz OWAAC criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz OWAAC criteria becomes the maximum and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum.

Note that the median and the weighted median can be used as OWAAC operators. For the OWAAC median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument K_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest K_i. For the weighted OWAAC median, we select the argument that has the kth largest K_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

When $w_j = 1/m$ for $k \le j \le k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-OWAAC operator that it is based on the window-OWA operator [16]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \le n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-OWAAC is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, then, the window-OWAAC becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-OWAAC is transformed in the normalized adequacy coefficient.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-OWAAC average that it is based on the olympic average [18]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-OWAAC average is transformed in the OWAAC median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-OWAAC is transformed in the olympic-OWAAC average.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z OWAAC weights that it is based on the E-Z OWA weights [20]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n, and in the second class we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$.

Another interesting family is the S-OWAAC operator based on the S-OWA operator [16,22]. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-OWAAC operator. The "orlike" S-OWAAC operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-OWAAC operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-OWAAC operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \le 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-OWAAC operator becomes the "andlike" S-OWAAC operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-OWAAC operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-OWAAC operator becomes the Hurwicz criteria.

Another family of aggregation operators that could be used in the OWAAC operator is the centered-OWA weights. This type of operator has been suggested by Yager [21] for the OWA operator. Following the same methodology, we could say that an OWAAC operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \le (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \ge (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \le w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-OWAAC operator. Note that the normalized adequacy coefficient is an example of this particular case of centered-OWAAC operator. Another particular situation of the centered-OWAAC operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-OWAAC operator. For this situation, we find the median as a particular case.

Other families of OWAAC operators that could be considered are the dependent OWAAC weights, the maximal entropy OWAAC (MEOWAAC) weights, etc.

Also note that it is possible to obtain different families of aggregation operators with the OWADAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the normalized dual adequacy coefficient (NDAC) and the weighted dual adequacy coefficient (WDAC). The maximum is obtained in the same form than the minimum of the OWAAC and the minimum in the same form than the maximum of the OWAAC. The NDAC is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WDAC is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Other families could be obtained following the same methodology as explained above for the OWAAC operator.

5. Selection of investments with the OWAAC operator

The reason for using the OWAAC operators in the selection of investments appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase. This can be useful in a lot of situations, for example, in situations where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more conservative decision than in normal cases. Obviously, this increase in the risk aversion can affect our decision doing that we select a different investment than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of investments with the OWAAC operator is similar to the process developed in [8-9], with the difference that now we are considering a problem of investments instead of financial products. The 5 steps to follow are:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the available investments for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider of the investment and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal investment. That is:

Table 1. Ideal investment

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P =$	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

where P is the ideal investment expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different investments considered. That is:

Table 2. Available alternatives

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

with k = 1, 2, …, m; where P_k is the kth investment expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$; i = 1, …, n, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth investment.

Step 4: Comparison between the ideal investment and the different alternatives considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them. In this step, the objective is to express numerically the removal between the ideal investment and the different alternatives considered. For this, it can be used the different available selection indexes shown in Sections 3 and 4.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps. Finally, we should take the decision about which investment select. Obviously, our decision will consist in choose the investment with the best results according to the index used.

6. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to see the results obtained in the aggregation by using different types of OWAAC operators. The information about the example is found in [12] although we have made some changes in the paper. We will study the selection of investments where the decision maker needs to find the best investment according to his interests. Note that other selection problems could be developed such as the selection of human resources or financial products [1-12].

Assume that an enterprise wants to increase its volume of activities. In order to do this, the board of directors has established five possible investments that the enterprise could develop in the future. They have submitted this information to their experts. After careful review of the information, the experts have given the following general information. They have summarized the information of the investments in five main characteristics C_i with the following results. Note that the results are valuations between 0 and 1.

Table 3. Characteristics of the investments

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A	0.7	0.6	0.6	0.4	0.9
B	0.5	0.7	0.7	0.6	0.7
C	0.2	0.8	0.9	0.4	0.9
D	0.6	0.7	0.8	0.7	0.6
E	0.7	0.5	0.8	0.3	0.8

According to the objectives and policies of the enterprise, the experts have established the ideal investment for the enterprise independently of the investments available. They have established the following valuations for it.

Table 4. Ideal investment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Ideal	0.8	0.9	1	0.6	0.8

With this information we can develop different aggregation methods in order to select an investment such as the normalized adequacy coefficient, the weighted adequacy coefficient, the OWAAC operator and the AOWAAC operator. Note that for the last three cases we will use the weighting vector $W = (0.1, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2)$. Also note that for the normalized adequacy coefficient, we will use Eq.2; for the weighted adequacy coefficient, Eq.3; for the OWAAC and for the AOWAAC operator, Eq.4. The results are shown in table 5.

Table 5. Aggregated results

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
A	0.8	0.78	0.79	0.81
B	0.82	0.83	0.81	0.82
C	0.8	0.85	0.79	0.84
D	0.84	0.84	0.82	0.84
E	0.8	0.77	0.79	0.81

As we can see, if we use the NAC or the OWAAC, our decision will be investment *D*. If we use the WAC, then our optimal choice is *C*. And if we use the AOWAAC, our choice can be either *C* or *D*.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \to P) = 1 - K(P_k \to P)$. The results are shown in table 6.

Table 6. Aggregated results with the dual coefficient

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
A	0.2	0.22	0.21	0.19
B	0.18	0.17	0.19	0.18
C	0.2	0.15	0.21	0.16
D	0.16	0.16	0.18	0.16
E	0.2	0.23	0.21	0.19

Now, we are going to study different families of OWAAC operators. We will consider the step-OWAAC operator ($k = 4$), the OWAAC median, the olympic-OWAAC and the EZ-OWAAC operator ($k = 2$). The results are shown in table 7.

Table 7. Families of OWAAC operators

	Step	*Median*	*Olympic*	*EZ-1*	*EZ-2*
A	0.7	0.8	0.8	0.65	0.95
B	0.7	0.8	0.8	0.7	0.95
C	0.8	0.9	0.86	0.6	0.95
D	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9
E	0.7	0.8	0.8	0.65	0.95

As we can see, we will select a different investment depending on the family of OWAAC operators used in the aggregation. With the EZ-2 OWAAC operator, we will be indifferent in selecting alternative *A*, *B*, *C* or *E*. With the OWAAC median and the olympic-OWAAC, our choice will be alternative *C*. With the first class of EZ-EOWAD weights, our choice will consist in selecting alternative *D*. Finally, with the step-OWAAC operator, our choice will be alternative *C* or *D*.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in table 8. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 8. Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
NAC	$A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_3=A_5$	*Step*	$A_3=A_4 \succ A_1=A_2=A_5$
WAC	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$	*Median*	$A_3 \succ A_1=A_2=A_4=A_5$
OWAAC	$A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_3=A_5$	*Olympic*	$A_3 \succ A_1=A_2=A_4=A_5$
AOWAAC	$A_3=A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_5$	*EZ-1*	$A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_5 \succ A_3$
		EZ-2	$A_1=A_2=A_3=A_5 \succ A_4$

As a general conclusion for the example, we can see that depending on the method used in the selection process, our decision will be different. Note that the method used has to be in accordance with the interests of the decision maker.

7. Conclusion

We have developed the OWAAC operator. First we have reviewed some basic concepts such as the OWA operator and the adequacy coefficient. Then, we have developed the OWAAC operator. We have defined it and we have studied some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders and the measures for characterizing the weighting vector. Next, we have develop different examples of OWAAC operators such as the maximum, the minimum, the normalized adequacy coefficient, the weighted adequacy coefficient, the step-OWAAC operator, the OWAAC median, the window-OWAAC operator, the olympic-OWAAC average and the E-Z OWAAC weights. Finally, we have developed an illustrative example where we have seen the different results obtained by using these methods in a decision making problem.

References

[1] J. Gil-Aluja, "The interactive management of human resources in uncertainty", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[2] A.M. Gil-Lafuente, "Técnicas de selección de un instrumento financiero", in: V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica, Vigo, Spain, 1990.

[3] A.M. Gil-Lafuente, "Fuzzy logic in financial analysis", Springer, Berlin, 2005.

[4] J. Gil-Lafuente, "Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva", Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[5] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, “Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas”, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.
[6] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, “Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre”, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
[7] J.M. Merigó, “Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial”, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
[8] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Using the OWA operators in the selection of financial products”, in: Proceedings of the 41st CLADEA Congress, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.
[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Selection of financial products that adapt to different environments”, in: Proceedings of the MS International Conference, Konya, Turkey, pp. 719-723, 2006.
[10] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Unification point in methods for the selection of financial products”, Fuzzy Economic Review, 13: 35-50, 2007.
[11] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “The ordered weighted averaging distance operator”, in: Proceedings of the MS International Conference, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “On the use of the OWA operator in the Euclidean distance”, in: Proceedings of the MS International Conference, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[13] Z.S. Xu, “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, International Journal of Intelligent Systems, 20: 843-865, 2005.
[14] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 18: 183-190, 1988.
[15] R.R. Yager, “On generalized measures of realization in uncertain environments”, Theory and Decision, 33: 41-69, 1992.
[16] R.R. Yager, “Families of OWA operators”, Fuzzy Sets and Systems, 59: 125-148, 1993.
[17] R.R. Yager, “On weighted median aggregation”, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, 2: 101-113, 1994.
[18] R.R. Yager, “Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators”, International Journal of Intelligent Systems, 11: 49-73, 1996.
[19] R.R. Yager, “Heavy OWA Operators”, Fuzzy Optimization and Decision Making, 1: 379-397, 2002.
[20] R.R. Yager, “E-Z OWA weights”, in: Proceedings of the 10th IFSA World Congress, Istanbul, Turkey, pp. 39-42, 2003.
[21] R.R. Yager, “Centered OWA operators”, Soft Computing, 11: 631-639, 2007.
[22] R.R. Yager, D.P. Filev, “Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators”, International Journal of General Systems, 22: 297-316, 1994.
[23] R.R. Yager, J. Kacprzyk, “The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications”, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.1.19. Artículo de congreso 19. – Publicado en SIGEF 2007

DECISION MAKING USING MAXIMIZATION OF NEGRET

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Abstract: - We analyze the problem of decision making under ignorance with regrets. Recently, Yager has developed a new method for decision making where instead of using regrets he uses another type of transformation called negrets. Basically, the negret is considered as the dual of the regret. We study this problem in detail and we suggest the use of geometric aggregation operators in this method. For doing this, we develop a different method for constructing the negret matrix where all the values are positive. The main result obtained is that now the model is able to deal with negative numbers because of the transformation done in the negret matrix. We further extent these results to another model developed also by Yager about mixing valuations and negrets. Unfortunately, in this case we are not able to deal with negative numbers because the valuations can be either positive or negative.

Keywords: - Decision making; Aggregation operators; Negret; OWA operator; OWG operator; Uncertainty.

1 INTRODUCTION

In the literature, we find a wide range of aggregation operators for fusing the information such as the ordered weighted averaging (OWA) operator and the ordered weighted geometric (OWG) operator. The OWA operator was introduced by Yager (1988) and it provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, among others. The OWG operator is a geometric version of the OWA operator introduced by Chiclana et al. (2000) and it also provides a parameterized family of aggregation operators. For further reading on the OWA or the OWG operator, see for example (Calvo et al., 2002; Herrera et al., 2003; Merigó, 2007; Merigó and Casanovas, 2006; Xu, 2002; 2005; Xu and Da, 2002; Yager, 1992, 1993; 1996; 2003; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

In (1951, 1954), Savage introduced the concept of decision making with minimization of regret. It consists in a decision process where the payoffs are transformed in regret values that express the regret against the optimal choice for each state of nature. Recently, Yager (2004) has suggested a different method for dealing with regrets. He develops a process that uses the dual of the regret. He refers to these values as the negret against the optimal choice. Then, by using the OWA operator, this method provides a parameterized family of negret aggregation operators. Moreover, this method can also be mixed with the usual valuation methods because in both cases the optimal choice is the one with the highest value.

In this paper, we suggest a new method for decision making under ignorance with negrets. We propose the use of geometric aggregation operators in decision making with maximization of negret. For doing this, we will develop a new procedure for constructing the negret matrix where we will transform all the negret values in positive numbers. Then, we will be able to use the OWG operator because it can only deal with positive numbers. Furthermore, we will apply this new approach in Yagers model (2004) about mixing valuation and regret methods. Unfortunately, in this case, we are not able to deal with negative numbers when using the OWG operator because the usual valuations can be either positive or negative. It is also interesting to note that other transformations could be developed in the negret matrix. Among them, one possible construction could be the construction used in the Analytic Hierarchy Process (AHP) (Saaty, 1980). The problem found in this particular construction is that it cannot deal with negative numbers when using geometric aggregation operators because the results become inconsistent. Therefore, in this paper we prefer to focus on a method that is able to deal with negative numbers.

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we briefly comment some basic aggregation operators to be used throughout the paper. In Section 3, we analyze the decision making problem with maximization of negret. In Section 4, we study a more general model about mixing valuation and regret methods. Finally, in Section 5, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using the new approaches suggested in the paper.

2 PRELIMINARIES

In this Section we briefly describe some basic aggregation operators to be used throughout the paper such as the OWA operator, the geometric mean (GM) and the OWG operator.

2.1 OWA operator

The OWA operator was introduced in (Yager, 1988) and it provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in a wide range of applications (Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992, 1993; 1996; 2003; 2004; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997). In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager (1988).

Definition 1: An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA: R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotone, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the OWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the average criteria among others (Xu, 2005; Yager, 1988; 1993; 1996; 2003; 2004; 2007; Yager and Filev, 1994).

2.2 Geometric mean

The geometric mean is a traditional aggregation operator which has been used for different applications such as in (Azcel and Saaty, 1983; Azcel and Alsina, 1987) for ratio-scale judgements. It is defined as follows:

Definition 2: A geometric mean operator of dimension n is a mapping F: $R^{+n} \rightarrow R^{+}$, defined as:

$$\text{GM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\frac{1}{n}} \tag{2}$$

where R^{+} is the set of positive real numbers. The geometric mean is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that it is also possible to consider a situation where the weights of the arguments have different degrees of importance. Then, we are using the weighted geometric mean (WGM).

2.3 Ordered Weighted Geometric (OWG) operator

The OWG operator was introduced in (Chiclana et al., 2000) and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator. It uses in the same aggregation the OWA operator and the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by (Xu and Da, 2002).

Definition 3: An OWG operator of dimension n is a mapping OWG:$R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$OWG(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^+ is the set of positive real numbers.

From a generalized perspective of the reordering step in the OWG operator, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators (Xu and Da, 2002). The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DOWG (or OWG) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AOWG operator. Note that it accomplishes similar properties than the OWA operator (Chiclana et al., 2000; Herrera et al., 2003; Merigó, 2007; Xu, 2002; Xu and Da, 2002). For example, in this operator it is also found the maximum and the minimum as particular cases. Other families found in this aggregation are the geometric mean, the weighted geometric mean, the Hurwicz geometric criteria, etc.

3 DECISION MAKING USING MAXIMIZATION OF MINIMAL NEGRET

3.1 Introduction

The use of maximization of minimal regret in decision making was introduced by Yager (2004). This model is similar to the minimization of regret process. The difference is that the negret process considers first the payoff c_{ij} while the regret process considers first the maximal payoff C_j for each state of nature. That is, the regret is calculated as: $C_j - c_{ij}$; while the negret as: $c_{ij} - C_j$. With this information, we can summarize the basic steps when taking decisions with the negret method as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix E whose components are the e_{ij}, is the negret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do this, the following steps should be taken:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $e_{ij} = c_{ij} - C_j$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $E_i = \text{OWA}(e_{i1}, \ldots, e_{in})$ using Eq. 1, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $E_{i*} = \text{Max}_i\{E_i\}$.

As we can see, once we calculate the negret matrix, we aggregate the information obtained with the OWA operator. This method suggested by Yager is a general one that includes among others the pessimistic, the optimistic and the average criteria. These particular situations are obtained by using a different manifestation in the weighting vector of Step 4. Then:

1) When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$; we are using an optimistic aggregation operator.

2) When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$; we are using a pessimistic criteria.
3) When $w_j = 1/\text{n}$, for all j; we are aggregating the negret matrix with the average criteria.

Note that we will refer to this decision process as the Max-OWA-Negret procedure. Also note that other families of Max-OWA-Negret operators could be used in the aggregation of the negret matrix such as the step-OWA, the window-OWA, the olympic-OWA, the OWA median, the centered-OWA, the S-OWA, the maximal entropy OWA, etc.

3.2 Using the OWG operator in decision making with maximization of negret

The use of the OWG operator in decision making with maximization of negret is an alternative when taking decisions with negret methods. It consists in using the OWG operator in the aggregation step of the negret matrix. When using geometric operators, we need to modify the negret matrix because it cannot deal with negative numbers. This problem has also been considered for the regret matrix (Merigó and Casanovas, 2006). Then, the transformation we suggest is to sum the minimum argument in absolute numbers plus the maximum argument and plus one: $c_{ij} - C_j + | \text{Min}\{c_{ij}\} + C_j | + 1$. With this construction in the negret matrix, we are able to aggregate with geometric aggregation operators because now, all the arguments are positive. The decision process will be the same as for the case with OWA operators with the differences commented above. We can summarize the procedure as follows:

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix E whose components are the e_{ij}, is the negret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. Note that we refer to this process as the Max-OWG-Negret. In order to do this, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $e_{ij} = c_{ij} - C_j + | \text{Min}\{c_{ij}\} | + | C_j | + 1$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $E_i = \text{OWG}(e_{i1}, \ldots, e_{in})$ using Eq. 3, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $E_{i*} = \text{Max}_i\{E_i\}$.

As we can see, the main difference in this decision procedure is that now we use geometric aggregation operators. Therefore, we need to develop a different negret matrix in order to obtain positive numbers because the OWG operator cannot aggregate negative numbers.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Max-OWG-Negret operator and the ascending Max-OWG-Negret operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Max-DOWG-Negret and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Max-AOWG-Negret operator. As we can see, the main difference is that in the Max-AOWG-Negret operator, the elements e_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_n$ while in the Max-DOWG-Negret (or Max-OWG-Negret) they are ordered in a decreasing way.

Another interesting issue to consider is the properties of this generalized Max-OWG-Negret method:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $e_i \geq d_i$ for all $i \Rightarrow$ OWG($e_1,\ldots, e_n$) $\geq$ OWG($d_1,\ldots, d_n$).
3) Boundedness: Min{e_i} $\leq$ OWG($e_1,\ldots, e_n$) $\leq$ Max{e_i}.
4) Idempotency: If $e_i = e$, for all $i \Rightarrow$ OWG($e_1,\ldots, e_n$) = e.

As we can see, the generalized Max-OWG-Negret method accomplishes the same properties as the original OWG operator.

In this case, it is also included as particular cases the maximum and the minimum. The maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$; and the minimum when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The geometric mean is also a special type of aggregation operator found in this model. It appears when w_j = 1/n, for all j.

Other families of OWG operators could be used such as the S-OWG operator, the olympic-OWG, the E-Z OWG weights, the OWG median, the centered-OWG operator, etc. For example, if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j^*} = 1/(n-2)$, we are using the Max-olympic-OWG-Negret. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the Max-olympic-OWG-Negret is transformed in the Max-median-OWG-Negret and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the Max-window-OWG-Negret is transformed in the Max-olympic-OWG-Negret.

Another interesting family is the Max-S-OWG-Negret operator. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized Max-S-OWG-Negret. The "orlike" Max-olympic-OWG-Negret operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for j = 2 to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the Max-GM-Negret and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" Max-S-OWG-Negret operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for j = 1 to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the Max-GM-Negret and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized Max-S-OWG-Negret operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for j = 2 to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized Max-S-OWG-Negret becomes the "andlike" Max-S-OWG-Negret and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" Max-S-OWG-Negret operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized Max-S-OWG-Negret operator becomes the Max-Hurwicz-OWG-Negret criteria.

We note that the median and the weighted median can also be used as Max-OWG-Negret operators. For the Max-median-OWG-Negret, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. For the weighted Max-median-OWG-Negret, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another family of aggregation operator that could be used is the Max-centered-OWG-Negret operator. We can define a Max-centered-OWG-Negret operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying Max-centered-OWG-Negret operator. Note that the Max-GM-Negret is an example of this particular case. Another particular situation of the Max-centered-OWG-Negret operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive Max-centered-OWG-Negret operator. For this situation, we find the Max-median-OWG-Negret as a particular case.

4 USING VALUATION AND NEGRET METHODS IN THE SAME DECISION PROCESS

4.1 Introduction

A more general formulation for decision making was introduced by Yager in (2004) where he suggested a combination between valuation and negret methods in the same decision model. This process is summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. Let $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j. Then:

Step 1: Let $m_{ij} = c_{ij} - \alpha C_j$ where $\alpha \in [0, 1]$.
Step 2: For each alternative A_i, calculate $M_i = \text{OWA}(m_{i1}, \ldots, m_{in})$.
Step 3: Select the alternative A_q such that $M_q = \text{Max}_i\,[M_i]$.

This process can be denoted as Max-OWA/α-Val/Neg method. As we can see, if $\alpha = 0$, we get the usual Max-OWA-Val method and if $\alpha = 1$, we get the Max-OWA-Negret method. Note that m_{ij} can be also formulated as $m_{ij} = \alpha\, e_{ij} + (1 - \alpha)\, c_{ij}$. Also note that it is possible to consider a wide range of families of Max-OWA/α-Val/Neg such as the Max-step-OWA/α-Val/Neg, the Max-window-OWA/α-Val/Neg, the Max-centered-OWA/α-Val/Neg, the Max-SOWA/α-Val/Neg, etc.

In this process we could also study different properties such as commutativity, monotonicity, boundedness and idempotency. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWA(m_1, m_2,\ldots, m_n) = OWA(p_1, p_2,\ldots, p_n)$, where $(p_1,\ldots,p_n)$ is any permutation of the arguments $(m_1,\ldots,m_n)$. It is monotonic because if $m_i \geq p_i$, for all m_i, then, $OWA(m_1, m_2,\ldots, m_n) \geq OWA(p_1, p_2,\ldots, p_n)$. It is bounded because the OWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{m_i\} \leq OWA(m_1, m_2,\ldots, m_n) \leq \text{Max}\{m_i\}$. It is idempotent because if $m_i = m$, for all m_i, then, $OWA(m_1, m_2,\ldots, m_n) = m$.

4.2 Mixing valuation and negret methods with the OWG operator

Now we are going to further extend the previous method when using geometric aggregation operators. The process is very similar with the difference that now we use the OWG operator in the aggregation step. The process can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. Let $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j. Then:

Step 1: Let $m_{ij}^* = c_{ij} + \alpha[|\text{Min}\{c_{ij}\}| + |\text{Max}\{c_{ij}\}| - C_j + 1]$ where $\alpha \in [0, 1]$. Note that this result is equivalent to $m_{ij}^* = m_{ij} + \alpha[|\text{Min}\{c_{ij}\}| + |\text{Max}\{c_{ij}\}| + 1]$.

Step 2: For each alternative A_i, calculate $M_i^* = \text{OWG}(m_{i1}^*, \ldots, m_{in}^*)$.

Step 3: Select the alternative A_q such that $M_q^* = \text{Max}_i\,[M_i^*]$.

This process can be denoted as Max-OWG/α-Val/Neg method. From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Max-OWG/α-Val/Neg operator and the ascending Max-OWG/α-Val/Neg operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the dual situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Max-DOWG/α-Val/Neg and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Max-AOWG/α-Val/Neg operator.

Note that different properties could be studied in this method. It is easy to see that this method is commutative, monotonic, idempotent and bounded. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWG(m_1^*, m_2^*,\ldots, m_n^*) = OWG(p_1^*, p_2^*,\ldots, p_n^*)$, where $(p_1^*,\ldots, p_n^*)$ is any permutation of the arguments $(m_1^*,\ldots, m_n^*)$. It is monotonic because if $m_i^* \geq p_i^*$, for all m_i^*, then, $OWG(m_1^*, m_2^*,\ldots, m_n^*) \geq OWG(p_1^*, p_2^*,\ldots, p_n^*)$. It is bounded because the OWG aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{m_i^*\} \leq OWG(m_1^*, m_2^*,\ldots, m_n^*) \leq \text{Max}\{m_i^*\}$. It is idempotent because if $m_i^* = m^*$, for all m_i^*, then, $OWG(m_1^*, m_2^*,\ldots, m_n^*) = m^*$.

As we can see, if $\alpha = 0$, we get the usual Max-OWG-Val method and if $\alpha = 1$, we get the Max-OWG-Negret method. Note that it is possible to consider a wide range of families of Max-OWG/α-Val/Neg such as the Max-step-OWG/α-Val/Neg, the Max-window-OWG/α-Val/Neg, the Max-centered-OWG/α-Val/Neg, the Max-SOWG/α-Val/Neg, etc.

For example, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get the Max-step-OWG/α-Val/Neg method. The Max-GM/α-Val/Neg method is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$.

When $w_{j^*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$, we are using the Max-window-OWG/α-Val/Neg operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the Max-window-OWG/α-

Val/Neg becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg is transformed in the geometric mean.

Another type of aggregation that could be used is the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j* = 1$ to $n - q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg becomes the maximum. And if $q = 1$ for the second class, the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg becomes the minimum. Note that the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg is transformed in the Max-GM/α-Val/Neg if $q = n$. If $q = m$ and $k = 1$, the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg becomes the Max-window-OWG/α-Val/Neg for the first class. And for the second class, it is found the Max-window-OWG/α-Val/Neg if $q = m$ and $k = n - q + 1$.

When $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the Max-olympic-OWG/α-Val/Neg. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the Max-olympic-OWG/α-Val/Neg is transformed in the Max-median-OWG/α-Val/Neg and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg is transformed in the Max-olympic-OWG/α-Val/Neg.

Note that the median and the weighted median can also be used as Max-OWG/α-Val/Neg operators. For the Max-median-OWG/α-Val/Neg, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted Max-median-OWG/α-Val/Neg, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another family of aggregation operator that could be used is the Max-centered-OWG/α-Val/Neg. We can define a Max-centered-OWG/α-Val/Neg as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator. Note that the Max-GM/α-Val/Neg is an example of this particular case of Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator. Another particular situation of the Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator. For this situation, we find the Max-median-OWG/α-Val/Neg as a particular case.

Another interesting family is the Max-S-OWG/α-Val/Neg operator. It can be subdivided in three classes, the “orlike”, the “andlike” and the generalized Max-S-OWG/α-Val/Neg. The “orlike” Max-S-OWG/α-Val/Neg operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the geometric mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The “andlike” Max-S-OWG/α-Val/Neg operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the geometric mean and if β = 1, we get the minimum. Finally, the generalized Max-window-OWG/α-Val/Neg operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for j = 2 to n – 1 where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if α = 0, the generalized Max-S-OWG/α-Val/Neg operator becomes the "andlike" Max-S-OWG/α-Val/Neg operator and if β = 0, it becomes the "orlike" Max-S-OWG/α-Val/Neg operator. Also note that if $\alpha + \beta$ = 1, the generalized Max-S-OWG/α-Val/Neg operator becomes the Max-Hurwicz-OWG/α-Val/Neg criteria.

5 ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an example in order to understand numerically all the procedures commented above. We will develop a decision making problem under ignorance about selection of investments. We will develop different transformations in the initial payoff matrix such as the usual regret matrix, the geometric regret matrix, the arithmetic negret matrix, the geometric negret matrix, the arithmetic combination between valuations and negrets, and the geometric combination between valuations and negrets. Then, we will aggregate these matrixes with different types of aggregation operators. For the arithmetic matrixes, we will consider the average (AM), the weighted average (WA), the OWA operator and the AOWA operator, and for the geometric ones, the geometric mean (GM), the weighted geometric mean (WGM), the OWG and the AOWG operators.

We should note that in these methods the results obtained from the aggregations are relevant for selecting an alternative but not for considering the specific result obtained. In this example, we will assume the following weighting vector when necessary: W = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3). For the parameter α to be used in the combination between valuations and negrets, we will consider that α = 0.5.

Step 1: Assume an investment company has five possible investments and they want to select the alternative that better adapts to his interests.

1) A_1 is a car company.
2) A_2 is a food company.
3) A_3 is a computer company.
4) A_4 is a chemical company.
5) A_5 is a TV company.

The possible results depending on the state of nature that happens in the future are shown in Table 1.

Table 1: Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	60	80	40	40
A_2	40	20	90	30	70
A_3	30	50	70	60	60
A_4	80	80	20	20	40
A_5	20	10	30	80	90

Step 2: Calculate the transformed matrixes. For the regret matrix we will use $C_j = \mathrm{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j and $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j, and for the geometric regret matrix we will consider $r_{ij} = C_j - c_{ij} + 1$. For the negret matrix we will use $e_{ij} = c_{ij} - C_j$; for each pair A_i and S_j, and for the geometric negret matrix we will consider $e_{ij} = c_{ij} - C_j + |\,\mathrm{Min}\{c_{ij}\}\,| + |\,C_j\,| + 1$. For the combination between valuations and negrets we will use $m_{ij} = c_{ij} - \alpha C_j$ where $\alpha = 0.5$, and for the geometric version, $m_{ij}^* = c_{ij} + \alpha\,[|\,\mathrm{Min}\{c_{ij}\}\,| + |\,\mathrm{Max}\{c_{ij}\}\,| - C_j + 1]$. The results are shown in tables 2 – 7.

Table 2: Regret matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	50	20	10	40	50
A_2	40	60	0	50	20
A_3	50	30	20	20	30
A_4	0	0	70	60	50
A_5	60	70	60	0	0

Table 3: Regret matrix for the geometric operators

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	51	21	11	41	51
A_2	41	61	1	51	21
A_3	51	31	21	21	31
A_4	1	1	71	61	51
A_5	61	71	61	1	1

Table 4: Negret matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	–50	–20	–10	–40	–50
A_2	–40	–60	0	–50	–20
A_3	–50	–30	–20	–20	–30
A_4	0	0	–70	–60	–50
A_5	–60	–70	–60	0	0

Table 5: Negret matrix for the geometric operators

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	51	81	61	61	51
A_2	61	41	51	51	81
A_3	51	71	81	81	71
A_4	101	101	41	41	51
A_5	41	31	101	101	101

Table 6: Combination matrix between valuations and negrets

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	–10	20	35	0	–5
A_2	0	–20	45	–10	25
A_3	–10	10	25	20	15
A_4	40	40	–25	–20	–5
A_5	–20	30	–15	40	45

Table 7: Geometric combination between valuations and negrets

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	40.5	70.5	70.5	50.5	45.5
A_2	50.5	30.5	70.5	40.5	75.5
A_3	40.5	60.5	75.5	70.5	65.5
A_4	90.5	90.5	30.5	30.5	45.5
A_5	30.5	20.5	65.5	90.5	95.5

Step 3: Aggregate the previous matrixes with their corresponding aggregation operators. We will aggregate the regret matrix (Table 2), the negret matrix (Table 4) and the combination matrix between valuations and negrets (Table 6), with the AM, with the weighted average (WA), with the OWA operator and with the AOWA operator. The regret matrix for the geometric operators, the negret matrix for the geometric operators and the geometric combination between valuations and negrets will be aggregated with the GM, the WGM, the OWG operator and the AOWG operator. The results of the aggregation process are shown in Tables 8 – 13.

Table 8: Aggregated regret

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	34	36	27	41
A_2	34	31	25	43
A_3	30	27	26	34
A_4	36	47	23	49
A_5	38	25	25	51

Table 9: Aggregated regret for the geometric transformation

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	30,08	32.16	23.61	38.32
A_2	19.3	17.73	11.70	31.81
A_3	29.3	26.81	25.79	33.29
A_4	11.71	26.18	5.07	27.07
A_5	12.14	5.25	5.25	28.05

Table 10: Aggregated negret

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	–34	–36	–27	–41
A_2	–34	–31	–25	–43
A_3	–30	–27	–26	–34
A_4	–36	–47	–23	–49
A_5	–38	–25	–25	–51

Table 11: Aggregated negret for the geometric transformation

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	60.09	58.41	56.36	64.08
A_2	55.5	58.36	50.93	60.49
A_3	70.05	73.36	66.00	74.34
A_4	61.42	52.42	51.29	73.56
A_5	66.59	82.01	54.07	82.01

Table 12: Aggregated results of the combination between valuations and negrets

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	8	6.5	1	15
A_2	8	11.5	–2	18
A_3	12	15.5	7.5	16.5
A_4	6	–4.5	–6.5	18.5
A_5	16	23.5	4	28

Table 13: Aggregated results of the geometric combination between valuations and negrets

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	54.07	52.91	48.97	59.71
A_2	50.61	54.20	43.73	58.56
A_3	61.13	65.13	56.57	66.07
A_4	51.04	42.74	41.06	63.45
A_5	51.26	66.65	39.42	66.65

Step 4: Select the optimal investment for each decision process. As we can see, we will select alternative 3 for the Min-AM-Regret, the Min-AOWA-Regret, the Max-AM-Negret, the Max-AOWA-Negret, the Max-OWA/α-Val/Neg, the Max-GM-Negret, the Max-OWG-Negret, the Max-GM/α-Val/Neg, and for the Max-OWG/α-Val/Neg. Alternative 4 will be selected if we use the Min-OWA-Regret, the Max-OWA-Negret, the Min-GM-Regret, the Min-OWG-Regret and the Min-AOWG-Regret. Finally, we will select alternative 5 if we use the Min-WA-Regret, the Max-WA-Negret, the Max-AM/α-Val/Neg, the Max-WA/α-Val/Neg, the Max-AOWA/α-Val/Neg, the Min-WGM-Regret, the Max-WGM-Negret, the Max-AOWG-Negret, the Max-WGM/α-Val/Neg and the Max-AOWG/α-Val/Neg.

Another possibility is to establish an ordering of the investments. The results are shown in Table 14. Note that $\succ$ means *preferred to*.

Table 14: Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
Min-AM-Regret	$A_3 \succ A_1 = A_2 \succ A_4 \succ A_5$	*Min-GM-Regret*	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Min-WA-Regret	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	*Min-WGM-Regret*	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
Min-OWA-Regret	$A_4 \succ A_2 = A_5 \succ A_3 \succ A_1$	*Min-OWG-Regret*	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$
Min-AOWA-Regret	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$	*Min-AOWG-Regret*	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Max-AM-Negret	$A_3 \succ A_1 = A_2 \succ A_4 \succ A_5$	*Max-GM-Negret*	$A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
Max-WA-Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	*Max-WGM-Negret*	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
Max-OWA-Negret	$A_4 \succ A_2 = A_5 \succ A_3 \succ A_1$	*Max-OWG-Negret*	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
Max-AOWA-Negret	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$	*Max-AOWG-Negret*	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
Max-AM/α-Val/Neg	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 = A_2 \succ A_4$	*Max-GM/α-Val/Neg*	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
Max-WA/α-Val/Neg	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	*Max-WGM/α-Val/Neg*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
Max-OWA/α-Val/Neg	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	*Max-OWG/α-Val/Neg*	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
Max-AOWA/α-Val/Neg	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$	*Max-AOWG/α-Val/Neg*	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$

As we can see, depending on the decision process used, the ordering of the investments will be different. Note that each decision maker will select a different process depending on its own characteristics and interests.

6 CONCLUSIONS

In this paper we have developed a new approach for decision making under ignorance. We have introduced the use of geometric aggregation operators in decision making with maximization of negret. We have seen that the negret matrix cannot be constructed in the same way as with the arithmetic version because the OWG operator cannot aggregate negative numbers. Therefore, a new scheme has been suggested for constructing the negret matrix. With this new method, we have been able to transform the negative numbers of the initial negret matrix in positive numbers that can be used with the OWG operator. From a general point of view, this method is very practical in the sense that it permits to deal with negative numbers when using the OWG operator because of the transformation done in the negret matrix.

Furthermore, we have extended Yager's method about mixing valuation and negret methods in the same decision process for the case when using geometric aggregation operators. We have seen that this method permits to mix the payoffs with the regrets. Unfortunately, this method is not able to deal with negative numbers because the valuation results can be either positive or negative.

Finally, an illustrative example has been given about the use of the new approaches suggested in the paper. We have focused in an investment selection problem where we have seen the different results obtained depending on the method used.

References

Azcel, J., Saaty, T.L. (1983). "Procedures for synthesizing ratio judgements", *Journal of Mathematical Psychology*, 27, pp. 93-102.

Azcel, J., Alsina, C. (1987). "Synthesizing judgements: A functional equations approach", *Mathematical Modelling*, 9, pp. 311-320.

Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. (2000). "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991.

Merigó, J.M. (2007) *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., Casanovas, M. (2006). "Methods for decision making using minimization of regret", in: *Proc. 13th Congress of the International Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, pp.747-763.

Saaty, T.L. (1980). *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York.

Savage, L.J. (1951). "The theory of statistical decision", *Journal of American Statistical Association*, 46, pp. 55-67.

Savage, L.J. (1954). *The foundations of statistics*, John Wiley & Sons, New York.
Xu, Z.S. (2002). “A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP”, *Systems, Engineering and Electronics*, 24, pp. 31-33.
Xu, Z.S. (2005). “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 843-865.
Xu, Z.S., Da, Q.L. (2002). “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, 17, pp. 709-716.
Yager, R.R. (1988). “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.
Yager, R.R. (1992). “On generalized measures of realization in uncertain environments”, *Theory and Decision,* 33, pp. 41-69.
Yager, R.R. (1993). “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.
Yager, R.R. (1996). “Quantifier guided aggregation using OWA operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.
Yager, R.R. (2003). “E-Z OWA weights”, in: *Proc. 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, pp. 39-42.
Yager, R.R. (2004). “Decision making using minimization of regret”, *International Journal of Approximate Reasoning*, 36, pp. 109-128.
Yager, R.R. (2007). “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.
Yager, R.R., Filev, D.P. (1994). “Parameterized andlike and orlike OWA Operators”, *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.
Yager, R.R., Kacprzyk, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.20. Artículo de congreso 20. – Publicado en SIGEF 2007

THE FUZZY GENERALIZED OWA OPERATOR

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Abstract: - We study different types of aggregation operators used for decision making. We focus on the generalized OWA (GOWA) operator which generalizes a wide range of aggregation operators. We introduce the fuzzy generalized OWA (FGOWA) operator which represents an extension to the GOWA operator for uncertain situations where the available information is given in the form of fuzzy numbers. We study some of its main properties and some special cases found with it. We also develop a further generalization by using quasi-arithmetic means that we call the Quasi-FOWA operator. The paper ends with an illustrative example where we apply the new approach in the selection of strategies.

Keywords: - Aggregation operators, Fuzzy OWA operator, Decision making, Selection of strategies.

1 INTRODUCTION

Different types of aggregation operators are found in the literature for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the maximum, the minimum and the average criteria. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications (Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997).

When using the OWA operator, it is assumed that the available information is exact numbers. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, it is necessary to use another approach that is able to assess the uncertainty such as the use of fuzzy numbers (FN). With the use of FN, we are able to analyze the best and worst possible scenario and the possibility that the internal values of the fuzzy interval will occur. This approach has received different names. In this paper, we will refer to it as the fuzzy OWA operator. The main characteristic of this operator is that it uses uncertain information in the aggregation represented by FN. The FOWA operator has been studied by different authors (Merigó, 2007; Canfora and Troiano, 2001; S.J. Chen and S.M. Chen, 2003).

Recently, Yager (2004) has suggested a generalized version of the OWA operator by using the generalized mean. He called this generalization the generalized OWA (GOWA) operator. Then, Yager offered a generalization that included the special cases found in the OWA operator such as the maximum or the minimum and the special cases found in the generalized mean such as the geometric or the harmonic mean. Note that this generalization has also been considered in (Karayiannis, 2000; Karayiannis and Randolph-Gips, 2005). Also note that this generalization is different from the one developed by Schaefer and Mitchell (1999). The GOWA operator has been further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005). Then, the result obtained is the Quasi-OWA operator suggested in (Fodor et. al., 1995).

The aim of the paper is to introduce the fuzzy generalized OWA (FGOWA) operator. It represents an extension to the GOWA operator by using information represented in the form of FN. That is, the arguments of the aggregation are FN instead of the usual exact numbers. With this generalization we can obtain a wide range of FN aggregation operators such as the fuzzy generalized mean (FGM), the fuzzy weighted generalized mean (FWGM) or the FOWA operator. We further generalize the FGOWA operator by using quasi-arithmetic means. Then, we obtain a new type of generalized FOWA that we call the Quasi-FOWA operator. We also develop a decision making problem where we use this new approach for selecting the most appropriate strategy.

This paper is organized as follows. In Section 2, we describe some basic aggregation operators such as the OWA operator, the FOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator. Section 3 develops the FGOWA operator studying some of its main properties. In Section 4, we suggest a further generalization to the FGOWA operator by using quasi-arithmetic means. Finally, in Section 5 we develop an illustrative example where we apply the new approach in the selection of strategies.

2 AGGREGATION OPERATORS

In this Section, we briefly describe the OWA operator, the FOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator.

2.1 OWA operator

The OWA operator was introduced by Yager (1988) and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of OWA operators can be used by choosing a different manifestation of the weighting vector (Yager, 1988; 1992; 1993; 1996a; 2003; 2007; Yager and Filev, 1994).

2.2 FOWA operator

The FOWA operator was introduced in (Canfora and Troiano, 2001; S.J. Chen and S.M. Chen, 2003; Mitchell and Estrakh, 1998) and it represents an extension to the OWA operator. Essentially, its main difference is that it uses uncertain information in the arguments represented in the form of FN. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FN. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

Definition 2. Let Ψ be the set of FN. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN. Note that sometimes, it is not clear how to reorder the arguments. Then, it is necessary to establish a criterion for comparing FN. For simplicity, we recommend to follow the policy explained in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator. The FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of FOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the FOWA median operator, the S-FOWA, the centered-FOWA operator, etc (Merigó, 2007).

2.3 Generalized mean

The generalized mean (Dujmovic, 1974; Dyckhoff and Pedrycz, 1984) generalizes a wide range of mean aggregations such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean or the quadratic mean. It can be defined as follows.

Definition 3. A generalized mean of dimension n is a mapping $GM:R^n \rightarrow R$ such that:

$$GM(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that depending on the value of the parameter λ, we obtain different types of means. For example, when $\lambda = \infty$, we obtain the maximum. When $\lambda = 1$, the arithmetic mean. When $\lambda = 0$, the geometric mean. When $\lambda = -1$, the harmonic mean. When $\lambda = 2$, the quadratic mean. When $\lambda = -\infty$, the minimum.

Another type of generalized mean is the case when the weights of the arguments have different values. Then, we obtain the weighted generalized mean. It can be defined as follows.

Definition 4. A weighted generalized mean of dimension n is a mapping $WGM:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$WGM(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i a_i^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

2.4 Generalized OWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced by Yager in (2004). It generalizes a wide range of aggregation operators that includes the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator (Chiclana et al., 2000; Herrera et al., 2003; Xu and Da, 2002), the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator (Yager, 2004) and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator (Yager, 2004). It can be defined as follows.

Definition 5. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators can be found in (Merigó, 2007, Yager, 2004).

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator, the OWG operator, the OWHA operator and the OWQA operator. When $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, we obtain the OWG (OWG) operator. When $\lambda = -1$, we obtain the OWHA (OWHA) operator. When $\lambda = 2$, we obtain the OWQA (OWQA) operator.

3 FUZZY GENERALIZED OWA OPERATOR

The fuzzy generalized OWA (FGOWA) operator is an extension of the GOWA operator that uses uncertain information in the aggregation represented in the form of FN. The reason for using this operator is that sometimes, the uncertain factors that affect our decisions are not clearly known and in order to assess the problem we need to use FN in order to consider the different uncertain results that could happen in the future.

In order to define the FGOWA operator, first, we need to consider some basic aspects about the FN. Its origins can be found in the works of Chang and Zadeh (Chang and Zadeh, 1972; Zadeh, 1975). Since then, the FN have been studied by different authors such as (Mizumoto and Tanaka, 1976; Nahmias, 1978; Dubois and Prade, 1978; 1980; Kaufmann and Gupta, 1985). Among the wide range of FN existing in the literature, we could mention for example, the triangular FN, trapezoidal FN, L-R FN, etc. Note that the triangular FN are a particular case of the trapezoidal FN when the interval with highest membership is just an exact number. For further reading about FN, see for example (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985; Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

Comparing FN with interval numbers, we see that the FN are more complete. This happens because they use a membership function to describe the possibility that an uncertain result will occur. Then, the FN give the same information than the interval numbers but they also explain the possibility that the internal values of the interval will occur. With the information explained above, it is possible to define the FGOWA operator as follows.

Definition 6. Let Ψ be the set of FN. An FGOWA operator of dimension n is a mapping $FGOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, the arguments $\tilde{a}_i$ are FN and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that different types of FN could be used such as the triangular FN, trapezoidal FN, L-R FN, etc.

Note that the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using FN. Then, in some cases, it is not clear which FN is higher, so we need to establish an additional criteria for reordering the FN. For simplicity, we recommend to follow the procedure commented in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994). That is, we calculate a weighted average of the FN obtaining a single value that it is easy to compare. For example, for $n = 2$, we use $(a_1 + a_2)/2$; for $n = 3$, we use $(a_1 + 2a_2 + a_3)/4$; etc. If there is still a tie, then we have to use a subjective criterion. For optimistic decision makers, we have to select the FN with the highest interval while for pessimistic decision makers, our selection is the opposite. Also note that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights w_j are also FN. Another complex situation would be to mix in the same problem information given with interval numbers and information given with FN.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending fuzzy generalized OWA (DFGOWA) operator and the ascending fuzzy generalized OWA (AFGOWA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFGOWA operator. As we can see, the main difference is that in the AFGOWA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the DFGOWA (or FGOWA) they are ordered in a decreasing way.

The FGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent for both the DFGOWA and the AFGOWA operator. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \geq FGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = FGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$, where $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n)$. It is bounded because the FGOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$. It is idempotent because if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the FGOWA operator. Using a similar methodology as it was used by (Yager, 2004) for the GOWA operator we can define the following measure:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

In this case, we could also make a distinction between descending and ascending orders. Note that other measures could be discussed such as the entropy of dispersion (Yager, 1988), the divergence of *W* (Yager, 2002) or the balance operator (Yager, 1996b).

4 FAMILIES OF FGOWA OPERATORS

In the FGOWA operator, we find two different families of aggregation operators. The first family represents all the different particular cases that can be found in the weighting vector *W* while the second family represents all the particular cases coming from the parameter λ.

4.1 Families of FGOWA operators in the weighting vector *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the FGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy generalized mean (FGM) and the fuzzy weighted generalized mean (FWGM).

The fuzzy maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The fuzzy minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, where b_k is the *k*th largest argument $\tilde{a}_i$. The FGM is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The FWGM is obtained if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1993), we could study other particular cases of the FGOWA operator such as the step-FGOWA, the window-FGOWA, the olympic-FGOWA, the centered-FGOWA operator, the S-FGOWA operator, the FGOWA median, the E-Z FGOWA, the maximal entropy FGOWA weights, the minimal variability FGOWA, the Gaussian FGOWA weights, the minimax disparity FGOWA weights, the nonmonotonic FGOWA operator, etc. For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-FGOWA operator. Note that *k* and *m* must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-FGOWA is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-FGOWA becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-FGOWA is transformed in the FGM.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-FGOWA that it is based on the olympic average (Yager, 1996a). Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-FGOWA is transformed in the FGOWA median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-FGOWA is transformed in the olympic-FGOWA.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z FGOWA weights that it is based on the E-Z OWA weights (Yager, 2003). In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j* = 1$ to $n - q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z FGOWA becomes the maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z FGOWA becomes the minimum. Note that the E-Z FGOWA is transformed in the FGM if $q = n$. If $q = m$ and $k = 1$, then, the E-Z FGOWA weights becomes the window-FGOWA operator for the first class. And for the second class, it is found the window-FGOWA if $q = m$ and $k = n - q + 1$.

We note that the median and the weighted median can also be used as FGOWA operators. For the FGOWA median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted FGOWA median, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another interesting family is the S-FGOWA operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-FGOWA operator. The "orlike" S-FGOWA operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-FGOWA operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-FGOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-FGOWA operator becomes the "andlike" S-FGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-FGOWA operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-FGOWA operator becomes the fuzzy generalized Hurwicz criteria.

Another family of aggregation operator that could be used is the centered-FGOWA operator. This type of operator has been suggested by (Yager, 2007) for the OWA operator. Following the same methodology, we could define a FGOWA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-FGOWA operator. Note that the FGM is an example of this particular case of centered-FGOWA operator. Another particular situation of the centered-FGOWA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-FGOWA operator. For this situation, we find the FGOWA median as a particular case.

Other families of FGOWA operators could be studied such as the Gaussian FGOWA weights, the maximal entropy FGOWA (MEFGOWA) operator, etc. For more information, see (Merigó, 2007).

4.2 Families of FGOWA operators in the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual FOWA operator, the fuzzy OWG (FOWG) operator (Xu, 2002), the fuzzy OWHA (FOWHA) operator and the fuzzy OWQA (FOWQA) operator.

When $\lambda = 1$, the FGOWA operator becomes the FOWA operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{8}$$

From a generalized perspective of the reordering step we distinguish between the DFOWA operator and the AFOWA operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DFOWA operator has a descending order and the AFOWA operator an ascending order. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy average (FA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted average (FWA).

When $\lambda = 0$, the FGOWA operator becomes the FOWG operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{9}$$

With the DFGOWA operator we obtain the descending FOWG (DFOWG) operator and with the AFGOWA operator, the ascending FOWG (AFOWG) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy geometric average (FGA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted geometric average (FWGA).

When $\lambda = -1$, we get the FOWHA operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{10}$$

In this case, from a generalized perspective of the reordering step, we obtain the descending FOWHA (DFOWHA) operator and the ascending FOWHA (AFOWHA) operator. In both cases, the formulation is the same although the reordering step is different. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy harmonic average (FHA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted harmonic average (FWHA).

When $\lambda = 2$, we get the FOWQA operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{11}$$

With the DFGOWA operator we obtain the descending FOWQA (DFOWQA) operator and with the AFGOWA operator, the ascending FOWQA (AFOWQA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy quadratic average (FQA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted quadratic average (FWQA).

Note that other families could be obtained by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1 where we study different properties and families of the aggregation operator.

5 QUASI-ARITHMETIC MEANS IN THE FOWA OPERATOR

As it is explained in (Beliakov, 2005), a further generalization to the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means (Hardy et al., 1934; Kolmogoroff, 1930; Nagumo, 1930). Following the same methodology as in (Fodor et al., 1995), we can suggest a similar generalization to the FOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-FOWA operator. Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between ascending and descending orders in the Quasi-FOWA operator. Then, we will get the Quasi-DFOWA and the Quasi-AFOWA operator.

Definition 7. Let Ψ be the set of FN. A Quasi-FOWA operator of dimension n is a mapping $QFOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{12}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$ and the arguments $\tilde{a}_i$ are FN. As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AFOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the FGOWA operator, are also included in this generalization. Then, for example, we could mention the problem of reordering the arguments when they are FN. As it has been explained in Section 3, we need to establish a criterion for comparing FN. Among the great variety of methods for ranking FN, we recommend to use the one explained in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987; 1990; Kaufmann et al., 1994).

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the Quasi-FOWA operator. Following a similar methodology as it was used by [11], we can formulate the following measure:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{13}$$

In this case, we could also make a distinction between descending and ascending orders. Note that in this case it is also possible to consider other measures such as the entropy of dispersion, the divergence of W or the balance operator.

6 APPLICATION IN THE SELECTION OF STRATEGIES

In the following, we are going to develop an illustrative example about the use of the new approaches commented above. We will analyze a decision making problem where a company is studying which strategy is the most appropriate for them. As the environment is very uncertain the group of experts of the company needs to assess the available information with FN. In this example, we will assume that the available information can be assessed with triangular FN. We will also analyze the results obtained by using different types of FN aggregation operators in order to see that depending on the aggregation operator used the decision will be different. We will consider the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA), the fuzzy geometric average (FGA), the fuzzy quadratic average (FQA), the fuzzy weighted average (FWA), the FOWA operator, the AFOWA operator, the FOWG operator and the FOWQA operator.

Assume a company is analyzing the general policy for the next year and they consider 5 possible strategies to follow.

1) A_1: Strategy 1.
2) A_2: Strategy 2.
3) A_3: Strategy 3.
4) A_4: Strategy 4.
5) A_5: Strategy 5.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 6 possible situations for the next year: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in table 1. Note that the results are triangular FN.

Table 1: Payoff matrix.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(30,40,50)	(60,70,80)	(50,60,90)	(20,25,40)	(30,50,60)	(60,70,80)
A_2	(20,30,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(70,80,90)
A_3	(30,40,50)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)	(30,40,50)
A_5	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,70,80)

In this problem, the group of experts considers that the general attitudinal character of the company is given by the following weighting vector: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3).

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. First, we will consider some basic aggregation operators such as the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the FA, the FGA and the FQA. The results are shown in table 2.

Table 2: Aggregated results 1.

	Max	*Min*	*FA*	*FGA*	*FQA*
A_1	(60,70,80)	(20,25,40)	(41.6,52.5,66.6)	(38.4,49.4,64.0)	(44.5,54.9,69.0)
A_2	(70,80,90)	(20,30,50)	(41.6,51.6,63.3)	(39.1,49.6,62.2)	(44.1,53.6,64.5)
A_3	(70,80,90)	(30,40,50)	(45,55,65)	(42.2,52.7,63.0)	(47.7,57.3,66.9)
A_4	(60,70,80)	(20,30,40)	(40,50,60)	(37.3,47.9,58.2)	(42.4,51.9,61.6)
A_5	(40,70,80)	(30,40,50)	(40,53.3,63.3)	(39.5,52.5,62.6)	(40.4,54.1,64.0)

As we can see, the decision is different depending on the aggregation used. If we use the FA, the FGA or the FQA, then the optimal financial strategy is A_3. If we use the maximum, then, both A_2 and A_3 are optimal solutions. And if we use the minimum, then, the optimal strategies are A_3 and A_5.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of FGOWA operators such as the FWA, the FOWA, the AFOWA, the FOWG or the FOWQA operator. The results are shown in table 3.

Table 3: Aggregated results 2.

	FWA	*FOWA*	*AFOWA*	*FOWG*	*FOWQA*
A_1	(42,53,66)	(35,45.5,59)	(48,58.5,73)	(32.1,42.3,56.5)	(38.0,48.4,61.5)
A_2	(47,57,68)	(37,47,60)	(47,57,68)	(34.3,44.9,59.1)	(39.6,49.0,60.9)
A_3	(49,59,69)	(39,49,59)	(52,62,72)	(36.8,47.2,57.4)	(41.5,51.0,60.7)
A_4	(37,47,57)	(34,44,54)	(46,56,66)	(31.5,42.0,52.4)	(36.6,46.0,55.6)
A_5	(40,56,66)	(38,50,60)	(41,57,67)	(37.5,49.2,59.3)	(38.4,50.7,60.6)

As we can see, in this case we also get different results depending on the operator used. If we use the FWA, the AFOWA or the FOWQA operator, then, the optimal choice is the strategy 3. And if we use the FOWA or the FOWG operator, then, the optimal decision is A_5.

Note that the results given in the form of triangular FN, can also be represented by using their membership functions. For simplicity, we give the following results shown in Tables 4, 5 and 6 for triangular FN when using their membership functions.

Table 4: Aggregated results using membership functions 1.

	Max	*Min*	*FA*	*FWA*
A_1	(60+10α, 80–10α)	(20+5α, 40–15α)	(41.6+10.8α, 66.6–14.1α)	(42+11α, 66–13α)
A_2	(70+10α, 90–10α)	(20+10α, 50–20α)	(41.6+10α, 63.3–11.67α)	(47+10α, 68–11α)
A_3	(70+10α, 90–10α)	(30+10α, 50–10α)	(45+10α, 65–10α)	(49+10α, 69–10α)
A_4	(60+10α, 80–10α)	(20+10α, 40–10α)	(40+10α, 60–10α)	(37+10α, 57–10α)
A_5	(40+30α, 80–10α)	(30+10α, 50–10α)	(40+13.3α, 63.3–10α)	(40+16α, 66–10α)

Table 5: Aggregated results using membership functions 2.

	FGA	*FQM*	*FOWA*
A_1	(38.46+11.03α, 64.03–14.54α)	(44.53+10.43α, 69.04–14.08α)	(35+10.5α, 59–13.5α)
A_2	(39.11+10.55α, 62.27–12.61α)	(44.15+9.54α, 64.54–10.85α)	(37+10α, 60–13α)
A_3	(42.22+10.51α, 63.07–10.34α)	(47.78+9.52α, 66.95–9.65α)	(39+10α, 59–10α)
A_4	(37.31+10.6α, 58.28–10.37α)	(42.42+9.54α, 61.64–9.68α)	(34+10α, 54–10α)
A_5	(39.57+12.95α, 62.65–10.13α)	(40.41+13.75α, 64.03–9.87α)	(38+12α, 60–10α)

Table 6: Aggregated results using membership functions 3.

	AFOWA	*FOWG*	*FOWQA*
A_1	(48+10.5α, 73–14.5α)	(32.11+10.19α, 56.50–14.2α)	(38.07+10.38α, 61.56–13.11α)
A_2	(47+10α, 68–11α)	(34.36+10.6α, 59.15–14.19α)	(39.62+9.47α, 60.99–11.9α)
A_3	(52+10α, 72–10α)	(36.83+10.38α, 57.48–10.27α)	(41.59+9.49α, 60.74–9.66α)
A_4	(46+10α, 66–10α)	(31.53+10.55α, 52.42–10.34α)	(36.60+9.44α, 55.67–9.63α)
A_5	(41+16α, 67–10α)	(37.52+11.73α, 59.37–10.12α)	(38.47+12.32α, 60.66–9.87α)

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in table 7. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 7: Ordering of the strategies.

	Ordering		*Ordering*
Max	$A_2{=}A_3 \succ A_1{=}A_4 \succ A_5$	*FWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
Min	$A_3{=}A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$	*FOWA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
FA	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$	*AFOWA*	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
FGA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	*FOWG*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
FQA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4$	*FOWQA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

As we can see, depending on the aggregation used, the ordering of the strategies is different.

7 CONCLUSIONS

We have studied different types of aggregation operators. First, we have briefly described some basic operators such as the OWA operator, the FOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator. Then, we have suggested a new type of aggregation operator that we have called FGOWA operator. Basically, it is an extension of the GOWA operator that uses information given in the form of FN. We have briefly studied its main properties, some of the families found in the weighting vector W such as the FGM or the FWGM and some of the special cases found in the parameter λ such as the FOWA operator, the FOWG operator, the FOWHA operator and the FOWQA operator. We then have developed a further generalization to the FGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We have called this generalization Quasi-FOWA operator. Finally, we have developed an illustrative example where we have applied the new approach in the selection of strategies.

References

Beliakov, G. (2005). "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4, pp. 119-130.

Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Canfora, G., Troiano, L. (2001). "An Extensive Comparison between OWA and OFNWA Aggregation", in: *Proc. of the 8th SIGEF Congress*, Napoli, Italy.

Chang, S.S.L., Zadeh, L.A. (1972). "On fuzzy mapping and control", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2, pp. 30-34.

Chen, S.J., Chen, S.M. (2003). "A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators", *Cybernetics and Systems*, 34, pp. 109-137.

Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. (2000). "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991.

Dubois, D., Prade, P. (1978). "Operations on fuzzy numbers", *International Journal of Systems Science*, 9, pp. 613-626.

Dubois, D., Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Dujmovic, J. (1974). "Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation", *Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika*, 483, pp. 147-158.

Dyckhoff, H., Pedrycz, W. (1984). "Generalized means as model of compensative connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, 14, pp. 143-154.

Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M. (1995). “Characterization of the ordered weighted averaging operators”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3, pp. 236-240.
Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G. (1934). *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.
Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F. (2003). “A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making”, *International Journal of Intelligent Systems*, 18, pp. 689-707.
Karayiannis, N. (2000). “Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.
Karayiannis, N., Randolph-Gips, M. (2005). “Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Non-Euclidean Norms: Single-Norm Algorithms”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 16, pp. 423-435.
Kaufmann, A., Gil-Aluja, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona.
Kaufmann, A., Gil-Aluja, J. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*, Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.
Kaufmann, A., Gil-Aluja, J., Terceño, A. (1994). *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Ed. Foro Científico.
Kaufmann, A., Gupta, M.M. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold.
Kolmogoroff, A.N. (1930). “Sur la notion de la moyenne”, *Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez.*, 12, pp. 388-391.
Merigó, J.M. (2007) *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.
Mitchell, H.B., Estrakh, D.D. (1998). “An OWA operator with fuzzy ranks”, *International Journal of Intelligent Systems*, 13, pp. 69-81.
Mizumoto, M., Tanaka, K. (1976). “The four operations of arithmetic on fuzzy numbers”, *Systems, Computing and Control*, 7, pp. 73-81.
Nagumo, M. (1930). “Uber eine klasse der mittelwerte”, *Japanese Journal of Mathematics*, 6, pp. 71-79.
Nahmias, S. (1978). “Fuzzy variables”, *Fuzzy Sets and Systems*, 1, pp. 97-110.
Schaefer, P.A., Mitchell, H.B. (1999). “A generalized OWA operator”, *International Journal of Intelligent Systems*, 14, pp. 123-143.
Xu, Z.S. (2002). “A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP”, *Systems, Engineering and Electronics*, 24, pp. 31-33.
Xu, Z.S., Da, Q.L. (2002). “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, 17, pp. 709-716.
Yager, R.R. (1988). “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.
Yager, R.R. (1992). “On generalized measures of realization in uncertain environments”, *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.
Yager, R.R. (1993). “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.
Yager, R.R. (1996a). “Quantifier guided aggregation using OWA operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.

Yager, R.R. (1996b). “Constrained OWA Aggregation”, *Fuzzy Sets and Systems*, 81, pp. 89-101.

Yager, R.R. (2002). “Heavy OWA Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1, pp. 379-397.

Yager, R.R. (2003). “E-Z OWA weights”, in: *Proc. 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, pp. 39-42.

Yager, R.R. (2004). “Generalized OWA Aggregation Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, pp. 93-107.

Yager, R.R. (2007). “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.

Yager, R.R., Filev, D.P. (1994). “Parameterized andlike and orlike OWA Operators”, *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.

Yager, R.R., Kacprzyk, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Zadeh, L.A. (1975). “The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1”, *Information Sciences*, 8, pp. 199-249, “Part 2”, *Information Sciences*, 8, pp. 301-357, “Part 3”, *Information Sciences*, 9, pp. 43-80.

14.1.21. Artículo de congreso 21. – Publicado en SIGEF 2007

LINGUISTIC DECISION MAKING USING DEMPSTER-SHAFER THEORY OF EVIDENCE

José M. Merigó[1], Montserrat Casanovas[1], Luis Martínez[2]

[1]Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu
[2]Department of Computer Science, University of Jaén, 23071, Jaén, Spain, martin@ujaen.es

Abstract: - We study different approaches for decision making with linguistic information. We describe some basic linguistic aggregation operators. We then analyze the problem of linguistic decision making with Dempster-Shafer (D-S) belief structure. We suggest the use of different types of linguistic aggregation operators in the D-S framework such as the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) operator and the linguistic hybrid averaging (LHA) operator. Finally, we develop an illustrative example where we can see the different results obtained by using different types of linguistic aggregation operators.

Keywords: - Linguistic decision making, Dempster-Shafer theory of evidence, Linguistic aggregation operators, Linguistic OWA (LOWA) operator.

1 INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence was introduced by Dempster in (1967; 1968) and by Shafer in (1976). Since its appearance, this theory has been used in a lot of situations (Srivastava and Mock, 2002; Yager et al., 1994). It provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes as special cases the situations of risk and ignorance. The difference between their works is that each one associated a different semantics in the theory although their ideas were practically the same. Dempster was interested in a probabilistic framework while Shafer was more oriented to belief measurement. The two fundamental measures of the theory developed by Shafer (1976), belief and plausibility, were previously studied by Dempster. He referred to them as upper and lower probabilities.

Usually, when using the D-S theory in decision making it is considered that the available information is numerical (Engemann, et al., 1996; Merigó and Casanovas, 2006; 2007; Yager, 1992a; 2004). However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with numerical values. Therefore, it is necessary to use another approach such as a qualitative one that uses linguistic assessments. In this paper, we will study the decision making problem with D-S belief structure using linguistic information. In order to develop the linguistic approach we will follow the ideas of (Herrera and Martínez, 2000a; 2000b; 2001; Xu, 2004a; 2004b; 2006). We will focus on the approach developed by Xu (2004a; 2004b; 2006) where it is implicitly assumed high levels of uncertainty and it is not possible to specify the linguistic values with the 2-tuples linguistic representation model (Herrera and Martínez, 2000a; 2000b; 2001). By using a continuous linguistic term set (Xu, 2004a; 2004b) we will be able to establish an order of the alternatives in the decision making problem without losing the information given in the aggregation step.

In order to aggregate the linguistic information we will use different types of linguistic aggregation operators. The reason for using various types of linguistic aggregation operators is that we want to show that the linguistic decision making problem with D-S theory can be modelled in different ways depending on the interests of the decision maker. We will use the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) (Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera et al., 1995;1996; Xu, 2004a) operator because it provides a parameterized family of linguistic aggregation operators that include the maximum, the minimum, the linguistic average (LA) and the linguistic weighted average (LWA), among others. The LOWA operator is an extension of the traditional ordered weighted averaging (OWA) operator (Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Yager, 1988; Yager and Kacprzyk, 1997) for the cases where the information is given in the form of linguistic values. We should note that we will use the LOWA operator developed by Xu in (2004a) that it is also known as the extended ordered weighted averaging (EOWA) operator. Apart from the LOWA operator, we will use the linguistic hybrid averaging (LHA) operator (Xu,, 2006) because this operator uses in the same formulation the LWA and the LOWA operator. For all these types of linguistic aggregation operators we will develop different families of operators that could be used in the linguistic decision making problem with D-S belief structure such as the step-LOWA operator, the window-LOWA operator, the centered-LOWA operator, the E-Z LOWA weights, the LOWA median, etc (Merigó, 2007). Note that these families are based on the original version developed for the OWA operator (Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1988; 1992b; 1993; Yager and Kacprzyk, 1997).

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic concepts to be used throughout the paper such as the linguistic approach and some linguistic aggregation operators. Section 3 develops the new approach about using linguistic information in decision making with D-S theory of evidence. Section 4 gives an illustrative example about the use of the proposed scheme. Finally, Section 5 summarizes the main conclusions found in the paper.

2 PRELIMINARIES

In this Section, we briefly describe the linguistic approach and some basic linguistic aggregation operators that we will use throughout the paper.

2.1 Linguistic Approach

Usually, people are used to work in a quantitative setting, where the information is expressed by means of numerical values. However, many aspects of the real world cannot be assessed in a quantitative form. Instead, it is possible to use a qualitative one, i.e., with vague or imprecise knowledge. In this case, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical values. The linguistic approach represents qualitative aspects as linguistic values by means of linguistic variables (Zadeh, 1975).

We have to select the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantics. One possibility for generating the linguistic term set consists in directly supplying the term set by considering all terms distributed on a scale on which a total order is defined (Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Yager, 1995). For example, a set of seven terms S could be given as follows:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M, s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Note that N = *None*, VL = *Very low*, L = *Low*, M = *Medium*, H = *High*, VH = *Very high*, P = *Perfect*. Usually, in these cases, it is required that in the linguistic term set there exists:

1. A negation operator: $\text{Neg}(s_i) = s_j$ such that $j = g+1-i$.
2. The set is ordered: $s_i \leq s_j$ if and only if $i \leq j$.
3. Max operator: $\text{Max}(s_i, s_j) = s_i$ if $s_i \geq s_j$.
4. Min operator: $\text{Min}(s_i, s_j) = s_i$ if $s_i \leq s_j$.

Different approaches have been developed for dealing with linguistic information such as (Bonissone, 1982; Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Yager, 1995). In this paper, we will follow the ideas of (Herrera and Martínez, 2000a; 2000b; 2001; Xu, 2004a; 2004b; 2006). Then, in order to preserve all the given information, we extend the discrete linguistic term set S to a continuous linguistic term set $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t, \alpha \in [1, t]\}$, where, if $s_\alpha \in S$, we call s_α the original linguistic term, otherwise, we call s_α the virtual linguistic term.

Consider any two linguistic terms $s_\alpha, s_\beta \in \hat{S}$, and $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$, we define some operational laws as follows (Xu, 2004a; 2004b):

5. $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$.
6. $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$.
7. $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$.
8. $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$.

2.2 Linguistic Aggregation Operators

In the literature, we find a wide range of linguistic aggregation operators (Delgado et al., 1993; Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera et al., 1995;1996; Herrera and Martínez, 2000; Xu, 2004a; 2004b; 2006). In this study, we will consider the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) operator and the linguistic hybrid averaging (LHA) operator, with their particular cases that include among others the linguistic average (LA) and the linguistic weighted average (LWA). Note that we follow the ideas developed by Xu in (2004a, 2004b; 2006). Then, we should point out that the LOWA operator we are going to use is also known as the extended OWA (EOWA) operator (2004a).

Definition 1. A LOWA operator of dimension n is a mapping LOWA: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$\mathrm{LOWA}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{1}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i}.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending LOWA (DLOWA) and the ascending LOWA (ALOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DLOWA (or LOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALOWA operator. Note that the ALOWA operator is known in other studies as the inverse LOWA (I-LOWA) operator (Herrera and Herrera-Viedma, 1997).

The LOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the LA and the linguistic weighted average (LWA). The LA is obtained when all the weights w_j are equal for all j. The LWA is obtained if the ordered position of the s_{β_j} is the same than the ordered position of the s_{α_i}.

In this type of operator it is possible to use different measures for characterizing the weighting vector W by using the same measures that it has been used for the OWA operator (Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1988; 1992b; 1993; Yager and Kacprzyk, 1997) such as the attitudinal character or the measure of dispersion.

Definition 2. A LHA operator of dimension n is a mapping LHA: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$\mathrm{LHA}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{2}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the linguistic weighted argument $\hat{s}_{\alpha_i}$ ($\hat{s}_{\alpha_i} = n\omega_i s_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the exponential weighting vector of the s_{α_i}, with $\omega_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

In this case, we can also distinguish between the descending LHA (DLHA) and the ascending LHA (ALHA) operator. Note that in this case they are also related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the LHA (or DLHA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALHA operator.

By using a different manifestation of the weighting vectors, we are able to obtain different families of LHA operators. For example, the LWA is obtained when the all the weights w_j are $1/n$, for all j. The LOWA operator is obtained when all the weights ω_i are $1/n$, for all i.

In the following, we are going to develop different types of linguistic geometric operators. Note that these operators are extensions of the OWG operator (Chiclana et al., 2000; Xu and Da, 2002) by using linguistic variables.

Definition 3. A LOWG operator of dimension n is a mapping LOWG: $\hat{S}^{+n} \rightarrow \hat{S}^{+}$ which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$\mathrm{LOWG}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \prod_{j=1}^{n} (s_{\beta_j})^{w_j} \tag{3}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i}.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending LOWG (DLOWG) operator and the ascending LOWG (ALOWG) operator (Xu and Da, 2002). Note that this operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

The LOWG operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the LGA and the linguistic weighted geometric average (LWGA). The LGA is obtained when all the weights w_j are equal for all j. The LWGA is obtained if the ordered position of the s_{β_j} is the same than the ordered position of the s_{α_i}.

Definition 4. A LHGA operator of dimension n is a mapping LHGA: $\hat{S}^{+n} \rightarrow \hat{S}^{+}$ which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$\mathrm{LHGA}(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \prod_{j=1}^{n} (s_{\beta_j})^{w_j} \tag{4}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the linguistic weighted argument $\hat{s}_{\alpha_i}$ ($\hat{s}_{\alpha_i} = (s_{\alpha_i})^{n\omega_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the exponential weighting vector of the s_{α_i}, with $\omega_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

In this case, it is also possible to distinguish between the descending LHGA (DLHGA) operator and the ascending LHGA (ALHGA) operator.

By using a different manifestation of the weighting vectors, we are able to obtain different families of LHGA operators. For example, the LWGA is obtained when the all the weights w_j are $1/n$, for all j. The LOWA operator is obtained when all the weights ω_i are $1/n$, for all i.

Finally, we should note that other types of linguistic aggregation operators could be developed for the analysis. But in this paper, we will focus on the ones explained above.

3 LINGUISTIC DECISION MAKING USING DEMPSTER-SHAFER THEORY

3.1 Introduction

The D-S theory of evidence was introduced by Dempster in (1967; 1968) and by Shafer in (1976). Since then, a lot of new developments have been developed about it such as (Srivastava and Mock, 2002, Yager et al., 1994). This type of formulation provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the cases of risk and ignorance as special situations of this framework. Obviously, the case of certainty is also included in this generalization as it can be seen as a particular situation of risk or ignorance. Apart from these traditional cases, the D-S framework allows to represent various other forms of information a decision maker may have about the states of nature.

Definition 5. A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.
(3) $m(A) = 0, \;\forall\, A \neq B_j$.

As we said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure (Shafer, 1976) if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\,\{x_j\}$.

For the case of ignorance, the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in (Shafer, 1976).

Two important evidential functions associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief (Shafer, 1976).

3.2 Linguistic Aggregation Operators in Dempster-Shafer Framework

The problem of decision making with D-S belief structures has been studied by different authors such as (Engemann, et al., 1996; Merigó and Casanovas, 2006; 2007; Yager, 1992a; 2004). In (1992a), Yager proposed a more generalized methodology by using the OWA operator. In these papers, the available information was supposed to be numerical. However, many decision making problems cannot be assessed with numerical values because the knowledge of the decision maker is vague or imprecise. Then, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical ones.

In order to develop the decision making process with linguistic variables, we need to aggregate the linguistic information. For doing this, we will use the operational laws and the different aggregation operators commented in Section 2. First, we will study the process to follow when using the LOWA operator in decision making with D-S theory of evidence. The procedure can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{N_1, \ldots, N_n\}$. S_{ij} is the linguistic payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is N_j. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the linguistic payoff to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the linguistic payoff matrix.

Step 2: Determine the belief function m about the states of nature and the decision makers degree of optimism α. Note that for the LOWA operator we use the same measure than (Yager, 1988).

Step 3: Calculate the collection of weights, w, to be used in the LOWA aggregation for each different cardinality of focal elements.

Step 4: Determine the linguistic payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{S_{ij} \mid N_j \in B_k\}$.

Step 5: Calculate the linguistic aggregated payoff, V_{ik} = LOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of i and k. Note that it is possible to use for each focal element a different type of LOWA operator. That is, for each focal element we can use a different weighting vector W.

Step 6: For each alternative, calculate the generalized linguistic expected value, S_i, where:

$$S_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} \; m(B_k) \tag{5}$$

Step 7: Select the alternative with the largest S_i as the optimal. Note that it is possible to establish an order of the results obtained.

Analyzing the aggregation steps, we can formulate in one equation the whole aggregation process as:

$$S_i = \sum_{k=1}^{r} m(B_k) LOWA(M_{ik}) \tag{6}$$

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the LOWA operator.

Another interesting issue to comment is that in some cases, we could prefer to aggregate with the ALOWA operator in the D-S decision process instead of the LOWA operator. As it has been explained for the OWA aggregation in (Merigó and Casanovas, 2006), the main motivation for this is that we have to make a distinction when dealing with situations where the highest linguistic argument is the best result and situations where the smallest linguistic argument is the best result.

Then, if we use the ALOWA operator in decision making with D-S belief structures, we should make the following changes in the decision process.

In *Step* 2-3, when calculating the collection of weights, *w*, to be used in the ALOWA aggregation for each different cardinality of focal elements, we should consider that now the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined in ascending order.

In *Step* 5, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = ALOWA(M_{ik}), for all the values of *i* and *k*.

In *Step* 7, we should select the alternative with the lowest S_i as the optimal because the best result is the one which predicts the lowest expected values. Note that it is also possible to use the ALOWA operator in situations where the highest value is the best result. But as we already use the DLOWA operator in these situations, it is better to use the ALOWA operator in other situations in order to coordinate both aggregations.

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the LOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators in the decision process with D-S framework. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the LA, the Hurwicz linguistic criteria, the LWA and the LOWA operator. Note that these operators can be obtained by using the LOWA or the ALOWA operator. These two parameterized families of aggregation operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the *j*th weight of the LOWA (or DLOWA) operator and w^*_{n+1-j} the *j*th weight of the ALOWA operator. Other families of aggregation operators could be obtained with the LOWA operator by using a different manifestation in the weighting vector such as the step-LOWA, window-LOWA, olympic-LOWA, E-Z LOWA, the median-LOWA, the weighted median-LOWA, the S-LOWA, the centered-LOWA, the maximal entropy LOWA (MELOWA), etc. For more information on these families, see (Merigó, 2007).

In some situations, we could prefer to use another type of linguistic aggregation operator in the D-S decision process such as the LHA operator. The main advantage of this operator is that it uses in the same aggregation the characteristics of the LWA and the characteristics of the LOWA operator. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S belief structures, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, LWAs and LOWAs.

In order to use this type of aggregation operator in D-S framework, we should make the following changes to the decision process explained above for the LOWA operator.

In *Step* 3, when calculating the collection of weights, *w*, to be used in the LHA aggregation for each different cardinality of focal elements, we should consider that now we have to define two weighting vectors. Note that these two weighting vectors are used for combining in the same aggregation the LWA and the LOWA operator.

In *Step* 5, when calculating the linguistic aggregated payoff, we should use V_{ik} = LHA(M_{ik}), using Eq. (2) for all the values of *i* and *k*.

In this case, we could also formulate in one equation the whole aggregation process as follows.

$$S_i = \sum_{k=1}^{r} m(B_k) LHA(M_{ik}) \tag{7}$$

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the LHA operator, which combines in the same aggregation the LWA and the LOWA operator. Note that if all the weights ω_i are 1/*n*, for all *i*, then, Eq. (7) is transformed in Eq. (6).

In this case, it is also possible to find situations where it is better to use an ascending order in the aggregation. Then, we will use the ALHA operator in the decision process with D-S theory. We should note that the main differences against the LHA operator is that now, in *Step 3* we should use an ascending order in the collection of weights and in *Step 5* we should use V_{ik} = ALHA(M_{ik}).

When aggregating the collection of linguistic payoffs of each focal element with the LHA operator, it is also possible to use a wide range of families of LHA operators. For example, we could obtain the maximum, the minimum, the Hurwicz linguistic criteria, the LA, the LWA, the median-LHA, the step-LHA, the window-LHA, the E-Z LHA, the S-LHA, the centered-LHA, etc. For more information on these families, see (Merigó, 2007).

3.3 Linguistic Geometric Operators in Dempster-Shafer Framework

Another alternative for decision making with D-S theory is the use of linguistic geometric aggregation operators. The reason for using linguistic geometric operators appears because there are situations where the decision maker may prefer to use geometric operators instead of the traditional averaging ones. The first model that considered the use of geometric operators in D-S framework was suggested in (Merigó and Casanovas, 2006) for situations with numerical information. In this Section we will develop a similar approach, but now we will assume that the available information is expressed with linguistic variables.

The process to follow when using linguistic geometric operators (Xu, 2004a; 2004b) in decision making with D-S theory of evidence is very similar to the previous methods commented in Section 3.2. First, we will consider the use of the LOWG operator, that it is based on the OWG operator (Chiclana et al., 2000; Xu and Da, 2002) in D-S framework. Assuming that we use the same variables as it has been explained in Section 3.2 when using the LOWA operator we could summarize the procedure as follows.

Step 1: Calculate the linguistic payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function *m* about the states of nature and the decision makers degree of optimism.

Step 3: Calculate the collection of weights, *w*, to be used in the LOWG aggregation for each different cardinality of focal elements.

Step 4: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of *i* and *k*. Hence $M_{ik} = \{S_{ij} \mid N_j \in B_k\}$.

Step 5: Calculate the linguistic aggregated payoff, V_{ik} = LOWG(M_{ik}), using Eq. (3), for all the values of *i* and *k*.

Step 6: For each alternative, calculate the generalized linguistic expected value, S_i, where:

$$S_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} \; m(B_k) \tag{8}$$

Step 7: Select the alternative with the largest S_i as the optimal. Note that in a situation of costs or similar, we should select the alternative with the lowest S_i.

Analyzing the aggregation in *Step 6* and *Step 7*, we can formulate in one equation the whole aggregation process as:

$$S_i = \sum_{k=1}^{r} m(B_k) LOWG(M_{ik}) \tag{9}$$

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the LOWG operator.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DLOWG and the ALOWG operator. As the definition of the DLOWG operator is the same than the LOWG operator, its use in D-S belief structure is also the same. The reason for using ALOWG operators is because sometimes it is better to use an ascending order in the aggregation. For example, we could use it in situations where the lowest linguistic value is the best result and we want to start the reordering step from this best result.

The procedure to follow if we use the ALOWG operator in the aggregation step is the same than the procedure used for the LOWG or DLOWG operator with the difference that now we use ascending orders in the aggregation.

As it has been explained in Section 3.2, sometimes, the decision maker may prefer to use another type of linguistic geometric operator such as the LHGA operator. Its main advantage is that it uses the LWGA and the LOWG operator in the same aggregation process. In order to use this type of aggregation operator in D-S framework, we just need to replace the LOWA operator by this linguistic geometric operator and adequate the rest of characteristics to it. That is, considering that now we have two weighting vectors and the attitudinal character of the decision maker is different.

Different families of linguistic geometric operators can be obtained in the decision process with D-S theory by using a different manifestation of the weighting vector of the linguistic geometric aggregation operators commented above. For example, we could use the linguistic maximum, the linguistic minimum, the Hurwicz linguistic geometric criteria, the LGA or the LWGA. Other families that could be used in the weighting vector are the step-LOWG operator, the window-LOWG operator, the olympic LOWG, the E-Z LOWG weights, the LOWG median, the weighted LOWG median, the S-LOWG operator, the centered LOWG operator, etc. Note that similar families could also be obtained with the LHGA operator. For more information on these families, see (Merigó, 2007).

4 ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to understand the procedures commented above. We will analyze a decision making problem with D-S belief structure. We will use different types of linguistic aggregation operators such as the LA, the LWA, the LOWA, the ALOWA, the LHA and the ALHA operator. Note that we assume for all the cases a situation where the highest value is the best result.

Step 1: Assume an investment company has five possible investments and they want to select the alternative that better adapts to his interests.

1) A_1 is a car company.
2) A_2 is a food company.
3) A_3 is a computer company.
4) A_4 is a chemical company.
5) A_5 is a TV company.

Depending on different uncertain situations that could happen in the future the experts of the investment company establishes the payoff matrix. As the future states of nature are very imprecise, the experts cannot determine numerical values in the payoff matrix. Instead, they use linguistic variables to calculate the future benefits of the companies depending on the state of nature that happens in the future. They establish the following linguistic scale.

S = {s_1 = *Extremely low*, s_2 = *Very low*, s_3 = *Low*, s_4 = *Medium*, s_5 = *High*, s_6 = *Very high*, s_7 = *Extremely high*}.

The possible results depending on the state of nature that happens in the future are shown in Table 1.

Table 1: Linguistic payoff matrix

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
A_1	S_2	S_5	S_6	S_4	S_3	S_7	S_2	S_1
A_2	S_3	S_4	S_4	S_4	S_7	S_6	S_1	S_2
A_3	S_2	S_4	S_5	S_3	S_4	S_4	S_5	S_3
A_4	S_4	S_3	S_1	S_1	S_7	S_4	S_2	S_7
A_5	S_3	S_4	S_6	S_2	S_1	S_6	S_7	S_2

Step 2: Although the information is very imprecise, the experts have obtained some empirical and historical data that has permitted them to establish some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief structure.

Focal element
$B_1 = \{N_2, N_3, N_4, N_5\} = 0.3$
$B_2 = \{N_1, N_3, N_7, N_8\} = 0.3$
$B_3 = \{N_1, N_4, N_5, N_6, N_7\} = 0.4$

Step 3: Assume we have used one of the existing methods for determining the LOWA weights and we have obtained $W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ and $W_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$. For the weighting vector to be used in the hybrid aggregations we assume $\omega_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$ and $\omega_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$.

Step 4: Calculate the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k.

A_1: $M_{11} = \langle S_5, S_6, S_4, S_3\rangle$; $M_{12} = \langle S_2, S_6, S_2, S_1\rangle$; $M_{13} = \langle S_2, S_4, S_3, S_7, S_2\rangle$.
A_2: $M_{21} = \langle S_4, S_4, S_4, S_7\rangle$; $M_{22} = \langle S_3, S_4, S_1, S_2\rangle$; $M_{23} = \langle S_3, S_4, S_7, S_6, S_1\rangle$.
A_3: $M_{31} = \langle S_4, S_5, S_3, S_4\rangle$; $M_{32} = \langle S_2, S_5, S_5, S_3\rangle$; $M_{33} = \langle S_2, S_3, S_4, S_4, S_5\rangle$.
A_4: $M_{41} = \langle S_3, S_1, S_1, S_7\rangle$; $M_{42} = \langle S_4, S_1, S_2, S_7\rangle$; $M_{43} = \langle S_4, S_1, S_7, S_4, S_2\rangle$.
A_5: $M_{51} = \langle S_4, S_6, S_2, S_1\rangle$; $M_{52} = \langle S_3, S_6, S_7, S_2\rangle$; $M_{53} = \langle S_3, S_2, S_1, S_6, S_7\rangle$.

Step 5: Calculate the aggregated linguistic payoff, V_{ik}, using Eq. (1) for the LOWA, the ALOWA, the LA and the LWA, and using Eq. (2) for the LHA and the ALHA, The results are shown in Table 2.

Table 2: Aggregated payoff for the linguistic aggregation operators

	LA	*LWA*	*LOWA*	*ALOWA*	*LHA*	*ALHA*
M_{11}	$S_{4.5}$	$S_{4.3}$	$S_{4.3}$	$S_{4.7}$	$S_{4.2}$	$S_{4.4}$
M_{12}	$S_{2.75}$	$S_{2.5}$	$S_{2.5}$	S_3	$S_{2.28}$	$S_{2.72}$
M_{13}	$S_{3.6}$	$S_{3.6}$	$S_{3.1}$	$S_{4.1}$	$S_{2.4}$	$S_{3.36}$
M_{21}	$S_{4.75}$	$S_{4.9}$	$S_{4.6}$	$S_{4.9}$	$S_{4.56}$	$S_{5.24}$
M_{22}	$S_{2.5}$	$S_{2.3}$	$S_{2.3}$	$S_{2.7}$	$S_{2.2}$	$S_{2.4}$
M_{23}	$S_{4.2}$	S_4	$S_{3.6}$	$S_{4.8}$	$S_{2.76}$	$S_{3.64}$
M_{31}	S_4	$S_{3.9}$	$S_{3.9}$	$S_{4.1}$	$S_{3.8}$	S_4
M_{32}	$S_{3.75}$	$S_{3.8}$	$S_{3.5}$	S_4	$S_{3.56}$	$S_{4.04}$
M_{33}	$S_{3.6}$	$S_{3.9}$	$S_{3.3}$	$S_{3.9}$	$S_{2.6}$	$S_{3.64}$
M_{41}	S_3	$S_{3.2}$	$S_{2.6}$	$S_{3.4}$	$S_{2.76}$	$S_{3.64}$
M_{42}	$S_{3.5}$	$S_{3.7}$	$S_{3.1}$	$S_{3.9}$	$S_{3.28}$	$S_{4.12}$
M_{43}	$S_{3.6}$	$S_{3.4}$	S_3	$S_{4.2}$	$S_{2.24}$	$S_{3.2}$
M_{51}	$S_{3.25}$	$S_{2.9}$	$S_{2.9}$	$S_{3.6}$	$S_{2.68}$	$S_{3.12}$
M_{52}	$S_{4.5}$	$S_{4.5}$	$S_{4.1}$	$S_{4.9}$	$S_{4.08}$	$S_{4.92}$
M_{53}	$S_{3.8}$	$S_{4.2}$	$S_{3.2}$	$S_{4.4}$	$S_{2.6}$	$S_{4.12}$

Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. (6) - (7) for the LA, the LWA, the LOWA, the ALOWA, the LHA and the ALHA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3: Generalized linguistic expected value for the linguistic aggregation operators

	LA	*LWA*	*LOWA*	*ALOWA*	*LHA*	*ALHA*
A_1	$S_{3.615}$	$S_{3.48}$	$S_{3.28}$	$S_{4.25}$	$S_{2.904}$	$S_{3.48}$
A_2	$S_{3.855}$	$S_{3.76}$	$S_{3.51}$	$S_{4.2}$	$S_{3.132}$	$S_{3.748}$
A_3	$S_{3.765}$	$S_{3.87}$	$S_{3.54}$	$S_{3.99}$	$S_{3.248}$	$S_{3.868}$
A_4	$S_{3.39}$	$S_{3.43}$	$S_{2.91}$	$S_{3.87}$	$S_{2.708}$	$S_{3.608}$
A_5	$S_{3.845}$	$S_{3.9}$	$S_{3.38}$	$S_{4.31}$	$S_{3.068}$	$S_{4.06}$

Step 7: Select the best alternative for each aggregation operator. That is, select the investment with the highest linguistic expected value. As we can see, with the LA we will select alternative A_2. With the LOWA and the LHA, operator, we will select alternative A_3. Finally, we will select alternative A_5 with the LWA, the ALOWA and the ALHA operator.

If we establish an order for the investments, a typical situation if we want to select more than one alternative, we can see that each aggregation gives us a different order of the investments. Note that $\succ$ means *preferred to*. The results are shown in table 4.

Table 4: Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
LA	$A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$	*ALOWA*	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$
LWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	*LHA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
LOWA	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$	*ALHA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$

As we can see, depending on the linguistic aggregation operator used, the ordering of the investments will be different.

5 CONCLUSIONS

We have studied the D-S theory of evidence in situations of decision making with linguistic information. First, we have reviewed some basic concepts about using linguistic information. We have considered different types of linguistic aggregation operators such as the LOWA operator and the LHA operator.

Next, we have developed the new approach about using linguistic information in decision making with D-S belief structure. We have developed two general cases. In the first case, we have used different types of linguistic aggregation operators in the aggregation step of the D-S framework. In the second case, we have developed a similar approach by using linguistic geometric operators. In both cases, we have considered different families that could be used in the analysis such as the step-LOWA, the window-LOWA, the E-Z LOWA, the centered LOWA, etc.

Finally, we have shown an illustrative example about the new approach developed in the paper. We have developed the example considering a wide range of linguistic aggregation operators.

References

Bonissone, P.P. (1982). "A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications", in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, North-Holland, pp. 329-339.

Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. (2000). "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991.

Delgado, M., Verdegay, J.L., Vila, M.A. (1993). "On aggregation operations of linguistic labels", *International Journal of Intelligent Systems*, 8, pp. 351-370.

Dempster, A.P. (1967). "Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping", *Annals of Mathematical Statistics*, 38, pp. 325-339.

Dempster, A.P. (1968). "A generalization of Bayesian inference", *Journal of the Royal Statistical Society*, B 30, pp. 205-247.

Engemann, K.J., Miller, H.E., Yager, R.R. (1996). "Decision making with belief structures: an application in risk management", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 4, pp. 1-26.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E. (1997). "Aggregation operators for linguistic weighted information", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 27, pp. 646-655.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J.L. (1995). "A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach", *Information Sciences*, 85, pp. 223-239.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J.L. (1996). "Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA Operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 79, pp. 175-190.

Herrera, F., Martínez, L. (2000). "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, pp. 746-752.

Herrera, F., Martínez, L. (2000). "An Approach for Combining Numerical and Linguistic Information based on the 2-tuple fuzzy linguistic representation model in Decision Making", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 8, pp. 539-562.

Herrera, F., Martínez, L. (2001). "The 2-tuple Linguistic Computational Model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9, pp. 33-48.

Merigó, J.M. (2007) *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., Casanovas, M. (2006). "Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure", in: *Proc. 13th Congress* *of the International Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, pp.709-727.

Merigó, J.M., Casanovas, M. (2007). "Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators", in: *Proc. 4th International Summer School on Aggregation Operators (AGOP)*, Ghent, Belgium, pp.95-100.

Shafer, G. (1976). *Mathematical theory of evidence*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Srivastava, R.P., Mock, T. (2002). *Belief Functions in Business Decisions*, Physica-Verlag, Heidelberg.

Xu, Z.S. (2004a). "EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12, pp. 791-810.

Xu, Z.S. (2004b). "A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations", *Information Sciences*, 166, pp. 19-30.

Xu, Z.S. (2005). "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 843-865.

Xu, Z.S. (2006). "A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information", *Group Decision and Negotiation*, 15, pp. 593-604.

Xu, Z.S., Da, Q.L. (2002). "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *International Journal of Intelligent Systems*, 17, pp. 709-716.

Yager, R.R. (1988). "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.

Yager, R.R. (1992a). "Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties", *International Journal of General Systems*, 20, pp. 233-245.

Yager, R.R. (1992b). "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.

Yager, R.R. (1993). "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.

Yager, R.R. (1995). "An Approach to Ordinal Decision Making", *International Journal of Approximate Reasoning*, 12, pp. 237-261.

Yager, R.R. (2004). "Uncertainty modeling and decision support", *Reliability Engineering and System Safety*, 85, pp. 341-354.

Yager, R.R., Fedrizzi, M., Kacprzyk, J. (1994). *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*, John Wiley & Sons, New York.

Yager, R.R., Kacprzyk, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Zadeh, L.A. (1975). "The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1", *Information Sciences*, 8, pp. 199-249, "Part 2", *Information Sciences*, 8, pp. 301-357, "Part 3", *Information Sciences*, 9, pp. 43-80.

14.1.22. Artículo de congreso 22. – Publicado en ICEIS 2008

FUZZY INDUCED AGGREGATION OPERATORS IN DECISION MAKING WITH DEMPSTER-SHAFER BELIEF STRUCTURE

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Keywords: Aggregation operators, Decision making, Dempster-Shafer theory of evidence, Financial decision making.

Abstract: We develop a new approach for decision making with Dempster-Shafer theory of evidence when the available information is uncertain and it can be assessed with fuzzy numbers. With this approach, we are able to represent the problem without losing relevant information, so the decision maker knows exactly which are the different alternatives and their consequences. For doing so, we suggest the use of different types of fuzzy induced aggregation operators in the problem. As a result, we get new types of fuzzy induced aggregation operators such as the belief structure – fuzzy induced ordered weighted averaging (BS-FIOWA) operator. We also develop an application of the new approach in a financial decision making problem.

1. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence (Dempster, 1967; Shafer, 1976) provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes the situations of risk and ignorance as special cases. For further reading on the D-S theory, see (Yager and Liu, 2008).

Usually, when using the D-S theory it is assumed that the available information are exact numbers (Engemann et al., 1994; Merigó and Casanovas, 2007; Yager, 1992; 2004). However, this may not be the real situation found in the decision making problem because often, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, a better approach may be the use of fuzzy numbers (FN) because it considers the best and worst possible scenarios and a lot of others that could occur. When using FNs, we will follow the ideas of (Chang and Zadeh, 1972; Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985).

Going a step further, the aim of this paper is to suggest the use of different types of fuzzy induced aggregation operators for aggregating the information in decision making with D-S theory. The reason for using various types of aggregation operators is that we want to show that the fuzzy decision making problem with D-S theory can be modelled in different ways depending on the interests of the decision maker. We will use the fuzzy induced ordered weighed averaging (FIOWA) operator because it provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA), the fuzzy weighted average (FWA) and the fuzzy OWA (FOWA), among others. Then, we will get a new aggregation operator that we will call the belief structure - FIOWA (BS-FIOWA) operator. We also develop an application of this new model in a business decision making problem.

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some basic concepts. In Section 3, we present the new approach about using fuzzy induced aggregation operators in decision making with D-S theory. Finally, in Section 4 we develop an application of the new approach.

2. Preliminaries

2.1 Fuzzy Numbers

The FN was introduced by (Chang and Zadeh, 1972). Since then, it has been studied by a lot of authors such as (Kaufmann and Gupta, 1985).

A FN is a fuzzy subset (Zadeh, 1965) of a universe of discourse that is both convex and normal (Kaufmann and Gupta, 1985). Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number (Moore, 1966) although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings.

In the literature, we find a wide range of FNs (Kaufmann and Gupta, 1985). For example, a trapezoidal FN (TpFN) *A* of a universe of discourse *R* can be characterized by a trapezoidal membership function $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \overline{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha \in [0, 1]$ and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a crisp value and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a triangular FN (TFN). Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

2.2 Fuzzy Induced OWA Operator

The FIOWA (or FN-IOWA) operator was introduced by S.J. Chen and S.M. Chen (2003). It is an extension of the OWA operator (Yager, 1988; Yager and Kacprzyk, 1997) that uses uncertain information represented by FNs. It also uses a reordering process different from the values of the arguments. In this case, the reordering step is based on order inducing variables. It is defined as follows.

Definition 1. *Let Ψ be the set of FN. A FIOWA operator of dimension n is a mapping FIOWA: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$FIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the FIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable represented in the form FN.

2.3 Dempster-Shafer Theory of Evidence

The D-S theory provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the situations of risk and ignorance as special cases. It is defined as follows.

Definition 2. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for j = 1,…,n, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m*: $2^X \to [0, 1]$ *such that*:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$. (3)
(3) $m(A) = 0, \forall A \neq B_j$.

3 FIOWA OPERATORS IN DECISION MAKING WITH D-S THEORY OF EVIDENCE

In this Section, we describe the process to follow when using fuzzy induced aggregation operators in decision making with D-S theory.

3.1 Decision Making Approach

A new method for decision making with D-S theory is possible by using FN aggregation operators in the problem. Going a step further, we see that it is possible to use fuzzy induced aggregation operators such as the FIOWA operator. Note it is also possible to consider other cases such as the use of different types of fuzzy induced generalized means and fuzzy induced quasi-arithmetic means. The motivation for using FNs appears because sometimes, the available information is not clear and it is necessary to assess it with another approach such as the use of FNs. Although the information is uncertain and it is difficult to take decisions with it, at least we can represent the best and worst possible scenarios and the possibility that the internal values of the fuzzy interval will occur. The decision process can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ is the uncertain payoff, given in the form of FNs, to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure *m* with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the uncertain payoff matrix.
Step 2: Calculate the belief function *m* about the states of nature.
Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker $\alpha(W)$ (Yager, 1988).

Step 4: Calculate the collection of weights, w, to be used in the FIOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. (Merigó, 2007; Yager, 1988; 1993).
Step 5: Determine the uncertain payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.
Step 6: Calculate the fuzzy induced aggregated payoff, V_{ik} = FIOWA(M_{ik}), using Eq. (2), for all the values of i and k.
Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{r=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{4}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

3.2 Using FIOWA Operators in Belief Structures

Analyzing the aggregation in *Steps* 6 and 7 of the previous subsection, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call this process the belief structure – FIOWA (BS-FIOWA) aggregation. It can be defined as follows.

Definition 3. *A BS-FIOWA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{5}$$

where w_{j_k} is the weighting vector of the kth focal element such that $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ and w_{j_k} $\in$ [0,1], b_{j_k} is the j_kth largest of the $\tilde{a}_{i_k}$ and the $\tilde{a}_{i_k}$ are FNs, and $m(B_k)$ is the basic probability assignment.
Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements.
The BS-FIOWA operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent.
Note that it is possible to distinguish between descending (BS-DFIOWA) and ascending (BS-AFIOWA) orders.

3.3 Families of BS-FIOWA Operators

By using a different manifestation in the weighting vector of the FIOWA operator, we are able to deve-lop different families of FIOWA and BS-FIOWA operators. As we can see in Definition 3, each focal element uses a different weighting vector in the aggregation with the FIOWA operator. Therefore, the analysis needs to be done individually.

For example, the maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and u_p = Max$\{\tilde{a}_i\}$. The fuzzy minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and u_p = Min$\{\tilde{a}_i\}$. The FA is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The FWA is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the FOWA operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $\tilde{a}_i$.

Other families of FIOWA operators could be used in the BS-FIOWA operator such as the step-FIOWA, and the olympic-FIOWA, among others. For more information, see (Merigó, 2007).

For example, the step-FIOWA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$. The olympic-FIOWA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

Finally, if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-fuzzy maximum, the BS-fuzzy minimum, the BS-FA, the BS-FWA, the BS-S-FIOWA, the BS-olympic-FIOWA, etc.

4 APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

In the following, we are going to develop an application of the new approach in a decision making problem. We will analyze the selection of financial strategies where an enterprise is looking for its optimal financial strategy for the next year. Note that other applications could be developed such as the selection of human resources, etc.

Assume an enterprise is planning its financial strategy for the next year and considers 4 possible financial strategies to follow: $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

In order to evaluate these financial strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the company for the next year. After careful analysis, the experts have considered five possible situations that could happen in the future: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Regular, S_4 = Good, S_5 = Very good.

Table 1: Fuzzy payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(50,60,70)	(30,40,50)	(30,40,50)	(60,70,80)	(40,50,60)
A_2	(10,20,30)	(20,30,40)	(50,60,70)	(50,60,70)	(80,90,100)
A_3	(30,40,50)	(50,60,70)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)
A_4	(60,70,80)	(40,50,60)	(30,40,50)	(30,40,50)	(30,40,50)

Depending on the uncertain situations that could happen in the future, the experts establish the payoff matrix. As the future states of nature are very imprecise, the experts cannot determine exact numbers in the payoff matrix. Instead, they use FNs to calculate the future benefits of the enterprise depending on the state of nature that happens in the future and the financial strategy selected. Note that in this example the experts use TFN. Then, they can calculate the best and worst possible scenarios and represent all the internal results with a membership level. The results are shown in Table 1.

After careful analysis of the information, the experts have obtained some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This probabilistic information is represented by the following belief structure about the states of nature.

Focal element

$B_1 = \{S_1, S_2, S_3\} = 0.3$

$B_2 = \{S_3, S_4, S_5\} = 0.3$

$B_3 = \{S_2, S_3, S_4, S_5\} = 0.4$

The attitudinal character of the enterprise is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors. Therefore, the experts use order inducing variables for analysing the attitudinal character of the enterprise. The results are shown in Table 2.

Table 2: Inducing variables.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	6	4	9	2
A_2	1	5	7	9	3
A_3	4	3	8	6	5
A_4	2	5	6	7	8

Table 3: Fuzzy aggregated results

	FA	FWA	FOWA	FIOWA	AFIOWA
V_{11}	(36.6,46.6,56.6)	(36,46,56)	(36,46,56)	(36,46,56)	(38,48,58)
V_{12}	(43.3,53.3,63.3)	(43,53,63)	(42,52,62)	(43,53,63)	(45,55,65)
V_{13}	(40,50,60)	(42,52,62)	(38,48,58)	(39,49,59)	(41,51,61)
V_{21}	(26.6,36.6,46.6)	(29,39,49)	(25,35,45)	(25,35,45)	(29,39,49)
V_{22}	(60,70,80)	(62,72,82)	(59,69,79)	(62,72,82)	(59,69,79)
V_{23}	(50,60,70)	(53,63,73)	(47,57,67)	(50,60,70)	(50,60,70)
V_{31}	(40,50,60)	(40,50,60)	(39,49,59)	(41,51,61)	(40,50,60)
V_{32}	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)
V_{33}	(42.5,52.5,62.5)	(42,52,62)	(42,52,62)	(43,53,63)	(43,53,63)
V_{41}	(43.3,53.3,63.3)	(42,52,62)	(42,52,62)	(45,55,65)	(42,52,62)
V_{42}	(30,40,50)	(30,40,50)	(30,40,50)	(30,40,50)	(30,40,50)
V_{43}	(32.5,42.5,52.5)	(32,42,52)	(32,42,52)	(33,43,53)	(32,42,52)

Table 4: Fuzzy generalized expected value

	FA	FWA	FOWA	FIOWA	AFIOWA
A_1	(40,50,60)	(40.5,50.5,60.5)	(38.6,48.6,58.6)	(39.3,49.3,59.3)	(41.3,51.3,61.3)
A_2	(46,56,66)	(48.5,58.5,68.5)	(44,54,64)	(46.1,56.1,66.1)	(46.4,56.4,66.4)
A_3	(41,51,61)	(40.8,50.8,60.8)	(40.5,50.5,60.5)	(41.5,51.5,61.5)	(41.2,51.2,61.2)
A_4	(35,45,55)	(34.4,44.4,54.4)	(34.4,44.4,54.4)	(35.7,45.7,55.7)	(34.4,44.4,54.4)

The experts establish the following weighting vectors for the FIOWA:

Weighting vector

$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$

$W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$

$W_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$

With this information, we can obtain the aggregated payoffs. The results are shown in Table 3.

Once we have the aggregated results, we have to calculate the fuzzy generalized expected value. The results are shown in Table 4.

As we can see, depending on the fuzzy aggregation operator used, the results and decisions may be different. Note that in this case, our optimal choice is the same for all the aggregation operators but in other situations we may find different decisions between each aggregation operator.

A further interesting issue is to establish an ordering of the financial strategies. Note that this is very useful when the decision maker wants to consider more than one alternative. As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the financial strategies may be different. Note that in this example the results are clear being A_2 the optimal choice and the ordering: $A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$ excepting for the AFIOWA operator, where the ordering is: $A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$.

5 CONCLUSIONS

We have studied the D-S theory of evidence in decision making with uncertain information represented in the form of FNs. With this approach, we have been able to assess the information in a more complete way because in this model we consider the different scenarios that could happen in the problem. For doing so, we have used different types of fuzzy induced aggregation operators in the decision process such as the FIOWA operator. Then, we have obtained the BS-FIOWA operator.

We have also developed an application of the new approach in a business decision making problem about selection of financial strategies. We have seen the usefulness of this approach about using probabilities and FIOWAs in the same problem. We have also seen that depending on the fuzzy induced aggregation operator used the results may lead to different decisions.

In future research, we expect to develop further extensions to this approach by adding new characteristics in the problem and applying it to other decision making problems.

REFERENCES

Chang, S.S.L., Zadeh, L.A., 1972. On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2, pp. 30-34.

Chen, S.J., Chen, S.M., 2003. A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, *Cybernetics and Systems*, 34, pp. 109-137.

Dempster, A.P., 1967. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Annals of Mathematical Statistics*, 38, pp. 325-339.

Dubois, D., Prade, H., 1980. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Engemann, K.J., Miller, H.E., Yager, R.R., 1996. Decision making with belief structures: an application in risk management, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 4, pp. 1-26.

Kaufmann, A., Gupta, M.M., 1985. *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold.

Merigó, J.M., 2007. *New extensions to the OWA operator and its application in business decision making*. Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., Casanovas, M. 2007. Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators. In *Proceedings of the 4th International Summer School on AGOP*, Ghent, Belgium, pp. 95-100.

Moore, R.E,, 1966. *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Shafer, G.A., 1976. *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Yager, R.R., 1988. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.

Yager, R.R., 1992. Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, *International Journal of General Systems*, 20, pp. 233-245.

Yager, R.R., 1993. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.

Yager, R.R., 2004. Uncertainty modeling and decision support, *Reliability Engineering and System Safety*, 85, pp. 341-354.

Yager, R.R., Kacprzyk, J., 1997. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Yager, R.R., Liu, L. 2008. Classic Works in the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions. Springer-Verlag, Berlin.

Zadeh, L.A., 1965. Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8, pp. 338-353.

14.1.23. Artículo de congreso 23. – Publicado en ICEIS 2008

THE GENERALIZED HYBRID AVERAGING OPERATOR AND ITS APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Keywords: Aggregation operators, Decision making, Financial decision making.

Abstract: We present the generalized hybrid averaging (GHA) operator. It is a new aggregation operator that generalizes the hybrid averaging (HA) operator by using the generalized mean. Then, we are able to generalize a wide range of mean operators such as the HA, the hybrid quadratic averaging (HQA), etc. The HA is an aggregation operator that includes the ordered weighted averaging (OWA) operator and the weighted average (WA). Then, with the GHA, we are able to get all the particular cases obtained by using generalized means in the OWA and in the WA such as the weighted geometric mean, the ordered weighted geometric (OWG) operator, the weighted quadratic mean (WQM), etc. We further generalize the GHA by using quasi-arithmetic means. Then, we obtain the quasi-arithmetic hybrid averaging (Quasi-HA) operator. Finally, we apply the new approach in a financial decision making problem.

1. INTRODUCTION

Different types of aggregation operators are found in the literature for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the maximum, the minimum and the average criteria. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications (Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Yager, 1993; Yager and Kacprzyk, 1997).

In 2003, Xu and Da introduced the hybrid averaging (HA) operator. It is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator at the same time. Then, it is able to consider in the same problem the attitudinal character of the decision maker and the subjective probablity. For further research on the HA operator, see (Merigó, 2007; Xu, 2004; 2006).

Another interesting aggregation operator is the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004). It generalizes the OWA operator by using generalized means. Then, it includes as special cases, the maximum, the minimum and the average criteria, and a wide range of other means such as the OWA operator itself, the ordered weighted geometric (OWG) operator, etc. The GOWA operator has been further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005) obtaining the Quasi-OWA operator (Fodor et al., 1995). For further research on the GOWA operator, see (Merigó, 2007; Merigó and Casanovas, 2007; Merigó and Gil-Lafuente, 2007).

In this paper, we introduce the generalized hybrid averaging (GHA) operator. It generalizes the HA operator by using generalized means. Then, it includes in the same formulation all the cases coming from the generalized mean. As a result, we obtain new aggregation operators such as the hybrid geometric averaging (HGA) operator, the hybrid quadratic averaging (HQA) operator, etc. We further generalize the GHA operator by using quasi-arithmetic means, obtaining the quasi-HA operator. We also develop an application of the new approach in a financial decision making problem where we can see how it can be implemented in the real life.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic aggregation operators. In Section 3, we present the GHA operator. Section 4 studies different families of GHA operators. Section 5 develops an application of the new approach in a financial decision making problem. Finally, in Section 6 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Aggregation operators

2.1 Hybrid Averaging Operator

The HA operator (Xu and Da, 2003) is an aggregation operator that uses the WA and the OWA operator in the same formulation. It can be defined as follows.

Definition 1. An HA operator of dimension n is a mapping HA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$HA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the a_i, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

2.2 Generalized OWA Operator

The GOWA operator (Karayiannis, 2000; Yager 2004) is a generalization of the OWA operator by using generalized means. It is defined as follows.

Definition 2. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

3 THE GENERALIZED HYBRID AVERAGING OPERATOR

The GHA operator is a generalization of the HA operator by using generalized means. It includes in the same formulation the weighted generalized mean and the GOWA operator. Then, this operator includes the WA, the OWA and the OWG operator as special cases. It is defined as follows.

Definition 3. A GHA operator of dimension n is a mapping GHA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the a_i, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending GHA (DGHA) operator and the ascending GHA (AGHA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGHA operator.

The GHA operator is monotonic, commutative and idempotent. Note that this operator is not bounded by the maximum and the minimum because for some special situations it can be higher and lower than them.

Another interesting issue to consider are the measures for characterizing the weighting vector W of the GHA operator such as the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator (Merigó, 2007).

4 FAMILIES OF GHA OPERATORS

In the GHA operator we find different families of aggregation operators. Mainly, we can classify them in two types. The first type represents all the families found in the weighting vector W and the second type, the families found in the parameter λ.

4.1 Analysing the Weighting Vector *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the GHA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the hybrid maximum, the hybrid minimum, the generalized mean (GM), the weighted generalized mean (WGM) and the GOWA operator.

The hybrid maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The hybrid minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The GM is found when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all a_i. The WGM is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. The GOWA is found when $\omega_i = 1/n$, for all a_i.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1993), we could study other particular cases of the GHA operator such as the step-GHA, the window-GHA, the olympic-GHA, the S-GHA operator, the median-GHA, the maximal entropy GHA weights, the minimal variability GHA, etc.

For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-GHA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

The olympic-GHA, based on the olympic average (Yager, 1996), is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-GHA is transformed in the median-GHA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-GHA is transformed in the olympic-GHA.

We note that the median can also be used as GHA operators. For the median-GHA, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

For the weighted median-GHA, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

A further interesting family is the S-GHA operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be subdivided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-GHA operator. The "orlike" S-GHA operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. The "andlike" S-GHA operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Finally, the generalized S-GHA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-GHA operator becomes the "andlike" S-GHA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-GHA operator.

Other families of GHA operators could be studied such as the centered-GHA, the EZ-GHA weights, the Gaussian GHA weights, the nonmonotonic GHA operator, etc. For more information, see (Merigó, 2007).

4.2 Analysing the Parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual HA, the hybrid geometric averaging (HGA), the hybrid harmonic averaging (HHA) and the hybrid quadratic averaging (HQA) operator.

When $\lambda = 1$, we get the HA operator.

$$GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4}$$

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DHA operator and the AHA operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WA and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the OWA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the arithmetic mean (AM).

When $\lambda = 0$, we get the HGA operator.

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{5}$$

Note that it is possible to distinguish between descending (DHGA) and ascending (AHGA) orders. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WGM and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the OWG operator.

When $\lambda = -1$, we get the HHA operator.

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{6}$$

In this case, we get the descending HHA (DHHA) operator and the ascending HHA (AHHA) operator.

When $\lambda = 2$, we get the HQA operator.

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{7}$$

In this case, we also get the descending HQA (DHQA) operator and the ascending HQA (AHQA) operator. If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WQM and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the OWQA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the quadratic mean (QM).

Note that we could analyze other families by using different values of the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually.

5 QUASI-ARITHMETIC MEANS IN THE HA OPERATOR

Going a step further, it is possible to generalize the GHA operator by using quasi-arithmetic means in a similar way as it was done for the GOWA operator (Beliakov, 2005). The result is the Quasi-HA operator which is a hybrid version of the Quasi-OWA operator (Fodor et. al., 1995). It can be defined as follows.

Definition 4. A Quasi-HA operator of dimension n is a mapping $QHA: R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}HA(a_1, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{8}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the a_i, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AHA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the GHA operator, are also included in this generalization (Merigó, 2007).

6 APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

Now, we are going to develop an application of the new approach in a decision making problem. We will analyze an investment selection problem where an investor is looking for an optimal investment.

We will develop the analysis considering a wide range of particular cases of the GHA operator such as the arithmetic mean (AM), the WA, the OWA, the OWQA, the HA, the AHA, the HQA and the HGA. Note that we do not consider the hybrid maximum and the hybrid minimum because sometimes its results are inconsistent.

Assume an investor wants to invest some money in an enterprise in order to get high profits. Initially, he considers five possible alternatives.

In order to evaluate these investments, the investor uses a group of experts. This group of experts considers that the key factor is the economic environment of the economy. After detailed analysis, they consider five possible situations for the economic environment: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Normal, S_4 = Good, S_5 = Very good. The expected results depending on the state of nature S_i and the alternative A_k are shown in Table 1.

Table 1: Payoff matrix.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	60	50	80	20
A_2	30	30	90	60	40
A_3	70	40	50	20	60
A_4	50	70	30	40	50
A_5	90	10	10	70	70

In this example, we assume the following weighting vector for all the cases of the WA and the OWA operator: W = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3).

With this information, it is possible to aggregate it in order to take a decision. First, we consider the results obtained with some basic aggregation operators. The results are shown in Table 2.

Table 2: Aggregated results 1.

	Max	Min	AM	WA	OWA
A_1	80	20	48	49	39
A_2	90	30	50	54	44
A_3	70	20	48	45	41
A_4	70	30	48	45	40
A_5	90	10	50	54	36

As we can see, the optimal investment is different depending on the operator used.

In the following, we will consider other particular cases of the GHA operator with more complexity. The results are shown in Table 3.

Table 3: Aggregated results 2.

	OWQ	HA	AHA	HQA	HGA
A_1	43.4	36.5	61.5	46.9	29.4
A_2	45.0	39	69	49.7	28.3
A_3	44.1	36	54	41.1	32.1
A_4	44.6	37	53	40.3	34.4
A_5	48.3	34.5	73.5	51.4	17.5

Again, we can see that the optimal investment is not the same for all the aggregations used. Note that other types of GHA operators may be used in the analysis such as the ones explained in Section 4.

A further interesting issue is to establish an ordering of the investments. This is very useful when the investor wants to consider more than one alternative. The results are shown in Table 4.

Table 4: Ordering of the investments.

	Ordering
Max	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 = A_2$
Min	$A_2 = A_4 \succ A_1 = A_3 \succ A_5$
AM	$A_2 = A_5 \succ A_1 = A_3 = A_4$
WA	$A_2 = A_5 \succ A_1 \succ A_3 = A_4$
OWA	$A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5$
OWQA	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
HA	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
AHA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
HQA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
HGA	$A_4 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$

As we can see, we get different orderings of the investments depending on the aggregation operator used.

7 CONCLUSIONS

We have introduced the generalized hybrid averaging (GHA) operator. It is a generalization of the hybrid averaging (HA) operator by using generalized means. We have seen that it is very useful when we want to consider subjective probabilities and the attitudinal character of the decision maker in the same problem. With this generalization we have found different special cases such as the hybrid geometric averaging (HGA), the hybrid quadratic averaging (HQA), the WA, the OWA operator, the OWG operator, etc. We have further generalized the GHA operator by using quasi-arithmetic means. Then, we have obtained the quasi-HA operator.

We have ended the paper with an application of the new approach in a decision making problem. In this case, we have focussed in a financial problem where we have seen the usefulness of the new approach in the selection of investments.

In future research, we expect to develop further extensions to the GHA operator by adding new characteristics in the problem such as the use of inducing variables.

REFERENCES

Beliakov, G., 2005. Learning Weights in the Generalized OWA Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4, pp. 119-130.

Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R., 2002. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. Physica-Verlag, New York.

Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., 1995. Characte-rization of the ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3, pp. 236-240.

Karayiannis, N., 2000. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.

Merigó, J.M., 2007. *New extensions to the OWA operator and its application in business decision making*. Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M. Casanovas, M., 2007. The fuzzy generalized OWA operator. In *Proceedings of the XIVth Congress of International Association for fuzzy-set management and economy (SIGEF)*. Poiana-Brasov, Romania, pp. 504-517.

Merigó, J.M., Gil-Lafuente, A.M., 2007. The induced generalized OWA operator. In *Proceedings of the 5th EUSFLAT Conference*. Ostrava, Czech Republic, vol. 2, pp. 463-470.

Xu, Z.S., 2004. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166, pp. 19-30.

Xu, Z.S., 2006. A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information. *Group Decision and Negotiation*, 15, pp. 593-604.

Xu, Z.S., Da, Q.L., 2003. An overview of operators for aggregating the information. *International Journal of Intelligent Systems*, 18, pp. 953-969.

Yager, R.R., 1988. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.

Yager, R.R., 1993. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.

Yager, R.R., 1996. Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.

Yager, R.R., 2004. Generalized OWA Aggregation Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, pp. 93-107.

Yager, R.R., Filev, D.P., 1994. Parameterized andlike and orlike OWA Operators. *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.

Yager, R.R., Kacprzyk, J., 1997. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.24. Artículo de congreso 24. – Publicado en ICEIS 2008

THE LINGUISTIC GENERALIZED OWA OPERATOR AND ITS APPLICATION IN STRATEGIC DECISION MAKING

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

Keywords: Linguistic aggregation operators, Linguistic decision making, Strategic decision making.

Abstract: We introduce the linguistic generalized ordered weighted averaging (LGOWA) operator. It is a new aggregation operator that uses linguistic information and generalized means in the OWA operator. It is very useful for uncertain situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use linguistic assessments. This aggregation operator generalizes a wide range of aggregation operators that use linguistic information such as the linguistic generalized mean (LGM), the linguistic weighted generalized mean (LWGM), the linguistic OWA (LOWA) operator, the linguistic ordered weighted geometric (LOWG) operator and the linguistic ordered weighted quadratic averaging (LOWQA) operator. We also introduce a new type of Quasi-LOWA operator by using quasi-arithmetic means in the LOWA operator. Finally, we develop an application of the new approach. We analyze a decision making problem about selection of strategies.

1. INTRODUCTION

In the literature, we find a wide range of aggregation operators for fusing the information. A very well known aggregation operator is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). The OWA operator has been studied by a lot of authors such as (Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997).

Often, when using the OWA operator, it is considered that the available information is numerical. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with numerical values. Therefore, it is necessary to use another approach such as a qualitative one that uses linguistic assessments. In (Herrera et al., 1995), they introduced the first linguistic version of the OWA operator. They called it the linguistic OWA (LOWA) operator. Since then, a lot of new developments have been suggested about it such as (Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera and Martínez, 2000; Xu, 2004a; 2004b).

Another interesting extension of the OWA operator is the generalization that uses generalized means. This type of aggregation is known as the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004). It generalizes a wide range of aggregation operators such as the OWA, the ordered weighted geometric (OWG) operator, etc. The GOWA operator has been further generalized (Beliakov, 2005) by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-OWA operator (Fodor, 1995). For further information on the GOWA operator, see (Merigó, 2007).

The aim of this paper is to develop a generalized OWA operator for situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use linguistic assessments. We will call it the linguistic generalized OWA (LGOWA) operator. This type of linguistic aggregation operator uses the LOWA operator and the generalized mean in the same formulation. Then, it is able to include a wide range of particular cases such as the LOWA itself, the linguistic OWG (LOWG) operator, the linguistic average (LA), the linguistic weighted average (LWA), etc. We further generalize the LGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-LOWA operator. We should note that recently, a different linguistic Quasi-OWA operator has been studied in (Wang and Hao, 2006). We also develop an application of the new approach in a strategic decision making problem in order to see its implementation in the real life.

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly comment some preliminary concepts. In Section 3, we present the LGOWA operator. Section 4 analyzes different families of LGOWA operators. In Section 5, we discuss the Quasi-LOWA operator. Section 6 develops a decision making application of the new approach. Finally, in Section 7, we summarize the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we discuss the linguistic approach to be used throughout the paper, the LOWA operator and the GOWA operator.

2.1 Linguistic Approach

Usually, people are used to work in a quantitative setting, where the information is expressed by means of numerical values. However, many aspects of the real world cannot be assessed in a quantitative form. Instead, it is possible to use a qualitative one, i.e., with vague or imprecise knowledge. In this case, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical values. The linguistic approach represents qualitative aspects as linguistic values by means of linguistic variables (Zadeh, 1975).
We have to select the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantics. One possibility for generating the linguistic term set consists in directly supplying the term set by considering all terms distributed on a scale on which a total order is defined (Herrera and Herrera-Viedma, 1997). For example, a set of seven terms S could be given as follows:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M,$$
$$s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Note that *N = None*, *VL = Very low*, *L = Low*, *M = Medium*, *H = High*, *VH = Very high*, *P = Perfect*. Usually, in these cases, it is required that in the linguistic term set there exists:

- A negation operator: $\text{Neg}(s_i) = s_j$ such that $j = g+1-i$.
- The set is ordered: $s_i \leq s_j$ if and only if $i \leq j$.
- Max operator: $\text{Max}(s_i, s_j) = s_i$ if $s_i \geq s_j$.
- Min operator: $\text{Min}(s_i, s_j) = s_i$ if $s_i \leq s_j$.

Different approaches have been developed for dealing with linguistic information such as (Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera and Martínez, 2000; Xu, 2004a; 2004b). In this paper, we will follow the ideas of (Xu, 2004a; 2004b). Then, in order to preserve all the given information, we extend the discrete linguistic term set S to a continuous set $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t,\ \alpha \in [1, t]\}$, where, if $s_\alpha \in S$, we call s_α the original linguistic term, otherwise, we call s_α the virtual one.
Consider any two linguistic terms s_α, $s_\beta \in \hat{S}$, and μ, μ_1, $\mu_2 \in [0, 1]$, we define some operational laws as follows (Xu, 2004a; 2004b):

- $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$.
- $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$.
- $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$.
- $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$.

2.2 LOWA Operator

In the literature, we find a wide range of linguistic aggregation operators (Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera et al., 1995; Herrera and Martínez, 2000; Xu, 2004a; 2004b). In this study, we will consider the LOWA operator developed by Xu (2004a; 2004b) with its particular cases that include the linguistic average (LA), among others. Then, we should point out that the LOWA operator we are going to use is also known as the extended OWA (EOWA) operator (Xu, 2004a).

Definition 1. A LOWA operator of dimension n is a mapping LOWA: $S^n \rightarrow S$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$LOWA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{1}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i}.

2.3 GOWA Operator

The GOWA operator (Karayiannis, 2000; Yager 2004) is a generalization of the OWA operator by using generalized means. It includes a wide range of means such as the OWG operator, the ordered weighted quadratic averaging operator (OWQA), etc. It can be defined as follows.

Definition 2. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

3 LINGUISTIC GENERALIZED OWA OPERATOR

The LGOWA operator is an extension of the OWA operator that uses linguistic information and genera-lized means. It provides a parameterized family of linguistic aggregation operators that includes the LOWA operator, the linguistic maximum, the linguistic minimum and the linguistic average (LA), among others. It can be defined as follows.

Definition 3. A LGOWA operator of dimension n is a mapping $LGOWA{:}S^n \rightarrow S$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i}, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending LGOWA (DLGOWA) operator and the ascending LGOWA (ALGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DLGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ALGOWA operator.

The LGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $s_{\alpha_i} \geq s_{\delta_i}$, for all α_i, then, $LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \geq LGOWA(s_{\delta_1}, \ldots, s_{\delta_n})$. It is bounded because the LGOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum: $\text{Min}\{s_{\alpha_i}\} \leq LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \leq \text{Max}\{s_{\alpha_i}\}$. It is idempotent because if $s_{\alpha_i} = s_\alpha$, for all s_{α_i}, then, $LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = s_\alpha$.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the LGOWA operator. Using a similar methodology as it was used by (Yager, 2004) for the GOWA operator we can define the following measure:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

Note that other measures could be discussed such as the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator (Merigó, 2007).

4 FAMILIES OF LGOWA OPERATORS

Different families of linguistic aggregation operators are found in the LGOWA operator. Basically, we can classify them in two big groups.

4.1 Analysing the Weighting Vector *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the LGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the linguistic maximum, the linguistic minimum, the linguistic generalized mean (LGM) and the linguistic weighted generalized mean (LWGM).

The linguistic maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The linguistic minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The LGM is found when $w_j = 1/n$, for all a_i. The LWGM is obtained when the ordered position of i is the same than j.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1993), we could study other particular cases of the LGOWA operator such as the step-LGOWA, the window-LGOWA, the olympic-LGOWA, the centered-LGOWA operator, the S-LGOWA operator, the median-LGOWA, the E-Z LGOWA, the maximal entropy LGOWA weights, the Gaussian LOWA weights, the minimal variability OWA weights, the nonmono-tonic LGOWA operator, etc.

For example, if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-LGOWA that it is based on the olympic average (Yager, 1996). Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-LGOWA is transformed in the median-LGOWA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-LGOWA is transformed in the olympic-LGOWA.

When $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$, we are using the window-LGOWA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

Another interesting family is the S-LGOWA operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-LGOWA operator. The "orlike" S-LGOWA operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. The "andlike" S-LGOWA operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Finally, the generalized S-LGOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-LGOWA operator becomes the "andlike" S-LGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-LGOWA operator.

4.2 Analysing the Parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual LOWA operator, the LOWG operator, the LOWHA operator and the LOWQA operator. Note that it is possible to distinguish between descending and ascending orders in all the cases.

When $\lambda = 1$, we get the LOWA operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{5}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the LA and if the ordered position of $i = j$, the LWA.

When $\lambda = 0$, we get the LOWG operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \prod_{j=1}^{n} s_{\beta_j}^{\;w_j} \tag{6}$$

If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the linguistic geometric average (LGA) and if $i = j$, for all a_i, the linguistic weighted geometric average (LWGA).

When $\lambda = -1$, we get the LOWHA operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{s_{\beta_j}}} \tag{7}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the linguistic harmonic mean (LHM) and if $i = j$, for all a_i, the linguistic weighted harmonic mean (LWHM).

When $\lambda = 2$, we get the LOWQA operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{2} \right)^{1/2} \tag{8}$$

If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the linguistic LQA and if $i = j$, for all a_i, the linguistic weighted quadratic mean (LWQM).

Note that we could analyze other families by using different values in the parameter λ and study these families individually.

5 QUASI-ARITHMETIC MEANS IN THE LOWA OPERATOR

As it is explained in (Beliakov, 2005), a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology than (Fodor et al., 1995), we can suggest a similar generalization of the LGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-LOWA operator. Note that this generalization is different than (Wang and Hao, 2006) because it uses a different linguistic approach. The Quasi-LOWA operator can be defined as follows.

Definition 4. A Quasi-LOWA operator of dimension n is a mapping $QLOWA$: $S^n \rightarrow S$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(s_{\beta_j}\right)\right) \quad (9)$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i}.

As we can see, we replace s_β^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(s_\beta)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DLOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-ALOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the LGOWA operator are also included in this generalization. For example, we could study different families of Quasi-LOWA operators such as the Quasi-LA, the Quasi-LWA, the Quasi-step-LOWA, the Quasi-window-LOWA, the Quasi-olympic-LOWA, etc.

6 APPLICATION IN STRATEGIC DECISION MAKING

In the following, we are going to develop a numerical example about the use of the LGOWA operator in a business decision making problem. We will analyze a strategic decision making problem where an enterprise is analysing which is the most appropriate global strategy for them. We will assume that they consider five alternatives for the next period. As the environment is very uncertain, the group of experts of the enterprise is not able to use numerical information in the analysis. Instead, they will use linguistic information. Note that other decision making applications could be developed with the LGOWA operator such as financial decision making (Merigó, 2007), human resource selection (Merigó, 2007), etc.

Assume an enterprise is analyzing its general policy for the next year and they consider five possible strategies to follow.

- A_1 = Strategy 1.
- A_2 = Strategy 2.
- A_3 = Strategy 3.
- A_4 = Strategy 4.
- A_5 = Strategy 5.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the company for the next year. After careful analysis, the experts have considered five possible situations that could happen in the future: N_1 = Very bad, N_2 = Bad, N_3 = Regular, N_4 = Good, N_5 = Very good. The linguistic expected results depending on the situation N_i and the alternative A_k are shown in Table 1.

Table 1: Linguistic payoff matrix.

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
A_1	S_3	S_6	S_2	S_4	S_5
A_2	S_7	S_3	S_1	S_2	S_6
A_3	S_5	S_4	S_4	S_3	S_4
A_4	S_2	S_3	S_6	S_5	S_4
A_5	S_4	S_2	S_7	S_5	S_2

In this example, we assume that the group of experts assumes the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Note that this weighting vector will be used as a weighted average in the LWA, but for the LOWA, ALOWA, LOWG and LOWQA, it will be used as the attitudinal character of the enterprise.

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. First, we consider some basic linguistic aggregation operators. The results are shown in Table 2.

Table 2: Linguistic aggregated results 1.

	Max	Min	LA	LGA	LQA
A_1	S_3	S_6	S_2	S_4	S_5
A_2	S_7	S_3	S_1	S_2	S_6
A_3	S_5	S_4	S_4	S_3	S_4
A_4	S_2	S_3	S_6	S_5	S_4
A_5	S_4	S_2	S_7	S_5	S_2

As we can see, the decision is different depending on the aggregation operator used.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of LGOWA operators such as the LWA, the LOWA, the ALOWA, the LOWG and the LOWQA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3: Linguistic aggregated results 2.

	LWA	LOWA	ALOWA	LOWG	LOWQ
A_1	S_3	S_6	S_2	S_4	S_5
A_2	S_7	S_3	S_1	S_2	S_6
A_3	S_5	S_4	S_4	S_3	S_4
A_4	S_2	S_3	S_6	S_5	S_4
A_5	S_4	S_2	S_7	S_5	S_2

As we can see, in this case we also get different results depending on the aggregation operator used. Note that more particular cases of the LGOWA operator could be considered in the analysis such the ones explained in the previous sections.

Another interesting issue is to establish an ordering of the strategies. Note that this is useful when we want to consider more than one strategy in the analysis. The results are shown in Table 4.

Table 4: Ordering of the strategies.

	Ordering
Max	$A_2=A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_3$
Min	$A_3 \succ A_1=A_4=A_5 \succ A_2$
LA	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
LGA	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5 \succ A_1$
LQA	$A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$
LWA	$A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2$
LOWA	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5 \succ A_2$
ALOWA	$A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_3 \succ A_2$
LOWG	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5 \succ A_2$
LOWQA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1=A_3=A_4$

As we can see, depending on the linguistic aggregation used, the ordering is different.

7 CONCLUSIONS

We have presented the LGOWA operator. It is an aggregation operator that uses linguistic information and generalized means in the OWA operator. We have seen that this operator is very useful for situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use linguistic ones. We have studied some of its main properties and we have found a wide range of particular cases. We have seen that it is possible to further generalize it by using quasi-arithmetic means obtaining the Quasi-LOWA operator.

We have applied the new approach in a business decision making problem. We have analyzed the selection of strategies. We have seen that the results and decisions are different depending on the particular LGOWA operator used.

In future research, we expect to develop more extensions of the LGOWA operator by introducing more characteristics in the problem and applying it in different business problems. For example, we could mention the possibility of using different linguistic approaches and the use of different extensions of the OWA operator such as the induced LGOWA operator or the hybrid LGOWA operator.

REFERENCES

Beliakov, G., 2005. Learning Weights in the Generalized OWA Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4, pp. 119-130.

Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M., 1995. Characteri-zation of the ordered weighted averaging operators. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3, pp. 236-240.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., 1997. Aggregation operators for linguistic weighted information. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 27, pp. 646-655.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Verdegay, J.L., 1995. A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, *Information Sciences*, 85, pp. 223-239.

Herrera, F., Martínez, L., 2000. A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, pp. 746-752.

Karayiannis, N., 2000. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators. *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.

Merigó, J.M., 2007. *New extensions to the OWA operator and its application in business decision making*. Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Wang, J.H., Hao, J., 2006. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14, pp. 435-445.

Xu, Z.S., 2004a. EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12, pp. 791-810.

Xu, Z.S., 2004b. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences*, 166, pp. 19-30.

Yager, R.R., 1988. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.
Yager, R.R., 1993. Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.
Yager, R.R., 1996. Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.
Yager, R.R., 2004. Generalized OWA Aggregation Operators. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, pp. 93-107.
Yager, R.R., Filev, D.P., 1994. Parameterized andlike and orlike OWA Operators. *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.
Yager, R.R., Kacprzyk, J., 1997. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
Zadeh, L.A., 1975. The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1. *Information Sciences*, 8, pp. 199-249; Part 2. *Information Sciences*, 8, pp. 301-357; Part 3. *Information Sciences*, 9, pp. 43-80.

14.1.25. Artículo de congreso 25. – Publicado en ASEPELT 2008

THE GENERALIZED INDEX OF MAXIMUM AND MINIMUM LEVEL AND ITS APPLICATION IN DECISION MAKING

JOSÉ M. MERIGÓ LINDAHL
e-mail: jmerigo@ub.edu

ANNA M. GIL LAFUENTE
e-mail: amgil@ub.edu

Departamento de Economía y Organización de Empresas
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Área temática: Métodos Cuantitativos.

Resumen

El índice del máximo y el mínimo nivel es una técnica muy útil, especialmente para toma de decisiones, que usa la distancia de Hamming y el coeficiente de adecuación en el mismo problema. En este trabajo, se propone una generalización a través de utilizar medias generalizadas y cuasi aritméticas. A estos operadores de agregación, se les denominará el índice del máximo y el mínimo nivel medio ponderado ordenado generalizado (GOWAIMAM) y cuasi aritmético (Quasi-OWAIMAM). Estos nuevos operadores generalizan una amplia gama de casos particulares como el índice del máximo y el mínimo nivel generalizado (GIMAM), el índice del máximo y el mínimo nivel generalizado ponderado (WGIMAM), el OWAIMAM, el OWAIMAM cuadrático, y otros. Se estudian diferentes propiedades y casos particulares. También se desarrolla una aplicación del nuevo modelo en la toma de decisiones sobre selección de productos.

Palabras clave: Índice del máximo y el mínimo nivel, Operador OWA, Media generalizada, Media cuasi aritmética, Toma de decisiones.

Abstract

The index of maximum and minimum level is a very useful technique, specially for decision making, that uses the Hamming distance and the adequacy coefficient in the same problem. In this paper, we suggest a generalization by using generalized and quasi-arithmetic means. As a result, we will get the generalized ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (GOWAIMAM) and the Quasi-OWAIMAAM operator. These new aggregation operators generalize a wide range of particular cases such as the generalized index of maximum and minimum level (GIMAM), the weighted generalized index of maximum ad minimum level (WGIMAM), the OWAIMAM, the ordered weighted quadratic averaging IMAM (OWQAIMAM), and others. We study different properties and families of these aggregation operators. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of products.

Key words: Index of maximum and minimum level, OWA operator, Generalized mean, Quasi-arithmetic mean, Decision making.

1. Introduction

The index of maximum and minimum (IMAM) level (J. Gil-Lafuente, 2001; 2002) is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance with some differences that makes it more complete. It includes the Hamming distance and the adequacy coefficient in the same formulation. Since its appearance, it has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. (J. Gil-Lafuente, 2002; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a).

A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, as special cases. Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors (Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1996a; 2007; Yager and Kacprzyk, 1997). An interesting generalization of the OWA operator is the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) that uses generalized means in the aggregation process. Then, we can obtain a wide range of mean operators such as the generalized mean (Dujmovic, 1974; Dyckhoff and Pedrycz, 1984), the weighted generalized mean, the OWA operator, the ordered weighted geometric (OWG) operator (Chiclana et al., 2000; Xu and Da, 2002), etc. The GOWA operator can be further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005). Then, the result is the Quasi-OWA operator (Fodor et al., 1995). For further developments on the GOWA and the Quasi-OWA operator, see (Merigó and Casanovas, 2007a; 2007b; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007b; Wang and Hao, 2006).

Recently, Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2008b) have suggested the use of the OWA operator in the IMAM. They have called it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). Going a step further, in this paper we suggest a generalization of the OWAIMAM by using generalized and quasi-arithmetic means. The result will be the generalized OWAIMAM (GOWAIMAM) and the quasi-arithmetic OWAIMAM (Quasi-OWAIMAM). The main advantage of these operators is that they include a wide range of mean operators such as the normalized IMAM (NIMAM), the weighted IMAM (WIMAM), the OWAIMAM, the generalized IMAM (GIMAM), etc. We will study some of their main properties.

We will also develop an application of the new approach in a decision making problem about the selection of products. We will focus on the selection of apartments because it is one of the main products for the consumers. With the GOWAIMAM, we will be able to evaluate different situations and results depending on the particular case used in the decision process.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some basic concepts about the IMAM, the OWA and the GOWA operator. In Section 3 we present the GOWAIMAM operator and in Section 4 we study different particular cases. Section 5 introduces the Quasi-OWAIMAM operator and Section 6 develops an application of the OWAIMAM in a decision making problem. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review the IMAM, the OWA and the GOWA operator.

2.1 Index of maximum and minimum level

The NIMAM (J. Gil-Lafuente, 2001; 2002) is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance but with some differences that makes it more complete. Basically, we could define it as a measure that includes the Hamming distance and the adequacy coefficient (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 2005; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) in the same formulation. For two sets *A* and *B*, it can be defined as follows.

Definition 1. A NIMAM of dimension n is a mapping K: $R^n \rightarrow R$ such that:

$$\eta(P,P_k) = \frac{1}{u+v}\left[\sum_u \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + \sum_v \left(0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(k)}(v))\right)\right] \quad (1)$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P_k and P, respectively.

Sometimes, when normalizing the IMAM it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the WIMAM. It can be defined as follows.

Definition 2. A WIMAM of dimension n is a mapping K: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$. Then:

$$\eta(P,P_k) = \sum_u w_i(u) \times \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + \sum_v w_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(k)}(v))\right] \quad (2)$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P_k and P, respectively.

2.2 OWA operator

The OWA operator (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (Calvo et al, 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (3)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). Note that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average (Yager, 1988). For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The average is found when $w_j = 1/n$ for all j. Other families of OWA operators can be studied in (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994; 1996a; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

2.3 GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) is an aggregation operator that generalizes a wide range of mean operators such as the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator (Chiclana et al., 2000; Herrera et al., 2003; Xu and Da, 2002), the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator (Yager, 2004) and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator (Yager, 2004). It can be defined as follows.

Definition 4. A GOWA operator of dimension n is a mapping GOWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\mathrm{GOWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators can be found in (Karayiannis, 2000; Merigó, 2007, Yager, 2004).

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator, the OWG operator, the OWHA operator and the OWQA operator. When $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, we obtain the OWG (OWG) operator. When $\lambda = -1$, we obtain the OWHA (OWHA) operator. When $\lambda = 2$, we obtain the OWQA (OWQA) operator.

Note that if we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$, then, the GOWA operator becomes the Quasi-OWA operator. It can be formulated as follows.

Definition 5. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping QOWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\mathrm{QOWA}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

3. Generalized index of maximum and minimum level

The IMAM can be generalized by using generalized means. Then, the result is the generalized index of maximum and minimum level (GIMAM). Going a step further, it is also possible to use the weighted generalized mean, obtaining the weighted generalized index of maximum and minimum level (WGIMAM). It can be defined as follows.

Definition 6. A WGIMAM operator of dimension n is a mapping WGIMAM: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$, then:

$$f(P_k \rightarrow P) = \left(\sum_u w_i(u) \times \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right|^{\lambda} + \sum_v w_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(k)}(v))\right]^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P_k and P, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

As we can see, if $w_i = 1/n$, we get the GIMAM operator. Note that if we look to the parameter λ we also find a wide range of mean operators. For example, if $\lambda = 1$, we get the weighted IMAM (WIMAM), and if $\lambda = 2$, we get the weighted quadratic averaging IMAM (WQAIMAM).

Going a step further, it is possible to present a wider generalization of the WGIMAM operator by using the OWA operator. Then, we get the following.

Definition 7. A GOWAIMAM operator of dimension n is a mapping GOWAIMAM: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\mathrm{GOWAIMAM}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

where K_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; $k = 1,2,\ldots,m$; and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that we have given this definition for all R, but we should note that sometimes we may find problems, especially when the arguments are 0. Basically, these problems appear for values in the parameter $\lambda \leq 0$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending generalized OWAIMAM (DGOWAIMAM) operator and the ascending generalized OWAIMAM (AGOWAIMAM) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAIMAM operator.

Analogously to the GOWAIMAM operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the GOWAIMAM because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the generalized ordered weighted averaging dual IMAM (GOWADIMAM). It can be defined as follows.

Definition 8. A GOWADIMAM operator of dimension n, is a mapping GOWADIMAM: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$\text{GOWADIMAM}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

where Q_j represents the jth largest of all the $[1 - |\mu_i - \mu_i^{(k)}|]$ and the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$; and $k = 1,2,\ldots,m$, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case, we also find inconsistencies when $\lambda \leq 0$.

In this case, we can also distinguish between the descending GOWADIMAM (DGOWADIMAM) and the ascending GOWADIMAM (AGOWADIMAM) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWADIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWADIMAM operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the GOWAIMAM aggregation can be expressed as:

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{9}$$

Also note that the GOWAIMAM operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be demonstrated with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). Assume f is the GOWAIMAM operator, if $p_i \geq q_i$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{10}$$

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

Since $p_i \geq q_i$, for all i, it follows that, $p_i \geq q_i$, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). Assume f is the GOWAIMAM operator, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{13}$$

where $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is any permutation of the arguments $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{14}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

Since $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is a permutation of $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, we have $p_j = q_j$, for all j, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). Assume f is the GOWAIMAM operator, if $p_i = p$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \tag{16}$$

Proof. Since $p_i = p$, for all p_i, we have

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j p^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(p^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{17}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). Assume f is the GOWAIMAM operator, then:

$$\mathrm{Min}\{p_i\} \leq f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq \mathrm{Max}\{p_i\} \tag{18}$$

Proof. Let $\max\{p_i\} = b$, and $\min\{p_i\} = a$, then

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(b^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{19}$$

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{20}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \leq b \tag{21}$$

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \geq a \tag{22}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{p_i\} \leq f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \leq \text{Max}\{p_i\} \qquad ■$$

A further interesting problem to consider in the GOWAIMAM operator is the unification point with distance measures. As it was explained in Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2007a), the unification point between the IMAM and the Hamming distance appears when $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i. In the GOWAIMAM operator, we find a similar situation with the difference that now the unification is with the Minkowski distance or with the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator (Karayiannis, 2000; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008a). Then, we get the following.

Theorem 5. Assume MOWAD(P,P_k) is the MOWAD operator and GOWADIMAM($P_k \rightarrow P$) the GOWADIMAM operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$\text{MOWAD}(P,P_k) = \text{GOWADIMAM}(P_k \rightarrow P) \tag{23}$$

Proof. Let

$$\text{MOWAD}(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left| \mu_i - \mu_i^{(k)} \right|^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{24}$$

$$\text{GOWADIMAM}(P_k \rightarrow P) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{25}$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$\text{GOWADIMAM}(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{MOWAD}(P,P_k) \qquad ■$$

As we can see, the unification appears with the dual IMAM. As it was explained in Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2007a), it is possible to distinguish between different types of unifications depending on the situation found such as partial or total unification point. The partial unification point appears if at least one of the alternatives but not all of them enters in a situation of unification point. The total unification point appears if all the alternatives are in a situation of unification point. Note that it is straightforward to prove these unifications by looking to (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a) and following Theorem 5.

Note that this unification has been studied with the general case, but it is also possible to consider different particular cases by giving different values to the parameter λ. For example, if $\lambda = 1$, we get the unification found with the IMAM and the Hamming distance. If $\lambda = 2$, we get the unification with the quadratic IMAM and the Euclidean distance.

Another interesting issue to analyze is the different measures used for characterizing the weighting vector of the GOWAIMAM operator. Based on the measures developed for the OWA operator by Yager (1988; 1996b; 2002) and for the GOWA (Yager, 2004), they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated as follows.

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{26}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used (Yager, 1988). It can be defined as follows.

$$\mathrm{H}(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{27}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

Another interesting measure is the divergence of W (Yager, 2002). It can be defined as follows.

$$\mathrm{Div}(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{28}$$

A further interesting measure that we could study is the balance of W (Yager, 1996b). It can be formulated as follows.

$$\mathrm{Bal}(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{29}$$

Note that these measures can also be used with an ascending order by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAIMAM operator.

4. Families of GOWAIMAM operators

In this Section, we analyse different particular cases of the GOWAIMAM operator.

4.1 Analysing the parameter λ

By looking to the parameter λ, we find a wide range of mean operators such as the OWAIMAM, the OWGIMAM, the OWQAIMAM, etc.

When λ = 1, the GOWAIMAM operator becomes the OWAIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{30}$$

Note that it is possible to distinguish between the DOWAIMAM operator and the AOWAIMAM operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DOWAIMAM operator has a descending order and the AOWAIMAM operator an ascending order. Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized IMAM (NIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted IMAM (WIMAM).

When λ = 0, the GOWAIMAM operator becomes the OWGIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{w_j} \tag{31}$$

In this case, we get the descending OWGIMAM (DOWGIMAM) operator and the ascending OWGIMAM (AOWGIMAM) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized geometric IMAM (NGIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted geometric IMAM (WGIMAM).

When λ = –1, we get the OWHAIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{K_j}} \tag{32}$$

In this case, we obtain the descending OWHAIMAM (DOWHAIMAM) operator and the ascending OWHAIMAM (AOWHAIMAM) operator. In both cases, the formulation is the same although the reordering step is different. Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized harmonic IMAM (NHIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted harmonic IMAM (WHIMAM).

When λ = 2, we get the OWQAIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^2 \right)^{1/2} \tag{33}$$

Note that we can distinguish between the descending OWQAIMAM (DOWQAIMAM) operator and the ascending OWQAIMAM (AOWQAIMAM) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized quadratic IMAM (NQIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted quadratic IMAM (WQIMAM).

4.2 Analysing the weighting vector *W*

By using a different manifestation in the weighting vector of the GOWAIMAM operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, it is possible to obtain the maximum, the minimum, the GIMAM and the WGIMAM operator.

The maximum is found if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum, if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, GOWAIMAM($p_1, p_2, \ldots, p_n$) = K_h, where K_h is the hth largest argument of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$. This case is known as the step-GOWAIMAM operator. The GIMAM is found when $w_j = 1/n$, for all a_i and the WGIMAM obtained when the ordered position of i is the same than j.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1993), we could study other particular cases of the GOWAIMAM operator such as the window-GOWAIMAM, the olympic-GOWAIMAM, the median-GOWAIMAM, the centered-GOWAIMAM operator, the S-GOWAIMAM operator, etc.

For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-GOWAIMAM operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-GOWAIMAM becomes the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-GOWAIMAM is transformed in the GIMAM.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-GOWAIMAM that it is based on the olympic average (Yager, 1996a). Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-GOWAIMAM is transformed in the median-GOWAIMAM and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-GOWAIMAM is transformed in the olympic-GOWAIMAM.

Note that the median and the weighted median can also be used as GOWAIMAM operators. For the median-GOWAIMAM, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign, for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted median-GOWAIMAM, we select the argument K_h that has the hth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another interesting family is the S-GOWAIMAM operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be divided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-GOWAIMAM operator. The "orlike" S-GOWAIMAM operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the GIMAM and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-GOWAIMAM operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the GIMAM and if $\beta = 1$, the minimum. Finally, the generalized S-GOWAIMAM operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and

$w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-GOWAIMAM operator becomes the “andlike” S-GOWAIMAM operator and if $\beta = 0$, it becomes the “orlike” S-GOWAIMAM operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the generalized Hurwicz criteria.

A further family of aggregation operator that could be used is the centered-GOWAIMAM operator, that it is based on the OWA version (Yager, 2007). We can define a GOWAIMAM operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-GOWAIMAM operator. Note that the GIMAM is an example of this particular case of centered-GOWAIMAM operator. Another particular situation of the centered-GOWAIMAM operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-GOWAIMAM operator. For this situation, we find the median-GOWAIMAM as a particular case.

5. Quasi-IMAM operator

As it was explained in (Beliakov, 2005), a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology than (Fodor et al., 1995), we can suggest a similar generalization for the GOWAIMAM operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization, the Quasi-OWAIMAM operator. It can be defined as follows.

Definition 9. A Quasi-OWAIMAM operator of dimension n is a mapping QOWAIMAM: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\text{QOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(K_{(j)}\right) \right) \tag{34}$$

where K_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; $k = 1,2,\ldots,m$. As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. Note that in the Quasi-OWAIMAM operator we also find problems when the arguments are 0. Basically, these problems appear for values in the parameter $\lambda \leq 0$.

In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AOWAIMAM operator.

Note that it is also possible to suggest an equivalent removal index that it is a dual of the Quasi-OWAIMAM because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the Quasi-OWADIMAM.

Also note that all the properties and particular cases commented in the GOWAIMAM operator are also applicable in the Quasi-OWAIMAM operator. For example, if $w_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the Quasi-NIMAM operator, and if the ordered position of i is the same than j, then, we get the Quasi-WIMAM.

6. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example where we will see the applicability of the new approach. We are going to consider a decision making problem about selection of products. We will focus on the selection of apartments. We will use different types of GOWAIMAM operators such as the NIMAM, the QIMAM, the WIMAM, the WQIMAM, the OWAIMAM, the AOWAIMAM, the OWQAIMAM, the step-OWAIMAM, the olympic-OWAIMAM, the median-OWAIMAM, etc.

Assume a person wants to buy an apartment and he considers 5 possible alternatives to follow.

- A_1: Apartment *A*.
- A_2: Apartment *B*.
- A_3: Apartment *C*.
- A_4: Apartment *D*.
- A_5: Apartment *E*.

In order to evaluate these apartments the decision maker considers different general characteristics about the apartments that can be summarized in 6 characteristics: C_1 = Prize, C_2 = Size, C_3 = Quality, C_4 = Age, C_5 = Zone, C_6 = Connection to other places.

The decision maker evaluates these characteristics that can be summarized in Table 1 depending on the characteristic C_i and the alternative A_k. Note that values near 1 imply that the results are good and values near 0, bad.

Table 1. Expected results

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.6	0.9	0.9	0.7	0.7
A_2	0.8	0.4	0.7	0.6	0.8	0.9
A_3	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.7
A_4	0.5	0.8	0.8	0.8	0.6	0.9
A_5	0.7	0.8	0.9	1	0.8	0.4

The decision maker considers the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). Note that this weighting vector reflects the attitudinal character of the company when using the OWA operator. In order to develop the analysis, the decision maker calculates the results that an ideal apartment should have. The results of the ideal apartment are shown in Table 2.

Table 2. Ideal apartment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.8	0.9	1	0.8	1	0.8

In this example, we will assume that the decision maker considers the three first characteristics with the Hamming distance and the other three with the adequacy coefficient. The usefulness of the IMAM is that if we believe that the Hamming distance is a good method we can use it, but if we believe that for some characteristics we need a more specific analysis, then, we can use the adequacy coefficient.

With this information, we can aggregate the expected results in order to obtain a representative result for each alternative. First, we are going to consider the NIMAM, the QIMAM, the WIMAM, the WQIMAM and the OWAIMAM operator. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 1

	NAC	QAC	WAC	WQAC	OWAAC
A_1	0.85	0.857	0.86	0.867	0.81
A_2	0.8	0.818	0.84	0.854	0.73
A_3	0.85	0.855	0.88	0.884	0.81
A_4	0.83	0.846	0.86	0.875	0.77
A_5	0.85	0.859	0.81	0.824	0.8

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of the GOWAIMAM operator such as the AOWAIMAM, the OWQAIMAM, the step-OWAIMAM (k=2), the median-OWAIMAM and the olympic-OWAIMAM operator. The results are shown in Table 4.

Table 4. Aggregated results 2

	AOWAAC	OWQAAC	step	median	olympic
A_1	0.89	0.817	0.9	0.9	0.85
A_2	0.86	0.751	1	0.8	0.825
A_3	0.89	0.815	0.9	0.85	0.85
A_4	0.89	0.784	1	0.85	0.85
A_5	0.89	0.812	0.9	0.9	0.875

As we can see, depending on the aggregation operator used the results are different. A_1 is optimal with the NAC, the OWAAC, the AOWAAC, the OWQAAC and the median-OWAAC. A_2 is optimal only with the step-OWAAC. A_3 with the NAC, the WAC, the WQAC, the OWAAC and the AOWAAC. A_4 with the AOWAAC and the step-OWAAC. Finally, A_5 is optimal with the NAC, the QAC, the AOWAAC, the median-OWAAC and the olympic-OWAAC.

Another interesting issue, is to establish an ordering of the alternatives. Note that this is useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 5. Ordering of the strategies

	Ordering		Ordering
NIMAM	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	AOWAIMAM	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
QIMAM	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	OWQAIMAM	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
WIMAM	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_2 \succ A_5$	Step	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
WQIMAM	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$	Median	$A_1=A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
OWAIMAM	$A_1=A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic	$A_5 \succ A_1=A_3=A_4 \succ A_2$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the apartments is different. Then, these results may lead to different decisions.

7. Conclusions

We have presented the GOWAIMAM operator. It is a generalization of the OWAIMAM operator by using generalized means. The main advantage of this aggregation operator is that it includes a wide range of mean operators such as the OWAIMAM, the NGIMAM, the WGIMAM, the IMAM, the OWQAIMAM, etc. Then, with this generalization, we can consider a wide range of results depending on the particular case used. We have further generalized the GOWAIMAM by using quasi-arithmetic means. As a result we have obtained the Quasi-OWAIMAM operator.

We have also developed an application of the new approach in a decision making problem about selection of products, and more specifically, selection of apartments. We have seen that depending on the particular type of GOWAIMAM operator used, the results are different and they may lead to different decisions.

In future research, we expect to develop further extensions of the GOWAIMAM operator by adding new characteristics in the problem such as the use of inducing orders and applying it to other decision making problems.

Bibliography

Beliakov, G. (2005): "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4, pp. 119-130.

Beliakov, G.; Pradera, A. and Calvo, T. (2007): *Aggregation Functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T.; Mayor, G. and Mesiar, R. (2002): *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chiclana, F.; Herrera, F. and Herrera-Viedma, E. (2000): "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", *Proceedings of the 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991.

Dujmovic, J. (1974): "Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation", *Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika*, 483, pp. 147-158.

Dyckhoff, H. and Pedrycz, W. (1984): "Generalized means as model of compensative connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, 14, pp. 143-154.

Figueira, J.; Greco, S. and Ehrgott, M. (2005): *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, Springer. Boston.

Fodor, J.; Marichal, J.L. and Roubens, M. (1995): "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3, pp. 236-240.

Gil-Aluja, J. (1998): *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (1999): *Elements for a theory of decision in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (2001): *Handbook of management under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Lafuente, A.M. (2005): *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin.

Gil-Lafuente, J. (2001): “El “índice del máximo y mínimo nivel” en la optimización del fichaje de un deportista”, *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa* (*AEDEM*), Reggio Calabria, Italia, pp. 439-443.

Gil-Lafuente, J. (2002): *Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva* (In Spanish), Ed. Milladoiro, Vigo.

Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. and Chiclana, F. (2003): “A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making”, *International Journal of Intelligent Systems*, 18, pp. 689-707.

Karayiannis, N. (2000): “Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators”, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.

Kaufmann, A. and Gil-Aluja, J. (1986): *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas* (In Spanish), Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

Kaufmann, A. and Gil-Aluja, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre* (In Spanish), Ed. Hispano-europea, Barcelona.

Merigó, J.M. (2007): *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M. and Casanovas, M., (2007a): “The fuzzy generalized OWA operator”. *Proceedings of the XIVth SIGEF Congress*. Poiana-Brasov, Romania, pp. 504-517.

Merigó, J.M. and Casanovas, M., (2007b): “The uncertain generalized OWA operator and its application in the selection of financial strategies”. *Proceedings of the AEDEM International Conference*. Krakow, Poland, pp. 547-556.

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2007a): “Unification point in methods for the selection of financial products”, *Fuzzy Economic Review*, 13, pp. 35-50, 2007.

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2007b): “The induced generalized OWA operator”, *Proceedings of the EUSFLAT conference*, Ostrava, Czech Republic, Vol. 2, pp. 463-470.

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2008a): “Using the OWA operator in the Minkowski distance”, *International Journal of Computer Science,* (submitted for publication).

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2008b): “Using the OWA operator in the index of maximum and minimum level”, *Proceedings of the AMSE International Conference*, Mallorca, Spain, (submitted for publication).

Wang, J.H. and Hao, J., (2006): “A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words”. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14, pp. 435-445.

Xu, Z.S. (2005): “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 843-865.

Xu, Z.S. and Da, Q.L. (2002): “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, 17, pp. 709-716.

Yager, R.R. (1988): “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 18, pp. 183-190.

Yager, R.R. (1992): “On generalized measures of realization in uncertain environments”, *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.

Yager, R.R. (1993): "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.

Yager, R.R. (1996a): "Quantifier guided aggregation using OWA operators", *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.

Yager, R.R. (1996b): "Constrained OWA Aggregation", *Fuzzy Sets and Systems*, 81, pp. 89-101.

Yager, R.R. (2002): "Heavy OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1, pp. 379-397.

Yager, R.R. (2004): "Generalized OWA Aggregation Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, pp. 93-107.

Yager, R.R. (2007): "Centered OWA operators", *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.

Yager, R.R. and Filev, D.P. (1994): "Parameterized andlike and orlike OWA Operators", *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.

Yager, R.R. and Kacprzyk, J. (1997): *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.26. Artículo de congreso 26. – Publicado en ASEPELT 2008

LINGUISTIC AGGREGATION OPERATORS IN DECISION MAKING WITH DISTANCE MEASURES

JOSÉ M. MERIGÓ LINDAHL
e-mail: jmerigo@ub.edu

MONTSERRAT CASANOVAS RAMÓN
e-mail: mcasanovas@ub.edu

Departamento de Economía y Organización de Empresas
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Área temática: Métodos Cuantitativos.

Resumen

Se desarrolla un nuevo modelo para la toma de decisiones con medidas de distancia a través de utilizar operadores de agregación lingüísticos. Se introduce un nuevo operador de agregación denominado como la distancia media ponderada ordenada lingüística (LOWAD). Este operador de agregación proporciona una familia parametrizada de operadores de agregación lingüísticos que incluye a la distancia máxima, la distancia mínima, la distancia normalizada de Hamming lingüística y la distancia ponderada de Hamming lingüística, entre otros. Se estudian algunas de sus principales propiedades y diferentes familias de operadores LOWAD como la mediana-LOWAD, el LOWAD olímpico, el S-LOWAD, el step-LOWAD, etc. También se desarrolla una aplicación del nuevo modelo en un problema de toma de decisiones sobre selección de recursos humanos.

Palabras clave: Toma de decisiones, Distancia de Hamming, Operadores de agregación lingüísticos, Operador OWA, Selección de recursos humanos.

Abstract

We develop a new decision making model with distance measures by using linguistic aggregation operators. We introduce a new aggregation operator called the linguistic ordered weighted averaging distance (LOWAD) operator. This aggregation operator provides a parameterized family of linguistic aggregation operators that includes the maximum distance, the minimum distance, the linguistic normalized Hamming distance and the linguistic weighted Hamming distance, among others. We study some of its main properties and different families of LOWAD operators such as the median-LOWAD, the olympic-LOWAD, the S-LOWAD, the step-LOWAD, etc. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about human resource selection.

Key words: Decision making, Hamming distance, Linguistic aggregation operators, OWA operator, Human resource selection.

1. Introduction

In the literature, we find a wide range of methods for decision making (Figueira et al., 2005; Gil-Aluja, 1998; 1999; Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997). A very useful technique for doing so are the distance measures (Gil-Aluja, 1998; Karayiannis, 2000; Kaufmann, 1975; Merigó, 2007). The key feature of using distance measures in decision making is the possibility of comparing the results with an ideal one in order to take a decision. Then, by doing this comparison, the alternative with the closest result to zero is the optimal choice because this implies that it is the alternative with the closest result to the ideal. One of the distance measures that can be used in the analysis is the Hamming distance (Hamming, 1950). Since its appearance, the Hamming distance has been studied and applied in a lot of problems (Karayiannis, 2000; Kaufmann, 1975; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó, 2007; Szmidt and Kacprzyk, 2000).

In a lot of situations, when using the Hamming distance, it is interesting to normalize it by using the arithmetic mean or the weighted average. Then, we get the normalized Hamming distance (NHD) and the weighted Hamming distance (WHD), respectively. However, sometimes it is better to use another approach to normalize the Hamming distance such as the use of the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). Then, with the OWA operator, the normalization process reflects a parameterized family of distance aggregation operators that range from the maximum distance to the minimum distance and including the NHD. Since its appearance, the OWA operator has been studied in a wide range of studies such as (Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Karayiannis, 2000, Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1994; 1996a; 1996b; 2002; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997). Note that the use of the OWA operator in distance measures have been studied in (Karayiannis, 2000, Merigó, 2007; Merigó and Casanovas, 2008; Merigó and Gil-Lafuente, 2008a).

When using the OWA operator, it is assumed that the available information is given by exact numbers. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is very uncertain and it cannot be analysed with exact numbers. In these cases, it is better to use another approach such as the use of linguistic information (Zadeh, 1975). In order to assess the problem with the OWA operator when the available information is given in the form of linguistic variables, it has been suggested the linguistic OWA (LOWA) operator (Herrera et al., 1995). Since its appearance, a lot of new developments and applications have been developed about it such as (Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera and Martínez, 2000; Merigó et al., 2007; Merigó and Gil-Lafuente, 2008b; Wang and Hao, 2006; Xu, 2004a; 2004b).

The objective of this paper is to suggest the use of linguistic information in decision making problems with distance measures. Then, we will be able to provide a model that it is able to assess the information in situations with high degree of uncertainty by using linguistic variables. For doing so, we will suggest a new type of linguistic aggregation operator for distance measures: the linguistic ordered weighted averaging distance (LOWAD) operator. It is a new aggregation operator that provides a parameterized family of linguistic aggregation operators such as the linguistic maximum distance, the linguistic minimum distance, the linguistic normalized Hamming distance (LNHD), the linguistic weighted Hamming distance (LWHD), etc. We will study some of its main properties.

We will also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of human resources. The main advantage of this model is that it can assess uncertain situations with linguistic information and it gives a more complete view of the problem to the decision maker because it considers a wide range of linguistic aggregation operators. Then, the decision maker will use the particular cases that are in accordance with its interests.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review the linguistic approach to be used in the paper, the LOWA operator and the Hamming distance. In Section 3 we present the LOWAD operator and in Section 4 we analyse different types of LOWAD operators. Section 5 develops a numerical example of the new approach. Finally, Section 6 summarizes the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review the linguistic approach to be used throughout the paper, the LOWA operator and the Hamming distance.

2.1 Linguistic approach

Usually, people are used to work in a quantitative setting, where the information is expressed by means of numerical values. However, many aspects of the real world cannot be assessed in a quantitative form. Instead, it is possible to use a qualitative one, i.e., with vague or imprecise knowledge. In this case, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical values. The linguistic approach represents qualitative aspects as linguistic values by means of linguistic variables (Zadeh, 1975).

We have to select the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantics. One possibility for generating the linguistic term set consists in directly supplying the term set by considering all terms distributed on a scale on which a total order is defined (Herrera and Herrera-Viedma, 1997). For example, a set of seven terms S could be given as follows:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M, s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Note that N = *None*, VL = *Very low*, L = *Low*, M = *Medium*, H = *High*, VH = *Very high*, P = *Perfect*. Usually, in these cases, it is required that in the linguistic term set there exists:

- A negation operator: Neg(s_i) = s_j such that $j = g+1-i$.
- The set is ordered: $s_i \leq s_j$ if and only if $i \leq j$.
- Max operator: Max(s_i, s_j) = s_i if $s_i \geq s_j$.
- Min operator: Min(s_i, s_j) = s_i if $s_i \leq s_j$.

Different approaches have been developed for dealing with linguistic information such as (Bonissone, 1982; Delgado et al., 1993; Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera et al., 1995; Herrera and Martínez, 2000; Wang and Hao, 2006; Xu, 2004a; 2004b). In this paper, we will follow the ideas of (Xu, 2004a; 2004b). Then, in order to preserve all the given information, we extend the discrete linguistic term set S to a continuous linguistic term set $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t, \alpha \in [1, t]\}$, where, if $s_\alpha \in S$, we call s_α the original linguistic term, otherwise, we call s_α the virtual linguistic term.

Consider any two linguistic terms $s_\alpha, s_\beta \in \hat{S}$, and μ, μ_1, $\mu_2 \in [0, 1]$, we define some operational laws as follows (Xu, 2004a; 2004b):

- $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$.

- $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$.
- $s_\alpha - s_\beta = s_{\alpha-\beta}$.
- $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$.
- $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$.

2.2 Linguistic OWA operator

In the literature, we find a wide range of linguistic aggregation operators (Delgado et al., 1993; Herrera and Herrera-Viedma, 1997; Herrera et al., 1995; Herrera and Martínez, 2000; Merigó et al., 2007; Merigó and Gil-Lafuente, 2008b; Wang and Hao, 2006; Xu, 2004a; 2004b). In this study, we will consider the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) operator with its particular cases that include among others the linguistic average (LA) and the linguistic weighted average (LWA). Note that we follow the ideas developed by Xu in (2004a; 2004b). Then, we should point out that the LOWA operator we are going to use is also known as the extended OWA (EOWA) operator (Xu, 2004a).

Definition 1. A LOWA operator of dimension n is a mapping $LOWA$: $S^n \rightarrow S$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$LOWA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{1}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i}.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending LOWA (DLOWA) and the ascending LOWA (ALOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DLOWA (or LOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALOWA operator. Note that the ALOWA operator is known in other studies as the inverse LOWA (I-LOWA) operator (Herrera and Herrera-Viedma, 1997).

The LOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the LA and the linguistic weighted average (LWA). The LA is obtained when all the weights w_j are equal for all j. The LWA is obtained if the ordered position of the s_{β_j} is the same than the ordered position of the s_{α_i}.

In this type of operator it is possible to use different measures for characterizing the weighting vector W by using the same measures that it has been used for the OWA operator (Yager, 1988; 1996b; 2002) such as the attitudinal character or the measure of dispersion.

2.3 Hamming distance

The normalized Hamming distance (Hamming, 1950) is a useful technique for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 2. A normalized Hamming distance of dimension n is a mapping d_H:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_H(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | \right) \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the Hamming distance we prefer to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Hamming distance. It can be defined as follows.

Definition 3. A weighted Hamming distance of dimension n is a mapping d_{WH}:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{WH}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i | \right) \tag{3}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively. Note that the formulations shown above are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory see for example (Gil-Aluja, 1998; 1999; Kaufmann, 1975; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Szmidt and Kacprzyk, 2000).

3. The linguistic OWA distance operator

The LOWAD operator is a distance measure that uses the OWA operator in the normalization process of the Hamming distance. Moreover, due to the fact that the environment is very uncertain, it uses linguistic variables instead of numerical ones in order to assess the information. Therefore, this operator is very practical to assess situations with a high degree of uncertainty in the information. For two sets $X = \{s_{X_1}, s_{X_2}, \ldots, s_{X_n}\}$ and $Y = \{s_{Y_1}, s_{Y_2}, \ldots, s_{Y_n}\}$, it can be defined as follows.

Definition 4. A LOWAD operator is a mapping $LOWAD$: $S^n \times S^n \rightarrow S$ that has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$LOWAD(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{4}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ and $|s_{X_i} - s_{Y_i}|$ is the argument variable represented in the form of individual distances.

The LOWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that if $s_{X_i} = s_{Y_i}$ for all $i \in [1, n]$, $LOWAD(X, Y) = 0$. Note also that $LOWAD(X, Y) = LOWAD(X, Y)$.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DLOWAD) and ascending (ALOWAD) orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DLOWAD (or LOWAD) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALOWAD operator.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments s_{β_j}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the LOWAD operator can be expressed as:

$$LOWAD(X, Y) = W^T B \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the LOWAD operator can be expressed as:

$$LOWAD(X, Y) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{6}$$

The LOWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be demonstrated with the following theorems.

Theorem 1 (Commutativity). Assume f is the LOWAD operator, then

$$f(X, Y) = f(U, V) \tag{7}$$

where (U, V) is any permutation of the arguments (X, Y).

Proof. Let

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{8}$$

$$f(U, V) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\chi_j} \tag{9}$$

Since (U, V) is a permutation of (X, Y), we have $s_{\beta_j} = s_{\chi_j}$, for all j, and then

$$f(X, Y) = f(U, V) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Monotonicity). Assume f is the LOWAD operator, if $|s_{X_i} - s_{Y_i}| \geq |s_{U_i} - s_{V_i}|$, for all i, then

$$f(X, Y) \geq f(U, V) \tag{10}$$

Proof. Let

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{11}$$

$$f(U, V) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\chi_j} \tag{12}$$

Since $|s_{X_i} - s_{Y_i}| \geq |s_{U_i} - s_{V_i}|$, for all i, it follows that, $s_{\beta_j} \geq s_{\chi_j}$, and then

$$f(X, Y) \geq f(U, V) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Bounded). Assume f is the LOWAD operator, then

$$\text{Min}\{|s_{X_i} - s_{Y_i}|\} \leq f(X, Y) \leq \text{Max}\{|s_{X_i} - s_{Y_i}|\} \tag{13}$$

Proof. Let $\max\{|s_{X_i} - s_{Y_i}|\} = c$, and $\min\{|s_{X_i} - s_{Y_i}|\} = d$, then

$$f(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(c^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{14}$$

$$f(X, Y) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(X, Y) \leq c \tag{16}$$

$$f(X, Y) \geq d \tag{17}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{|s_{X_i} - s_{Y_i}|\} \leq f(X, Y) \leq \text{Max}\{|s_{X_i} - s_{Y_i}|\} \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Idempotency). Assume f is the LOWAD operator, if $|s_{X_i} - s_{Y_i}| = s_\alpha$, for all i, then

$$f(X, Y) = s_\alpha \tag{18}$$

Proof. Since $|s_{X_i} - s_{Y_i}| = s_\alpha$, for all i, we have

$$f(X, Y) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} = \sum_{j=1}^{n} w_j s_\alpha = s_\alpha \sum_{j=1}^{n} w_j \tag{19}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(X, Y) = s_\alpha \qquad \blacksquare$$

A further interesting issue to consider is the measures for characterizing the weighting vector W such as the attitudinal character, the entropy of dispersion, the balance operator and the divergence of W (Yager, 1988; 1996b; 2002). The attitudinal character can be defined as follows:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{20}$$

Note that it is possible to develop different types of measures of entropy but the most common one is based on the Shannon entropy and for the LOWAD operator is defined as follows:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{21}$$

The balance operator can be defined as:

$$BAL\,(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1} \right) w_j \tag{22}$$

And the divergence of W:

$$DIV(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{23}$$

Note that in this case, it is also possible to distinguish between descending and ascending orders.

4. Families of LOWAD operators

By using a different manifestation of the weighting vector in the LOWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the linguistic maximum distance, the linguistic minimum distance, the linguistic normalized Hamming distance (LNHD) and the linguistic weighted Hamming distance (LWHD).

The linguistic maximum distance is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$ and the linguistic minimum distance if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The LNHD is found when $w_j = 1/n$, for all i. The LWHD is obtained when the ordered position of i is the same than j.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1988; 1993; 1994; 1996a; 2007; Yager and Filev, 1994), we could study other particular cases of the LOWAD operator such as the step-LOWAD, the window-LOWAD, the olympic-LOWAD, the centered-LOWAD operator, the S-LOWAD operator, the median-LOWAD, the maximal entropy LOWAD weights, etc. In the following, we are going to study some of these cases.

Remark 1: In the median-LOWAD we distinguish between two cases. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

Remark 2: For the weighted median-LOWAD, we select the argument s_{β_k} that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 3: The olympic-LOWAD is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-LOWAD becomes the median-LOWAD and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-LOWAD is transformed in the olympic-LOWAD.

Remark 4: The window-LOWAD is found when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-LOWAD becomes the linguistic maximum distance. If $m = 1$, $k = n$, the window-LOWAD becomes the linguistic minimum distance. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-LOWAD is transformed in the LNHD.

Remark 5: A further type of LOWAD operator is the S-LOWAD operator that it is based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-LOWAD operator. The generalized S-LOWAD operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-LOWAD operator becomes the "andlike" S-LOWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-LOWAD operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the linguistic Hurwicz distance criteria.

Remark 6: Another interesting family that could be used is the centered-LOWAD operator, that it is based on the OWA version (Yager, 2007). We can define a LOWAD operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-LOWAD operator. Note that the LNHD is an example of this particular situation. Another particular case of the centered-LOWAD operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-LOWAD operator. For this situation, we find the median-LOWAD as a particular case.

Remark 7: Using a similar methodology, we could develop a lot of other families of LOWAD weights in a similar way as it has been developed in a lot of studies for the OWA operator such as (Merigó, 2007; Yager, 1988; 1993; 1994; 1996a; 2007; Yager and Filev, 1994). Note that it is easy to apply these methods to the LOWAD operator because the weights are not affected by the linguistic information. Obviously, it is possible to consider more complex analysis where the weights are also linguistic variables but in this paper we will not enter in this problem.

5. Numerical example

In the following, we are going to develop a numerical example of the new approach. We will consider a decision making problem about selection of human resources.

Assume that an enterprise wants to acquire a person for a new position in the company. After an application period, the company has evaluated the applications received. After careful analysis of the information, the group of experts of the enterprise considers five possible human resources.

- A_1 = Candidate 1.
- A_2 = Candidate 2.
- A_3 = Candidate 3.

- A_4 = Candidate 4.
- A_5 = Candidate 5.

When analyzing the candidates, the experts have considered the following general characteristics:

- C_1 = Experience in similar jobs.
- C_2 = Intelligence.
- C_3 = Knowledge about the job.
- C_4 = Motivation.
- C_5 = Skills of the worker.
- C_6 = Other aspects.

Due to the fact that the general characteristics are very imprecise because they contain a lot of particular aspects, the experts cannot use numerical values in the analysis. Instead, they use linguistic variables to evaluate the general results obtained for each candidate depending on the characteristic considered. In order to do so, they establish the following linguistic scale.

$$S = \{s_1 = \textit{Extremely low}, s_2 = \textit{Very low}, s_3 = \textit{Low}, s_4 = \textit{Medium}, s_5 = \textit{High}, s_6 = \textit{Very high}, s_7 = \textit{Extremely high}\}.$$

After careful analysis of these characteristics, the experts have given the following information shown in Table 1.

Table 1: Available information about the candidates

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	S_6	S_3	S_7	S_2	S_1	S_4
A_2	S_4	S_5	S_2	S_3	S_4	S_4
A_3	S_1	S_6	S_2	S_2	S_7	S_4
A_4	S_5	S_4	S_5	S_2	S_4	S_3
A_5	S_6	S_3	S_7	S_1	S_3	S_3

According to their objectives, the enterprise establishes the following ideal candidate shown in Table 2.

Table 2: Ideal worker

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	S_6	S_7	S_7	S_6	S_7	S_6

With this information, it is possible to develop different methods for selecting a candidate according to the interests of the company. In this example, we will consider the linguistic maximum distance, the linguistic minimum distance, the LNHD, the LWHD, the Hurwicz-LOWAD (α = 0.6), the LOWAD, the ALOWAD, the median-LOWAD, the orlike S-LOWAD (α = 0.7), the andlike S-LOWAD (β =0.8), the step-LOWAD (k = 2) and the olympic-LOWAD. In order to aggregate the information, the group of experts calculates the attitudinal character of the enterprise. They calculate the following weighting vector W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). With this information, it is possible to aggregate the available information in order to take a decision.

Table 3: Aggregated results 1

	Max	Min	LNHD	LWHD	LOWAD	ALOWAD
A_1	S_6	S_0	$S_{2.66}$	S_3	$S_{1.8}$	$S_{3.6}$
A_2	S_5	S_2	$S_{2.83}$	$S_{2.7}$	$S_{2.5}$	$S_{3.3}$
A_3	S_5	S_0	$S_{2.83}$	$S_{2.5}$	S_2	$S_{3.6}$
A_4	S_4	S_1	$S_{2.66}$	$S_{2.9}$	$S_{2.3}$	S_3
A_5	S_5	S_0	$S_{2.66}$	$S_{3.1}$	$S_{1.9}$	$S_{3.4}$

Table 4: Aggregated results 2

	Orlike-S	Andlike-S	median	step	olympic	Hurwicz
A_1	S_5	$S_{0.53}$	S_3	S_4	$S_{2.5}$	$S_{3.6}$
A_2	$S_{4.35}$	$S_{2.16}$	$S_{2.5}$	S_3	$S_{2.5}$	$S_{3.8}$
A_3	$S_{4.35}$	$S_{0.56}$	S_3	S_5	S_3	S_3
A_4	$S_{3.6}$	$S_{1.33}$	S_3	S_3	$S_{2.75}$	$S_{2.8}$
A_5	$S_{3.55}$	$S_{0.53}$	$S_{3.5}$	S_4	$S_{2.75}$	S_3

Note that in these cases, the result indicates the distance between the linguistic variables of the candidate and the ideal one. Then, the results may range from 0 to some value not higher than the maximum.

As we can see, depending on the linguistic distance aggregation operator used, the optimal choice is different. Note that the lowest value in each method is the optimal result because we are using distances.

If we establish an ordering of the investments, a typical situation if we want to consider more than one alternative, we will get the following orders shown in Table 5.

Table 5: Ordering of the candidates

	Ordering		Ordering
Maximum dist.	$A_4 \succ A_2 = A_3 = A_5 \succ A_1$	Or-S-LOWAD	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 = A_3 \succ A_1$
Minimum dist.	$A_1 = A_3 = A_5 \succ A_4 \succ A_2$	And-S-LOWAD	$A_1 = A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$
LNHD	$A_1 = A_4 = A_5 \succ A_2 = A_3$	Median-LOWAD	$A_2 \succ A_1 = A_3 = A_4 \succ A_5$
LWHD	$A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5$	Step-LOWAD	$A_2 = A_4 \succ A_1 = A_5 \succ A_3$
LOWAD	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic-LOWAD	$A_1 = A_2 \succ A_4 = A_5 \succ A_3$
ALOWAD	$A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_3$	Hurwicz-LOWAD	$A_4 \succ A_3 = A_5 \succ A_1 \succ A_2$

As we can see, depending on the particular type of LOWAD operator used, the results are different. Then, depending on the method used in the LOWAD, the decision maker may select a different candidate.

6. Conclusions

We have analysed the use of linguistic information in decision making with distance measures. For doing so, we have developed a new distance measure, the linguistic ordered weighted averaging distance (LOWAD) operator. It is a new aggregation operator that provides a parameterized family of linguistic aggregation operators such as the linguistic maximum distance, the linguistic minimum distance, the LNHD and the LWHD. We have studied some of its main properties. The main advantage of the

LOWAD is that it is able to assess uncertain problems where the available information can not be represented with numerical values but it is possible to use linguistic ones.

The LOWAD operator can be applied in a lot of situations already considered with the Hamming distance. In this paper, we have focussed on an application in decision making about selection of human resources. The main advantage of the LOWAD in this type of problems is that it gives a parameterized family of linguistic distance aggregation operators. Then depending on the particular case used, the results and decisions may be different.

In future research, we expect to develop further extensions of the LOWAD operator by adding new characteristics in the problem such as the use of the Euclidean or the Minkowski distance, and applying it to other problems.

Bibliography

Beliakov, G.; Pradera, A. and Calvo, T. (2007): *Aggregation Functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Bonissone, P.P. (1982): "A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications". In: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, North-Holland, pp. 329-339.

Calvo, T.; Mayor, G. and Mesiar, R. (2002): *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Delgado, M.; Verdegay, J.L. and Vila, M.A., (1993): "On aggregation operations of linguistic labels", *International Journal of Intelligent Systems*, 8, pp. 351-370.

Figueira, J.; Greco, S. and Ehrgott, M. (2005): *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, Springer. Boston.

Gil-Aluja, J. (1998): *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (1999): *Elements for a theory of decision in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Hamming, R.W. (1950): "Error-detecting and error correcting codes", *Bell Systems Technical Journal*, 29, pp. 147-160.

Herrera, F. and Herrera-Viedma, E., (1997): "Aggregation operators for linguistic weighted information", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 27, pp. 646-655.

Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. and Verdegay, J.L., (1995): "A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach", *Information Sciences*, 85, pp. 223-239.

Herrera, F. and Martínez, L., (2000): "A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, pp. 746-752.

Karayiannis, N. (2000): "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.

Kaufmann, A. (1975): *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York.

Kaufmann, A. and Gil-Aluja, J. (1986): *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas* (In Spanish), Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

Kaufmann, A. and Gil-Aluja, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre* (In Spanish), Ed. Hispano-europea, Barcelona.

Merigó, J.M. (2007): *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2008): "Decision making with distance measures and induced aggregation operators", *Proceedings of the FLINS Conference*, Madrid, Spain, (accepted).

Merigó, J.M.; Casanovas, M. and Martínez, L. (2007): "Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence", *Proceedings of the SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, pp. 658-671.

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2007): "Unification point in methods for the selection of financial products", *Fuzzy Economic Review*, 13, pp. 35-50, 2007.

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2008a): "The ordered weighted averaging distance operator", *Lectures on modelling and simulation*, (accepted).

Merigó, J.M. and Gil-Lafuente, A.M. (2008b): "The linguistic generalized OWA operator and its application in strategic decision making", *Proceedings of the ICEIS Conference*, Barcelona, Spain, (accepted).

Szmidt, E. and Kacprzyk, J. (2000): "Distances between intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 114, pp. 505-518.

[12] Wang, J.H. and Hao, J. (2006): "A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14, pp. 435-445.

Xu, Z.S. (2004a): "EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12, pp. 791-810.

Xu, Z.S. (2004b): "A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations", *Information Sciences*, 166, pp. 19-30.

Xu, Z.S. (2005): "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 843-865.

Yager, R.R. (1988): "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 18, pp. 183-190.

Yager, R.R. (1992): "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.

Yager, R.R. (1993): "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.

Yager, R.R. (1996a): "Quantifier guided aggregation using OWA operators", *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.

Yager, R.R. (1996b): "Constrained OWA Aggregation", *Fuzzy Sets and Systems*, 81, pp. 89-101.

Yager, R.R. (2002): "Heavy OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1, pp. 379-397.

Yager, R.R. (2007): "Centered OWA operators", *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.

Yager, R.R. and Filev, D.P. (1994): "Parameterized andlike and orlike OWA Operators", *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.

Yager, R.R. and Kacprzyk, J. (1997): *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications,* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Zadeh, L.A. (1975): "The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1", *Information Sciences,* 8, pp. 199-249; "Part 2", *Information Sciences*, 8, pp. 301-357; "Part 3", *Information Sciences*, 9, pp. 43-80.

14.1.27. Artículo de congreso 27. – Publicado en ASEPELT 2008

USING IMMEDIATE PROBABILITIES IN FUZZY DECISION MAKING

JOSÉ M. MERIGÓ LINDAHL
e-mail: jmerigo@ub.edu

Departamento de Economía y Organización de Empresas
UNIVERSIDAD DE BARCELONA

Área temática: Métodos Cuantitativos.

Resumen

Se desarrolla un nuevo modelo para la toma de decisiones con información probabilística. Se utiliza el concepto de probabilidad inmediata para agregar la información. Este tipo de probabilidad modifica la probabilidad objetiva a través de introducir el carácter actitudinal del decisor. Para hacer esto, se utiliza el operador OWA. Cuando se utiliza este modelo, se asume que la información viene dada por números precisos. Sin embargo, esta puede no ser la situación real encontrada en el problema decisional. A veces, la información es imprecisa y es necesario utilizar otra aproximación para modelizar la información como es la utilización de números borrosos. Entonces, el problema decisional puede ser representado de una forma más completa porque ahora se considera el mejor y peor escenario posible y la posibilidad de que los valores intermedios ocurran. Se utilizará la media ponderada ordenada borrosa (FOWA) para agregar la información con las probabilidades. Como resultado, se obtiene la probabilidad inmediata FOWA (IP-FOWA). Se estudiarán algunas de sus principales propiedades. El trabajo finalizará con una aplicación del nuevo modelo en un problema de toma de decisiones sobre selección de estrategias.

Palabras clave: Toma de decisiones, Probabilidades inmediatas, Operador OWA, Números borrosos, Selección de inversiones.

Abstract

We develop a new decision making model with probabilistic information. We use the concept of the immediate probability to aggregate the information. This type of probability modifies the objective probability by introducing the attitudinal character of the decision maker. For doing this, it is used the OWA operator. When using this model, it is assumed that the information is given by exact numbers or singletons. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the information is vague or imprecise and it is necessary to use another approach to assess the information such as the use of fuzzy numbers. Then, the decision making problem can be represented in a more complete way because now we are considering the best and worst possible scenarios and the possibility that the internal values will occur. We will use the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator to aggregate the information with the probabilities. As a result, we will get the immediate probability – FOWA (IP-FOWA) operator. We will study some of its main properties. We will apply the new approach in a decision making problem about selection of strategies.

Key words: Decision making, Immediate probabilities, OWA operator, Fuzzy numbers, Investment selection.

1. Introduction

In the literature, we find a wide range of methods for decision making (Engemann et al, 1996; 2004; Figueira et al, 2005; Gil-Aluja, 1998; 1999; Merigó, 2007; Yager, 1999; Yager and Kacprzyk, 1997). A very common decision making method is the one that uses probabilities in the analysis. This method is known as decision making under risk environment. The use of probabilities permits an objective modellisation of the decision making problem under uncertainty. However, although we can assess the problem in an objective way, we are still under uncertainty. Therefore, sometimes we may prefer to consider a different form of modellisation with probabilities.

In order to solve this problem (Engemann et al, 1996), it was suggested the concept of immediate probabilities. This method transforms the initial probabilities into new ones that consider the attitudinal character of the decision maker. The reason for using it is that although the probabilistic information is objective, the information is still affected by the uncertainty. Therefore, although we can calculate the expected result, the result that will happen in the future may be different. As it is well-known in statistics, when using probabilities, if we just make one experiment, it is difficult to predict the result. But if we develop the same experiment a lot of times, then, the results will be in accordance with the results predicted by the probabilities. The problem in decision making is that we are modelling a problem of the real life that will only occur once (or few times). Then, the probabilistic information may be affected by some exceptional situations although they are not probable. And then, it can be very useful to use immediate probabilities instead of the usual probabilities.

The use of immediate probabilities implies the use of the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988) in order to consider the attitudinal character of the decision maker. Then, although the decision maker considers the probabilistic information, he can manipulate it according to his degree of optimism or pessimism. The OWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average. Since its appearance, it has been studied by a lot of authors such as (Beliakov, et al, 2007; Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1996a; 1996b; 2002; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

When using the OWA operator, it is assumed that the information can be represented with exact numbers. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the information is imprecise and it is necessary to use another approach to assess the information. For example, in this type of problems it can be useful to use fuzzy numbers (FNs). The FNs (Chang and Zadeh, 1972; Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985; Zadeh, 1975) consider the best and worst possible scenarios and the possibility that the internal values between the minimum and the maximum may occur. Then, in order to use the OWA operator in these situations, it has been suggested the fuzzy OWA (FOWA) operator (Chang et al., 2006; Chen and Chen, 2003; Cheng et al., 2006; Merigó and Casanovas, 2007; 2008; Mitchell and Estrakh, 1998; Yager, 2008).

The aim of this paper is to develop a new decision making model by using immediate probabilities and information that can be represented with FNs. For doing so, we will suggest a new aggregation operator: the immediate probability – fuzzy OWA (IP-

FOWA) operator. This operator uses the OWA operator, FNs and probabilistic information, in the same formulation. It is very useful because it can assess the uncertain information by using FNs, and the probabilistic information considering the attitudinal character of the decision maker. We study some of its main properties and distinguish between different particular cases such as the IP-median-FOWA, the IP-olympic-FOWA, the IP-centered-FOWA, etc.

We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. The main advantage of using IP-FOWA operators is that we can consider a wide range of situations that could happen. Then, the decision maker will get a complete view of the decision problem considering the probabilistic information and its attitudinal character. Note that in the literature we only find few studies about immediate probabilities (Engemann et al, 1996; Yager 1999). But it is interesting to note that there a lot of potential applications that could be developed with them such as in actuarial sciences, in statistics, etc. Mainly, we could consider that the immediate probabilities can be used in almost all the problems already considered with the usual probabilities. Obviously, depending on the case, its usefulness will be more significant or not.

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic concepts about FNs, the FOWA operator and the immediate probabilities. Section 3 introduces the IP-FOWA operator. In Section 4 we analyze different types of IP-FOWA operator. Section 5 illustrates the new approach with an example in decision making. Finally, in Section 6 we summarize the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review the FNs, the fuzzy OWA operator and the immediate probabilities.

2.1 Fuzzy numbers

The FN was introduced in (Chang and Zadeh, 1972; Zadeh, 1975). Since then, it has been studied and applied by a lot of authors such as (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985).

A FN is a fuzzy subset (Zadeh, 1965) of a universe of discourse that is both convex and normal (Kaufmann and Gupta, 1985). Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number (Moore, 1966) although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings.

In the literature, we find a wide range of FNs (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985). For example, a trapezoidal FN (TpFN) A of a universe of discourse R can be characterized by a trapezoidal membership function $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that:

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \overline{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha \in$ [0, 1] and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a singleton and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a triangular FN (TFN). Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

In the following, we are going to review the FN arithmetic operations as follows. Let A and B be two TFN, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985) but in this paper we will focus on these ones.

2.2 Fuzzy OWA operator

The FOWA operator (Mitchell and Estrakh, 1998; S.J. Chen and S.M. Chen, 2003) represents an extension of the OWA operator. Essentially, its main difference is that it uses uncertain information in the arguments represented in the form of FNs. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FNs. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

Comparing FN with interval numbers, we see that the FN are more complete. This happens because they use a membership function to describe the possibility that an uncertain result will occur. Then, the FN give the same information than the interval numbers but they also explain the possibility that the internal values of the interval will occur. It can be defined as follows.

Definition 1. Let Ψ be the set of fuzzy numbers. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (2)$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator. The FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of FOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the FOWA median operator, the S-FOWA, the centered-FOWA operator, etc. (Merigó, 2007).

Note that the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using FN. In some cases, it is not clear which FN is higher, then, we need to establish an additional criterion for reordering the FN. For simplicity, we recommend to follow the procedure commented in (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987, Kaufmann et al., 1994). Also note that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights w_j are also FN. Another complex situation would be to mix in the same problem information given with interval numbers and information given with FN.

2.2 Immediate probabilities

The immediate probability (IP) is a concept that tries to include the decision makers attitude in a probabilistic decision making problem. Then, we can represent in the same problem the probabilistic information with the attitudinal character of the decision maker. The main advantage is that it is very easy to use. Therefore, it is not difficult to apply it in almost all the probabilistic problems studied before such as in decision making problems, actuarial sciences, statistics, etc. The motivation for using it is that the probabilistic information is objective but uncertain. Then, we cannot guarantee that the expected result is the result that will happen in the future. Due to the fact that we are in a situation of uncertainty (risk – environments), each decision maker will have a different attitude against the same problem. For example, an optimistic decision maker is more open to consider more risky situations than the probabilistic expected result. However, a pessimistic one will prefer to consider more safety situations than the expected result calculated with the available probabilistic information.

In order to develop the analysis, we will use in the same formulation the weights of the OWA operator and the probabilistic information. We will refer to it as the IP-OWA operator. It can be defined as follows.

Definition 2. An IP-OWA operator of dimension n is a mapping $IP\text{-}OWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IP\text{-}OWA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, each a_i has associated a probability p_i and $\hat{p}_j = (w_j p_i / \sum_{j=1}^{n} w_j p_i)$.

Note that we could formulate the whole equation as follows:

$$IP\text{-}OWA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{w_j p_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j p_i} \right) b_j \tag{4}$$

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending and ascending orders. This operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By using a different manifestation of the weighting vector, it is possible to study different families of IP-OWA operators such as the olympic-IP-OWA, the median-IP-OWA, the centered-IP-OWA, the S-IP-OWA, etc.

3. Fuzzy OWA operator in decision making with immediate probabilities

The use of information represented in the form of FNs in decision making with immediate probabilities can be useful in situations with high degrees of uncertainty. In these situations, it is not possible to assess the information with exact numbers because we need to consider optimistic and pessimistic results. This problem can be solved by using FNs in the analysis because they consider a wide range of optimistic and pessimistic results. The main advantage of using FNs is that it provides a more complete view of the uncertain decision problem to the decision maker.

In order to assess this type of problems we will develop a new aggregation operator: the IP-FOWA operator. It is very similar to the IP-OWA with the difference that it can assess the information in a more complete way by using FNs. Then, this aggregation operator can assess uncertain information considering a wide range of optimistic and pessimistic results. Moreover, it also uses probabilistic information and the attitudinal character of the decision maker in the same formulation. It can be defined as follows.

Definition 3. An IP-FOWA operator of dimension n is a mapping $IP\text{-}FOWA: R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \hat{p}_j b_j \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, each $\tilde{a}_i$ has associated a probability p_i and $\hat{p}_j = (w_j p_i / \sum_{j=1}^{n} w_j p_i)$.

Note that we could formulate the whole equation as follows:

$$IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{w_j p_i}{\sum_{j=1}^{n} w_j p_i} \right) b_j \tag{6}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending IP-FOWA (IP-DFOWA) operator and the ascending IP-FOWA (IP-AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the IP-DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the IP-AFOWA operator. As we can see, the main difference is that in the IP-AFOWA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the IP-DFOWA they are ordered in a decreasing way.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the IP-FOWA operator can be expressed as:

$$IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{7}$$

Note that in the IP-FOWA operator, if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, the result is still the same because the transformation developed in the construction of the immediate probabilities normalizes the results.

The IP-FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then, $IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq IP\text{-}FOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \ldots, \tilde{u}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = IP\text{-}FOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2 \ldots, \tilde{u}_n)$, where ($\tilde{u}_1$, $\tilde{u}_2 \ldots$,

$\tilde{u}_n$) is any permutation of the arguments ($\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n$). It is bounded because the IP-FOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, Min$\{\tilde{a}_i\} \leq IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \leq$ Max$\{\tilde{a}_i\}$. It is idempotent because if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then, $IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

Another interesting issue to consider are the measures for characterizing the weighting vector $W = (w_1, w_2 \ldots, w_n)$ of the IP-FOWA operator such as the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator. Note that these measures follow the same methodology as the original version developed for the OWA operator (Yager, 1988; 1996b; 2002).

Using a similar methodology as it was used by Yager (1988) for the OWA operator we can define the attitudinal character as follows:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{8}$$

For the entropy of dispersion, we get the following. Note that it is possible to consider other measures of entropy such as the ones studied in (Majlender, 2005; Yager, 1995).

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{9}$$

For the divergence of W:

$$DIV(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{10}$$

And for the balance operator:

$$BAL\,(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1} \right) w_j \tag{11}$$

Note that in this case, we could also distinguish between descending and ascending orders.

4. Families of IP-FOWA operators

Different types of IP-FOWA operators may be found by using a different manifestation of the weighting vector. For example, we can obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA) and the fuzzy weighted average (FWA). Note these results are found in the weighting vector W prior to the transformation developed in the immediate probability.

The fuzzy maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The fuzzy minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get, $IP\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument $\tilde{a}_i$. The FA is found when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. Note that in the FA, is when we find the usual probabilistic results. The FWA is obtained when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$.

Following a similar methodology as it has been developed in (Majlender, 2005; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994, 1996a; 1996b; 2007; Yager and Filev, 1994), we could study other particular cases of the IP-FOWA operator such as the step-IP-FOWA, the window-IP-FOWA, the olympic-IP-FOWA, the centered-IP-FOWA operator, the S-IP-FOWA operator, the median-IP-FOWA, the maximal entropy IP-FOWA weights, the nonmonotonic IP-FOWA operator, etc.

For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-IP-FOWA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-IP-FOWA is transformed in the fuzzy maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-IP-FOWA becomes the fuzzy minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-IP-FOWA is transformed in the FA.

The olympic-IP-FOWA, based on the olympic average (Yager, 1996a), is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-IP-FOWA is transformed in the median-IP-FOWA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-IP-FOWA is transformed in the olympic-IP-FOWA.

A further interesting family is the S-IP-FOWA operator. It can be subdivided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-IP-FOWA operator. The generalized S-IP-FOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IP-FOWA operator becomes the "andlike" S-IP-FOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-IP-FOWA operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the IP - fuzzy Hurwicz criteria (IP-FHC).

Note that the median can also be used as IP-FOWA operators. For the median-IP-FOWA, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

For the weighted median-IP-FOWA, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z IP-FOWA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j* = 1$ to $n - q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z IP-FOWA becomes the fuzzy maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z IP-FOWA becomes the fuzzy minimum.

Another family of aggregation operator that could be used is the centered-IP-FOWA operator. Following the same methodology than (Yager, 2007), we could define a IP-FOWA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. Note that these properties have to be accomplished for the weighting vector w of the OWA operator. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-IP-FOWA operator. Another particular situation of the centered-IP-FOWA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-IP-FOWA operator.

Other families of IP-FOWA operators could be developed such as the weights that depend on the aggregated objects (Yager, 1993). For example, we could develop the

BADD-IP-FOWA operator that it is based on the OWA version. Then, they weights are calculated as follows:

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{12}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments $\tilde{a}_i$. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the FA and if $\alpha = \infty$, we get the fuzzy maximum. Another family of IP-FOWA operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1-b_j)^{\alpha}} \tag{13}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments $\tilde{a}_i$. Note that in this case if $\alpha = 0$, we also get the FA and if $\alpha = \infty$, we get the fuzzy minimum. A third family of IP-FOWA operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{14}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments $\tilde{a}_i$. In this case, we also get the generalized mean if $\alpha = 0$. If $\alpha = \infty$, we get the fuzzy minimum.

A very useful approach for obtaining the weights that it is also applicable for the IP-FOWA operator is the functional method introduced by Yager (1996a) for the OWA operator. It can be summarized as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the IP-FOWA weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{15}$$

It can easily be shown that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

5. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example about the use of immediate probabilities in fuzzy decision making problems. We will analyze a decision making problem where a company is studying which strategy is the most appropriate for them. As the environment is very uncertain the group of experts of the company needs to assess the available information with FNs. In this example, we will assume that the available information can be assessed with triangular FNs.

We will use different types of FN aggregation operators in order to see that depending on the aggregation operator used the decision will be different. We will consider the fuzzy IP-maximum, the fuzzy IP-minimum, the fuzzy IP-average (IP-FA), the fuzzy IP-weighted average (IP-FWA), the IP-FOWA operator, the step-IP-FOWA (k = 2), the olympic-IP-FOWA, the median-IP-FOWA, the OR-IP-FOWA (α = 0.6) and the AND-IP-FOWA (β = 0.7).

Assume a company that operates in Europe and North America is analyzing the general policy for the next year and they consider 5 possible strategies to follow.

1) A_1: Expand to the Asian market.
2) A_2: Expand to the African market.
3) A_3: Expand to the South American market.
4) A_4: Expand to all 3 continents.
5) A_5: Do not develop any expansion.

In order to evaluate these strategies, the company considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 5 possible situations for the next year:

1) S_1 = Negative growth rate.
2) S_2 = Growth rate near 0.
3) S_3 = Low growth rate.
4) S_4 = Medium growth rate.
5) S_5 = High growth rate.

The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in Table 1. Note that the results are triangular FNs.

Table 1: Available information about the strategies

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(60,70,80)	(60,70,80)	(50,60,70)	(10,20,30)	(50,60,70)
A_2	(40,50,60)	(10,20,30)	(80,90,100)	(70,80,90)	(40,50,60)
A_3	(60,70,80)	(40,50,60)	(60,70,80)	(20,30,40)	(80,90,100)
A_4	(30,40,50)	(40,50,60)	(60,70,80)	(20,30,40)	(90,100,110)
A_5	(50,60,70)	(70,80,90)	(30,40,50)	(60,70,80)	(60,70,80)

In this problem, the experts of the company find probabilistic information given as follows: P = (0.3, 0.3, 0.2, 0.1, 0.1). Moreover, the policy of the company is to be very pessimistic when taking decisions under uncertainty. Therefore, they decide to manipulate the probabilities by using the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Note that the company will use immediate probabilities in order to assess this problem. The results found in the immediate probabilities by using the above probabilities and weights, are the following ones shown in Table 2.

Table 2: Immediate probabilities of the problem

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
IP_1	0.166	0.333	0.222	0.111	0.166
IP_2	0.095	0.095	0.285	0.095	0.428
IP_3	0.05	0.3	0.2	0.3	0.15
IP_4	0.05	0.2	0.3	0.3	0.15
IP_5	0.157	0.105	0.105	0.315	0.315

Note that we can only use the information shown in Table 2 when using the IP-FOWA operator. Once the initial information is established, it is possible to aggregate it in order to take a decision. First, we will consider some basic aggregation operators such as the fuzzy IP-maximum, the fuzzy IP-minimum, the IP-FA, the IP-FWA and the IP-FOWA operator, to be used in the aggregation. The results are shown in Table 3.

Table 3: Fuzzy aggregated results 1

	IP-Max	IP-Min	IP-FA	IP-FWA	IP-FOWA
A_1	(60,70,80)	(10,20,30)	(52,62,72)	(50.5,60.5,70.5)	(48.3,58.3,68.3)
A_2	(80,90,100)	(10,20,30)	(42,52,62)	(42.2,52.2,62.2)	(33.7,43.7,53.7)
A_3	(80,90,100)	(20,30,40)	(52,62,72)	(52.2,62.2,72.2)	(49,59,69)
A_4	(90,100,110)	(20,30,40)	(44,54,64)	(48.8,58.8,68.8)	(40.5,50.5,60.5)
A_5	(70,80,90)	(30,40,50)	(54,64,74)	(55,65,75)	(48.8,58.8,68.8)

As we can see, the decision is different depending on the aggregation used. If we use the IP-Fuzzy-Minimum, the IP-FA and the IP-FWA, then the optimal strategy is A_5. If we use the IP-Fuzzy-Maximum, then, the best choice is A_4. And if we use the IP-FOWA, then, the best alternative is A_3.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of IP-FOWA operators such as the step-IP-FOWA (k = 2), the olympic-IP-FOWA, the median-IP-FOWA, the OR-IP-FOWA ($\alpha = 0.6$) and the AND-IP-FOWA ($\beta = 0.7$). The results are shown in Table 4.

Table 4: Fuzzy aggregated results 2

	IP-Step	IP-Olym	IP-Or-S	IP-And-S	IP-Med
A_1	(60,70,80)	(55,65,75)	(56.8,66.8,76.8)	(22.6,32.6,42.6)	(50,60,70)
A_2	(70,80,90)	(46,56,66)	(64.8,74.8,84.8)	(19.6,29.6,39.6)	(40,50,60)
A_3	(60,70,80)	(52.5,62.5,72.5)	(68.8,78.8,88.8)	(29.6,39.6,49.6)	(60,70,80)
A_4	(60,70,80)	(41.2,51.2,61.2)	(71.6,81.6,91.6)	(27.2,37.2,47.2)	(40,50,60)
A_5	(60,70,80)	(54,64,74)	(63.6,73.6,83.6)	(37.2,47.2,57.2)	(60,70,80)

As we can see, in this case we also get different results depending on the operator used. If we use the IP-Step-FOWA, the best choice is A_2; if we use the IP-Olympic-FOWA, then, A_1; with the IP-Or-S-FOWA, the A_4; with the IP-And-S-FOWA, the A_5; and with the IP-Median-FOWA, the A_3 and the A_5.

Note that the results given in the form of triangular FNs, can also be represented by using their membership functions. For simplicity, we will simply consider the results shown in Table 3 and 4.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 5: Ordering of the candidates

	Ordering		Ordering
IP-FMaximum	$A_4 \succ A_2 = A_3 \succ A_5 \succ A_1$	IP-Step-FOWA	$A_2 \succ A_1 = A_3 = A_4 = A_5$
IP-FMinimum	$A_5 \succ A_3 = A_4 \succ A_1 = A_2$	IP-Olym-FOWA	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$
IP-FA	$A_5 \succ A_1 = A_3 \succ A_4 \succ A_2$	IP-Or-S-FOWA	$A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1$
IP-FWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	IP-And-S-FOWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
IP-FOWA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$	IP-Med-FOWA	$A_3 = A_5 \succ A_1 \succ A_2 = A_4$

As we can see, depending on the aggregation used, the ordering of the strategies is different. Therefore, depending on the aggregation operator used, the results may lead to different decisions.

6. Conclusions

We have analysed the use of FNs in decision making with immediate probabilities. We have seen the usefulness of using FNs in this type of problems because it gives a more complete view of the uncertain decision problem. Moreover, by using immediate probabilities we are able to develop a framework that considers at the same time, the probabilistic information and the attitudinal character of the decision maker. In order to develop the analysis, we have introduced a new aggregation operator: the IP-FOWA operator. We have seen that this operator has similar properties to the OWA operator with the main difference that it is able to consider probabilities in the problem. Then, we have seen that it is possible to distinguish between descending and ascending orders, study different measures for characterizing the weighting vector, analyse different families of IP-FOWA operators such as the olympic-IP-FOWA or the S-IP-FOWA, etc.

We have also developed an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. We have seen that it is possible to be more optimistic or pessimistic in probabilistic decision making problems. Obviously, this manipulation of the probabilistic results may give different results leading to different decisions. Note that there are a lot of other potential applications that could be developed. Mainly, we could say that the immediate probabilities can be applied in almost all the problems where the usual probabilities have been used such as decision making, actuarial sciences, statistics, etc.

In future research, we expect to develop further developments of the decision making problem with immediate probabilities by adding new characteristics in the problem such as the use of inducing orders or hybrid aggregations. We will also consider other uncertain environments such as the ones that use interval numbers or linguistic variables.

Bibliography

Beliakov, G.; Pradera, A. and Calvo, T. (2007): *Aggregation Functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T.; Mayor, G. and Mesiar, R. (2002): *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chang, J.R.; Ho, T.H.; Cheng, C.H. and Chen, A.P. (2006): "Dynamic fuzzy OWA model for group multiple criteria decision making", *Soft Computing*, 10, pp. 543-554.

Chang, S.S.L. and Zadeh, L.A. (1972): "On fuzzy mapping and control", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2, pp. 30-34.

Chen, S.J. and Chen, S.M. (2003): "A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators", *Cybernetics and Systems*, 34, pp. 109-137.

Cheng, C.H.; Chang, J.R. and Ho. T.H. (2006): "Dynamic fuzzy OWA model for evaluating the risks of software development", *Cybernetics and Systems*, 37, pp. 791-813.

Dubois, D. and Prade, H. (1980): *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Engemann, K.J.; Filev, D.P. and Yager, R.R. (1996): "Modelling decision making using immediate probabilities", *International Journal of General Systems*, 24, pp. 281-294.

Engemann, K.J.; Miller, H.E. and Yager, R.R. (2004): "Decision making with attitudinal based expected values", *International Journal of Technology, Policy and Management*, 4, pp. 1-12.

Figueira, J.; Greco, S. and Ehrgott, M. (2005): *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, Springer. Boston.

Gil-Aluja, J. (1998): *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (1999): *Elements for a theory of decision in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Kaufmann, A. and Gupta, M.M. (1985): *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold.

Majlender, P. (2005): "OWA operators with maximal Renyi entropy", *Fuzzy Sets and Systems*, 155, pp. 340-360.

Merigó, J.M. (2007): *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M. and Casanovas, M., (2007): "The fuzzy generalized OWA operator". *Proceedings of the XIVth SIGEF Congress*. Poiana-Brasov, Romania, pp. 504-517.

Merigó, J.M. and Casanovas, M. (2008): "Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators", *International Journal of Information Technology*, 4, pp. 177-182.

Mitchell, H.B. and Estrakh, D.D. (1998): "An OWA operator with fuzzy ranks", *International Journal of Intelligent Systems*, 13, pp. 69-81.

Moore, R.E. (1966): *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

Xu, Z.S. (2005): "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 843-865.

Yager, R.R. (1988): “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 18, pp. 183-190.

Yager, R.R. (1992): “On generalized measures of realization in uncertain environments”, *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.

Yager, R.R. (1993): “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.

Yager, R.R. (1995): “Measures of entropy and fuzziness related to aggregation operators”, *Information Sciences*, 82, pp. 147-166.

Yager, R.R. (1996a): “Quantifier guided aggregation using OWA operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.

Yager, R.R. (1996b): “Constrained OWA Aggregation”, *Fuzzy Sets and Systems*, 81, pp. 89-101.

Yager, R.R. (1999): “Including decision attitude in probabilistic decision making”, *International Journal of Approximate Reasoning*, 21, pp. 1-21.

Yager, R.R. (2002): “Heavy OWA Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1, pp. 379-397.

Yager, R.R. (2007): “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.

Yager, R.R. (2008): “Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation”, *Information Sciences*, 178, pp.363-380.

Yager, R.R. and Filev, D.P. (1994): “Parameterized andlike and orlike OWA Operators”, *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.

Yager, R.R. and Kacprzyk, J. (1997): *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Zadeh, L.A. (1975): “The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1”, *Information Sciences*, 8, pp. 199-249; “Part 2”, *Information Sciences*, 8, pp. 301-357; “Part 3”, *Information Sciences*, 9, pp. 43-80.

14.1.28. Artículo de congreso 28. – Publicado en AEDEM 2008

DECISION MAKING WIH DEMSPTER-SHAFER THEORY AND UNCERTAIN INDUCED AGGREGATION OPERATORS

Montserrat Casanovas Ramón, mcasanovas@ub.edu, Universidad de Barcelona
José M. Merigó Lindahl, jmerigo@ub.edu, Universidad de Barcelona

RESUMEN

Se desarrolla un nuevo modelo para la toma de decisiones mediante la teoría de la evidencia de Dempster-Shafer. Se analiza situaciones inciertas en donde la información no puede ser tratada mediante números precisos pero sí mediante intervalos de confianza. Para agregar la información, se sugieren diferentes tipos de operadores de agregación inciertos e inducidos tales como el operador *uncertain induced ordered weighted averaging* (UIOWA) y el *uncertain induced hybrid averaging* (UIHA). Como resultado, se obtienen nuevos operadores de agregación tales como el BS-UIOWA y el BS-UIHA. La ventaja de utilizar estos operadores es la posibilidad de modelizar el carácter actitudinal del decisor ante situaciones complejas las cuales no pueden ser tratadas únicamente mediante el grado de optimismo del decisor. Se estudian algunas de sus principales propiedades. También se desarrolla una aplicación del nuevo modelo en un problema de toma de decisiones financieras sobre selección de inversiones.

Palabras clave: Toma de decisiones; Teoría de la evidencia de Dempster-Shafer; Incertidumbre; Operadores de agregación.

ABSTRACT

We develop a new approach for decision making with Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence. We focus on a problem where the available information is uncertain and it can be assessed with interval numbers. In order to aggregate the information, we suggest the use of different types of uncertain induced aggregation operators such as the uncertain induced ordered weighted averaging (UIOWA) and the uncertain induced hybrid averaging (UIHA) operator. As a result, we get new types of aggregation operators such as the belief structure – uncertain induced OWA (BS-UIOWA) and the belief structure – uncertain induced hybrid averaging (BS-UIHA) operator. The main advantage of using these operators is the possibility of using complex attitudinal characters in situations where it is not possible to simply use the degree of optimism of the decision maker. We study some of their main properties. We also develop an application of the new approach in a financial decision making problem about selection of investments.

Keywords: Decision making; Dempster-Shafer theory of evidence; Uncertainty; Aggregation operators.

1. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence (Dempster, 1967; 1968; Shafer, 1976) provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes the situations of risk and ignorance as special cases. For further reading on the D-S theory, we recommend for example (Srivastava and Mock, 2002; Yager et al. 1994; Yager and Liu, 2008).

Usually, when using the D-S theory in decision making, it is assumed that the available information are exact numbers (Engemann et al. 1996; Merigó and Casanovas, 2006; 2007a; Yager, 1992; 2004). However, this may not be the real situation found in the decision making problem because often, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, a better approach may be the use of interval numbers. Note that other studies have considered similar approaches by using fuzzy numbers (Casanovas and Merigó, 2007) and linguistic variables (Merigó et al. 2007).

Going a step further, the aim of this paper is to suggest a new approach for uncertain decision making with D-S theory by using uncertain induced aggregation operators. Then, we will be able to use in the same formulation a unifying framework between ignorance and risk, uncertain information assessed with interval numbers and a reordering process in the aggregation step that uses order inducing variables. We will consider different types of uncertain induced aggregation operators such as the uncertain induced ordered weighted averaging (UIOWA) and the uncertain induced hybrid averaging (UIHA) operator.

The main advantage of using these operators is the possibility of considering complex attitudinal characters in situations where it is not possible to use the degree of optimism of the decision maker. Moreover, it is possible to assess the uncertain information by using interval numbers. Then, we are able to represent the uncertain problem considering the best and worst possible scenario. Note that depending on the type of interval number used, it is also possible to consider the most possible scenarios.

These operators provide a parameterized family of aggregation operators that includes the uncertain maximum, the uncertain minimum, the uncertain average and the uncertain OWA (UOWA) operator, among others. By using these aggregation operators, we will be able to create new aggregation methods such as the belief structure – UIOWA (BS-UIOWA) and the belief structure – UIHA (BS-UIHA) operator. We study some of their main properties and we develop different families of UIOWA and UIHA operators that could be used in the analysis such as the step-UIOWA, the S-UIOWA, the centered-UIOWA, the olympic-UIOWA, etc.

In order to do this, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic concepts such as the interval numbers, the D-S theory, the UIOWA and the UIHA operator. Section 3 introduces the new approach when the information is aggregated with the UIOWA operator. In Section 4, we develop a similar approach with the UIHA operator. Finally, in Section 5 we present an illustrative example of the new approach in a financial decision making problem.

2. PRELIMINARIES

In this Section, we briefly review some basic concepts about the interval numbers, the UIOWA operator, the UIHA operator and the D-S theory.

2.1. INTERVAL NUMBERS

The interval number is a very useful and simple technique for representing the uncertainty. It has been used in an astonishingly wide range of applications. For further reading, see for example (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987, 1990; Kaufmann et al. 1994; Kaufmann and Gupta, 1985; Moore, 1966).

In the literature, we find different types of interval numbers. For example, if we assume a 4-tuple (a_1, a_2, a_3, a_4), that is to say, a quadruplet; we could consider that a_1 and a_4 represents the minimum and the maximum of the interval number, and a_2 and a_3, the interval with the highest probability or possibility, depending on the use we want to give to the interval numbers. Note that $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. If $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the interval number is an exact number and if $a_2 = a_3$, it is a 3-tuple known as triplet.

In the following, we are going to review some basic interval numbers operations as follows. Let A and B be two triplets, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied (Kaufmann et al. 1985; Moore, 1966) but in this paper we will focus on these ones.

2.2. UNCERTAIN INDUCED OWA OPERATOR

The uncertain induced OWA operator was introduced by Xu (2006a). It is an extension of the OWA operator (Beliakov et al. 2007; Calvo et al. 2002; Merigó 2007; Yager, 1988; 1993; Yager and Kacprzyk, 1997) that uses the main characteristics of two well known aggregation operators: the induced OWA (Merigó and Gil-Lafuente, 2007; Yager, 2003; Yager and Filev, 1999) and the uncertain OWA operator (Xu and Da, 2003). Then, it uses interval numbers for representing the uncertain information and a reordering process that it is based on order inducing variables. It can be defined as follows:

Definition 1. *Let Ω be the set of interval numbers. An UIOWA operator of dimension n is a mapping UIOWA: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$UIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (1)$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the UIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable represented in the form of interval numbers.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DUIOWA) and ascending (AUIOWA) orders. Note that in this case, it is not necessary to compare interval numbers because the reordering step is developed with order inducing variables. The only case where we need to compare interval numbers is in the final result. For doing this, we will use the following criteria.

First, we will analyse if there is on order between the interval numbers. If not, we will calculate an average of the interval number. For example, if $n = 2$, $(a_1 + a_2) / 2$; if $n = 3$, $(a_1 + 2a_2 + a_3) / 4$; etc. If there is still a tie, then, we will follow a subjective criterion such as considering only the minimum, the maximum, etc.

Note also that different families of UIOWA operators can be studied by choosing a different weighting vector such as the step-UIOWA operator, the window-UIOWA, the median-UIOWA, the olympic-UIOWA, the centered-UIOWA, the S-UIOWA, etc.

2.3. UNCERTAIN INDUCED HYBRID AVERAGING OPERATOR

The uncertain induced hybrid averaging operator is an extension of the hybrid averaging (Xu, 2006b; Xu and Da, 2003) that uses the weighted average (WA) and the OWA operator, at the same time. It also uses interval numbers for representing the uncertain information and a reordering process based on order inducing variables. It can be defined as follows:

Definition 2. *Let Ω be the set of interval numbers. An UIHA operator of dimension n is a mapping UIHA: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$UIHA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the $\hat{a}_i$ ($\hat{a} = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$) value of the UIHA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

Note that in this case it is also possible to distinguish between descending (DUIHA) and ascending (AUIHA) orders. Also note that it is only necessary to compare interval numbers in the final result because in the reordering step of the aggregation, this problem is solved by using inducing variables. In this case, we will also follow the same criterion as the one explained for the UIOWA operator.

By using a different manifestation in the weighting vector we are able to develop a wide range of families of UIHA operators. For example, we could obtain the maximum, the minimum, the uncertain average (UA), the uncertain weighted average (UWA), the uncertain OWA, among others. Other families that could be studied are the step-UIHA, the window-UIHA, the median-UIHA, the olympic-UIHA, centered-UIHA, the S-UIHA, etc.

2.4. DEMPSTER-SHAFER THEORY OF EVIDENCE

The D-S theory of evidence (Dempster, 1967; Shafer, 1976) provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the situations of risk and ignorance as special cases. Note that the case of certainty is also included as it can be seen as a particular case of risk or ignorance. Since its appearance, the D-S theory has been applied in a wide range of applications (Reformat and Yager, 2008, Srivastava and Mock, 2002; Yager et al. 1994; Yager and Liu, 2008).

Definition 3. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X,* B_j *for* $j = 1,\ldots,n$*, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m*: $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

$$\begin{aligned} &(1) \quad m(B_j) \in [0, 1]. \\ &(2) \quad \textstyle\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1. \qquad (3) \\ &(3) \quad m(A) = 0, \forall A \neq B_j. \end{aligned}$$

As said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in (Shafer, 1976).

3. USING UIOWA OPERATORS IN DECISION MAKING WITH D-S THEORY

In this Section, we describe the process to follow when using UIOWA operators in decision making with D-S theory. We divide it in three subsections. In the first one, we comment the decision process. In the second one, we analyze the aggregation used in the problem. And in the third one, we study different types of UIOWA operators that could be used in the aggregation.

3.1. DECISION MAKING APPROACH

A new approach for decision making with D-S theory is possible by using uncertain induced aggregation operators. The main advantages of using this type of aggregation are: the possibility of dealing with uncertain information, the possibility of using an aggregation that provides a parameterized family of aggregation operators between the maximum and the minimum, and the possibility of using a general formulation in the reordering of the arguments by using inducing variables. Note that in this paper we will focus on the UIOWA and the UIHA operators, but it is also possible to consider other types of uncertain induced aggregation operators by using generalized means and quasi-arithmetic means. The motivation for using interval numbers appear because sometimes, the available information is not clear and it is necessary to assess it with another approach such as the use of interval numbers. Although the information is uncertain and it is difficult to take decisions with it, at least we can represent the best and worst possible scenarios. The decision process can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ is the uncertain payoff, given in the form of interval numbers, to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the uncertain payoff matrix.
Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.
Step 3: Calculate the collection of weights, w, to be used in the UIOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker (Merigó, 2007; Yager, 1988; 1993; 2007; Yager and Filev, 1994).
Step 4: Determine the uncertain payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.
Step 5: Calculate the uncertain aggregated payoff, V_{ik} = UIOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of i and k.
Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{r=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{4}$$

Step 7: Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

3.2. UIOWA OPERATORS IN BELIEF STRUCTURES

Analyzing the aggregation in *Steps* 5 and 6 of the previous subsection, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call this process the belief structure – UIOWA (BS-UIOWA) aggregation. It can be defined as follows.

Definition 4. *A BS-UIOWA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{5}$$

where w_{j_k} is the weighting vector of the kth focal element such that $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ and $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} is the $\tilde{a}_{i_k}$ value of the UIOWA pair $\langle \tilde{a}_{i_k}, \tilde{a}_{i_k} \rangle$ having the j_kth largest u_{i_k}, u_{i_k} is the order inducing variable and the $\tilde{a}_{i_k}$ are interval numbers, and $m(B_k)$ is the basic probability assignment.

Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements. The BS-UIOWA operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between descending and ascending orders by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the BS-DUIOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the BS-AUIOWA operator. Then, we obtain the BS-DUIOWA and the BS-AUIOWA operators.

3.3. FAMILIES OF BS-UIOWA OPERATORS

By choosing a different manifestation in the weighting vector of the UIOWA operator, we are able to develop different families of UIOWA and BS-UIOWA operators. As it can be seen in definition 4, each focal element uses a different weighting vector in the aggregation step with the UIOWA operator. Therefore, the analysis needs to be done individually.

For example, it is possible to obtain the uncertain maximum, the uncertain minimum, the UA and the UWA. The uncertain maximum is found if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$. The uncertain minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Min}\{u_i\}$. The UA is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$ and the UWA is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all a_i.

Other families of UIOWA operators could be used in the BS-UIOWA operator such as the step-UIOWA, the S-UIOWA, the olympic-UIOWA, the window-UIOWA and the centered-UIOWA operator, among others. Note that recently, it is appearing a wide range of papers dealing with the problem of determining OWA weights. In this subsection we simply give a general overview commenting some basic cases that are applicable in the UIOWA operator.

The step-UIOWA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$ and the window-UIOWA when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

For the median-UIOWA, we distinguish between two cases. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument $\tilde{a}_i$ with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign, for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i.

For the weighted median-UIOWA we select the argument $\tilde{a}_i$ that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

The olympic-UIOWA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Note that the olympic-UIOWA is transformed in the olympic-UOWA if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$ and $u_q = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

A further family is the centered-UIOWA operator. This type of aggregation operator is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ which is known as softly decaying centered-UIOWA operator. Note also the possibility of removing the third condition. Then, we shall refer to this type of aggregation as non-inclusive centered-UIOWA operator.

A further interesting family is the S-UIOWA operator. In this case, we can distinguish between three types: the “orlike”, the “andlike”, and the “generalized” S-UIOWA operator. The orlike S-UIOWA operator is found when $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, $u_p = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for all $j \neq p$ with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the UA and if $\alpha = 1$, we get the uncertain maximum. The andlike S-UIOWA operator is found when $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, $u_q = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for all $j \neq q$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that if $\beta = 0$ we get the UA and if $\beta = 1$, the uncertain minimum. Finally, the generalized S-UIOWA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$; and w_j

$= (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, we get the andlike S-UIOWA and if $\beta = 0$, the orlike S-UIOWA.

Another type of UIOWA operator that we could mention is the EZ-UIOWA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

Further families of UIOWA operators that could be used include those that depend on the aggregated objects. For example, we could develop the BADD-UIOWA operator as follows.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{6}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, and b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the UIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ having the jth largest u_i. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the UA and if $\alpha = \infty$, we get the uncertain maximum. In this operator, it appears the problem of how to deal with interval numbers. For simplicity, we recommend to use the average of the interval as the value $\tilde{a}_i$ to be used in the calculation of the weights.

Other families of UIOWA operators that depend on the aggregated objects could be developed by using $(1 - b_j)^{\alpha}$, $(1/ b_j)^{\alpha}$, etc., instead of b_j^{α}. Note that these families were developed for the OWA operator in (Yager, 1993).

A further useful method for obtaining the weighting vector is the functional method known as basic interval monotonic function (BUM) (Yager, 1996). Let f be a function f: $[0, 1] \to [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. Using this BUM function we obtain the UIOWA weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{7}$$

It is easy to see that the weights w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Finally, if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-uncertain maximum, the BS-uncertain minimum, the BS-UA, the BS-UWA, the BS-step-UIOWA, the BS-S-UIOWA, the BS-olympic-UIOWA, , the BS-centered-UIOWA, etc.

4. USING UIHA OPERATORS IN D-S THEORY

In some situations, the decision maker could prefer to use another type of uncertain aggregation operator such as the UIHA operator. The main advantage of this operator is that it uses the characteristics of the UWA and the UIOWA in the same aggregation. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S theory, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, UWAs and UIOWAs.

In order to use this type of aggregation in D-S framework we should consider that now in *Step* 3, when calculating the collection of weights to be used in the aggregation, we are using two weighting vectors because we are mixing in the same problem the UWA and the UIOWA.

In *Step* 5, when calculating the uncertain aggregated payoff, we should use the UIHA operator instead of the UIOWA operator by using Eq. (2).

In this case, it is also possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call it the BS-UIHA operator.

Definition 5. *A BS-UIHA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{8}$$

where w_{j_k} is the weighting vector of the kth focal element such that $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ and w_{j_k} $\in [0,1]$, b_{j_k} is the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$) value of the UIHA pair $\langle u_{i_k}, \tilde{a}_{i_k} \rangle$ having the j_kth largest u_{i_k}, u_{i_k} is the order inducing variable $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_{i_k}$ are interval numbers, and $m(B_k)$ is the basic probability assignment.

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the UIHA operator. Note that if $\omega_i = 1/n$ for all i, then, Eq. (8) is transformed in Eq. (5).

In this case, we could also study different properties and particular cases of the BS-UIHA operator, in a similar way as it has been explained for the BS-UIOWA operator such as the distinction between descending (BS-DUIHA) and ascending (BS-AUIHA) orders.

When aggregating the collection of uncertain payoffs of each focal element, it is also possible to consider a wide range of families of UIHA operators. For example, we could mention the uncertain hybrid maximum, the uncertain hybrid minimum, the uncertain Hurwicz hybrid criteria, the UA, the UWA and the UIOWA operator. These operators are obtained in a similar way as it has been explained in subsection 3.3 excepting for the UWA and the UIOWA. Note that the UWA is found when $w_j = 1/n$, for all j, and the UIOWA operator when $\omega_i = 1/n$, for all i, respectively.

Other families of UIHA operators that could be used are the step-UIHA operator, the window-UIHA, the olympic-UIHA, the S-UIHA, the EZ-UIHA, the median-UIHA, the centered-UIHA, the BADD-UIHA, etc. Note that these families follow a similar methodology as it has been explained for the UIOWA operator.

Finally, if we use the same family of UIHA operator for all the focal elements, then, we can refer to the aggregation as the BS-uncertain hybrid maximum, the BS-uncertain hybrid minimum, the Hurwicz BS-uncertain hybrid criteria, the BS-step-UIHA, the BS-window-UIHA, the BS-olympic-UIHA, the BS-S-UIHA, the BS-centered-UIHA, etc.

5. APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

In the following, we are going to develop an application of the new approach in a decision making problem. We will develop an application in the selection of financial strategies. Note that other decision making applications could be developed such as the selection of investments, financial products, human resources, assets, etc.

We will develop the example considering a wide range of uncertain induced aggregation operators such as the UA, the UWA, the UOWA, the UIOWA and the UIHA operator.

Assume a company is planning its financial strategy for the next year and they consider 5 possible financial strategies to follow.

- A_1 = Financial strategy 1.
- A_2 = Financial strategy 2.
- A_3 = Financial strategy 3.
- A_4 = Financial strategy 4.
- A_5 = Financial strategy 5.

In order to evaluate these financial strategies, the company uses a group of experts. They consider that the key factor is the economic situation of the company for the next year. After careful analysis, the experts have considered five possible situations that could happen in the future: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Normal, S_4 = Good, S_5 = Very good.

Depending on the uncertain situations that could happen in the future, the experts establish the uncertain payoff matrix. As the available information about the future benefits of the company is very imprecise, the experts use interval numbers to assess the information. The results are shown in Table 1.

Table 1: Uncertain payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(10,20,30)	(40,50,60)	(70,80,90)	(40,50,60)	(50,60,70)
A_2	(50,60,70)	(30,40,50)	(20,30,40)	(60,70,80)	(40,50,60)
A_3	(70,80,90)	(40,50,60)	(30,40,50)	(30,40,50)	(40,50,60)
A_4	(30,40,50)	(50,60,70)	(20,30,40)	(50,60,70)	(60,70,80)

After careful analysis of the information, the experts have obtained some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief structure about the states of nature.

Focal element

$B_1 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3$

$B_2 = \{S_1, S_2, S_5\} = 0.3$

$B_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 0.4$

The attitudinal character of the company is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors. Therefore, the experts use order inducing variables for analysing the attitudinal character of the enterprise. The results are shown in Table 2.

Table 2: Order inducing variables

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	22	16	35	26
A_2	12	18	24	20	30
A_3	16	11	21	33	25
A_4	30	26	12	18	24

The experts establish the following weighting vectors for both the UWA and the UIOWA operator.

Weighting vector
$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$
$W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$
$W_5 = (0.1,0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$

With this information, we can obtain the aggregated payoffs. The results are shown in Table 3.

Table 3: Uncertain aggregated payoffs

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
V_{11}	(50,60,70)	(49,59,69)	(49,59,69)	(52,62,72)	(52,62,72)
V_{12}	(33.3,43.3,53.3)	(35,45,55)	(31,41,51)	(34,44,54)	(40,50,60)
V_{13}	(40,50,60)	(43,53,63)	(37,47,57)	(37,47,57)	(42,51,60)
V_{21}	(36.6,46.6,56.6)	(39,49,59)	(35,45,55)	(36,46,56)	(36,46,56)
V_{22}	(40,50,60)	(40,50,60)	(39,49,59)	(41,51,61)	(37,46.5,56)
V_{23}	(40,50,60)	(40,50,60)	(37,47,57)	(37,47,57)	(32.5,41,49.5)
V_{31}	(33.3,43.3,53.3)	(33,43,53)	(33,43,53)	(34,44,54)	(34,44,54)
V_{32}	(50,60,70)	(49,59,69)	(49,59,69)	(49,59,69)	(44.5,54.5,64.5)
V_{33}	(42.5,52.5,62.5)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(34.5,43,51.5)
V_{41}	(40,50,60)	(41,51,61)	(38,48,58)	(38,48,58)	(38,48,58)
V_{42}	(46.6,56.6,66.6)	(48,58,68)	(45,55,65)	(48,58,68)	(55.5,66,76.5)
V_{43}	(37.5,47.5,57.5)	(37,47,57)	(35,45,55)	(35,45,55)	(34,43,52)

Once we have the aggregated results, we have to calculate the uncertain generalized expected value. The results are shown in Table 4.

Table 4: Uncertain generalized expected value

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
A_1	(41,51,61)	(42.4,52.4,62.4)	(38.8,48.8,58.8)	(40.6,50.6,60.6)	(44.4,54,63.6)
A_2	(39,49,59)	(39.7,49.7,59.7)	(37,47,57)	(37.9,47.9,57.9)	(34.9,44.15,53.4)
A_3	(42,52,62)	(40.6,50.6,60.6)	(40.6,50.6,60.6)	(40.9,50.9,60.9)	(37.35,46.75,56.15)
A_4	(41,51,61)	(41.5,51.5,61.5)	(38.9,48.9,58.9)	(39.8,49.8,59.8)	(41.65,51.4,61.15)

As we can see, depending on the uncertain aggregation operator used, the results and decisions may be different. A further interesting issue is to establish an ordering of the financial strategies. Note that this is very useful when the decision maker wants to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5.

Table 5: Ordering of the financial strategies

	Ordering		*Ordering*
UA	$A_3 \succ A_1 = A_4 \succ A_2$	*UIOWA*	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$
UWA	$A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2$	*UIHA*	$A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2$
UOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$		

As we can see, depending on the aggregation operator used, the results and the decisions may be different. With the UA, the UOWA and the UIOWA the optimal choice is A_3. And with the UWA and the UIHA, the best result is A_1.

6. CONCLUSIONS

We have studied the D-S theory of evidence in decision making with uncertain information assessed with interval numbers. By using interval numbers, we can represent uncertain situations where the results are not clear but it is possible to consider the best and worst possible scenarios and the most possible ones. We have also used uncertain induced aggregation operators because it gives more flexibility in the attitudinal character of the decision maker in order to assess complex situations such as the decisions taken by the board of directors of an enterprise. Mainly, we have focussed on the UIOWA and the UIHA operators. Then, we have obtained two new aggregation operators: the BS-UIOWA and the BS-UIHA operator. We have analysed some of the main properties and different particular cases.

We have also developed an application of the new approach in a business decision making problem about selection of financial strategies. We have seen the usefulness of this approach about using probabilities, UWAs and UIOWAs in the same problem. We have also seen that depending on the aggregation operator used, the results and decisions may be different.

In future research, we expect to develop further extensions to this approach by adding new characteristics in the problem and applying it to other decision making problems.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank the anonymous referees for their valuable comments that have improved the quality of the paper.

REFERENCES

Beliakov, G., A. Pradera, T. Calvo, 2007. *Aggregation Functions: A guide for practicioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T., G. Mayor, R. Mesiar, 2002. *Aggregation Operators: New Trends and Applications,* Physica-Verlag, New York.

Casanovas, M., J.M. Merigó, 2007. Using fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, in: *Proceedings of the AEDEM International Conference*, Krakow, Poland, pp. 475-486.

Dempster, A.P., 1967. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Annals of Mathematical Statistics* 38: 325-339.

Dempster, A.P., 1968. A generalization of Bayesian inference, *Journal of the Royal Statistical Society B* 30: 205-247.

Engemann, K.J., H.E. Miller and R.R. Yager, 1996. Decision making with belief structures: an application in risk management, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 4: 1-26.

Kaufmann, A., J. Gil-Aluja, 1987. *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre* (In Spanish), Ed. Hispano-europea, Barcelona.
Kaufmann, A., J. Gil-Aluja, 1990. *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre* (In Spanish), Centro de Estudios Ramón Areces, Madrid.
Kaufmann, A., J. Gil-Aluja, A. Terceño, 1994. *Matemática para la economía y la gestión de empresas* (In Spanish), Ed. Foro Científico.
Kaufmann, A., M.M. Gupta, 1985. *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold.
Merigó, J.M., 2007. *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.
Merigó, J.M., M. Casanovas, 2006. Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, in: *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, pp.709-727.
Merigó, J.M., M. Casanovas, 2007. Induced aggregation operators in decision making with the Dempste-Shafer belief structure, *Working Papers in Economics 184*, University of Barcelona.
Merigó, J.M., M. Casanovas, L. Martínez, 2007. Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, in: *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, pp. 658-671.
Merigó, J.M., A.M. Gil-Lafuente, 2007. The induced generalized OWA operator, In *Proceedings of the conference EUSFLAT 2007* volume 2, pp. 463-470, Ostrava, Czech Republic.
Moore, R.E., 1966. *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
Reformat, M., R.R. Yager, 2008. Building ensemble classifiers using belief functions and OWA operators, *Soft Computing* 12: 543-558.
Shafer, G.A., 1976. *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
Srivastava, R.P., T. Mock, 2002. *Belief Functions in Business Decisions*, Physica-Verlag, Heidelberg.
Xu, Z.S., 2006a. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, *Information Fusion* 7: 231-238.
Xu, Z.S., 2006b. A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information, *Group Decision and Negotiation* 15: 593-604.
Xu, Z.S., Q.L. Da, 2002. The Uncertain OWA Operator, *International Journal of Intelligent Systems* 17: 569-575.
Xu, Z.S., Q.L. Da, 2003. An Overview of Operators for Aggregating the Information, *International Journal of Intelligent Systems* 18: 953-969.
Yager, R.R., 1988. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18: 183-190.
Yager, R.R., 1992. Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, *International Journal of General Systems* 20: 233-245.
Yager, R.R., 1993. Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59: 125-148.
Yager, R.R., 1996. Quantifier guided aggregation using OWA operators, *International Journal of Intelligent Systems* 11: 49-73.
Yager, R.R., 2003. Induced aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* 137: 59-69.
Yager, R.R., 2004. Uncertainty modeling and decision support, *Reliability Engineering and System Safety* 85: 341-354.

Yager, R.R., 2007. Centered OWA operators, *Soft Computing* 11: 631-639.
Yager, R.R., M. Fedrizzi and J. Kacprzyk, 1994. *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence,* John Wiley & Sons, New York.
Yager, R.R., D.P. Filev, 1994. Parameterized "andlike" and "orlike" OWA Operators, *International Journal of General Systems* 22: 297-316.
Yager, R.R., D.P. Filev, 1999. Induced ordered weighted averaging operators, *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics* 29: 141-150.
Yager, R.R., J. Kacprzyk, 1997. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
Yager, R.R., L. Liu, 2008. *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*, Springer-Verlag, Berlin.

14.1.29. Artículo de congreso 29. – Publicado en AEDEM 2008

THE INDUCED GENERALIZED HYBRID AVERAGING OPERATOR AND ITS APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

José M. Merigó Lindahl, jmerigo@ub.edu, Universidad de Barcelona
Montserrat Casanovas Ramón, mcasanovas@ub.edu, Universidad de Barcelona

RESUMEN

Se presenta el operador induced generalized hybrid averaging (IGHA). Es un nuevo operador de agregación que generaliza la agregación híbrida (HA) a través de utilizar medias generalizadas y variables de ordenación inducidas. Con esta formulación, se obtiene una amplia gama de operadores de medias tales como el HA inducido (IHA), el HA inducido geométrico (IHGA), el HA inducido cuadrático (IHQA), etc. Obsérvese que el operador OWA y la media ponderada (WA) están incluidos como casos particulares del operador HA. Por eso, con esta generalización se puede obtener una amplia gama de WA, OWA y OWA inducidos (IOWA) como el operador OWA generalizado inducido (IGOWA), el operador OWA generalizado (GOWA), etc. También se presenta una generalización mayor al operador IGHA a través de utilizar medias cuasi-aritméticas que denominamos como el operador Quasi-IHA. Finalmente, también se desarrolla un ejemplo ilustrativo del nuevo modelo en un problema de toma de decisiones financieras. Su principal ventaja radica en la amplia gama de casos particulares disponibles lo cual ofrece al decisor una mejor visión del problema en cuestión.

Palabras clave: Toma de decisiones; Operadores de agregación; Medias híbridas; Medias generalizadas.

ABSTRACT

We present the induced generalized hybrid averaging (IGHA) operator. It is a new aggregation operator that generalizes the hybrid averaging (HA) by using generalized means and order inducing variables. With this formulation, we get a wide range of mean operators such as the induced HA (IHA), the induced hybrid quadratic averaging (IHQA), the HA, etc. The ordered weighted averaging (OWA) operator and the weighted average (WA) are included as special cases of the HA operator. Therefore, with this generalization we can obtain a wide range of aggregation operators such as the induced generalized OWA (IGOWA), the generalized OWA (GOWA), etc. We further generalize the IGHA operator by using quasi-arithmetic means. Then, we get the Quasi-IHA operator. Finally, we also develop an illustrative example of the new approach in a financial decision making problem. The main advantage of the IGHA is that it gives a more complete view of the decision problem to the decision maker because it considers a wide range of situations depending on the operator used.

Keywords: Decision making; Aggregation operators; Hybrid averaging; Generalized means.

1. INTRODUCTION

In the literature, we find a wide range of aggregation operators for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). It has been used in an astonishingly wide range of applications (Beliakov et al. 2007; Calvo et al. 2002; Merigó, 2007; Merigó and Casanovas, 2007; Yager, 1992; 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). The main advantage of this operator is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, as special cases.

An interesting extension of the OWA operator is the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004). It generalizes the OWA operator by using generalized means (Dujmovic, 1974; Dyckhoff and Pedrycz, 1984). Then, it includes all the special cases of the OWA operator and a lot of other extensions such as the ordered weighted geometric averaging (OWG) operator, the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator, etc. Note that the GOWA can be further generalized (Beliakov, 2005) by using quasi-arithmetic means (Hardy et al., 1934, Kolmogoroff, 1930; Nagumo, 1930). The result is the Quasi-OWA operator (Fodor et al., 1995). Recently, Merigó and Gil-Lafuente (2007) have suggested an extension of the GOWA operator that uses order inducing variables in a similar way as the induced OWA (IOWA) operator (Yager, 2003; Yager and Filev, 1999). This operator has been called the induced generalized OWA (IGOWA) operator. It provides a wider generalization than the GOWA because it includes the GOWA as a special case, but it also includes a wide range of induced aggregation operators such as the IOWA, the induced OWG, the induced OWQA, etc. This operator has also been further generalized by using quasi-arithmetic means (Merigó and Gil-Lafuente, 2007) and it is known as the Quasi-IOWA operator. Other generalizations of the OWA operator are found in (Merigó and Casanovas, 2007b; 2007c; Wang and Hao, 2006). Note that these generalizations have a different meaning than those developed in (Schaefer and Mitchell, 1999).

A further interesting aggregation operator is the hybrid averaging (HA) operator (Xu and Da, 2003). It is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator in the same formulation. The HA operator has been studied by several authors (Merigó, 2007; Xu, 2004; 2006). Another interesting extension of the HA operator is the one that uses a more general attitudinal character by using order inducing variables. It is known as the induced HA (IHA) operator. In the HA operator, it is also possible to generalize it by using generalized means. Then, we get the generalized hybrid averaging (GHA) operator. This generalization includes a wide range of mean operators such as the HA, the hybrid geometric averaging (HGA), the hybrid quadratic averaging (HQA), etc. Note that in this case, it is also possible to generalize it by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-HA operator.

Going a step further, we see that it is also possible to develop a generalization of the HA operator that uses order inducing variables. We will call this aggregation operator, the induced generalized hybrid averaging (IGHA) operator. The main advantage of this operator is that it provides a wider generalization of the GHA because it provides a more complete attitudinal character by using inducing variables. The IGHA operator includes the GHA as a particular case. Therefore, all the particular cases of the GHA are also included in this generalization. It also provides with other types of means such as the IHA, the induced HGA, the induced HQA, the IGOWA operator, etc.

We further generalize it by using quasi-arithmetic means and we obtain, as a result, the Quasi-IHA operator. Finally, we will also develop an illustrative example of the new aggregation operator. We will focus on a financial decision making problem about the selection of investments. The main advantage of using the IGHA in decision making problems is that it gives a more complete view of the decision problem to the decision maker. Then, the decision maker will be able to consider a wide range of scenarios and select the one that it is in accordance with its interests.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts such as the IHA and the IGOWA operator. Section 3 presents the IGHA operator. Section 4 analyzes different families of IGHA operators. In Section 5, we present an illustrative example of the new approach in a financial decision making problem. Finally, in Section 6 we summarize the main conclusions of the paper.

2. PRELIMINARIES

In this Section, we briefly describe the main concepts of the IGOWA operator and the IHA operator.

2.1. IGOWA OPERATOR

The IGOWA operator was introduced in (Merigó and Gil-Lafuente, 2007) and it represents a generalization of the IOWA operator by using generalized means. Then, it is possible to include in the same formulation, different types of induced operators such as the IOWA operator or the induced OWG (IOWG) operator. It can be defined as follows.

Definition 1. *An IGOWA operator of dimension n is a mapping IGOWA:* $R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{1}$$

where b_j *is the* a_i *value of the IGOWA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* a_i *is the argument variable and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

As we can see, if $\lambda = 1$, we get the IOWA operator. If $\lambda = 0$, the IOWG operator and if $\lambda = 2$, the IOWQA operator. Note that it is possible to further generalize the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-IOWA operator.

2.2. INDUCED HYBRID AVERAGING OPERATOR

The induced HA (IHA) operator is an extension of the HA operator that uses order inducing variables. The HA operator (Xu and Da, 2003) is an aggregation operator that uses the WA and the OWA in the same formulation. Then, in the IHA operator it is possible to consider in the same problem, a complex attitudinal character of the decision maker and its subjective probability.

Definition 2. *An IHA operator of dimension n is a mapping IHA:*$R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$IHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j *is the* $\hat{a}_i$ *value* ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), *of the IHA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ *is the weighting vector of the* a_i, *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending IHA (DIHA) operator and the ascending IHA (AIHA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the *j*th weight of the DIHA and w^*_{n-j+1} the *j*th weight of the AIHA operator. Different families of IHA operators are found by using a different manifestation in the weighting vector such as the step-IHA operator, the window-IHA operator, the median-IHA operator, the centered-IHA operator, etc. (Merigó, 2007).

3. THE INDUCED GENERALIZED HYBRID AVERAGING OPERATOR

The IGHA operator is a generalization of the IHA operator by using generalized means. It includes in the same formulation the weighted generalized mean and the IGOWA operator. It also uses order inducing variables in the reordering process. Then, this operator includes the WA, the OWA, the IOWA and the IOWG operator as special cases. It is defined as follows.

Definition 3. *An IGHA operator of dimension n is a mapping IGHA*:$R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$IGHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j *is the* $\hat{a}_i$ *value* ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), *of the IHA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ *is the weighting vector of the* a_i, *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, *and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending IGHA (DIGHA) operator and the ascending IGHA (AIGHA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the *j*th weight of the DIGHA and w^*_{n-j+1} the *j*th weight of the AIGHA operator. As we can see, the main difference is that in the AIGHA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the DIGHA (or IGHA) they are ordered in a decreasing way.

The IGHA operator is commutative, monotonic and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $IGHA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = IGHA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle \ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$, where $(d_1,\ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1,\ldots, a_n)$. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all a_i, then, $IGHA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq IGHA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle \ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all a_i, then, $IGHA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = a$.

Another interesting issue when analysing the IGHA operator is the problem of ties in the reordering step. In order to solve this problem, we recommend the policy developed by Yager and Filev (1999) where they replace each argument of the tied IOWA pairs by their average. For the IGHA operator, instead of using the arithmetic mean, we will replace each argument of the tied IGHA pairs by its generalized mean. Then, depending on the parameter λ, we will use a different type of mean to replace the tied arguments.

As it is explained in (Yager and Filev, 1999) for the IOWA operator, when studying the order inducing variable of the IGHA operator, we should note that the values used can be drawn from a space such that the only requirement is to have a linear ordering. Then, it is possible to use different kinds of attributes for the order inducing variables that permit us, for example, to mix numbers with words in the aggregations (Zadeh, 1996). Note that in some situations it is possible to use the implicit lexicographic ordering associated with words such as the ordering of words in dictionaries (Yager and Filev, 1999).

4. FAMILIES OF IGHA OPERATORS

In this Section, we will analyze different types of IGHA operators. We will distinguish between two general classes: those found in the weighting vector W and those found in the parameter λ.

4.1. ANALYSING THE WEIGHTING VECTOR *W*

By using a different manifestation of the weighting vector in the IGHA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the hybrid maximum, the hybrid minimum, the generalized mean (GM), the weighted generalized mean (WGM) and the IGOWA operator.

The hybrid maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, then, $IGHA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Max}\{a_i\}$. The hybrid minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Min}\{a_i\}$, then, $IGHA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Min}\{a_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $IGHA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = b_k$, where b_k is the the a_i value of the IGHA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the kth largest u_i. The GM is found when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all a_i. The WGM is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. The GOWA is found when $\omega_i = 1/n$, for all a_i, and the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1993), we could study other particular cases of the IGHA operators such as the step-IGHA, the window-IGHA, the olympic-IGHA, the centered-IGHA operator, the S-

IGHA operator, the median-IGHA, the E-Z IGHA, the nonmonotonic IGHA operator, etc.

For example, when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-IGHA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, and the initial position of the highest u_i is also the initial position of the highest a_i, then, the window-IGHA is transformed in the hybrid maximum. If $m = 1$, $k = n$, and the initial position of the lowest u_i is also the initial position of the lowest a_i, then, the window-IGHA becomes the hybrid minimum.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-IGHA. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-IGHA is transformed in the median-IGHA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-IGHA becomes the olympic-IGHA. Also note that the olympic-IGHA is transformed in the olympic hybrid generalized average if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$ and $u_q = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z IGHA weights that it is based on the E-Z OWA weights (Yager, 2006). In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n. Note that the E-Z IGHA weights becomes the E-Z GHA weights for the first class if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, from $j = 1$ to k. And for the second class, the E-Z IGHA weights becomes the E-Z GHA weights if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, from $j = n - k + 1$ to n.

A further type that could be used is the median-IGHA operator. In this case, we should distinguish between two cases. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument a_i with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i. Note that it is also possible to use the weighted IGHA median. We select the argument a_i that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5. Note that if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, then, the IGHA median and the weighted IGHA median become the GHA median and the weighted GHA median, respectively.

Another family of aggregation operators that could be used in the IGHA operator is the centered-IGHA weights. This type of operator has been suggested by Yager (2007) for the OWA operator. Following the same methodology, we could define a centered-IGHA operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-IGHA operator. Note that the generalized mean is an example of this particular case of centered-IGHA operator. Another particular situation of the centered-IGHA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-IGHA operator. For this situation, we find the median-IGHA as a particular case.

A further interesting family is the S-IGHA operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be divided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-IGHA operator. The "orlike" S-IGHA operator is found when $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, $u_p = \mathrm{Max}\{a_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for all $j \neq p$ with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the weighted generalized mean and if $\alpha = 1$, we get the hybrid maximum. The "andlike" S-IGHA operator is found when $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, $u_q = \text{Min}\{a_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for all $j \neq q$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the weighted generalized mean and if $\beta = 1$, we get the hybrid minimum. Finally, the generalized S-IGHA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IGHA operator becomes the "andlike" S-IGHA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-IGHA operator.

Finally, note that other families could be studied such as the Gaussian IGHA weights, the nonmonotonic-IGHA operator, etc. For more information, see (Merigó, 2007).

4.2. ANALYSING THE PARAMETER λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual IHA operator, the induced hybrid geometric averaging (IHGA) operator, the induced hybrid harmonic averaging (IHHA) operator and the induced hybrid quadratic averaging (IHQA) operator.

When $\lambda = 1$, we get the IHA operator.

$$IGHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4}$$

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DIHA operator and the AIHA operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WA and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the IOWA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the arithmetic mean (AM).

When $\lambda = 0$, the IGHA operator becomes the IHGA operator.

$$IGHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{5}$$

In this case, it is also possible to distinguish between descending (DIHGA) and ascending (AIHGA) orders. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WGM and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the IOWG operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the geometric average (GA).

When $\lambda = -1$, we get the IHHA operator.

$$IGHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{6}$$

In this case, we get the descending IHHA (DIHHA) operator and the ascending IHHA (AHHA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the weighted harmonic mean (WHM) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the induced ordered weighted harmonic averaging (IOWHA) operator. If w_j = 1/n, and ω_j = 1/n, for all a_i, then, we get the harmonic mean (HM).

When λ = 2, we get the IHQA operator.

$$IGHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2\right)^{1/2} \quad (7)$$

In this case, we get the descending IHQA (DIHQA) operator and the ascending IHQA (AIHQA) operator. If w_j = 1/n, for all a_i, we get the WQM and if ω_j = 1/n, for all a_i, we get the induced OWQA (IOWQA) operator. If w_j = 1/n, and ω_j = 1/n, for all a_i, then, we get the quadratic mean (QM).

Note that we could analyze other families by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1 where we study different properties and families of the aggregation operator.

5. QUASI-IHA OPERATOR

Going a step further, it is possible to generalize the IGHA operator by using quasi-arithmetic means in a similar way as it was done for the IGOWA operator (Merigó and Gil-Lafuente, 2007). The result is the Quasi-IHA operator which is a hybrid version of the Quasi-OWA (Fodor et. al., 1995) and the Quasi-IOWA operator (Merigó and Gil-Lafuente, 2007). It can be defined as follows.

Definition 4. *A Quasi-IHA operator of dimension n is a mapping QIHA:* $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$Quasi\text{-}IHA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(b_{(j)}\right)\right) \quad (8)$$

where b_j *is the* $\hat{a}_i$ *value* ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, i = 1,2,…,n), *of the Quasi-IHA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ *is the weighting vector of the* a_i, *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1.

As we can see, we replace b^λ with a general continuous strictly monotone function *g(b)*. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the *j*th weight of the Quasi-DIHA and w^*_{n-j+1} the *j*th weight of the Quasi-AIHA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the IGHA operator, are also included in this generalization. For example, we could study different families of Quasi-IHA operators such as the Quasi-IOWA, the Quasi-WA, the Quasi-step-IHA, the Quasi-window-IHA, the Quasi-median-IHA, the Quasi-olympic-IHA, the Quasi-centered-IHA, etc.

6. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example of the new approach in a decision making problem. We will study an investment selection problem where an investor is looking for an optimal investment. Note that other decision making applications could be developed such as the selection of financial products (Merigó and Gil-Lafuente, 2007), the selection of human resources (Merigó, 2007), etc.

We will analyze different particular cases of the IGHA operator such as the AM, the WA, the OWA, the IOWA, the HA, the IHA, the IHQA, etc.

Assume an investor wants to invest some money in an enterprise in order to get high profits. Initially, he considers five possible alternatives.

- A_1 is a computer company.
- A_2 is a chemical company.
- A_3 is a food company.
- A_4 is a car company.
- A_5 is a TV company.

In order to evaluate these investments, the investor uses a group of experts. This group of experts considers that the key factor is the economic environment of the economy. After careful analysis, they consider five possible situations for the economic environment: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in Table 1.

Table 1: Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	50	70	40	80	30
A_2	30	60	50	90	50
A_3	60	40	30	80	40
A_4	20	70	70	50	50
A_5	70	30	40	60	40

In this problem, the experts assume the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Due to the fact that the attitudinal character is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors, the experts use order inducing variables to express it. The results are represented in Table 2.

Table 2: Order inducing variables

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	9	6	5	8
A_2	4	3	6	8	7
A_3	2	8	4	3	6
A_4	5	6	9	2	7
A_5	8	4	3	6	5

With this information, we can aggregate the expected results for each state of nature in order to take a decision. In Table 3, we present different results obtained by using different types of IGHA operators.

Table 3: Aggregated results

	AM	WA	OWA	HA	IOWA	IHA	IHQA
A_1	54	52	49	46.5	55	63.5	73.77
A_2	56	58	50	50.5	56	61	65.34
A_3	50	48	45	43	52	59	65.19
A_4	52	55	47	48.5	47	46.5	48.70
A_5	48	45	44	42	49	53.5	55.87

If we establish an ordering of the alternatives, a typical situation if we want to consider more than one alternative, then, we get the following results shown in Table 4.

Table 4. Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
AM	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_5$	*IOWA*	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
WA	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$	*IHA*	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
OWA	$A_2 \succ A_1 \succ A_4 = A_5 \succ A_3$	*IHQA*	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$
HA	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$		

As we can see, depending on the aggregator operator used, the ordering of the investments may be different. Then, it is clear that each particular case of the IGHA may lead to different results and decisions. Obviously, the decision maker will select the particular case that it is in accordance with its interests.

6. CONCLUSIONS

In this paper we have presented the IGHA operator. It is a generalization of the OWA operator that uses the characteristics of three well known aggregation operators: the HA, the GOWA and the IOWA operator. Therefore, this operator uses a unifying framework between the WA and the OWA, generalized means and order inducing variables, in the same formulation. We have studied some of the main properties of this new aggregation operator. We have further generalized it by using quasi-arithmetic means. Then, we have obtained the Quasi-IHA operator.

We have also presented a numerical example of the new approach. We have developed a financial decision making problem about the selection of investments. The main idea behind this aggregation operator is that it includes a wide range of particular cases. Then, depending on the particular case used, the results and decisions may be different.

In future research, we expect to develop further extensions by adding new characteristics in the problem such as the use of uncertain information in the problem represented in the form of interval numbers, fuzzy numbers, linguistic variables, etc. We will also consider other business decision making problems such as human resource management, strategic management, etc.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank the anonymous referees for their valuable comments that have improved the quality of the paper.

REFERENCES

Beliakov, G., 2005. Learning Weights in the Generalized OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 4: 119-130.

Beliakov, G., A. Pradera, T. Calvo, 2007. *Aggregation Functions: A guide for practicioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T., G. Mayor, R. Mesiar, 2002. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Dujmovic, J., 1974. Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, *Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika*, 483: 147-158.

Dyckhoff, H., W. Pedrycz, 1984. Generalized means as model of compensative connectives, *Fuzzy Sets and Systems* 14: 143-154.

Fodor, J., J.L. Marichal, M. Roubens, 1995. Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3: 236-240.

Hardy, G.H., J.E. Littlewood, G. Pólya, 1934. *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.

Karayiannis, N., 2000. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks* 11: 1093-1105.

Kolmogoroff, A.N., 1930. Sur la notion de la moyenne, *Accad. Naz. Lincei Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Sez.* 12: 388-391.

Merigó, J.M., 2007. *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., M. Casanovas, 2007a. Induced aggregation operators in decision making with the Dempster-Shafer belief structure, *Working Papers in Economics 184*, University of Barcelona.

Merigó, J.M., M. Casanovas, 2007b. The fuzzy generalized OWA operator, In *Proceedings of the conference SIGEF 2007*, pp. 504-517, Poiana-Brasov, Romania.

Merigó, J.M., M. Casanovas, 2007c. The uncertain generalized OWA operator and its application in the selection of financial strategies, In *Proceedings of the international conference AEDEM 2007*, pp. 547-556, Krakow, Poland.

Merigó, J.M., A.M. Gil-Lafuente, 2007. The induced generalized OWA operator, In *Proceedings of the conference EUSFLAT 2007* volume 2, pp. 463-470, Ostrava, Czech Republic.

Nagumo, M., 1930. Uber eine klasse der mittelwerte, *Japanese Journal of Mathematics* 6: 71-79.

Schaefer, P.A., H.B. Mitchell, 1999. A generalized OWA operator, *International Journal of Intelligent Systems*, 14: 123-143.

Wang, J.H., J. Hao, 2006. A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14: 435-445.

Xu, Z.S., 2004. A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations. *Information Sciences* 166: 19-30.
Xu, Z.S., 2006. A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information, *Group Decision and Negotiation* 15: 593-604.
Xu, Z.S., Q.L. Da, 2003. An Overview of Operators for Aggregating the Information, *International Journal of Intelligent Systems* 18: 953-969.
Yager, R.R., 1988. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18: 183-190.
Yager, R.R., 1992. On generalized measures of realization in uncertain environments, *Theory and Decision* 33: 41-69.
Yager, R.R., 1993. Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59: 125-148.
Yager, R.R., 1996. Quantifier guided aggregation using OWA operators, *International Journal of Intelligent Systems* 11: 49-73.
Yager, R.R., 2003a. E-Z OWA weights, In *Proceedings of the 10th International Fuzzy Systems Association (IFSA) World Congress*, Istanbul, Turkey, pp. 39-42.
Yager, R.R., 2003b. Induced aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* 137: 59-69.
Yager, R.R., 2004. Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 3: 93-107.
Yager, R.R., 2007. Centered OWA operators, *Soft Computing* 11: 631-639.
Yager, R.R., D.P. Filev, 1994. Parameterized "andlike" and "orlike" OWA Operators, *International Journal of General Systems* 22: 297-316.
Yager, R.R., D.P. Filev, 1999. Induced ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 29: 141-150.
Yager, R.R., J. Kacprzyk, 1997. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.30. Artículo de congreso 30. – Publicado en AMSE 2008

THE GENERALIZED ADEQUACY COEFFICIENT

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

ABSTRACT

The adequacy coefficient is a very useful technique that provides a more complete formulation than the Hamming distance in decision making problems. In this paper, we suggest a generalization by using generalized means. As a result, we will get the generalized ordered weighted averaging adequacy coefficient (GOWAAC). This new aggregation operator generalize a wide range of particular cases such as the generalized adequacy coefficient (GAC), the weighted generalized adequacy coefficient (WGAC), the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC), the ordered weighted quadratic averaging adequacy coefficient (OWQAAC), and others. We study different properties of this aggregation operator. We end the paper with an application of the new approach in a strategic decision making problem about selection of strategies.

KEY WORDS

Adequacy coefficient; OWA operator; Strategic decision making; Generalized mean; Quasi-arithmetic mean.

RESEARCH FIELD

Fuzzy Logic and its applications.

1. INTRODUCTION

Decision making problems are very common in the economic environment. They may affect different economic problems such as the investments, the strategies, the human resources, the assets, etc. (Figueira et al., 2005; Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a; Yager and Kacprzyk, 1997). Usually, it is necessary to aggregate the available information in order to obtain a representative result. For doing this, we need to use an aggregation operator (Beliakov et al., 2007; Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997). A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, as special cases.

An interesting generalization of the OWA operator is the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) that uses generalized means in the aggregation process. Then, we can obtain a wide range of mean operators such as the generalized mean, the weighted generalized mean; the OWA operator, etc. For further developments on the GOWA operator, see (Beliakov, 2005; Merigó and Casanovas, 2007a; 2007b; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007b; Wang and Hao, 2006).

Another interesting method for decision making is the adequacy coefficient (Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987). It is a useful technique that provides similar results than the Hamming distance with some differences that makes it more complete (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a). Since its appearance, it has been widely studied by different authors in different business decision making problems (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2007a; 2007c).

The objective of this paper is to introduce a new generalization of the adequacy coefficient by using generalized means. We will call this generalization, the generalized adequacy coefficient. In the generalization process, we will distinguish between the use of the generalized mean (GM), the weighted generalized mean (WGM) and the GOWA operator. With these generalizations, we will introduce the generalized adequacy coefficient (GAC), the weighted generalized adequacy coefficient (WGAC) and the generalized ordered weighted averaging adequacy coefficient (GOWAAC). With these aggregation operators, we will generalize a wide range of operators such as the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC), the ordered weighted geometric adequacy coefficient (OWGAC), the ordered weighted quadratic averaging adequacy coefficient (OWQAAC), etc. We will study some of their main properties. We will also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. We will see that depending on the particular case used, the results of the aggregation process may lead to different decisions.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2 we review some basic concepts to be used throughout the paper. In Section 3, we present the generalized adequacy coefficient. Section 4 develops an illustrative example of the new approach. Finally, in Section 5, we summarize the main conclusions of the paper.

2. PRELIMINARIES

In this Section we briefly describe some basic concepts to be used throughout the paper such as the adequacy coefficient, the OWA operator and the GOWA operator.

Adequacy coefficient

The normalized adequacy coefficient (Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of differences between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is very similar to the Hamming distance with the difference that it neutralizes the result when the comparison shows that the real element is higher than the ideal one. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 1. A normalized adequacy coefficient of dimension n is a mapping K:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$K(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i{}^{(k)}] \qquad (1)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the adequacy it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the weighted adequacy coefficient. It can be defined as follows.

Definition 2. A weighted adequacy coefficient of dimension n is a mapping K:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$K(P_k \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)}] \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

OWA operator

The OWA operator (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). Note that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) is an aggregation operator that generalizes a wide range of mean operators such as the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. It can be defined as follows.

Definition 4. A GOWA operator of dimension n is a mapping GOWA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\text{GOWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA

(AGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.
As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators can be found in (Beliakov, 2005; Karayiannis, 2000; Merigó, 2007, Yager, 2004).

3. THE GENERALIZED ADEQUACY COEFFICIENT

The adequacy coefficient can be generalized by using generalized means. Then, the result is the generalized adequacy coefficient (GAC). Going a step further, it is also possible to use the weighted generalized mean, obtaining the weighted generalized adequacy coefficient (WGAC). It can be defined as follows.
Definition 5. A WGAC operator of dimension n is a mapping WGAC:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\text{WGAC}(P_k \rightarrow P) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i [1 \wedge (1 - \mu_i - \mu_i^k)]^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P_k and P, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.
As we can see, if $w_i = 1/n$, we get the GAC operator. Note that if we look to the parameter λ we also find a wide range of mean operators. For example, if $\lambda = 1$, we get the weighted adequacy coefficient (WAC), and if $\lambda = 2$, we get the weighted quadratic averaging adequacy coefficient (WQAAC).
Going a step further, it is possible to present a wider generalization of the WGAC operator by using the OWA operator. Then, we get the following.
Definition 6. A GOWAAC operator of dimension n is a mapping GOWAAC: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where K_j represents the jth largest of the $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, $k = 1,2,\ldots,m$; and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that we have given this definition for all R, but we should note that sometimes we may find problems, specially when the arguments are 0. Basically, these problems appear for values in the parameter $\lambda \leq 0$.
From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWAAC (DGOWAAC) operator and the ascending generalized OWAAC (AGOWAAC) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAAC operator.
Analogously to the GOWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the GOWAAC because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it

the generalized ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (GOWADAC). It can be defined as follows.

Definition 7. A GOWADAC operator of dimension n, is a mapping GOWADAC: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$\text{GOWADAC}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

where Q_j represents the jth largest of the $q_i = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case, we also find inconsistencies when the arguments are 0, when $\lambda \leq 0$.

In this case, we can also distinguish between the descending GOWADAC (DGOWADAC) and the ascending GOWADAC (AGOWADAC) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWADAC operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the GOWAAC aggregation can be expressed as:

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{8}$$

Also note that the GOWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. If we look to different values of the parameter λ, we can obtain different special cases such as the OWAAC operator, the OWGAC operator, the OWHAAC operator and the OWQAAC operator. When $\lambda = 1$, we obtain the OWAAC operator. When $\lambda = 0$, the OWGAC operator. When $\lambda = -1$, the OWHAAC operator. And when $\lambda = 2$, the OWQAAC operator.

Another interesting issue to analyze is the different measures used for characterizing the weighting vector of the GOWAAC operator. Based on the measures developed for the GOWA operator by Yager (2004), they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated as follows.

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used (Yager, 1988). It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{10}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

Note that other measures could be studied such as the divergence of W and the balance operator (Yager, 1996; 2002).

4. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example where we will see the applicability of the new approach. We are going to consider a decision making problem about selection of strategies. We will use different types of GOWAAC operators such as the NAC, the QAC, the WAC, the WQAC, the OWAAC, the AOWAAC, the OWQAAC, the step-OWAAC, the olympic-OWAAC, the median-OWAAC, etc.

Assume a company that is operating in Europe and North America is analyzing the general policy for the next period and they consider 5 possible strategies to follow.

- A_1: Expand to the Asian market.
- A_2: Expand to the African market.
- A_3: Expand to the South American market.
- A_4: Expand to the three continents.
- A_5: Do not develop any expansion.

In order to evaluate these strategies, the company has acquired a group of experts. They consider different general characteristics about the strategies that can be summarized in 6 characteristics: C_1 = Risk of the strategy; C_2 = Difficulty; C_3 = Benefits in the short term; C_4 = Benefits in the mid term; C_5 = Benefits in the long term; C_6 = Market share.

The evaluation of these characteristics is developed by the experts. They summarize the results in Table 1 depending on the characteristic C_i and the alternative A_k. Note that values near 1 imply that the results are good and values near 0, bad.

Table 1. Expected results

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.6	0.9	0.9	0.7	0.7
A_2	0.8	0.4	0.7	0.6	0.8	0.9
A_3	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.7
A_4	0.5	0.8	0.8	0.8	0.6	0.9
A_5	0.7	0.8	0.9	1	0.8	0.4

The group of experts considers the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). Note that this weighting vector reflects the attitudinal character of the company when using the OWA operator. In order to develop the analysis, the experts calculate the results that an ideal strategy should have. This results are shown in Table 2.

Table 2. Ideal strategy

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.8	0.9	1	0.8	1	0.8

Obviously, results higher than the ideal are also interesting so they can not be penalized as it happens with the Hamming distance. Then, it is reasonable to use the adequacy coefficient because it does not penalize results higher than the ideal, but it gives the same treatment than the Hamming distance for values lower than the ideal. Note that

other similar methods could be used in the analysis such as the index of maximum and minimum level (J. Gil-Lafuente, 2002).
With this information, we can aggregate the expected results in order to obtain a representative result for each alternative. First, we are going to consider the NAC, the QAC, the WAC, the WQAC and the OWAAC operator. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 1

	NAC	QAC	WAC	WQAC	OWAAC
A_1	0.85	0.857	0.86	0.867	0.81
A_2	0.8	0.818	0.84	0.854	0.73
A_3	0.85	0.855	0.88	0.884	0.81
A_4	0.83	0.846	0.86	0.875	0.77
A_5	0.85	0.859	0.81	0.824	0.8

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of the GOWAAC operator such as the AOWAAC, the OWQAAC, the step-OWAAC (k=2), the median-OWAAC and the olympic-OWAAC operator. The results are shown in Table 4.

Table 4. Aggregated results 2

	AOWAAC	OWQAAC	step	median	olympic
A_1	0.89	0.817	0.9	0.9	0.85
A_2	0.86	0.751	1	0.8	0.825
A_3	0.89	0.815	0.9	0.85	0.85
A_4	0.89	0.784	1	0.85	0.85
A_5	0.89	0.812	0.9	0.9	0.875

As we can see, depending on the aggregation operator used the results are different. A_1 is optimal with the NAC, the OWAAC, the AOWAAC, the OWQAAC and the median-OWAAC. A_2 is optimal only with the step-OWAAC. A_3 with the NAC, the WAC, the WQAC, the OWAAC and the AOWAAC. A_4 with the AOWAAC and the step-OWAAC. Finally, A_5 is optimal with the NAC, the QAC, the AOWAAC, the median-OWAAC and the olympic-OWAAC.
Another interesting issue, is to establish an ordering of the alternatives. Note that this is useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 5. Ordering of the strategies

	Ordering		Ordering
NAC	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	AOWAAC	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
QAC	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	OWQAAC	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
WAC	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_2 \succ A_5$	Step	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
WQAC	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$	Median	$A_1=A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
OWAAC	$A_1=A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic	$A_5 \succ A_1=A_3=A_4 \succ A_2$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the strategies is different. Then, these results may lead to different decisions.

5. CONCLUSION

We have presented the generalized adequacy coefficient. It is a generalization of the adequacy coefficient by using generalized means. We have distinguished between different generalizations such as the GAC, the WGAC and the GOWAAC operator. We have analysed different properties of these operators such as the distinction between descending and ascending orders, the dual index of the adequacy coefficient and different measures for characterizing the weighting vector.

In order to see the applicability of the new approach, we have developed an application in a decision making problem. We have focussed on the selection of strategies. We have seen that with this aggregation operator the decision maker can consider a lot of different scenarios in order to take the decision. Obviously, depending on the particular case selected by the decision maker, the results may lead to different decisions.

In future research, we expect to develop further extensions to the generalized adequacy coefficient by introducing new characteristics in the aggregation operator such as the use of inducing orders, linguistic information, etc., and applying it to other fields.

REFERENCES

Beliakov, G. (2005). Learning Weights in the Generalized OWA Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making, 4, 119-130.

Beliakov, G.; Pradera, A., & Calvo, T. (2007). Aggregation Functions: A guide for practitioners, Springer-Verlag, Berlin.

Figueira, J.; Greco, S., & Ehrgott, M. (2005). Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys, Springer. Boston.

Gil-Aluja, J. (1998). The interactive management of human resources in uncertainty, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Lafuente, A.M. (2005). Fuzzy logic in financial analysis, Springer, Berlin.

Gil-Lafuente, J. (2002). Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva (In Spanish), Ed. Milladoiro, Vigo.

Karayiannis, N. (2000). Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, IEEE Transactions on Neural Networks, 11, 1093-1105.

Kaufmann, A., & Gil-Aluja, J. (1986). Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas (In Spanish), Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

Kaufmann, A., & Gil-Aluja, J. (1987). Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre (In Spanish), Ed. Hispano-europea, Barcelona.

Merigó, J.M. (2007). Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., & Casanovas, M., (2007a). The fuzzy generalized OWA operator. Proceedings of the XIVth SIGEF Congress. Poiana-Brasov, Romania, p. 504-517.

Merigó, J.M., & Casanovas, M., (2007b). The uncertain generalized OWA operator and its application in the selection of financial strategies. Proceedings of the AEDEM International Conference. Krakow, Poland, p. 547-556.

Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2006). Using the OWA operators in the selection of financial products, Proceedings of the 41st CLADEA Congress, Montpellier, France, CD-ROM.

Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2007a). Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review, 13, 35-50.

Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2007b). The induced generalized OWA operator, Proceedings of the EUSFLAT conference, Ostrava, Czech Republic, Vol. 2, p. 463-470.
Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2007c). On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient, Proceedings of the MS International Conference, Terni, Italy, CD-ROM.
Wang, J.H., & Hao, J., (2006). A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 14, 435-445.
Xu, Z.S. (2005). An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems, 20, 843-865.
Yager, R.R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 18, 183-190.
Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems, 59, 125-148.
Yager, R.R. (1996). Constrained OWA Aggregation, Fuzzy Sets and Systems, 81, 89-101.
Yager, R.R. (2002). Heavy OWA Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making, 1, 379-397.
Yager, R.R. (2004). Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making, 3, 93-107.
Yager, R.R., & Kacprzyk, J. (1997). The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.31. Artículo de congreso 31. – Publicado en AMSE 2008

THE GENERALIZED ADEQUACY COEFFICIENT

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

ABSTRACT

We present the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) operator. Basically, it consists in using the OWA operator in the index of maximum and minimum level. The main advantage of this aggregation operator is that it provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the normalized index of maximum and minimum level. Then, the decision maker may take decisions according to his degree of optimism. We study some of the main properties of the OWAIMAM. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of investments.

KEY WORDS

Index of maximum and minimum level; OWA operator; Decision making; Aggregation operator; Investment selection.

RESEARCH FIELD

Fuzzy set theory and its applications.

1. INTRODUCTION

The index of maximum and minimum (IMAM) level (J. Gil-Lafuente, 2001; 2002) is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance with some differences that makes it more complete. It includes the Hamming distance and the adequacy coefficient in the same formulation. Since its appearance, it has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. (J. Gil-Lafuente, 2002; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a). Often, we prefer to use the normalized IMAM (NIMAM) because we want an average result of all the individual comparisons. This type of index is also known as the weighted IMAM (WIMAM) when we prefer to give different degrees of importance to the individual comparisons instead of giving them the same importance.

Sometimes, when calculating the NIMAM, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for aggregating the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in (Yager, 1988). The OWA operator is an aggregation operator that includes the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It has been used in a wide range of applications (Beliakov et al., 2007; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2007b; Xu, 2005; Yager, 1993; 1996; 2002; 2004; Yager and Kacprzyk, 1997).

In this paper, we generalize the IMAM by introducing the attitudinal character of the decision maker in the index. We will call this generalization, the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) operator. The fundamental characteristic of this index is that it normalizes the IMAM with the OWA operator. Then, it is possible to develop a more general IMAM that includes the maximum, the minimum and the NIMAM, as special cases. The main advantage is the possibility of over or under estimate the results of an aggregation in order to take a decision according to a certain degree of optimism. We will study some of its main properties.

We will also develop an application of this new method in a business decision making problem. We will apply it in the selection of investments as this problem can be considered as a general one that includes a wide range of business problems. Note that other applications could be developed such as in human resource management, strategic management, product management, etc.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the OWA operator and the IMAM. Section 3 introduces the OWAIMAM operator. Section 4 develops an application in the selection of investments. Finally, in Section 5 we summarize the main findings of the paper.

2. PRELIMINARIES

In this Section, we briefly review some basic concepts to be used throughout the paper such as the IMAM and the OWA operator.

Index of maximum and minimum level

The NIMAM (J. Gil-Lafuente, 2001; 2002) is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance but with some differences that makes it more complete. Basically, we could define it as a measure that includes the Hamming distance and the adequacy coefficient (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 2005; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) in the same formulation. For two sets *A* and *B*, it can be defined as follows.

Definition 1. A NIMAM of dimension n is a mapping $K{:}R^n \rightarrow R$ such that:

$$\eta(P,P_j) = \frac{1}{u+v}\left[\sum_u \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)\right| + \sum_v \left(0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))\right)\right] \quad (1)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the IMAM it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the WIMAM. It can be defined as follows.

Definition 2. A WIMAM of dimension n is a mapping $K{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$\eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)\right| + \sum_v Z_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))\right] \quad (2)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

OWA operator

The OWA operator (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\mathrm{OWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). Note that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

3. OWAIMAM OPERATORS

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the IMAM. We will call it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWAIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWAIMAM$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAIMAM(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{4}$$

where K_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWAIMAM can be expressed as:

$$OWAIMAM(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the OWAIMAM operator can be expressed as:

$$OWAIMAM(p_1, p_2\ldots, p_n) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \qquad (6)$$

Also note that the OWAIMAM operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWAIMAM(p_1, p_2,\ldots, p_n) = OWAIMAM(r_1, r_2,\ldots, r_n)$, where $(r_1, r_2,\ldots, r_n)$ is any permutation of the arguments $(p_1, p_2,\ldots, p_n)$. It is monotonic because if $p_i \geq r_i$, for all p_i, then, $OWAIMAM(p_1, p_2,\ldots, p_n) \geq OWAIMAM(r_1, r_2,\ldots, r_n)$. It is bounded because $\mathrm{Min}\{p_i\} \leq OWAIMAM(p_1, p_2,\ldots, p_n) \leq \mathrm{Max}\{p_i\}$. It is idempotent because if $p_i = p$, for all p_i, then, $OWAIMAM(p_1, p_2,\ldots, p_n) = p$.
Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the OWAIMAM operator. Based on the measures developed for the OWA operator in (Yager, 1988; 2002), they can be defined as follows. For the attitudinal character, we get the following:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right) \qquad (7)$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.
The dispersion is a measure that provides the type of information being used. It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \qquad (8)$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.
The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \qquad (9)$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.
Analogously to the OWAIMAM operator, we can suggest a removal index that it is a dual of the OWAIMAM because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will refer to it as the ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level (OWADIMAM). It is defined as follows.

Definition 5. An OWADIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWADIMAM{:}R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADIMAM(q_1, q_2,\ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{10}$$

where Q_j represents the jth largest of all the $[1 - |\mu_i - \mu_i^{(k)}|]$ and the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADIMAM (DOWADIMAM) and the ascending OWADIMAM (AOWADIMAM) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWADIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWADIMAM operator.

4. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example where we will see the applicability of the new approach. We are going to consider a decision making problem about selection of investments. We will use different types of OWAIMAM operators such as the NIMAM, the WIMAM, the OWAIMAM, the AOWAIMAM and the olympic- OWAIMAM. We will also consider the dual result.

Assume a company is studying the possibility of investing some money in a company and it considers 5 possible alternatives to follow.

- A_1: Invest in a car company.
- A_2: Invest in a computer company.
- A_3: Invest in a food company.
- A_4: Invest in a TV company.
- A_5: Invest in a chemical company.

In order to evaluate these investments, the company has acquired a group of experts. They consider different general characteristics about the investments that can be summarized in 6 characteristics: C_1 = Risk of the investment; C_2 = Difficulty; C_3 = Benefits in the short term; C_4 = Benefits in the mid term; C_5 = Benefits in the long term; C_6 = Market share.

The evaluation of these characteristics is developed by the experts. They summarize the results in Table 1 depending on the characteristic C_i and the alternative A_k. Note that values near 1 imply that the results are good and values near 0, bad.

Table 1. Expected results

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.6	0.8	0.7	0.7	0.9	0.7
A_2	0.5	0.8	0.7	0.8	0.7	0.8
A_3	0.7	0.7	0.8	0.6	0.7	0.7
A_4	0.5	0.8	0.6	0.8	0.7	0.9
A_5	0.6	0.7	0.8	0.7	0.7	0.7

The group of experts considers the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). In order to develop the analysis, the experts calculate the results that an ideal investment should have. These results are shown in Table 2.

Table 2. Ideal investment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.9	0.8	0.9	0.9	1	0.9

In this example, we will assume that the group of experts considers the three first characteristics with the Hamming distance and the other three with the adequacy coefficient. The usefulness of the IMAM is that if we believe that the Hamming distance is a good method, we can use it, but if we believe that for some characteristics we need a more specific analysis, then, we can use the adequacy coefficient.

With this information, we can aggregate the expected results in order to obtain a representative result for each alternative. First, we are going to consider the NIMAM, the WIMAM, the OWAIMAM, the AOWAIMAM and the olympic-OWAIMAM. Note that in the olympic-OWAIMAM, we consider $w_1 = w_6 = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Then, in this case, we have: $w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 0.25$. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 1

	NIMAM	WIMAM	OWAIMAM	AOWAIMAM	olympic
A_1	0.166	0.17	0.13	0.2	0.175
A_2	0.183	0.17	0.13	0.24	0.175
A_3	0.2	0.22	0.17	0.23	0.2
A_4	0.183	0.15	0.12	0.25	0.175
A_5	0.2	0.21	0.17	0.23	0.2

Now, we are going to consider the results obtained by using the OWADIMAM operator. Obviously, the results obtained are the dual of the previous ones. The results are shown in Table 4.

Table 4. Aggregated results 2

	NDIMAM	WDIMAM	OWADIMAM	AOWADIMAM	olympic
A_1	0.833	0.83	0.87	0.8	0.825
A_2	0.816	0.83	0.87	0.76	0.825
A_3	0.8	0.78	0.83	0.77	0.8
A_4	0.816	0.85	0.88	0.75	0.825
A_5	0.8	0.79	0.83	0.77	0.8

As we can see, depending on the aggregation operator used the results are different. A_1 is optimal with the NIMAM, the OWAIMAM and the olympic-OWAIMAM. A_2 with the olympic-OWAIMAM. And A_4 is optimal with the WIMAM and the OWAIMAM. Obviously, the same results are found with the dual indexes.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. Note that this is useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5.

Table 5. Ordering of the investments

	Ordering		Ordering
NIMAM	$A_1 \succ A_2=A_4 \succ A_3=A_5$	NDIMAM	$A_1 \succ A_2=A_4 \succ A_3=A_5$
WIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_5 \succ A_3$	WDIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_5 \succ A_3$
OWAIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_3=A_5$	OWADIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_3=A_5$
AOWAIMAM	$A_1 \succ A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$	AOWADIMAM	$A_1 \succ A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$
olympic	$A_1=A_2=A_4 \succ A_3=A_5$	olympic	$A_1=A_2=A_4 \succ A_3=A_5$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the strategies is different. Then, these results may lead to different decisions.

5. CONCLUSION

We have analyzed the use of the OWA operator in the index of maximum and minimum level. As a result, we have obtained a new aggregation operator: the OWAIMAM operator. This operator is very useful because it provides a parameterized family of aggregation operators in the IMAM operator that include the maximum, the minimum and the average. With the OWAIMAM, we can manipulate the neutrality of the aggregation so the decision maker can be more optimistic or pessimistic according to its interests. We have studied some of its main properties.

We have applied the new approach in a decision making problem about selection of investments. We have seen that depending on the particular type of OWAIMAM operator used, the results are different. Then, the decisions of the decision maker may be also different.

In future research, we expect to develop further extensions of the OWAIMAM operator by adding new characteristics in the problem and applying it to other decision making problems.

REFERENCES

Beliakov, G.; Pradera, A., & Calvo, T. (2007). Aggregation Functions: A guide for practitioners, Springer-Verlag, Berlin.

Gil-Aluja, J. (1998). The interactive management of human resources in uncertainty, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Lafuente, A.M. (2005). Fuzzy logic in financial analysis, Springer, Berlin.

Gil-Lafuente, J. (2001). “El “índice del máximo y mínimo nivel” en la optimización del fichaje de un deportista”, X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italia, p. 439-443.

Gil-Lafuente, J. (2002). Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva (In Spanish), Ed. Milladoiro, Vigo.

Kaufmann, A., & Gil-Aluja, J. (1986). Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas (In Spanish), Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

Kaufmann, A., & Gil-Aluja, J. (1987). Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre (In Spanish), Ed. Hispano-europea, Barcelona.

Merigó, J.M. (2007). Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2006). Using the OWA operators in the selection of financial products, Proceedings of the 41st CLADEA Congress, Montpellier, France, CD-ROM.
Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2007a). Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review, 13, 35-50.
Merigó, J.M., & Gil-Lafuente, A.M. (2007b). On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient, Proceedings of the MS International Conference, Terni, Italy, CD-ROM.
Xu, Z.S. (2005). An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems, 20, 843-865.
Yager, R.R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, 18, 183-190.
Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems, 59, 125-148.
Yager, R.R. (1996). Constrained OWA Aggregation, Fuzzy Sets and Systems, 81, 89-101.
Yager, R.R. (2002). Heavy OWA Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making, 1, 379-397.
Yager, R.R. (2004). Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making, 3, 93-107.
Yager, R.R., & Kacprzyk, J. (1997). The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.32. Artículo de congreso 32. – Publicado en IPMU 2008

Uncertain Decision Making with Dempster-Shafer Theory

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain, jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Abstract
We develop a new approach for decision making with Dempster-Shafer theory of evidence by using uncertain information represented in the form of interval numbers. We suggest the use of different types of uncertain aggregation operators in the problem. Then, we obtain new aggregation operators such as the belief structure - uncertain ordered weighted averaging (BS-UOWA) operator and the BS - uncertain hybrid averaging (BS-UHA) operator, among others. Some of their main properties are studied such as the distinction between descending and ascending orders and the analysis of different particular cases.

Keywords: Decision making, Dempster-Shafer theory, Interval numbers, Uncertain OWA operator.

1 Introduction

The Dempster-Shafer (D-S) theory [2,10] provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes in the same formulation the case of risk and ignorance. Since its appearance, it has been used in a lot of situations [3,5-8,11,16,21,23].

Usually, when using the D-S theory in decision making, it is assumed that the available information are exact numbers [3,5-6,16,21,23]. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is necessary to use another approach to assess it such as the use of interval numbers. In this paper, we will study the decision making problem with D-S belief structure using information given in the form of interval numbers.

In order to aggregate the uncertain information, we will use different types of uncertain aggregation operators. The reason for doing so is that we want to show that this problem can be modeled in different ways depending on the interests of the decision maker. Mainly, we will use the uncertain ordered weighted averaging (UOWA) operator [12] and the uncertain hybrid averaging (UHA) operator. Then, we will get as a result, new aggregation operators such as the belief structure - UOWA (BS-UOWA) operator and the BS-UHA operator. We will study some of the main properties of these aggregations and we will consider different families of uncertain aggregation operators in the problem such as the step-UOWA, the window-UOWA, the S-UOWA, the olympic-UOWA, the centered-UOWA, etc.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic aspects such as interval numbers, the UOWA and the UHA operators.

Section 3 briefly describes the main concepts of D-S theory. In Section 4, we present the new approach when using UOWA operators. In Section 5, we develop a similar analysis with UHA operators. Finally, in Section 6 we summarize the main conclusions of the paper.

2 Preliminaries

In this Section, we briefly describe the main concepts of the interval numbers, the UOWA and the UHA operator.

2.1 Interval Numbers

The interval numbers [9] are a very useful and simple technique for representing the uncer-tainty. It has been used in an astonishingly wide range of applications.

The interval numbers can be expressed in different forms. For example, if we assume a 4-tuple (a_1, a_2, a_3, a_4), that is to say, a quadruplet; we could consider that a_1 and a_4 represents the maximum and the minimum of the interval numbers and a_2 and a_3, the interval with the highest probability or possibility, depending on the use we want to give to the interval numbers. Note that $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. If $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the interval number is an exact number and if $a_2 = a_3$, it is a 3-tuple known as triplet.

In the following, we are going to review some basic interval number operations as follows. Let A and B be two triplets, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied [9] but in this paper we will focus on these ones.

2.2 Uncertain OWA Operator

The uncertain OWA (UOWA) operator [12] is an aggregation operator that uses uncertain information represented by interval numbers. The reason for using the UOWA is because sometimes it is necessary to use interval numbers to correctly assess uncertain decision problems because the expected results are not clear. It can be defined as follows.

Definition 1. *Let Ω be the set of interval numbers. An UOWA operator of dimension n is a mapping UOWA: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (1)$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$ and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

An interesting issue to consider in the UOWA operator is how to develop the reordering of the arguments because now, they are interval numbers. For simplicity, we recommend to use the average of the interval number in order to establish a criterion for

comparing interval numbers. Note that a more complete approach is the use of a weighted average in the comparison.
Note that it is possible to study a wide range of properties such as the distinction between descending (DUOWA) and ascending (AUOWA) orders.

2.3 Uncertain Hybrid Averaging Operator

The uncertain hybrid averaging (UHA) operator is an extension of the HA operator [13] that uses uncertain information represented in the form of interval numbers. It uses in the same formulation the uncertain weighted average (UWA) and the UOWA operator. Then, with this operator we can represent the subjective probability and the attitudinal character of a decision maker in the same problem. The main advantage is that it can represent uncertain situations that can not be assessed with exact numbers or singletons, but it is possible to use interval numbers. Then, the decision maker gets a more complete view of the decision problem.

Definition 2. *Let Ω be the set of interval numbers. An UHA operator of dimension n is a mapping UHA: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$UHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.
Note that it is possible to distinguish between the descending UHA (DUHA) and the ascending UHA (AUHA) operator.
The UHA operator is commutative, monotonic and idempotent. It is not bounded by the maximum and the minimum because we may find some situations where the aggregation gives higher and lower results than the maximum and the minimum, respectively.
Different families of UHA operators are found by using a different manifestation of the weighting vector such as the UA, the UWA, the UOWA, the step-UHA, the olympic-UHA, the median-UHA, the window-UHA, the S-UHA, the centered-UHA, etc. For more information, see [4].

3 The Dempster-Shafer Theory

The D-S theory provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the situations of risk and ignorance as special cases. Note that the case of certainty is also included as it can be seen as a particular case of risk and ignorance.

Definition 3. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m*: $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$. (3)
(3) $m(A) = 0, \forall A \neq B_j$.

As said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\{x_j\}$.
The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures are studied in [10].

4 UOWA Operator in Decision Making with D-S Theory

In this Section, we describe the process to follow when using the D-S theory in decision making with uncertain information represented in the form of interval numbers. For doing so, we will use the UOWA operator for aggregating the information because it provides a parameterized family of uncertain aggregation operators that includes the uncertain maximum, the uncertain minimum and the UA, among others. We will also analyze different families of UOWA operators to be used in the aggregation.

4.1 Decision Making Approach

A new method for uncertain decision making with D-S theory is possible by using uncertain aggregation operators in the problem. Note that we will consider the UOWA and the UHA operators but it is also possible to consider other cases such as the use of different types of uncertain generalized means and uncertain quasi-arithmetic means. The motivation for using interval numbers appears because sometimes, the available information is not clear and it is necessary to assess it with another approach such as the use of interval numbers. Although the information is uncertain and it is difficult to take decisions with it, at least we can represent the best and worst possible scenarios and the most possible ones. The decision process can be summarized as follows.
Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ is the uncertain payoff, given in the form of interval numbers, to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:
Step 1: Calculate the uncertain payoff matrix.
Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.
Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker $\alpha(W)$ [14].
Step 4: Calculate the collection of weights, w, to be used in the UOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker [1,4-6,12,15-22,24-25].

Step 5: Determine the uncertain payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.
Step 6: Calculate the uncertain aggregated payoff, V_{ik} = UOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of i and k.
Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{r=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{4}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

4.2 The BS-UOWA Operator

Analyzing the aggregation in *Steps* 6 and 7 of the previous subsection, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call this process the belief structure - UOWA (BS-UOWA) aggregation. It can be defined as follows.
Definition 4. *A BS-UOWA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{5}$$

where w_{j_k} is the weighting vector of the kth focal element such that $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ and w_{j_k} $\in$ [0,1], b_{j_k} is the j_kth largest of the $\tilde{a}_{i_k}$ and the $\tilde{a}_{i_k}$ are interval numbers, and $m(B_k)$ is the basic probability assignment.
Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements.
The BS-UOWA operator is monotonic, commu-tative, bounded and idempotent. We can prove these properties with the following theorems.

Theorem 1 (Commutativity). *Assume f is the BS-UOWA operator, then*

$$f(\tilde{a}_{1_1}, ..., \tilde{a}_{q_1}, ..., \tilde{a}_{q_r}) = f(\tilde{a}^*_{1_1}, ..., \tilde{a}^*_{q_1}, ..., \tilde{a}^*_{q_r}) \tag{6}$$

where $(\tilde{a}^*_{1_1}, ..., \tilde{a}^*_{q_1}, ..., \tilde{a}^*_{q_r})$ is any permutation of $(\tilde{a}_{1_1}, ..., \tilde{a}_{q_1}, ..., \tilde{a}_{q_r})$ for each focal element k.

Theorem 2 (Monotonicity). *Assume f is the BS-UOWA operator, if $\tilde{a}_{i_k} \geq \tilde{a}^*_{i_k}$ then,*

$$f(\tilde{a}_{1_1}, ..., \tilde{a}_{q_1}, ..., \tilde{a}_{q_r}) \geq f(\tilde{a}^*_{1_1}, ..., \tilde{a}^*_{q_1}, ..., \tilde{a}^*_{q_r}) \tag{7}$$

Theorem 3 (Boundedness). *Assume f is the BS-UOWA operator, then*

$$\min\{a_i\} \leq f(\tilde{a}_{1_1}, ..., \tilde{a}_{q_1}, ..., \tilde{a}_{q_r}) \leq \max\{a_i\} \tag{8}$$

Theorem 4 (Idempotency). *Assume f is the BS-UOWA operator, if $\tilde{a}_{i_k} = \tilde{a}$ for all $i \in N$, then*

$$f(\tilde{a}_{1_1}, ..., \tilde{a}_{q_1}, ..., \tilde{a}_{q_r}) = \tilde{a} \quad (9)$$

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between descending and ascending orders by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUOWA operator. Then, we obtain the BS-DUOWA and the BS-AUOWA operators.

4.3 Families of BS-UOWA Operators

By using a different manifestation in the weighting vector of the UOWA operator, we are able to develop different families of UOWA and BS-UOWA operators. As it can be seen in Definition 4, each focal element uses a different weighting vector in the aggregation step with the UOWA operator. Therefore, the analysis needs to be done individually.

For example, it is possible to obtain the uncertain maximum, the uncertain minimum, the UA and the UWA. The uncertain maximum is found if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The uncertain minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The UA is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$ and the UWA is obtained if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$.

Other families of UOWA operators could be used in the BS-UOWA operator such as the step-UOWA, the S-UOWA, the olympic-UOWA, the window-UOWA and the centered UOWA operator, among others. Note that recently, it is appearing a wide range of papers dealing with the problem of determining OWA weights. In this subsection we simply give a general overview commenting some basic cases that are applicable in the UOWA operator.

The step-UOWA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$. Note that the median-UOWA can be seen as a particular case of this situation when the number of arguments is odd.

A further interesting family is the S-UOWA operator. In this case, we can distinguish between three types: the "orlike", the "andlike", and the "generalized" S-UOWA operator. The generalized S-UOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, we get the andlike S-UOWA and if $\beta = 0$, the orlike S-UOWA. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the uncertain Hurwicz criteria.

The olympic-UOWA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Note that the window-UOWA operator can be seen as a generalization of this case.

The centered-UOWA operator is found if the aggregation is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider different particular situations of this operator by softening the second condition with $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ and by removing the third condition.

Finally, if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-uncertain maximum, the BS-uncertain minimum, the BS-UA, the BS-UWA, the BS-step-UOWA, the BS-S-UOWA, the BS-olympic-UOWA, the BS-window-UOWA, the BS-centered-UOWA, etc.

5 UHA Operator in Decision Making with D-S Theory

In some situations, the decision maker could prefer to use another type of uncertain aggregation operator such as the UHA operator. The main advantage of this operator is that it uses the characteristics of the UWA and the UOWA in the same aggregation. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S theory, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, UWAs and UOWAs.

In order to use this type of aggregation in D-S framework we should consider that now in *Step* 3, when calculating the collection of weights to be used in the aggregation, we are using two weighting vectors because we are mixing in the same problem the UWA and the UOWA.

In *Step* 5, when calculating the uncertain aggregated payoff, we should use the UHA operator instead of the UOWA operator by using Eq. (2).

In this case, it is also possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call it the BS-UHA operator.

Definition 5. *A BS-UHA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{10}$$

where w_{j_k} is the weighting vector of the kth focal element such that $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ and $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} is the j_kth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_{i_k}$ are interval numbers, and $m(B_k)$ is the basic probability assignment.

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the UHA operator. Note that if $\omega_i = 1/n$ for all i, then, Eq. (10) is transformed in Eq. (5).

In this case, we could also study different properties and particular cases of the BS-UHA operator, in a similar way as it has been explained for the BS-UOWA operator such as the distinction between descending (BS-DUHA) and ascending (BS-AUHA) orders.

When aggregating the collection of uncertain payoffs of each focal element, it is also possible to consider a wide range of families of UHA operators such as the uncertain hybrid maximum, the uncertain hybrid minimum, the uncertain Hurwicz hybrid criteria, the UA, the UWA, the UOWA operator, the olympic-UHA, the S-UHA, the centered-UHA, the median-UHA, etc.

6 Numerical example

In order to illustrate the new approach, we are going to develop a numerical example. We will consider a decision making problem about selection of strategies. We will develop the analysis considering different types of uncertain aggregation operators such as the UA, the UWA and the UOWA.

Assume a company that operates in Europe and North America is analyzing the general policy for the next year and it considers 3 possible strategies to follow: A_1, A_2, A_3.

In order to evaluate these strategies, the group of experts of the company considers that the key factor is the economic situation for the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 5 possible situations for the next year: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate. The expected results are shown in Table 1. Note that the results are 3-tuple interval numbers or triplets.

After having analyzed the information in detail, the experts have found some probabilistic information about which state of nature will occur. This information is represented by the following belief structure about the states of nature.

Belief structure

$$B_1 = \{S_1, S_2, S_3\} = 0.3$$
$$B_2 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3$$
$$B_3 = \{S_3, S_4, S_5\} = 0.4$$

The experts have established the following weighting vectors for both the UWA and the UOWA.

Weighting vector

$$W = (0.3, 0.3, 0.4)$$
$$W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$$

Now, it is possible to calculate the aggregated payoffs that are shown in Table 2.

Table 1: Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(20,30,40)	(50,60,70)	(30,40,50)	(60,70,80)	(60,70,80)
A_2	(60,70,80)	(40,50,60)	(30,40,50)	(70,80,90)	(30,40,50)
A_3	(50,60,70)	(50,60,70)	(40,50,60)	(30,40,50)	(40,50,60)

Table 2: Aggregated results

	UA	UWA	UOWA	UHA
V_{11}	(33.3,43.3,53.3)	(33,43,53)	(32,42,52)	(28,36,44)
V_{12}	(46.6,56.6,66.6)	(48,58,68)	(45,55,65)	(45,55,65)
V_{13}	(50,60,70)	(51,61,71)	(48,58,68)	(57,68.5,80)
V_{21}	(43.3,53.3,63.3)	(42,52,62)	(42,52,62)	(33,41,49)
V_{22}	(46.6,56.6,66.6)	(49,59,69)	(45,55,65)	(45,55,65)
V_{23}	(43.3,53.3,63.3)	(42,52,62)	(42,52,62)	(46.5,58,69.5)
V_{31}	(46.6,56.6,66.6)	(46,56,66)	(46,56,66)	(37,45,53)
V_{32}	(40,50,60)	(39,49,59)	(39,49,59)	(39,49,59)
V_{33}	(36.6,46.6,56.6)	(37,47,57)	(36,46,56)	(46.5,58,69.5)

Table 3: Uncertain generalized expected value

	UA	UWA	UOWA	UHA
A_1	(44,54,64)	(40.7,50.7,60.7)	(42.3,52.3,62.3)	(44.7,54.7,64.7)
A_2	(44.3,54.3,64.3)	(44.1,54.1,64.1)	(42.9,52.9,62.9)	(42,52,62)
A_3	(40.6,50.6,60.6)	(40.3,50.3,60.3)	(39.9,49.9,59.9)	(41.4,51.4,61.4)

Once we have the aggregated results, we have to calculate the uncertain generalized expected value. The results are shown in Table 3.

As we can see, depending on the uncertain aggregation operator used, the results may lead to different decisions. In this example, the optimal choice is A_2 if we use the UA, the UWA and the UOWA, and A_1 if we use the UHA.

7 Conclusions

We have studied the decision making problem with D-S theory of evidence when the available information is given in the form of interval numbers. We have seen that this method is simple and complete because it considers all the different situations that could happen in the problem. We have suggested the use of different types of uncertain aggregation operators in the D-S framework. As a result, we have obtained new aggregation operators that consider the D-S framework such as the BS-UOWA and the BS-UHA operators. We have analyzed some of the main properties of these aggregations such as the use of different families of UOWA and UHA operators in the decision problem. We have also developed an example where we have seen the applicability of the new approach.

In future research, we expect to continue developing new extensions of the decision making problem with D-S theory by introducing other aggregation operators and other types of information, and applying it in different decision making problems such as financial decision making or human resource selection.

References

[1] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

[2] A.P. Dempster (1967). Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Annals of Mathematical Statistics* 38, 325-339.

[3] K.J. Engemann, H.E. Miller, R.R. Yager (1996). Decision making with belief structures: an application in risk manage-ment, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 4, 1-26.

[4] J.M. Merigó (2007). *New extensions to the OWA operators and their application in business decision making*, Unpublished thesis, Department of Business Administra-tion, University of Barcelona.

[5] J.M. Merigó, M. Casanovas (2006). Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, In *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, pp. 709-727.

[6] J.M. Merigó, M. Casanovas (2007). Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators, In *Proceedings of the 4th International Summer School on AGOP*, Ghent, Belgium, pp. 95-100.

[7] J.M. Merigó, M. Casanovas (2007). Using fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, In *Proceedings of the 16th AEDEM Inter-national Conference*, Krakow, Poland, pp. 475-486.

[8] J.M. Merigó, M. Casanovas, L. Martínez (2007). Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, In *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, pp. 658-671.

[9] R.E. Moore (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.

[10] G.A. Shafer (1976). *Mathematical Theory of Evidence*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

[11] R.P. Srivastava, T. Mock (2002). *Belief Functions in Business Decisions*, Physica-Verlag, Heidelberg.

[12] Z.S. Xu, Q.L. Da (2002). The Uncertain OWA Operator, *International Journal of Intelligent Systems* 17, 569-575.

[13] Z.S. Xu, Q.L. Da (2003). An Overview of Operators for Aggregating the Information, *International Journal of Intelligent Systems* 18, 953-969.
[14] R.R. Yager (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Trans-actions on Systems, Man and Cybernetics B* 18, 183-190.
[15] R.R. Yager (1992). On generalized mea-sures of realization in uncertain environments, *Theory and Decision* 33, 41-69.
[16] R.R. Yager (1992). Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, *International Journal of General Systems* 20, 233-245.
[17] R.R. Yager (1993). Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, 125-148.
[18] R.R. Yager (1994). On weighted median aggregation, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* 2, 101-113.
[19] R.R. Yager (1996). Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators, *International Journal of Intelligent Systems* 11, 49-73.
[20] R.R. Yager (2004). Uncertainty modeling and decision support, *Reliability Engineering and System Safety* 85, 341-354.
[21] R.R. Yager (2007). Centered OWA operators, *Soft Computing* 11, 631-639.
[22] R.R. Yager, M. Fedrizzi, J. Kacprzyk (1994). *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*, John Wiley & Sons, New York.
[23] R.R. Yager, J. Kacprzyk (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell.

14.1.33. Artículo de congreso 33. – Publicado en FUR 2008

Induced Aggregation Operators in the Euclidean Distance

José M. Merigó, Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain
Emails: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Abstract

We develop a new decision making method by using induced aggregation operators in the Euclidean distance. We introduce a new aggregation operator called the induced Euclidean ordered weighted averaging distance (IEOWAD) operator. It is an aggregation operator that parameterizes a wide range of distance measures such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance (NED) and the weighted Euclidean distance (WED), by using the induced OWA (IOWA) operator. The main advantage of this operator is that it is able to consider complex attitudinal characters of the decision maker by using order inducing variables in the aggregation of the Euclidean distance. As a result, we get a more general formulation of the Euclidean distance that considers the Euclidean distance as a particular case and a lot of other possible situations depending on the interests of the decision maker. We study some of its main properties giving special attention to the analysis of different particular types of IEOWAD operators such as the step-IEOWAD, the median-IEOWAD, the olympic-IEOWAD, the S-IEOWAD, the centered-IEOWAD, etc. We apply this aggregation operator in a business decision making problem about selection of investments. Note that a lot of other applications could be considered by using this measure in traditional problems where it has been previously used the Euclidean distance such as in fuzzy set theory, operational research, etc.

Keywords: Induced aggregation operators; Euclidean distance; Decision making; Selection of investments.

1. Introduction

In the literature, there are a wide range of methods for decision making (Figueira et al., 2005; Gil-Aluja, 1998; 1999; Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997). Very useful techniques for doing this are the distance measures (Gil-Aluja, 1998; Karayiannis, 2000; Kaufmann, 1975; Merigó, 2007). The main advantage of using distance measures in decision making is that we can compare the alternatives of the problem with some ideal result (Gil-Aluja, 1998). Then, by doing this comparison, the alternative with a closest result to the ideal is the optimal choice. One of the distance measures that can be used in decision making is the Euclidean distance. The Euclidean distance has been studied and applied in a lot of fields (Karayiannis, 2000; Kaufmann, 1975; Szmidt and Kacprzyk, 2000).

Usually, when using the Euclidean distance, or the distance measures in general, we normalize them by using the arithmetic mean or the weighted average obtaining the normalized Euclidean distance (NED) and the weighted Euclidean distance (WED). Sometimes it would be interesting to consider the possibility of parameterizing the results from the maximum distance to the minimum distance. A very useful technique that can provide a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum, the average and others, is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). Since its appearance, the OWA operator has been studied and applied in a lot of problems such as (Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Karayiannis, 2000; Merigó, 2007; Merigó and Casanovas, 2007a; 2007b; Yager and Kacprzyk, 1997).

When analysing the reordering process of the OWA operator, we can see that it depends on the values of the arguments. However, this reordering may not be in accordance with our interests. Sometimes, the decision maker may have a more complex attitudinal character that can not be reflected with the values of the arguments. In order to solve this problem, Yager and Filev (1999) developed the induced OWA (IOWA) operator. It is an aggregation operator that uses order inducing variables in the reordering of the arguments. Then, it is possible to consider more complex reordering processes that can describe in a more complete way the problem analyzed. The IOWA operator has been studied by different authors such as (Chiclana et al., 2007; Herrera-Viedma, et al., 2007a; 2007b; Merigó and Casanovas, 2007c; Merigó and Gil-Lafuente, 2007a; Yager, 2003).

The objective of this paper is to analyse the use of induced aggregation operators in the Euclidean distance giving special attention to its application in decision making. For doing this we will extend the research done in (Karayiannis, 2000; Merigó and Gil-Lafuente, 2006; 2007b) about using OWA operators in distance measures. By using the IOWA operator, we will provide a more complete aggregation in the normalization process of the distance measures because we will consider a reordering of the arguments that depends on order inducing variables. We will introduce a new aggregation operator: the induced Euclidean ordered weighted averaging distance (IEOWAD) operator. It is an aggregation operator that uses the IOWA operator and the Euclidean distance in the same formulation. Therefore, it includes a wide range of distance operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance (NED), the weighted Euclidean distance (WED), the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, etc. We will study some of its main properties.

We will also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of investments. Then, we will be able to consider a wide range of aggregation operators that could be used in the aggregation. Obviously, depending on the aggregation operator used, the results may lead to different decisions. Note also that other potential applications could be developed by using the IEOWAD such as in fuzzy set theory, operational research, etc.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic concepts about the Euclidean distance and the IOWA operator. Section 3 presents the IEOWAD operator. Section 4 analyzes different families of IEOWAD operators. In Section 5 we develop an application of the IEOWAD in a decision making problem. Finally, in Section 6 we summarize the main findings of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly describe the IOWA operator and the normalized Euclidean distance.

2.1. Induced OWA Operator

The IOWA operator was introduced by Yager and Filev (1999) and it represents an extension of the OWA operator. Its main difference is that the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is developed with order inducing variables. The IOWA operator includes as particular cases, the maximum, the minimum and the average criteria. It can be defined as follows.

Definition 1. *An IOWA operator of dimension n is a mapping IOWA:* $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (1)$$

where b_j *is the* a_i *value of the IOWA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable and* a_i *is the argument variable*.

Note that it is possible to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator. The IOWA operator is also monotonic, bounded, idempotent and commutative.

2.2. Normalized Euclidean Distance

The normalized Euclidean distance is a distance measure used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets *A* and *B*, it can be defined as follows.

Definition 2. *A normalized Euclidean distance of dimension n is a mapping* d_E: $R^n \rightarrow R$ *such that*:

$$d_E(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |^2 \right)^{1/2} \quad (2)$$

where a_i *and* b_i *are the ith arguments of the sets A and B respectively*.

Sometimes, when normalizing the Euclidean distance it is better to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Euclidean distance. It can be defined as follows.

Definition 3. *A weighted Euclidean distance of dimension n is a mapping* d_{WE}: $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$. *Then*:

$$d_{WE}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mid a_i - b_i \mid^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B, respectively.

Note that Definitions 2 and 3 are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory, see for example (Kaufmann, 1975; Kaufmann et al., 1994; Szmidt and Kacprzyk, 2000).

3. Induced Euclidean Ordered Weighted Averaging Distance (IEOWAD) Operator

The IEOWAD operator is a distance measure that uses the IOWA operator in the normalization process of the Euclidean distance. Then, the reordering of the individual distances is developed with order inducing variables. For two sets *X* and *Y*, it can be defined as follows.

Definition 4. *An IEOWAD operator is a mapping IEOWAD*: $R^n \times R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, *then*:

$$IEOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{4}$$

where b_j is the $|x_i - y_i|$ value of the IEOWAD triplet $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $|x_i - y_i|$ is the argument variable represented in the form of individual distances.

The IEOWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that if $x_i = y_i$ for all $i \in [1, n]$, $IEOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = 0$. Note also that $IEOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = IEOWAD(\langle u_1, y_1, x_1\rangle, \langle u_2, y_2, x_2\rangle, \ldots, \langle u_n, y_n, x_n\rangle)$.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DIEOWAD) and ascending (AIEOWAD) orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the *j*th weight of the DIEOWAD (or IEOWAD) operator and w^*_{n+1-j} the *j*th weight of the AIEOWAD operator.

If *B* is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the IEOWAD operator can be expressed as:

$$IEOWAD(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the IEOWAD operator can be expressed as:

$$IEOWAD(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{6}$$

A further interesting issue is the problem of ties in the reordering process of the order inducing variables. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy explained in (Yager and Filev, 1999) about replacing the tied arguments by their average. Note that in this case, it would mean that we are replacing the tied arguments by their normalized Euclidean distance.

4. Families of IEOWAD Operators

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the IEOWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the NED, the WED and the EOWAD operator.

The maximum distance is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$. The minimum distance is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Min}\{a_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we are using the step-IEOWAD operator. The NED is found when $w_j = 1/n$, for all a_i. The WED is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the EOWAD operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i.

Other families of IEOWAD operators could be obtained by using a different weighting vector (Liu, 2007; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994; 1996; 2007). For example, when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-IEOWAD operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, and the initial position of the highest u_i is also the initial position of the highest a_i, then, the window-IEOWAD is transformed in the maximum distance. If $m = 1$, $k = n$, and the initial position of the lowest u_i is also the initial position of the lowest a_i, then, the window-IEOWAD becomes the minimum distance. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-IEOWAD becomes the NED.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-IEOWAD. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-IEOWAD is transformed in the IEOWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-IEOWAD is transformed in the olympic-IEOWAD. Also note that the olympic-IEOWAD is transformed in the olympic-EOWAD average if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \text{Max}_i\{a_i\}$ and $u_q = \text{Min}_i\{a_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z IEOWAD weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

Note that the generalized median and the weighted generalized median can also be used as a particular case of the IEOWAD. For the IEOWAD median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument a_i with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i. For the weighted IEOWAD median, we select the argument a_i that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k-1$ is less than 0.5. Note that if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, then, the IEOWAD median and the weighted IEOWAD median become the EOWAD median and the weighted EOWAD median, respectively.

Another interesting family is the S-IEOWAD operator. It can be divided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-IEOWAD operator. The generalized S-IEOWAD operator is obtained when $w_p = (1/n)(1-(\alpha+\beta)) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1-(\alpha+\beta)) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; and $w_j = (1/n)(1-(\alpha+\beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IEOWAD operator becomes the "andlike" S-IEOWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-IEOWAD operator.

Other families of IEOWAD operators could be developed such as the weights that depend on the aggregated objects (Yager, 1993). For example, we could develop the BADD-IEOWAD operator.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{7}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments a_i. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the NED and if $\alpha = \infty$, we get the maximum distance. Another family of IEOWAD operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1-b_j)^{\alpha}} \tag{8}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments a_i. Note that in this case if $\alpha = 0$, we also get the NED and if $\alpha = \infty$, we get the minimum distance. A third family of IEOWAD operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{9}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments a_i. In this case, we also get the NED if $\alpha = 0$ and if $\alpha = \infty$, we get the minimum distance.

A very useful approach for obtaining the weights that it is also applicable for the IEOWAD operator is the functional method introduced by Yager (1996) for the OWA operator. It can be summarized as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \to [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the IEOWAD weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{10}$$

It can easily be shown that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

A further interesting family that could be used is the centered-IEOWAD operator. An IEOWAD operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-IEOWAD operator. Note that the NED is an example of this particular case of centered-IEOWAD operator. Another particular situation of the centered-IEOWAD operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-IEOWAD operator. For this situation, we find the IEOWAD median as a particular case.

Other families of IEOWAD operators could be obtained in the weighting vector following a similar methodology as developed for the OWA operator such as those developed in (Liu, 2007; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993).

5. Application in decision making

In the following, we are going to develop an illustrative example of the new approach. We will consider a decision making problem about selection of investments.

Assume that an enterprise wants to invest some money in another enterprise. After careful analysis of the market, the group of experts of the enterprise considers five possible investments.

- A_1 = Invest in a car company.
- A_2 = Invest in a computer company.
- A_3 = Invest in a chemical company.
- A_4 = Invest in a food company.
- A_5 = Invest in a touristic company.

When analyzing the investments, the experts have considered the following general characteristics:

- C_1 = Risks of the investment.
- C_2 = Benefits in the short term.
- C_3 = Benefits in the mid term.
- C_4 = Benefits in the long term.
- C_5 = Difficulty of the investment.
- C_6 = Other aspects.

After careful analysis of these characteristics, the experts have given the following information shown in Table 1.

Table 1: Available information about the investments

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.8	0.8	0.9	0.4	0.5
A_2	0.6	0.6	0.6	0.7	0.8	0.6
A_3	0.7	0.7	0.9	0.6	0.6	0.5
A_4	0.8	0.4	0.5	0.8	0.8	0.8
A_5	0.6	0.5	0.8	0.8	0.7	0.7

According to their objectives, the enterprise establishes the following ideal investment shown in Table 2.

Table 2: Ideal investment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.6	0.5	0.8	0.8	0.7	0.7

With this information, it is possible to develop different methods for selecting an investment. In this example, we will consider the maximum distance, the minimum, the NED, the WED, the Hurwicz-EIOWAD ($\alpha = 0.6$), the EOWAD, the AEOWAD, the IEOWAD, the AIEOWAD, the median-EIOWAD, the step-EIOWAD ($k = 2$) and the olympic-EIOWAD. In order to aggregate the information, the group of experts calculates the attitudinal character of the enterprise. Due to the fact that the attitudinal character depends upon the opinion of several members of the board of directors, it is very complex. Therefore, they need to use order inducing variables in the reordering process. The results are shown in Table 3.

Table 3: Order inducing variables

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	8	15	20	30	26	22
A_2	9	16	30	21	27	14
A_3	18	20	14	16	30	34
A_4	22	15	18	30	26	25
A_5	25	22	20	10	14	30

With this information, it is possible to aggregate the available information in order to take a decision. The results are shown in Table 4 and 5.

Table 4: Aggregated results 1

	Max	Min	NED	WED	EOWAD	AEOWAD
A_1	0.4	0	0.2	0.24	0.14	0.26
A_2	0.4	0	0.233	0.22	0.18	0.28
A_3	0.4	0.1	0.216	0.26	0.18	0.26
A_4	0.5	0	0.2	0.15	0.14	0.27
A_5	0.3	0.1	0.2	0.18	0.17	0.23

Table 5: Aggregated results 2

	IEOWAD	AIEOWAD	median	step	olympic	Hurwicz
A_1	0.18	0.2	0.3	0.4	0.25	0.08
A_2	0.25	0.24	0.2	0	0.175	0.36
A_3	0.2	0.2	0.15	0.2	0.2	0.28
A_4	0.26	0.15	0.1	0	0.175	0.22
A_5	0.17	0.06	0.25	0.3	0.225	0.16

As we can see, depending on the distance aggregation operator used, the optimal choice is different. Note that the lowest value in each method, is the optimal result.

If we establish an ordering of the investments, a typical situation if we want to consider more than one alternative, we will get the following orders shown in Table 6.

Table 6: Ordering of the investments

	Ordering		Ordering
Maximum dist.	$A_5 \succ A_1 = A_2 = A_3 \succ A_4$	IEOWAD	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$
Minimum dist.	$A_1 = A_2 = A_4 \succ A_3 = A_5$	AIEOWAD	$A_4 \succ A_1 = A_3 \succ A_5 \succ A_2$
NED	$A_1 = A_4 = A_5 \succ A_3 \succ A_2$	Median-IEOWAD	$A_4 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1$
WED	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$	Step-IEOWAD	$A_2 = A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1$
EOWAD	$A_1 = A_4 \succ A_5 \succ A_2 = A_3$	Olympic-IEOWAD	$A_2 = A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_1$
AEOWAD	$A_5 \succ A_1 = A_3 \succ A_4 \succ A_2$	Hurwicz-IEOWAD	$A_1 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2$

As we can see, depending on the particular type of IEOWAD operator used, the results are different. Then, depending on the method used in the IEOWAD, the decision maker may select a different investment.

6. Conclusions

We have studied the use of induced aggregation operators in the Euclidean distance. It is an aggregation operator that uses the IOWA operator and the Euclidean distance in the same formulation. We have called it the induced Euclidean ordered weighted averaging distance (IEOWAD) operator. The IEOWAD provides a parameterized family of distance aggregation operators that include the maximum distance, the minimum distance, the NED, the WED, the EOWAD, etc. We have seen that it is possible to apply it in almost the same problems where it has been previously applied the NED.

In this paper, we have applied the IEOWAD operator in a decision making problem about selection of investments. The main advantage of the IEOWAD operator is that it provides a parameterized family of distance aggregation operators. Therefore, depending on the particular case used, the results may lead to different decisions.

In future research, we expect to develop further extensions of the IEOWAD operator by adding new characteristics in the problem and applying it to other domains.

References

Beliakov, G. (2005). "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making,* 4, pp. 119-130.

Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T. (2007). *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. (2000). "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991.

Chiclana, F., E. Herrera-Viedma, F. Herrera and S. Alonso (2007) "Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations", *European Journal of Operational Research*, 182, pp. 383-399.

Dubois, D., Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.

Figueira, J., Greco, S., Ehrgott, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*, Springer, Boston.

Gil-Aluja, J. (1998). *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M. (1995). "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3, pp. 236-240.

Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F. (2003). "A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making", *International Journal of Intelligent Systems*, 18, pp. 689-707.

Herrera-Viedma, E., Alonso, S., Chiclana, F., Herrera, F. (2007). "A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15, pp. 863-877.

Herrera-Viedma, E., Chiclana, F., Herrera, F., Alonso, S. (2007). "Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 37, pp. 176-189.

Karayiannis, N. (2000). "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.

Kaufmann, A., (1975). *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York.

Kaufmann, A., Gil-Aluja, J., Terceño, A. (1994). "Mathematics for economic and business management", (In Spanish), Ed. Foro Científico, Barcelona, Spain.

Liu, X.W. (2007). "The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators", *International Journal of Approximate Reasoning*, 45, pp. 68-81.

Merigó, J.M. (2007). *New extensions to the OWA operator and its application in business decision making*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., Casanovas, M. (2007a). "Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators", *International Journal of Information Technology*, 4, pp. 177-182.
Merigó, J.M., Casanovas, M. (2007b). "Decision making using maximization of negret", *International Journal of Computational Intelligence*, 4, pp. 171-179.
Merigó, J.M., Casanovas, M. (2007c). "Induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure", *Working Papers in Economics*, 07/184, University of Barcelona, Spain.
Merigó, J.M., Gil-Lafuente, A.M. (2006). "Using the OWA operator in the selection of financial products", In *Proceedings of the 41st CLADEA Conference*, Montpellier, France, CD-ROM Proceedings.
Merigó, J.M., Gil-Lafuente, A.M. (2007a). "The induced generalized OWA operator", In *Proceedings of the 5th EUSFLAT conference*, volume 2, pp. 463-470, Ostrava, Czech Republic.
Merigó, J.M., Gil-Lafuente, A.M. (2007b). "OWA operators in the selection of human resources", In *Proceedings of the International Conference on Modelling and Simulation* (*MS'08*), Terni, Italy, CD-ROM Proceedings.
Szmidt, E., Kacprzyk, J. (2000). "Distances between intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, 114, pp. 505-518.
Xu, Z.S. (2005). "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *International Journal of Intelligent Systems*, 20, pp. 843-865.
Yager, R.R. (1988). "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.
Yager, R.R. (1992). "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.
Yager, R.R. (1993). "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.
Yager, R.R. (1996). "Quantifier guided aggregation using OWA operators", *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.
Yager, R.R. (2003). "Induced aggregation operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 137, 59-69.
Yager, R.R. (2007). "Centered OWA operators", *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.
Yager, R.R., Filev, D.P. (1994). "Parameterized andlike and orlike OWA Operators", *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.
Yager, R.R., Filev, D.P. (1999). "Induced ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 29, pp.141-150.
Yager, R.R., Kacprzyk, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.1.34. Artículo de congreso 34. – Publicado en HIS 2008

A DECISION MAKING MODEL BASED ON DEMPSTER-SHAFER THEORY AND LINGUISTIC HYBRID AGGREGATION OPERATORS

José M. Merigó[1], Montserrat Casanovas[1], Luís Martínez[2]
[1]*Department of Business Administration, University of Barcelona*
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain
[2]*Department of Computer Science, University of Jaén, 23071 Jaén, Spain*
E-mail: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu, martin@ujaen.es

ABSTRACT

The solving processes for decision making problems based on the use of the Dempster-Shafer (D-S) theory can be accomplished in different ways according to the necessities of each single problem. In this contribution we present a decision making scheme based on the D-S defined in a linguistic framework and then, we propose the use of an hybrid averaging operator (2-THA) that use the 2-tuple linguistic representation model. By using the 2-THA in D-S theory, we obtain a new aggregation operator: the belief structure - 2-THA (BS-2-THA) operator. We study some of its main properties and then show an illustrative example of the new approach in a decision making problem.

1. Introduction

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence [2,10] provides a unifying framework for representing uncertainty as it includes situations of certainty, risk and uncertainty in the same formulation. Since its appearance, it has been used in a wide range of applications [3,8-9,15,18]. Usually, the use of the D-S theory in decision making, considers that the available information is numerical. However, this may not be always the situation in real decision making problems. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with numerical values. Then, a better approach may be the use of linguistic assessments [19]. In the literature, we find a wide range of approaches for dealing with linguistic information such as [1,4-6,11-12,19]. In this paper, we will use the linguistic 2-tuple representation model [5-6] in order to accomplish processes of computing with words without loss of information.

The objective of this contribution is to introduce the use of an hybrid aggregation operator in a linguistic decision making model based on the D-S theory. This operator uses the 2-tuple linguistic representation model and hybridizes the weighted average (WA) and the ordered weighted averaging (OWA) operators [14,16-17] in a similar way to the hybrid averaging (HA) operator [13]. We shall refer to our aggregation operator as the 2-tuple hybrid averaging (2-THA) operator. It will allow to assess probabilities, WAs and OWAs in the same formulation. Then, the whole aggregation process will be referred as the belief structure – 2-THA (BS-2-THA) operator and different families of the BS-2-THA, will be pointed out. Finally, an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies is presented in order to show the applicability of the 2-THA operator. We will compare it with two of its main particular cases: the 2-TWA and the 2-TOWA. Then, we will see the different results obtained by using these aggregation operators. This paper is organized as follows. In Section 2, we review some basic concepts about the 2-tuple linguistic representa-ion model, the 2-THA operator and the D-S theory of evidence. In Section 3, we introduce the new approach about using 2-THA operators in decision making with D-S belief structure. Section 4 presents an illustrative example of the new model and Section 5 summarizes the main conclusions found in the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly comment some basic preliminaries to be used throughout the paper such as the 2-tuple linguistic representation model, the 2-THA operator and the D-S belief structure.

2.1. The 2-tuple linguistic representation model

In [5], Herrera and Martínez developed a fuzzy linguistic representation model, which represents the linguistic information with a pair of values called 2-tuple, (s, α), where s is a linguistic label and α is a numerical value that represents the value of the symbolic translation. With this model, it is possible to accomplish CW processes without loss of information, solving one of the main limitations of the previous linguistic computational models [1,4].

Definition 1. *Let β be the result of an aggregation of the indexes of a set of labels assessed in the linguistic label set $S = \{s_0, s_1, \ldots, s_g\}$, i.e., the result of a symbolic aggregation operation. $\beta \in [0, g]$, being $g + 1$ the cardinality of S. Let $i = round(\beta)$ and $\alpha = \beta - i$ be two values, such that, $i \in [0, g]$ and $\alpha \in [-0.5, 0.5)$, then α is called a symbolic translation.*

Note that the 2-tuple (s_i, α) that expresses the equivalent information to β is obtained with the following function:

$$\Delta : [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5),$$

$$\Delta(\beta) = \begin{cases} s_i & i = round(\beta), \\ \alpha = \beta - i & \alpha \in [-0.5, 0.5). \end{cases} \tag{1}$$

where round is the usual round operation, s_i has the closest index label to β and α is the value of the symbolic translation. For further information on the 2-tuple linguistic representation model, see [5-6,11].

2.2. The 2-tuple hybrid averaging operator

Among the wide range of 2-tuple linguistic aggre-gation operators available, in this paper, we will focus on the 2-THA operator. It is an extension of the HA operator [13] for situations where the available information is assessed with the 2-tuple linguistic representation model. We are then able to consider linguistic information, the 2-TWA and the 2-TOWA operator in the same problem. It can be defined as follows.

Definition 2. *Let $\hat{S}$ be the set of the 2-tuples. A 2-THA operator of dimension n is a mapping f: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$f((s_1, \alpha_1), (s_2, \alpha_2), \ldots, (s_n, \alpha_n)) = \Delta(\sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j^*) \tag{2}$$

where β_j^* is the jth largest of the linguistic weighted argument β'_i ($\beta'_i = n\omega_i\beta_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the exponential weighting vector of the s_{α_i}, with $\omega_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1. Note that β_i is represented in the definition with the 2-tuples (s_i, α_i).

Note that it is possible to distinguish between descending (2-TDHA) and ascending (2-TAHA) orders. Note also that the weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the 2-TDHA (or 2-THA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the 2-TAHA operator.

And it is also possible to study a wide range of families of 2-THA operators such as the olympic-2-THA, the S-2-THA, centered-2-THA, etc. For further information, see [7].

2.3. The Dempster-Shafer theory of evidence

The D-S theory provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the situations of risk and ignorance as special cases. Note that the case of certainty is also included as it can be seen as a particular case of risk and ignorance.

Definition 3. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m*: $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$. (3)
(3) $m(A) = 0, \forall A \neq B_j$.

As said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\{x_j\}$.

The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure are studied in [10]. Note that two important evidential functions associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief.

3. Linguistic decision making with D-S theory and the 2-THA operator

In this Section, we propose a new approach in decision making with D-S belief structure by using hybrid aggregation operators and the 2-tuple linguistic representation model in decision making with D-S belief structure. First, we will present the decision process to follow in these situations. Next, we will study the new aggregation operator: the BS-2-THA operator. Finally, we will analyze different families of 2-THA operators that could be used in the aggregation.

3.1. Decision making approach

The use of D-S framework in decision making has been studied by different authors such as [3,8,15]. In [15], Yager suggested the use of the OWA operator in decision making with D-S framework in order to provide a more general formulation. In all these papers, it is assumed that the available information is numerical. However, in the real life we may find different situations that can not be assessed with numerical variables. Then, it is necessary to use another approach such as the use of linguistic assessments. In [9], it was suggested the use of different types of linguistic aggregation operators to assess the problem. In this contribution, we will use the 2-tuple linguistic representation model. In order to aggregate the information we will consider the 2-THA operator because it is a more general operator than the LOWA because it uses the LWA and the LOWA in the same formulation. The approach can be summarized as follows.

Assume we have a linguistic decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{N_1, \ldots, N_n\}$. (s_{ih}, α_{ih}) is the 2-tuple linguistic payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is N_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the 2-tuple linguistic payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature and the decision makers degree of optimism based on the measure explained in [7,14].

Step 3: Calculate the collection of weights, w, to be used in the 2-THA aggregation for each different cardinality of focal elements.

Step 4: Determine the 2-tuple linguistic payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{(s_{ih}, \alpha_{ih}) \mid N_h \in B_k\}$.

Step 5: Calculate the linguistic aggregated payoff, V_{ik} = 2-THA(M_{ik}), using Eq. (2), for all the values of i and k. Note that it is possible to use for each focal element a different type of 2-THA operator.

Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, (s_i, α_i), where:

$$(s_i, \alpha_i) = \sum_{k=1}^{r} V_{ik}\, m(B_k) \tag{4}$$

Step 7: Select the alternative with the largest (s_i, α_i) as the optimal.

Remark 1: Sometimes, it could be better to use an ascending order in the aggregation of the 2-THA operator. Then, we will use the 2-TAHA operator.

Remark 2: Note that another possibility could be the use of linguistic geometric aggregation operators, linguistic generalized means, linguistic quasi-arithmetic means, etc.

3.2. The belief structure 2-THA

Analyzing the aggregation in *Steps* 6 and 7, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. Then, the result obtained is that the focal weights are aggregating the results obtained by using the 2-THA operator. We will call this aggregation process the belief structure - 2-THA (BS-2-THA) aggregation and it can be defined as follows.

Definition 4. *A BS-2-THA operator is defined by*

$$(s_i, \alpha_i) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \beta^*_{j_k} \tag{5}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, $\beta^*_{j_k}$ *is the* j_k*th largest of the* (s_{i_k}, α_{i_k}), (s_{i_k}, α_{i_k}) *is the argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment. Note that* q_k *refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements.*

The BS-2-THA operator accomplishes some typical properties of the mean operators such as commuta-tivity, monotonicity and idempotency and it provides a wide range of special cases. Note that it is not bounded by the minimum and the maximum because for some exceptional situations, the hybrid aggregations may be higher than the maximum and lower than the minimum[7,9].

3.3. Families of 2-THA operators in belief structures

Different types of 2-THA operators can be used in the aggregation process by using a different manifestation of the weighting vector. For example, it is possible to use the 2-tuple hybrid maximum, the 2-tuple hybrid minimum, the 2-tuple average (2-TA), the 2-TWA and the 2-TOWA operator.

The 2-tuple hybrid maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_{j^*} = 0$, for all $j \neq 1$. The 2-tuple hybrid minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The 2-TA is found when $w_j = 1/n$, for all j and $\omega_i = 1/n$, for all i. The 2-TWA is obtained if $w_j = 1/n$, for all j. And the 2-TOWA if $\omega_i = 1/n$, for all i.

Other families of 2-THA operators could be used such as the window-2-THA, the olympic-2-THA, the step-2-THA, the median-2-THA, the S-2-THA, the centered-2-THA, etc. For further information on these and other families, see for example [7, 16].

Remark 3: When $w_j = 1/m$ for $k \le j \le k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-2-THA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \le n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-2-THA is transformed in the linguistic maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-2-THA becomes the linguistic minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-2-THA is transformed in the 2-TA.

Remark 4: The olympic-2-THA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Note that the window-2-THA can be seen as a generalization of this case when $m = n - 2$ and $k = 2$.

Remark 5: The median-2-THA operator can also be used in this case. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. Note that if n is even, it is possible to use other methods such as the weighted average.

Remark 6: The step-2-THA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$. Note that the median-2-THA can be seen as a particular case of this situation when the number of arguments is odd and $k = n/2$.

Remark 7: A further interesting family is the S-2-THA operator. In this case, we can distinguish between three types: the “orlike”, the “andlike”, and the “generalized” S-2-THA operator. Summarizing, we can say that the generalized S-2-THA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \le 1$. Note that if $\alpha = 0$, we get the andlike S-2-THA and if $\beta = 0$, the orlike S-2-THA. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the 2-tuple hybrid Hurwicz criteria.

Finally, if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-olympic-2-THA, the BS-S-2-THA, the BS-median-2-THA, the BS-centered-2-THA, etc.

4. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example of the new approach. We will consider a decision making problem where a company is looking for its optimal strategy in an expansion process.

We will use the 2-THA operator and two of its main particular cases: the 2-TWA and the 2-TOWA operator. The main reason for considering these three cases is that they are the most complete ones. The 2-TWA expresses the subjectivity of the decision maker, the 2-TOWA the attitudinal character and the 2-THA includes both cases in the same formulation. However, in a more complete analysis, it would be useful to consider other particular cases in order to provide more information to the decision maker.

Assume a company that operates in Europe and North America is planning an expansion policy to another continent. They consider three possible alternatives to follow.

1) A_1: Expansion to the Asian market.
2) A_2: Expansion to the South American market.
3) A_3: Expansion to the African market.

Table 1. Linguistic payoff matrix.

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6
A_1	$(S_3, 0.2)$	$(S_4, -0.3)$	$(S_5, 0.1)$	S_6	S_1	$(S_4, 0.2)$
A_2	$(S_4, 0.2)$	$(S_2, 0.1)$	S_4	$(S_3, -0.2)$	S_5	$(S_3, 0.1)$
A_3	$(S_2, 0.4)$	$(S_5, 0.2)$	$(S_1, 0.4)$	S_3	$(S_4, 0.3)$	$(S_6, 0.2)$

In order to evaluate these strategies, the group of experts of the company considers that the key factor is the economic situation for the next year. After careful analysis, the experts have considered six possible situations that could happen in the future: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Regular-Bad, S_4 = Regular-Good, S_5 = Good, S_6 = Very good.

The experts of the company establish the payoff matrix. As the environment is very uncertain, they use linguistic information to assess the information. The results are shown in Table 1.

After careful analysis of the information, the experts have obtained some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief structure about the states of nature.

Focal element

$B_1 = \{N_2, N_3, N_4\} = 0.2$

$B_2 = \{N_1, N_6\} = 0.3$

$B_3 = \{N_1, N_4, N_5\} = 0.5$

The experts establish the following weighting vectors for the 2-TOWA operator.

Weighting vector

$W_2 = (0.3, 0.7)$

$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$

For the 2-THA, they assume the following weighting vector: $\omega = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$. Note that when using only two or three arguments, we have to normalize the weights affected. For example, for the first focal element we will use: $\omega_1 = (0.25, 0.25, 0.5)$, for the second one: $\omega_2 = (0.25, 0.75)$ and for the third one: $\omega_3 = (0.2, 0.4, 0.4)$.

With this information, we can obtain the linguistic aggregated payoffs of the focal elements. Once we have the aggregated results, we have to calculate the linguistic generalized expected value. The results are shown in Tables 2 and 3, respectively.

Table 2. Linguistic aggregated results.

	2-TWA	2-TOWA	2-THA
V_{11}	$(S_5, 0.2)$	$(S_5, -0.19)$	$(S_5, -0.04)$
V_{12}	$(S_4, -0.05)$	$(S_3, 0.5)$	$(S_8, -0.1)$
V_{13}	$(S_3, 0.44)$	$(S_3, 0.16)$	$(S_3, 0.21)$
V_{21}	$(S_3, -0.07)$	$(S_3, -0.12)$	$(S_3, -0.21)$
V_{22}	$(S_3, 0.37)$	$(S_3, 0.43)$	$(S_7, -0.25)$
V_{23}	$(S_4, -0.04)$	$(S_4, -0.12)$	$(S_4, -0.18)$
V_{31}	$(S_3, 0.15)$	$(S_3, 0.02)$	$(S_3, -0.06)$
V_{32}	$(S_5, 0.25)$	$(S_4, -0.46)$	$(S_{10}, 0.5)$
V_{33}	$(S_3, 0.4)$	$(S_3, 0.15)$	$(S_3, 0.2)$

Table 3. Linguistic generalized expected value.

	2-TWA	2-TOWA	2-THA
A_1	(S_4, –0.05)	(S_4, –0.4)	(S_5, –0.03)
A_2	(S_3, 0.18)	(S_4, –0.45)	(S_4, 0.49)
A_3	(S_4, –0.09)	(S_3, 0.24)	(S_5, 0.34)

As we can see, depending on the linguistic aggregation operator used, the results and decisions may be different. In this case, our optimal choice is A_1 with the 2-TWA and the 2-TOWA, and A_3 with the 2-THA.

Another possibility is to consider an ordering of the strategies. Note that this is very useful when the decision maker wants to consider more than one alternative. The results are shown in Table 4.

Table 4. Ordering of the strategies.

	Ordering
BS-2-TWA	$A_1 \succ A_3 \succ A_2$
BS-2-TOWA	$A_1 \succ A_2 \succ A_3$
BS-2-THA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2$

As we can see, depending on the linguistic aggregation operator used, the results and decisions may be different.

5. Conclusions

We have presented a new approach for decision making with D-S theory by using hybrid aggregations in the 2-tuple linguistic representation model. The main advantage of this approach is the possibility of using in the same framework, probabilities, WAs and OWAs, and uncertain information represented with linguistic variables. Then, the model is able to assess linguistic information in situations where we can use probabilistic information and the attitudinal character of the decision maker. We have analyzed some of its main properties. We have also developed an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. We have seen that depending on the type of 2-THA operator used, the results may lead to different decisions.

In future research, we expect to develop further extensions to this approach by adding new characteristics in the problem such as the use of order inducing variables, generalized means, etc.

6. References

[1] H. P. Bonissone, “A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications”, in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis,* North-Holland, 1982, pp. 329-339.

[2] A.P. Dempster, “Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping”, *Annals of Mathematical Statistics*, 38, 1967, pp. 325-339.

[3] K.J. Engemann, H.E. Miller and R.R. Yager, “Decision making with belief structures: an application in risk management”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 4, 1996, pp. 1-26.

[4] F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, “A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach”, *Information Sciences,* 85, 1995, pp. 223-239.

[5] F. Herrera and L. Martínez, “A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 8, 2000, pp. 746-752.

[6] F. Herrera and L. Martínez, “The 2-tuple Linguistic Computational Model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 9, 2001, pp. 33-48.

[7] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA operators and their application in business decision making*, Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.

[8] J.M. Merigó and M. Casanovas, “Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators”, in: *Proceedings of the 4th International Summer School on AGOP*, Ghent, Belgium, 2007, pp. 95-100.

[9] J.M. Merigó, M. Casanovas and L. Martínez, “Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence”, in: *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007, pp. 658-671.

[10] G. Shafer, *Mathematical Theory of Evidence,* Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.

[11] J.H. Wang and J. Hao, “A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 14, 2006, pp. 435-445.

[12] Z.S. Xu, “EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 12, 2004, pp. 791-810.

[13] Z.S. Xu and Q.L. Da, An overview of operators for aggregating information, *International Journal of Intelligent Systems* 18 (2003) 953-969.

[14] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, 18, 1988, pp. 183-190.

[15] R.R. Yager, “Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties”, *International Journal of General Systems*, 20, 1992, pp. 233-245.

[16] R.R. Yager, “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, 59, 1993, pp. 125-148.

[17] R.R. Yager and J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

[18] R.R. Yager and L. Liu, *Classic works of the Dempster-Shafer theory of belief functions*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[19] L.A. Zadeh, “The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1”, *Information Sciences*, 8, 1975, pp. 199-249; “Part 2”, *Information Sciences*, 8, 1975, pp. 301-357, “Part 3”, *Information Sciences*, 9, 1975, pp. 43-80.

14.1.35. Artículo de congreso 35. – Publicado en ESTYLF 2008

DECISION MAKING WITH THE OWA OPERATOR IN SPORT MANAGEMENT

José M. Merigó[1], **Anna M. Gil-Lafuente** [1]
[1] Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain, {jmerigo, amgil}@ub.edu

Abstract

We analyze the use of the OWA operator in the selection of human resources in sport management. We use different business decision making techniques for doing so. We will consider the use of the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. By using the OWA operator, we can parameterize these decision making techniques from the maximum to the minimum result depending on the interests of the decision maker. We will develop an illustrative example about the decision making process to follow in the selection of a football player for a team.

Keywords: Aggregation operators, OWA operator, Decision making, Sport management.

1 INTRODUCTION

The selection of the most appropriate human resources in sports like football, basketball, etc. represents a fundamental problem for its good development. The enterprise needs to analyze how to select the best player according with their interests. In order to solve this problem, the company has to develop a selection process in which they have to compare the different characteristics of each available candidate found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus on the models developed in [5,9] about selection of human resources, the models developed in [6,11-13] about selection of financial products and the models developed in [7-8] about selection of players in sport management. Note that a very useful survey about different decision making methods can be found in [4].

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results according to the interests of the decision maker. This problem becomes important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. One common method for aggregating the information considering the decision attitude of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in [14]. Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors such as [1-3,10-13,15-16]. Recently, this problem has been considered in other decision making problems such as financial management and human resource management [12-13].

The aim of the paper consists in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of human resources in sport management. These new indexes will consist in combining the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level, with the OWA operator because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWA operator. We will introduce in the selection of human resources in sport management, the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator [12], the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) [12] and the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) [12]. We will also develop an illustrative example in order to see the usefulness of the new approach. Depending on the aggregation operator used, we will see that the results may be different leading to different decisions.

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic concepts. In Section 3, we analyze the process to follow in the selection of human resources in sport management. In Section 4 we develop an illustrative example of the problem. We focus on the selection of human resources in a football team. Finally, in Section 5 we summarize the main conclusions of the paper.

2 PRELIMINARIES

2.1. OWA OPERATOR

The OWA operator introduced in [14] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [1-3,10-16]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by [14].

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping f: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$. Then:

$$f(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the descending OWA (DOWA) and the ascending OWA (AOWA) operator. Note that the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average [14]. Other families of OWA operators can be found in [11,15].

2.2. BUSINESS DECISION MAKING TECHNIQUES

In the literature, we find a wide range of methods for business decision making [1-9,11-16]. In this paper, we will focus on the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. First, we will consider the formulation when all the weights w_j, are equal. We will use two sets A and B.

Definition 2. A normalized Hamming distance (NHD) of dimension n is a mapping d_H: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_H(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | \right) \quad (2)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Definition 3. A normalized adequacy coefficient (NAC) of dimension n is a mapping K: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$K(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)}] \quad (3)$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P and P_k respectively.

Definition 4. A normalized index of maximum and minimum level (NIMAM) of dimension n is a mapping K: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$\eta(P,P_j) = \frac{1}{u+v} \left[\sum_u \left| \mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u) \right| + \sum_v \left(0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) \right) \right] \quad (4)$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P and P_j, j is the jth alternative considered, and u and v are the characteristics to be considered with the Hamming distance and the adequacy coefficient, respectively.

Sometimes, when normalizing these measures, it is better to give different weights to each individual argument. Then, these measures are known as the weighted Hamming distance (WHD), the weighted adequacy coefficient (WAC) and the weighted index of maximum and minimum level (WIMAM).

Definition 5. A WHD of dimension n is a mapping d_{WH}: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$. Then:

$$d_{WH}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i | \right) \quad (5)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Definition 6. A WAC of dimension n is a mapping K: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$. Then:

$$K(P_k \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)}] \tag{6}$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P and P_k respectively.

Definition 7. A WIMAM of dimension n is a mapping K: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$. Then:

$$\eta(P,P_j) = \sum_{u} Z_i(u) \times \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)\right| + \sum_{v} Z_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))\right] \tag{7}$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P and P_j, j is the jth alternative considered, and u and v are the characteristics to be considered with the Hamming distance and the adequacy coefficient, respectively.

3 SELECTION OF HUMAN RESOURCES WITH THE OWA OPERATOR IN SPORT MANAGEMENT

The reason for using the OWA operators in the selection of human resources in sport management appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Due to the fact that the traditional methods used in sport management for this purpose [7-8] are neutral against the attitude of the decision maker, the introduction of the OWA operators in these models may change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it are the possibility of under estimate or over estimate the problems.

The process to follow in the selection of human resources in sport management with the OWA operator, is similar to the process developed in [5-9] with the difference that the instruments used will include the OWA operator in the selection process. Note that similar models that use the OWA operator have been developed for other selection problems [12]. The 5 steps to follow are:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the available candidates for the team. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider of the candidate.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal player. That is:

Table 1: Ideal player

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P =	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

where P is the ideal player expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; i = 1, 2, …, n, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. That is:

Table 2: Available players

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P_k =	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

with k = 1, 2, …, m; where P_k is the kth candidate expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$; i = 1, …, n, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth candidate.

Step 4: Comparison between the ideal player and the different candidates considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them. In this step, the objective is to express numerically the removal between the ideal player and the different candidates considered. For doing this, it can be used the different available selection indexes such as the Hamming distance, the adequacy coefficient, the index of maximum and minimum level, etc. [5-9,12-13].

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps. Finally, we should take the decision about which person select. Obviously, our decision will consist in choosing the candidate with the best results according to the index used.

3.1. USING THE OWA OPERATOR AND THE HAMMING DISTANCE

When making the comparison between the ideal player and the available candidates in *Step* 4, it is possible to use different techniques. First, we will consider the combination between the OWA operator and the Hamming distance that it is known as the OWAD operator. It can be defined as follows.

Definition 8. An OWAD operator of dimension n, is a mapping $OWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with the sum of the weights equal to 1 and $w_j \in [0,1]$ such that:

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{8}$$

where D_j represents the jth largest of the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, and k = 1,2,…,m.

Note that from a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between ascending and descending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the ascending OWAD (AOWAD) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the descending OWAD (DOWAD) operator.

As we can see, the OWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The NHD is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WHD is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

3.2. USING THE OWA OPERATOR AND THE ADEQUACY COEFFICIENT

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the selection of human resources in sport management with the adequacy coefficient. We will call it the OWAAC. It can be defined as follows.

Definition 9. An OWAAC operator of dimension n, is a mapping $OWAAC$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{9}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that the final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1. Note also that from a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAAC (DOWAAC) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAAC (AOWAAC) operator. Note also that the OWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

Note that it is possible to use different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the NAC, the WAC, the step-OWAAC, the S-OWAAC, the centered-OWAAC, etc.

Analogously to the OWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAAC because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (OWADAC).

Definition 10. An OWADAC operator of dimension n, is a mapping $OWADAC$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADAC(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{10}$$

where Q_j represents the jth largest of the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$.

The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result. In this case, we can also distinguish between the descending OWADAC (DOWADAC) and the ascending OWADAC (AOWADAC) operator and it is also possible to obtain different families of aggregation operators.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources in sport management. As it has been explained in [13], the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new methods suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAD and the OWAAC accomplish the theorems explained in [13]. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point [13]. In the following, we briefly show the main theorem when using the OWA operator.

Theorem 1. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the selection of human resources in sport management with the OWAD operator and $OWADAC(P_k \to P)$ the selection of human resources in sport management with the OWADAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWADAC(P_k \to P) \tag{11}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid \qquad \text{and}$$

$$OWADAC(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWADAC(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Analysing this theorem, we could generalize it for all the players - alternatives considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics i and all the players k.

3.3. USING THE OWA OPERATOR AND THE INDEX OF MAXIMUM AND MINIMUM LEVEL

In this Section, we develop an index for the selection of human resources in sport management that uses the OWA operator in the index of maximum and minimum level. We will call it the OWAIMAM. It is defined as follows.

Definition 11. An OWAIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWAIMAM$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$S(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j S_j \tag{12}$$

where S_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we could distinguish between descending (DOWAIMAM) and ascending (AOWAIMAM) orders.

In this case, it is also possible to use different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the NIMAM and the WIMAM.

Analogously to the OWAIMAM operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAIMAM because $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level (OWADIMAM).

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources in sport management for the index of maximum and minimum level. As it has been explained in [13], in these situations, the index of maximum and minimum level becomes the Hamming distance. Note that it is possible to find a total unification point and a partial unification point [13].

4 ILLUSTRATIVE EXAMPLE

We will develop a decision making problem about selection of players in a football team. We will assume that a football team is looking for a player for a specific position that they need to cover. Obviously, in the market there are a lot of choices but not all of them can be considered as a real choice because his team does not want to sell it. Then, the experts of the team need to consider all the alternatives and develop a first general selection in order to analyze in detail the real alternatives that can be acquired by the team.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics for the team. Assume that a football team wants to select a player for a forward position and it has 4 candidates P_1, P_2, P_3, P_4, with different characteristics. It is considered for each characteristic a property.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the ideal player as:

Table 3: Characteristics of the ideal player

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P^* =$	0.8	0.6	0.9	1	0.8

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. For each of these characteristics, it is found the following information:

Table 4: Available candidates

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1	0.6	0.7	0.5	0.6	0.8
P_2	0.5	0.7	0.6	0.8	0.5
P_3	0.9	0.5	0.4	0.8	0.7
P_4	0.4	0.6	0.7	0.8	0.8

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different candidates considered using the OWA operator. We will consider the NHD, the WHD, the OWAD and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the following weighting vector: W = (0’1, 0’1, 0’2, 0’3, 0’3).

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the results shown in Table 5.

Table 5: Aggregated results with the Hamming distance

	NHD	WHD	OWAD	AOWAD
P_1	0.22	0.23	0.15	0.29
P_2	0.24	0.25	0.21	0.27
P_3	0.2	0.21	0.15	0.25
P_4	0.16	0.14	0.1	0.22

In this case, our decision will consist in selecting the candidate with the smallest distance. Then, we will select P_4 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following results shown in Table 6. Note that in this case we select the alternative with the highest result being P_4 the optimal player for the team.

Table 6: Aggregated results with the adequacy coefficient

	NAC	WAC	OWAAC	AOWAAC
P_1	0.8	0.78	0.72	0.88
P_2	0.78	0.76	0.74	0.82
P_3	0.82	0.8	0.76	0.88
P_4	0.84	0.86	0.78	0.9

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in Table 7.

Table 7: Results with the dual adequacy coefficient

	NDAC	WDAC	OWADAC	AOWADAC
P_1	0.2	0.22	0.28	0.12
P_2	0.22	0.24	0.26	0.18
P_3	0.18	0.2	0.24	0.12
P_4	0.16	0.14	0.22	0.1

Finally, if we use the IMAM in the selection process as a combination of the Hamming distance and the adequacy coefficient, we will get the following. Note that in this example, we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics with the Hamming distance. Its resolution is shown in Table 8.

Table 8: Aggregated results with the IMAM

	NIMAM	WIMAM	OWAIM	AOWAIM
P_1	0.22	0.23	0.15	0.29
P_2	0.24	0.25	0.21	0.27
P_3	0.2	0.21	0.15	0.25
P_4	0.16	0.14	0.1	0.22

Then, our decision will consist in select P_4 because it is the candidate with the smallest removal to the ideal.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent approximation index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in Table 9.

Table 9: Aggregated results with the dual IMAM

	NDIM	WDIM	OWADIM	AOWADIM
P_1	0.78	0.77	0.85	0.71
P_2	0.76	0.75	0.79	0.73
P_3	0.8	0.79	0.85	0.75
P_4	0.84	0.86	0.9	0.78

As we can see, depending on the particular type of aggregation operator used, the results may lead to different decisions.

5 CONCLUSIONS

We have analysed the selection of human resources in sport management. We have used a new methodology that uses the OWA operator with different measures frequently used in business decision making such as the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. We have seen that the main advantage of using the OWA operator in this type of problems is the possibility of under or over estimate the results. Then, the decision maker is able to take decisions considering its attitudinal character.

In future research, we expect to develop further exten-sions of these problems by adding new characteristics and applying it to other decision making problems.

Acknowledgements

We would like to thank the anonymous referees for their valuable comments that have improved the quality of the paper.

References

[1] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer-Verlag, New York, 2007.

[2] H. Bustince, F. Herrera, J. Montero, Fuzzy Sets and their Extensions: Intelligent Systems from Decision Making to Data Mining, Web Intelligence and Computer Vision, Springer-Verlag, 2008.

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] J.R. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*, Springer, Boston, 2005.

[5] J. Gil-Aluja. *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[6] A.M. Gil-Lafuente. *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[7] J. Gil-Lafuente. El “índice del máximo y mínimo nivel” en la optimización del fichaje de un deportista, In *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa* (AEDEM), Reggio Calabria, Italy, pp. 439-443, 2001.

[8] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[9] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.

[10] N. Karayiannis. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks* 11, Pág. 1093-1105, 2000.

[11] J.M. Merigó. *New extensions to the OWA operators and their application in business decision making*, Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.

[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operators in the selection of financial products, In *Proceedings of the 41st CLADEA Congress*, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.

[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Economic Review* 13, Pág. 35-50, 2007.

[14] R.R. Yager. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 18, Pág. 183-190, 1988.

[15] R.R. Yager. Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, Pág. 125-148, 1993.

[16] R.R. Yager, J. Kacprzyk. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997.

14.1.36. Artículo de congreso 36. – Publicado en ESTYLF 2008

THE FUZZY GENERALIZED HYBRID AVERAGING OPERATOR

José M. Merigó [1], Montserrat Casanovas [1]

[1] Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain, {jmerigo, mcasanovas}@ub.edu

Abstract

The hybrid averaging is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the ordered weighted averaging (OWA) operator in the same formulation. We introduce the fuzzy generalized hybrid averaging (FGHA) operator. It is a new aggregation operator that uses generalized means and uncertain information represented by fuzzy numbers in the hybrid averaging operator. The main advantage of this operator is that it generalizes a wide range of aggregation operators that can be used in different applications such as decision making. For example, we could mention the fuzzy hybrid averaging (FHA), the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA), the fuzzy generalized mean (FGM), the fuzzy generalized OWA (FGOWA), etc.

Keywords: Aggregation operators, Hybrid averaging, Fuzzy numbers, Decision making.

1 INTRODUCTION

The hybrid averaging (HA) operator [12] is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the ordered weighted averaging (OWA) operator [13,16] in the same formulation. Recently [10], it has been suggested an extension of the HA operator for situations where it is not possible to use exact numbers because the information is uncertain. This operator is known as the fuzzy HA (FHA) operator and it represents the uncertain information to be aggregated with the HA operator by using FNs.

Another interesting aggregation operator is the generalized OWA (GOWA) operator [7,15]. It generalizes the OWA operator by using generalized means. Recently [11], a further generalization has been suggested by using FNs in the GOWA operator. This operator is known as the fuzzy GOWA (FGOWA) operator. The main advantage of this operator is that it generalizes a wide range of mean operators such as the fuzzy OWA (FOWA), the fuzzy ordered weighted quadratic averaging (FOWQA), the fuzzy generalized mean (FGM), etc. Note that the FGOWA operator can be further generalized by using quasi-arithmetic means [11]. The result is the Quasi-FOWA operator.

Going a step further, in this paper we introduce the fuzzy generalized hybrid averaging (FGHA) operator. It is an aggregation operator that uses the main characteristics of the GOWA, the FOWA and the HA operator. Then, this operator uses generalized means in the HA operator and in uncertain situations where the available information can not be represented with exact numbers but it is possible to use FNs. By using the HA operator, the FGHA considers the WA and the OWA in the same problem. In decision making problems, this implies that the FGHA operator considers the subjective probability and the attitudinal character of the decision maker in the same formulation. One of the key features of the FGHA operator is that it generalizes a wide range of aggregation operators such as the FGM, the FWGM, the FGOWA, the FWA, the FOWA, the FHA, the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA), the fuzzy hybrid geometric averaging (FHGA), the fuzzy hybrid harmonic averaging (FHHA), the FOWQA, etc. Then, it is able to provide a complete view of the decision problem to the decision maker, so he will to take the appropriate decision according to its interests.

We further generalize the FGHA by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-FHA operator. We also develop a numerical example of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. With this example, we will see that depending on the aggregation operator used, the results may lead to different decisions.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts about the FNs, the FHA and the GOWA operator. In Section 3 we present the FGHA operator. Section 4 briefly analyses some basic families of the FGHA operator. Section 5 introduces the Quasi-FHA operator. In Section 6 we develop a numerical example of the new approach. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2 PRELIMINARIES

2.1. FUZZY NUMBERS

The FN was first introduced by [4,17]. Since then, it has been studied and applied by a lot of authors such as [5,8].

A FN is a fuzzy subset of a universe of discourse that is both convex and normal [8]. Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings. In the literature, we find a wide range of FNs [5,8]. For example, a trapezoidal FN (TpFN) A of a universe of discourse R can be characterized by a trapezoidal membership function $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \overline{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha \in [0, 1]$ and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a crisp value and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a triangular FN (TFN). Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

In the following, we are going to review the FN arithmetic operations as follows. Let A and B be two TFN, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

4) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
5) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
6) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied [5,8] but in this paper we will focus on these ones.

2.2. FUZZY HYBRID AVERAGING OPERATOR

The FHA operator [10] is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator in the same formulation. Then, it is possible to consider in the same decision making problem, the attitudinal character of the decision maker and its subjective probability. It also deals with uncertain environments where the available information cannot be assessed with exact numbers but it is possible to find approximate results using FNs. It can be defined as follows.

Definition 1. Let Ψ be the set of FNs. A FHA operator of dimension n is a mapping FHA: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are FNs.

Similar to the FOWA operator, it is possible to analyze different properties of the FHA operator [9-10]. Note that in this case, we should also consider the problem of comparing FNs in the reordering process. For simplicity, we recommend to follow the policy explained in [10-11].

2.3. GENERALIZED OWA OPERATOR

The GOWA operator [7,15] is a generalization of the OWA operator by using generalized means. It includes a wide range of mean operators such as the usual OWA, the OWG operator, the ordered weighted quadratic averaging operator (OWQA), etc. It can be defined as follows.

Definition 2. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

For further reading on the GOWA operator, see for example, [1-3,6-7,9,11,15].

3 THE FUZZY GENERALIZED HYBRID AVERAGING OPERATOR

The fuzzy generalized hybrid averaging operator is an extension of the HA operator that uses generalized means and uncertain information that can be represented by using FNs. Then, we can represent the problems considering the best and worst result and the possibility that the internal values of the FN will occur. With this generalization, we include in the same formulation a lot of aggregation operators such as the FHA, the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA), the FGOWA, the FWGM, etc. It can be defined as follows.

Definition 3. Let Ψ be the set of FNs. A FGHA operator of dimension n is a mapping $FGHA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, the $\tilde{a}_i$ are FNs and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that if $\lambda \leq 0$, we can only use positive numbers R^+, in order to get consistent results. Note also that different types of FNs could be used in the aggregation such as TFNs, TpFNs, L-RFNs, interval-valued FNs, intuitionistic FNs, etc.

In this case, the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using FNs. Then, in some cases it is not clear which FN is higher, so we need to establish an additional criteria for reordering the FNs. For simplicity, we recommend the following procedure. Select the FN with the highest value in the membership level α = 1. Note that if the membership level α = 1 is an interval, then, we will calculate the average of the interval.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending FGHA (DFGHA) and the ascending FGHA (AFGHA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFGHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFGHA operator.

The FGHA operator is monotonic, commutative and idempotent. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then, $FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \geq FGHA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = FGHA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$, where $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n)$. It is idempotent because if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then, $FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$. Note that this operator is not bounded by the maximum and the minimum because for some special situations it can be higher and lower, respectively. Mainly, this problem is found when using the hybrid maximum and the hybrid minimum in the aggregation and in similar situations.
A further interesting issue to consider are the measures for characterizing the weighting vector W of the FGHA operator such as the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator. Note that these measures follow the same methodology as the original version developed for the OWA and the GOWA operator [9,13-15].

4 FAMILIES OF FGHA OPERATORS

In this Section, we analyze different families of FGHA operators. We will distinguish between those found in the weighting vector W and those found in the parameter λ.

4.1. ANALYSING THE WEIGHTING VECTOR *W*

By using a different weighting vector in the FGHA operator, we are able to obtain different types of fuzzy aggregation operators. For example, it is possible to obtain the fuzzy hybrid maximum, the fuzzy hybrid minimum, the fuzzy generalized mean (FGM), the fuzzy weighted generalized mean (FWGM) and the FGOWA operator.

The fuzzy hybrid maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The fuzzy hybrid minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The FGM is found when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all a_i. The FWGM is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. The FGOWA is found when $\omega_i = 1/n$, for all a_i.

Following a similar methodology as it has been developed in [9,14], we could study other particular cases of the FGHA operator. For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$, we are using the window-FGHA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

The olympic-FGHA, is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-FGHA is transformed in the median-FGHA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-FGHA is transformed in the olympic-FGHA.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z FGHA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j^* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j^* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j^* = 1$ to n

$-q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z FGHA becomes the fuzzy hybrid maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z FGHA becomes the fuzzy hybrid minimum.

We note that the median can also be used as FGHA operators. For the median-FGHA, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

For the weighted median-FGHA, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

A further interesting family is the S-FGHA operator based on the S-OWA operator [14]. It can be subdivided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-FGHA operator. The generalized S-FGHA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-FGHA operator becomes the "andlike" S-FGHA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-FGHA operator.

Another family of aggregation operator that could be used is the centered-FGHA operator. We could define a FGHA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. Note that these properties have to be accomplished for the weighting vector w of the FOWA operator but not necessarily for the weighting vector ω of the FWA. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-FGHA operator. Another particular situation of the centered-FGHA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-FGHA operator.

Other families of FGHA operators could be studied such as the Gaussian FGHA weights, the nonmonotonic FGHA operator, etc. For more information, see [9,14].

4.2. ANALYSING THE PARAMETER λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual FHA operator, the fuzzy hybrid geometric averaging (FHGA) operator, the fuzzy hybrid harmonic averaging (FHHA) operator and the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA) operator.

When $\lambda = 1$, we get the FHA operator.

$$FGHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5}$$

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DFHA operator and the AFHA operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the

FWA and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the FOWA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy average (FA).

When $\lambda = 0$, the FGHA operator becomes the FHGA operator.

$$FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{6}$$

In this case, it is also possible to distinguish between descending (DFHGA) and ascending (AFHGA) orders. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy weighted geometric average (FWGA) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy OWG (FOWG) operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy geometric mean (FGM).

When $\lambda = -1$, we get the FHHA operator.

$$FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{7}$$

In this case, we get the descending FHHA (DFHHA) operator and the ascending FHHA (AFHHA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy weighted harmonic mean (FWHM) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy ordered weighted harmonic averaging (FOWHA) operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy harmonic mean (FHM).

When $\lambda = 2$, we get the FHQA operator.

$$FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{8}$$

In this case, we also get the descending FHQA (DFHQA) operator and the ascending FHQA (AFHQA) operator. If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy weighted quadratic average (FWQA) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the FOWQA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy quadratic average (FQA).

Note that we could analyze other families by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually in a similar way as it has been developed in Section 3 and 4.1.

5 THE QUASI-FHA OPERATOR

As it is explained in [1], it is possible to further generalize the GOWA operator by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology as in [1,6], we can suggest a similar generalization to the FGHA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-FHA operator. It can be defined as follows.

Definition 4. Let Ψ be the set of FN. A Quasi-FHA operator of dimension n is a mapping $QFHA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{9}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, the $\tilde{a}_i$ are FNs and $g(b)$ is a strictly continuous monotonic function.

As we can see, we replace b^λ of the FGHA with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DFHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AFHA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the FGHA operator, are also included in

this generalization. Then, for example, we could mention the problem of reordering the arguments when they are FN. In order to solve this problem, we recommend the method explained in [10-11].

6 NUMERICAL EXAMPLE

In the following, we are going to develop a numerical example in order to illustrate the new approach. We will consider a decision making problem where a company is analysing the optimal strategy for the next period. We will use different types of FGHA operators such as the FA, the FWA, the FOWA, the FHA and the AFHA operator.

Assume that a company that it is operating in Europe and North America, is analysing its general policy for the next year and they consider 5 possible strategies to follow.

In order to evaluate these strategies, the group of experts of the company considers that the key factor for the next year is the economic situation. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 5 possible situations for the next year: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Normal, S_4 = Good, S_5 = Very good. The results are TFN shown in Table 1.

Table 1: Fuzzy payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(20,30,40)	(40,50,60)	(30,40,50)	(50,60,70)	(60,70,80)
A_2	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)
A_3	(40,50,60)	(60,70,80)	(20,30,40)	(50,60,70)	(30,40,50)
A_4	(60,70,80)	(60,70,80)	(50,60,70)	(30,40,50)	(10,20,30)
A_5	(30,40,50)	(60,70,80)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)

In this example, we assume that the experts use the following weighting vector for all the cases of the WA and the OWA: $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$.

With this information, it is possible to aggregate it in order to take a decision. The results are shown in Table 2.

Table 2: Aggregated results

	FA	**FWA**	**FOWA**	**FHA**	**AFHA**
A_1	(40,50,60)	(44,54,64)	(36,46,56)	(36,45,54)	(52,63,74)
A_2	(42,52,62)	(38,48,58)	(38,48,58)	(36,45.5,55)	(40,50.5,61)
A_3	(40,50,60)	(39,49,59)	(36,46,56)	(35,44.5,54)	(43,53.5,64)
A_4	(42,52,62)	(37,47,57)	(37,47,57)	(32.5,43,53)	(41.5,51,61)
A_5	(42,52,62)	(42,52,62)	(39,49,59)	(37.5,47,56.5)	(46.5,57,67.5)

As we can see, depending on the aggregation operator used, the optimal strategy may be different.

A further interesting issue is to establish an ordering of the strategies. This is very useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 3.

Table 3: Ordering of the strategies

	Ordering
FA	$A_2=A_4=A_5 \succ A_1=A_3$
FWA	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$
FOWA	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1=A_3$
FHA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
AFHA	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$

As we can see, we get different orderings depending on the fuzzy aggregation operator used.

7 CONCLUSIONS

We have presented the FGHA operator. We have seen that it is an extension of the HA operator that uses generalized means and uncertain information assessed with FNs. Moreover, we have seen that it includes the WA and the OWA in the same formulation because it is an extension of the HA operator. Particularly, this operator includes the FWGM and the FGOWA operator by using the hybrid formulation. It also includes a lot of other types of aggregation operators such as the FHA, the FHGA, the FHQA, etc.

We have further generalized it by using quasi-arithmetic means. As a result, we have obtained the Quasi-FHA operator. We have also developed an application of the FGHA operator in a decision making problem about selection of strategies.

In future research we expect to develop further extensions of the FGHA operator by adding new characteristics in the aggregation and applying it to other decision making problems.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank the anonymous referees for their valuable comments that have led to an improved version of this paper.

References

[1] G. Beliakov. Learning Weights in the Generalized OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 4, Pág. 119-130, 2005.

[2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh. On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 2, Pág. 30-34, 1972.

[5] D. Dubois, H. Prade. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.

[6] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens. Characte-rization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3, Pág. 236-240, 1995.

[7] H. Bustince, F. Herrera, J. Montero. *Fuzzy Sets and their Extensions: Representation, Aggregation and Models*, Springer-Verlag, Berlin, 2008.

[8] N. Karayiannis. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks* 11, Pág. 1093-1105, 2000.

[9] A. Kaufmann, M.M. Gupta. *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.

[10] J.M. Merigó. *New extensions to the OWA operators and their application in business decision making*, Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.

[11] J.M. Merigó, M. Casanovas. Using Fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, In *Proceedings of the AEDEM International Conference*, pp. 475-486, Krakow, Poland, 2007.

[12] J.M. Merigó, M. Casanovas. The fuzzy generalized OWA operator, In *Proceedings of the SIGEF Conference*, pp. 504-517, Poiana-Brasov, Romania, 2007.

[13] H.B. Mitchel, D.D Estrakh, An OWA operator with fuzzy ranks, *International Journal of Intelligent Systems* 13, Pág. 69-81, 1998.

[14] Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, *Information Sciences* 166, Pág. 19-30, 2004.

[15] Z.S. Xu, A note on linguistic hybrid arithmetic averaging operator in multiple attribute group decision making with linguistic information, *Group Decision and Negotiation* 15, Pág. 593-604, 2006.

[16] Z.S. Xu, On generalized induced linguistic aggregation operators, *International Journal of General Systems* 35, Pág. 17-28, 2006.

[17] Z.S. Xu, Intuitionistic Fuzzy Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 15, Pág. 1179-1187, 2007.

[18] Z.S. Xu, Q.L. Da. An overview of operators for aggregating the information, *International Journal of Intelligent Systems* 18, Pág. 953-969, 2003.

[19] R.R. Yager. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 18, Pág. 183-190, 1988.

[20] R.R. Yager. Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, Pág. 125-148, 1993.

[21] R.R. Yager. Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* Pág. 3, 93-107, 2004.

[22] R.R. Yager, J. Kacprzyk. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997.

[23] L.A. Zadeh. The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning, Part 1, *Information Sciences* 8, Pág. 199-249, 1975; Part 2, *Information Sciences* 8, Pág. 301-357, 1975; Part 3, *Information Sciences* 9, Pág. 43-80, 1975.

14.1.37. Artículo de congreso 37. – Publicado en ESTYLF 2008

THE INDUCED MINKOWSKI ORDERED WEIGHTED AVERAGING DISTANCE OPERATOR

José M. Merigó [1] **Montserrat Casanovas** [1]

[1] Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain, {jmerigo, mcasanovas}@ub.edu

Abstract

The Minkowski distance is a distance measure that generalizes a wide range of other distances such as the Hamming and the Euclidean distance. In this paper, we develop a generali-zation of the Minkowski distance by using the induced ordered weighted averaging (IOWA) operator. We will call it the induced Minkowski OWA distance (IMOWAD). Then, we are able to obtain a wider range of distance measures that includes the Minkowski distance, the Minkowski OWA distance (MOWAD), the induced OWAD (IOWAD), etc. We also present a further generalization that uses quasi-arithmetic means. We will call it the Quasi-IOWAD operator. We end the paper with a numerical example of the new approach.

Keywords: Minkowski distance, Aggregation operators, IOWA operator, Decision making.

1 INTRODUCTION

The distance measures are very useful techniques that have been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, decision making, operational research, etc. The Minkowski distance is one of the main distance measures because it generalizes a wide range of other distances such as the Hamming distance, the Euclidean distance, etc. Often when calculating distances, we want an average result of all the individual distances. We call this the normalization process. In the literature, we find mainly three types of normalized distances. The first one is when we use the arithmetic mean and it is known as the normalized Minkowski distance (NMD). The second one is when we use the weighted average (WA) and it is known as the weighted Minkowski distance (WMD). The third one is when we use the ordered weighted averaging (OWA) operator [1-17] and it is known as the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator [5,9]. Note that the MOWAD includes the NMD and the WMD as special cases.

Sometimes, when normalizing the Minkowski distance with the OWA operator, it would be interesting to consider a more general formulation of the attitudinal character. A very useful technique for doing this is the induced ordered weighted averaging

(IOWA) operator [14,16]. The IOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the OWA operator.

In this paper, we suggest a new type of distance measure consisting in normalizing the Minkowski distance by using the IOWA operator. Then, the normalization developed will be able to reflect complex attitudinal characters. We will call this generalization as the induced Minkowski OWA distance (IMOWAD) operator. The main advantage of this operator is that it generalizes a wide range of distances such as the NMD, the WMD, the MOWAD [5,9], the induced OWA distance (IOWAD) [7], the induced Euclidean OWA distance (IEOWAD) [8] and a lot of other particular cases.

We further generalize the IMOWAD operator by using quasi-arithmetic means. As a result, we get the Quasi-IOWAD operator. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of investments. We will see that depending on the particular type of IMOWAD operator used, the results may lead to different decisions.

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts about the Minkowski distance and the IOWA operator. In Section 3 we present the IMOWAD operator. Section 4 analyzes different families of IMOWAD operators. In Section 5 we present the Quasi-IOWAD operator. Section 6 develops a numerical example of the new generalization. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2 PRELIMINARIES

2.1. NORMALIZED MINKOWSKI DISTANCE

The normalized Minkowski distance is a distance measure that generalizes a wide range of distances such as the normalized Hamming distance and the normalized Euclidean distance. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, etc. It can be formulated for two sets *A* and *B* as follows.

Definition 1. *A normalized Minkowski distance of dimension n is a mapping* $d_m:R^n \rightarrow R$ *such that*:

$$d_m(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (1)$$

where a_i *and* b_i *are the ith arguments of the sets A and B and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

If we give different values to the parameter λ, we can obtain a wide range of special cases. For example, if $\lambda = 1$, we obtain the normalized Hamming distance (NHD). If $\lambda = 2$, the normalized Euclidean distance (NED).

Sometimes, when normalizing the Minkowski distance, we prefer to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Minkowski distance. It can be defined as follows.

Definition 2. *A weighted Minkowski distance of dimension n is a mapping d_{wm}:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$. *Then*:

$$d_{wm}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \mid a_i - b_i \mid^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

In this case, we can also obtain a wide range of special cases by using different values in the parameter λ. For example, if $\lambda = 1$, we obtain the weighted Hamming distance (WHD). If $\lambda = 2$, the weighted Euclidean distance (WED).

2.2. INDUCED OWA OPERATOR

The IOWA operator was introduced by Yager and Filev [16] and it is an extension of the OWA operator. Its main difference is that the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is developed with order inducing variables. It can be defined as follows.

Definition 3. *An IOWA operator of dimension n is a mapping f: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the a_i value of the IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

The IOWA operator includes the OWA operator as a particular case and a lot of other situations such as the maximum, the minimum and the average. Note that it is possible to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator.

3 THE INDUCED MINKOWSKI ORDERED WEIGHTED AVERAGING DISTANCE OPERATOR

The IMOWAD operator is a distance measure that uses the IOWA operator in the normalization process of the Minkowski distance. Then, the reordering of the individual distances is developed with order inducing variables. For two sets *X* and *Y*, it can be defined as follows.

Definition 4. *An IMOWAD operator is a mapping f*: $R^n \times R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, *then*:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle,\ldots,\langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2\right)^{1/2} \tag{4}$$

where b_j *is the* $|x_i - y_i|$ *value of the IMOWAD triplet* $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable and* $|x_i - y_i|$ *is the argument variable represented in the form of individual distances*.

The IMOWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = f(\langle u_1, s_1, v_1\rangle, \langle u_2, s_2, v_2\rangle, \ldots, \langle u_n, s_n, v_n\rangle)$ where $(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle)$ is any permutation of the arguments $(\langle u_1, s_1, v_1\rangle, \langle u_2, s_2, v_2\rangle, \ldots, \langle u_n, s_n, v_n\rangle)$. It is monotonic because if $|x_i - y_i| \geq |s_i - v_i|$, for all *i*, then, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) \geq f(\langle u_1, s_1, v_1\rangle, \langle u_2, s_2, v_2\rangle, \ldots, \langle u_n, s_n, v_n\rangle)$. It is bounded because the IMOWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{|x_i - y_i|\} \leq f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) \leq \text{Max}\{|x_i - y_i|\}$. It is idempotent because if $|x_i - y_i| = |x - y|$, for all *i*, then, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = |x - y|$.

Note that if $x_i = y_i$ for all $i \in [1, n]$, $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = 0$. Note also that $f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = f(\langle u_1, y_1, x_1\rangle, \ldots, \langle u_n, y_n, x_n\rangle)$.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DIMOWAD) and ascending (AIMOWAD) orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the *j*th weight of the DIMOWAD (or IMOWAD) operator and w^*_{n+1-j} the *j*th weight of the AIMOWAD operator.

If *B* is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the IMOWAD operator can be expressed as:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the IMOWAD operator can be expressed as:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (6)$$

A further interesting issue is the problem of ties in the reordering process of the order inducing variables. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy explained in [16] about replacing the tied arguments by their average. Note that in this case, it would mean that we are replacing the tied arguments by their normalized Minkowski distance.

4 FAMILIES OF IMOWAD OPERATORS

In this Section, we analyze different particular cases of the IMOWAD operator. We distinguish between those families found in the parameter λ and those found in the weighting vector W.

4.1. ANALYSING THE PARAMETER λ

By looking to the parameter λ, we can find a wide range of distance measures such as the IOWAD, the EIOWAD, the induced ordered weighted geometric distance (IOWGD) operator, the induced ordered weighted harmonic averaging distance (IOWHAD) operator and a lot of other cases.

When $\lambda = 1$, we get the IOWAD operator.

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (7)$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the NHD. The WHD is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the OWAD operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $|x_i - y_i|$. Note also that it is possible to distin-guish between descending (DIOWAD) and ascending (AIOWAD) orders.

When $\lambda = 2$, we get the IEOWAD operator.

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \quad (8)$$

If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the NED. If $u_i > u_{i+1}$, for all i, we get the WED and if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $|x_i - y_i|^2$, we get the EOWAD operator. In this case, we also get the descending IEOWAD operator and the ascending IEOWAD operator.

When $\lambda = 0$, we get the IOWGD operator.

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{9}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the normalized geometric distance and if $u_i > u_{i+1}$, for all i, the weighted geometric distance. If the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $|x_i - y_i|^{wj}$, we get the ordered weighted geometric distance operator (OWGD) operator. In this case, it is also possible to distinguish between descending (DFHGA) and ascending (AFHGA) orders.

When $\lambda = -1$, we get the IOWHAD operator.

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{10}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the normalized harmonic distance. If $u_i > u_{i+1}$, for all i, we get the weighted harmonic distance. If the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $1/(w_j / |x_i - y_i|)$, we get the ordered weighted harmonic averaging distance operator (OWHAD) operator . In this case, we can also distinguish between the descending IOWHA (DIOWHAD) operator and the ascending IOWHAD (AIOWHAD) operator.

Note that we could analyze other families by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually in a similar way as it has been developed in Section 3.

4.2. ANALYSING THE WEIGHTING VECTOR *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the IMOWAD operator, we are able to obtain different types of distance aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the NMD, the WMD and the MOWAD operator.

The maximum distance is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$. The minimum distance is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Min}\{a_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we are using the step-IMOWAD operator. The NMD is found when $w_j = 1/n$, for all a_i. The WMD is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the MOWAD operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i.

Other families of IMOWAD operators could be used. For more information on the methodology of these families, see for example [6,10,13]. For example, when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-IMOWAD operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-IMOWAD. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-IMOWAD is transformed in the IMOWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-IMOWAD is transformed in the olympic-IMOWAD. Also note that the olympic-IMOWAD is transformed in the olympic-MOWAD average if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \text{Max}_i\{a_i\}$ and $u_q = \text{Min}_i\{a_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

Note that the IMOWAD-median and the weighted IMOWAD-median can also be used as a particular case of the IMOWAD. For the IMOWAD median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument a_i with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i. For the weighted IMOWAD median, we select the argument a_i that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5. Note that if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, then, we get the MOWAD-median and the weighted MOWAD-median, respectively.

Another interesting family is the S-IMOWAD operator. It can be divided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-IMOWAD operator. The generalized S-IMOWAD operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IMOWAD operator becomes the "andlike" S-IMOWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-IMOWAD operator.

A further interesting family that could be used is the centered-IMOWAD operator. An IMOWAD operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-IMOWAD operator. Another particular situation of the centered-IMOWAD operator appears if we remove the third condition. We will refer to it as a non-inclusive centered-IMOWAD operator.

5 QUASI-IOWAD OPERATOR

The IMOWAD can be generalized by using quasi-arithmetic means in a similar way as it was done in [1-4,6]. We will call it the Quasi-IOWAD operator. It is defined as follows.

Definition 5. *A Quasi-IOWAD operator is a mapping f: $R^n \times R^n \to R$ that has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, then*:

$$f(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{11}$$

where b_j is the $|x_i - y_i|$ value of the QIOWAD triplet $\langle u_i, x_i, y_i \rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, $|x_i - y_i|$ is the argument variable represented in the form of individual distances, and g is the strictly continuous monotonic function.

As we can see, when $g(b) = b^{\lambda}$, then, the Quasi-IOWAD becomes the IMOWAD operator. Note that it is also possible to distinguish between descending (Quasi-DIOWAD) and ascending (Quasi-AIOWAD) orders.

Note that all the properties and particular cases commented in the IMOWAD operator are also applicable in the Quasi-IOWAD operator.

6 NUMERICAL EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to see the results obtained in the aggregation by using different types of IMOWAD operators. We will analyze the selection of investments where an enterprise is looking for the best strategy according to its interests.

Assume that an enterprise that operates in Europe and North America wants to invest some money the next year. In order to do this, the board of directors has established five possible investments S_i that the enterprise could develop in the future.

(1) A_1: Invest in the Asian market.
(2) A_2: Invest in the South American market.
(3) A_3: Invest in the African market.
(4) A_4: Do not develop any investment.

After careful review of the information, the experts have given the following general information. They have summarized the information of the strategies in five main characteristics C_i with the following results.

(1) C_1: Risk of the investment.
(2) C_2: Benefits in the short term.
(3) C_3: Benefits in the long term.
(4) C_4: Difficulty of the investment.
(5) C_5: Other aspects.

Note that the results are valuations between 0 and 1.

Table 1: Available investments

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.7	0.9	0.8	0.7	0.3
A_2	0.6	0.8	0.7	0.5	0.8
A_3	0.5	0.6	0.8	0.4	0.9
A_4	0.8	0.5	0.6	0.8	0.6

According to the objectives and policies of the enterprise, the experts have established the ideal investment for the company independently of the investments available. They have established the following valuations for it.

Table 2: Characteristics of the ideal investment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	0.8	0.9	1	0.9	0.9

In order to aggregate the information, the group of experts calculates the attitudinal character of the enterprise. Due to the fact that the attitudinal character depends upon the opinion of several members of the board of directors, it is very complex. Therefore, they need to use order inducing variables in the reordering process. The results are shown in Table 3.

Table 3: Order inducing variables

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	12	16	20	24	8
A_2	22	18	20	26	28
A_3	14	20	15	18	17
A_4	26	21	19	15	13

With this information, it is possible to develop different methods for selecting an investment. In this example, we will consider the NHD, the NED, the WHD, the WED, the OWAD, the IOWAD, the AIOWAD and the EIOWAD operator. Note that the weighting vector used is: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). The aggregated results are shown in Tables 4 and 5.

Table 4: Aggregated results 1

	NHD	WHD	OWAD	IOWAD
A_1	0.22	0.27	0.16	0.26
A_2	0.22	0.21	0.19	0.22
A_3	0.26	0.23	0.21	0.26
A_4	0.24	0.27	0.2	0.27

Table 5: Aggregated results 2

	AIOWAD	EIOWAD	Median	Olympic
A_1	0.18	0.349	0.2	0.1
A_2	0.22	0.249	0.2	0.3
A_3	0.26	0.306	0.3	0.233
A_4	0.21	0.305	0.3	0.3

As we can see, depending on the distance aggregation operator used, the optimal choice is different. Note that the lowest value in each method is the optimal result.

If we establish an ordering of the investments, a typical situation if we want to consider more than one alternative, we will get the following orders shown in Table 6. Note that the first alternative in each ordering is the optimal choice.

Table 6: Ordering of the investments

	Ordering
NHD	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 = A_2$
WHD	$A_1 = A_4 \succ A_3 \succ A_2$
OWAD	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$
IOWAD	$A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2$
AIOWAD	$A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$
EIOWAD	$A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$
Median-IOWAD	$A_3 = A_4 \succ A_1 = A_2$
Olympic-IOWAD	$A_2 = A_4 \succ A_3 \succ A_1$

As we can see, depending on the particular type of IMOWAD operator used, the results may lead to different decisions.

7 CONCLUSIONS

We have presented the IMOWAD operator. It is a distance measure that uses the IOWA operator in the Minkowski distance. The main advantage of this operator is that it generalizes a wide range of distances such as the NMD, the WMD, the MOWAD, the IOWAD, the EIOWAD, etc. We have studied some of its main properties.

We have further generalized the IMOWAD operator by using quasi-arithmetic means. We have called it the Quasi-IOWAD. We have also developed an application of the new approach in a decision making problem about selection of investments. We have seen that the main advantage of using the IMOWAD is that it gives a more complete view of the decision problem.

In future research, we expect to develop further extensions of the IMOWAD operator by adding new characteristics in the problem and applying it to other fields.

References

[1] G. Beliakov. Learning Weights in the Generalized OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 4, Pág. 119-130, 2005.

[2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo. *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens. Characte-rization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* 3, Pág. 236-240, 1995.

[5] N. Karayiannis. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks* 11, Pág. 1093-1105, 2000.

[6] J.M. Merigó. *New extensions to the OWA operators and their application in business decision making*, Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.

[7] J.M. Merigó, M. Casanovas. Decision making with distance measures and induced aggregation operators, In *Proceedings of the FLINS 2008 Conference*, Madrid, Spain, (accepted).

[8] J.M. Merigó, M. Casanovas. Induced aggregation operators in the Euclidean distance, In *Proceedings of the FUR 2008 Conference*, Barcelona, Spain, (submitted).

[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente. Using the OWA operator in the Minkowski distance, International *Journal of Computer Science*, (submitted).

[10] Z.S. Xu. An overview of methods for determining OWA weights, *International Journal of Intelligent Systems* 20, Pág. 843-865, 2005.

[11] Z.S. Xu, Q.L. Da. An overview of operators for aggregating the information, *International Journal of Intelligent Systems* 18, Pág. 953-969, 2003.

[12] R.R. Yager. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 18, Pág. 183-190, 1988.

[13] R.R. Yager. Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* 59, Pág. 125-148, 1993.

[14] R.R. Yager. Induced aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* 137, Pág. 59-69, 2003.

[15] R.R. Yager. Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* 3, Pág. 93-107, 2004.

[16] R.R. Yager, D.P. Filev. Induced ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* 29, Pág. 141-150, 1999.

[17] R.R. Yager, J. Kacprzyk. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, 1997.

14.1.38. Artículo de congreso 38. – Publicado en FLINS 2008

THE INDUCED LINGUISTIC GENERALIZED OWA OPERATOR

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, Barcelona, 08034, Spain

Abstract

We introduce a new generalization of the OWA operator called the induced linguistic generalized OWA (ILGOWA) operator. It is an extension that uses the main characteristics of three well-known aggregation operators: the IOWA, the LOWA and the GOWA operator. Therefore, in the same formulation, this operator uses linguistic information, generalized means and order inducing variables to reorder the arguments. Note that this generalization can be seen as a first step in the process of generalizing the LOWA operator with generalized means because other linguistic models can be considered. One of its main results is that it includes a wide range of linguistic aggregation operators such as the induced linguistic OWA (ILOWA), the induced linguistic OWG (ILOWG) and the linguistic generalized OWA (LGOWA). We further generalize the ILGOWA operator by using quasi-arithmetic means.

Introduction

The ordered weighted averaging (OWA) operator [12] is a very well-know aggregation operator for fusing numerical information [1,6]. However, we may find situations where the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with numerical values. Then, it is necessary to use another approach such as a qualitative one that uses linguistic assessments. In the literature, we find different types of OWA operators that use linguistic information [3-4,6,8-11]. In this paper, we will follow the ideas of the induced linguistic OWA (ILOWA) [11] and the induced linguistic OWG (ILOWG) operator [10]. Note that these operators represent a linguistic version of the induced aggregation operators [14].

Another interesting extension of the OWA operator is the generalization that uses generalized means and quasi-arithmetic means. These types of aggregations are known as the generalized OWA (GOWA) operator [5,13] and the Quasi-OWA operator [2]. They generalize a wide range of aggregation operators such as the average, the OWA and the OWG operator. Recently, Merigó and Gil-Lafuente [7] have suggested a generalization of the IOWA operator by using generalized means. This operator is known as the induced generalized OWA (IGOWA) operator and it generalizes a wide range of aggregation operators such as the OWA and the IOWA operator. Note that a further generalization is possible by using quasi-arithmetic means (Quasi-IOWA operator).

Going a step further, in this paper we present the induced linguistic generalized OWA (ILGOWA) operator. It represents an extension of the IGOWA operator for the cases where the available information is assessed with linguistic variables. Then, we are able to generalize a wide range of linguistic operators such as the ILOWA, the LOWA, the LWA, the linguistic generalized mean (LGM), the linguistic weighted generalized mean (LWGM), the linguistic GOWA (LGOWA), etc. We will also present a further generalization of the ILGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call it the Quasi-ILOWA operator. Note that different approaches have been developed for dealing with linguistic information [3-4,8-11,15]. In this paper, we will focus on the ideas of [9-11] where we are able to compute with words directly. Then, we should note that this generalization can be seen as a first step in the process of generalizing the LOWA operator with generalized means because further generalizations with other linguistic models are possible.

This paper is organized as follows. Section 2 presents some basic concepts. In Section 3, we present the ILGOWA operator. Section 4 introduces the Quasi-ILOWA operator and Section 5 summarizes the main conclusions of the paper.

Preliminaries

Linguistic Approach

Many problems of the real world cannot be assessed in a quantitative form. Instead, it is possible to use a qualitative one, i.e., with vague or imprecise knowledge that uses linguistic assessments instead of numerical values [15].

We have to select the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantics. For example, a set of seven terms S could be given as follows:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M, s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Note that *N = None*, *VL = Very low*, *L = Low*, *M = Medium*, *H = High*, *VH = Very high*, *P = Perfect*. Usually, it is required that there exists:

1. A negation operator: Neg(s_i) = s_j such that $j = g+1-i$.
2. The set is ordered: $s_i \leq s_j$ if and only if $i \leq j$.

Different approaches have been developed for dealing with linguistic information such as [3-4,8-11,15]. In this paper, we will follow the ideas of [9-11]. Then, in order to preserve all the given information, we extend the discrete linguistic term set S to a continuous linguistic term set $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t,\ \alpha \in [1, t]\}$, where, if $s_\alpha \in S$, we call s_α the original linguistic term, otherwise, we call s_α the virtual linguistic term.

Induced Linguistic OWA Operator

The ILOWA operator [11] is an extension of the OWA operator that uses linguistic information and inducing variables in the reordering of the arguments.

Definition 1. *An ILOWA operator of dimension n is a mapping ILOWA: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$ILOWA(\langle u_1, s_{\alpha_1}\rangle, \langle u_2, s_{\alpha_2}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{\alpha_n}\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{1}$$

where s_{β_j} *is the* s_{α_i} *value of the ILOWA pair* $\langle u_i, s_{\alpha_i}\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable and* s_{α_i} *is the linguistic variable.*

Induced Generalized OWA Operator

The IGOWA operator [7] is a generalization of the IOWA operator by using generalized means. It is defined as follows.

Definition 2. *An IGOWA operator of dimension n is a mapping IGOWA:* $R^n \rightarrow R$, *which has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$IGOWA(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j *is the* a_i *value of the IGOWA pair* $\langle u_i, a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* a_i *is the argument variable and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Induced Linguistic Generalized OWA Operator

The ILGOWA operator is an extension of the IGOWA operator for the cases where the information cannot be assessed with numerical values and it is necessary to use another approach such as a qualitative one that uses linguistic assessments. Note that the ILGOWA operator can also be seen as an aggregation operator that uses the main characteristics of three well-known aggregation operators: the LOWA, the IOWA and the GOWA operator.

Definition 3. *An ILGOWA operator of dimension n is a mapping ILGOWA:* $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, *which has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$ILGOWA(\langle u_1, s_{\alpha_1}\rangle, \langle u_2, s_{\alpha_2}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{\alpha_n}\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where s_{β_j} *is the* s_{α_i} *value of the ILGOWA pair* $\langle u_i, s_{\alpha_i}\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* s_{α_i} *is the linguistic variable and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that it is possible to distinguish between descending (DILGOWA) and ascending (AILGOWA) orders. The ILGOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

Another interesting issue is the problem of ties in the order inducing variables. As it was explained in [14], the easiest way to solve this problem consists in replacing each argument of the tied inducing variables by its LGM.

The ILGOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes the linguistic average (LA), the linguistic weighted average (LWA), the LOWA, the ILOWA, the LGM, the LWGM, the LGOWA and the ILOWG operator, among others.
In order to study these families, we can analyze the weighting vector *W* or the parameter λ. If we analyze the weighting vector *W*, then, we will find similar results as in other types of OWA operators [6]. For example, if $w_j = 1/n$, we will get the LGM. If we analyze the parameter λ, we will find similar results as in other types of GOWA operators. For example, if $\lambda = 1$, then, we get the ILOWA operator; if $\lambda = 0$, we get the ILOWG; if $\lambda = 2$, the induced linguistic ordered weighted quadratic averaging (ILOWQA) operator and if $\lambda = -1$, the induced linguistic ordered weighted harmonic averaging (ILOWHA) operator.

Analysing the applicability of the ILGOWA operator, we can see that it is applicable to similar situations already discussed in other types of induced aggregation operators where it is possible to use linguistic information. For example, we could use it in different decision making problems, etc.

Quasi-ILOWA Operator

The induced linguistic ordered weighted quasi-arithmetic averaging (Quasi-ILOWA) operator is a further generalization of the ILGOWA operator by using quasi-arithmetic means.

Definition 4. *A Quasi-ILOWA operator of dimension n is a mapping QILOWA:* $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, *which has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$QILOWA(\langle u_1, s_{\alpha_1}\rangle, \langle u_2, s_{\alpha_2}\rangle, \ldots, \langle u_n, s_{\alpha_n}\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(s_{\beta_j})\right) \tag{4}$$

where s_{β_j} *is the* s_{α_i} *value of the QILOWA pair* $\langle u_i, s_{\alpha_i}\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* s_{α_i} *is the linguistic variable and g is a general continuous strictly monotonic function.*

As we can see, the ILGOWA operator is a particular case of the Quasi-ILOWA when $g(s) = s^{\lambda}$. Note that all the properties commented in the ILGOWA operator are also applicable in this case such as the distinction between descending and ascending orders, the problem of ties, etc.

Conclusions

We have introduced the ILGOWA operator. It is a generalization that uses order inducing variables, linguistic information and generalized means. We have analyzed some of its main properties. We have seen that it generalizes a wide range of linguistic aggregation operators such as the LGM, the LGOWA and the LOWA operator. Finally, we have developed a further generalization by using quasi-arithmetic means, obtaining the Quasi-ILOWA operator.

References

1. G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007).
2. J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **3** (1995) 236-240.
3. F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, *Inform. Sci.* **85** (1995) 223-239.
4. F. Herrera and L. Martínez, A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8** (2000) 746-752.
5. N. Karayiannis, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Trans. Neural Networks* **11** (2000) 1093-1105.
6. J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA operators and their application in business decision making* (Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007).
7. J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, in: *Proc. of the 5th EUSFLAT Conference*, Ostrava, Czech Republic, 2007, vol. 2, pp. 463-470.
8. J.H. Wang, J. Hao, A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14** (2006) 435-445.
9. Z.S. Xu, EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **12** (2004) 791-810.
10. Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and the induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, *Decision Support Syst.* **41** (2006) 488-499.
11. Z.S. Xu, Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, *Inform. Fusion* **7** (2006) 231-238.
12. R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **18** (1988) 183-190.
13. R.R Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **3** (2004) 93-107.
14. R.R. Yager and D.P. Filev, Induced Ordered Weighted Averaging Operators, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **29** (1999) 141-150.
15. L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1, *Inform. Sci.* **8** (1975) 199-249, Part 2, *Inform. Sci.* **8** (1975) 301-357, Part 3, *Inform. Sci.* **9** (1975) 43-80.

14.1.39. Artículo de congreso 39. – Publicado en FLINS 2008

DECISION MAKING WITH DISTANCE MEASURES AND INDUCED AGGREGATION OPERATORS

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, Barcelona, 08034, Spain

Abstract
We develop a new decision making method by using distance measures and induced aggregation operators. We introduce a new aggregation operator called the induced ordered weighted averaging distance (IOWAD) operator. We study its definition and some of its main properties. We apply this aggregation operator in a business decision making problem. We focus on an investment selection problem.

Introduction

In the literature, we find a wide range of methods for decision making [2-3,7]. A very useful technique for doing this is the Hamming distance [4] and more generally all the distance measures [3-7,11]. The main advantage of using distance measures in decision making is that we can compare the alternatives of the problem with some ideal result [3]. Then, by doing this comparison, the alternative with a closest result to the ideal is the optimal choice.

Usually, when using distance measures in decision making, we normalize it by using the arithmetic mean or the weighted average (WA). Sometimes, it would be interesting to consider the possibility of parameterizing the results from the maximum distance to the minimum distance. The ordered weighted averaging (OWA) operator is a very useful technique for aggregating the information providing a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, among others [1,7-10,12-14]. The use of the OWA operator in different types of distance measures have been studied in [5,7].

In this paper, we suggest the use of the induced OWA (IOWA) operator [14] in decision making with distance measures. Then, we will be able to formulate a more general model by using order inducing variables in the reordering process. For doing this, we will introduce a new aggregation operator: the induced ordered weighted averaging distance (IOWAD) operator. Note that it is possible to generalize this aggregation operator by using generalized means following the ideas of [10]. Note also that the IOWAD operator is applicable to other situations in fuzzy set theory, in operational research, etc.

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some basic concepts to be used in the paper. In Section 3, we introduce the IOWAD operator. In Section 4, we develop an application of the new aggregation operator in decision making. Finally, in Section 5 we summarize the main conclusions of the paper.

Preliminaries

The Hamming distance is a useful technique for calculating the distance between two elements, two sets, etc. For example, the weighted Hamming distance (WHD) between two sets $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ and $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$, can be defined as follows.

Definition 1. *A weighted Hamming distance of dimension n is a mapping WHD:* $R^n \times R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W such that* $w_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1*, then:*

$$d_{WHD}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} w_i \left| x_i - y_i \right| \tag{1}$$

where x_i *and* y_i *are the ith arguments of the sets X and Y.*

Note that if $x_i = y_i$ for all $i \in [1, n]$, then, $d(X, Y) = 0$. Note also that $d(X, Y) = d(Y, X)$.

The OWA operator [12] is an aggregation operator that provides a parameterized family of operators that include the maximum, the minimum and the average, among others [7,13]. It can be defined as follows.

Definition 2. *An OWA operator is a mapping OWA*: $R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1*, then*:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j *is the jth largest of the* a_i.

The IOWA operator [14] is an extension of the OWA operator that generalizes the reordering process by using order inducing variables. It can be defined as follows:

Definition 3. *An IOWA operator is a mapping IOWA*: $R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1*, then*:

$$IOWA(\langle u_1, a_1\rangle, \langle u_2, a_2\rangle, \ldots, \langle u_n, a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j *is the* a_i *value of the IOWA pair* $\langle u_i, a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable and* a_i *is the argument variable.*

The Induced Ordered Weighted Averaging Distance Operator

The IOWAD operator is a distance measure that uses the IOWA operator in the normalization process. Then, the reordering of the individual distances is developed with order inducing variables. It can be defined as follows for two sets X and Y.

Definition 4. *An IOWAD operator is a mapping IOWAD*: $R^n \times R^n \to R$ *that has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, *then*:

$$IOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4}$$

where b_j *is the* $|x_i - y_i|$ *value of the IOWAD triplet* $\langle u_i, x_i, y_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable and* $|x_i - y_i|$ *is the argument variable represented in the form of individual distances*.

The IOWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that $IOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = 0$ if and only if $x_i = y_i$

for all $i \in [1, n]$. Note also that $IOWAD(\langle u_1, x_1, y_1\rangle, \langle u_2, x_2, y_2\rangle, \ldots, \langle u_n, x_n, y_n\rangle) = IOWAD(\langle u_1, y_1, x_1\rangle, \langle u_2, y_2, x_2\rangle, \ldots, \langle u_n, y_n, x_n\rangle)$.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DIOWAD) and ascending (AIOWAD) orders.

A further interesting issue is the problem of ties in the reordering process of the order inducing variables. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy explained in [14] about replacing the tied arguments by their average. Note that in this case, it would mean that we are replacing the tied arguments by their normalized Hamming distance.

By using a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different particular cases such as the normalized Hamming distance (NHD), the weighted Hamming distance (WHD), the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator, the step-IOWAD, the window-IOWAD, the median-IOWAD, the olympic-IOWAD, the centered-IOWAD, etc.

For example, if $w_j = 1/n$, we will get the NHD. If the ordered position of the u_i is the same than the ordered position of the a_i, then, we get the WHD. And if the ordered position of the u_i is the same than the ordered position b_j such that b_j is the jth largest of the a_i, then, we get the OWAD operator.

Application in financial decision making

In the following, we are going to develop a numerical example of the new approach. We will develop an application in financial decision making.

Assume a decision maker wants to invest some money in a company. After analyzing the market he considers four possible alternatives.

1) Invest in a chemical company called A_1.
2) Invest in a food company called A_2.
3) Invest in a computer company called A_3.
4) Invest in a car company called A_4.

After careful review of the information, the decision maker establishes the following general information about the investments. He has summarized the information of the investments in five general characteristics with the following results. Note that the results are valuations between 0 and 1.

Table 1. Characteristics of the investments.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A_1	0.8	0.7	0.5	0.6	0.8
A_2	0.9	0.5	0.7	0.7	0.7
A_3	0.8	0.6	0.9	0.6	0.8
A_4	0.4	0.8	0.9	0.6	0.7

According to the objectives of the decision maker, he establishes the following ideal investment. The results are shown in Table 2.

Table 2. Ideal investment.

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
I	0.9	0.8	1	0.7	0.9

With this information, it is possible to develop different methods for selecting an investment. In this example, we will consider the IOWAD and the AIOWAD operator and two special cases, the OWAD and the AOWAD operator. We assume the following weighting vector $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results.

	OWAD	AOWAD	IOWAD	AIOWAD
A_1	0.14	0.22	0.14	0.22
A_2	0.13	0.19	0.18	0.14
A_3	0.11	0.13	0.12	0.12
A_4	0.12	0.20	0.19	0.13

As we can see, the best alternative is A_3 because it has the lowest distance to the ideal investment. If we try to order the investments, a typical situation if we want to consider more than one alternative, we will get for the following order. For the OWAD and for the AIOWAD operator, we get $A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1$. With the AOWAD we get $A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$ and with the IOWAD, $A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$.

Conclusions

We have introduced a new method for decision making that we have applied in a financial problem. This new approach consists in using distance measures and induced aggregation operators in the same formulation. Then, we have developed the IOWAD operator as a general aggregation operator that also includes the normalized and the weighted Hamming distance as particular cases. We have studied some of its main properties. The main advantage of this method is the possibility of using IOWA operators in distance measures. Then, we are able to use inducing orders in the aggregation of the individual distances.

In this paper, we have focused on the use of the IOWAD operator in decision making. But it is also interesting to note that this distance measure is useful in a lot of other applications previously discussed with the normalized and the weighted Hamming distance such as in fuzzy set theory, operational research, etc. Also note that it is possible to generalize it by using generalized and quasi-arithmetic means.

References

1. G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners* (Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 2007).
2. J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys* (Springer, Boston, 2005).
3. J. Gil-Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty* (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998).
4. R.W. Hamming, Error-detecting and error-correcting codes, *Bell Systems Technical Journal* **29** (1950) 147-160.
5. N. Karayiannis, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Trans. Neural Networks* **11** (2000) 1093-1105.
6. A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, (Academic Press, New York, 1975).
7. J.M. Merigó, *New extensions to the OWA operators and their application in business decision making* (Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007).
8. J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced aggregation operators in decision making with the Dempster-Shafer belief structure, *Working papers in Economics* **184** (University of Barcelona, 2007).
9. J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Econom. Rev.* **12** (2007) 35-50.
10. J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, in: *Proc. of the 5th EUSFLAT Conference*, Ostrava, Czech Republic, 2007, vol. 2, pp. 463-470.
11. E. Szmidt, J. Kacprzyk, Distances between intuitionistic fuzzy sets, *Fuzzy Sets Syst.* **114** (2000) 505-518.
12. R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **18** (1988) 183-190.
13. R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets Syst.* **59** (1993) 125-148.
14. R.R. Yager and D.P. Filev, Induced Ordered Weighted Averaging Operators, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **29** (1999) 141-150.

14.1.40. Artículo de congreso 40. – Publicado en FLINS 2008

DECISION MAKING WITH DEMPSTER-SHAFER BELIEF STRUCTURE USING THE 2-TUPLE LINGUISTIC REPRESENTATION MODEL

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, Barcelona, 08034, Spain

Abstract

We develop a new approach for linguistic decision making with Dempster-Shafer (D-S) belief structure by using the 2-tuple linguistic representation model. Then, we are able to represent the D-S problem with linguistic information and without loss of information in the computing process. For doing this, we suggest the use of different types of linguistic aggregation such as the 2-tuple linguistic ordered weighted averaging (2-TOWA) operator. Then, we will obtain the belief structure - 2-tuple linguistic ordered weighted averaging (BS-2-TOWA) operator.

Introduction

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence [2,10] provides a unified framework for representing uncertainty because it includes the cases of risk and ignorance in the same formulation. Usually, when using the D-S theory in decision making, it is assumed that the available information is numerical [3,7-8,14]. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the information is vague or imprecise and it is necessary to use another approach to assess it such as the use of linguistic variables. This problem has already been considered in [9] when the available information can be assessed with a linguistic model that computes with words directly following the ideas of [12].

In this paper, we further extend the analysis done in [9] considering a situation where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use the 2-tuple linguistic representation model. Then, we assume that we have a decision making problem where we assess the available probabilistic information with the D-S theory and the linguistic information using the 2-tuple linguistic model. Note that the 2-tuple approach was introduced in [5] to facilitate computing with words (CW) processes.

In order to aggregate the linguistic information, we will use different types of linguistic aggregation operators described in [5]. The reason for doing this is that we want to show that the linguistic decision making problem with D-S theory can be modeled in different ways depending on the interests of the decision maker. We will use the 2-tuple linguistic ordered weighted averaging (2-TOWA) operator [5] and all its particular cases such as the 2-tuple linguistic average (2-TA), the 2-tuple linguistic weighted average (2-TWA), etc. Then, we will get a new aggregation operator, the belief structure – 2-tuple OWA (BS-2-TOWA) operator.

The remainder of the paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some basic concepts about the 2-tuple linguistic representation model and the D-S theory. In Section 3, we introduce the new decision making approach. In Section 4 we end the paper summarizing the main conclusions.

Preliminaries

The 2-Tuple Linguistic Representation Model

In [5], Herrera and Martínez developed a fuzzy linguistic representation model, which represents the linguistic information with a pair of values called 2-tuple, (s, α), where s is a linguistic label and α is a numerical value that represents the value of the symbolic translation. With this model, it is possible to accomplish CW processes without loss of information, solving one of the main limitations of the previous linguistic models [1,4,15].

Definition 1. *Let β be the result of an aggregation of the indexes of a set of labels assessed in the linguistic label set $S = \{s_0, s_1, \dots, s_g\}$, i.e., the result of a symbolic aggregation operation. $\beta \in [0, g]$, being $g + 1$ the cardinality of S. Let $i = round(\beta)$ and $\alpha = \beta - i$ be two values, such that, $i \in [0, g]$ and $\alpha \in [-0.5, 0.5)$, then α is called a symbolic translation.*

Note that the 2-tuple (s_i, α) that expresses the equivalent information to β is obtained with the following function:

$$\Delta : [0, g] \rightarrow S \times [-0.5, 0.5), \quad \Delta(\beta) = \begin{cases} s_i & i = round(\beta), \\ \alpha = \beta - i & \alpha \in [-0.5, 0.5). \end{cases} \tag{1}$$

where round is the usual round operation, s_i has the closest index label to β and α is the value of the symbolic translation. For further information on the 2-tuple linguistic representation model, see for example [5,6,11].

2-Tuple Linguistic Aggregation Operators

Among the wide range of 2-tuple linguistic aggregation operators, in this paper, we will focus on the 2-tuple OWA (2-TOWA). The 2-TOWA is an extension of the OWA operator [13] for situations where the available information can be assessed with the 2-tuple linguistic representation model.

Definition 2. *Let $\hat{S}$ be the set of the 2-tuples. A 2-TOWA operator of dimension n is a mapping $f: \hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$f((s_1, \alpha_1), (s_2, \alpha_2), \dots, (s_n, \alpha_n)) = \Delta\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \beta_j^*\right) \tag{2}$$

where β_j^* *is the jth largest of the* β_i *values. Note that* β_i *is represented in the definition with the 2-tuples* (s_i, α_i).

Note that it is possible to distinguish between descending (2-TDOWA) and ascending (2-TAOWA) orders. And it is also possible to study a wide range of families of 2-TOWA operators. For further information, see [7].

Dempster-Shafer Theory of Evidence

The D-S theory of evidence [2,10] provides a unifying framework for representing the uncertainty as it can include the cases of risk and ignorance as special situations of this framework.

Definition 3. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of r nonnull subsets of X,* B_j *for j* = 1,…,*r, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m:* $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

1. $m(A) = 0$, *for all A different to* $B_1, \ldots, B_r$.
2. $\sum_{j=1}^{r} m(B_j) = 1$.

For more information on the D-S theory, see for example [2-3,8-10,14].

Decision Making with D-S Theory using the 2-Tuple Linguistic Representation Model

In this Section, we develop the process to follow when using the D-S theory in decision making with the 2-tuple linguistic representation model. We will use the 2-TOWA operator for aggregating the information although it is possible to use other types of 2-tuple linguistic aggregation operators.

Decision Making Approach

The problem of decision making with D-S belief structures has been studied by different authors such as [3,7-9,14]. In this paper, we develop an extension of this general approach for situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use the 2-tuple linguistic representation model. Then, we are able to make computations with linguistic information without losing information in the problem. We can summarize the approach as follows.

Assume we have a linguistic decision problem in which we have a collection of alternatives {$A_1, \ldots, A_q$} with states of nature {$N_1, \ldots, N_n$}. (s_{ih}, α_{ih}) is the 2-tuple linguistic payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is N_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure *m* with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the 2-tuple linguistic payoff to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the 2-tuple linguistic payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature and the decision makers degree of optimism. Note that for the 2-TOWA operator we use the same measure than [13] for calculating the attitudinal character.

Step 3: Calculate the collection of weights, w, to be used in the 2-TOWA aggregation for each different cardinality of focal elements.

Step 4: Determine the 2-tuple linguistic payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{(s_{ih}, \alpha_{ih}) \mid N_h \in B_k\}$.

Step 5: Calculate the linguistic aggregated payoff, V_{ik} = 2-TOWA(M_{ik}), using Eq. (2), for all the values of i and k. Note that it is possible to use for each focal element a different type of 2-TOWA operator.

Step 6: For each alternative, calculate the generalized 2-tuple linguistic expected value, (s_i, α_i), where:

$$(s_i, \alpha_i) = \sum_{k=1}^{r} V_{ik}\, m(B_k) \tag{3}$$

Step 7: Select the alternative with the largest (s_i, α_i) as the optimal.

The 2-Tuple OWA Operator in Belief Structures

Analyzing the aggregation in *Steps* 6 and 7, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. Then, the result obtained is that the focal weights are aggregating the results obtained by using the 2-TOWA operator. We will call this process the belief structure - 2-TOWA (BS-2-TOWA) aggregation and it can be defined as follows.

Definition 4. *A BS-2-TOWA operator is defined by*

$$(s_i, \alpha_i) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k)\, w_{j_k} \beta^*_{j_k} \tag{4}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, $\beta^*_{j_k}$ *is the* j_k*th largest of the* (s_{i_k}, α_{i_k}), (s_{i_k}, α_{i_k}) *is the argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment. Note that* q_k *refers to the cardinality of each focal element and* r *is the total number of focal elements.*

The BS-2-TOWA operator accomplishes the typical properties of the mean operators such as commutativity, monotonicity, boundedness and idempotency and it provides a wide range of special cases.

Conclusions

We have developed a new approach for decision making with D-S theory when the available information can be assessed with the 2-tuple linguistic representation model. We have used the 2-TOWA operator for aggregating the information because it provides a parameterized family of 2-tuple linguistic aggregation operators. As a result we have obtained a new aggregation operator, the BS-2-TOWA operator. In future research, we expect to develop further extensions to this approach by using other types of aggregation operators.

References

1. H. P. Bonissone, A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications, in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., *Approximate Reasoning in Decision Analysis*, (North-Holland, 1982) 329-339.
2. A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Ann. Math. Statist.* **38** (1967) 325-339.
3. K.J. Engemann, H.E. Miller and R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, *Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **4** (1996) 1-26.
4. F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, *Inform. Sci.* **85** (1995) 223-239.
5. F. Herrera and L. Martínez, A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8** (2000) 746-752.
6. F. Herrera and L. Martínez, The 2-tuple Linguistic Computational Model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **9** (2001) 33-48.
7. J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA operators and their application in business decision making* (Unpublished thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona).
8. J.M. Merigó and M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory using induced aggregation operators, in: *Proc. 4th Int. Summer School on AGOP*, Ghent, Belgium, 2007, pp. 95-100.
9. J.M. Merigó, M. Casanovas and L. Martínez, Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence, in: *Proc. 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, 2007, pp. 658-671.
10. G. Shafer, *Mathematical Theory of Evidence* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976).
11. J.H. Wang, J. Hao, A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **14** (2006) 435-445.
12. Z.S. Xu, EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **12** (2004) 791-810.
13. R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **18** (1988) 183-190.
14. R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, *Int. J. General Syst.* **20** (1992) 233-245.

14.1.41. Artículo de congreso 41. – Publicado en MDAI 2008

The uncertain induced generalized OWA operator

José M. Merigó, and Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain
jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Abstract. We present the uncertain induced generalized OWA (UIGOWA) operator. It is an extension of the OWA operator that uses the main characteristics of the induced OWA (IOWA), the generalized OWA (GOWA) and the uncertain OWA (UOWA) operator. Then, this generalization uses generalized means, order inducing variables in the reordering process and uncertain information represented by interval numbers. A key feature of the UGOWA operator is that it generalizes a wide range of OWA operators such as the UOWA, the GOWA, the UIOWA, the uncertain induced ordered weighted geometric (UIOWG) and the uncertain induced ordered weighted quadratic averaging (UIOWQA) operator. We further generalize the UIGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-UIOWA operator. We end the paper with an application of the new approach in a decision making problem.

Keywords: OWA operator; Aggregation operators; Decision making; Generalized means; Interval numbers.

1 Introduction

The ordered weighted averaging (OWA) operator [18] is a very well-known aggregation operator that provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, as special cases. Since its appearance, the OWA operator has been receiving increasing attention by a lot of authors and it has been applied in a lot of fields [1-5,7-8,10-22].

Among the different extensions of the OWA operator, in this paper we will focus on the induced OWA (IOWA), the uncertain OWA (UOWA) and the generalized OWA (GOWA) operator. The IOWA operator [21] is an extension of the OWA operator that uses order inducing variables in the reordering step of the arguments. The UOWA operator [17] is a very useful operator for uncertain situations where the information can not be assessed with exact numbers or singletons. Therefore, it is necessary to use another approach for representing the information such as the interval numbers. The generalized OWA (GOWA), [8,20] is a generalization that uses generalized means in the OWA operator. Then, this operator includes a wide range of mean operators such as the OWA, the ordered weighted geometric (OWG) operator, the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator, the generalized mean, etc. For further research on these extensions, see for example [1-5,7-8,10,13-16].

The aim of this paper is to present the uncertain induced generalized OWA (UIGOWA) operator. It is an aggregation operator that uses the main characteristics of three well-known OWA operators: the UOWA, the IOWA and the GOWA operator. Therefore, it uses uncertain information represented in the form of interval numbers, order inducing variables and generalized means. The UIGOWA is very useful because it can deal with uncertain situations at the same it is considering complex attitudinal characters of the decision maker and generalized means. Moreover, the UIGOWA generalizes a wide range of mean operators such as the UOWA, the UIOWA, the UGOWA, the IGOWA, the uncertain generalized means (UGM), etc. We will study some of its main properties.
We will further generalize the UIGOWA by using quasi-arithmetic means. The result will be the Quasi-UIOWA operator. It includes the UIGOWA as a particular case and it considers a lot of other situations.
We will also develop an application of the UIGOWA operator in a decision making problem. We will focus on the selection of investments. The main advantage of the UIGOWA operator is that it gives a complete view of the decision problem by considering different particular types of UIGOWA. Then, depending on the interests of the decision maker, he will select a different type of UIGOWA operator that will lead to different results and decisions.
This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts about the interval numbers, the UIOWA and the GOWA operator. In Section 3, we present the UIGOWA operator. Section 4 analyzes different particular cases of the UIGOWA operator. Section 5 introduces the Quasi-UIOWA operator and Section 6 develops a numerical example. In Section 7 we end the paper summarizing the main findings of the paper.

2 Preliminaries

In this Section, we briefly review some basic concepts about the interval numbers, the UOWA, the IOWA and the GOWA operator.

2.1 Interval numbers

The interval numbers [9] are a very useful and simple technique for representing the uncertainty. It has been used in an astonishingly wide range of applications.

The interval numbers can be expressed in different forms. For example, if we assume a 4-tuple (a_1, a_2, a_3, a_4), that is to say, a quadruplet; we could consider that a_1 and a_4 represents the minimum and the maximum of the interval number, and a_2 and a_3, the interval with the highest probability or possibility, depending on the use we want to give to the interval numbers. Note that $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. If $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the interval number is an exact number; if $a_2 = a_3$, it is a 3-tuple known as triplet; and if $a_1 = a_2$ and $a_3 = a_4$, it is a simple 2-tuple interval number.

In the following, we are going to review some basic interval number operations as follows. Let A and B be two triplets, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.
4) $A \times B = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3)$; for R^+.
5) $A \div B = (a_1 \div b_3, a_2 \div b_2, a_3 \div b_1)$; for R^+.

Note that other operations could be studied [9] but in this paper we will focus on these ones.

2.2 UIOWA operator

The uncertain induced OWA operator was introduced by [13]. It is an extension of the OWA operator [4-5,11,19-22] that uses the main characteristics of two well known aggregation operators: the induced OWA [21] and the uncertain OWA operator [17]. Then, it uses interval numbers for representing the uncertain information and a reordering process that it is based on order inducing variables. It can be defined as follows:

Definition 1. Let Ω be the set of interval numbers. An UIOWA operator of dimension n is a mapping UIOWA: $\Omega^n \to \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$UIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad \textbf{(1)}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the UIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable represented in the form of interval numbers.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DUIOWA) and ascending (AUIOWA) orders. Note that in this case, it is not necessary to compare interval numbers because the reordering step is developed with order inducing variables. The only case where we need to compare interval numbers is in the final result. For doing this, we will use the following criteria. First, we will analyze if there is an order between the interval numbers. If not, we will calculate an average of the interval number. For example, if $n = 2$, $(a_1 + a_2) / 2$; if $n = 3$, $(a_1 + 2a_2 + a_3) / 4$; etc. If there is still a tie, then, we will follow a subjective criterion such as considering only the minimum, the maximum, etc.

Note also that different families of UIOWA operators can be studied by choosing a different weighting vector such as the step-UIOWA operator, the window-UIOWA, the median-UIOWA, the olympic-UIOWA, the centered-UIOWA, the S-UIOWA, etc.

2.3 GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced in [8,20]. It generalizes a wide range of aggregation operators that includes the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. It can be defined as follows.

Definition 2. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA{:}R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \qquad \textbf{(2)}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in [8,20], the GOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that it has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean, the weighted generalized mean, the OWA operator and a lot of other particular cases.

3 The uncertain induced generalized OWA operator

The uncertain induced generalized OWA (UIGOWA) operator is an extension of the GOWA operator that uses uncertain information in the aggregation represented in the form of interval numbers. The reason for using this operator is that sometimes, the uncertain factors that affect our decisions are not clearly known and in order to assess the problem we need to use interval numbers. The interval number is a very useful technique in decision making because it considers the different uncertain results that could happen in the future. This operator also uses a reordering process based on order inducing variables. It can be defined as follows.

Definition 3. Let Ω be the set of interval numbers. An UIGOWA operator of dimension n is a mapping UIGOWA: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \qquad (3)$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the UIGOWA pair $\langle u_i,\tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, $\tilde{a}_i$ is the argument variable represented in the form of interval numbers and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that different types of interval numbers could be used in the aggregation such as 2-tuples, triplets, quadruplets, etc.

When using interval numbers in the OWA operator, we have the additional problem of how to reorder the arguments. But in the UIGOWA operator, this is not a problem because the reordering process is developed with order inducing variables and it is independent of the values of the arguments.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending UIGOWA (DUIGOWA) and the ascending UIGOWA (AUIGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUIGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUIGOWA operator.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the UIGOWA operator can be expressed as:

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \qquad (4)$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the UIGOWA operator can be expressed as:

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (5)$$

The UIGOWA is monotonic, commutative, bounded and idempotent. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then, $UIGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \geq UIGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $UIGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = UIGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$, where $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n)$. It is bounded because the UIGOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\mathrm{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq UIGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \leq \mathrm{Max}\{\tilde{a}_i\}$. It is idempotent because if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then, $UIGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

Another interesting issue when analysing the UIGOWA operator is the problem of ties in the order inducing variables. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy explained in [21]. Basically, the idea is to replace each argument of the tied inducing variables by its uncertain generalized mean. Then, different types of means may be used to replace the arguments depending on the parameter λ.

Note also that different kinds of attributes may be used for the order inducing variables of the UIGOWA operator with the only requirement of having a linear ordering [21].

4 Families of UIGOWA operators

In this Section, we analyze different families of UIGOWA operators. We distinguish between those families found in the weighting vector W and those found in the parameter λ.

4.1 Analysing the weighting vector *W*

By using a different weighting vector in the UIGOWA operator, we are able to obtain a wide range of uncertain aggregation operators. For example, we could obtain the uncertain maximum, the uncertain minimum, the UGM, the uncertain weighted generalized mean (UWGM) and the UGOWA operator.

The uncertain maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Max}\{\tilde{a}_i\}$. The uncertain minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Min}\{\tilde{a}_i\}$. The UGM is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The uncertain weighted generalized mean (UWGM) is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the UGOWA operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $\tilde{a}_i$.

Other families of UIGOWA operators could be used in the aggregation by choosing a different manifestation of the weighting vector. For example, we could analyze the step-UIGOWA, the window-UIGOWA, the median-UIGOWA, the olympic-UIGOWA, the centered-UIGOWA, the S-UIGOWA, etc. For more information, see [1-5,7-8,10-22].

The step-UIGOWA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$ and the window-UIGOWA when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

For the median-UIGOWA, we distinguish between two cases. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument $\tilde{a}_i$ with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign, for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i.

The olympic-UIGOWA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Note that the olympic-UIGOWA becomes the olympic-UGOWA if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$ and $u_q = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

A further interesting family is the S-UIGOWA operator. In this case, we can distinguish between three types: the “orlike”, the “andlike”, and the “generalized” S-UIGOWA operator. The generalized S-UIGOWA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{\tilde{a}_i\}$; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, we get the andlike S-UIGOWA and if $\beta = 0$, the orlike S-UIGOWA.

A further family is the centered-UIGOWA operator. It is defined as an aggregation that is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ which is known as softly decaying centered-UIGOWA operator. Note also the possibility of removing the third condition. Then, we shall refer to this type of aggregation as non-inclusive centered-UIGOWA operator.

4.2 Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the UIOWA operator, the uncertain IOWG (UIOWG), the uncertain IOWQA (UIOWQA) and the uncertain induced ordered weighted harmonic averaging (UIOWHA) operator.

When $\lambda = 1$, the UIGOWA operator becomes the UIOWA operator.

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad \textbf{(6)}$$

Note that it is possible to study a wide range of families of UIOWA operators by using a different weighting vector in a similar way as it has been explained in Section 4.1. For example, if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the UA and if the ordered position of b_j is the same than the position of the values u_i, we get the UOWA operator.

When $\lambda = 0$, we get the UIOWG operator.

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \qquad \textbf{(7)}$$

Note that in this case we can also study different families of UIOWG operators such as the uncertain geometric mean or the uncertain OWG (UOWG) operator.

When $\lambda = -1$, we get the UIOWHA operator.

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \qquad \mathbf{(8)}$$

Different families of UIOWHA operators are found by using different weighting vectors such as the uncertain harmonic mean and the uncertain ordered weighted harmonic averaging (UOWHA) operator.

When $\lambda = 2$, we get the UIOWQA operator.

$$UIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2\right)^{1/2} \qquad \mathbf{(9)}$$

In this case, we can also study a wide range of families of UIOWQA operators such as the uncertain quadratic mean and the uncertain OWQA operator.

Note that in all these particular cases it is possible to distinguish between descending and ascending orders.

5 The Quasi-UIOWA operator

Following the methodology explained in [3,7] for the OWA operator, a further generalization of the UIGOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-UIOWA operator. It can be defined as follows.

Definition 4. Let Ω be the set of interval numbers. A Quasi-UIOWA operator of dimension n is a mapping $QUIOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}UIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(b_{(j)}\right)\right) \qquad \mathbf{(10)}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, the arguments $\tilde{a}_i$ are interval numbers and $g(b)$ is a strictly continuous monotonic function.

As we can see, we replace the b^{λ} of the UIGOWA operator with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. Note that in some situations it happens that we can only use positive numbers as the cases explained in the UIGOWA when $\lambda \leq 0$.

Analyzing the reordering step, we also find that the weights of the ascending and descending versions are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the QDUIOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the QAUIOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the UIGOWA operator, are also included in this generalization. Then, we could analyze a wide range of families of Quasi-UIOWA operators such as the Quasi-olympic-UIOWA, the Quasi-median-UIOWA, the Quasi-S-UIOWA, etc.

Note also that the Quasi-UIOWA operator includes a lot of other situations such as the exponential-UIOWA, the radical-UIOWA, etc.

6 Numerical example

In the following, we are going to develop a numerical example about the use of the UIGOWA in a decision making problem. We will focus on the selection of investments. As the environment is very uncertain the group of experts of the company needs to assess the available information with interval numbers. In this example, we will assume that the available information can be assessed with triplets or 3-tuple interval numbers.

We will analyze the results obtained by using different types of uncertain aggregation operators in order to see that depending on the aggregation operator used the decision will be different. We will consider the maximum, the minimum, the UA, the UWA, the UOWA operator, the AUOWA operator, the UIOWA, the AUIOWA, the median-UIOWA and the olympic-UIOWA.

Assume that a company wants to invest some money in another company. After having analyzed the information, the board of directors considers 5 possible investments to follow.

1) A_1: Invest in a car company.
2) A_2: Invest in a chemical company.
3) A_3: Invest in a food company.
4) A_4: Invest in a computer company.
5) A_5: Invest in a TV company.

In order to evaluate these investments, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 6 possible situations for the next year: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in Table 1.

Table 1. Uncertain payoff matrix.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(30,40,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(70,80,90)	(60,70,80)	(50,60,70)
A_2	(50,60,70)	(40,50,60)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_3	(20,30,40)	(30,40,50)	(70,80,90)	(60,70,80)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_4	(30,40,50)	(50,60,70)	(60,70,80)	(40,50,60)	(40,50,60)	(60,70,80)
A_5	(50,60,70)	(40,50,60)	(40,50,60)	(30,40,50)	(70,80,90)	(70,80,90)

In this problem, the experts assume the following weighting vector: $W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3)$. Due to the fact that the attitudinal character is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors, the experts use inducing variables to express it. The results are represented in Table 2.

Table 2. Order inducing variables.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	3	5	6	7	8	9
A_2	2	3	4	8	5	6
A_3	1	7	8	4	9	3
A_4	5	6	7	2	1	4
A_5	7	8	9	2	4	6

With this information, we can aggregate the expected results for each state of nature in order to take a decision. In Table 3 and 4, we present different results obtained by using different types of IGOWA operators.

Table 3. Aggregated results 1.

	Max	Min	UA	UWA	UOWA
A_1	(70,80,90)	(30,40,50)	(48.3,58.3,68.3)	(52,62,72)	(43,53,63)
A_2	(70,80,90)	(30,40,50)	(48.3,58.3,68.3)	(53,63,73)	(44,54,64)
A_3	(70,80,90)	(20,30,40)	(50,60,70)	(55,65,75)	(42,52,62)
A_4	(60,70,80)	(30,40,50)	(46.6,56.6,66.6)	(48,58,68)	(42,52,62)
A_5	(70,80,90)	(30,40,50)	(50,60,70)	(54,64,74)	(44,54,64)

Table 4. Aggregated results 2.

	AUOWA	UIOWA	AUIOWA	Median	Olympic
A_1	(54,64,74)	(43,53,63)	(52,62,72)	(55,65,75)	(52.5,62.5,72.5)
A_2	(53,63,73)	(46,56,66)	(51,61,71)	(40,50,60)	(47.5,57.5,67.5)
A_3	(57,67,77)	(47,57,67)	(50,60,70)	(45,55,65)	(57.5,67.5,77.5)
A_4	(51,61,71)	(46,56,66)	(48,58,68)	(45,55,65)	(55,65,75)
A_5	(56,66,76)	(50,60,70)	(47,57,67)	(60,70,80)	(57.5,67.5,77.5)

If we establish an ordering of the alternatives, a typical situation if we want to consider more than one alternative, then, we get the following results shown in Table 5. Note that the first alternative in each ordering is the optimal choice.

Table 5. Ordering of the investments.

	Ordering		Ordering
Max	$A_1=A_2=A_3=A_5 \succ A_4$	AUOWA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
Min	$A_1=A_2=A_4=A_5 \succ A_5$	UIOWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2=A_4 \succ A_1$
UA	$A_3=A_5 \succ A_1=A_2 \succ A_4$	AUIOWA	$A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_5$
UWA	$A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	Median-UIOWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
UOWA	$A_2=A_5 \succ A_1 \succ A_3=A_4$	Olympic-UIOWA	$A_3=A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the investments may be different. Then, the decision about which investment or investments select may be also different.

7 Conclusions

We have introduced the UIGOWA operator. It is an aggregation operator that generalizes a wide range of uncertain aggregation operators by using the main characteristics of the UOWA, the IOWA and the GOWA operator. Therefore, this operator uses uncertain information given by interval numbers, order inducing variables and generalized means. Moreover, it includes a lot of different types of OWA operators such as the UIOWA, the UGOWA, the UGM, the UIOWG and the UIOWQA operator. We have studied some of its main properties.

We have further generalized the UIGOWA operator by using quasi-arithmetic means. As a result, we have obtained the Quasi-UIOWA operator. It is a wider generalization because it includes the UIGOWA as a particular case, and a lot of other situations.

We have also developed a numerical example of the new approach. We have focused on a decision making problem about selection of investments. The main advantage of the UIGOWA operator in decision making is that it shows a lot of different scenarios that could happen depending on the particular type of UIGOWA used in the problem. Then, the decision maker has a more complete view about the decision problem.

In future research, we expect to develop further extensions of the UIGOWA operator by adding new characteristics in the problem and applying it to other decision making problems.

References

1. Ahn, B.S.: The Uncertain OWA Aggregation with Weighting Functions Having a Constant Level of Orness, Int. J. Intell. Syst. 21, 469--483 (2006)
2. Ahn, B.S.: The OWA aggregation with uncertain descriptions on weights and input arguments, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 15, 1130--1134 (2007)
3. Beliakov, G.: Learning weights in the generalized OWA operators, Fuzzy Optim. Decision Making 4, 119--130 (2005)
4. Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T.: Aggregation Functions: A guide for practitioners, Springer-Verlag, Berlin, (2007)
5. Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R.: Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, (2002)
6. Dyckhoff, H., Pedrycz, W.: Generalized means as a model of compensative connectives, Fuzzy Sets Syst. 14, 143--154 (1984)
7. Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M.: Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 3, 236--240 (1995)
8. Karayiannis, N.: Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, IEEE Trans. Neural Networks 11, 1093--1105 (2000)
9. Moore, R.E.: Interval Analysis, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, (1966)
10. Wang J.H., Hao, J.: A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, IEEE Trans. Fuzzy Syst. 14, 435--445 (2006)
11. Xu, Z.S.: An Overview of Methods for Determining OWA Weights, Int. J. Intell. Syst. 20, 843—865 (2005)
12. Xu, Z.S.: Dependent ordered weighted averaging operators. In: Torra, V., Narukawa, Y., Valls, A., Domingo-Ferrer, J. (eds.) MDAI 2006. LNAI, vol. 3885, pp. 172-178. Springer, Heidelberg (2006)
13. Xu, Z.S.: Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, Inform. Fusion 7, 231--238 (2006)
14. Xu, Z.S.: An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, Decision Support Syst. 41, 488--499 (2006)
15. Xu, Z.S.: On generalized induced linguistic aggregation operators, Int. J. General Syst. 35, 17--28 (2006)
16. Xu, Z.S.: Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, Inform. Fusion 9, 310--316 (2008)

17. Xu, Z.S., Da, Q.L.: The Uncertain OWA Operator, Int. J. Intell. Syst. 17, 569--575 (2002)
18. Yager, R.R.: On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B 18, 183--190 (1988)
19. Yager, R.R.: Families of OWA operators, Fuzzy Sets Syst. 59, 125--148 (1993)
20. Yager, R.R.: Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optim. Decision Making 3, 93--107 (2004)
21. Yager, R.R., Filev, D.P.: Induced ordered weighted averaging operators, IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B 29, 141--150 (1999).
22. Yager, R.R., Kacprzyk, J.: The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, (1997).

The Fuzzy Induced Generalized OWA Operator and its Application in Decision Making

José M. Merigó, Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain
Emails: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

Abstract

We present the fuzzy induced generalized OWA (FIGOWA) operator. It is an aggregation operator that uses the main characteristics of the fuzzy OWA (FOWA) operator, the induced OWA (IOWA) operator and the generalized OWA (GOWA) operator. Therefore, it uses uncertain information represented in the form of fuzzy numbers, generalized means and order inducing variables. The main advantage of this operator is that it includes a wide range of mean operators in the same formulation such as the FOWA, the IOWA, the GOWA, the induced GOWA, the fuzzy IOWA, the fuzzy generalized mean, etc. We study some of its main properties. A further generalization by using quasi-arithmetic means is also presented. This operator is called Quasi-FIOWA operator. We also develop an application of the new approach in a strategic decision making problem.

Keywords: Aggregation operators, Fuzzy numbers, OWA operator, Quasi-arithmetic means, Strategic decision making.

1. Introduction

Different types of aggregation operators are found in the literature for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). Since its appearance, the OWA operator has been studied in a wide range of applications (Calvo et al., 2002; Karayiannis, 2000; Merigó, 2007; Yager, 1992; 1993; 1994; 1996; 2003; 2004; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997). In 1999, Yager and Filev introduced the IOWA operator. It is a generalization of the OWA operator that uses order inducing variables in the reordering of the arguments. In the last years, the IOWA operator has been studied by different authors (S.J. Chen and S.M. Chen, 2003; Merigó, 2007; Yager, 2003).

When using the IOWA operator, it is assumed that the available information are exact numbers or crisp values. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, it is necessary to use another approach to deal with this information such as fuzzy numbers (FN). For these situations, the IOWA operator is known as fuzzy number induced OWA (FN-IOWA) operator (S.J. Chen and S.M. Chen, 2003).

Recently, Merigó and Gil-Lafuente (2007) have suggested a generalization of the IOWA operator by using generalized means. With this generalization, known as the induced generali-zed OWA (IGOWA) operator, we are able to include in the same formulation different types of induced aggregation operators such as the IOWA operator, the induced ordered weighted geometric (IOWG) operator and the induced ordered weighted quadratic averaging (IOWQA) operator, among others. In the same paper (2007), Merigó and Gil-Lafuente also suggested the Quasi-IOWA operator which is a further generalization of the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. In (Merigó and Gil-Lafuente, 2007), a further generalization has been suggested for situations with FN in the GOWA operator (FGOWA).

Going a step further, in this paper we present the fuzzy induced generalized OWA operator which generalizes the FN-IOWA by using generalized means. We will call it the fuzzy induced generalized OWA (FIGOWA) operator. Then, we are able to obtain a wide range of fuzzy induced aggregation operators such as the FN-IOWA, the FN-IOWG operator and the FN-IOWQA operator, among others. We study some of the main properties of this generalization and we extend it to a more general formulation by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-FIOWA operator. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies.

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts such as FN, the FN-IOWA and the IGOWA operator. Section 3 presents the FIGOWA operator and Section 4 studies some of its families. In Section 5 we briefly present the Quasi-FIOWA operator and in Section 6, we develop an application of the new approach in a strategic decision making problem.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review some basic concepts to be used throughout the paper such as the FNs, the FIOWA and the IGOWA operator.

2.1. Fuzzy Numbers

The FN was first introduced by (Chang and Zadeh, 1972; Zadeh 1975). Since then, it has been studied and applied by a lot of authors such as (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985).

A FN is a fuzzy subset (Zadeh, 1965) of a universe of discourse that is both convex and normal (Kaufmann and Gupta, 1985). Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number (Moore, 1966) although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings.

In the literature, we find a wide range of FNs (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985). For example, a trapezoidal FN (TpFN) A of a universe of discourse R can be characterized by a trapezoidal membership function $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that

$$\underline{a}(\alpha) = a_1 + \alpha(a_2 - a_1),$$
$$\overline{a}(\alpha) = a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \tag{1}$$

where $\alpha \in [0, 1]$ and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a crisp value and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a triangular FN (TFN). Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

In the following, we are going to review the FN arithmetic operations as follows. Let A and B be two TFN, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

7) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
8) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
9) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985) but in this paper we will focus on these ones.

2.2. Fuzzy Induced OWA Operator

The FIOWA (or FN-IOWA) operator was introduced by (S.J. Chen and S.M. Chen, 2003). It is an aggregation operator that uses uncertain information represented by FNs. It also uses a reordering process different from the values of the arguments. In this case, the reordering step is based on order inducing variables. It can be defined as follows.

Definition 1. *Let Ψ be the set of FN. A FIOWA operator of dimension n is a mapping FIOWA: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$FIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the FIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable represented in the form FN.

Note that from a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DFIOWA) and ascending (AFIOWA) orders. Note also that this operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average (FA), among others.

2.3. Induced Generalized OWA Operator

The IGOWA operator was introduced in (Merigó and Gil-Lafuente, 2007) and it represents a generalization of the IOWA operator by using generalized means. Then, it is possible to include in the same formulation, different types of induced operators such as the IOWA operator or the induced OWG (IOWG) operator. It can be defined as follows.

Definition 2. *An IGOWA operator of dimension n is a mapping IGOWA:* $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle,\ldots,\langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j *is the* a_i *value of the IGOWA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* a_i *is the argument variable and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

As we can see, if $\lambda = 1$, we get the IOWA operator. If $\lambda = 0$, the IOWG operator and if $\lambda = 2$, the IOWQA operator. Note that it is possible to further generalize the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-IOWA operator.

3. Fuzzy Induced Generalized OWA Operator

The fuzzy induced generalized OWA (FIGOWA) operator is an extension of the GOWA operator that uses uncertain information in the aggregation represented in the form of FNs. The reason for using this operator is that sometimes, the uncertain factors that affect our decisions are not clearly known and in order to assess the problem we need to use FNs. The FN is a very useful technique in decision making because it considers the different uncertain results that could happen in the future. This operator also uses a reordering process based on order inducing variables. It can be defined as follows.

Definition 3. *Let* Ψ *be the set of FNs. A FIGOWA operator of dimension n is a mapping FIGOWA:* $\Psi^n \rightarrow \Psi$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$FIGOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j *is the* $\tilde{a}_i$ *value of the FIGOWA pair* $\langle u_i,\tilde{a}_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* $\tilde{a}_i$ *is the argument variable represented in the form of FN and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that different types of FNs could be used in the aggregation such as TFNs, TpFNs, L-R FNs, interval-valued FNs, intuitionistic FNs, etc.

As it was explained in (Merigó and Gil-Lafuente, 2007), when using FN in the OWA operator, we have the additional problem of how to reorder the arguments. But in the FIGOWA operator, this is not a problem because the reordering process is developed with order inducing variables and it is independent of the values of the arguments.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending FIGOWA (DFIGOWA) and the ascending

FIGOWA (AFIGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFIGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFIGOWA operator.

The FIGOWA operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent.

Theorem 1 (Monotonicity). *Assume f is the FIGOWA operator, if $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then*

$$f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) \geq f(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{e}_n\rangle) \tag{5}$$

Theorem 2 (Commutativity). *Assume f is the FIGOWA operator, then*

$$f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = f(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{e}_n\rangle) \tag{6}$$

where $(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{e}_n\rangle)$ *is any permutation of the arguments* $(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle)$.

Theorem 3 (Boundedness). *Assume f is the FIGOWA operator, then*

$$\min\{\tilde{a}_i\} \leq f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) \leq \max\{\tilde{a}_i\} \tag{7}$$

Theorem 4 (Idempotency). *Assume f is the FIGOWA operator, if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then*

$$f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \tilde{a} \tag{8}$$

Note that the proofs of Theorems 1 - 4 are omitted because they are trivial.

Another interesting issue when analysing the FIGOWA operator is the problem of ties in the order inducing variables. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy explained in (Yager and Filev, 1999). Basically, the idea is to replace each argument of the tied inducing variables by its fuzzy generalized mean. Then, different types of means may be used to replace the arguments depending on the parameter λ.

As it is explained in (Yager and Filev, 1999), different kinds of attributes may be used for the order inducing variables of the FIGOWA operator with the only requirement of having a linear ordering.

4. Families of FIGOWA Operators

In the FIGOWA operator, we can distinguish between two main groups of FIGOWA operators. The first family represents all the families that may be found in the weighting vector W, while the second family represents all the particular cases coming from the parameter λ.

4.1. Analysing the Weighting Vector *W*

By using a different weighting vector in the FIGOWA operator, we are able to obtain a wide range of aggregation operators. For example, we can obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the FGM, the fuzzy weighted generalized mean (FWGM) and the FGOWA operator.

The fuzzy maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$. The fuzzy minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p =$

Min{$\tilde{a}_i$}. The FGM is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The fuzzy weighted generalized mean (FWGM) is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the FGOWA operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of $\tilde{a}_i$.

Other families of FIGOWA operators could be used in the aggregation by using a different manifestation of the weighting vector. For example, we could analyze the step-FIGOWA, the window-FIGOWA, the median-FIGOWA, the olympic-FIGOWA, the centered-FIGOWA, the S-FIGOWA, etc. For more information, see (Liu, 2007; Merigó, 2007; Merigó and Casanovas, 2007, Merigó and Gil-Lafuente, 2007; Yager, 1992; 1993; 1994; 1996; 2003; 2004; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

The step-FIGOWA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$ and the window-FIGOWA when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

For the median-FIGOWA, we distinguish between two cases. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument $\tilde{a}_i$ with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign, for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i.

For the weighted median-FIGOWA we select the argument $\tilde{a}_i$ that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

The olympic-FIGOWA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Note that the olympic-FIGOWA is transformed in the olympic-FGOWA if $w_p = w_q = 0$, such that u_p = Max{$\tilde{a}_i$} and u_q = Min{$\tilde{a}_i$}, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

A further family is the centered-FIGOWA operator. This type of aggregation operator is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ which is known as softly decaying centered-FIGOWA operator. Note also the possibility of removing the third condition. Then, we shall refer to this type of aggregation as non-inclusive centered-FIGOWA operator.

A further interesting family is the S-FIGOWA operator. In this case, we can distinguish between three types: the "orlike", the "andlike", and the "generalized" S-FIGOWA operator. The orlike S-FIGOWA operator is found when $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, u_p = Max{$\tilde{a}_i$}, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for all $j \neq p$ with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the FA and if $\alpha = 1$, we get the fuzzy maximum. The andlike S-FIGOWA operator is found when $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, u_q = Min{$\tilde{a}_i$}, and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for all $j \neq q$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that if $\beta = 0$ we get the FA and if $\beta = 1$, the fuzzy minimum. Finally, the generalized S-FIGOWA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with u_p = Max{$\tilde{a}_i$}; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with u_q = Min{$\tilde{a}_i$}; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, we get the andlike S-FIGOWA and if $\beta = 0$, the orlike S-FIGOWA.

4.2. Analysing the Parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the FIOWA operator, the fuzzy IOWG (FIOWG), the fuzzy

IOWQA (FIOWQA) and the fuzzy induced ordered weighted harmonic averaging (FIOWHA) operator.

When $\lambda = 1$, the FIGOWA operator becomes the FIOWA operator.

$$FIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{9}$$

Note that it is possible to study a wide range of families of FIOWA operators by using different weighting vectors in a similar way as it has been explained in Section 4.1. For example, if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the FA and if the ordered position of b_j is the same than the position of the values u_i, we get the FOWA operator.

When $\lambda = 0$, we get the FIOWG operator.

$$FIOWG(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{10}$$

Note that in this case we can also study different families of FIOWG operators such as the fuzzy geometric mean or the fuzzy OWG (FOWG) operator. Note also that we can distinguish between descending (DFIOWG) and ascending (AFIOWG) orders.

When $\lambda = -1$, we get the FIOWHA operator.

$$FIOWHA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{11}$$

From a generalized perspective of the reordering step we find the descending FIOWHA (DFIOWHA) and the ascending FIOWHA (AFIOWHA) operator. Different families of FIOWHA operators are found by using different weighting vectors such as the fuzzy harmonic mean and the fuzzy ordered weighted harmonic averaging (FOWHA) operator.

When $\lambda = 2$, we get the FIOWQA operator.

$$FIOWQA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2\right)^{1/2} \tag{12}$$

In this case, we can also study a wide range of families of FIOWQA operators such as the fuzzy quadratic mean and the fuzzy OWQA operator, and distinguish between the DFIOWQA and the AFIOWQA operator.

5. Quasi-FIOWA Operator

FIGOWA operator may be further generalized by using quasi-arithmetic means. Then, the result is the fuzzy induced ordered weighted quasi-arithmetic averaging operator or Quasi-FIOWA, for short. Note that the Quasi-FIOWA operator is an extension of the Quasi-OWA (Beliakov, 2005; Beliakov et al., 2007; Fodor et al., 1995) by using order inducing variables and uncertain information represented with FNs.

Definition 4. *Let Ψ be the set of FNs. A Quasi-FIOWA operator of dimension n is a mapping f: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle,\ldots,\langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_j)\right) \tag{13}$$

where b_j *is the* $\tilde{a}_i$ *value of the Quasi-FIOWA pair* $\langle u_i,\tilde{a}_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable,* $\tilde{a}_i$ *is the argument variable represented in the form of FN and* $g(b)$ *is a strictly continuous monotone function.*

As we can see, when $g(b) = b^{\lambda}$, we get the FIGOWA operator. Note that it is also possible to distinguish between descending (Quasi-DFIOWA) and ascending (Quasi-AFIOWA) orders. Note also that all the properties and particular cases commented in the FIGOWA operator, are also applicable in this case.

6. Application in Strategic Decision Making

In the following, we are going to develop a brief example where we will see the applicability of the new approach. We will focus in a decision making problem about selection of strategies. Note that other business decision making applications could be developed such as financial decision making, human resource selection, etc. Note that the FIGOWA operator may be applied in similar problems than the IOWA and the IGOWA operator.

Assume a company that operates in North America and Europe is analyzing the general policy for the next year and they consider 5 possible strategies to follow.

1) A_1 = Expand to the Asian market.
2) A_2 = Expand to the South American market.
3) A_3 = Expand to the African market.
4) A_4 = Expand to the 3 continents.
5) A_5 = Do not develop any expansion.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 5 possible situations for the next year: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Regular, S_4 = Good, S_5 = Very good. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_i are shown in Table 1. Note that the results are TFN.

Table 1: Fuzzy payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(20,30,40)	(60,70,80)	(40,50,60)	(50,60,70)	(50,60,70)
A_2	(30,40,50)	(70,80,90)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)
A_3	(60,70,80)	(50,60,70)	(40,50,60)	(20,30,40)	(40,50,60)
A_4	(50,60,70)	(30,40,50)	(60,70,80)	(70,80,90)	(10,20,30)
A_5	(40,50,60)	(30,40,50)	(50,60,70)	(60,70,80)	(40,50,60)

In this problem, the experts consider the weighting vector W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Due to the fact that the attitudinal character is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors, the experts use order inducing variables to express it. It is represented in Table 2.

Table 2: Order inducing variables

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	7	9	6	5	8
A_2	4	3	6	8	7
A_3	2	8	4	3	6
A_4	5	6	9	2	7
A_5	8	4	3	6	5

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. In Table 3 and 4, we show different results obtained by using different types of FIGOWA operators.

Table 3: Aggregated results 1

	FMax	FMin	FA	FQA	FWA
A_1	(60,70,80)	(20,30,40)	(44,54,64)	(46.0,55.6,65.4)	(47,57,67)
A_2	(70,80,90)	(30,40,50)	(42,52,62)	(44.9,54.4,64.0)	(44,54,64)
A_3	(60,70,80)	(20,30,40)	(42,52,62)	(44.0,53.6,63.4)	(40,50,60)
A_4	(70,80,90)	(10,20,30)	(44,54,64)	(48.9,58.1,67.5)	(40,50,60)
A_5	(60,70,80)	(30,40,50)	(44,54,64)	(45.1,54.9,64.8)	(44,54,64)

Table 4: Aggregated results 2

	FOWA	FIOWA	AFIOWA	FIOWG	FIOWQA
A_1	(40,50,60)	(43,53,63)	(45,55,65)	(40.5,51.1,61.5)	(44.8,54.4,64.2)
A_2	(38,48,58)	(46,56,66)	(38,48,58)	(42.8,53.4,63.7)	(49.1,58.6,68.2)
A_3	(38,48,58)	(43,53,63)	(41,51,61)	(40.2,50.8,61.2)	(45.2,54.8,64.5)
A_4	(38,48,58)	(45,55,65)	(43,53,63)	(36.8,49.1,60.3)	(50.2,59.4,68.7)
A_5	(41,51,61)	(45,55,65)	(43,53,63)	(43.7,54.0,64.1)	(46.1,55.9,65.8)

If we establish an ordering of the alternatives, we get the following results shown in Table 5.

Table 5: Ordering of the strategies

	Ordering		Ordering
FMax	$A_2=A_4 \succ A_1=A_3=A_5$	FOWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_2=A_3=A_4$
FMin	$A_2=A_5 \succ A_1=A_3 \succ A_4$	FIOWA	$A_2 \succ A_4=A_5 \succ A_1=A_3$
FA	$A_1=A_4=A_5 \succ A_2=A_3$	AFIOWA	$A_1 \succ A_4=A_5 \succ A_3 \succ A_2$
FQA	$A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3$	FIOWG	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
FWA	$A_1 \succ A_2=A_5 \succ A_3=A_4$	FIOWQA	$A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the strategies may be different.

7. Conclusions

We have introduced the FIGOWA operator. It is a generalization of the OWA operator that uses the main characteristics of three well known aggregation operators: the GOWA, the IOWA and the FOWA operator. That is to say, it uses generalized means, order inducing variables and FN in the aggregation. We have studied some of the main properties of this new aggregation operator. We have further generalized it by using quasi-arithmetic means. Then, we have obtained the Quasi-FIOWA operator.

We have also developed an application of the new approach. We have focused in a strategic decision making problem and we have seen that depending on the particular FIGOWA operator used, the results and the decisions may be different.

In future research we expect to develop further extensions by adding new characteristics in the problem and applying it to other business problems such as financial decision making and human resource selection.

References

Beliakov, G. (2005). "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4, pp. 119-130.

Beliakov, G., Pradera, A., Calvo, T. (2007). *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T., Mayor, G., Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chang, S.S.L., Zadeh, L.A. (1972). "On fuzzy mapping and control", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2, pp. 30-34.

Chen, S.J., Chen, S.M. (2003). "A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators", *Cybernetics and Systems*, 34, pp. 109-137.

Chiclana, F., Herrera, F., Herrera-Viedma, E. (2000). "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in: *Proc. 8th International Conference on*

Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, pp. 985-991.
Dubois, D., Prade, H. (1980). *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.
Dujmovic, J. (1974). "Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation", *Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika*, 483, pp. 147-158.
Dyckhoff, H., Pedrycz, W. (1984). "Generalized means as model of compensative connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, 14, pp. 143-154.
Fodor, J., Marichal, J.L., Roubens, M. (1995). "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3, pp. 236-240.
Hardy, G.H., Littlewood, J.E., Pólya, G. (1934). *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge.
Herrera, F., Herrera-Viedma, E., Chiclana, F. (2003). "A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making", *International Journal of Intelligent Systems*, 18, pp. 689-707.
Karayiannis, N. (2000). "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11, pp. 1093-1105.
Kaufmann, A., Gupta, M.M. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold.
Liu, X.W. (2007). "The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators", *International Journal of Approximate Reasoning*, 45, pp. 68-81.
Merigó, J.M. (2007). *New extensions to the OWA operator and its application in business decision making*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.
Merigó, J.M., Casanovas, M. (2007). "The fuzzy generalized OWA operator", In *Proceedings of the 14th SIGEF conference*, pp. 504-517, Poiana-Brasov, Romania.
Merigó, J.M., Gil-Lafuente, A.M. (2007). "The induced generalized OWA operator", In *Proceedings of the 5th EUSFLAT conference*, volume 2, pp. 463-470, Ostrava, Czech Republic.
Moore, R.E. (1966). *Interval Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ.
Xu, Z.S., Da, Q.L. (2002). "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *International Journal of Intelligent Systems*, 17, pp. 709-716.
Yager, R.R. (1988). "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18, pp. 183-190.
Yager, R.R. (1992). "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, 33, pp. 41-69.
Yager, R.R. (1993). "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 59, pp. 125-148.
Yager, R.R. (1996). "Quantifier guided aggregation using OWA operators", *International Journal of Intelligent Systems*, 11, pp. 49-73.
Yager, R.R. (2003). "Induced aggregation operators", *Fuzzy Sets and Systems*, 137, 59-69.
Yager, R.R. (2004). "Generalized OWA Aggregation Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3, pp. 93-107.

Yager, R.R. (2007a). “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, 11, pp. 631-639.
Yager, R.R. (2007b). “Using stress functions to obtain OWA operators”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 15, 1122-1129.
Yager, R.R., Filev, D.P. (1994). “Parameterized andlike and orlike OWA Operators”, *International Journal of General Systems*, 22, pp. 297-316.
Yager, R.R., Kacprzyk, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.
Zadeh, L.A. (1965). “Fuzzy sets”, *Information and Control*, 8, pp. 338-353.
Zadeh, L.A. (1975). “The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1”, *Information Sciences*, 8, pp. 199-249, “Part 2”, *Information Sciences*, 8, pp. 301-357, “Part 3”, *Information Sciences*, 9, pp. 43-80.

14.2. Artículos de revista

14.2.1. Artículo de revista 1. – Publicado en *Fuzzy Economic Review*

Unification point in methods for the selection of financial products

J.M. Merigó Lindahl, A.M. Gil Lafuente

Department of Business Administration
University of Barcelona

Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials
Edifici Principal, Torre 2 – 3a planta
Av. Diagonal 690,
08034 Barcelona, Spain

Telephone: 662 349 184
Fax: 934 029 040
Email: jmerigli7@dce.ub.edu

UNIFICATION POINT IN METHODS FOR THE SELECTION OF FINANCIAL PRODUCTS

ABSTRACT

In this paper, we analyse in detail the selection of financial products. We apply the index of maximum and minimum level for the selection of financial products and we analyse what we have called the unification point between the Hamming distance and the adequacy coefficient. First, we study this situation for the case of maximum levels in the characteristics of the ideal financial product. Then, we generalize it for all the possible situations where it can be found. Finally, we study the unification point in the index of maximum and minimum level. The result found shows a transformation of this index into the Hamming distance.

Keywords: *Unification point, financial product, fuzzy subset, Hamming distance, adequacy coefficient.*

1. INTRODUCTION

The selection of the best financial products for the company represents a fundamental problem to be solved in order for its good development. Nowadays, there are a lot of different financial products in the market that the company needs to know so they can find the ones that are more appropriated for their necessities. This situation makes that the enterprise has to elaborate a decision process because they need to choose the best financial products in each moment of its life. For doing this, they need to consider the different characteristics of the financial products and compare them with the ideals the company has. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-4] about selection of human resources, the models developed in [5-6] about selection of financial products and the models developed in [7-8] about selection of players in sports.

Our objective in this work, is to analyse in more detail the selection of financial products. We will propose a version of the index of maximum and minimum level for the case of financial products and we will analyse what we have called the unification point. This situation has been studied for a special case where it always happens as it is the situation with maximum ideals. Then, we have generalized this concept for all the possible cases where it can appear. These results have been studied for the case of selection of financial products, but we are concerned that the same problem is found for other selection processes as the selection of human resources.

2. SELECTION OF FINANCIAL PRODUCTS

In order to select the most appropriated financial product, the process to follow will consist in five steps [1-7]:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1,$

$C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$, where C_i is the *i*th characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number *n* of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal financial product. Theoretically, it will be represented as:

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
P =	μ_1	μ_2	…..	μ_i	…..	μ_n

where P is the ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; i = 1, 2, …, n, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. Theoretically, it will be represented as:

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
P_j =	$\mu_1^{(j)}$	$\mu_2^{(j)}$	…..	$\mu_i^{(j)}$	…..	$\mu_n^{(j)}$

with j = 1, 2, …, m; where P_j is the *j*th financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i^{(j)} \in [0,1]$; i = 1, …, n, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *j*th financial product.

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal.

In this step, we have to express numerically the approximation between the ideal financial product and the different financial products considered. To solve this problem, we have a lot of different selection indexes that can be used. A first instrument could be the use of the notion of distance. Among the large variety of distances that it can be developed, we will use the Hamming distance as it is very easy to work with. It is defined as:

$$D(P,P_j) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = |\mu_1 - \mu_1^{(j)}| + |\mu_2 - \mu_2^{(j)}| + \ldots\ldots + |\mu_n - \mu_n^{(j)}| \qquad (1)$$

with: i = 1,2,…,n; and $\forall\, (P,P_j) \in \varepsilon \times \varepsilon$, $\mu_i, \mu_i^{(j)} \in [0,1]$.

In some cases, we should prefer to use the relative Hamming distance. Then, its formulation would be:

$$\delta(P,P_j) = (1/n)\, D(P,P_j) \qquad \text{with: } \delta \in [0,1] \qquad (2)$$

About the results obtained, we see that they refer to the removal of each product to the ideal one. Then, our preference relation will be constructed in an increasing order being the lowest value the best result.

A second instrument that could be used is the adequacy coefficient. Theoretically, it is defined as:

$$K(P_j \to P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} K_i(P_j \to P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] \quad (3)$$

with: j = 1,2,…,m

About the results obtained, we should note that they refer to the approximation of the financial products to the ideal. Then, our preference relation will be constructed in a decreasing order being the highest value the best result. Analogously to this index, we could calculate its equivalent removal index. Its formulation for the case of financial products is:

$$Q(P_j \to P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} Q_i(P_j \to P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] \quad (4)$$

In this case, the preference relation will be ascendant. That is, we will select the lowest result.

Apart from these two instruments, we could also consider other aspects as the case in which the ideal financial product is maximum. That is, it gets valuation 1 for all the characteristics. Then, the fuzzy subset that describes the ideal financial product will be constituted only by 1s. From here, the resolution process would be the same as in the two previous instruments, with the only difference about the values of the ideal. Then, the formulation will be the same that in the case of the Hamming distance or in the case of the adequacy coefficient.

Another factor to consider would be the situation in which it is impossible to specify an ideal financial product. In this case, the solution would consist in suppose that the valuations obtained for the different products would strictly refer to an ascending or a descending order depending if the results are expressed with maximums or with minimums. For solving these situations, we could use the traditional decision methods as the Laplace criteria [9], the Weighted Sum Model (WSM) [10] or the Ordered Weighted Averaging (OWA) operators [11]. In this case, the aggregation would consist in directly apply the values from the characteristics without a previous phase of determination of the individual distances.

It is important to note that until now we have always supposed that all the characteristics have the same level of importance. Obviously, this is not always the case, so we could analyse these models giving different levels of importance to the characteristics of the financial products. In order to use different degrees of importance, we can use a convex weighting so the result is still in [0,1]:

$$V_i = w_i \ / \sum_{i=1}^{n} w_i \quad (5)$$

where V_i refers to the degree of importance of the characteristic C_i, w_i is the valuation done for the characteristic C_i and $\sum_{i=1}^{n} w_i$ is the sum of all the valuations done for all the characteristics of each financial product.

From this convex weighting, we could obtain the different instruments in which we would reflect the degree of importance of each characteristic. The formulation would be:

- For the Hamming distance:

$$\pi(P,P_j) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| \ ; \quad \text{With: } j = 1,2,\ldots,m \tag{6}$$

- For the adequacy coefficient:

a) Approximation index or adequacy coefficient:

$$K\,(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \ \times \ [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] \ ; \quad \text{With: } j = 1,2,\ldots,m \tag{7}$$

b) Removal index:

$$Q\,(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \ \times \ [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] \ ; \quad \text{With: } j = 1,2,\ldots,m \tag{8}$$

Obviously, we see that the adequacy coefficient and the removal index are inversely related:

$$K\,(P_j \rightarrow P) = 1 - Q(P_j \rightarrow P) \tag{9}$$

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

Finally, we should take the decision about which financial product select. Obviously, our decision will consist in choose the financial product with the best results according to the index used.

3. UNIFICATION POINT BETWEEN THE HAMMING DISTANCE AND THE ADEQUACY COEFFICIENT

The unification point is a situation where the Hamming distance and the adequacy coefficient become the same index. This point is always found when the ideal financial product is maximum. Then, the analysis done with the Hamming distance is the same as in the adequacy coefficient. With the initial results, we get the complementary result of the other index [7], but if we use the removal index of the adequacy coefficient, then the results are exactly the same. The reason is that the adequacy coefficient consists in not penalize the values over the ideal. But in this case, it is impossible to get values over it, so the calculation consists only in calculate the distance to the ideal. Then, the calculation is the same as in the Hamming distance.

Theorem 1:

If $\mu_i = 1, \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i$.

As we can see, $\mu_i^{(j)}$ will never be higher than μ_i, so the result will never use 0 in the relation $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]$. Simplifying this result, we see that it becomes the relative Hamming distance.

This unification point can also be found for the case with different degrees of importance in the characteristics of the financial products. In this case, the process will be the same with the only difference that in the equations we will include Eq. (5).

Theorem 2:

If $\mu_i = 1, \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i$. Again, we see the same situation as before.

The unification point appears always in the cases where the ideal is maximum, but there are other situations where we could find it. In the following, we are going to generalize all the possible situations in where the unification point appears.

Theorem 3:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

This happens because the condition to become the same index is not only the maximum ideal. It is enough that we do not use the part of the equation of the adequacy coefficient that uses the compensation result. That is, when: $\mu_i < \mu_i^{(j)}$.

This general unification point can also be found for the case with different degrees of importance in the characteristics of the financial products. The process will be the same with the difference that in the equations we have to consider Eq. (5).

Theorem 4:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \ \forall_i \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

These formulations represent the unification point for one financial product. This unification could be considered as a partial unification point in the selection process because not all the financial products are affected by this situation. In the following, we show the situation found when all the financial products of the selection process are affected by the unification point. We will call it the total unification point. We will use the same equations as in theorems (1-4), with the difference that here we will consider all the existing financial products in the selection process.

Theorem 5:

If $\mu_i = 1, \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \forall_j$.

This is the case of the maximum ideal with the same levels of importance. If we look for the case with different degrees of importance we will get a similar result as in theorem 2.

Theorem 6:

If $\mu_i = 1, \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

with $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \forall_j$.

If we generalize this total unification point to all the possible situations where we could find it, we will get a similar result as in theorem 3 for the case with same level of importance.

Theorem 7:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = (1/n) \sum_{i=1}^{n} [\mu_i - \mu_i^{(j)}] = \delta(P,P_j)$

And if we apply the total unification point for the case with different degrees of importance we will get a similar result as in theorem 4.

Theorem 8:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \forall_j \Rightarrow Q(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } (\mu_i - \mu_i^{(j)}) = \pi(P,P_j)$

As we have seen, the result found for the eight theorems is that the adequacy coefficient gets the form of the Hamming distance when this situation occurs.

These results can also be obtained from the primitive adequacy coefficient. Here we will only show the most generalized case for the partial unification point and for the total unification point. First we will study the partial unification point.

Theorem 9:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } \{1 - [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]\} = \sum_{i=1}^{n} V_i \text{ x } \{1 - (\mu_i - \mu_i^{(j)})\} = 1 - \pi(P,P_j) = 1 - Q(P_j \rightarrow P)$

As we can see, with the initial adequacy coefficient, we get the complementary to the Hamming distance. And as we now, this result is the removal index. If we analyse the total unification point we will get a similar result with the difference that it affects all the financial products in the selection process.

Theorem 10:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$ $\forall_i \forall_j \Rightarrow K(P_j \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(j)})] = \sum_{i=1}^{n} V_i \times \{1- [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(j)})]\} = \sum_{i=1}^{n} V_i \times \{1 - (\mu_i - \mu_i^{(j)})\} = 1 - \pi(P,P_j) = 1 - Q(P_j \rightarrow P)$

Here we get that all the financial products gets the form of the complementary of the Hamming distance.

4. SELECTION OF FINANCIAL PRODUCTS WITH THE INDEX OF MAXIMUM AND MINIMUM LEVEL

The index of maximum and minimum level was introduced in [8], and consists in use the Hamming distance and the adequacy coefficient in the same index. Then, each index will only use a certain number of characteristics of the fuzzy subset. In the following, we are going to formulate the index of maximum and minimum level for the case of financial products as:

$$\eta(P,P_j) = (1/(u+v)) \left[\sum_{u} |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_{v} [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))]\right] \quad (10)$$

where *u* refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and *v* refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. It is important to note that $u + v = n$. That is, the sum of both groups of characteristics is equal to the total number of characteristics.

As in the previous indexes, we could consider the case where the characteristics have different levels of importance. To solve this problem, we should introduce a version of Eq. (5) in Eq. (10). Then, the formulation is the following:

$$\eta(P,P_j) = \sum_{u} Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_{v} Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] \quad (11)$$

with: $Z_i = w_i / \sum_{i=1}^{n} w_i$; which represents the level of importance of the characteristic C_i.

Analogously to this removal index, we could calculate the approximation index as:

$$\upsilon(P,P_j) = 1 - \eta(P,P_j). \quad (12)$$

5. UNIFICATION POINT IN THE INDEX OF MAXIMUM AND MINIMUM LEVEL

The unification point in the index of maximum and minimum level is a situation which transforms the index in the Hamming distance. In the following we are going to demonstrate this result using the generalization obtained for different degrees of importance. First we are going to suppose the situation were the ideal financial product is maximum. As we now from theorems (1-5), in this situation, we always arrive to the unification point.

Theorem 11:

If $\mu_i = 1, \forall_i \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] =$

$$\sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$; and $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}\ \forall_i$.

This result can be generalized for all the possible situations in where we can find the unification point in the index of maximum and minimum level.

Theorem 12:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}\ \forall_i \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))]$

$$= \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$; and $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}\ \forall_i$. As we can see, the unification appears when $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$.

Theorems 11 and 12 show the unification point for the case of one financial product. As it was explained in theorems 1-10, this situation is called partial unification point and it can affect several financial products of the selection process with the condition that at least one financial product of the selection is not affected by it. Obviously, we could make a classification of situations with higher number of cases affected by the unification point. A higher percentage of financial products affected by the unification point would mean that the partial unification point is closer to the total unification point. When the 100% of the financial products would be affected by the unification point, then we would enter in a situation of total unification point.

Now, we are going to show the total unification point for the index of maximum and minimum level. Again, we will see that the result obtained is that the index of maximum and minimum level gets the form of the Hamming distance with the difference that now it is for all the financial products of the selection process.

Theorem 13:

If $\mu_i = 1, \forall_i \forall_j \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$; and $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \forall_j$.

This result is for the case of the maximum ideal. If we generalize this result for all the possible cases we get a similar result as in theorem 12.

Theorem 14:

If $\mu_i \geq \mu_i^{(j)} \; \forall_i \forall_j \Rightarrow \eta(P,P_j) = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times [0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))] = \sum_u Z_i(u) \times |\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)| + \sum_v Z_i(v) \times (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) = \sum_{i=1}^{n} V_i \times |\mu_i - \mu_i^{(j)}| = \pi(P,P_j)$

with $Z_i(u) + Z_i(v) = V_i$.

As we can see, the index of maximum and minimum level gets the form of the Hamming distance.

7. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

The information about the example is found in [5] although we have made some changes in the paper.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company.

It is supposed that in a financial market exist three products P_1, P_2 y P_3 with different characteristics in relation to:

C_1 = prize of the money
C_2 = devolution period
C_3 = renewal possibilities
C_4 = the break up of the amortization
C_5 = velocity in the concession

It is considered for each characteristic a property. For C_1 *cheap money*, for C_2 *a good devolution period*, for C_3 *renewal possibilities*, for C_4 *ideal break up of the amortization*, for C_5 *velocity in the concession*.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic.
It is defined the fuzzy subset of ideals for the company as:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P* =	0,9	0,9	0,9	1	0,8

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered.

For each of these characteristics, it is found the following information:

For C_1:
- The price of P_1 is 20%
- The price of P_2 is 22%
- The price of P_3 is 18%

For C_2:
- The devolution period of P_1 is 5 years
- The devolution period of P_2 is 6 years
- The devolution period of P_3 is 4 years

For C_3:
- The renewal possibilities of P_1 are half of P_2 and 1/3 of P_3.

For C_4:
- The amortization of P_1 is accomplished quarterly
- The amortization of P_2 is accomplished monthly
- The amortization of P_3 is accomplished quarterly

For C_5:
- The renewal of P_1 is estimated to be three times faster than P_2 and five times faster than P_3

With this information, we can obtain a matrix with the descriptors that are collocated as files of it. Then, each column will represent the characteristics of each of the products considered P_j, j = 1, 2, 3. That is:

	P_1	P_2	P_3
C_1	0,8	0,7	0,9
C_2	0,8	0,9	0,7
C_3	0,33	0,66	0,9
C_4	0,8	0,33	0,8
C_5	0,7	0,33	0,2

This, permits find a fuzzy subset for each of the financial products. Then, we will obtain:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0,8	0,8	0,33	0,8	0,7

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_2 =	0,7	0,9	0,66	0,33	0,33

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_3 =	0,9	0,7	0,9	0,8	0,2

That shows the level that each product has about the different characteristics considered: C_i, i = 1, 2, 3, 4, 5.

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal.

In this example, we will suppose that the company decides to use the following weighting vector: W = (0’1, 0’1, 0’2, 0’3, 0’3).

If we elaborate the selection process with the Hamming distance using Eq. (6), we will get the following:

P_1 = 0’1x0’1 + 0’1x0’1 + 0’2x0’57 + 0’3x0’2 + 0’3x0’1 = 0’224
P_2 = 0’1x0’2 + 0’1x0 + 0’2x0’24 + 0’3x0’67 + 0’3x0’47 = 0’41
P_3 = 0’1x0 + 0’1x0’2 + 0’2x0 + 0’3x0’2 + 0’3x0’6 = 0’26

In this case, our decision will consist in choose the financial product with the smallest distance, because this will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_1.

If we elaborate the selection process with the adequacy coefficient using Eq. (7), we will get the following:

P_1 = 0’1x0’9 + 0’1x0’9 + 0’2x0’43 + 0’3x0’8 + 0’3x0’9 = 0’776
P_2 = 0’1x0’8 + 0’1x1 + 0’2x0’76 + 0’3x0’33 + 0’3x0’53 = 0’59
P_3 = 0’1x1 + 0’1x0’8 + 0’2x1 + 0’3x0’8 + 0’3x0’4 = 0’74

The decision will consist in choose the financial product with the highest result, because that will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_1.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained from Eq. (9).

P_1 = 1 – 0’776 = 0’224
P_2 = 1 – 0’59 = 0’41
P_3 = 1 – 0’74 = 0’26

If we calculate it with the complete process using Eq. (8), we will get the following:

P_1 = 0’1x0’1 + 0’1x0’1 + 0’2x0’57 + 0’3x0’2 + 0’3x0’1 = 0’224
P_2 = 0’1x0’2 + 0’1x0 + 0’2x0’24 + 0’3x0’67 + 0’3x0’47 = 0’41
P_3 = 0’1x0 + 0’1x0’2 + 0’2x0 + 0’3x0’2 + 0’3x0’6 = 0’26

Then, we can see that the results are the same as in the abbreviated form. As it is a removal index, our decision will consist in select P_1, because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

Analysing the unification point, we see that in this example, the Hamming distance and the removal index of the adequacy coefficient gets the same result because $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$ $\forall_i$ $\forall_j$, as it is explained in theorem 8. In this case, we are in a situation of total unification point because all the three financial products accomplish the conditions of the theorem.

In the following, we are going to analyse the situation found in the index of maximum and minimum level using Eq. (11). We will suppose that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance.

P_1 = 0’1x0’1 + 0’1x0’1 + 0’2x0’57 + 0’3x0’2 + 0’3x0’1 = 0’224
P_2 = 0’1x0’2 + 0’1x0 + 0’2x0’24 + 0’3x0’67 + 0’3x0’47 = 0’41
P_3 = 0’1x0 + 0’1x0’2 + 0’2x0 + 0’3x0’2 + 0’3x0’6 = 0’26

Then, our decision will consist in select P_1 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

Analysing the unification point, we see that the index of maximum and minimum level gets the same results than the Hamming distance because $\mu_i \geq \mu_i^{(j)}$ $\forall_i$ $\forall_j$, as it is explained in theorem 14. In this case, we also find a situation of total unification point because all the three financial products accomplish the conditions of the theorem.

In order to find a situation with partial unification point, we will introduce in the example a fourth financial product that does not accomplish the conditions of the theorems. We will suppose the following valuations for its characteristics:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_4 =	0,8	1	0,3	0,6	0,9

If we now elaborate the selection process for this financial product with the Hamming distance and using Eq. (6), we will get the following:

P_4 = 0’1x0’1 + 0’1x0’1 + 0’2x0’6 + 0’3x0’4 + 0’3x0’1 = 0’29

And if we develop the selection process with the removal index of the adequacy coefficient using Eq. (8), we will get:

P_4 = 0’1x0’1 + 0’1x0 + 0’2x0’6 + 0’3x0’4 + 0’3x0 = 0’25

As we can see, in this case we do not have a situation of unification point because the results found for the Hamming distance and the adequacy coefficient are different. This happens because the financial product does not accomplish the conditions of theorems 4 and 8. Analysing the situation in more detail, we can see that these conditions are found for the characteristics C_1, C_3 and C_4, but not for C_2 and C_5 because its valuations are higher than the ideal. Then, as the theorems say that the unification point only appears when all the characteristics of the financial products studied have valuations not higher than the ideal, we will not have a situation of unification point.

If we now include this financial product with the other three in the selection process, we will conclude that we are in a situation of partial unification point. The reason is because we have three financial products that individually enter in a situation of unification point but one financial product does not accomplish the conditions to be there. In this case, we could say more specifically that we have a partial unification point of 75% because we have three of the four financial products that accomplish the conditions to be in a situation of unification point.

Now we are going to analyse a similar situation for the case of the index of maximum and minimum level using Eq. (11). We will suppose that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance.

P_4 = 0’1x0’1 + 0’1x0 + 0’2x0’6 + 0’3x0’4 + 0’3x0’1 = 0’28

As we can see, in this case we do not have a situation of unification point because there are valuations of the characteristics that are higher than the valuations of the ideal. Then, the results obtained for the index of maximum and minimum level are different than the results obtained with the Hamming distance.

If we include this financial product in the selection process, we will enter in a situation of partial unification point because we have one financial product that does not accomplish the conditions to be in a situation of unification point although there are three financial products in this situation. Then, we could say that the partial unification point has a level of unification of 75%.

8. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Analysing the different situations that can occur, we have found that there are situations in where the adequacy coefficient becomes the Hamming distance. We have called these situations as the unification point. Initially, we have analysed the situation with an ideal financial product with maximum levels and we have found that in this case we always arrive to the unification point. Then, we have extended this concept to all the possible situations in where we can find the unification point. As we have seen, this result appears when all the valuations of the characteristics of the ideal financial product are higher than the ones from the real financial products. In these results, we have distinguished between cases with partial unification point and total unification point. The first one refers to cases when not all the financial products of the selection process are affected by the unification point but at least one is. The second one refers to cases where all the financial products are affected by the unification point. With this result in mind, we have proposed the index of maximum and minimum level for the case of selection of financial products and we have analysed its unification point. As we have seen, when the unification point appears, the index of maximum and minimum level is transformed into the Hamming distance. This result has also been studied for the case of maximum level and for the generalized version with all the cases that it could occur. Finally, an illustrative example has been developed in order to understand the problem numerically.

This work represents an extension in the field of selection of financial products. In future research, we expect to develop more extensions in the selection of financial products and we will also analyse the unification point with more detail, studying different alternatives in other selection processes.

References

[1] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1986), "*Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*", Ed. Milladoiro.

[2] Kaufmann, A., Gil Aluja, J., (1987), "*Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*", Ed. Hispano-europea.

[3] Gil Aluja, J., (1996), "*La gestión interactiva de los recursos humanos en la incertidumbre*", Centro de Estudios Ramón Areces.

[4] Gil Aluja, J., (2002), "*Introducción de la teoría de la incertidumbre en la gestión de empresas*", Ed. Milladoiro.

[5] Gil Lafuente, A.M., (1990), "Técnicas de selección de un instrumento financiero", *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, España.

[6] Gil Lafuente, A.M., (2001), "*Nuevas estrategias para el análisis financiero en la gestión de empresas*", Ariel Economía.

[7] Gil Lafuente, J., (1999), "*L'optimització del fitxatge d'un esportista en l'àmbit de l'esport*", Les Universitats en el Centenari del F.C.Barcelona. Estudis en l'àmbit de l'esport, p.3-55.

[8] Gil Lafuente, J., (2001), "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM)*, Reggio Calabria, Italia.

[9] Laplace, P.S, (1814), "*A Philosophical Essay on Probabilities*", New Cork, Dover Publications, Inc.

[10] Fishburn, P.C, (1967), "*Additive Utilities with Incomplete Product Set: Applications to Priorities and Assignments*", Operations Research Society of America (ORSA), Baltimore, MD, USA.

[11] Yager, R.R, (1988), "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18*, p.183-190.

14.2.2. Artículo de revista 2. – Publicado en *International Journal of Computational Intelligence*

Ordered Weighted Geometric operators in decision making with Dempster-Shafer theory of evidence

José M. Merigó[5], Montserrat Casanovas

Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain

Abstract

We study the problem of decision making with Dempster-Shafer belief structure. We analyze the previous work developed by Yager about using the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator in the aggregation step of the Dempster-Shafer decision process. We discuss the possibility of aggregating with an ascending order in the OWA operator for the cases where the smallest value is the best result. We suggest the introduction of the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator in the Dempster-Shafer framework. In this case, we also discuss the possibility of aggregating with an ascending order and we find that it is completely necessary as the OWG operator cannot aggregate negative numbers. Finally, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using the OWA operator, the Ascending OWA (AOWA) operator, the OWG operator and the Ascending OWG (AOWG) operator.

Keywords: Decision making; aggregation operators; Dempster-Shafer theory of evidence; Uncertainty; OWA operator; OWG operator

1. Introduction

The Dempster-Shafer theory of evidence was introduced by Dempster [13-14] and by Shafer [30]. Since then, it has been used in a lot of situations such as business decisions [16,20,21,31-35], diagnosis and reasoning [1,25-27], expert systems [3,6,37], multiple attribute decision analysis [2,4,39] and pattern classification [5,15]. It provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include in the same formulation the cases of risk and ignorance.

When using the Dempster-Shafer framework in decision making, we need to aggregate the decision information. One of the most common aggregation methods is the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator introduced by Yager [48]. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications such as [7-

[5] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 402 45 80.
E-mail addresses: josema_merigo@hotmail.com (J.M. Merigó), mcasanovas@ub.edu (M. Casanovas).

9,17-19,22,28,29,36,41,43,45,46,49-60]. It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the arithmetic mean, the maximum and the minimum. Recently, Chiclana *et al* [10] have developed a geometric version of the OWA operator, the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator. Since its appearance, the OWG operator has been extensively analysed by different authors [11,12,23,24,40,42,44,47,61]. Basically, it consists in combine in the same aggregation the OWA operator with the geometric mean.

In [50], Yager suggested the use of the OWA aggregation in the Dempster-Shafer belief structure as a more general formulation for decision making in the face of evidential knowledge. This problem has also been studied in [16,55-58]. In this paper, we suggest the possibility of using the OWG operator in situations of decision making under uncertainty where the Dempster-Shafer belief structure plays a major role. We also propose the use of different types of orderings depending on the specific problem found. Basically, we suggest a descending order for situations where the highest value is the best result and an ascending order for situations where the smallest value is the best result.

In order to do that, the paper is organized as follows. In Section 2, we briefly comment the OWA operator. In Section 3, we analyze in detail the OWG operator describing its main concepts such as the definition, the main properties and the basic aggregations obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. In this analysis, we specially focus in distinguish between OWG aggregations that have a descending or an ascending order. In Section 4, we briefly comment the main concepts of the Dempster-Shafer belief structure. In Section 5, we study the process to follow in decision making with Dempster-Shafer belief structure. We analyze the process using OWA operators in the aggregations as suggested by Yager [50]. The difference with Yager's work is that we distinguish between aggregations that use a Descending OWA (DOWA) operator or an Ascending OWA (AOWA) operator. In Section 6, we propose the use of the OWG operator in the aggregation step of the decision making process with Dempster-Shafer belief structure. We develop the analysis distinguishing between aggregations with a Descending OWG (DOWG) operator or with an Ascending OWG (AOWG) operator. In Section 7, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using the OWA and the OWG operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure. Finally, we summarize the main conclusions in Section 8.

2. Ordered Weighted Averaging (OWA) operator

The OWA operator was introduced in [48] and it provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [7-9,17-19,22,28,29,36,41,43,45,46,49-60]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [48].

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{OWA}_{\text{w}}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j\ b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the DOWA operator and the AOWA operator. We should note that we consider for both cases a situation where the highest value is the best result. The DOWA operator is defined as in definition 1.

Definition 2. An AOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{AOWA}_{\text{w}}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j\ c_j \tag{2}$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way [19]: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the OWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the average criteria [19,48]. Other types of aggregations with the OWA operator can be seen in [19,51].

Another factor to consider, are the two measures introduced by Yager [48] for characterizing the weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure, the attitudinal character, is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n\text{-}j)/(n\text{-}1)]\ w_j. \tag{3}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W)$ = 1, for the pessimistic criteria $\alpha(W)$ = 0, and for the average criteria $\alpha(W)$ = 0.5.

The second measure introduced in [48], is called the entropy of dispersion of W and it is used to provide a measure of the information being used. It is defined as:

$$\text{H(W)} = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4}$$

That is, if w_j = 1 for some j, known as step-OWA [51], then $H(W)$ = 0, and the least amount of information is used. If w_j = 1/n for all j, then $H(W)$ = ln n, and the amount of information used is maximum.

These two measures can also be studied with the AOWA operators. Then, the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(j\text{-}1)/(n\text{-}1)]\ w_j \tag{5}$$

It can be shown that here we also get $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 0, and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 1. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. An interesting result found when comparing the descending and the ascending version of the measure is that they are dual [57] between them. That is: $\alpha_{OWA}(W) = 1 - \alpha_{AOWA}(W)$. For the entropy of dispersion, we will get the same index as in [48], so the measure is the same for both the DOWA and the AOWA operator although the reordering step is different.

3. Ordered Weighted Geometric (OWG) operator

The OWG operator was introduced by Chiclana *et al* [10] and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator. It consists in combine the OWA operator with the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by Xu [44].

Definition 3. An OWG operator of dimension n is a mapping $F: R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$

(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{OWG_W}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{wj} \tag{6}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^{+} is the set of positive real numbers.

From a generalized perspective of the reordering process in the OWG operator, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operator and the Ascending OWG (AOWG) operator [44]. The DOWG operator is defined as in definition 3.

Definition 4. An AOWG operator of dimension n is a mapping $H: R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, having the properties:

(1) $w_j \in [0,1]$

(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{AOWG_W}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{wj} \tag{7}$$

where c_j is the jth largest of the a_i, and R^+ is the set of positive real numbers. As it can be seen, the elements c_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

As it is seen in [10,44], the OWG operator has the following properties:

1) Commutative: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonic: If $a_i \geq d_i$ $\forall_i \Rightarrow \text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) \geq \text{OWG}_w(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Bounded: $\text{Min}_i \{a_i\} \leq \text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) \leq \text{Max}_i \{a_i\}$.
4) Idempotent: $\text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = a$, if $a_i = a$, $\forall i$

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [10]. For example, with the DOWG operator we get:

(1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow \text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_i\}$
(2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow \text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$
(3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall_j \Rightarrow \text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

Other types of aggregations that could be obtained with the DOWG operator are the olympic geometric average and the geometric median. For the olympic geometric average, that it is based on the olympic average [57-58], we should say the following: if $w_1 = w_n = 0$; and $w_j = 1/(n\text{-}2)$ $\forall_{j \neq 1,n}$; then:

$$\text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{j=2}^{n-1} (b_j)^{\frac{1}{n-2}} \tag{8}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

For the geometric median, based on the OWA median [52], we should distinguish between cases where the number of arguments is odd or even. If it is odd, then $\text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = b_{(n+1)/2}$, where $b_{(n+1)/2}$ is the $[(n+1)/2]$th largest of the a_i. If the number of arguments n is even, then we shall call $b_{n/2}$ the lower median and $b_{(n/2)+1}$ the upper median. The lower median represents the $(n/2)$th largest of the a_i and the upper median represents the $[(n/2) + 1]$th largest of the a_i. Then, we can define the median in a different number of ways according to our interests or our attitudinal character. For example: $\text{OWG}_w(a_1,\ldots, a_n)$ = (lower median + upper median) / 2. Other examples for obtaining the geometric median could consist in select the lower median, the upper median, or the whole range between the lower and the upper median.

Using the same methodology as for the DOWG operator, if we look for different types of AOWG operators [44], we get the following:

(1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow \text{AOWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_i\}$
(2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow \text{AOWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$
(3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall_j \Rightarrow \text{AOWG}_w(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

Other types of aggregations that could be obtained with the AOWG operator are the olympic geometric average and the geometric median. For the olympic geometric average we get the same result as with the DOWG operator although the reordering is different. Then, the formulation is as follows: if $w_1 = w_n = 0$; and $w_j = 1/(n\text{-}2)\ \ \forall_{j \neq 1,n}$; then:

$$\text{AOWG}_\text{W}(a_1,\ldots,a_n) = \prod_{j=2}^{n-1}(b_j)^{\frac{1}{n-2}} \tag{9}$$

where b_j is the jth smallest of the a_i.

For the geometric median, we also get the same result when the number of arguments is odd although the reordering of the arguments is different. That is: $\text{AOWG}_\text{W}(a_1,\ldots,a_n) = b_{(n+1)/2}$, where $b_{(n+1)/2}$ is the $[(n+1)/2]$th smallest of the a_i. When the number of arguments is even, then, we find some differences. With the AOWG operator we shall call $b_{n/2}$ the lower median and $b_{(n/2)+1}$ the upper median but now the lower median is the $(n/2)$th smallest of the a_i and the upper median is the $[(n/2)+1]$th smallest of the a_i. With this information, we can obtain the median in a different number of ways. For example: $\text{AOWG}_\text{W}(a_1,\ldots,a_n)$ = (lower median + upper median) / 2. Other examples for obtaining the median are the lower median, the upper median, or the whole range between the lower and the upper median.

4. Dempster-Shafer belief structure

The Dempster-Shafer belief structure was introduced by Dempster [13,14] and by Shafer [30]. Since then, a lot of new developments have been developed about it [1-6,15,16,20,21,25-27,31-35,37,39]. It provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include in the same formulation the cases of risk and ignorance. Obviously, the case of certainty is also included as it can be seen as a particular case of risk or ignorance. For the case of risk, we find a situation of certainty when the probability of some outcome is one. For the case of ignorance, we find a situation of certainty when there is only one element in the set of events. Apart from these traditional cases, the Dempster-Shafer framework allows to represent various other forms of information a decision maker may have about the states of nature.

A Dempster-Shafer belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic assignment function, defined as:

$$m\colon\ 2^X \rightarrow [0, 1]$$

such that:

(1) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.

(2) $m(A) = 0,\ \forall\, A \neq B_j$.

As we said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the Dempster-Shafer framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure [30] if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

For the case of ignorance, the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in [30].

The two measures associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief [30]. The plausibility measure Pl is defined as Pl: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{A \cap B_j \neq \varnothing} m(B_j) \tag{10}$$

The belief measure Bel is also defined as Bel: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B_j \subseteq A} m(B_j) \tag{11}$$

Bel(A) represents the exact support to A and Pl(A) represents the possible support to A. With these two measures we can form the interval of support to A as [Bel(A),Pl(A)]. This interval can be seen as the lower and upper bounds of the probability to which A is supported. From this we see that Pl(A) ≥ Bel(A) for all A. Another interesting aspect about these two measures is that they are connected by $\mathrm{Bel}(A) = 1 - \mathrm{Pl}(\bar{A})$ or by $\mathrm{Pl}(A) = 1 - \mathrm{Bel}(\bar{A})$, where $\bar{A}$ is the complement of A.

5. Decision making with Dempster-Shafer belief structures

The problem of selecting an appropriate alternative in situations in which our knowledge about the state of nature is in the form of a belief structure, has been studied by different authors such as [2,4,16,39,50,55-58]. In [50], Yager proposed a more generalized methodology by using the OWA operators. In the following, we are going to summarize the process as suggested by Yager.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. C_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. In addition, the knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m. The focal elements of m are $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

(1) Determine the payoff matrix.
(2) Determine the belief function m about the states of nature and the decision makers degree of optimism α.
(3) Calculate the collection of weights, w, to be used in the OWA aggregation function for each different cardinality of focal elements [38,41].
(4) Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{C_{ij} \mid S_j \in B_k\}$.
(5) Calculate the aggregated payoff, $V_{ik} = \mathrm{OWA}(M_{ik})$, using Eq. 1, for all the values of i and k.
(6) For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} \; m(B_k) \tag{12}$$

(7) Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

In this process, we could also introduce the AOWA operators instead of the traditional OWA operators. The reason for considering both aggregations is because of the different types of decisions we can find depending on the problem analyzed. Basically, we could distinguish between situations where the highest payoff is the best alternative such as in situations where we analyze benefits, and situations where the highest payoff is the worst alternative such as in situations where we analyze costs. Then, if for a situation of costs we use the OWA operator, our aggregation would not reflect correctly this situation as it would take first the worst result and the weighting vector is prepared for taking the best one. This problem can be demonstrated with an example.

Example 1. Assume we want to aggregate the following arguments (20, 50, 30, 40) and (10, 0, 70, 60), representing the costs of two projects depending on the state of the nature that will happen in the future. Assume the decision maker is very conservative, then, he will have a low degree of optimism α. Assume he uses the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.3, 0.4). As we can see, this weighting vector gives more importance to the last weight because this one is supposed to aggregate the worst case. As the decision maker is conservative, he wants to consider a pessimistic scenario in order to select between these two projects. If we look to the projects before making the aggregation, we could see that the first one is more conservative as its possible results are more stable than the second project. Then, we should expect that the aggregation would give us a result that shows that the first project is the best one. But if we use the OWA operator (Eq. 1), that will not be the case.

$$\text{OWA}(20, 50, 30, 40) = 50 \times 0.1 + 40 \times 0.2 + 30 \times 0.3 + 20 \times 0.4 = 30$$
$$\text{OWA}(10, 0, 70, 60) = 70 \times 0.1 + 60 \times 0.2 + 10 \times 0.3 + 0 \times 0.4 = 22$$

As we can see, we should select the second alternative as it gives us a smaller expected cost. But as it was mentioned before, this is wrong because the arguments are more unstable than the first project and the decision maker was supposed to be conservative. The explanation is that the traditional OWA operator takes first the highest value, and in this case, the highest value is the worst possible scenario. With this example, it is very easy to see that these results are wrong. Then, this problem can be extended to more complex situations where it is not so easy to see directly the conflict of using the OWA operator in a situation of costs.

In order to aggregate correctly in a situation of costs, we need to use the AOWA operator because then we consider first the lowest value which is the best result and so on. In this example, we will get (Eq. 2):

$$\text{AOWA}(20, 50, 30, 40) = 20 \times 0.1 + 30 \times 0.2 + 40 \times 0.3 + 50 \times 0.4 = 40$$
$$\text{AOWA}(10, 0, 70, 60) = 0 \times 0.1 + 10 \times 0.2 + 60 \times 0.3 + 70 \times 0.4 = 48$$

As we can see, with the AOWA operator we decide to select the first alternative as it has the lowest expected cost. This is in accordance with our intuition because the decision maker is selecting the project with more stable results as he is conservative.

From this example, we can conclude that we should use the traditional OWA operator or also called DOWA operator, in situations concerning benefits. But in situations where we analyze costs, we should use the AOWA operator. This conclusion could also be extended for other situations different from benefits and costs. In general, we should use the traditional OWA when we want to aggregate arguments where the highest value is the best result. And we should use the AOWA operator when we want to aggregate arguments where the smallest value is the best result. We should note that for the particular case of costs, we could solve the problem by using negative numbers instead of the AOWA operator as it is shown in [16]. But for other cases, this alternative would not be possible such as in the OWG operator or would be inadequate such as in regret methods [57].

For the case of decision making with Dempster-Shafer belief structure, if we use the AOWA operator, we should make the following changes in the decision process:

In *Step 3*, when determining the collection of weights, w, to be used in the AOWA aggregation function for each different cardinality of focal elements, we should consider that now the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined by Eq. (5).

In *Step 5*, when determining the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AOWA(M_{ik}), using Eq. 2, for all the values of i and k.

In *Step 7*, we should select the alternative with the lowest C_i as the optimal because the best result is the one which predicts the lowest expected values.

6. Using the OWG operators in decision making with Dempster-Shafer belief structures

An alternative method when taking decisions with Dempster-Shafer belief structure is possible by using the OWG operator in the aggregation instead of the OWA operator. The motivation for using the OWG operator is because there are some cases where we could prefer to aggregate with a geometric operator instead of the traditional methods used previously. Here, the procedure will be the same as for the case with the OWA operators [50] with the difference that now we will use the OWG operator in the aggregation step. Then, we can summarize the procedure as follows:

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. C_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. In addition, the knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m. The focal elements of m are $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

(1) Determine the payoff matrix.
(2) Calculate the belief function m about the states of nature.
(3) Determine the collection of weights, w, to be used in the OWG aggregation function for each different cardinality of focal elements.
(4) Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{C_{ij} \mid S_j \in B_k\}$.

(5) Calculate the aggregated payoff, V_{ik} = OWG(M_{ik}), using Eq. 3, for all the values of i and k.

(6) For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, with:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} \ m(B_k) \tag{13}$$

(7) Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

As in the case with OWA operators, we could use in the aggregation step the AOWG operators. The reason for using them is also because they are necessary when analysing a situation of costs or a situation where the smallest value is the best result. We should note that in this case, it is completely necessary because the OWG operator cannot aggregate negative numbers [44]. Then, the alternative method that could be used with the OWA operator [16] is not applicable. Then, if we use the AOWG operators in the decision process, we should make the following changes to the 7 steps mentioned before:

In *Step 5*, when determining the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AOWG(M_{ik}), using Eq. 4, for all the values of i and k.

In *Step 7*, we should select the alternative with the lowest C_i as the optimal because now we assume the best result is the lowest one.

7. Illustrative example

In the following, we are going to develop an example in order to understand numerically all the procedures commented previously. We will distinguish four cases: the aggregation with the OWA operators, with the AOWA operators, with the OWG operators and with the AOWG operators. We will use the same payoff matrix for all the cases. But we have to implicitly assume that when using the OWA and the OWG operator we are considering a decision with benefits and when using the AOWA and the AOWG, a decision with costs.

Step 1: Assume we have the payoff matrix shown in table 1:

Table 1
Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	20	30	10	40	40
A_2	35	20	10	50	25
A_3	30	40	30	30	10
A_4	20	35	40	25	20

Step 2: Assume the decision maker has a degree of optimism of 0.6 or 60% when using OWA operators and assume the following belief function m about the states of nature:

Focal element
$B_1 = \{S_1, S_2, S_5\} = 0.4$

$B_2 = \{S_2, S_3, S_4, S_5\} = 0.3$
$B_3 = \{S_1, S_3\} = 0.3$

Step 3: Assume we have used one of the different methods existing [38,41] for determining the OWA weights or the OWG weights and we have obtained the following weighting vector for different number of arguments.

Number of arguments	w_1	w_2	w_3	w_4
2	0.6	0.4		
3	0.4	0.4	0.2	
4	0.3	0.3	0.3	0.1

Step 4: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Then, we calculate the bags M_{ik}.

$M_{11} = \langle 20, 30, 40 \rangle$ $\quad M_{12} = \langle 30, 10, 40, 40 \rangle$ $\quad M_{13} = \langle 20, 10 \rangle$
$M_{21} = \langle 35, 20, 25 \rangle$ $\quad M_{22} = \langle 20, 10, 50, 25 \rangle$ $\quad M_{23} = \langle 35, 10 \rangle$
$M_{31} = \langle 30, 40, 10 \rangle$ $\quad M_{32} = \langle 40, 30, 30, 10 \rangle$ $\quad M_{33} = \langle 30, 30 \rangle$
$M_{41} = \langle 20, 35, 20 \rangle$ $\quad M_{42} = \langle 35, 40, 25, 20 \rangle$ $\quad M_{43} = \langle 20, 40 \rangle$

From the fifth step, we will distinguish 4 cases: the aggregation with the OWA operator, with the AOWA operator, with the OWG operator and with the AOWG operator.

Step 5: Calculate the aggregated payoff, V_{ik}, using Eq. 1 for the OWA operator, using Eq. 2 for the AOWA operator, using Eq. 6 for the OWG operator and using Eq. 7 for the AOWG operator, for all the values of i and k. The results are shown in table 2.

Table 2
Aggregated payoff

	OWA	*AOWA*	*OWG*	*AOWG*
V_{11}	32	28	31.03	27.02
V_{12}	34	28	31.94	24.2
V_{13}	16	14	15.15	13.19
V_{21}	28	25	27.35	24.45
V_{22}	29.5	21.5	26.26	19.03
V_{23}	25	20	21.2	16.5
V_{31}	30	24	27.01	20.47
V_{32}	31	25	29.3	22.2
V_{33}	30	30	30	30
V_{41}	26	23	25.01	22.37
V_{42}	32	28	31.14	27.11
V_{43}	32	28	30.31	26.39

Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. 12 for the OWA and the AOWA operators and Eq. 13 for the OWG and the AOWG operators. The results obtained for the different operators are shown in table 3.

Table 3
Generalized expected value

	OWA	*AOWA*	*OWG*	*AOWG*
C_1	27.8	23.8	26.54	22.025
C_2	27.55	22.45	25.18	20.439
C_3	30.3	26.1	28.59	23.848
C_4	29.6	26	28.44	24.998

Step 7: For the OWA and the OWG operators, we will select alternative 3 as it gives the highest expected value. For the AOWA and the AOWG operators, we will select alternative 2 because in these cases we assume that the best result is the smallest one.

8. Conclusions

In this paper, we have suggested the use of the OWG operator in decision making with Dempster-Shafer belief structure. We have distinguished between aggregations with an ascending or a descending order. We have seen that there are some problems to aggregate with descending operators when we are in a situation where the smallest value is the best result. We have demonstrated this situation with an example. Although there are alternative solutions with the OWA operator such as using negative numbers, we have seen that for the OWG operator it is completely necessary to use an ascending order because this operator cannot aggregate negative numbers. We have developed the decision making process distinguishing in the aggregation step between the OWA operator, the AOWA operator, the OWG operator and the AOWG operator. Finally, an illustrative example has been given by using the four different cases in the aggregation step.

References

[1] S. Benferhat, A. Saffiotti, P. Smets, Belief functions and default reasoning, Artificial Intelligence 122 (2000) 1-69.

[2] M. Beynon, DS/AHP method: a mathematical analysis, including an understanding of uncertainty, European Journal of Operational Research 140 (2002) 148-164.

[3] M. Beynon, D. Cosker, D. Marshall, An expert system for multi-criteria decision making using Dempster-Shafer theory, Expert Systems with Applications 20 (2001) 357-367.

[4] M. Beynon, B. Curry, P. Morgan, The Dempster-Shafer theory of evidence: an alternative approach to multicriteria decision modeling, Omega 28 (2000) 37-50.

[5] E. Binaghi, P. Madella, Fuzzy Dempster-Shafer reasoning for rule-based classifiers, International Journal of Intelligent Systems 14 (1999) 559-583.

[6] G. Biswas, M. Oliff, A. Sen, An expert decision support system for production control, Decision Support Systems 4 (1988) 235–248.

[7] G. Bordogna, G. Pasi, Linguistic aggregation operators of selection criteria in fuzzy information retrieval, International Journal of Intelligent Systems 10 (1995) 233-248.

[8] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.
[9] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating three representation models in fuzzy multipurpose decision making based on fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 97 (1998) 33-48.
[10] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems. Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.
[11] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 277-291.
[12] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, International Journal of Intelligent Systems 19 (2004) 233-255.
[13] A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, Annals of Mathematical Statistics 38 (1967) 325-339.
[14] A.P. Dempster, A generalization of Bayesian inference, Journal of the Royal Statistical Society B 30 (1968) 205-247.
[15] T. Denoeux, Analysis of evidence-theoretic decision rules for pattern classification, Pattern Recognition 30 (1997) 1095-1107.
[16] K.J. Engemann, H.E. Miller, R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1996) 1-26.
[17] D.P. Filev, R.R. Yager, Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators, Information Sciences 85 (1995) 11-27.
[18] D.P. Filev, R.R. Yager, On the issue of obtaining OWA operator weights, Fuzzy Sets and Systems 94 (1998) 157-169.
[19] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.
[20] P.R. Gillett, Monetary unit sampling: a belief-function implementation for audit and accounting applications, International Journal of Approximate Reasoning 25 (2000) 43-70.
[21] P.R. Gillett, R.P. Srivastava, Attribute sampling: a belief-function approach to statistical audit evidence, Auditing: A Journal of Practice and Theory 19 (2000) 146-155.
[22] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, Direct approach processes in group decision making using linguistic OWA Operators, Fuzzy Sets and Systems 79 (1996) 175-190.
[23] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations, European Journal of Operations Research 129 (2001) 372-385.
[24] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 689-707.
[25] E. Hullermeier, Similarity-based inference as evidential reasoning, International Journal of Approximate Reasoning 26 (2001) 67-100.
[26] M. Ishizuka, K.S. Fu, J.T.P. Yao, Inference procedures and uncertainty for the problem-reduction method, Information Sciences 28 (1982) 179-206.

[27] R.W. Jones, A. Lowe, M.J. Harrison, A framework for intelligent medical diagnosis using the theory of evidence, Knowledge-Based Systems 15 (2002) 77-84.
[28] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge Based Systems 5 (1997) 429-436.
[29] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, An OWA operator with fuzzy ranks, International Journal of Intelligent Systems 13 (1998) 69-81.
[30] G. Shafer, Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
[31] R.P. Srivastava, The belief-function approach to aggregating audit evidence, International Journal of Intelligent Systems 10 (1995) 329-356.
[32] R.P. Srivastava, Audit decisions using belief functions: a review, Control and Cybernetics 26 (1997) 135-160.
[33] R.P. Srivastava, L. Liu, Applications of belief functions in business decisions: a review, Information Systems Frontiers 5 (2003) 359-378.
[34] R.P. Srivastava, T.J. Mock, Belief functions in accounting behavioral research, Accounting Behavioral Research 3 (2000) 225-242.
[35] R.P. Srivastava, G. Shafer, Belief-function formulas for audit risk, The Accounting Review 67 (1992) 249-283.
[36] V. Torra, Information Fusion in Data Mining, Springer, New York, 2002.
[37] P. Wallery, Measures of uncertainty in expert systems, Artificial Intelligence 83 (1996) 1-58.
[38] Y.M. Wang, C. Parkan, A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights, Information Sciences 175 (2005) 20-29.
[39] D.L. Xu, J.B. Yang, Y.M. Wang, The ER approach for multi-attribute decision analysis under interval uncertainties, European Journal of Operational Research 174 (2006) 1914-1943.
[40] Z.S. Xu, A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP, Systems, Engineering and Electronics 24 (2002) 31-33.
[41] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[42] Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations", Decision Support Systems 41 (2006) 488-499.
[43] Z.S. Xu, Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, Information Fusion 7 (2006) 231-238.
[44] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[45] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Uncertain OWA Operator, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 569-575.
[46] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[47] Z.S. Xu, Q.L. Da, An uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator and its application, Information 7 (2004) 175-182.
[48] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18 (1988) 183-190.
[49] R.R. Yager, Applications and extensions of OWA aggregations, International Journal of Man-Machine Studies 37 (1992) 103-132.

[50] R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, International Journal of General Systems 20 (1992) 233-245.
[51] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[52] R.R. Yager, On weighted median aggregation, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2 (1994) 101-113.
[53] R.R. Yager, Fuzzy aggregation of modular neural networks with ordered weighted averaging operators, International Journal of Approximate Reasoning 13 (1995) 359-375.
[54] R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, International Journal of Intelligent Systems 11 (1996) 49-73.
[55] R.R. Yager, On the inclusion of variance in decision making under uncertainty, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1996) 401-419.
[56] R.R. Yager, Hierarchical aggregation functions generated from belief structures, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (2000) 481-490.
[57] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, International Journal of Approximate Reasoning 36 (2004) 109-128.
[58] R.R. Yager, Uncertainty modeling and decision support, Reliability Engineering and System Safety 85 (2004) 341-354.
[59] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized andlike and orlike OWA operators, International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.
[60] R.R. Yager, J. Kacprzyck, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[61] R.R. Yager, Z.S. Xu, The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 1393-1402.

14.2.3. Artículo de revista 3. – Publicado en *International Journal of Computer Systems Science*

Geometric operators in decision making with minimization of regret

José M. Merigó[6], Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
A. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain

Abstract

We study the work developed by Savage about decision making with minimization of maximal regret (MMR). We also study the recent work developed by Yager that generalizes the MMR method. In this generalization, Yager uses the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator in order to obtain the parameterized family of minimal regret methods. In our paper, we focus on the use of the Ascending OWA (AOWA) operator because it seems to be more practical when aggregating values where the smallest one is the best result. We also propose the use of the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator to generalize the MMR method obtaining another parameterized family of minimal regret methods. In this case, we also suggest the distinction between a descending and an ascending order. Finally, an illustrative example is given.

Keywords: Decision making; aggregation operators; regret; uncertainty; OWA operator; OWG operator.

1. Introduction

The Ordered Weighted Geometric (OWG) operator was introduced by Chiclana et al. [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators similar to the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator introduced by Yager in [2]. Since their appearance, a lot of new extensions have been developed about them. For the OWA operator, we could mention for example [3-15] and for the OWG operator [16-24]. Basically, the OWA operator provides a parameterized family of aggregations operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum among others [2-5,14,25-27]. The OWG operator consists in combine in the same aggregation the OWA operator with the geometric mean. It also includes the maximum and minimum as special cases [1,19].

In [28-29], Savage introduced the concept of decision making with minimization of regret. It consisted in the use of the paradigm of minimization of maximal regret (MMR). That is, it consisted in select the smallest regret of the different highest regrets obtained for each alternative. Recently [14], Yager has generalized the MMR method with the introduction of the OWA operators in the paradigm of MMR creating a

[6] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 402 45 80.
E-mail addresses: josema_merigo@hotmail.com (J.M. Merigó), mcasanovas@ub.edu (M. Casanovas).

parameterized family of minimal regret methods. With this generalization, Yager showed that it was possible to aggregate the regret matrix with different criteria such as the average or the Hurwicz criteria.

In this paper, we propose a method that uses the OWG operator to generalize the MMR method obtaining another parameterized family of minimal regret methods. We also suggest the use of an ascending order in the aggregations as it seems to be more practical in situations where the highest value is the worst result. We study in detail these problems considering their properties and the use of different families of operators in the regret matrix such as the step-OWA and the step-OWG operators, the window-OWA and the window-OWG operators, the olympic average and the olympic geometric average, the E-Z OWA and the E-Z OWG weights, and the median for both the OWA and the OWG operators.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly comment the OWA operator, the geometric mean and the OWG operator. In Section 3, we describe the process to follow in decision making with minimization of regret. First, we consider the traditional method developed by Savage [28-29]. Second, we analyze the generalization developed by Yager [14] and we add some aspects about the different families of OWA operators to be used in the regret matrix. Third, we develop the generalization suggested in this paper about using the OWG operator in the aggregation of the regret matrix. In Section 4, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using different arithmetic and geometric operators. Finally, in Section 5 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Aggregation operators

2.1. Ordered Weighted Averaging (OWA) operator

The OWA operator was introduced in [2] and it provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in a wide range of applications [3-15]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [2].

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $F:R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\mathrm{OWA_W}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator. The DOWA operator is defined as in definition 1. Note that we consider for both cases a situation where the highest value is the best result. As it will be shown in the paper, when developing the regret analysis, we can also use one of them for a situation where the highest value is the best result and the other one for a situation where the lowest value is the best result.

Definition 2. An AOWA operator of dimension n is a mapping $H:R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{AOWA}_w(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \; b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing order [7]: $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_n$.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotone, bounded and idempotent [2,7]. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $a_i \ge d_i$, for all i, then, $\text{OWA}_w(a_1,\ldots, a_n) \ge \text{OWA}_w(d_1,\ldots, d_n)$. It is bounded because the OWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. It is idempotent because if $a_i = a$, for all i, then, $\text{OWA}_w(a_1,\ldots, a_n) = a$.

It can also be demonstrated that the OWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the average criteria [2,7]. For the DOWA operator, the maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \ne 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \ne n$. The arithmetic mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. For the AOWA operator, the maximum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \ne n$. The minimum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \ne 1$. The arithmetic mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. Other types of aggregations can be seen in [4,7].

Another factor to consider, are the two measures introduced by Yager [2] for characterizing the weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure, the attitudinal character, is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} [(n-j)/(n-1)] w_j \tag{3}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure introduced in [2], is called the entropy of dispersion of W and it is used to provide a measure of the information being used. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4}$$

That is, if $w_j = 1$ for some j, known as step-OWA [4], then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then $H(W) = \ln n$, and the amount of information used is maximum.

These two measures can also be used with the AOWA operators. Then, the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n}[(j-1)/(n-1)]w_j \tag{5}$$

It can be shown that in this case we also get $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 0, and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 1. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. An interesting result found when comparing the descending and the ascending version of the measure is that they are dual between them. That is: $\alpha_{OWA}(W) = 1 - \alpha_{AOWA}(W)$. Note that there different types of duals in the OWA operator [3,24]. For the second measure, we will get the same index as in [2], so the measure is the same for both the DOWA and the AOWA operator although the reordering step is different.

2.2. Geometric mean

The geometric mean is a traditional aggregation operator which has been used for different applications such as in [30-31] for ratio-scale judgements. It is defined as follows:

Definition 3. A geometric mean operator of dimension *n* is a mapping F: $R^{+n} \rightarrow R^{+}$, defined as:

$$\text{GM}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n}(a_i)^{\frac{1}{n}} \tag{6}$$

where R^{+} is the set of positive real numbers. The geometric mean is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

If we consider that the weights of the geometric mean have different degrees of importance, then, we can formulate the weighted geometric mean. It is defined as follows:

Definition 4. A weighted geometric mean operator is a mapping $F{:}R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension *n* having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{WGM}_{\text{w}}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i^{w_i} \tag{7}$$

where R^{+} is the set of positive real numbers. The weighted geometric mean is commutative, monotonic, bounded and idempotent. With the weighted geometric mean we can obtain the geometric mean when $w_i = 1/n$ for all *i*.

2.3. Ordered Weighted Geometric (OWG) operator

The OWG operator was introduced in [1] and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator. It consists in combine the OWA operator with the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by Xu [19] where we can see the descending and the ascending order of the OWG operator. The OWG and the Descending OWG operator have the same definition.

Definition 4: An OWG operator of dimension n is a mapping $F:R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$OWG_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \quad (8)$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^{+} is the set of positive real numbers.

Definition 5: An Ascending OWG (AOWG) operator of dimension n is a mapping $H:R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, having the properties:

1) $w_j \in [0,1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$AOWG_w(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \quad (9)$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^{+} is the set of positive real numbers. As it can be seen, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$.

As it is seen in [1,19], the OWG operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because $OWG_w(a_1, \ldots, a_n) = OWG_w(d_1, \ldots, d_n)$; where $(d_1, \ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1, \ldots, a_n)$. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all i, then, $OWG_w(a_1, \ldots, a_n) \geq OWG_w(d_1, \ldots, d_n)$. It is bounded because $Min_i\{a_i\} \leq OWG_w(a_1, \ldots, a_n) \leq Max_i\{a_i\}$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all i, then, $OWG_w(a_1, \ldots, a_n) = a$.

Different types of aggregation operators can be obtained by choosing a different manifestation of the weighting vector [1,19]. For example, with the DOWG operators we can get the maximum, the minimum, the geometric mean or the weighted geometric mean. The maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The geometric mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted geometric mean is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of a_i.

Other types of aggregations that could be obtained with the DOWG operator are the weighted geometric median and the E-Z OWG weights. For the weighted geometric median, we will use a different approach than the one used by Yager in [25] for the weighted OWA median. The difference with the median is that in this case, we consider the weights associated with the arguments. Then, instead of looking for the argument with the *(n/2)*th ordered position, we will look for the ordered position where the sum of the weights is 0.5. That is, we will select the argument $OWG_w(a_1,\dots, a_n) = b_k$ where b_k is the *k*th largest argument of the a_i such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5. Note that when $j = i$, for all i and j, where j is the *j*th argument of b_j and i is the *i*th argument of a_i, it is found the weighted geometric median for the weighted geometric mean.

For the E-Z OWG weights based on the E-Z OWA weights [26-27], we could distinguish between two classes. In the first class, which has an optimistic point of view, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$. In the second class, which has a pessimistic point of view, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

If we use the same methodology for the AOWG operators as for the case with DOWG operators, we can also obtain different types of aggregation operators by selecting a different manifestation in the weighting vector [19]. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the geometric mean or the weighted geometric mean. The maximum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The minimum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The geometric mean is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted geometric mean is found when $j = i$, for all i and j, where j is the *j*th argument of b_j and i is the *i*th argument of a_i.

Other types of aggregations that could be obtained with the AOWG operator are the weighted geometric median and the E-Z OWG weights. For the weighted geometric median, we consider the same approach than the one used for the DOWG operators. That is, we consider the weights associated with the arguments. Then, we will look for the ordered position where the sum of the weights is 0.5. In order to do this, we will select the argument $OWG_w(a_1,\dots, a_n) = b_k$ where b_k is the *k*th smallest argument of the a_i such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5. Note that when $j = i$, for all i and j, where j is the *j*th argument of b_j and i is the *i*th argument of a_i, it is found the weighted geometric median for the weighted geometric mean.

For the E-Z AOWG weights based also on the E-Z OWA weights [26-27], we could distinguish between two classes. In the first class, which has an optimistic point of view, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n. In the second class, which has a pessimistic point of view, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$.

3. Methods for decision making using minimization of regret

3.1. Decision making using minimization of maximal regret

The use of minimization of maximal regret in decision making was introduced by Savage [28-29]. In the following, we are going to summarize the basic steps to follow when taking decisions with this method.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1,\ldots,A_q\}$ with states of nature $\{S_1,\ldots,S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix R whose components are the r_{ij}, is the regret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker according to the regret matrix. In order to do this, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{Max}_j\{r_{ij}\}$ for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

As we can see, once established the regret matrix, this method uses a pessimistic criteria. With a similar methodology, we could use other criteria instead of the pessimistic one. For example, we could use the average criteria. Then, the procedure would be the same with the difference that now, in *step 4*, we should use the average criteria in the regret matrix instead of the pessimistic criteria. That is to say, the procedure would be as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = (1/n)\sum_{j=1}^{n} r_{ij}$ for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

As we can see, in this case we aggregate the regret matrix with the average criteria. Other aggregations could be used such as the Hurwicz criteria, the weighted mean, the OWA operator or the OWG operator.

3.2. Using the OWA operators in decision making with minimization of regret

The use of the OWA operators in decision making with minimization of regret was suggested by Yager in [14]. He proposed a generalization for the different regrets methods by using the OWA operator in the regret matrix. Then, all the other criteria could be included in this aggregation as particular cases of using an established attitudinal character. Yager called this generalization the Min-W-Regret procedure [14]. For a better adequacy to all the different situations that could happen, we will call this generalization as the Min-OWA-Regret procedure in order to distinguish between the weighted mean and the OWA operator. The procedure can be summarized as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{OWA}_W(r_{i1},\ldots, r_{in})$ using Eq. 1, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

As we can see, by choosing a different manifestation of the weighting vector of *step 4*, we can obtain different criteria such as the original work developed by Savage [28-

29]. When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, we get the traditional Min-Max regret method. Thus, the original work developed by Savage is a particular case of this generalization. When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, we associate with each alternative the minimal regret. When $w_j = 1/n$, for all j, we are aggregating the regret matrix with the average criteria. When $w_j = \alpha$ for $j = 1$, $w_j = 1 - \alpha$ for $j = n$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1, n$; we are using the Hurwicz criteria in the regret matrix. When $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of a_i, we are aggregating the regret matrix with the weighted average.

Other families of aggregation operators could be obtained by using different manifestations of the weighting vector. For example, when $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$ we are using the step-OWA [4] in the regret matrix. Note that if $k = 1$, the step-OWA is transformed in the maximum and if $k = n$, the step-OWA becomes the minimum. When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-OWA [4] in the regret matrix. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-OWA is transformed in the maximum, if $m = 1$ and $k = n$, the window-OWA becomes the minimum and if $m = n$ and $k = 1$, the window-OWA is transformed in the average criteria.

If $w_1 = w_n = 0$ and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic average [26-27] in the regret matrix. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic average is transformed in the OWA median [25] and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-OWA is transformed in the olympic average. Another type of aggregation that could be used in the regret matrix is the E-Z OWA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

We note that the median and the weighted median can also be used in the regret matrix. For the median [25], if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and if n is even we assign for example $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$. For the weighted median, we follow a different procedure than [25]. We select the kth largest argument of the r_i such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another interesting issue to consider is the properties of this generalized Min-OWA-Regret method. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $r_i \geq d_i$ for all i, then, $\text{OWA}_w(r_1,\ldots, r_n) \geq \text{OWA}_w(d_1,\ldots, d_n)$. It is bounded because $\text{Min}\{r_i\} \leq \text{OWA}_w(r_1,\ldots, r_n) \leq \text{Max}\{r_i\}$. It is idempotent because if $r_i = r$, for all i, then, $\text{OWA}_w(r_1,\ldots, r_n) = r$. As we can see, the generalized Min-OWA-Regret method accomplishes the same properties as the original OWA operator.

In order to adequate the generalized Min-OWA-Regret approach to a degree of optimism with the weighting vector used in the regret matrix, Yager defined R-OPT(W) = $1 - \alpha(W)$. Here $\alpha(W)$ represents the attitudinal character introduced in [2] for the original OWA operator, and R-OPT(W) is the adapted version for the Min-OWA-Regret approach. We see that for $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, $\alpha(W) = 1$ and hence R-OPT(W) = 0, while for $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, $\alpha(W) = 0$ and hence R-OPT(W) = 1.

Analysing the attitudinal character, we see that Yager developed a method that adapted the generalized Min-OWA-Regret approach to the degree of optimism of the weighting vector but it could be simplified by using the AOWA operator. Then, the aggregation would reflect automatically the attitudinal character. The reason for this problem could come from a theoretical point of view where we could say that the OWA operator is appropriate to use in situations involving benefits while the AOWA operator is appropriate to use in situations involving costs. From a more generalized perspective, we could say that we should use the OWA operator in situations where the highest value of the payoff matrix is the best result while we should use the AOWA operator in situations where the smallest value is the best result. We should note that Yager already discussed some kind of dual aggregation but he focussed on the perspective of the Min-OWA-Regret method [14].

The procedure to follow with the AOWA operator is very similar with the difference that now the reordering step is developed in ascending order. We can summarize it as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{AOWA}_W(r_{i1},\ldots, r_{in})$ using Eq. 2, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

In this case, we can see that we obtain directly the degree of optimism $\alpha(W)$. For example, if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, $\alpha(W) = 0$, and if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, $\alpha(W) = 1$. Then, the attitudinal character is the same for both the Min-AOWA-Regret approach and the traditional OWA operator.

Different types of aggregation operators can be obtained by using different manifestations of the weighting vector of *step 4*, such as the original work developed by Savage [27-28]. When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, we get the traditional Min-Max regret method. Thus, the original work developed by Savage is a particular case of this generalization. When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, we associate with each alternative the minimal regret. When $w_j = 1/n$, for all j, we are aggregating the regret matrix with the average criteria. When $w_j = 1 - \alpha$ for $j = 1$, $w_j = \alpha$ for $j = n$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1, n$; we are using the Hurwicz criteria in the regret matrix. When $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of a_i, we are aggregating the regret matrix with the weighted average.

Using a similar methodology as for the DOWA operators, we could obtain other families of aggregation operators by using different manifestations of the weighting vector. For example, when $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$ we are using the step-AOWA in the regret matrix. Note that if $k = n$, the step-AOWA is transformed in the maximum and if $k = 1$, the step-AOWA becomes the minimum. When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m - 1$ and $j < k$, we are using the window-AOWA in the regret matrix. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$, and the reordering of the arguments is ascendant. Also note that if $m = k = 1$, the window-AOWA is transformed in the minimum, if $m = 1$ and $k = n$, the window-AOWA becomes the maximum and if $m = n$ and $k = 1$, the window-AOWA is transformed in the average criteria.

If $w_1 = w_n = 0$ and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the ascending olympic average in the regret matrix. In this case, we get the same result as the case with DOWA operators although the reordering step of the arguments is different. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the ascending olympic average is transformed in the AOWA median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-AOWA is transformed in the ascending olympic average. Another type of aggregation that could be used in the regret matrix is the E-Z AOWA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n. In the second class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$. Note that the reordering of the arguments is ascendant.

The AOWA median and the weighted AOWA median could also be used in the regret matrix. For the AOWA median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and if n is even we assign for example $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$. Note that the results are the same as the DOWA operator. The difference is that now the reordering is ascendant. For the weighted AOWA median, we follow the same methodology as we have used for the DOWA median although in this case the reordering is ascendant. We select the kth smallest argument of the r_i such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

If we consider the properties of this generalized Min-AOWA-Regret method, we find the same results as with the Min-DOWA-Regret method. That is, the Min-AOWA-Regret method is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation, monotonic because if $r_i \geq d_i$ for all i, then, $\mathrm{OWA}_\mathrm{w}(r_1,\ldots, r_n) \geq \mathrm{OWA}_\mathrm{w}(d_1,\ldots, d_n)$, bounded because $\mathrm{Min}\{r_i\} \leq \mathrm{OWA}_\mathrm{w}(r_1,\ldots, r_n) \leq \mathrm{Max}\{r_i\}$ and idempotent because if $r_i = r$, for all i, then, $\mathrm{OWA}_\mathrm{w}(r_1,\ldots, r_n) = r$. Moreover, we find that the Min-OWA-Regret method accomplishes the same properties than the original OWA operator.

3.3. Using the OWG operators in decision making with minimization of regret

The use of the OWG operator in decision making with minimization of regret is an alternative when taking decisions with regret methods. It consists in introduce the OWG operator in the aggregation step of the regret matrix. The motivation for using the OWG operator is because there are some cases where we could prefer to aggregate with a geometric operator instead of the traditional methods used previously. Here, the procedure will be the same as for the case with the OWA operator with the difference that now we will use the OWG operator in the aggregation phase. We will call this procedure the Min-OWG-Regret method. Then, we can summarize the procedure as follows:

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1,\ldots,A_q\}$ with states of nature $\{S_1,\ldots,S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix R whose components are the r_{ij}, is the regret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do that, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \mathrm{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j / c_{ij}$, for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \mathrm{OWG}_W(r_{i1}, \ldots, r_{in})$ using Eq. 7, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \mathrm{Min}_i\{R_i\}$.

Here, we should note that in the construction of the regret matrix, instead of making a substraction between the maximum of each state of nature and the payoff considered we make a division. The reason is because if we do not divide them, we will not get consistent results as the OWG operator cannot aggregate arguments with value 0. Analysing this change, we see that now the aggregation is stable because for the best cases, when multiplying by 1, the result continues to be the same. Then, the result obtained with the Min-OWG-Regret method is similar as in the case with Min-OWA-Regret method where the best value of each state of nature did not add any regret in the whole aggregation. Note that the lowest result obtained by using the Min-OWG-Regret method is 1.

As we can see, the Min-OWG-Regret method is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because $OWG_w(r_1,\ldots, r_n) = OWG_w(d_1,\ldots, d_n)$, where $(d_1,\ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(r_1,\ldots, r_n)$. It is monotonic because if $r_i \geq d_i$ for all i, then, $OWA_w(r_1,\ldots, r_n) \geq OWA_w(d_1,\ldots, d_n)$. It is bounded because $\text{Min}\{r_i\} \leq OWA_w(r_1,\ldots, r_n) \leq \text{Max}\{r_i\}$. It is idempotent because if $r_i = r$, for all i, then, $OWA_w(r_1,\ldots, r_n) = r$. As we can see, the generalized Min-OWG-Regret method accomplishes the same properties as the original OWG operator.

In this case, we could also obtain different aggregations in step 4 by choosing a different weighting vector. When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, we get the application of the Min-Max regret method for the Min-OWG-Regret method. When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$; we associate with each alternative the minimal regret of the Min-OWG-Regret method. When $w_j = 1/n$, for all j; we are aggregating the regret matrix with the geometric mean. When $w_j = \alpha$ for $j = 1$, $w_j = 1 - \alpha$ for $j = n$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1, n$; we are using the Hurwicz criteria in the Min-OWG-Regret method. When $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of r_i, we are aggregating the regret matrix with the weighted geometric mean.

Other families of geometric operators could be obtained for the Min-OWG-Regret method by choosing different manifestations of the weighting vector. For example, when $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$ we are using the step-OWG [19] in the regret matrix. Note that if $k = 1$, the step-OWG is transformed in the maximum and if $k = n$, the step-OWG becomes the minimum. When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-OWG [19] in the regret matrix. Note that in this case k and m must also be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-OWG is transformed in the maximum, if $m = 1$ and $k = n$, the window-OWG becomes the minimum and if $m = n$ and $k = 1$, the window-OWG is transformed in the geometric mean.

If $w_1 = w_n = 0$ and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic geometric average in the regret matrix. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic geometric average is transformed in the OWG median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-OWG is transformed in the olympic geometric average. Another type of geometric operator that could be used in the regret matrix is the E-Z OWG weights. In this type of aggregation, we find two different classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

Other aggregations such as the OWG median and the weighted OWG median can also be used in the Min-OWG-Regret method. For the OWG median, that it is based on the OWA median [25], if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and if n is even we assign for example $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$. Note that if n is odd, the result obtained in the OWG median is the same than the result found in the OWA median. For the weighted OWG median, we follow the same procedure as used for the weighted OWA median and it is a different procedure than [25]. We select the kth largest argument of the r_i such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another alternative that we could use in the aggregation of the regret matrix is the AOWG operator. The motivation for use an ascending order appears in situations where the smallest value is the best result because then, the weighting vector will consider first the best result and so on. The procedure to follow with the AOWG operator is very similar with the difference that now the reordering step is developed in ascending order. We will call it the Min-AOWG-Regret method. We can summarize it as follows:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $r_{ij} = C_j / c_{ij}$, for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $R_i = \text{AOWG}_W(r_{i1},\dots, r_{in})$ using Eq. 8, for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $R_{i*} = \text{Min}_i\{R_i\}$.

Again, in this case we also make a division between the maximum payoff of each state of nature and the specific payoff considered for the state of nature in order to keep stable the aggregation. As we can see, for the maximum payoff of each state of nature we will get the unit in the regret matrix and for the rest of payoffs the result will be higher than one. Then, the aggregation of these regrets will give us consistent results.

By using different weighting vectors we could also obtain different types of aggregations in *step 4*. When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, we get the application of the Min-Max regret method to the Min-AOWG-Regret method. When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, we associate with each alternative the minimal regret. When $w_j = 1/n$, for all j, we are aggregating the regret matrix with the geometric mean. When $w_j = 1 - \alpha$ for $j = 1$, $w_j = \alpha$ for $j = n$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1, n$; we are using the Hurwicz criteria in the Min-AOWG-Regret method. When $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of r_i, we are aggregating the regret matrix with the weighted geometric mean.

Other families of geometric operators could be obtained for the Min-AOWG-Regret method by using different manifestations of the weighting vector. For example, when $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$ we are using the step-AOWG [19] in the regret matrix. Note that if $k = 1$, the step-AOWG is transformed in the minimum and if $k = n$, the step-AOWG becomes the maximum. When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-AOWG [19] in the regret matrix. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-AOWG is transformed in the minimum, if $m = 1$ and $k = n$, the window-AOWG becomes the maximum and if $m = n$ and $k = 1$, the window-AOWG is transformed in the geometric mean.

If $w_1 = w_n = 0$ and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic geometric average in the regret matrix. The difference with the DOWG operator is that in this case the olympic geometric average has an ascending order. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic geometric average is transformed in the AOWG median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-AOWG is transformed in the olympic geometric average. Another type of geometric operator that could be used in the regret matrix is the E-Z AOWG weights. In this type of aggregation, we distinguish between two different classes of aggregations. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n. In the second class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$.

Other aggregations that could be obtained with the Min-AOWG-Regret method are the AOWG median and the weighted AOWG median. For the AOWG median, that it is based on the AOWA median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and if n is even we assign for example $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$. Note that if n is odd, the result obtained in the AOWG median is the same than the result found in the AOWA median. For the weighted AOWG median, we follow the same procedure as used for the weighted AOWA median and it is a different procedure than [25]. We select the kth smallest argument of the r_i such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Analysing the properties of the generalized Min-AOWG-Regret method, we find that it has the same properties than the Min-DOWG-Regret method. That is, it is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because $\text{AOWG}_w(r_1,\ldots, r_n) = \text{AOWG}_w(d_1,\ldots, d_n)$, where $(d_1,\ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(r_1,\ldots, r_n)$. It is monotonic because if $r_i \geq d_i$ for all i, then, $\text{AOWA}_w(r_1,\ldots, r_n) \geq \text{AOWA}_w(d_1,\ldots, d_n)$. It is bounded because $\text{Min}\{r_i\} \leq \text{AOWA}_w(r_1,\ldots, r_n) \leq \text{Max}\{r_i\}$. It is idempotent because if $r_i = r$, for all i, then, $\text{AOWA}_w(r_1,\ldots, r_n) = r$. Furthermore, we can see that the DOWG and the AOWG operators also accomplish these properties [1,19].

4. Illustrative example

In the following, we are going to develop an example in order to understand numerically all the procedures commented previously. We will distinguish between two general cases. In the first case, we will construct the regret matrix in the original form as it was developed by Savage [28-29] and we will consider the aggregation with the arithmetic mean (AM), with the weighted average (WA), with the OWA operator and with the AOWA operator. In the second case, we will construct the regret matrix as it has been explained in the Min-OWG-Regret method and we will consider the aggregation with the geometric mean (GM), with the weighted geometric mean (WGM), with the OWG operator and with the AOWG operator.

With these eight types of aggregations we will see the different results obtained by using a different aggregation in the decision. Note that as the geometric construction of the regret matrix is completely different than the arithmetic one, the results will also be different. The interesting point to analyse is to see which results give the same decision about the selection of an alternative. Note that we have to implicitly assume that when using the OWA and OWG operators, we are considering a decision with Yager's perspective [14] where he corrected the attitudinal character with R-OPT(W) = 1 - $\alpha(W)$ and when using the AOWA and AOWG, a simplified methodology where we obtain automatically $\alpha(W)$. In this example, we will assume the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.3, 0.2). Note that we will use this weighting vector for the WA, for the OWA, for the AOWA, for the WGM, for the OWG and for the AOWG operators. But for the AM and for the GM we will assume that all the weights have the same value. In this case, as there are five states of nature, we will assume that all the weights are 0.2.

Step 1: Assume we have a payoff matrix representing five possible investments A_i that the decision maker has and the expected results depending on the state of nature S_j that happens in the future. The results of the payoff matrix are shown in table 1.

Table 1
Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	60	20	10	40	50
A_2	80	50	20	10	20
A_3	30	40	40	30	40
A_4	20	30	20	30	80
A_5	70	40	40	10	20

Step 2 – Step 3: For the first case, that affects the AM, the WA, the OWA operator and the AOWA operator, we will calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j and $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j. For the second case, that affects the GM, the WGM, the OWG operator and the AOWG operator, we will calculate $C_j = \text{Max}_i\{c_{ij}\}$ for each S_j and $r_{ij} = C_j / c_{ij}$, for each pair A_i and S_j. The results for the first case are shown in table 2 and the results for the second case are shown in table 3.

Table 2
Regret matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	20	30	30	0	30
A_2	0	0	20	30	60
A_3	50	10	0	10	40
A_4	60	20	20	10	0
A_5	10	10	0	30	60

Table 3
Regret matrix for the geometric operators

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	1.33	2.5	4	1	1.6
A_2	1	1	2	4	4
A_3	2.66	1.25	1	1.33	2
A_4	4	1.66	2	1.33	1
A_5	1.14	1.25	1	4	4

Step 4: Aggregate the regret matrix with each aggregation operator according to its formulation. For the first case, we will aggregate table 2 with the AM, with the WA, with the OWA and with the AOWA operators. The OWA operator is defined by Eq. 1 and the AOWA operator by Eq. 2. Note that the AM is a special case of the OWA operator when $w_j = 1/n$, for all j. The WA is also a special case of the OWA operator and it can be obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of b_j and i is the ith argument of a_i. For the second case, we will aggregate table 3 with the GM, with the WGM, with the OWG and with the AOWG operators. The GM is defined by Eq. 6, the WGM is defined by Eq. 7, the OWG operator is defined by Eq. 8 and the AOWG operator is defined by Eq. 9. The results for the first case are shown in table 4 and for the second case in table 5.

Table 4
Aggregated regret for the first case

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	22	20	21	25
A_2	22	25	16	25
A_3	22	18	18	26
A_4	22	17	17	24
A_5	22	24	17	25

Table 5
Aggregated regret for the second case

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	1.84	1.79	1.65	2.02
A_2	2	2.29	1.74	2.29
A_3	1.54	1.44	1.43	1.65
A_4	1.77	1.59	1.59	1.90
A_5	1.86	2.11	1.64	2.14

Step 5: As we can see, with the AM we cannot select an alternative as we get the same result for all of them. With the WA and with the AOWA operator we select alternative 4 as it gives the lowest expected cost. With the OWA operator we will select alternative 2 as in this case this one gets the lowest expected value. For the GM, the WGM, the OWG and the AOWG operators, we select alternative 3 as in these cases this alternative is the one with the lowest value.

5. Conclusions

In this paper, we have introduced the use of the OWG operator in situations of decision making with minimization of regret. For doing this, we have suggested some changes in the construction of the regret matrix in order to adapt it to the aggregation characteristics of the OWG operator. We have also distinguished between descending and ascending aggregations. We have seen that it is better to use descending aggregations in cases where the highest value is the best result while it is better to use ascending aggregations in cases where the smallest value is the best result. We have developed the decision making process distinguishing in the aggregation step between the use of the OWA operator, the AOWA operator, the OWG operator and the AOWG operator. We have considered different families of these operators. Finally, an illustrative example has been given by using different operators in the aggregation step of the decision making process with minimization of regret.

References

[1] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems. Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[2] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 18 (1988) 183-190.

[3] R.R. Yager, Applications and extensions of OWA aggregations, International Journal of Man-Machine Studies 37 (1992) 103-132.

[4] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.

[5] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized andlike and orlike OWA operators, International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.

[6] D.P. Filev, R.R. Yager, Analytic Properties of Maximum Entropy OWA Operators, Information Sciences 85 (1995) 11-27.
[7] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.
[8] R.R. Yager, J. Kacprzyck, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[9] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, An OWA operator with fuzzy ranks, International Journal of Intelligent Systems 13 (1998) 69-81.
[10] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.
[11] V. Torra, Information Fusion in Data Mining, Springer, New York, 2002.
[12] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Uncertain OWA Operator, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 569-575.
[13] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[14] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, International Journal of Approximate Reasoning 36 (2004) 109-128.
[15] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[16] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations, Fuzzy Sets and Systems 122 (2001) 277-291.
[17] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, Multiperson decision-making based on multiplicative preference relations, European Journal of Operational Research 129 (2001) 372-385.
[18] Z.S. Xu, A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP, Systems, Engineering and Electronics 24 (2002) 31-33.
[19] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[20] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 689-707.
[21] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, International Journal of Intelligent Systems 19 (2004) 233-255.
[22] Z.S. Xu, Q.L. Da, An uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator and its application, Information 7 (2004) 175-182.
[23] Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, Decision Support Systems 41 (2006) 488-499.
[24] R.R. Yager, Z.S. Xu, The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making, Fuzzy Sets and Systems 157 (2006) 1393-1402.
[25] R.R. Yager, On weighted median aggregation, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2 (1994) 101-113.
[26] R.R. Yager, E-Z OWA weights, in: Proceedings of the 10th International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA), Istanbul, Turkey, 2003, pp. 39-42.
[27] R.R. Yager, An extension of the naive Bayesian classifier, Information Sciences 176 (2006) 577-588.

[28] L.J. Savage, The theory of statistical decision, Journal of American Statistical Association 46 (1951) 55-67.
[29] L.J. Savage, The foundations of statistics, John Wiley & Sons, NY, 1954.
[30] J. Azcel, T. Saaty, Procedures for synthesizing ratio judgements, Journal of Mathematical Psychology 27 (1983) 93-102.
[31] J. Azcel, C. Alsina, Synthesizing judgements: A functional equations approach, Mathematical Modelling 9 (1987) 311-320.

14.2.4. Artículo de revista 4. – Publicado en *Lectures on Modelling and Simulation*

Using the OWG Operators in the Selection of Financial Products

J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (jmerigo@ub.edu; amgil@ub.edu)

Abstract

In this paper, we develop a method that combines the Ordered Weighted Geometric (OWG) operators with different indexes used for the selection of financial products. The objective of this new model is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select financial products according to his attitude. In order to elaborate this model, first a short revision of the OWG operators is developed. Here, we will distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators because each selection index has a different reordering step. Second, we will briefly explain the general model for the selection of financial products. Then, we will propose the three new indexes consisting in a combination between the OWG operator and the Hamming distance, a combination between the OWG operator and the adequacy coefficient, and a combination between the OWG operator and the index of maximum and minimum level. The work will finish with an illustrative example that will show how these three new instruments function.

Key words

OWG operator, financial product, Hamming distance, adequacy coefficient.

1. Introduction

The selection of the more adequate financial products for the company represents a fundamental problem for its good development. With the large variety of alternatives that exist in the market, the enterprise needs to know which the best financial products according to their interests are. In order to solve this problem, the company has to elaborate a selection process in which they have to compare the different characteristics of each product found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-3] about selection of human resources, the models developed in [4-5] about selection of financial products and the models developed in [6-7] about selection of players in sports.

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results depending on if the decision maker has a high level of optimism or pessimism. This problem can become important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. Our objective in this paper will consist in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of financial products. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the Ordered Weighted Geometric (OWG) operators because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWG operators.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review the main concepts of the OWG operator. Section 3 presents the process to follow with the OWG operator in the selection of financial products. Section 4, 5 and 6, develops three new indexes for the selection of financial products that use the OWG operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level, respectively. Finally, in Section 7 we give an illustrative example of the new approach.

2. OWG Operator

The OWG operator was introduced in [8] and provides a family of aggregation operators similar to the OWA operators [9-16]. In the following, we provide a definition of the OWG operators as introduced by [17].

Definition 1: An OWG operator of dimension n is a mapping $F:{R^+}^n \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \quad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators.

Definition 2: A DOWG operator of dimension n is a mapping $G:{R^+}^n \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$G(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \quad (2)$$

where b_j is the jth largest of the a_i. As it can be seen, the elements b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) are ordered in a decreasing way: $b_1 \geq b_2 \geq \ldots \geq b_n$; taking the same form as the typical OWG operators [8].

Definition 3: An AOWG operator of dimension n is a mapping $H:{R^+}^n \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$H(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} c_j^{w_j} \quad (3)$$

where c_j is the jth lowest of the a_i. As it can be seen, the elements c_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) are ordered in an increasing way: $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_n$.

As it is seen in [8,17], the OWG operator has the following properties:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $a_i \geq d_i$, $\forall\, i \Rightarrow F(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $\text{Min}\{a_i\} \leq F(a_1,\ldots, a_n) \leq \text{Max}\{a_i\}$.
4) Idempotency: $\text{F}(a_1,\ldots, a_n) = a$, if $a_i = a$, $\forall\, i$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [17]. For example, with the DOWG operators we get:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow G(a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow G(a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$, $\forall\, j \Rightarrow G(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

And with the AOWG operators, we get:

1) Optimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow H(a_1,\ldots, a_n) = \text{Max}\{a_i\}$
2) Pessimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow H(a_1,\ldots, a_n) = \text{Min}\{a_i\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$, $\forall\, j \Rightarrow H(a_1,\ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{1/n}$

Other examples of aggregations with OWG operators can be seen in [8,17].

3. Selection of Financial Products with the OWG Operator

The use of the OWG operators in the selection of financial products appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Then, due to the fact that the traditional methods in selection of financial products [1-7] are neutral against the attitude of the decision maker, introducing the OWG operators in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but as it is explained for the OWA operators, the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase [9-16]. This can be useful in a lot of situations as for example, in the situations in where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more prudent decision than in normal cases. Obviously, this increase in the prudence can affect our decision doing that we select a different financial product than we would have chosen with a neutral criteria.

The procedure to follow in the selection of financial products with the OWG operators, is similar to the process developed in [1-3] for human resources and in [4-5] for financial products, with the difference that the instruments used will include the OWG operators in the selection process. Then, the 5 steps to follow will be:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. That is: $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal financial product. That is:

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P =$	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. That is:

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWG operators. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

In the fourth step, the objective is to express numerically the removal between the ideal financial product and the different financial products considered. For this, it can be used the different selection indexes [1-7], with the difference that here they will be mixed with the OWG operators. In the following, it will be shown how to use the OWG operators in the principal selection indexes.

4. Combination between the OWG operator and the Hamming Distance in the Selection of Financial Products

Definition 4: An OWG operator of dimension n combined with the Hamming distance, is a mapping $\beta: R^{+^n} \rightarrow R^+$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$\beta(P,P_k) = \prod_{j=1}^{n} D_j^{w_j} \tag{4}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$. As it can be seen, it has been introduced an AOWG operator in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. It is important to note that we will not include in the aggregation the $D_j = 0$; $\forall_j$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow \beta(P,P_k) = \text{Min}\{D_j\} = \text{Min}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$

2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow \beta(P,P_k) = \text{Max}\{D_j\} = \text{Max}\{|\mu_i - \mu_i^{(k)}|\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall j \Rightarrow \beta(P,P_k) = \prod_{i=1}^{n} (D_j)^{1/n}$

In the case of tie, especially for the optimistic and pessimistic criteria, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

5. Combination between the OWG operator and the Adequacy Coefficient in the Selection of Financial Products

Definition 5: An OWG operator of dimension n combined with the adequacy coefficient, is a mapping $K{:}R^{+^n} \to R^+$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$K(P_k \to P) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{w_j} \tag{5}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWG operator used in the adequacy coefficient is the DOWG operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_n$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow K(P_k \to P) = \text{Max}\ \{K_j\} = \text{Max}\{1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})\}$
2) Pessimistic: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow K(P_k \to P) = \text{Min}\{K_j\} = \text{Min}\{1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall j \Rightarrow K(P_k \to P) = \prod_{i=1}^{n} (K_j)^{1/n}$

6. Combination between the OWG operator and the Index of Maximum and Minimum Level in the Selection of Financial Products

Definition 6: An OWG operator of dimension n combined with the index of maximum and minimum level, is a mapping $S{:}R^{+^n} \to R^+$ that has an associated weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_n)^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$S(P_k \to P) = \prod_{j=1}^{n} S_j^{w_j} \tag{6}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWG operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$; $\forall_j$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example:

1) Optimistic criteria: $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq 1} \Rightarrow S(P,P_k) = \text{Min}\{S_j\}$
2) Pessimistic criteria: $w_n = 1$ and $w_j = 0$ $\forall_{j \neq n} \Rightarrow S(P,P_k) = \text{Max}\{S_j\}$
3) Geometric mean: $w_j = 1/n$ $\forall j \Rightarrow S(P_k \rightarrow P) = \prod_{i=1}^{n}(S_j)^{1/n}$

7. Illustrative Example

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company: It is considered for each characteristic a property. For C_1 *cheap money*, for C_2 *a good devolution period*, for C_3 *renewal possibilities*, for C_4 *ideal break up of the amortization*, for C_5 *velocity in the concession*.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the fuzzy subset of ideals for the company as:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P =$	0.9	0.83	0.66	0.66	0.33

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. For each of these characteristics, it is found the following information:

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P_1 =$	0.8	0.7	0.33	1	1

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P_2 =$	0.81	1	0.6	0.33	0.3

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P_3 =$	1	0.66	1	1	0.2

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWG operators. We suppose: $W = (0'1, 0'1, 0'2, 0'3, 0'3)$.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each financial product. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using Eq. (4).

$P_1 = 0'1^{0'1} \text{ x } 0'13^{0'1} \text{ x } 0'33^{0'2} \text{ x } 0'33^{0'3} \text{ x } 0'66^{0'3} = 0'328$
$P_2 = 0'03^{0'1} \text{ x } 0'06^{0'1} \text{ x } 0'09^{0'2} \text{ x } 0'17^{0'3} \text{ x } 0'33^{0'3} = 0'165$
$P_3 = 0'1^{0'1} \text{ x } 0'13^{0'1} \text{ x } 0'17^{0'2} \text{ x } 0'33^{0'3} \text{ x } 0'33^{0'3} = 0'233$

In this case, our decision will consist in choose the financial product with the smallest distance. Then, we will select P_2.

If we elaborate the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal financial product. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered in a decreasing way using Eq. (5).

$P_1 = 1^{0'1} \text{ x } 1^{0'1} \text{ x } 0'9^{0'2} \text{ x } 0'87^{0'3} \text{ x } 0'66^{0'3} = 0'829$
$P_2 = 1^{0'1} \text{ x } 0'97^{0'1} \text{ x } 0'94^{0'2} \text{ x } 0'91^{0'3} \text{ x } 0'66^{0'3} = 0'845$
$P_3 = 1^{0'1} \text{ x } 1^{0'1} \text{ x } 1^{0'2} \text{ x } 0'87^{0'3} \text{ x } 0'83^{0'3} = 0'906$

The decision will consist in choose the financial product with the highest result, because that will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_3.

Finally, we will elaborate an instrument that combines at the same time both the Hamming distance and the adequacy coefficient. In this example we will suppose that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using Eq. (6). Here, we note that in the reordering phase, it will only be considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained by the adequacy coefficient or by the Hamming distance.

$P_1 = 0'1^{0'1} \text{ x } 0'13^{0'1} \text{ x } 0'33^{0'2} \text{ x } 0'33^{0'3} \text{ x } 0'66^{0'3} = 0'328$
$P_2 = 0'03^{0'1} \text{ x } 0'06^{0'2} \text{ x } 0'09^{0'3} \text{ x } 0'33^{0'3} = 0'139$
$P_3 = 0'13^{0'1} \text{ x } 0'17^{0'2} \text{ x } 0'33^{0'3} \text{ x } 0'33^{0'3} = 0'294$

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

8. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have proposed the possibility of change this neutrality with the introduction of the OWG operators in the selection process. As we have seen, the OWG operators permit under estimate or over estimate the selection process, which has permitted manipulate the initial neutrality. With this information, we have proposed three new instruments for the selection of financial products, consisting in combine the old selection indexes with the OWG operators. Then, we have obtained three new methods that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of financial products.

This work represents a first analysis about the possibility of combining the OWG operators with different selection indexes. In this paper, we have concentrated in the selection of financial products but it is important to note that these new methods can also be applied to other selection processes as the selection of human resources. In future research, we will analyse how these methods can be applied to other selection processes and combined with other selection indexes.

References

1. A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.
2. A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.
3. J. Gil-Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
4. A.M. Gil-Lafuente, "Técnicas de selección de un instrumento financiero", in: *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, Spain, 1990.
5. A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.
6. J. Gil-Lafuente, "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM)*, Reggio Calabria, Italia, 2001.
7. J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.
8. F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, "The ordered weighted geometric operator: Properties and Application" in: *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991, 2000.
9. R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, vol. 18, no. 1, pp. 183-190, 1988.
10. T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation operators: New trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.
11. J.M. Merigó, *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
12. J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA operators in the selection of financial products", in: *Proceedings of the 41st CLADEA Congress*, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.
13. Z.S. Xu, Q.L. Da, "An Overview of Operators for Aggregating Information", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 18, no. 9, pp. 953-969, 2003.
14. R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, no. 1, pp. 41-69, 1992.
15. R.R. Yager, "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, no. 2, pp. 125-148, 1993.
16. R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
17. Z.S. Xu, Q.L. Da, "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operator", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 17, no. 7, pp. 709-716, 2002.

14.2.5. Artículo de revista 5. – Publicado en *Lectures on Modelling and Simulation*

Acquisition of Financial Products that Adapt to Different Environments

A.M. Gil-Lafuente, J.M. Merigó
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (jmerigo@ub.edu; amgil@ub.edu)

Abstract

We introduce the ordered weighted In this paper, we study how to select financial products when the company has different necessities depending on the situation that it will happen in the future. Initially, we start explaining the process to follow in these situations. Then, we define different techniques that could be used in the selection process of polyvalent financial products. In this work, we analyse the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. For the three instruments, we analyse the case where the characteristics have the same degree of importance, the case where the characteristics have different degrees of importance, the case where the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator is used and the case where the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator is used.

Key words

Hamming distance, adequacy coefficient, polyvalent financial product, OWA operator.

1. Introduction

Selecting the best financial product for the company is one of the key problems to be solved in order for its good development. Nowadays, there are a lot of financial products in the market that the company needs to analyse so they can find the most adequate for their necessities. In order to solve this problem, the company has to develop a selection process of financial products because they need to choose the best financial product in each moment of its life. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus in the models developed in [1-2] about selection of human resources, the models developed in [3-4] about selection of financial products and the models developed in [5-6] about selection of players in sports.

Sometimes, depending on the situation that happens in the future, the company has different necessities and this also affects their needs about financial products. Our objective in this paper will consist in develop different techniques to solve this problem. First, we will analyse how to consider mathematically these different situations that could happen in the future. Then, we will develop the different indexes that could be used in these cases. Basically, we will analyse the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. For each technique we will consider the case where the characteristics of the financial products have the same degree of importance, the case where the characteristics have different degrees of importance, the case where the Ordered Weighted Averaging (OWA) operator is used and the case where the Ordered Weighted Geometric (OWG) operator is used.

2. Selection of Financial Products that Adapt to Different Environments

This type of selection is very similar to the traditional selection of financial products with the difference that here it can occur different situations in the future. Then, the selection needs to consider this aspect and search for the financial product that better adapts to the different possible situations that could occur. The mathematical process will be equal with the difference that here we will have more than one ideal fuzzy subset. With this additional information, the fuzzy subsets of each product will be compared with all the ideal fuzzy subsets that we have. Then, the process to follow will consist in the following steps similar to [1-2, 5]:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2,\dots, C_i, \dots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Identification of the different possible scenarios that could occur in the future where we should need different ideal fuzzy subsets. These z fuzzy subsets will be considered as: $h = 1, 2,\dots, z$; where each fuzzy subset would represent the necessities of the company in each situation h.

Step 3: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the different ideal financial products for all the possible situations that could occur. Mathematically, it will be represented as:

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P_h =	μ_1^h	μ_2^h	…	μ_i^h	…	μ_n^h

where P_h is the hth ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \dots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the hth ideal financial product.

Step 4: Grouping of all the different ideal financial products in one fuzzy subset.

	C_1	…	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_{1,\dots,z}$ =	μ_1^1	…	μ_n^1	…	μ_1^z	…	μ_n^z

where $P_{1,2,\dots,z}$ refers to the grouping of the hth ideal financial products expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \dots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the hth ideal financial product.

Step 5: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. Theoretically, it will be represented as:

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P_j =	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the kth financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth financial product.

Step 6: Construction of a fuzzy subset for each financial product that is adapted to the ideal financial product with different situations. It consists in create a fuzzy subset with the subset of the financial product k repeated z times.

$$P_j^{(p)} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \multicolumn{1}{c}{C_1} & \multicolumn{1}{c}{\ldots} & \multicolumn{1}{c}{C_n} & \multicolumn{1}{c}{\ldots} & \multicolumn{1}{c}{C_1} & \multicolumn{1}{c}{\ldots} & \multicolumn{1}{c}{C_n} \\ \hline \mu_1^{(j)} & \ldots & \mu_n^{(j)} & \ldots & \mu_1^{(j)} & \ldots & \mu_n^{(j)} \\ \hline \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{1} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{\ldots} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{z} & \multicolumn{1}{c}{} \end{array}$$

Step 7: Comparison between the ideal financial product and the different financial products, and determination of the level of removal.

In this step, we have to express numerically the approximation between the ideal financial product and the different financial products considered. To solve this problem, we have a lot of different selection indexes that can be used. In this paper, we will use the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. In these three cases, we will consider the situation that the characteristics have the same level of importance, the situation with different degrees of importance, the situation found with the OWA operators and the situation found with the OWG operators. These different indexes in the selection of financial products that adapt to different environments will be considered in the next chapters.

Step 8: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

3. Using the Hamming Distance in the Selection of Polyvalent Financial Products

A first index that can be used in the selection process is the Hamming distance. Here we will consider four cases where the Hamming distance could be used. First, we could consider the case where the characteristics have the same level of importance. Then, we could define the Hamming distance as:

$$\delta(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i{}^h - \mu_i{}^{(k)}\right| \tag{1}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall\ (P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i{}^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$. Analysing the results, we see that they refer to the removal of each financial product to the ideal one for all the different situations that could occur. The result will be between 0 and 1. Values near 0 will mean that the financial product is interesting because it has similar valuations than the ideal one. Values near 1 will mean that the financial product is not interesting for the company.

A second case that we could consider is the case where the characteristics have different degrees of importance. In order to use different degrees of importance, we can use a convex weighting so the result is still in [0,1]:

$$V_i^h = \frac{w_i{}^h}{\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i{}^h} \tag{2}$$

where V_i^h refers to the degree of importance of the characteristic C_i^h, w_i^h is the valuation done for the characteristic C_i^h and $\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h$ is the sum of all the valuations done for all the characteristics of each financial product.

From this convex weighting, we could obtain the Hamming distance as:

$$\pi(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} V_i^h \left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \tag{3}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; $k = 1,2,\ldots,m$; and $\forall\ (P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

A third case could be the introduction of the OWA operators in the selection process in order to introduce the attitudinal character of the decision maker in the decision. The OWA operator was introduced in [7] and it has been applied in different fields [8-9]. In this case, using the same methodology as in [9], the formulation will be:

$$\beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j D_j \tag{4}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$. As it can be seen, it has been introduced an Ascending OWA (AOWA) operator [10] in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. And w_j represents a weighting vector W with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

With this weighting vector, we can calculate the attitudinal character [7] as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{zn}\left[\frac{zn-j}{zn-1}\right] w_j \tag{5}$$

As we can see: $\alpha \in [0, 1]$. Values near 1, show that the selection process has been developed with a high level of optimism, while values near 0, show that the selection process has been developed with a low level of optimism or with a high level of pessimism.

This instrument can be very useful when the result obtained is not clear and the decision maker wants to reconsider the decision changing his degree of optimism. Note that by choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [7-9].

A fourth case could be the introduction of the OWG operators in the selection process in order to introduce a geometric version of the OWA operators. The OWG operator was introduced in [11] and it has also been used in different studies as in [12] for the selection of financial products. Using the same methodology as in [12], we could formulate this case as:

$$\beta(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) = \prod_{j=1}^{zn} D_j^{w_j} \tag{6}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$. As it can be seen, it has been introduced an Ascending OWG (AOWG) operator [13] in the

Hamming distance because the reordering step is ascendant. It is important to note that we will not include in the aggregation the D_j = 0; $\forall_j$. Here, w_j represents a weighting vector with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators [11-13].

4. Using the Adequacy Coefficient in the Selection of Polyvalent Financial Products

Another index that could be used in the selection process is the adequacy coefficient. Here, we will also consider four cases where the adequacy coefficient could be used. First, we could consider the case where the characteristics have the same level of importance. In this case, the adequacy coefficient will be:

$$K(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn} \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} \left[1 \wedge (1 - \mu_i{}^h + \mu_i{}^{(k)})\right] \tag{7}$$

with: k = 1,2,…,m. About the results obtained, we should note that they refer to the approximation of the financial products to the ideal. Then, our preference relation will be constructed in a decreasing order being the highest value the best result.

Analogously to this index, we could calculate its equivalent removal index. Its formulation for the case of financial products is:

$$Q(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn} \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} \left[0 \vee (\mu_i{}^h - \mu_i{}^{(k)})\right] \tag{8}$$

In this case, the preference relation will be ascendant. That is, we will select the lowest result. Obviously, we see that the adequacy coefficient and the removal index are inversely related:

$$K(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = 1 - Q(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) \tag{9}$$

A second case that we could consider is the case where the characteristics have different degrees of importance. In order to use different degrees of importance, we could use a convex weighting so the result is still in [0,1].

For this case, we will use the same convex weighting as in Eq. (2). Then, the adequacy coefficient will be:

$$K(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} V_i{}^h \left[1 \wedge (1 - \mu_i{}^h + \mu_i{}^{(k)})\right] \tag{10}$$

And for the removal index:

$$Q(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z} \sum_{i=1}^{n} V_i{}^h \left[0 \vee (\mu_i{}^h - \mu_i{}^{(k)})\right] \tag{11}$$

A third case that could be used, would be the introduction of the OWA operators in the adequacy coefficient. Using the same methodology as in [9], the formulation will be:

$$K(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j K_j \tag{12}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing way as the best result is the largest number. Then, the type of OWA operator used is the Descending OWA (DOWA) operator [7]: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_{zn}$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1. And w_j represents a weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$. Note that in this case, we could also calculate the attitudinal character $\alpha(W)$ [7] and different particular cases [7-9]. Note also that it is possible to calculate the removal index in a similar way as in Eq. (10) and (11).

Finally, a fourth case that could be used with the adequacy coefficient would be the introduction of the OWG operators in the index in order to use the attitudinal character of the decision maker in the selection process. Here, the formulation would be:

$$K(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \prod_{j=1}^{zn} K_j^{w_j} \tag{13}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWG operator used is the Descending OWG (DOWG) operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_{zn}$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1. And w_j represents a weighting vector with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Similar to [11-13], we could also get different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector.

5. Using the Index of Maximum and Minimum Level in the Selection of Polyvalent Financial Products

The third index that we will consider in the selection of polyvalent financial products is the index of maximum and minimum level introduced in [5]. A first case that we could consider is the case where all the characteristics have the same degree of importance. Then, the formulation will be:

$$\eta(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{u+v}\left[\sum_u \left|\mu_i{}^h(u) - \mu_i{}^{(k)}(u)\right| + \sum_v \left[0 \vee (\mu_i{}^h(v) - \mu_i{}^{(k)}(v))\right]\right] \tag{14}$$

where u refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and v refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. We should note that $u + v = zn$. That is, the sum of both groups of characteristics is equal to the total number of characteristics.

As in the previous indexes, we could consider the case where the characteristics have different levels of importance. To solve this problem, we should introduce a version of Eq. (2) in Eq. (14). Then, the formulation is:

$$\eta(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_u Z_i^h(u)\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + \sum_v Z_i^h(v)\left(0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))\right) \tag{15}$$

$Z_i^h = w_i^h \,/\, \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h$; which represents the level of importance of the characteristic C_i^h.

Analogously to this removal index, we could calculate the approximation index as:

$$\upsilon(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = 1 - \eta(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) \tag{16}$$

A third case that we could consider is the introduction of the OWA operators in the index of maximum and minimum level in order to modify the neutrality of the index. Using the same methodology as in [9], the formulation will be:

$$S(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j S_j \tag{17}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_{zn}$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient. Here, w_j represents a weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$, and we could also calculate the attitudinal character $\alpha(W)$ as in [7] and different particular cases [7-9].

Finally, the last case we will consider in this paper is the introduction of the OWG operator in the index of maximum and minimum level in order to change the neutrality of the selection process. Here, the formulation will be:

$$S(P_k^{(p)} \to P_{1,2,\ldots,z}) = \prod_{i=1}^{zn} S_j^{\,w_j} \tag{18}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWG operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_{zn}$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$; $\forall j$. For this case, w_j represents a weighting vector, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Similar to [12], we could also get different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector.

5. Conclusions

We have introduced the OWAD operator. In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Due to the fact that the company does not know the necessities they will have in the future, we have developed a selection process that considers the different necessities the company could have in the future. Initially, we have established the different steps to do in the selection process. Then, we have defined different indexes that could be used in this type of selection. First, we have used the Hamming distance in these situations. Second, we have studied how the adequacy coefficient can be used when there are different ideals to consider. And third, we have analysed the index of maximum and minimum level in these situations. For these three indexes, we have considered the case where the characteristics have the same level of importance, the case where the characteristics have different degrees of importance, the case where the technique can be combined with the OWA operator and the case where the technique is combined with the OWG operator.

This work represents a first analysis in the selection of financial products that have to adapt to different situations. We should note that these techniques can also be applied to other types of selection as the selection of human resources. In future research we expect to continue developing this problem creating more methods to solve it.

References

[1] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.

[2] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.

[3] A.M. Gil-Lafuente, "Técnicas de selección de un instrumento financiero", in: *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, Spain, 1990.

[4] A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[5] J. Gil-Lafuente, "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM)*, Reggio Calabria, Italia, 2001.

[6] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[7] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, vol. 18, no. 1, pp. 183-190, 1988.

[8] R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA operators in the selection of financial products", in: *Proceedings of the 41st CLADEA Congress*, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.

[10] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, no. 1, pp. 41-69, 1992.

[11] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, "The ordered weighted geometric operator: Properties and Application" in: *Proceedings of the 8th Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, pp. 985-991, 2000.

[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWG operators in the selection of financial products", in: *Proceedings of the AMSE International Conference on modelling and Simulation*, Konya, Turkey, pp. 725-728, 2006.

[13] Z.S. Xu, Q.L. Da, “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operator”, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 17, no. 7, pp. 709-716, 2002.

14.2.6. Artículo de revista 6. – Publicado en *International Journal of Computational Intelligence*

DECISION MAKING USING MAXIMIZATION OF NEGRET

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Abstract—**We analyze the problem of decision making under ignorance with regrets. Recently, Yager has developed a new method for decision making where instead of using regrets he uses another type of transformation called negrets. Basically, the negret is considered as the dual of the regret. We study this problem in detail and we suggest the use of geometric aggregation operators in this method. For doing this, we develop a different method for constructing the negret matrix where all the values are positive. The main result obtained is that now the model is able to deal with negative numbers because of the transformation done in the negret matrix. We further extent these results to another model developed also by Yager about mixing valuations and negrets. Unfortunately, in this case we are not able to deal with negative numbers because the valuations can be either positive or negative.**

***Keywords*—**Decision Making, Aggregation operators, Negret, OWA operator, OWG operator.

INTRODUCTION

IN the literature, we find a wide range of aggregation operators for fusing the information such as the ordered weighted averaging (OWA) operator and the ordered weighted geometric (OWG) operator. The OWA operator was introduced by Yager [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, among others. The OWG operator is a geometric version of the OWA operator introduced in [2] and it also provides a parameterized family of aggregation operators. For further reading on the OWA or the OWG operator, see for example [3] – [24].

In [25], [26], Savage introduced the concept of decision making with minimization of regret. It consists in a decision process where the payoffs are transformed in regret values that express the regret against the optimal choice for each state of nature. Recently, Yager [20] has suggested a different method for dealing with regrets. He develops a process that uses the dual of the regret. He refers to these values as the negret against the optimal choice. Then, by using the OWA operator, this method provides a parameterized family of negret aggregation operators. Moreover, this method can also be mixed with the usual valuation methods because in both cases the optimal choice is the one with the highest value.

In this paper, we suggest a new method for decision making under ignorance with negrets. We propose the use of geometric aggregation operators in decision making with

Manuscript received October 20, 2007.
J.M. Merigó is with the Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (corresponding author: +34-93-4021962; fax: +34-93-4024580; e-mail: jmerigo@ub.edu).
M. Casanovas is with the Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (e-mail: mcasanovas@ub.edu).

maximization of negret. For doing this, we will develop a new procedure for constructing the negret matrix where we will transform all the negret values in positive numbers. Then, we will be able to use the OWG operator because it can only deal with positive numbers. Furthermore, we will apply this new approach in Yagers model [20] about mixing valuation and regret methods. Unfortunately, in this case, we are not able to deal with negative numbers when using the OWG operator because the usual valuations can be either positive or negative. It is also interesting to note that other transformations could be developed in the negret matrix. Among them, one possible construction could be the construction used in the Analytic Hierarchy Process (AHP) [27]. The problem found in this particular construction is that it cannot deal with negative numbers when using geometric aggregation operators because the results become inconsistent. Therefore, in this paper we prefer to focus on a method that is able to deal with negative numbers.

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section II, we briefly comment some basic aggregation operators to be used throughout the paper. In Section III, we analyze the decision making problem with maximization of negret. In Section IV, we study a more general model about mixing valuation and regret methods. Finally, in Section V, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using the new approaches suggested in the paper.

Preliminaries

OWA Operator

The OWA operator was introduced in [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in a wide range of applications [9] – [22]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [1].

Definition 1: An OWA operator of dimension n is a mapping OWA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator [14]. The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotone, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the OWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the average criteria among others [1], [9], [11], [15] – [19], [21].

Geometric Mean

The geometric mean is a traditional aggregation operator which has been used for different applications such as in [28], [29], for ratio-scale judgements. It is defined as follows:

Definition 2: A geometric mean operator of dimension n is a mapping GM: $R^{+n} \to R^{+}$, defined as:

$$GM(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{i=1}^{n} (a_i)^{\frac{1}{n}} \qquad (2)$$

where R^{+} is the set of positive real numbers. The geometric mean is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that it is also possible to consider a situation where the weights of the arguments have different degrees of importance. Then, we are using the weighted geometric mean (WGM).

OWG Operator

The OWG operator was introduced in [2] and it provides a family of aggregation operators similar to the OWA operator. It uses in the same aggregation the OWA operator and the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by [13].

Definition 3: An OWG operator of dimension n is a mapping OWG:$R^{+n} \to R^{+}$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$OWG(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \qquad (3)$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and R^{+} is the set of positive real numbers.

From a generalized perspective of the reordering step in the OWG operator, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators [13]. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DOWG (or OWG) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AOWG operator. Note that it accomplishes similar properties than the OWA operator [2] – [10]. For example, in this operator it is also found the maximum and the minimum as particular cases. Other families found in this aggregation are the geometric mean, the weighted geometric mean, the Hurwicz geometric criteria, etc.

Decision Making Using Maximization of Minimal Negret

Introduction

The use of maximization of minimal regret in decision making was introduced by Yager [20]. This model is similar to the minimization of regret process. The difference is that the negret process considers first the payoff c_{ij} while the regret process considers first the maximal payoff C_j for each state of nature. That is, the regret is calculated as: $C_j - c_{ij}$; while the negret as: $c_{ij} - C_j$. With this information, we can summarize the basic steps when taking decisions with the negret method as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix E whose components are the e_{ij}, is the negret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. In order to do this, the following steps should be taken:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $e_{ij} = c_{ij} - C_j$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $E_i = OWA(e_{i1}, \ldots, e_{in})$ using (1), for each A_i.
Step 5: Select A_{i^*} such that $E_{i^*} = \text{Max}\{E_i\}$.

As we can see, once we calculate the negret matrix, we aggregate the information obtained with the OWA operator. This method suggested by Yager is a general one that includes among others the pessimistic, the optimistic and the average criteria. These particular situations are obtained by using a different manifestation in the weighting vector of Step 4. Then:

1) When $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$; we are using an optimistic aggregation operator.
2) When $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$; we are using a pessimistic criteria.
3) When $w_j = 1/\text{n}$, for all j; we are aggregating the negret matrix with the average criteria.

Note that we will refer to this decision process as the Max-OWA-Negret procedure. Also note that other families of Max-OWA-Negret operators could be used in the aggregation of the negret matrix such as the step-OWA, the window-OWA, the olympic-OWA, the OWA median, the centered-OWA, the S-OWA, the maximal entropy OWA, etc.

Using the OWG Operator

The use of the OWG operator in decision making with maximization of negret is an alternative when taking decisions with negret methods. It consists in using the OWG operator in the aggregation step of the negret matrix. When using geometric operators, we need to modify the negret matrix because it cannot deal with negative numbers. This problem has also been considered for the regret matrix [10]. Then, the transformation we suggest is to sum the minimum argument in absolute numbers plus the maximum argument and plus one: $c_{ij} - C_j + |\ \text{Min}\{c_{ij}\} + C_j\ | + 1$. With this construction in the negret matrix, we are able to aggregate with geometric aggregation operators because now, all the arguments are positive. The decision process will be the same as for the case with OWA operators with the differences commented above. We can summarize the procedure as follows:

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. The matrix E whose components are the e_{ij}, is the negret matrix. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the payoff to the decision maker. Note that we refer to this process as the Max-OWG-Negret. In order to do this, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate $C_j = \text{Max}\{c_{ij}\}$ for each S_j.
Step 3: Calculate $e_{ij} = c_{ij} - C_j + |\text{Min}\{c_{ij}\}| + |C_j| + 1$; for each pair A_i and S_j.
Step 4: Calculate $E_i = OWG(e_{i1}, \ldots, e_{in})$ using (3), for each A_i.
Step 5: Select A_{i*} such that $E_{i*} = \text{Max}\{E_i\}$.

As we can see, the main difference in this decision procedure is that now we use geometric aggregation operators. Therefore, we need to develop a different negret matrix in order to obtain positive numbers because the OWG operator cannot aggregate negative numbers.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Max-OWG-Negret operator and the ascending Max-OWG-Negret operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Max-DOWG-Negret and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Max-AOWG-Negret operator. As we can see, the main difference is that in the Max-AOWG-Negret operator, the elements e_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $e_1 \leq e_2 \leq \ldots \leq e_n$ while in the Max-DOWG-Negret (or Max-OWG-Negret) they are ordered in a decreasing way.

Another interesting issue to consider is the properties of this generalized Max-OWG-Negret method:

1) Commutativity: any permutation of the arguments has the same evaluation.
2) Monotonicity: If $e_i \geq d_i$ for all $i \Rightarrow OWG(e_1, \ldots, e_n) \geq OWG(d_1, \ldots, d_n)$.
3) Boundedness: $\text{Min}\{e_i\} \leq OWG(e_1, \ldots, e_n) \leq \text{Max}\{e_i\}$.
4) Idempotency: If $e_i = e$, for all $i \Rightarrow OWG(e_1, \ldots, e_n) = e$.

As we can see, the generalized Max-OWG-Negret method accomplishes the same properties as the original OWG operator.

In this case, it is also included as particular cases the maximum and the minimum. The maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$; and the minimum when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The geometric mean is also a special type of aggregation operator found in this model. It appears when $w_j = 1/n$, for all j.

Other families of OWG operators could be used such as the S-OWG operator, the olympic-OWG, the E-Z OWG weights, the OWG median, the centered-OWG operator, etc. For example, if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the Max-olympic-OWG-Negret which has the same methodology than the OWA version [18]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the Max-olympic-OWG-Negret is transformed in the Max-median-OWG-Negret and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the Max-window-OWG-Negret is transformed in the Max-olympic-OWG-Negret.

Another interesting family is the Max-S-OWG-Negret operator which is based on [15], [17]. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized Max-S-OWG-Negret. The "orlike" Max-olympic-OWG-Negret operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the Max-GM-Negret and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" Max-S-OWG-Negret operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the Max-GM-Negret and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized Max-S-OWG-Negret operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized Max-S-OWG-Negret becomes the "andlike" Max-S-OWG-Negret and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" Max-S-OWG-Negret operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized Max-S-OWG-Negret operator becomes the Max-Hurwicz-OWG-Negret criteria.

We note that the median and the weighted median can also be used as Max-OWG-Negret operators. For the Max-median-OWG-Negret, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted Max-median-OWG-Negret, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

A further family of aggregation operator that could be used is the Max-centered-OWG-Negret operator. Note that this type of aggregation operator is based on the OWA version developed recently by Yager [21]. We can define a Max-centered-OWG-Negret operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying Max-centered-OWG-Negret operator. Note that the Max-GM-Negret is an example of this particular case. Another particular situation of the Max-centered-OWG-Negret operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive Max-centered-OWG-Negret operator. For this situation, we find the Max-median-OWG-Negret as a particular case.

Using Valuation and Negret Methods in the Same Decision Process

Introduction

A more general formulation for decision making was introduced by Yager in [20] where he suggested a combination between valuation and negret methods in the same decision model. This process is summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. Let $C_j = \text{Max}\{c_{ij}\}$ for each S_j. Then:

Step 1: Let $m_{ij} = c_{ij} - \alpha C_j$ where $\alpha \in [0, 1]$.

Step 2: For each alternative A_i, find $M_i = OWA(m_{i1}, \ldots, m_{in})$.
Step 3: Select the alternative A_q such that $M_q = \text{Max}_i [M_i]$.

This process can be denoted as Max-OWA/α-Val/Neg method. As we can see, if α = 0, we get the usual Max-OWA-Val method and if α = 1, we get the Max-OWA-Negret method. Note that m_{ij} can be also formulated as $m_{ij} = \alpha e_{ij} + (1 - \alpha) c_{ij}$. Also note that it is possible to consider a wide range of families of Max-OWA/α-Val/Neg such as the Max-step-OWA/α-Val/Neg, the Max-window-OWA/α-Val/Neg, the Max-centered-OWA/α-Val/Neg, the Max-SOWA/α-Val/Neg, etc.

In this process we could also study different properties such as commutativity, monotonicity, boundedness and idempotency. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWA(m_1, m_2, \ldots, m_n) = OWA(p_1, p_2, \ldots, p_n)$, where $(p_1, \ldots, p_n)$ is any permutation of the arguments $(m_1, \ldots, m_n)$. It is monotonic because if $m_i \geq p_i$, for all m_i, then, $OWA(m_1, m_2, \ldots, m_n) \geq OWA(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. It is bounded because the OWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{m_i\} \leq OWA(m_1, m_2, \ldots, m_n) \leq \text{Max}\{m_i\}$. It is idempotent because if $m_i = m$, for all m_i, then, $OWA(m_1, m_2, \ldots, m_n) = m$.

Mixing Valuations and Negret Methods with the OWG Operator

Now we are going to further extend the previous method when using geometric aggregation operators. The process is very similar with the difference that now we use the OWG operator in the aggregation step. The process can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. c_{ij} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_j. Let $C_j = \text{Max}\{c_{ij}\}$ for each S_j. Then:

Step 1: Let $m_{ij}^* = c_{ij} + \alpha [|\text{Min}\{c_{ij}\}| + |\text{Max}\{c_{ij}\}| - C_j + 1]$ where $\alpha \in [0, 1]$. Note that this result is equivalent to $m_{ij}^* = m_{ij} + \alpha [|\text{Min}\{c_{ij}\}| + |\text{Max}\{c_{ij}\}| + 1]$.
Step 2: For each alternative A_i, calculate $M_i^* = OWG(m_{i1}^*, \ldots, m_{in}^*)$.
Step 3: Select the alternative A_q such that $M_q^* = \text{Max}[M_i^*]$.

This process can be denoted as Max-OWG/α-Val/Neg method. From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Max-OWG/α-Val/Neg operator and the ascending Max-OWG/α-Val/Neg operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the dual situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Max-DOWG/α-Val/Neg and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Max-AOWG/α-Val/Neg operator.

Note that different properties could be studied in this method. It is easy to see that this method is monotonic, commutative, idempotent and bounded. It is monotonic because if $m_i^* \geq p_i^*$, for all m_i^*, then, $OWG(m_1^*, m_2^*, \ldots, m_n^*) \geq OWG(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWG(m_1^*, m_2^*, \ldots, m_n^*) = OWG(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_n^*)$, where $(p_1^*, \ldots, p_n^*)$ is any permutation of the arguments $(m_1^*, \ldots, m_n^*)$. It is idempotent because if $m_i^* = m^*$, for all m_i^*, then, $OWG(m_1^*, m_2^*, \ldots, m_n^*) = m^*$. It is bounded because the OWG aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, Min$\{m_i*\} \leq OWG(m_1*, m_2*,\ldots, m_n*) \leq$ Max$\{m_i*\}$.

As we can see, if $\alpha = 0$, we get the usual Max-OWG-Val method and if $\alpha = 1$, we get the Max-OWG-Negret method. Note that it is possible to consider a wide range of families of Max-OWG/α-Val/Neg such as the Max-step-OWG/α-Val/Neg, the Max-window-OWG/α-Val/Neg, the Max-centered-OWG/α-Val/Neg, the Max-SOWG/α-Val/Neg, etc.

For example, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get the Max-step-OWG/α-Val/Neg method. The Max-GM/α-Val/Neg method is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$.

When $w_{j^*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$, we are using the Max-window-OWG/α-Val/Neg operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg is transformed in the geometric mean.

Another type of aggregation that could be used is the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j^*} = (1/q)$ for $j^* = 1$ to q and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > q$, and in the second class, we assign $w_{j^*} = 0$ for $j^* = 1$ to $n - q$ and $w_{j^*} = (1/q)$ for $j^* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg becomes the maximum. And if $q = 1$ for the second class, the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg becomes the minimum. Note that the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg is transformed in the Max-GM/α-Val/Neg if $q = n$. If $q = m$ and $k = 1$, the Max-EZ-OWG/α-Val/Neg becomes the Max-window-OWG/α-Val/Neg for the first class. And for the second class, it is found the Max-window-OWG/α-Val/Neg if $q = m$ and $k = n - q + 1$.

When $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j^*} = 1/(n - 2)$, we are using the Max-olympic-OWG/α-Val/Neg. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the Max-olympic-OWG/α-Val/Neg is transformed in the Max-median-OWG/α-Val/Neg and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the Max-window-OWG/α-Val/Neg is transformed in the Max-olympic-OWG/α-Val/Neg.

Note that the median and the weighted median can also be used as Max-OWG/α-Val/Neg operators. For the Max-median-OWG/α-Val/Neg, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. For the weighted Max-median-OWG/α-Val/Neg, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

A further type of aggregation operator that could be used is the Max-centered-OWG/α-Val/Neg. We can define a Max-centered-OWG/α-Val/Neg as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator. Note that the Max-GM/α-Val/Neg is an example of this particular case of Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator. Another particular situation of the Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive Max-centered-OWG/α-Val/Neg operator. For this situation, we find the Max-median-OWG/α-Val/Neg as a particular case.

A further interesting family is the Max-S-OWG/α-Val/Neg operator. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized Max-S-OWG/α-Val/Neg. The "orlike" Max-S-OWG/α-Val/Neg operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the geometric mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" Max-S-OWG/α-Val/Neg operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the geometric mean and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized Max-window-OWG/α-Val/Neg operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized Max-S-OWG/α-Val/Neg operator becomes the "andlike" Max-S-OWG/α-Val/Neg operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" Max-S-OWG/α-Val/Neg operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized Max-S-OWG/α-Val/Neg operator becomes the Max-Hurwicz-OWG/α-Val/Neg criteria.

Illustrative Example

In the following, we are going to develop an example in order to understand numerically all the procedures commented above. We will develop a decision making problem under ignorance about selection of investments. We will develop different transformations in the initial payoff matrix such as the usual regret matrix, the geometric regret matrix, the arithmetic negret matrix, the geometric negret matrix, the arithmetic combination between valuations and negrets, and the geometric combination between valuations and negrets. Then, we will aggregate these matrixes with different types of aggregation operators. For the arithmetic matrixes, we will consider the average (AM), the weighted average (WA), the OWA operator and the AOWA operator, and for the geometric ones, the geometric mean (GM), the weighted geometric mean (WGM), the OWG and the AOWG operators.

We should note that in these methods the results obtained from the aggregations are relevant for selecting an alternative but not for considering the specific result obtained. In this example, we will assume the following weighting vector when necessary: W = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3). For the parameter α to be used in the combination between valuations and negrets, we will consider that $\alpha = 0.5$.

Step 1: Assume an investment company has five possible investments and they want to select the alternative that better adapts to his interests.

1) A_1 is a car company.
2) A_2 is a food company.
3) A_3 is a computer company.
4) A_4 is a chemical company.
5) A_5 is a TV company.

The possible results depending on the state of nature that happens in the future are shown in Table 1.

TABLE I
PAYOFF MATRIX

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	60	80	40	40
A_2	40	20	90	30	70
A_3	30	50	70	60	60
A_4	80	80	20	20	40
A_5	20	10	30	80	90

Step 2: Calculate the transformed matrixes. For the regret matrix we will use C_j = Max{c_{ij}} for each S_j and $r_{ij} = C_j - c_{ij}$; for each pair A_i and S_j, and for the geometric regret matrix we will consider $r_{ij} = C_j - c_{ij} + 1$. For the negret matrix we will use $e_{ij} = c_{ij} - C_j$; for each pair A_i and S_j, and for the geometric negret matrix we will consider $e_{ij} = c_{ij} - C_j + |\ \mathrm{Min}\{c_{ij}\}\ | + |\ C_j\ | + 1$. For the combination between valuations and negrets we will use $m_{ij} = c_{ij} - \alpha C_j$ where $\alpha = 0.5$, and for the geometric version, $m_{ij}* = c_{ij} + \alpha\,[|\ \mathrm{Min}\{c_{ij}\}\ | + |\ \mathrm{Max}\{c_{ij}\}\ | - C_j + 1]$. The results are shown in Tables II – VII.

TABLE II
REGRET MATRIX

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	50	20	10	40	50
A_2	40	60	0	50	20
A_3	50	30	20	20	30
A_4	0	0	70	60	50
A_5	60	70	60	0	0

TABLE III
REGRET MATRIX FOR THE GEOMETRIC OPERATORS

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	51	21	11	41	51
A_2	41	61	1	51	21
A_3	51	31	21	21	31
A_4	1	1	71	61	51
A_5	61	71	61	1	1

TABLE IV
NEGRET MATRIX

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	–50	–20	–10	–40	–50
A_2	–40	–60	0	–50	–20
A_3	–50	–30	–20	–20	–30
A_4	0	0	–70	–60	–50
A_5	–60	–70	–60	0	0

TABLE V
NEGRET MATRIX FOR THE GEOMETRIC OPERATORS

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	51	81	61	61	51
A_2	61	41	51	51	81
A_3	51	71	81	81	71
A_4	101	101	41	41	51
A_5	41	31	101	101	101

TABLE VI
COMBINATION BETWEEN VALUATIONS AND NEGRETS

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	–10	20	35	0	–5
A_2	0	–20	45	–10	25
A_3	–10	10	25	20	15
A_4	40	40	–25	–20	–5
A_5	–20	30	–15	40	45

TABLE VII
GEOMETRIC COMBINATION BETWEEN VALUATIONS AND NEGRETS

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	40.5	70.5	70.5	50.5	45.5
A_2	50.5	30.5	70.5	40.5	75.5
A_3	40.5	60.5	75.5	70.5	65.5
A_4	90.5	90.5	30.5	30.5	45.5
A_5	30.5	20.5	65.5	90.5	95.5

Step 3: Aggregate the previous matrixes with their corresponding aggregation operators. We will aggregate the regret matrix (Table II), the negret matrix (Table IV) and the combination matrix between valuations and negrets (Table VI), with the AM, the WA, the OWA and the AOWA operator. The regret matrix for the geometric operators (Table III), the negret matrix for the geometric operators (Table V) and the geometric combination between valuations and negrets (Table VII) will be aggregated with the GM, the WGM, the OWG and the AOWG operator. The results obtained for each aggregation operator are shown in Tables VIII – XIII. Note that we are interested in establishing an ordering of the alternatives but not in the particular values obtained in the aggregation because each matrix has used a different construction process. Therefore, the values obtained in each matrix are completely different and cannot be compared with other matrixes.

TABLE VIII
AGGREGATED REGRET

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	34	36	27	41
A_2	34	31	25	43
A_3	30	27	26	34
A_4	36	47	23	49
A_5	38	25	25	51

TABLE IX
AGGREGATED REGRET FOR THE GEOMETRIC TRANSFORMATION

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	30,08	32.16	23.61	38.32
A_2	19.3	17.73	11.70	31.81
A_3	29.3	26.81	25.79	33.29
A_4	11.71	26.18	5.07	27.07
A_5	12.14	5.25	5.25	28.05

TABLE X
AGGREGATED NEGRET

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	–34	–36	–27	–41
A_2	–34	–31	–25	–43
A_3	–30	–27	–26	–34
A_4	–36	–47	–23	–49
A_5	–38	–25	–25	–51

TABLE XI
AGGREGATED NEGRET FOR THE GEOMETRIC TRANSFORMATION

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	60.09	58.41	56.36	64.08
A_2	55.5	58.36	50.93	60.49
A_3	70.05	73.36	66.00	74.34
A_4	61.42	52.42	51.29	73.56
A_5	66.59	82.01	54.07	82.01

TABLE XII
AGGREGATED RESULTS OF THE COMBINATION BETWEEN VALUATIONS AND NEGRETS

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*
A_1	8	6.5	1	15
A_2	8	11.5	–2	18
A_3	12	15.5	7.5	16.5
A_4	6	–4.5	–6.5	18.5
A_5	16	23.5	4	28

TABLE XIII
AGGREGATED RESULTS OF THE GEOMETRIC COMBINATION BETWEEN VALUATIONS AND NEGRETS

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*
A_1	54.07	52.91	48.97	59.71
A_2	50.61	54.20	43.73	58.56
A_3	61.13	65.13	56.57	66.07
A_4	51.04	42.74	41.06	63.45
A_5	51.26	66.65	39.42	66.65

Step 4: Select the optimal investment for each method. As we can see, we will select A_3 for the Min-AM-Regret, the Min-AOWA-Regret, the Max-AM-Negret, the Max-AOWA-Negret, the Max-OWA/α-Val/Neg, the Max-GM-Negret, the Max-OWG-

Negret, the Max-GM/α-Val/Neg, and for the Max-OWG/α-Val/Neg. A_4 will be selected if we use the Min-OWA-Regret, the Max-OWA-Negret, the Min-GM-Regret, the Min-OWG-Regret and the Min-AOWG-Regret. Finally, we will select A_5 if we use the Min-WA-Regret, the Max-WA-Negret, the Max-AM/α-Val/Neg, the Max-WA/α-Val/Neg, the Max-AOWA/α-Val/Neg, the Min-WGM-Regret, the Max-WGM-Negret, the Max-AOWG-Negret, the Max-WGM/α-Val/Neg and the Max-AOWG/α-Val/Neg.

Another possibility is to establish an ordering of the investments. The results are shown in Table XIV. Note that $\succ$ means *preferred to*.

TABLE XIV
ORDERING OF THE INVESTMENTS

Min-AM-Regret	$A_3 \succ A_1 = A_2 \succ A_4 \succ A_5$
Min-WA-Regret	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
Min-OWA-Regret	$A_4 \succ A_2 = A_5 \succ A_3 \succ A_1$
Min-AOWA-Regret	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
Max-AM-Negret	$A_3 \succ A_1 = A_2 \succ A_4 \succ A_5$
Max-WA-Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
Max-OWA-Negret	$A_4 \succ A_2 = A_5 \succ A_3 \succ A_1$
Max-AOWA-Negret	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
Max-AM/α-Valuation/Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 = A_2 \succ A_4$
Max-WA/α-Valuation/Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
Max-OWA/α-Valuation/Negret	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
Max-AOWA/α-Valuation/Negret	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Min-GM-Regret	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Min-WGM-Regret	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
Min-OWG-Regret	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$
Min-AOWG-Regret	$A_4 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
Max-GM-Negret	$A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
Max-WGM-Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$
Max-OWG-Negret	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
Max-AOWG-Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$
Max-GM/α-Valuation/Negret	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
Max-WGM/α-Valuation/Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
Max-OWG/α-Valuation/Negret	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
Max-AOWG/α-Valuation/Negret	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$

As we can see, depending on the decision process used, the ordering of the investments will be different. Note that each decision maker will select a different process depending on its own characteristics and interests.

Conclusion

In this paper we have developed a new approach for decision making under ignorance. We have introduced the use of geometric aggregation operators in decision making with maximization of negret. We have seen that the negret matrix cannot be constructed in the same way as with the arithmetic version because the OWG operator cannot aggregate negative numbers. Therefore, a new scheme has been suggested for constructing the negret matrix. With this new method, we have been able to transform the negative numbers of the initial negret matrix in positive numbers that can be used with the OWG operator. From a general point of view, this method is very practical in the sense that it permits to deal with negative numbers when using the OWG operator because of the transformation done in the negret matrix.

Furthermore, we have extended Yager's method about mixing valuation and negret methods in the same decision process for the case when using geometric aggregation operators. We have seen that this method permits to mix the payoffs with the regrets. Unfortunately, this method is not able to deal with negative numbers because the valuation results can be either positive or negative.

Finally, an illustrative example has been given about the use of the new approaches suggested in the paper. We have focused in an investment selection problem where we have seen the different results obtained depending on the method used.

References

[1] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 183-190, 1988.

[2] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma, "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in *Proc. 8th Conf. Inform. Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU),* Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[3] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] C.H. Cheng, and J.R. Chang, "MCDM aggregation model using situational ME-OWA and ME-OWGA operators", *Int. J. Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 14, pp. 421-443, 2006.

[5] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, "Integrating multiplicative preference relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, pp. 277-291, 2001.

[6] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, "Multiperson Decision Making Based on Multiplicative Preference Relations", *European J. Operational Research*, vol. 129, pp. 372-385, 2001.

[7] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and S. Alonso, "Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 19, pp. 233-255, 2004.

[8] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana, "A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 18, pp. 689-707, 2003.

[9] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Dept. Business Administration, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain, 2007.

[10] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Geometric Operators in Decision Making with Minimization of Regret", *Int. J. Computer Systems Science and Engineering*, submitted for publication.

[11] Z.S. Xu, "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 20, pp. 843-865, 2005.

[12] Z.S. Xu, "An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations", *Decision Support Systems*, vol. 41, pp. 488-499, 2006.

[13] Z.S. Xu, and Q.L. Da, "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 17, pp. 709-716, 2002.

[14] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, pp. 41-69, 1992.

[15] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, pp. 125-148, 1993.

[16] R.R. Yager, "On weighted median aggregation", *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems*, vol. 2, pp. 101-113, 1994.

[17] R.R. Yager, and D.P. Filev, "Parameterized "andlike" and "orlike" OWA operators", *Int. J. General Systems*, vol. 22, pp. 297-316, 1994.

[18] R.R. Yager, "Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 11, pp. 49-73, 1996.

[19] R.R. Yager, "E-Z OWA weights", in: *Proc. 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, 2003, pp. 39-42.

[20] R.R. Yager, "Decision making using minimization of regret", *Int. J. Approximate Reasoning*, vol. 36, pp. 109-128, 2004.

[21] R.R. Yager, "Centered OWA operators", *Soft Computing*, vol. 11, pp. 631-639, 2007.

[22] R.R. Yager, and J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

[23] R.R. Yager, and Z.S. Xu, "The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, pp. 1393-1402, 2006.

[24] Z.S. Xu, and R.R. Yager, "Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets", *Int. J. General Systems*, vol. 35, pp. 417-433, 2006.

[25] L.J. Savage, "The theory of statistical decision", *J. American Statistical Association*, vol. 46, pp. 55-67, 1951.

[26] L.J. Savage, *The foundations of statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1954.

[27] T.L. Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, McGraw-Hill, New York, 1980.

[28] J. Azcel, and T.L. Saaty, "Procedures for synthesizing ratio judgements", *J. Mathematical Psychology*, vol. 27, pp. 93-102, 1983.

[29] J. Azcel, and C. Alsina, "Synthesizing judgements: A functional equations approach", *Mathematical Modelling*, vol. 9, pp. 311-320, 1987.

14.2.7. Artículo de revista 7. – Publicado en *International Journal of Information Technology*

USING FUZZY NUMBERS IN HEAVY AGGREGATION OPERATORS

José M. Merigó, Montserrat Casanovas

Abstract—**We consider different types of aggregation operators such as the heavy ordered weighted averaging (HOWA) operator and the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator. We introduce a new extension of the OWA operator called the fuzzy heavy ordered weighted averaging (FHOWA) operator. The main characteristic of this aggregation operator is that it deals with uncertain information represented in the form of fuzzy numbers (FN) in the HOWA operator. We develop the basic concepts of this operator and study some of its properties. We also develop a wide range of families of FHOWA operators such as the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy median allocation and the fuzzy uniform allocation.**

Keywords**—**Aggregation operators, Fuzzy numbers, Fuzzy OWA operator, Heavy OWA operator.

INTRODUCTION

HE ordered weighted averaging (OWA) operator is a very common method for aggregating the information. It was introduced in [1] and since its appearance it has been used in a wide range of applications [2] – [20]. One of its main characteristics is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes among others, the maximum, the minimum and the average criteria.

In [18], Yager introduced a new extension of the OWA operator called the heavy ordered weighted averaging (HOWA) operator. The main characteristic of this operator is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes among others, the minimum, the OWA operator and the total operator. As we can see, this operator allows the weighting vector to range between the OWA operator and the total operator. This extension has also been studied in [7], [19].

Sometimes, the available information is uncertain and cannot be assessed with exact numbers. Then, it is necessary to use another approach to represent the information. A very useful approach for representing the uncertain information is the use of fuzzy numbers (FN) in the problem. The FN were introduced in the works of Chang and Zadeh [21], [22]. Since then, the FN have been studied by different authors [23] – [29]. Among the wide range of FN existing in the literature, we could mention for example, the triangular FN, trapezoidal FN, L-R FN, intuitionistic FN, interval-valued FN, etc.

With this background, we can see that sometimes it is better to use the OWA operator with FN. Then, we need to use the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator. This operator has been studied by different authors such as in [3] – [5], [8], [10].

Going a step further, we can see that sometimes, the HOWA operator can also be affected by uncertain situations that need to be assessed with FN. Due to this, in this paper we suggest the use of FN in the HOWA operator. For doing so, we develop a new extension of the OWA operator called the fuzzy heavy ordered weighted averaging (FHOWA) operator. The main characteristic of this operator is that it is able to deal with uncertain information in the HOWA operator. Then, it can provide a wider class of aggregation operators by allowing the weighting vector to range from the FOWA operator to the fuzzy total operator. We will study the main concepts of this new extension and we will develop a wide range of particular cases such as the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy median allocation, the fuzzy uniform allocation, etc.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section II we review some aggregation operators such as the FOWA and the HOWA operator. In Section III we introduce the FHOWA operator and in Section IV we develop different families of FHOWA operators. Finally, in Section V we summarize the main conclusions found in the paper.

Preliminaries

Fuzzy OWA Operator

The FOWA operator has been studied in [3] – [5], [8], [10] and it represents an extension of the OWA operator. Essentially, its main difference is that it uses uncertain information in the arguments of the OWA operator represented in the form of FN. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FN. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

Definition 1. Let Ψ be the set of FN. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN. Among others, we could mention as examples of FN, the triangular FN, the trapezoidal FN, the L-R FN, the interval-valued FN, the intuitionistic FN, etc. For further information of FN, see for example [21] – [29].

Note that it is also possible to use FN in the weighting vector of the FOWA operator. The motivation for doing so is because sometimes it is not clear the attitudinal character of the decision maker and he prefers to use different degrees of optimism or pessimism in order to take the decision. Due to the fact that this problem has a lot of internal problems such as the problem that the sum of the weights is not exactly one, etc., we will not consider this situation here.

Note also that sometimes, it is not clear how to reorder the arguments. Then, it is necessary to establish a criterion for comparing FN. For simplicity, we recommend to follow the policy explained in [26], [27].

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator.

The FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of FOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the FOWA median operator, the S-FOWA, the centered-FOWA operator, etc. Further information on these families can be found in [5].

Another interesting issue to consider is the measures for characterizing the weighting vector of the FOWA operator and the type of aggregation it performs. Among others, we can consider the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator. The first measure, the attitudinal character [1], is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right) \tag{2}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0 and the more of the weight located near the top of W, the closer α to 1. Note that for the maximum $\alpha(W) = 1$, for the minimum $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure introduced also in [1], is called the entropy of dispersion of W and it is used to provide a measure of the information being used. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{3}$$

That is, if $w_j = 1/n$ for all j, then $H(W) = \ln n$, and the amount of information used is maximum. If $w_j = 1$ for some j, known as step-FOWA [5], [14], then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

The third measure was introduced in [18], it is called the divergence of W and it is useful in some exceptional situations. It is defined as:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{4}$$

Finally, a fourth measure that could be used for the analysis of the weighting vector W is the balance operator [16]. It is useful to analyse the balance between favouring the arguments with high values or the arguments with low values. It can be defined as follows.

$$BAL(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1}\right) w_j \tag{5}$$

It can be shown that $BAL(W) \in [-1, 1]$. Note that for the maximum we get $BAL(W) = 1$, for the minimum, $BAL(W) = -1$ and for the average criteria, $BAL(W) = 0$. Also note that for the median and the olympic average, $BAL(W) = 0$. For the Arrow-Hurwicz aggregation, assuming that the usual aggregation of this method is $\lambda \text{Max}\{a_i\} + (1 - \lambda)\text{Min}\{a_i\}$, $BAL(W) = 2\lambda - 1$. As it can be shown, for an optimistic situation, where $\lambda > 0.5$, the balance is positive and for a pessimistic situation, where $\lambda < 0.5$, the balance is negative.

Note that it is also possible to study these measures with the AFOWA operator. The measures are equal with the only different that now the reordering is ascendant. That is, the weights of both orderings are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator.

Heavy OWA Operator

The Heavy OWA operator was introduced in [18] and it represents an extension to the OWA operator. The motivation for using this operator is because there are situations where the available information is independent from each other and this aspect needs to be considered in the aggregation. In this case, the difference with the OWA operator is that the sum of the weights is allowed to be between 1 and n instead of being restricted to sum up to 1. With this, we get a wider class of aggregation operators that include mean operators and totalling operators. In the following, we provide a definition of the HOWA operator as suggested by Yager [18].

Definition 2. A Heavy OWA operator of dimension n is a mapping $HOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$HOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{6}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending HOWA (DHOWA) operator and the Ascending HOWA (AHOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AHOWA operator.

The HOWA operator is monotonic and commutative both for the DHOWA and the AHOWA operator. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all i, then, $HOWA(a_1,\ldots, a_n) \geq HOWA(d_1,\ldots, d_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. Note that the HOWA operator is not bounded by the minimum and the maximum. In this case, it is bounded by the minimum and the total operator which represents the sum of all the arguments.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [18], the OWA operator is found when the sum of the weights is one. The total operator is found when the sum of the weights is n. The minimum is found when $w_n = 1$, $w_j = 0$ for all $j \neq n$ and the sum of the weights is one. For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector can be higher than 1. We should note that these results could also be obtained for the AHOWA operators.

Another interesting issue to comment is the sum of the elements of the weighting vector W that is denoted by Yager [18] as $|W|$ and it is called the magnitude of W. In order to normalize this feature, Yager introduced a characterizing parameter called the beta value of the vector W. It was defined as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be seen, if $\beta = 1$, we get the total operator and if $\beta = 0$, we get the usual OWA operator. Note that it is possible to look to the negation of β [18]. Then, $\rho = 1 - \beta$. In this case, if $\rho = 0$, we get the total operator and if $\rho = 1$, we get the usual OWA operator.

Once analysed the magnitude of *W*, it is possible to study the measures used for characterizing the weighting vector of the HOWA operator. The first measure, the attitudinal character, can be defined as:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n-j}{n-1}\right) w_j \tag{7}$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Note that the total operator has $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure, the entropy of dispersion, is defined as:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{8}$$

Note that for the total operator, $H(W) = -\ln n$.

The third measure that could be introduced for characterizing the weighting vector of the HOWA operator, is the divergence of *W*. It can be defined as:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{9}$$

Note that if $|W| = n$, we get the divergence for the total operator and it is the same divergence than the average. That is, $Div(W) = (1/12)[(n + 1)/(n - 1)]$.

Finally, the fourth measure, the balance operator, could be defined in this case as follows:

$$BAL(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n+1-2j}{n-1}\right) w_j \tag{10}$$

It can be shown that $BAL(W) \in [-1, 1]$. In this case, if $|W| = n$, we get the balance for the total operator.

Note also that these four measures are reduced to the usual definitions of the OWA and the FOWA operator when $|W| = 1$.

By using the AHOWA operator, it is also possible to obtain these four measures. It is straightforward to obtain the ascending version of these measures by looking to the descending one and assuming that the weights of the DHOWA and the AHOWA are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the *j*th weight of the DHOWA and w^*_{n-j+1} the *j*th weight of the AHOWA operator.

The Fuzzy Heavy OWA Operator

The fuzzy heavy OWA (FHOWA) operator represents an extension to the OWA operator. It consists in using in the same operator the characteristics of the FOWA operator with the characteristics of the HOWA operator. Then, the same operator will use uncertain information represented in the form of FN with a weighting vector that ranges from the FOWA operator to the fuzzy total operator. It can be defined as follows.

Definition 3. Let Ψ be the set of FN. A FHOWA operator of dimension n is a mapping $FHOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$FHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{11}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN. Among others, we could mention as examples of FN to be used in the FHOWA aggregation, the triangular FN, the trapezoidal FN, the L-R FN, the interval-valued FN, the intuitionistic FN, etc. For further information on FN, see for example [24] – [25].

Note that in this case, it is also possible to use FN in the weighting vector of the FHOWA operator. The motivation for doing so is the same as in the FOWA operator. That is, because sometimes it is not clear the attitudinal character of the decision maker and he prefers to use different degrees of optimism or pessimism in order to take the decision.

Note also that sometimes, it is not clear how to reorder the arguments. Then, it is necessary to establish a criterion for comparing FN. For simplicity, we recommend to follow the policy explained in [26] – [27]. Note that other methods could be used for comparing FN.

Analysing the reordering step, we see that we have to distinguish between the Descending FHOWA (DFHOWA) operator and the Ascending FHOWA (AFHOWA) operator. The DFHOWA operator is defined as in definition 3.

Definition 4. Let Ψ be the set of FN. An AFHOWA operator of dimension n is a mapping $FHOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$AFHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{12}$$

where b_j is the jth lowest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN. As it can be seen, the only difference against the DFHOWA operator is that the elements b_j ($j = 1, 2, \ldots, n$) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$. Then, it is easy to see that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFHOWA operator.

If we want to use a vector notation in the FHOWA operator, we could assume that B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j and we should call it the ordered argument vector. We should also assume that W^T is the transpose of the weighting vector, then, we could express the FHOWA operator both for the DFHOWA and the AFHOWA operator as:

$$FHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{13}$$

The FHOWA operator is monotonic and commutative both for the DFHOWA and the AFHOWA operator. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$ for all i, then, $FHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) \geq FHOWA(\tilde{e}_1,\ldots, \tilde{e}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $FHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n) = FHOWA(\tilde{e}_1,\ldots, \tilde{e}_n)$, where $(\tilde{e}_1,\ldots, \tilde{e}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2,\ldots, \tilde{a}_n)$. Note that this operator is also bounded by the minimum and the total operator.

In this case, it is also interesting to analyse the magnitude of the weighting vector $|W|$. Following the same methodology than the HOWA operator, we can define the magnitude $|W|$ of the FHOWA operator as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be seen, if $\beta = 1$, we get the fuzzy total operator and if $\beta = 0$, we get the usual FOWA operator. In the FHOWA operator, it is also possible to look to the negation of β. Then, $\rho = 1 - \beta$. If $\rho = 0$, we get the fuzzy total operator and if $\rho = 1$, we get the usual FOWA operator.

As it has been explained in the HOWA operator, once analysed the magnitude of $|W|$, it is possible to study the measures used for characterizing the weighting vector. For the FHOWA operator, we get the following. The first measure, the attitudinal character, can be defined as:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n-j}{n-1}\right) w_j \tag{14}$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$.

Note that the formulation is the same than the HOWA operator because the fuzzy arguments do not affect the result. Also note that the fuzzy total operator has $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure, the entropy of dispersion, can be defined as:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{15}$$

Note that for the fuzzy total operator, $H(W) = -\ln n$.

For the third measure, the divergence of W, we will use:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{16}$$

If $|W| = n$, we get the divergence of the fuzzy total operator and it is the same divergence than the fuzzy average. That is, $Div(W) = (1/12)[(n + 1)/(n - 1)]$.

Finally, the fourth measure, the balance operator, could be defined in this case as:

$$BAL(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n+1-2j}{n-1}\right) w_j \tag{17}$$

It can be shown that $BAL(W) \in [-1, 1]$. In this case, if $|W| = n$, we get the balance for the fuzzy total operator.

Also note that these four measures are reduced to the usual definitions shown in Section II.A when $|W| = 1$.

These three measures could also be studied with the AUHOWA operator. Then, for the first measure we get:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{j-1}{n-1}\right) w_j \tag{18}$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Note that the fuzzy total operator has also $\alpha(W) = 0.5$.

For the second measure, the result is the same as with DFHOWA operators although the reordering step is different.

For the third measure, we get:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{19}$$

If $|W| = n$, we get the divergence for the uncertain total operator and it is the same divergence than the average. Also note that if $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$, the $Div(W) = 0$.

And for the balance operator, we get:

$$BAL(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{2j-1-n}{n-1}\right) w_j \tag{20}$$

It can be shown that $BAL(W) \in [-1, 1]$. In this case, we also get the balance for the fuzzy total operator if $|W| = n$.

Families of FHOWA Operators

By using a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different families of FHOWA operators. For example, we can obtain the FOWA operator, the fuzzy total operator, the fuzzy weighted average and the fuzzy minimum. The FOWA operator is obtained when $\beta = 0$. The fuzzy total operator is found when $\beta = 1$. The fuzzy weighted average is obtained when the ordered position of the b_j is the same than the ordered position of the a_i and $\beta = 0$. Finally, the fuzzy minimum is found when $w_n = 1$, $w_j = 0$, for all $j \neq n$ and $\beta = 0$.

Following the same methodology that Yager [18] used for the HOWA operator, we can develop another group of particular cases of the FHOWA operator.

The first type of FHOWA operator we will study is the fuzzy push up allocation. In this case, we get $w_j = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Note that if $\beta = 0$, $W_{pu} = W^*$, $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$, then, $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W^*) = 1$. If $\beta = 1$, $W_{pu} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

The second type of FHOWA operator we will study is the dual allocation to the push up. This type is known as the fuzzy push down allocation and it is defined as $w_{n-j+1} = (1$

$\wedge$ ($|W|$ – (j – 1))) $\vee$ 0. Note that if β = 0, W_{pd} = W_*, w_n = 1 and w_j = 0 for all $j \neq$ n, then, $\alpha(W_{pd})$ = $\alpha(W_*)$ = 0. If β = 1, W_{pd} = W_T, w_j = 1 for all j and $\alpha(W_{pd})$ = $\alpha(W_T)$ = 0.5.

Another special allocation that it is possible to use in the FHOWA operator is the fuzzy median type allocation. In this case, we have to distinguish between the case when n is even or odd. If n is even, we allocate the weights for j = 1 to a as $w_{a+j} = w_{a+1-j}$ = [1 $\wedge$ (($|W|$ – 2(j – 1))/2)] $\vee$ 0. If n is odd, we allocate the weights for j = 1 to a as w_{a+1} = 1 and $w_{a+1-j} = w_{a+1+j}$ = [1 $\wedge$ ([($|W|$ – 1) – 2(j – 1)]/2)] $\vee$ 0. As the weighting vector is symmetric, $\alpha(W)$ = 0.5. Note that if β = 0, we get the FOWA median and if β = 1, we get the fuzzy total operator.

The next type of allocation we will study is the step-FHOWA operator. In this case, the weighting vector is focused at the Kth largest element. That is, assuming b = Min[(K – 1), (n – K)], we allocate the weights for j to b as w_K = 1 and $w_{K+j} = w_{K-j}$ = [1 $\wedge$ ([($|W|$ – 1) – 2(j – 1)]/2)] $\vee$ 0. If $b = K - 1$, $K - 1 < n - K$, then, w_{j+2K-1} = [1 $\wedge$ (($|W|$ – (1 + 2b)) – (j – 1))] $\vee$ 0, for j = 1 to n – 2K + 1. If $b = n - K$, $K - 1 > n - K$, then, w_{2K-n-j} = [1 $\wedge$ (($|W|$ – (1 + 2b)) – (j – 1))] $\vee$ 0, for j = 1 to n – 2K + 1. Note that if K = 1, the step-FHOWA becomes the fuzzy push up allocation, for $K = n$, the step-FHOWA becomes the fuzzy push down allocation and for K = (n + 1)/2, it becomes the fuzzy median allocation.

Another possible allocation for the FHOWA operator is the fuzzy uniform allocation. In this case, we assign the weights as $w_j = |W|/n$ for all j. In this allocation we always find a neutral attitudinal character $\alpha(W)$ = 0.5. Note that if β = 0, we get the fuzzy arithmetic mean.

A further special allocation for the FHOWA operator is the fuzzy olympic average allocation. In this type of allocation, we have to distinguish between two cases. In the first case $|W| < n - 2m$, we allocate the weight as $w_j = |W|/(n - 2m)$ for $j = m + 1$ to $n - m$, and w_j = 0 for j = 1 to m and for $j = n - m + 1$ to n. In the second case, where $|W| \geq n - 2m$, we allocate the weights as w_j = 1 for $j = m + 1$ to $n - m$ and $w_{m+1-j} = w_{n-m+j}$ = [1 $\wedge$ ([($|W|$ – (n – 2m)) – 2(j – 1)]/2)] $\vee$ 0 for j = 1 to m.

Finally, the last type of allocation we will consider for the FHOWA operator is the Arrow-Hurwicz aggregation [30]. Assuming that $|W| = q$ and dimension n, we define the weights in two directions, push up and push down. First, we calculate ω_j = (1 $\wedge$ (λq – (j – 1))) $\vee$ 0 for j = 1 to n and $\hat{w}_{n-j+1}$ = (1 $\wedge$ ((1 – λ)q – (j – 1))) $\vee$ 0 for j = 1 to n. Then, we define the weights as $w_i = \omega_i + \hat{w}_i$. Note that ω_j = 0 for all $j \geq \lambda q + 1 \geq \lambda|W| + 1$ and $\hat{w}_j$ = 0 for $j \leq n - (1 - \lambda)q \leq n - |W| + \lambda|W|$.

If we use a similar methodology for the AFHOWA operator as it has been shown above for the DFHOWA operator, we can obtain a wide range of special cases of AFHOWA operators. For example, we could analyse the AFOWA operator, the fuzzy total operator, the fuzzy weighted average and the fuzzy minimum criteria. The AFOWA operator is found when β = 0. The fuzzy total operator is found when β = 1. The fuzzy weighted average is obtained when the ordered position of the b_j is the same than the ordered position of the a_i and β = 0. Finally, the fuzzy minimum is found when w_1 = 1, w_j = 0, for all $j \neq 1$ and β = 0.

Another group of AFHOWA operators that could be obtained are the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy median type, the step-AFHOWA type, the fuzzy uniform allocation, the olympic AFHOWA average and the Arrow-Hurwicz AFHOWA aggregation. Note that the formulation of these families is very similar to their corresponding descending version with the only difference that now the reordering is ascendant. Therefore, the weights of the ascending families are related to the descending families by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFHOWA operator.

Conclusion

In this paper we have developed a new extension of the OWA operator. We have called it the fuzzy heavy OWA (FHOWA) operator. Basically, this operator consists in using uncertain information represented in the form of FN in situations where the weighting vector can range from the usual FOWA operator to the fuzzy total operator. Focusing on the HOWA operator, we could say that we have considered situations of the HOWA operator where the available information is uncertain and can be assessed with FN.

We have studied this new operator giving its definition and studying some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders. We have also developed a wide range of families of FHOWA operators such as the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy median allocation, the fuzzy uniform allocation, etc.

In future research, we expect to develop new extensions to the FHOWA operator by considering other characteristics in the aggregation such as the possibility of using FN in the weighting vector of the FHOWA operator.

References

[1] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 183-190, 1988.

[2] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] G. Canfora, and L. Troiano, "An Extensive Comparison between OWA and OFNWA Aggregation", in: *Proc. of the 8th SIGEF Congress*, Napoli, Italy, 2001.

[4] S.J. Chen, and S.M. Chen, "A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators", *Cybernetics and Systems*, vol. 34, pp. 109-137, 2003.

[5] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Dept. Business Administration, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain, 2007.

[6] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Geometric Operators in Decision Making with Minimization of Regret", *Int. J. Computer Systems Science and Engineering*, vol. 1, pp. 111-118, 2007.

[7] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators", *Fuzzy Sets and Systems*, to be published.

[8] H.B. Mitchell, and D.D. Estrakh, "An OWA operator with fuzzy ranks", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 13, pp. 69-81, 1998.

[9] V. Torra, *Information Fusion in Data Mining*, Springer, New York, 2002.

[10] Z.S. Xu, "A fuzzy ordered weighted geometric operator and its application in fuzzy AHP", *Systems, Engineering and Electronics*, vol. 24, pp. 31-33, 2002.

[11] Z.S. Xu, "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 20, pp. 843-865, 2005.

[12] Z.S. Xu, and Q.L. Da, "An Overview of Operators for Aggregating Information", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 18, pp. 953-969, 2003.

[13] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, pp. 41-69, 1992.

[14] R.R. Yager, "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, pp. 125-148, 1993.

[15] R.R. Yager, "On weighted median aggregation", *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems*, vol. 2, pp. 101-113, 1994.

[16] R.R. Yager, "Constrained OWA Aggregation", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 81, pp. 89-101, 1996.

[17] R.R. Yager, “Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 11, pp. 49-73, 1996.
[18] R.R. Yager, “Heavy OWA Operators”, *Fuzzy Optim. Decision Making*, vol. 1, pp. 379-397, 2002.
[19] R.R. Yager, “Monitored heavy fuzzy measures and their role in decision making under uncertainty”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 139, pp. 491-513, 2003.
[20] R.R. Yager, and J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[21] S.S.L. Chang, and L.A. Zadeh, “On fuzzy mapping and control”, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 2, pp. 30-34, 1972.
[22] L.A. Zadeh, “The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1”, *Information Sciences*, vol. 8, pp. 199-249, “Part 2”, *Information Sciences*, vol. 8, pp. 301-357, “Part 3”, *Information Sciences*, vol. 9, pp. 43-80, 1975.
[23] D. Dubois, and H. Prade, “Operations on fuzzy numbers”, *Int. J. Systems Science*, vol. 9, pp. 613-626, 1978.
[24] D. Dubois, and H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York, 1980.
[25] A. Kaufmann, and M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.
[26] A. Kaufmann, and J. Gil Aluja, *Management techniques for the treatment of uncertainty*, (in Spanish), Ed. Hispano-europea, Spain, 1987.
[27] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, and A. Terceño, *Mathematics for economic and business management*, (in Spanish), Ed. Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.
[28] M. Mizumoto, and K. Tanaka, “The four operations of arithmetic on fuzzy numbers”, *Systems, Computing and Control*, vol. 7, pp. 73-81, 1976.
[29] S. Nahmias, “Fuzzy variables”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 1, pp. 97-110, 1978.
[30] K.J. Arrow, L. Hurwicz, “An optimality criterion for decision making under ignorance”, in: C.F. Carter, J.L. Ford (Eds.), *Uncertainty and Expectations in Economics*, Kelley, New Jersey, 1972.

14.2.8. Artículo de revista 8. – Publicado en *Fuzzy Economic Review*

THE GENERALIZED ADEQUACY COEFFICIENT AND ITS APPLICATION IN STRATEGIC DECISION MAKING

J.M. Merigó, A.M. Gil Lafuente

Department of Business Administration
University of Barcelona

Av. Diagonal 690,
08034 Barcelona, Spain

Telephone: 662 349 184
Fax: 93 403 98 82
Emails: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

THE GENERALIZED ADEQUACY COEFFICIENT AND ITS APPLICATION IN STRATEGIC DECISION MAKING

ABSTRACT

The adequacy coefficient is a very useful technique that provides a more complete formulation than the Hamming distance in decision making problems. In this paper, we suggest a generalization by using generalized and quasi-arithmetic means. As a result, we will get the generalized ordered weighted averaging adequacy coefficient (GOWAAC) and the Quasi-OWAAC operator. These new aggregation operators generalize a wide range of particular cases such as the generalized adequacy coefficient (GAC), the weighted generalized adequacy coefficient (WGAC), the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC), the ordered weighted quadratic averaging adequacy coefficient (OWQAAC), and others. We study different families and properties of these aggregation operators. We also analyze the unification point with distance measures and we find that in these situations, the GOWAAC and the Quasi-OWAAC become the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator and the Quasi-OWAD operator, respectively. Finally, we also develop an application of the new approach in a strategic decision making problem about selection of strategies.

Keywords: *Adequacy coefficient, OWA operator, decision making, selection of strategies.*

1. INTRODUCTION

Decision making problems are very common in the economic environment. They may affect different economic problems such as the investments, the strategies, the human resources, the assets, etc. (Figueira et al., 2005; Gil-Aluja, 1998; 1999; 2001; A.M. Gil-Lafuente, 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a; Yager and Kacprzyk, 1997). Usually, it is necessary to aggregate the available information in order to obtain a representative result. For doing this, we need to use an aggregation operator. For further reading on aggregation operators, see for example (Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Yager and Kacprzyk, 1997). A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, as special cases.

Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors (Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1996a; 2007; Yager and Kacprzyk, 1997). An interesting generalization of the OWA operator is the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) that uses generalized means in the aggregation process. Then, we can obtain a wide range of mean operators such as the generalized mean (Dujmovic, 1974; Dyckhoff and Pedrycz, 1984), the weighted generalized mean; the OWA operator, the ordered weighted geometric (OWG) operator (Chiclana et al., 2000; Xu and Da, 2002), the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator (Yager, 2004), the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator (Yager, 2004), etc. The GOWA operator can be further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005). Then, the result is the Quasi-OWA operator (Fodor et al., 1995). For further developments on the GOWA and the Quasi-OWA operator, see (Merigó and Casanovas, 2007a; 2007b; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007b; Wang and Hao, 2006).

Another interesting method for decision making is the adequacy coefficient (Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987). It is a useful technique that provides similar results than the Hamming distance with some differences that makes it more complete (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a). Since its appearance, it has been widely studied by different authors in different business decision making problems (Gil-Aluja, 1998; 1999; A.M. Gil-Lafuente, 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2007a; 2007c; 2007d; 2008a).

The objective of this paper is to introduce a new generalization of the adequacy coefficient by using generalized means. We will call this generalization, the generalized adequacy coefficient. In the generalization process, we will distinguish between the use of the generalized mean (GM), the weighted generalized mean (WGM), the GOWA operator and the Quasi-OWA operator. Note that Quasi-OWA operator generalizes the other cases, so this generalization can be considered as the most general one. With these generalizations, we will introduce the generalized adequacy coefficient (GAC), the weighted generalized adequacy coefficient (WGAC), the generalized ordered weighted averaging adequacy coefficient (GOWAAC) and the Quasi-OWAAC operator. With these aggregation operators, we will generalize a wide range of operators such as the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC), the ordered weighted geometric adequacy coefficient (OWGAC), the ordered weighted quadratic averaging adequacy coefficient (OWQAAC), etc. We will study some of their main properties and we will analyze a wide range of families of GOWAAC operators such as the step-GOWAAC, the olympic-GOWAAC, the window-GOWAAC, the E-Z GOWAAC, the median-GOWAAC, the centered-GOWAAC, the-S-GOWAAC, etc. We will also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2 we review some basic concepts to be used throughout the paper. In Section 3, we present the generalized adequacy coefficient. Section 4 analyzes different families of GOWAAC operators. Section 5 further generalizes the GOWAAC operator by using quasi-arithmetic means. In Section 6 we develop an illustrative example of the new approach. Finally, in Section 7, we summarize the main conclusions of the paper.

2. PRELIMINARIES

In this Section we briefly describe some basic concepts to be used throughout the paper such as the adequacy coefficient, the OWA operator, the GOWA operator and the Quasi-OWA operator.

2.1. ADEQUACY COEFFICIENT

The normalized adequacy coefficient (Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of differences between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is very similar to the Hamming distance with the difference that it neutralizes the result when the comparison shows that the real element is higher than the ideal one. For two sets P_k and P, it can be defined as follows.

Definition 1. A normalized adequacy coefficient of dimension n is a mapping AC: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$AC(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[1 \wedge (1-\mu_i + \mu_i^{(k)}] \quad (1)$$

where μ_i and $\mu_i^{(k)}$ are the ith arguments of the sets P and P_k respectively, $\wedge$ is a symbol that represents the minimum, P is the ideal subset and P_k is the real subset found in the aggregation problem.

Sometimes, when normalizing the adequacy it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the weighted adequacy coefficient. It can be defined as follows.

Definition 2. A weighted adequacy coefficient of dimension n is a mapping WAC: $R^n \times R^n \rightarrow R$ defined by:

$$WAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i[1 \wedge (1-\mu_i + \mu_i^{(k)}] \quad (2)$$

where μ_i and $\mu_i^{(k)}$ are the ith arguments of the sets P and P_k respectively, $\wedge$ is a symbol that represents the minimum, P is the ideal subset, P_k is the real subset found in the aggregation problem and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

2.2. OWA OPERATOR

The OWA operator (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (see, among others, Calvo et al, 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

3) $w_j \in [0, 1]$
4) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{OWA}(a_1, a_2,\dots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). Note that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum and the average (Yager, 1988). For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The average is found when $w_j = 1/n$ for all j. Other families of OWA operators can be studied in (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994; 1996a; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

2.3. GOWA OPERATOR

The generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) is an aggregation operator that generalizes a wide range of mean operators such as the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator (Chiclana et al., 2000; Herrera et al., 2003; Xu and Da, 2002), the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator (Yager, 2004) and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator (Yager, 2004). It can be defined as follows.

Definition 4. A GOWA operator of dimension n is a mapping GOWA: $R^n \rightarrow R$ defined by:

$$\text{GOWA}(a_1, a_2,\dots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum and the generalized mean. Other families of GOWA operators can be found in (Karayiannis, 2000; Merigó, 2007, Yager, 2004).

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator, the OWG operator, the OWHA operator and the OWQA operator. Thus, when $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, we obtain the OWG operator. When $\lambda = -1$, we obtain the OWHA operator. When $\lambda = 2$, we obtain the OWQA operator.

Note that if we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function g(b), then, the GOWA operator becomes the Quasi-OWA operator. It can be formulated as follows.

Definition 5. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping QOWA: $R^n \to R$ defined by:

$$\mathrm{QOWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_j)\right) \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, g is a strictly continuous monotonic function and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

3. THE GENERALIZED ADEQUACY COEFFICIENT

The adequacy coefficient can be generalized by using generalized means. Then, the result is the generalized adequacy coefficient (GAC). Going a step further, it is also possible to use the weighted generalized mean, obtaining the weighted generalized adequacy coefficient (WGAC). It can be defined as follows.

Definition 6. A WGAC operator of dimension n is a mapping WGAC: $R^n \times R^n \to R$ defined by:

$$\mathrm{WGAC}(P_k \to P) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i [1 \wedge (1 - \mu_i - \mu_i^{(k)})]^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P_k and P, λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

As we can see, if $w_i = 1/n$, we get the GAC operator. Note that if we look to the parameter λ we also find a wide range of mean operators. For example, if $\lambda = 1$, we get the weighted adequacy coefficient (WAC), and if $\lambda = 2$, we get the weighted quadratic averaging adequacy coefficient (WQAAC).

Going a step further, it is possible to present a wider generalization by using the OWA operator. Then, we get the following.

Definition 7. A GOWAAC operator of dimension n is a mapping GOWAAC: $R^n \times R^n \rightarrow R$ defined by:

$$\mathrm{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

where K_j represents the jth largest of the $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Note that we have given this definition for all R, but we should note that sometimes we may find problems, especially when the arguments are 0. Basically, these problems appear for values less than 0 in the parameter λ.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending generalized OWAAC (DGOWAAC) operator and the ascending generalized OWAAC (AGOWAAC) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAAC operator.

Analogously to the GOWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the GOWAAC because $S(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the generalized ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (GOWADAC). It can be defined as follows.

Definition 8. A GOWADAC operator of dimension n, is a mapping GOWADAC: $R^n \times R^n \rightarrow R$ defined by:

$$\mathrm{GOWADAC}(s_1, s_2, \ldots, s_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j S_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

where S_j represents the jth largest of the $s_i = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case, we also find inconsistencies when the arguments are 0, when $\lambda \leq 0$.

In this case, we can also distinguish between the descending GOWADAC (DGOWADAC) and the ascending GOWADAC (AGOWADAC) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWADAC operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the GOWAAC aggregation can be expressed as:

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{9}$$

Also note that the GOWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be demonstrated with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). Assume f is the GOWAAC operator. If $p_i \geq q_i$, for all $i \in \{1,2, \ldots, n\}$, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{10}$$

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

Since $p_i \geq q_i$, for all p_i, it follows that, $p_i \geq q_i$, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). Assume f is the GOWAAC operator, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{13}$$

where $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is any permutation of the arguments $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{14}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

Since $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is a permutation of $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, we have $K_j = Q_j$, for all j, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). Assume f is the GOWAAC operator, if $p_i = p$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \tag{16}$$

Proof. Since $p_i = p$, for all p_i, we have

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j p^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(p^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \quad (17)$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) = p \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). Assume f is the GOWAAC operator, then:

$$\mathrm{Min}\{p_i\} \le f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \le \mathrm{Max}\{p_i\} \quad (18)$$

Proof. Let max{p_i} = b, and min{p_i} = a, then

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \le \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(b^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \quad (19)$$

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \ge \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \quad (20)$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \le b \quad (21)$$

$$f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \ge a \quad (22)$$

Therefore,

$$\mathrm{Min}\{p_i\} \le f(p_1, p_2,\ldots, p_n) \le \mathrm{Max}\{p_i\} \qquad \blacksquare$$

Another interesting problem to consider in the GOWAAC operator is the unification point with distance measures. As it was explained in Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2007a), the unification point between the adequacy coefficient and the Hamming distance appears when $\mu_i \ge \mu_i^{(k)}$ for all i. In the GOWAAC operator, we find a similar situation with the difference that now the unification is with the Minkowski distance or with the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator (Karayiannis, 2000; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008b). Then, we get the following. Note that we will first give the definition of the MOWAD operator in order to compare it with the GOWAAC operator.

Definition 9. A MOWAD operator of dimension n is a mapping MOWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$ defined by:

$$\mathrm{MOWAD}(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \quad (23)$$

where D_j represents the jth largest of the $d_i = |\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$ and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Theorem 5. Assume MOWAD($d_1, d_2, \dots, d_n$) is the MOWAD operator and GOWADAC($s_1, s_2, \dots, s_n$) the GOWADAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$\text{MOWAD}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \text{GOWADAC}(s_1, s_2, \dots, s_n) \tag{24}$$

Proof. Let

$$\text{MOWAD}(d_1, d_2, \dots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid \tag{25}$$

$$\text{GOWADAC}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] \tag{26}$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$\text{GOWADAC}(s_1, s_2, \dots, s_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{MOWAD}(d_1, d_2, \dots, d_n) \qquad \blacksquare$$

As we can see, the unification appears with the removal index of the adequacy coefficient. As it was explained in Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2007a), it is possible to distinguish between different types of unifications depending on the situation found. Basically, we could consider a partial or a total unification point. The partial unification point appears if at least one of the alternatives but not all of them enters in a situation of unification point. The total unification point appears if all the alternatives are in a situation of unification point. Note that it is straightforward to prove these unifications by looking to (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a) and following Theorem 5. Note that it is also possible to consider this theorem by using ascending orders in the reordering step.

Note that this unification has been studied with the general case, but it is also possible to consider different particular cases by giving different values to the parameter λ or using different weights in the aggregation process. For example, if $\lambda = 1$, we get the unification found with the adequacy coefficient and the Hamming distance. If $\lambda = 2$, we get the unification with the quadratic adequacy coefficient and the Euclidean distance.

Another interesting issue to analyze is the different measures used for characterizing the weighting vector of the GOWAAC operator. Based on the measures developed for the GOWA operator by Yager (2004), they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated as follows.

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{27}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used (Yager, 1988). It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{28}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

Another interesting measure is the divergence of W (Yager, 2002). It can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{29}$$

A further interesting measure that we could study is the balance of W (Yager, 1996b). It can be formulated as follows.

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{30}$$

Note that these measures can also be used with an ascending order by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAAC operator.

4. FAMILIES OF GOWAAC OPERATORS

In this Section, we will analyze different families of GOWAAC operators. We will distinguish between two general types: those families found in the weighting vector W and those found in the parameter λ.

4.1. ANALYSING THE WEIGHTING VECTOR W

By choosing a different manifestation in the weighting vector of the GOWAAC operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, it is possible to obtain the maximum, the minimum and the GAC operator.

The maximum is found if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum, if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, GOWAAC($p_1, p_2, \ldots, p_n$) = K_h, where K_h is the hth largest argument $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$. This case is known as the step-GOWAAC operator. The GAC is found when $w_j = 1/n$, for all a_i.

Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó, 2007; Yager, 1993), we could study other particular cases of the GOWAAC operator such as the window-GOWAAC, the olympic-GOWAAC, the median-GOWAAC, the E-Z GOWAAC, the centered-GOWAAC operator, the S-GOWAAC operator, the maximal entropy GOWAAC weights, the minimal variability GOWAAC, the Gaussian GOWAAC weights, the minimax disparity GOWAAC weights, the nonmonotonic GOWAAC operator, etc.

For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* \geq k + m$ and $j* < k$, we are using the window-GOWAAC operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-GOWAAC becomes the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-GOWAAC is transformed in the GAC.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-GOWAAC that it is based on the olympic average (Yager, 1996a). Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-GOWAAC is transformed in the median-GOWAAC and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-GOWAAC is transformed in the olympic-GOWAAC.

Note that the median and the weighted median can also be used as GOWAAC operators. For the median-GOWAAC, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted median-GOWAAC, we select the argument K_h that has the hth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.
Another type of aggregation that could be used is the E-Z GOWAAC weights that it is based on the E-Z OWA weights (Yager, 2003). In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j* = 1$ to $n - q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z GOWAAC becomes the maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z GOWAAC becomes the minimum. Note that the E-Z GOWAAC is transformed in the GAC if $q = n$. The E-Z GOWAAC weights are a specific case of the window-GOWAAC operator (in the first class, when $k = 1$, and $m = q$; in the second class, when $k = n - q + 1$ and $m = q$).

A further family of aggregation operator that could be used is the centered-GOWAAC operator, that it is based on the OWA version (Yager, 2007). We can define a GOWAAC operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-GOWAAC operator. Note that the GAC is an example of this particular case of centered-GOWAAC operator. Another particular situation of the centered-GOWAAC operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-GOWAAC operator. For this situation, we find the median-GOWAAC as a particular case.

Another interesting family is the S-GOWAAC operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be divided in three classes: the “orlike”, the "andlike" and the generalized S-GOWAAC operator. The "orlike" S-GOWAAC operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for j = 2 to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the GAC and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-GOWAAC operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for j = 1 to n – 1 with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the GAC and if $\beta = 1$, the minimum. Finally, the generalized S-GOWAAC operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for j = 2 to n – 1 where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-GOWAAC operator becomes the "andlike" S-GOWAAC operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-GOWAAC operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the generalized Hurwicz criteria.

4.2. ANALYSING THE PARAMETER λ

By looking to the parameter λ, we find a wide range of mean operators such as the OWAAC, the OWGAC, the ordered weighted harmonic averaging adequacy coefficient (OWHAAC), the OWQAAC, etc. Note that we analyze particular cases of Eq. 7.
When $\lambda = 1$, the GOWAAC operator becomes the OWAAC operator.

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{31}$$

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DOWAAC operator and the AOWAAC operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DOWAAC operator has a descending order and the AOWAAC operator an ascending order. Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized adequacy coefficient (NAC) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted adequacy coefficient (WAC).

When $\lambda = 0$, the GOWAAC operator becomes the OWGAC operator.

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{\,w_j} \tag{32}$$

In this case, we get the descending OWGAC (DOWGAC) operator and the ascending OWGAC (AOWGAC) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all i_i, we get the normalized geometric adequacy coefficient (NGAC) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted geometric adequacy coefficient (WGAC).

When $\lambda = -1$, we get the OWHAAC operator.

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{K_j}} \tag{33}$$

In this case, from a generalized perspective of the reordering step, we obtain the descending OWHAAC (DOWHAAC) operator and the ascending OWHAAC (AOWHAAC) operator. In both cases, the formulation is the same although the reordering step is different. Note that if w_j = 1/n, for all i, we get the normalized harmonic adequacy coefficient (NHAC) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted harmonic adequacy coefficient (WHAC).

When λ = 2, we get the OWQAAC operator.

$$\text{GOWAAC}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^2\right)^{1/2} \tag{34}$$

With the DGOWAAC operator we obtain the descending OWQAAC (DOWQAAC) operator and with the AGOWAAC operator, the ascending OWQAAC (AOWQAAC) operator. Note that if w_j = 1/n, for all i, we get the normalized quadratic adequacy coefficient (NQAC) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted quadratic adequacy coefficient (WQAC).

Note that other families could be obtained by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1 where we study different properties and families of the aggregation operator.

5. QUASI-ARITHMETIC MEANS IN THE ADEQUACY COEFFICIENT

As it was explained in (Beliakov, 2005), a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology than (Fodor et al., 1995), we can suggest a similar generalization of the GOWAAC operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization, the Quasi-OWAAC operator. It can be defined as follows.

Definition 10. A Quasi-OWAAC operator of dimension n is a mapping QOWAAC: $R^n \times R^n \rightarrow R$ defined by:

$$\text{QOWAAC}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g(K_j)\right) \tag{35}$$

where K_j represents the jth largest of the $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, g is a strictly continuous monotonic function and the weights satisfy that their sum is 1 and $w_j \in [0,1]$.

As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function g(b). Note that in the Quasi-OWAAC operator we also find problems when the arguments are 0. Basically, these problems appear for values less than 0 in the parameter λ.

In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AOWAAC operator.

Note that it is also possible to suggest an equivalent removal index that it is a dual of the Quasi-OWAAC because $S(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the Quasi-OWADAC

Also note that all the properties and particular cases commented in the GOWAAC operator are also applicable in the Quasi-OWAAC operator. For example, if $w_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the Quasi-NAC operator.

6. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we are going to develop an illustrative example where we will see the applicability of the new approach. We are going to consider a decision making problem about selection of strategies. We will use different types of GOWAAC operators such as the NAC, the QAC, the WAC, the WQAC, the OWAAC, the AOWAAC, the OWQAAC, the step-OWAAC, the olympic-OWAAC, the median-OWAAC, etc.

Assume a company is analyzing the general policy for the next period and they consider 5 possible strategies to follow.

- A_1: Strategy 1.
- A_2: Strategy 2.
- A_3: Strategy 3.
- A_4: Strategy 4.
- A_5: Strategy 5.

In order to evaluate these strategies, the company has acquired a group of experts. They consider different general characteristics about the strategies that can be summarized in 6 characteristics:

- C_1 = Risk of the strategy.
- C_2 = Difficulty.
- C_3 = Benefits in the short term.
- C_4 = Benefits in the mid term.
- C_5 = Benefits in the long term.
- C_6 = Market share.

The evaluation of these characteristics is developed by the experts. They summarize the results in Table 1 depending on the characteristic C_i and the alternative A_k. Note that values near 1 imply that the results are good and values near 0, bad.

Table 1. Expected results

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.6	0.9	0.9	0.7	0.7
A_2	0.8	0.4	0.7	0.6	0.8	0.9
A_3	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.7
A_4	0.5	0.8	0.8	0.8	0.6	0.9
A_5	0.7	0.8	0.9	1	0.8	0.4

The group of experts considers the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). Note that this weighting vector reflects the attitudinal character of the company when using the OWA operator. In order to develop the analysis, the experts calculate the results that an ideal strategy should have. The results of the ideal strategy are shown in Table 2.

Table 2. Ideal strategy

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.8	0.9	1	0.8	1	0.8

Obviously, results higher than the ideal are also interesting so they can not be penalized as it happens with the Hamming distance. Then, it is reasonable to use the adequacy coefficient because it does not penalize results higher than the ideal, but it gives the same treatment than the Hamming distance for values lower than the ideal. Note that other similar methods could be used in the analysis such as the index of maximum and minimum level (J. Gil-Lafuente, 2002).

With this information, we can aggregate the expected results in order to obtain a representative result for each alternative. First, we are going to consider the NAC, the QAC, the WAC, the WQAC and the OWAAC operator. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 1

	NAC	QAC	WAC	WQAC	OWAAC
A_1	0.85	0.857	0.86	0.867	0.81
A_2	0.8	0.818	0.84	0.854	0.73
A_3	0.85	0.855	0.88	0.884	0.81
A_4	0.83	0.846	0.86	0.875	0.77
A_5	0.85	0.859	0.81	0.824	0.8

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of the GOWAAC operator such as the AOWAAC, the OWQAAC, the step-OWAAC (k=2), the median-OWAAC and the olympic-OWAAC operator. The results are shown in Table 4.

Table 4. Aggregated results 2

	AOWAAC	OWQAAC	step	median	olympic
A_1	0.89	0.817	0.9	0.9	0.85
A_2	0.86	0.751	1	0.8	0.825
A_3	0.89	0.815	0.9	0.85	0.85
A_4	0.89	0.784	1	0.85	0.85
A_5	0.89	0.812	0.9	0.9	0.875

As we can see, depending on the aggregation operator used the results are different. A_1 is optimal with the NAC, the OWAAC, the AOWAAC, the OWQAAC and the median-OWAAC. A_2 is optimal only with the step-OWAAC. A_3 with the NAC, the WAC, the WQAC, the OWAAC and the AOWAAC. A_4 with the AOWAAC and the step-

OWAAC. Finally, A_5 is optimal with the NAC, the QAC, the AOWAAC, the median-OWAAC and the olympic-OWAAC.

Another interesting issue, is to establish an ordering of the alternatives. Note that this is useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 5. Ordering of the strategies

	Ordering		Ordering
NAC	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	AOWAAC	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
QAC	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	OWQAAC	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
WAC	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_2 \succ A_5$	Step	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
WQAC	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$	Median	$A_1=A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
OWAAC	$A_1=A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic	$A_5 \succ A_1=A_3=A_4 \succ A_2$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the strategies is different. Then, these results may lead to different decisions.

7. CONCLUSIONS

We have presented the generalized adequacy coefficient. It is a generalization of the adequacy coefficient by using generalized means. We have distinguished between different generalizations such as the GAC, the WGAC and the GOWAAC operator. We have seen that these aggregation operators generalize a wide range of mean operators such as the NAC, the WAC, the OWAAC, the OWGAC, the OWHAAC, the OWQAAC, etc. We have analysed different properties of these operators such as the dual index of the adequacy coefficient and different measures for characterizing the weighting vector. We have also analysed the unification point found in the generalized adequacy coefficient and we have seen that in these situations it becomes the Minkowski distance.

We have analysed in detail different families of GOWAAC operators. We have distinguished between those families coming form the weighting vector and those found in the parameter λ. Finally, we have further generalized the GOWAAC operator by using quasi-arithmetic means. As a result, we have obtained the Quasi-OWAAC operator.

In order to see the applicability of the new approach, we have developed an application in a decision making problem. We have focussed on the selection of strategies. It is interesting to note that the selection of strategies is very broad because we can consider Marketing strategies, financial strategies, general strategies, etc. But we should also note that other decision making applications could be developed such as human resource management, financial management, product management, etc.

In future research, we expect to develop further extensions to the generalized adequacy coefficient by introducing new characteristics in the aggregation operator such as the use of inducing orders, linguistic information, etc. We will also develop other decision making applications such as the ones commented above.

ACKNOWLEDGEMENTS

We would like to thank the anonymous referees for their valuable comments that have improved the quality of the paper.

REFERENCES

Beliakov, G. (2005). "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 4, p. 119-130.

Beliakov, G.; Pradera, A.; Calvo, T. (2007). *Aggregation Functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T.; Mayor, G.; Mesiar, R. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.

Chiclana, F.; Herrera, F.; Herrera-Viedma, E. (2000). "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", *Proceedings of the 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, p. 985-991.

Dujmovic, J. (1974). "Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation", *Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika,* 483, p. 147-158.

Dyckhoff, H.; Pedrycz, W. (1984). "Generalized means as model of compensative connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 14, p. 143-154.

Figueira, J.; Greco, S.; Ehrgott, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys*, Springer. Boston.

Fodor, J.; Marichal, J.L.; Roubens, M. (1995). "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 3, p. 236-240.

Gil-Aluja, J. (1998). *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (1999). *Elements for a theory of decision in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Aluja, J. (2001). *Handbook of management under uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

Gil-Lafuente, A.M. (2005). *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin.

Gil-Lafuente, J. (2002). *Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva* (In Spanish), Ed. Milladoiro, Vigo.

Herrera, F.; Herrera-Viedma, E.; Chiclana, F. (2003). "A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making", *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 18, p. 689-707.

Karayiannis, N. (2000). "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Transactions on Neural Networks*, Vol. 11, p. 1093-1105.

Kaufmann, A.; Gil-Aluja, J. (1986). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas* (In Spanish), Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

Kaufmann, A.; Gil-Aluja, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre* (In Spanish), Ed. Hispano-europea, Barcelona.

Merigó, J.M. (2007). *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis (In Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M.; Casanovas, M., (2007a). "The fuzzy generalized OWA operator". *Proceedings of the XIVth SIGEF Congress*. Poiana-Brasov, Romania, p. 504-517.

Merigó, J.M.; Casanovas, M., (2007b). "The uncertain generalized OWA operator and its application in the selection of financial strategies". *Proceedings of the AEDEM International Conference*. Krakow, Poland, p. 547-556.

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2006). "Using the OWA operators in the selection of financial products", *Proceedings of the 41st CLADEA Congress*, Montpellier, France, CD-ROM.

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2007a). "Unification point in methods for the selection of financial products", *Fuzzy Economic Review*, Vol. 13, no. 1, p. 35-50.

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2007b). "The induced generalized OWA operator", *Proceedings of the EUSFLAT conference*, Ostrava, Czech Republic, Vol. 2, p. 463-470.

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2007c). "On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient", *Proceedings of the MS International Conference*, Terni, Italy, CD-ROM.

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2007d). "OWA operators in the selection of human resources", *Proceedings of the MS International Conference*, Terni, Italy, CD-ROM.

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2008a). "Analysing the unification point in the selection of polyvalent financial products", *Modelling, Measurement and Control D*, (to be published).

Merigó, J.M.; Gil-Lafuente, A.M. (2008b). "Using the OWA operator in the Minkowski distance", *International Journal of Computer Science*, (to be published).

Wang, J.H.; Hao, J., (2006). "A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words". *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, Vol. 14, p. 435-445.

Xu, Z.S. (2005). "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 20, p. 843-865.

Xu, Z.S.; Da, Q.L. (2002). "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 17, p. 709-716.

Yager, R.R. (1988). "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, Vol. 18, p. 183-190.

Yager, R.R. (1992). "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, Vol. 33, p. 41-69.

Yager, R.R. (1993). "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 59, p. 125-148.

Yager, R.R. (1996a). "Quantifier guided aggregation using OWA operators", *International Journal of Intelligent Systems*, Vol. 11, p. 49-73.

Yager, R.R. (1996b). "Constrained OWA Aggregation", *Fuzzy Sets and Systems*, Vol. 81, p. 89-101.

Yager, R.R. (2002). "Heavy OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 1, p. 379-397.

Yager, R.R. (2003). "E-Z OWA weights", *Proceedings of the 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, p. 39-42.

Yager, R.R. (2004). “Generalized OWA Aggregation Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, Vol. 3, p. 93-107.

Yager, R.R. (2007). “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, Vol. 11, p. 631-639.

Yager, R.R.; Filev, D.P. (1994). “Parameterized andlike and orlike OWA Operators”, *International Journal of General Systems*, Vol. 22, p. 297-316.

Yager, R.R.; Kacprzyk, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

14.2.9. Artículo de revista 9. – Publicado en *International Journal of Computer and Information Science and Engineering*

GEOMETRIC OPERATORS IN THE SELECTION OF HUMAN RESOURCES

José M. Merigó, and Anna M. Gil-Lafuente

Abstract—**We study the possibility of using geometric operators in the selection of human resources. We develop three new methods that use the ordered weighted geometric (OWG) operator in different indexes used for the selection of human resources. The objective of these models is to manipulate the neutrality of the old methods so the decision maker is able to select human resources according to his particular attitude. In order to develop these models, first a short revision of the OWG operator is developed. Second, we briefly explain the general process for the selection of human resources. Then, we develop the three new indexes. They will use the OWG operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. Finally, an illustrative example about the new approach is given.**

Keywords—OWG operator, decision making, human resources, Hamming distance.

INTRODUCTION

THE selection of the most appropriate human resources for the company represents a fundamental problem for its good development. With the large variety of alternatives existing in the market, the enterprise needs to know which the most appropriate person according to their interests is. In order to solve this problem, the company has to elaborate a selection process. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus on the methods developed in [1]–[3] about selection of human resources, the methods developed in [4]–[8] about selection of financial products and the methods developed in [9]–[10] about selection of players in sport management.

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results according to the interests of the decision maker. This problem becomes important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. One common method for aggregating the information considering the decision attitude of the decision maker is the ordered weighted geometric (OWG) operator introduced in [11]. Since its appearance, the OWG operator has been studied by different authors such as [12]–[21].

Our objective in this paper will consist in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of human resources. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the OWG operator because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWG operator. We will introduce in the selection of human resources, the ordered weighted geometric distance (OWGD) operator, the ordered weighted geometric adequacy coefficient (OWGAC) and the ordered weighted geometric index of maximum and minimum level (OWGIMAM).

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the OWG operator. Section 3 develops the process to follow when using the OWG operator in the selection of human resources. Section 4 gives an illustrative example of the suggested methodology and in Section 5 we finish with the main conclusions found in the paper.

OWG OPERATOR

The OWG operator was introduced in [11] and it provides a parameterized family of aggregation operators similar to the OWA operator [22]–[27]. It consists in using the geometric mean in the OWA operator. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by [14].

Definition 1. An OWG operator of dimension n is a mapping OWG: $R^{+^n} \to R^+$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWG(a_1, a_2,\dots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in descending order, due to the large number of different existing cases, we have to distinguish between the Descending OWG (DOWG) operators and the Ascending OWG (AOWG) operators. The weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

As it is seen in [11]–[14], the OWG operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$ for all i, then, OWG($a_1,\dots, a_n$) $\geq$ OWG($d_1,\dots, d_n$). It is bounded because Min$\{a_i\} \leq OWG(a_1,\dots, a_n) \leq$ Max$\{a_i\}$. It is idempotent because $OWG(a_1,\dots, a_n) = a$, if $a_i = a$, for all i.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the geometric mean and the weighted geometric mean [11]–[14]. For example, with the DOWG operator, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. With the AOWG operator, the maximum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The minimum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The geometric mean is found in both cases when $w_j = 1/n$ for all j and the weighted geometric mean when the ordered position of i is the same than the ordered position of j for all i and j. Other examples of aggregations with OWG operators can be seen in [11]–[14].

Selection of human resources with the OWG operator

Introduction

The motivation for using the OWG operator in the selection of human resources appears because sometimes, the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Then, due to the fact that the traditional methods in the selection of human resources [1]–[3] are neutral against the attitude of the decision maker, introducing the OWG operator in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but as it is explained for the OWA operator [6], the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflect this change in the evaluation phase. This can be useful in a lot of situations such as in situations where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more prudent decision than in normal cases. Obviously, this increase in the prudence can affect our decision making that we select a different worker than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of human resources with the OWG operator, is similar to the process developed in [1]–[3],[9]–[10] for human resources and in [4]–[8] for financial products, with the difference that the instruments used will include the OWG operator in the selection process. Then, the 5 steps to follow will be:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting workers for the company. That is: $C = \{C_1, C_2, \ldots C_i, \ldots, C_n\}$.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal worker. That is:

TABLE I
IDEAL CHARACTERISTICS

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different workers considered. That is:

TABLE II
REAL CHARACTERISTICS

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P_k	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different workers considered, and determination of the level of removal using the OWG operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

In *Step 4*, the objective is to express numerically the removal between the ideal worker and the different workers considered. For this, it can be used the traditional selection indexes [1]–[10]. In this paper, the difference will be that they will be mixed with the OWG operator. Then, with this operator we will be able to provide a parameterized family of aggregation operators in the selection indexes such as the maximum, the minimum, the geometric mean and the weighted geometric mean. In the following, it will be shown how to use the OWG operator in the main selection indexes.

Using the OWGD operator

The ordered weighted geometric distance (OWGD) operator consists in combining the OWG operator with the normalized Hamming distance. It provides a parameterized family of distance operators that include the maximum distance, the minimum distance, the normalized geometric distance and the weighted geometric distance. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWGD operator of dimension n, is a mapping $OWGD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGD(P,P_k) = \prod_{j=1}^{n} D_j^{\,w_j} \tag{2}$$

where D_j represents the jth largest of the $|\mu_j - \mu_j^{(k)}|$, and k =1,2,…,m. Note that in distances, the best result is usually the smallest distance. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$ for all j.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the descending OWGD (DOWGD) operator and the ascending OWGD (AOWGD) operator. The DOWGD operator has the same definition than the OWGD operator. The AOWGD operator also has the same formulation with the difference that the reordering of the D_j is ascendant. Note that the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGD operator. Also note that this operator is commutative, monotonic, idempotent and bounded.

By using a different manifestation of the weighting vector we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, with the DOWGD operator the maximum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized geometric distance is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted geometric distance is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Using the OWGAC operator

The ordered weighted geometric adequacy coefficient (OWGAC) is an operator that uses in the same aggregation the OWG operator and the adequacy coefficient. It also provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum, the normalized geometric adequacy coefficient and the weighted geometric adequacy coefficient. It can be defined as follows.

Definition 3. An OWGAC operator of dimension n, is a mapping $OWGAC$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGAC(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{w_j} \tag{3}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_j + \mu_j^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the descending OWGAC (DOWGAC) operator and the ascending OWGAC (AOWGAC) operator. The DOWGAC operator has the same definition than the OWGAC operator. The AOWGAC operator also has the same formulation with the difference that the reordering of the D_j is ascendant. Then, the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGAC operator. Note that the OWGAC operator also accomplishes the properties of monotonicity, commutativity, boundedness and idempotency.

Different types of aggregation operators can be obtained by choosing a different manifestation of the weighting vector. For example, the maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized geometric adequacy coefficient (GAC) is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted geometric adequacy coefficient (WGAC) is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Analogously to the OWGAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWGAC because $Q(P_j \rightarrow P) = 1 - K(P_j \rightarrow P)$. Note that this index has already been studied for the selection of financial products in [7]. We will call it the ordered weighted geometric dual adequacy coefficient (OWGDAC). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWGDAC operator of dimension n, is a mapping $OWGDAC$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGDAC(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} Q_j^{w_j} \tag{4}$$

where Q_j represents the jth largest of the $[0 \vee (\mu_j - \mu_j^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWGDAC (DOWGDAC) and the ascending OWGDAC (AOWGDAC) operator. The DOWGDAC has the same definition than the OWGDAC. The AOWGDAC has the same formulation but the reordering is different. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGDAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGDAC operator. Note that the OWGDAC operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent.

It is also possible to obtain different families of aggregation operators with the OWGDAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the normalized geometric dual adequacy coefficient

(GDAC) and the weighted geometric dual adequacy coefficient (WGDAC). Note that the maximum is obtained in the same form than the minimum of the OWGAC and the minimum in the same form than the maximum of the OWGAC. The GAC is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WGAC is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in this case we could also use the same policy about ties in the final result as it has been explained for the OWGAC operator.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources. As it has been explained in [5], the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new methods suggested in this paper, we also find the unification point when the OWGD and the OWGAC accomplish the theorems explained in [5]. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point [5].

Theorem 1. Assume $OWGD(P,P_k)$ is the selection of human resources with the OWGD operator and $OWGDAC(P_k \rightarrow P)$ the selection of human resources with the OWGDAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWGD(P,P_k) = OWGDAC(P_k \rightarrow P) \tag{5}$$

Proof. Let

$$OWGD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid$$ and

$$OWGDAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWGDAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWGD(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Analysing this theorem, we could generalize it for all the human resources considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to Theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics i and all the human resources k.

Using the OWGIMAM operator

In this subsection we study the use of the OWG operator in the index of maximum and minimum level. We will call this operator as the ordered weighted geometric index of maximum and minimum level (OWGIMAM). This operator also provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum, the normalized geometric index of maximum and minimum level and the weighted geometric index of maximum and minimum level. It can be defined as follows.

Definition 5. An OWGIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWGIMAM$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWGIMAM(P_k \rightarrow P) = \prod_{j=1}^{n} S_j^{\,w_j} \qquad (6)$$

where S_j represents the jth largest of all the $|\mu_j - \mu_j^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_j - \mu_j^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. It is important to note that we will not include in the aggregation the $S_j = 0$, for all j, as it gives inconsistent results.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the descending OWGIMAM (DOWGIMAM) operator and the ascending OWGIMAM (AOWGIMAM) operator. The DOWGIMAM operator has the same definition than the OWGIMAM operator. The AOWGIMAM operator also has the same formulation with the difference that the reordering of the D_j is ascendant. Then, the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWGIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWGIMAM operator. Note that the OWGIMAM operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized geometric index of maximum and minimum level (GIMAM) is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted geometric index of maximum and minimum level (WGIMAM) is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

In this case, we could also analyse the unification point. The unification implies that the OWGIMAM operator becomes the OWGD operator as it has been explained in [5] for the index of maximum and minimum level. The conditions to enter in a situation of unification point follow the same policy as the basic cases explained in [5]. Note that in this case we also have to distinguish between total unification point and partial unification point.

Theorem 2. Assume $OWGD(P,P_k)$ is the selection of human resources with the OWGD operator and $OWGIMAM(P_k \rightarrow P)$ the selection of human resources with the OWGIMAM operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWGD(P,P_k) = OWGIMAM(P_k \rightarrow P) \qquad (7)$$

Proof. Let

$$OWGD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \, | \mu_i - \mu_i^{(k)} |$$ and

$$OWGIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} [w_j * [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] + w'_j \left| \mu_i - \mu_i^{(k)} \right|]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWGIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j(\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWGD(P,P_k)$$

Note that $w_j* + w_j‘ = w_j$. ■

Analysing this theorem, we could generalize it for all the human resources considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (2) with the difference that now we consider all the characteristics i and all the human resources k.

Illustrative Example

In the following we are going to develop an illustrative example in order to understand numerically the new approaches commented above.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics for the company.

Assume that a company wants to select a worker for a vacant and it has 3 candidates P_1, P_2, P_3, with different characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the ideal worker as Table III:

TABLE III
CHARACTERISTICS OF THE IDEAL WORKER

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
$P*$ =	0.9	0.8	0.6	0.8	0.3

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. For each of these characteristics, it is found the following information:

For each of these characteristics, it is found the following information shown in Table IV:

TABLE IV
AVAILABLE CANDIDATES

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0.8	0.7	0.3	1	1
P_2 =	0.8	1	0.6	0.3	0.3
P_3 =	1	0.6	1	1	0.2

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different candidates considered, and determination of the level of removal using the OWA operators. We will consider the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the OWAD operator and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the following weighting vector: W = (0’1, 0’1, 0’2, 0’3, 0’3). With this weighting vector, we can calculate the degree of optimism of the decision as: $\alpha(W)$ = 0’35 $\Rightarrow$ 35%, and the degree of dispersion as: $H(W)$ = 1’504.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each candidate. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using (2) and considering the type of aggregation we are developing. The results are shown in Table V.

TABLE V
AGGREGATED RESULTS – HAMMING DISTANCE

	NHD	*WHD*	*OWAD*	*AOWAD*
P_1	0.28	0.35	0.2	0.36
P_2	0.16	0.18	0.09	0.23
P_3	0.2	0.2	0.16	0.24

In this case, our decision will consist in selecting the candidate with the smallest distance. Then, we will select P_2 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal worker. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered using (3). The results are shown in Table VI.

TABLE VI
AGGREGATED RESULTS – ADEQUACY COEFFICIENT

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
P_1	0.9	0.92	0.86	0.94
P_2	0.88	0.84	0.82	0.94
P_3	0.94	0.95	0.91	0.97

The decision will consist in selecting the candidate with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal worker. Then, we will select P_3 because it gives us the highest result for all the cases.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. That is: $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in Table VII.

TABLE VII
AGGREGATED RESULTS – DUAL ADEQUACY COEFFICIENT

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
P_1	0.1	0.08	0.14	0.06
P_2	0.12	0.16	0.18	0.06
P_3	0.06	0.05	0.09	0.03

Finally, if we use the index of maximum and minimum level in the selection process as a combination of the normalized Hamming distance and the normalized adequacy coefficient, we will get the following. In this example we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using (6). Here, we note that in the reordering step, it will be only considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained with the adequacy coefficient or with the Hamming distance. The results are shown in Table VIII.

TABLE VIII
AGGREGATED RESULTS – INDEX MAXIMUM-MINIMUM LEVEL

	NIMAM	*WIMAM*	*OWAIMAM*	*AOWAIMAM*
P_1	0.28	0.35	0.2	0.36
P_2	0.12	0.16	0.06	0.18
P_3	0.18	0.19	0.13	0.23

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the candidate with the smallest removal to the ideal.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent approximation index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in Table IX.

TABLE IX
AGGREGATED RESULTS – DUAL IMAM

	NDIMAM	*WDIMAM*	*OWADIMAM*	*AOWADIMAM*
P_1	0.72	0.65	0.8	0.64
P_2	0.88	0.84	0.94	0.82
P_3	0.82	0.81	0.87	0.77

Again, we see that the optimal choice is P_2 because it is the candidate with the highest results.

Conclusion

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of human resources. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have suggested the possibility of change this neutrality with the introduction of the OWG operator in the selection process. As we have seen, the OWG operator permits under estimate or over estimate the selection process, which has allowed us to manipulate the initial neutrality. With this information, we have developed three new instruments for the selection of human resources, consisting in combining the old selection indexes with the OWG operator. Then, we have obtained three new methods that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of human resources. Moreover, these methods have generalized a wide range of aggregation operators in the selection process such as the geometric distance or the weighted geometric distance.

This work represents an extension about the possibility of combining the OWG operator with different selection indexes. In this paper, we have focused in the selection of human resources but it is important to note that these new methods can also be applied to other selection processes such as the selection of assets, investments, strategies, etc. In future research, we will analyze how these methods can be applied to other selection processes and combined with other selection indexes.

References

[1] A. Kaufmann, and J. Gil Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Spain, 1986, in Spanish.

[2] A. Kaufmann, and J. Gil Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Spain, 1987, in Spanish.

[3] J. Gil Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[4] A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[5] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Unification point in methods for the selection of financial products", *Fuzzy Economic Review*, vol. 12, pp. 35-50, 2007.

[6] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA operators in the selection of financial products", in *Proc. 41th CLADEA Conf.*, Montpellier, France, 2006, CD-ROM.

[7] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWG operators in the selection of financial products", *Lectures on Modelling and Simulation*, vol. 2006 (3), pp. 49-55, 2006.

[8] A.M. Gil-Lafuente, and J.M. Merigó, "Acquisition of financial products that adapt to different environments", *Lectures on Modelling and Simulation*, vol. 2006 (3), pp. 42-48, 2006.

[9] J. Gil-Lafuente, "El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista", in *10th AEDEM Int. Congress*, Reggio Calabria, Italy, 2001, pp. 439-443.

[10] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, Spain, 2002, in Spanish.

[11] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma, "The ordered weighted geometric operator: Properties and application", in *Proc. 8th Conf. Inform. Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU)*, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[12] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, "Integrating multiplicative preferente relations in a multipurpose decision-making model based on fuzzy preference relations", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 122, pp. 277-291, 2001.

[13] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, "Multiperson Decision Making Based on Multiplicative Preference Relations", *European J. Operational Research*, vol. 129, pp. 372-385, 2001.

[14] Z.S. Xu, and Q.L. Da, "The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 17, pp. 709-716, 2002.

[15] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana, "A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 18, pp. 689-707, 2003.

[16] Z.S. Xu, and Q.L. Da, “An Overview of Operators for Aggregating Information”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 18, pp. 953-969, 2003.
[17] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and S. Alonso, “Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 19, pp. 233-255, 2004.
[18] J.M. Merigó, and M. Casanovas, “Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure”, in *Proc. 13th Congress Int. Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp 709-727.
[19] J.M. Merigó, and M. Casanovas, “Geometric operators in decision making with minimization of regret”, *International Journal of Computer Systems Science and Engineering*, vol. 1, pp. 111-118, 2008.
[20] R.R. Yager, and Z.S. Xu, “The continuous ordered weighted geometric operator and its application to decision making”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 157, pp. 1393-1402, 2006.
[21] Z.S. Xu, and R.R. Yager, “Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets”, *Int. J. General Systems*, vol. 35, pp. 417-433, 2006.
[22] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 183-190, 1988.
[23] R.R. Yager, and J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[24] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.
[25] Z.S. Xu, “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 20, pp. 843-865, 2005.
[26] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Dept. Business Administration, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain, 2007.
[27] J.M. Merigó, and M. Casanovas, “Decision making using maximization of negret”, *International Journal of Computational Intelligence*, vol. 4, pp. 171-178, 2008.

14.2.10. Artículo de revista 10. – Publicado en *International Journal of Computer Science and Enginerring*

ON THE USE OF THE OWA OPERATOR IN THE EUCLIDEAN DISTANCE

José M. Merigó, and Anna M. Gil-Lafuente

Abstract—**We analyze the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator. Basically, it consists in using the ordered weighted averaging (OWA) operator in the Euclidean distance. We give a general overview of this type of distance measure studying some of its main properties. We also develop different families of EOWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance, the window-EOWAD operator, the EOWAD median, etc. Finally, we end the paper with an illustrative example where we apply the new approach in an investment selection problem.**

Keywords—Aggregation operator, Euclidean distance, OWA operator, Selection of investments.

INTRODUCTION

THE Euclidean distance is a very useful technique that has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. Often, we prefer to use the normalized Euclidean distance because we want an average result of all the individual distances. This type of distance is also known as weighted Euclidean distance when we prefer to give different degrees of importance to the individual distances instead of giving them the same importance.

Sometimes, when calculating the normalized Euclidean distance, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for the aggregation of the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in [1]. The OWA operator is an aggregation operator that includes the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It has been used in a wide range of applications [2]–[22].

In this paper we study, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator. It consists in normalizing the Euclidean distance with the OWA operator. Then, it is possible to develop a new type of distance measure that includes the maximum distance, the minimum distance and the normalized Euclidean distance as special cases. We should note that this distance measure has already been considered in [22]. However, in this paper we want to study in more detail some of its properties and an application in decision making. We will study the basic definitions and some of its main properties such as the measures for characterizing the weighting vector and the distinction between descending and ascending orders. We will also study different families of EOWAD operators such as the step-EOWAD operator, the EOWAD median, the window-EOWAD operator, the olympic EOWAD average, the E-Z EOWAD weights, the centered-EOWAD operator, the S-EOWAD operator, the maximal entropy EOWAD weights, etc.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section II we briefly describe some basic concepts such as the OWA operator, the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator and the Euclidean distance. Section III introduces the EOWAD operator. Section IV analyzes different families of EOWAD operators and Section V ends the paper with an application of the new approach in decision making.

PRELIMINARIES

In this Section, we briefly describe the OWA operator, the OWQA operator and the normalized Euclidean distance.

OWA Operator

The OWA operator was introduced by Yager in [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

The OWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [1]. Different families of OWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector [1]–[20]. From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [3], [11], [21].

OWQA Operator

The OWQA operator [17] is an extension of the OWA operator that uses quadratic means. It provides another parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the quadratic mean as special cases. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWQA operator of dimension n is a mapping $OWQA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1, then:

$$OWQA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

The OWQA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that it is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By using a different manifestation in the weighting vector, we are able to obtain different families of OWQA operators such as the weighted quadratic average, the step-OWQA operator, the window-OWQA operator, the OWQA median, the olympic OWQA average, the E-Z OWQA weights and the centered OWQA operator [5]. From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWQA (DOWQA) operator and the ascending OWQA (AOWQA) operator.

Normalized Euclidean Distance

The normalized Euclidean distance is a distance measure used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 3. A normalized Euclidean distance of dimension n is a mapping d_E: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_E(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |^2 \right)^{1/2} \tag{3}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the Euclidean distance it is better to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Euclidean distance. It can be defined as follows.

Definition 4. A weighted Euclidean distance of dimension n is a mapping d_{WE}: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{WE}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i |^2 \right)^{1/2} \tag{4}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively. Note that Definitions 3 and 4 are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [23]–[25].

EUCLIDEAN ORDERED WEIGHTED AVERAGING DISTANCE (EOWAD) OPERATOR

The EOWAD operator is an extension of the traditional normalized Euclidean distance by using OWA operators. The main difference is that in this case, we reorder the arguments of the individual distances according to their values. Then, it is possible to calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, two intuitionistic fuzzy sets, etc., parameterizing the results according to the attitudinal character of the decision maker. For example, this type of distance is useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the lower individual distances because he believes that they will be more significant in the analysis. Note that it can be constructed by mixing the OWA operator with the Euclidean distance or the OWQA operator with the Hamming distance. Also note that the EOWAD operator can be obtained as a particular case of the Minkowski OWAD (MOWAD) operator [26]. It can be defined as follows.

Definition 5. An EOWAD operator of dimension n is a mapping $EOWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is 1. Then, the distance between two sets A and B is:

$$EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} \tag{5}$$

where D_j is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, we adapt the characteristics of the Euclidean distance to the characteristics of the OWA operator. Note that we could also denote it as $EOWAD(A,B)$.

A fundamental aspect of the EOWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual Euclidean distance, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If D is a vector corresponding to the ordered arguments D_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the EOWAD aggregation can be expressed as:

$$EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = W^T D \tag{6}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending EOWAD (DEOWAD) and the ascending EOWAD (AEOWAD) operator. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result or in situations where the lowest value is the best result. The DEOWAD operator has the same definition than the EOWAD operator.

Definition 6. An AEOWAD operator of dimension n is a mapping $AEOWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$AEOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} \tag{7}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, the only difference between the DEOWAD and the AEOWAD operator is that the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way in the AEOWAD: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$, and in a decreasing way in the DEOWAD.

The EOWAD operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that it accomplishes the following properties:

1. *Commutativity*: Any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = EOWAD(e_1, e_2,\ldots, e_n)$, where $(e_1,\ldots,e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1,\ldots,d_n)$.
2. *Monotonicity*: If $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) \geq EOWAD(e_1, e_2,\ldots, e_n)$.
3. *Boundedness*: The EOWAD aggregation is delimited by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{d_i\} \leq EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) \leq \text{Max}\{d_i\}$.
4. *Idempotency*: If $d_i = d$, for all d_i, then, $EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the EOWAD operator such as the attitudinal character, the dispersion and the divergence. Based on the measures developed for the OWA and the GOWA operator in [1], [16]–[17], they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^2 \right)^{1/2} \tag{8}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^2 \right)^{1/2} \tag{9}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. Using the same methodology as in [1], it can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{10}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \qquad (11)$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

FAMILIES OF EOWAD OPERATORS

By using a different manifestation of the weighting vector in the EOWAD operator, we are able to obtain different types of distance aggregation operators. In [22], it was studied some particular cases. In this Section, we will analyze other families of EOWAD operators not considered in [22]. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance and the weighted Euclidean distance.

For the DEOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Min}\{d_i\}$. For the AEOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $AEOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $AEOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Min}\{d_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i. This special type is known as step-EOWAD operator [22].

The normalized Euclidean distance and the weighted Euclidean distance are also particular cases of the EOWAD operator. The normalized Euclidean distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Euclidean distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DEOWAD and the AEOWAD operators obtain these particular cases. In the following, we will only consider the descending version of the different families of EOWAD operators because the ascending version is straightforward by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DEOWAD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AEOWAD operator.

Remark 1: Other families of aggregation operators could be obtained by using a different manifestation in the weighting vector. For example, the Hurwicz EOWAD criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$, then, $EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \alpha\ \text{Max}\{d_i\} + (1 - \alpha)\ \text{Min}\{d_i\}$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz EOWAD criteria becomes the maximum distance and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum distance.

Remark 2: Note that the median and the weighted median can also be used as EOWAD operators. For the EOWAD median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument d_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest d_i. For the weighted EOWAD median, we select the argument that has the kth largest d_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 3: When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-EOWAD operator that it is based on the window-OWA operator

[12]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-EOWAD is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, then, the window-EOWAD becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-EOWAD is transformed in the normalized Euclidean distance.

Remark 4: If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic EOWAD average that it is based on the olympic average [15]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic EOWAD average is transformed in the EOWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-EOWAD is transformed in the olympic EOWAD average.

Remark 5: Another type of aggregation that could be used is the E-Z EOWAD weights that it is based on the E-Z OWA weights [18]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n, and in the second class we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$.

Remark 6: Another interesting family is the S-EOWAD operator based on the S-OWA operator [12], [14]. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-EOWAD operator. The generalized S-EOWAD operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-EOWAD operator becomes the "andlike" S-EOWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-EOWAD operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-EOWAD operator becomes the Hurwicz quadratic distance criteria.

Remark 7: A further family of aggregation operators that could be used in the EOWAD operator is the centered-EOWAD operator. This type of operator has been suggested by Yager [19] for the OWA operator. Following the same methodology, we could say that an EOWAD operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ (softly decaying centered-EOWAD operator). Another particular situation of the centered-EOWAD operator appears if we remove the third condition (non-inclusive centered-EOWAD operator).

Remark 8: A special type of centered-EOWAD operator is the Gaussian EOWAD weights based on [8]. In order to define it, we have to consider a Gaussian distribution $\eta(\mu, \sigma)$ where

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{12}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (j - \mu_n)^2} \tag{13}$$

Assuming that

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2} \tag{14}$$

we can define the EOWAD weights as

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n} \eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}} \tag{15}$$

Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Remark 9: By using the orness or attitudinal character and the dispersion measure it is also possible to obtain the weights of the EOWAD operator. For example, following [4] we could develop the maximal entropy EOWAD (MEEOWAD) as follows

$$\text{Maximize: } -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{16}$$

$$\text{Subject to: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^2 \right)^{1/2} = \alpha(W) \tag{17}$$

where $\alpha \in [0, 1]$, $w_j \in [0,1]$, and the sum of the weights is 1. Note that other methods similar to the MEEOWAD could be developed for obtaining the EOWAD weights following the same methodologies than [7], [27]–[29]. Then, we could obtain for example, the maximal renyi entropy EOWAD weights, the minimal variability EOWAD weights, the minimax disparity EOWAD weights, etc.

Remark 10: Following the methodology explained in [30], we can formulate the EOWAD weights as follows. For the first method, the weights can be expressed as $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, and $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ for $j = 2$ to $n - 1$. For the second method, the weights are obtained as $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, and $w_j = w_j(1 - w_n)$ for $j = 2$ to $n - 1$.

Remark 11: A very useful approach for obtaining the weights that can be also used for the EOWAD operator is the functional method introduced by Yager [15] for the OWA operator. It can be summarized as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \to [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the EOWAD weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{18}$$

It can easily be shown that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Remark 12: Other families of EOWAD operators could be obtained such as the weights that depend on the aggregated objects [12]. Note that in the EOWAD operator, the aggregated objects are individual distances. Then, the weights depend on the distances between the elements of the different sets. For example, we could develop the BADD-EOWAD operator that it is based on the OWA version developed in [12].

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \qquad (19)$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i, that is, the individual distances. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the normalized Euclidean distance and if $\alpha = \infty$, we get the maximum distance. Other families of EOWAD operators that depend on the aggregated objects could be developed by using other formulations in the arguments such as $(1 - b_j)^{\alpha}$, $(1/b_j)^{\alpha}$, etc.

APPLICATION TO DECISION MAKING

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to see the results obtained in the aggregation by using a different type of EOWAD operators. We will see that depending on the weights selected, the decision will be different. We will study the selection of investments where the decision maker needs to find the best investment according to his interests. Note that other selection problems could be developed such as the selection of human resources, the selection of financial products, the selection of strategies, the selection of products, etc. [5]–[6], [31]–[37].

Assume that an enterprise wants to increase its volume of activities. In order to do this, the board of directors, with the opinion of its group of experts, has established five possible investments that the enterprise could develop in the future.

(1) *A* is a car company called *V*.
(2) *B* is a computer company called *W*.
(3) *C* is a chemical company called *X*.
(4) *D* is a food company called *Y*.
(5) *E* is a TV company called *Z*.

After careful review of the information, the experts have given the following general information. They have summarized the information of the investments in five main characteristics C_i with the following results. Note that the results are valuations between 0 and 1.

TABLE I
CHARACTERISTICS OF THE INVESTMENTS

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A	0.7	0.6	0.6	0.4	0.9
B	0.5	0.7	0.7	0.6	0.7
C	0.2	0.8	0.9	0.4	0.9
D	0.6	0.7	0.8	0.7	0.6
E	0.7	0.5	0.8	0.3	0.8

According to the objectives and policies of the enterprise, the experts have established the ideal investment for the enterprise independently of the investments available. They have established the following valuations for it.

TABLE II
CHARACTERISTICS OF THE IDEAL INVESTMENT

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Ideal	0.8	0.9	1	0.6	0.8

With this information we can develop different aggregation methods in order to select an investment. First, we are going to consider four basic aggregations such as the normalized Euclidean distance, the weighted Euclidean distance, the EOWAD operator and the AEOWAD operator. Note that for the last three cases we will use the weighting vector W = (0.1, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2). Also note that we will use (3) for the normalized Euclidean distance, (4) for the weighted Euclidean distance, (5) for the EOWAD operator, and (7) for the AEOWAD operator. The results are the following.

TABLE III
AGGREGATED RESULTS

	ED	*WED*	*EOWAD*	*AEOWAD*
A	0.248	0.264	0.234	0.248
B	0.214	0.202	0.214	0.216
C	0.293	0.225	0.232	0.293
D	0.184	0.184	0.184	0.2
E	0.244	0.273	0.230	0.246

As we can see, the best alternative according to these four cases is the investment *D* because it has the lowest distance to the ideal investment.

If we try to order the investments, a typical situation if we want to select more than one alternative, we can see that each aggregation gives us a different order of the investments. For the Euclidean distance the order is $D \succ B \succ E \succ A \succ C$. Note that $\succ$ means *preferred to*. For the weighted Euclidean distance the order is $D \succ B \succ C \succ A \succ E$. For the EOWAD operator, we get $D \succ B \succ E \succ C \succ A$, and for the AEOWAD operator, $D \succ B \succ E \succ A \succ C$.

Now, we are going to study the results obtained by using different families of EOWAD operators. We will consider the step-EOWAD operator, the EOWAD median, the olympic EOWAD and the EZ-EOWAD operator. Note that for the step-EOWAD operator we consider k = 4 and for the EZ-EOWAD operator we consider k = 2. The results are shown in Table V.

TABLE V
FAMILIES OF EOWAD OPERATORS

	Step	*Median*	*Olympic*	*EZ-1*	*EZ-2*
A	0.1	0.2	0.216	0.1	0.353
B	0.1	0.2	0.216	0.07	0.3
C	0.1	0.1	0.141	0.1	0.447
D	0.2	0.2	0.2	0.122	0.2
E	0.1	0.2	0.216	0.07	0.353

As we can see, we will select a different investment depending on the family of EOWAD operators used in the aggregation. With the step-EOWAD operator, we will be indifferent in selecting alternative *A*, *B*, *C* or *E*. With the EOWAD median, our choice will be alternative *C*. With the Olympic EOWAD we will also select alternative *C*. With the first class of EZ-EOWAD weights, our choice will consist in selecting alternative *B* or *E*. And with the second class of EZ-EOWAD weights, our choice will be alternative *D*.

As commented above, we can establish an order for the investments according to the results obtained. Note that this is useful when selecting more than one investment. For the step-EOWAD operator, the order is $A=B=C=E \succ D$. For the EOWAD median, the order is $C \succ A=B=D=E$. For the Olympic EOWAD operator, the order is $C \succ D \succ A=B=E$. For the first class of EZ-EOWAD weights, the order is $B=E \succ A=C \succ D$. Finally, for the second class of EZ-EOWAD weights, the order is $D \succ B \succ A=E \succ C$.

As a general conclusion for the example, we can see that depending on the method used in the selection process, our decision will be different. Note that the method used has to be in accordance with the interests of the decision maker.

CONCLUSIONS

We have studied the EOWAD operator. First we have reviewed some basic concepts such as the OWA operator, the OWQA operator and the normalized Euclidean distance. Then, we have developed the EOWAD operator. We have defined it and we have studied some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders and the measures for characterizing the weighting vector. Next, we have developed different examples of EOWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance, the weighted Euclidean distance, the step-EOWAD operator, the EOWAD median, the window-EOWAD operator, the olympic EOWAD average and the E-Z EOWAD weights. Finally, we have given an illustrative example where we have seen the results obtained by using these methods in a decision making problem.

In this paper, we have analyzed the possibility of using OWA operators in the Euclidean distance and we have developed an application in the selection of investments. In future research, we will analyze other possibilities such as the use of different extensions of the OWA operators in the Euclidean distance and its application in other selection problems.

References

[1] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 183-190, 1988.

[2] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] J. Fodor, J.L. Marichal, and M. Roubens, “Characterization of the ordered weighted averaging operators”, *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 3, pp. 236-240, 1995.

[4] M. O’Hagan, “Fuzzy decision aids”, in : *Proc. 21st IEEE Asilomar Conf. on Signal, Systems and Computers*, vol 2, Pacific Grove, CA, 1987, pp. 624-628.

[5] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Dept. Business Administration, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain, 2007.

[6] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA operators in the selection of financial products", in *Proc. 41th CLADEA Conf.*, Montpellier, France, 2006, CD-ROM.
[7] Y.M. Wang, and C. Parkan, "A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights", *Information Sciences*, vol. 175, pp. 20-29, 2005.
[8] Z.S. Xu, "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 20, pp. 843-865, 2005.
[9] Z.S. Xu, and Q.L. Da, "The Uncertain OWA Operator", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 17, pp. 569-575, 2002.
[10] Z.S. Xu, and Q.L. Da, "An Overview of Operators for Aggregating Information", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 18, pp. 953-969, 2003.
[11] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, pp. 41-69, 1992.
[12] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 59, pp. 125-148, 1993.
[13] R.R. Yager, "On weighted median aggregation", *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.*, vol. 2, pp. 101-113, 1994.
[14] R.R. Yager, and D.P. Filev, "Parameterized "andlike" and "orlike" OWA operators", *Int. J. General Systems*, vol. 22, pp. 297-316, 1994.
[15] R.R. Yager, "Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 11, pp. 49-73, 1996.
[16] R.R. Yager, "Heavy OWA Operators", *Fuzzy Opt. Decision Making*, vol. 1, pp. 379-397, 2002.
[17] R.R. Yager, "Generalized OWA Aggregation Operators", *Fuzzy Opt. Decision Making*, vol. 3, pp.93-107, 2004.
[18] R.R. Yager, "An extension of the naïve Bayesian classifier", *Information Sciences*, vol. 176, pp. 577-588, 2006.
[19] R.R. Yager, "Centered OWA operators", *Soft Computing*, vol. 11, pp. 631-639, 2007.
[20] R.R. Yager, and J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[21] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure", in *Proc. 13th Congress Int. Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp 709-727.
[22] N. Karayiannis, "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, 1093-1105, 2000.
[23] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.
[24] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, and A. Terceño, *Mathematics for economic and business management*, (in Spanish), Ed. Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.
[25] E. Szmidt, and J. Kacprzyk, "Distances between intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 114, pp. 505-518, 2000.
[26] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA Operator in the Minkowski Distance", *Int. J. Computer Science*, (submitted), 2008.
[27] R. Fullér, and P. Majlender, "On obtaining minimal variability OWA operator weights", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 136, pp. 203-215, 2003.

[28] Y.M. Wang, and C. Parkan, "A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making", *Information Sciences*, vol. 177, pp. 1867-1877, 2007.
[29] P. Majlender, "OWA operators with maximal Rényi entropy", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 155, pp. 340-360, 2005.
[30] D.P. Filev, and R.R. Yager, "On the issue of obtaining OWA operator weights", *Fuzzy Sets Syst.*, vol. 94, pp. 157-169, 1998.
[31] A. Kaufmann, and J. Gil Aluja, *Introduction to the theory of fuzzy subsets in business management*, (in Spanish), Ed. Milladoiro, Spain, 1986.
[32] A. Kaufmann, and J. Gil Aluja, *Management techniques for the treatment of uncertainty*, (in Spanish), Ed. Hispano-europea, Spain, 1987.
[33] J. Gil Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
[34] A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.
[35] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Unification point in methods for the selection of financial products", *Fuzzy Economic Review*, vol. 12, pp. 35-50, 2007.
[36] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Geometric operators in decision making with minimization of regret", *Int. J. Computer Systems Science and Engineering*, vol. 1, pp. 111-118, 2008.
[37] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Decision making using maximization of negret", *Int. J. Computational Intelligence*, vol. 4, pp. 171-178, 2008.

14.2.11. Artículo de revista 11. – Publicado en *International Journal of Computer Science*

USING THE OWA OPERATOR IN THE MINKOWSKI DISTANCE

José M. Merigó, and Anna M. Gil-Lafuente

Abstract—**We study different types of aggregation operators such as the ordered weighted averaging (OWA) operator and the generalized OWA (GOWA) operator. We analyze the use of OWA operators in the Minkowski distance. We will call these new distance aggregation operator the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator. We give a general overview of this type of generalization and study some of their main properties. We also analyze a wide range of particular cases found in this generalization such as the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the normalized Minkowski distance, etc. Finally, we give an illustrative example of the new approach where we can see the different results obtained by using different aggregation operators.**

Keywords—Aggregation operators, Minkowski distance, OWA operators, Selection of strategies.

INTRODUCTION

T

HE distance measures are very useful techniques that have been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, multicriteria decision making, business decisions, etc. Among the great variety of distances we can find in the literature, the Minkowski distance represents a generalization to a wide range of them such as the Hamming distance, the Euclidean distance, the geometric distance and the harmonic distance.

Often, when calculating distances, we want an average result of all the individual distances. We call this the normalization process. In the literature, we find principally two types of normalized distances. The first type is the case when we normalize the distance giving the same weight to all the individual distances. The second type is the case when we normalize the distance giving different weights to the individual distances. Then, assuming that we are using the Minkowski distance, for the first type we will obtain the normalized Minkowski distance and for the second type the weighted Minkowski distance.

Sometimes, when calculating the normalized distance, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for the aggregation of the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced by Yager in [1]. The OWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria. It has been used in a wide range of applications such as [2]–[21].

In this paper, we suggest a new type of distance measure consisting in normalize the Minkowski distance with the OWA operator. Then, the normalization developed will reflect the attitudinal character of the decision maker and it will provide a parameterized family of distance operators that include the maximum distance, the minimum distance and the average distance. We will call this generalization as the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator. By studying special cases of the MOWAD operator, we will be able to develop a wide range of distance operators such as the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the ordered weighted geometric averaging distance (OWGAD) operator and the ordered weighted harmonic averaging distance (OWHAD) operator. We should note that some considerations about using OWA operators in distance measures have been studied in [21].

This paper is organized as follows. In Section II, we briefly describe some aggregation operators such as the OWA operator, the generalized OWA operator and the Minkowski distance. In Section III, we develop the MOWAD operator. In Section IV, we study different families of MOWAD operators and in Section V we present an illustrative example of the new approach. Finally, in Section VI, we summarize the main conclusions found in the paper.

AGGREGATION OPERATORS

In this Section, we briefly describe the OWA operator, the generalized OWA (GOWA) operator and the normalized Minkowski distance.

OWA Operator

The OWA operator was introduced by Yager in [1] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the arithmetic mean. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [12]. Note that this distinction in the reordering step is relevant in order to distinguish between situations where the highest argument is the best result and situations where the lowest argument is the best result [25].

GOWA Operator

The GOWA operator [17] is a generalization of the OWA operator by using generalized means. The generalized mean was introduced in [26]–[27] and it represents a generalization to a wide range of mean aggregations. It can be defined as follows.

Definition 2. A generalized mean of dimension n is a mapping GM: $R^n \rightarrow R$ such that:

$$GM(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that depending on the value of the parameter λ, we obtain different types of means. When $\lambda = \infty$, we obtain the maximum. When $\lambda = 1$, the arithmetic mean. When $\lambda = 0$, the geometric mean. When $\lambda = -1$, the harmonic mean. When $\lambda = 2$, the quadratic mean. When $\lambda = -\infty$, the minimum.

Note that if the arguments have different weights, then, the generalized mean is transformed in the weighted generalized mean. With this information, we can define the GOWA operator as follows.

Definition 3. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator.

It can be demonstrated that the GOWA operator generalizes a wide range of aggregation operators [17] such as the maximum or the minimum.

Other special cases obtained with the weighting vector of the GOWA operator [17] are the generalized mean and the weighted generalized mean. Then, the GOWA operator also includes the particular cases of the generalized mean such as the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean and the quadratic mean, and the particular cases of the weighted generalized mean such as the weighted average, the weighted geometric mean, the weighted harmonic mean and the weighted quadratic mean.

If we analyze the parameter λ, we can also obtain another group of special cases such as the usual OWA operator [1], the ordered weighted geometric (OWG) operator [28]–[30], the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator [17] and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator [17]. Note that this group of particular cases can be constructed with a descending or an ascending order.

Normalized Minkowski Distance

The normalized Minkowski distance is a distance measure that generalizes a wide range of distances such as the normalized Hamming distance, the normalized Euclidean distance, the normalized geometric distance and the normalized harmonic distance. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It can be formulated for two sets A and B as follows.

Definition 4. A normalized Minkowski distance of dimension n is a mapping d_m: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_m(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i |^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

If we give different values to the parameter λ, we can obtain a wide range of special cases. For example, if $\lambda = 1$, we obtain the normalized Hamming distance. If $\lambda = 2$, the normalized Euclidean distance. If $\lambda = 0$, the normalized geometric distance. If $\lambda = -1$, the normalized harmonic distance. Note that the formulation shown above is the general expression. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [31]–[33].

Sometimes, when normalizing the Minkowski distance, we prefer to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Minkowski distance. It can be defined as follows.

Definition 5. A weighted Minkowski distance of dimension n is a mapping d_{wm}: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{wm}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \; | a_i - b_i |^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

In this case, we can also obtain a wide range of special cases by using different values in the parameter λ. For example, if $\lambda = 1$, we obtain the weighted Hamming distance. If $\lambda = 2$, the weighted Euclidean distance. If $\lambda = 0$, the weighted geometric distance. If $\lambda = -1$, the weighted harmonic distance.

THE MINKOWSKI ORDERED WEIGHTED AVERAGING DISTANCE OPERATOR

The Minkowski OWAD (MOWAD) operator represents an extension of the traditional normalized Minkowski distance by using OWA operators. The difference is that we reorder the arguments of the individual distances according to their values. Then, we can calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, etc., modifying the results according to the attitudinal character of the decision maker. For example, this type of distance is useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the highest individual distance because he believes that it will be more significant in the analysis. Note that this type of normalized distance operator can be constructed by mixing the Minkowski distance with OWA operators, by mixing the Hamming distance with GOWA operators or by mixing the Hamming OWAD operator with generalized means. It can be defined as follows.

Definition 6. A Minkowski OWAD operator of dimension n is a mapping $MOWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where D_j is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. As we can see, we adapt the characteristics of the Minkowski distance to the characteristics of the OWA operator. Note that different notations are possible in order to formulate this type of aggregation such as: $MOWAD(A,B)$.

A fundamental aspect of the MOWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual Minkowski distance, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If D is a vector corresponding to the ordered arguments D_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the MOWAD aggregation can be expressed as:

$$MOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(W^T D \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

Note that from a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending Minkowski OWAD (DMOWAD) and the ascending Minkowski OWAD (AMOWAD) operators. Note also that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient way, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation, as it is explained in [12], [25] for the OWA operator. The DMOWAD operator has the same definition than the MOWAD operator.

Definition 7. An AMOWAD operator of dimension n is a mapping $AMOWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$AMOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. As we can see, the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$. Then, it is possible to see that the weights of the DMOWAD are related to those of the AMOWAD by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DMOWAD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AMOWAD operator.

The MOWAD operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent for both the DMOWAD and the AMOWAD operator. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $MOWAD(d_1,d_2,\ldots,d_n) = MOWAD(e_1,e_2,\ldots,e_n)$, where $(e_1,\ldots,e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1,\ldots,d_n)$. It is monotonic because if $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $MOWAD(d_1,d_2,\ldots,d_n) \geq MOWAD(e_1,e_2,\ldots,e_n)$. It is bounded because the MOWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\mathrm{Min}\{d_i\} \leq MOWAD(d_1,d_2,\ldots,d_n) \leq \mathrm{Max}\{d_i\}$. It is idempotent because if $d_i = d$, for all d_i, then, $MOWAD(d_1,d_2,\ldots,d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the attitudinal character of the MOWAD operator. Based on the measure developed for the GOWA operators in [17], it can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending on if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

FAMILIES OF MOWAD OPERATORS

Analysing the Weighting Vector W

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the MOWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized Minkowski distance and the weighted Minkowski distance.

For the DMOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. And for the AMOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$, and the minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$.

As we can see, the maximum and the minimum distances are obtained independently of the value of the parameter λ. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $MOWAD(d_1, d_2,\dots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i.

The normalized Minkowski distance and the weighted Minkowski distance are also particular cases of the MOWAD operator. The normalized Minkowski distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Minkowski distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i.

Remark 1: Other families of aggregation operators could be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector. For example, the Hurwicz MOWAD criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$, then, $MOWAD(d_1, d_2,\dots, d_n) = \alpha \,\mathrm{Max}\{d_i\} + (1 - \alpha)\, \mathrm{Min}\{d_i\}$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz MOWAD criteria becomes the maximum distance and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum distance.

Remark 2: When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-MOWAD operator that it is based on the window-OWA operator [13]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-MOWAD is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-MOWAD becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-MOWAD is transformed in the normalized Minkowski distance.

Remark 3: If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-MOWAD operator that it is based on the olympic average [16]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-MOWAD average is transformed in the MOWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-MOWAD is transformed in the olympic-MOWAD operator.

Remark 4: The median and the weighted median can also be used as MOWAD operators. For the MOWAD median, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument d_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest d_i. For the weighted MOWAD median, we select the argument that has the kth largest d_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 5: Another type of aggregation that could be used is the E-Z MOWAD weights that it is based on the E-Z OWA weights [18]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n, and in the second class we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$. Note that for the first class, the maximum distance is obtained if $k = 1$ and $b_1 = \mathrm{Max}\{a_i\}$, and the normalized Minkowski distance if $k = n$. In the second class, the minimum distance is obtained if $k = 1$ and $b_n = \mathrm{Min}\{a_i\}$, and the normalized Minkowski distance if $k = n$.

In [4], Filev and Yager suggested two methods for obtaining the OWA weights. Following their methodology we can apply these methods for the MOWAD weights as follows. For the first method, the weights can be expressed as $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, and $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ for $j = 2$ to $n - 1$. For the second method, the weights are obtained as $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, and $w_j = w_j(1 - w_n)$ for $j = 2$ to $n - 1$.

Remark 6: Another useful approach for obtaining the weights is the functional method introduced by Yager [16] for the OWA operator. For the MOWAD operator, it can be summarized as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and

$f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the MOWAD weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{11}$$

It can easily be shown that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Remark 7: By using the orness or attitudinal character and the dispersion measure it is also possible to obtain the weights of the MOWAD operator. For example, following [8] we could develop the maximal entropy MOWAD (MEMOWAD) as follows

$$\text{Maximize: } -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{12}$$

$$\text{Subject to: } \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^2\right)^{1/2} = \alpha(W) \tag{13}$$

where $\alpha \in [0, 1]$, $w_j \in [0,1]$, and the sum of the weights is 1. Note that other methods similar to the MEMOWAD could be developed for obtaining the MOWAD weights following the same methodologies than [5]–[6], [9]–[10]. Then, we could obtain for example, the maximal renyi entropy MOWAD weights, the minimal variability MOWAD weights, the minimax disparity MOWAD weights, etc.

Remark 8: Other families of MOWAD operators could be obtained such as the weights that depend on the aggregated objects [13]. Note that in the MOWAD operator, the aggregated objects are individual distances. Then, the weights depend on the distances between the elements of the different sets. For example, we could develop the BADD-MOWAD operator that it is based on the OWA version developed in [13].

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{14}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i, that is, the individual distances. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the normalized Minkowski distance and if $\alpha = \infty$, we get the maximum distance. Another family of MOWAD operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1-b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1-b_j)^{\alpha}} \tag{15}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i. Note that in this case if $\alpha = 0$, we also get the normalized Minkowski distance and if $\alpha = \infty$, we get the minimum distance. A third family of MOWAD operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n}(1/b_j)^{\alpha}} \tag{16}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i. In this case, we also get the normalized Minkowski distance if $\alpha = 0$ and if $\alpha = \infty$, we get the minimum distance.

Remark 9: Another interesting family is the S-MOWAD operator based on the S-OWA operator [13], [15]. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-MOWAD operator. The "orlike" S-MOWAD operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-MOWAD operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-MOWAD operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-MOWAD operator becomes the "andlike" S-MOWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-MOWAD operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-MOWAD operator becomes the Hurwicz generalized distance criteria.

Remark 10: A further type of aggregation operators that could be used in the MOWAD operator is the centered-OWA operator [19]. Following the same methodology, we could say that a MOWAD operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-MOWAD operator. Note that the normalized Minkowski distance is an example of this particular case of centered-MOWAD operator. Another particular situation of the centered-MOWAD operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-MOWAD operator. For this situation, we find the median MOWAD as a particular case.

Remark 11: A special type of centered-MOWAD operator is the Gaussian MOWAD weights which follows the same methodology than the Gaussian OWA weights suggested by Xu [11]. In order to define it, we have to consider a Gaussian distribution $\eta(\mu, \sigma)$ where

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{17}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j - \mu_n)^2} \tag{18}$$

Assuming that

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{19}$$

we can define the MOWAD weights as

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{20}$$

Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Analysing the Parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the ordered weighted geometric averaging distance (OWGAD) operator and the ordered weighted harmonic averaging distance (OWHAD) operator.

Remark 12: The Hamming OWAD operator or simply OWAD operator [22] is found when the parameter $\lambda = 1$. In this type of distance, we introduce a reordering in the individual distances in order to aggregate them in the most efficient way according to the interests of the decision maker. It can be constructed as a particular case of the MOWAD operator, but it is also possible to construct it by mixing the OWA operator with the Hamming distance.

$$HOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{21}$$

In this case it is possible to distinguish between descending (DHOWAD or DOWAD) and ascending (AHOWAD or AOWAD) orders.

With the HOWAD operator it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance and the weighted Hamming distance. The maximum and the minimum distances are obtained as it has been explained with the MOWAD operator. The normalized Hamming distance is found when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Hamming distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i.

Remark 13: The Euclidean OWAD operator [21], [23] or also the ordered weighted quadratic averaging distance (OWQAD) operator is found when the parameter $\lambda = 2$. Note that it can be constructed as a particular case of the MOWAD operator or by mixing the Euclidean distance with the OWA operator or by mixing the Hamming distance with the OWQA operator.

$$EOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} \tag{22}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending EOWAD (DEOWAD) operator and the ascending EOWAD (AEOWAD) operator.

With the EOWAD operator it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators that include for example, the maximum distance, the minimum distance, the normalized Euclidean distance and the weighted Euclidean distance.

Remark 14: Another particular case obtained with the MOWAD operator is the OWGAD operator [24]. This case is found when λ = 0. Note that it is possible to construct it in another way such as by mixing the Hamming distance with the OWGA operator or by mixing the geometric distance with the OWA operator.

$$OWGAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} D_j^{w_j} \tag{23}$$

In this case, we can distinguish between the descending OWGAD (DOWGAD) operator and the ascending OWGAD (AOWGAD) operator. Note that the geometric operators cannot aggregate negative numbers and the value zero. Therefore, this distance aggregation operator is only useful in some special situations. Note also that it is possible to transform this operator, so it can deal with zero or negative numbers [34].

Note that it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators. With the OWGAD operator, we can obtain among others the maximum distance, the minimum distance, the normalized geometric distance and the weighted geometric distance.

Remark 15: Another special case found in the MOWAD operator is the OWHAD operator. In this case, λ = –1. Note that the OWHAD operator can also be constructed by mixing the harmonic distance with the OWA operator or by mixing the Hamming distance with the OWHA operator.

$$OWHAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{D_j}} \tag{24}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending OWHAD (DOWHAD) operator and the ascending OWHAD (AOWHAD) operator.

With the OWHAD operator it is also possible to obtain another parameterized family of aggregation operators. We can obtain among others the maximum distance, the minimum distance, the normalized harmonic distance and the weighted harmonic distance. The maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$, and the minimum distance when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The normalized harmonic distance is found when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted harmonic distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i.

MOWAD OPERATOR IN THE SELECTION OF STRATEGIES

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to see the results obtained in the aggregation by using different types of MOWAD operators. We will analyze the selection of strategies the decision maker needs to find the best strategy according to his interests. Note that other selection problems could be developed such as the selection of human resources, the selection of financial products, the selection of investments, etc. [7], [23]–[25], [34]–[37].

Assume that an enterprise is considering its global strategy for the next year and they are thinking in some changes in order to obtain more benefits. In order to do so, the board of directors has established five possible strategies S_i that the enterprise could develop in the future.

(1) S_1 consists in implement strategy 1.
(2) S_2 consists in implement strategy 2.
(3) S_3 consists in implement strategy 3.
(4) S_4 consists in implement strategy 4.
(5) S_5 consists in implement strategy 5.

After careful review of the information, the experts have given the following general information. They have summarized the information of the strategies in five main characteristics C_i with the following results. Note that the results are valuations between 0 and 1.

TABLE I
CHARACTERISTICS OF THE STRATEGIES

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
S_1	0.5	0.7	0.8	0.6	0.5
S_2	0.8	0.9	0.2	0.4	0.5
S_3	0.5	0.7	0.6	0.3	0.7
S_4	0.7	0.9	0.6	0.2	0.6
S_5	0.2	0.7	0.8	0.7	0.5

According to the objectives and policies of the enterprise, the experts have established the ideal strategy for the company independently of the strategies available. They have established the following valuations for it.

TABLE II
CHARACTERISTICS OF THE IDEAL STRATEGY

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Ideal	0.9	1	0.9	0.9	0.8

With this information we can develop different aggregation methods in order to select a strategy. First, we are going to consider four basic aggregations that are particular cases of the MOWAD operator such as the normalized Hamming distance, the normalized Euclidean distance, the weighted Hamming distance and the weighted

Euclidean distance. Note that we will use the following weighting vector $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$, when necessary. The results are the following.

TABLE III
AGGREGATED RESULTS

	NHD	*NED*	*WHD*	*WED*
S_1	0.28	0.29	0.27	0.28
S_2	0.34	0.41	0.36	0.42
S_3	0.34	0.37	0.31	0.35
S_4	0.3	0.36	0.3	0.36
S_5	0.32	0.38	0.28	0.32

As we can see, the best alternative according to these four cases is the strategy S_1 because it has the lowest distance.

Now, we are going to study the results obtained by using the OWAD operator, the AOWAD operator, the EOWAD operator and the AEOWAD operator.

TABLE IV
AGGREGATED RESULTS 2

	OWAD	*AOWAD*	*EOWAD*	*AEOWAD*
S_1	0.25	0.31	0.27	0.32
S_2	0.28	0.4	0.349	0.46
S_3	0.29	0.39	0.327	0.42
S_4	0.24	0.36	0.293	0.42
S_5	0.26	0.38	0.309	0.43

As we can see, we will select a different strategy depending on the particular case of MOWAD operator used in the aggregation. If we use the AOWAD operator, the EOWAD operator or the AEOWAD operator, the optimal choice will be the strategy S_1. And if we use the OWAD operator, then the best alternative is the strategy S_4.

If we try to order the strategies, a typical situation when we want to consider more than one alternative, we can see that each distance aggregation operator gives us a different result leading to different decisions.

TABLE V
ORDERING OF THE STRATEGIES

NHD	$S_1 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_2 = S_3$	*OWAD*	$S_4 \succ S_1 \succ S_5 \succ S_2 \succ S_3$
NED	$S_1 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_5 \succ S_2$	*AOWAD*	$S_1 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2$
WHD	$S_1 \succ S_5 \succ S_4 \succ S_3 \succ S_2$	*EOWAD*	$S_1 \succ S_4 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_2$
WED	$S_1 \succ S_5 \succ S_3 \succ S_4 \succ S_2$	*AEOWAD*	$S_1 \succ S_3 = S_4 \succ S_5 \succ S_2$

As a general conclusion for the example, we can see that depending on the method used in the selection process, our decision will be different. Note that the method used has to be in accordance with the interests of the decision maker.

Conclusion

We have studied different types of distance measures. First, we have reviewed some basic aggregation operators such as the OWA operator, the GOWA operator and the normalized Minkowski distance. With this initial information, we have introduced the MOWAD operator. We have considered some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders. Next, we have developed a wide range of particular cases of the MOWAD operator such as the HOWAD operator, the EOWAD operator, the OWGAD operator and the OWHAD operator. We have seen that these special cases also provide a parameterized family of aggregation operators with similar properties than the MOWAD operator. We have also considered the usual families found in the weighting vector such as the window-MOWAD, the olympic-MOWAD, the MOWAD median, the S-MOWAD, the centered-MOWAD, etc. Finally, we have presented an illustrative example of the new approach where we have seen that depending on the distance aggregation operator used, the result is completely different.

This work represents an extension about the possibility of using OWA operators in the Minkowski distance which has been applied in strategic management. In future research, we expect to develop other extensions to the Minkowski distance by using different types of OWA operators and we will apply it in other decision making problems.

References

[1] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 183-190, 1988.

[2] G. Beliakov, "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Opt. Decision Making*, vol. 4, pp. 119-130, 2005.

[3] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] D.P. Filev, and R.R. Yager, "On the issue of obtaining OWA operator weights", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 94, pp. 157-169, 1998.

[5] R. Fullér, and P. Majlender, "On obtaining minimal variability OWA operator weights", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 136, pp. 203-215, 2003.

[6] P. Majlender, OWA operators with maximal Rényi entropy, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 155, pp. 340-360, 2005.

[7] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Dept. Business Administration, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain, 2007.

[8] M. O'Hagan, "Fuzzy decision aids", in : *Proc. 21st IEEE Asilomar Conf. on Signal, Systems and Computers*, vol 2, Pacific Grove, CA, 1987, pp. 624-628.

[9] Y.M. Wang, and C. Parkan, "A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights", *Information Sciences*, vol. 175, pp. 20-29, 2005.

[10] Y.M. Wang, and C. Parkan, "A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making", *Information Sciences*, vol. 177, pp. 1867-1877, 2007.

[11] Z.S. Xu, "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 20, pp. 843-865, 2005.

[12] R.R. Yager, “On generalized measures of realization in uncertain environments”, *Theory and Decision*, vol. 33, pp. 41-69, 1992.
[13] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems,* vol. 59, pp. 125-148, 1993.
[14] R.R. Yager, “On weighted median aggregation”, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.*, vol. 2, pp. 101-113, 1994.
[15] R.R. Yager, and D.P. Filev, “Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators”, *Int. J. General Systems*, vol. 22, pp. 297-316, 1994.
[16] R.R. Yager, “Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 11, pp. 49-73, 1996.
[17] R.R. Yager, “Generalized OWA Aggregation Operators”, *Fuzzy Opt. Decision Making*, vol. 3, pp.93-107, 2004.
[18] R.R. Yager, “An extension of the naïve Bayesian classifier”, *Information Sciences*, vol. 176, pp. 577-588, 2006.
[19] R.R. Yager, “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, vol. 11, pp. 631-639, 2007.
[20] R.R. Yager, and J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[21] N. Karayiannis, “Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators”, *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, 1093-1105, 2000.
[22] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, “The Ordered Weighted Averaging Distance Operator”, *Lectures on Modelling and Simulation*, vol. 2007 (1), to be published.
[23] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, “On the Use of the OWA Operator in the Euclidean Distance”, *Int. J. Computer Science and Engineering*, submitted for publication, 2008.
[24] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, “Geometric Operators in the Selection of Human Resources”, *Int. J. Computer and Information Science and Engineering*, submitted for publication, 2008.
[25] J.M. Merigó, and M. Casanovas, “Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure”, in *Proc. 13th Congress Int. Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp 709-727.
[26] J. Dujmovic, “Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation”, *Publikacije Elektrotechnickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika*, No. 483, pp. 147-158, 1974.
[27] H. Dyckhoff, and W. Pedrycz, “Generalized means as model of compensative connectives”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 14, pp. 143-154, 1984.
[28] F. Chiclana, F. Herrera, and E. Herrera-Viedma, “The ordered weighted geometric operator: Properties and application”, in *Proc. 8th Conf. Inform. Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-based Systems (IPMU),* Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.
[29] Z.S. Xu, and Q.L. Da, “The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 17, pp. 709-716, 2002.
[30] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, and F. Chiclana, “A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making”, *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 18, pp. 689-707, 2003.
[31] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.

[32] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, and A. Terceño, *Mathematics for economic and business management*, (in Spanish), Ed. Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.
[33] E. Szmidt, and J. Kacprzyk, “Distances between intuitionistic fuzzy sets”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 114, pp. 505-518, 2000.
[34] J.M. Merigó, and M. Casanovas, “Geometric operators in decision making with minimization of regret”, *Int. J. Computer Systems Science and Engineering*, vol. 1, pp. 111-118, 2008.
[35] J. Gil Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.
[36] A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.
[37] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, “Unification point in methods for the selection of financial products”, *Fuzzy Economic Review*, vol. 12, pp. 35-50, 2007.

14.2.12. Artículo de revista 12. – Publicado en *International Journal of Computer Science and Applied Mathematics*

OWA OPERATORS IN GENERALIZED DISTANCES

José M. Merigó, and Anna M. Gil-Lafuente

Abstract—**Different types of aggregation operators such as the ordered weighted quasi-arithmetic mean (Quasi-OWA) operator and the normalized Hamming distance are studied. We introduce the use of the OWA operator in generalized distances such as the quasi-arithmetic distance. We will call these new distance aggregation the ordered weighted quasi-arithmetic distance (Quasi-OWAD) operator. We develop a general overview of this type of generalization and study some of their main properties such as the distinction between descending and ascending orders. We also consider different families of Quasi-OWAD operators such as the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator, the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the normalized quasi-arithmetic distance, etc.**

***Keywords*—**Aggregation operators, Distance measures, Quasi-OWA operator.

INTRODUCTION

THE quasi-arithmetic distances are very useful techniques that generalize a wide range of distance measures such as the Hamming distance, the Euclidean distance and the Minkowski distance. These particular cases of the quasi-arithmetic distance are very useful techniques that have been used in a lot of applications such as fuzzy set theory, multicriteria decision making, business decisions, etc.

Often, when calculating distances, we want an average result of all the individual distances. We call this the normalization process. In the literature, we find basically, two types of normalized distances. The first type is the case when we normalize the distance giving the same importance to all the individual distances. This case is known for the quasi-arithmetic distance, the normalized quasi-arithmetic distance. The second type is the case when we normalize the distance giving different degrees of importance to the individual distances. Then, we get the weighted quasi-arithmetic distance.

Sometimes, when calculating the normalized distance, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker in order to modify the results of the aggregation with optimistic or pessimistic attitudes. A very useful technique for the aggregation of the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced by Yager in [1]. The OWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include, among others, the maximum, the minimum and the average criteria. Since its appearance, it has been used in a wide range of applications such as [2]–[25].

In this paper, we suggest a new type of distance measure consisting in normalize the quasi-arithmetic distance with the OWA operator. Then, the normalization developed will be able to modify the results of the aggregation by using different degrees of pessimism or optimism and it will provide a parameterized family of distance operators that include the maximum distance, the minimum distance and the average distance.

Note that from a mathematical perspective, the attitudinal character of the decision maker in the aggregation is seen as the orness or the andness of the aggregation [1]. We will call this generalization as the ordered weighted quasi-arithmetic distance operator or the Quasi-OWAD operator, for short. We will also study a wide range of particular cases of Quasi-OWAD operators such as the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator, the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the ordered weighted geometric averaging distance (OWGAD) operator and the ordered weighted harmonic averaging distance (OWHAD) operator. We should note that some considerations about using OWA operators in distance measures have been studied in [21].

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section II, we briefly describe some basic aggregation operators such as the Hamming distance and the Quasi-OWA operator. Section III, develops the Quasi-OWAD operator. In Section IV, we study different families of Quasi-OWAD operators. Finally, in Section V, we summarize the main conclusions of the paper.

Preliminaries

Normalized Hamming Distance

The normalized Hamming distance is a distance measure used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it is very useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 1. A normalized Hamming distance of dimension n is a mapping d_H: $R^n \times R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_H(A,B) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|a_i - b_i\right| \tag{1}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the Hamming distance it is better to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Hamming distance. It can be defined as follows.

Definition 2. A weighted Hamming distance of dimension n is a mapping d_{WH}: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{WH}(A,B) = \sum_{i=1}^{n} w_i\left|a_i - b_i\right| \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively. Note that Definitions 1 and 2 are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [27]–[29].

Quasi-OWA operator

The Quasi-OWA operator [5] is a generalization of the OWA operator by using quasi-arithmetic means. The quasi-arithmetic mean was introduced in [30]–[32] and it represents a generalization to a wide range of mean aggregations such as the generalized mean, the arithmetic mean, the geometric mean, the harmonic mean or the quadratic mean. It can be defined as follows.

Definition 3. A quasi-arithmetic mean of dimension n is a mapping QM: $R^n \rightarrow R$ such that:

$$QM(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g(a_i)\right) \tag{3}$$

where a_i is the argument variable and g is a continuous strictly monotonic function. Note that depending on the form of g, we obtain different types of means. When $g(a_i) = a_i$, we obtain the arithmetic mean. When $g(a_i) = a_i^2$, the quadratic mean. When $g(a_i) = a_i^{-1}$, the harmonic mean. When $g(a_i) = a_i^0$, the geometric mean. More generally, when $g(a_i) = a_i^{\lambda}$, we get the generalized mean.

Note that if the arguments have different weights, then, the quasi-arithmetic mean is transformed in the weighted quasi-arithmetic mean. With this information, we can define the Quasi-OWA operator as follows.

Definition 4. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping $QOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$QOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and g is a continuous strictly monotonic function.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending Quasi-OWA (Quasi-DOWA) operator and the ascending Quasi-OWA (Quasi-AOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AOWA operator.

It can be demonstrated that the Quasi-OWA operator generalizes a wide range of aggregation operators [3], [5] such as the maximum, the minimum, the generalized OWA operator [2], [17], the arithmetic mean, the geometric mean, the quadratic mean, the harmonic mean, the weighted average, the weighted geometric mean, the OWA operator [1], the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator [17], the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator [17], etc.

The Quasi-Ordered Weighted Averaging Distance Operator

The Quasi-OWAD operator represents an extension of the traditional normalized quasi-arithmetic distance [33] by using OWA operators. The difference is that the reordering of the arguments is developed according to the values of the individual distances. Then, it is possible to calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, etc., modifying the results according to the attitudinal character of the decision maker. For example, this type of distance is very useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the highest individual distance because he believes that it will be more significant in the analysis. Note that this type of normalized distance operator can be constructed by mixing the quasi-arithmetic distance with OWA operators, by mixing the Hamming distance with quasi-OWA operators or by mixing the Hamming OWAD operator with quasi-arithmetic means. It can be defined as follows.

Definition 5. A Quasi-OWAD operator of dimension n is a mapping $QOWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(D_{(j)}\right)\right) \tag{5}$$

where $D_{(j)}$ is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. Note that g is a continuous strictly monotonic function. As we can see, we adapt the characteristics of the quasi-arithmetic mean to the characteristics of the OWAD operator.

A fundamental aspect of the Quasi-OWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual quasi-arithmetic mean, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process. Note that the Quasi-OWAD operator follows a similar methodology than the Quasi-OWA operator [3], [5], [8].

If D is a vector corresponding to the ordered arguments $g(D_{(j)})$, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the Quasi-OWAD aggregation can be expressed as:

$$QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = g^{-1}\left(W^T D\right) \tag{6}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending Quasi-OWAD (Quasi-DOWAD) and the ascending Quasi-OWAD (Quasi-AOWAD) operators. The weights of the Quasi-DOWAD are related to those of the Quasi-AOWAD by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DOWAD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AOWAD operator.

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the Quasi-OWAD operator can be expressed as:

$$QOWAD(d_1, d_2\ldots, d_n) = g^{-1}\left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(D_{(j)}\right)\right) \tag{7}$$

The Quasi-OWAD operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, bounded, commutative, and idempotent.

Theorem 1 (Commutativity). *Assume f is the Quasi-OWAD operator, then*:

$$f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) = f\,(e_1, e_2\ldots, e_n) \tag{8}$$

where $(d_1, d_2\ldots, d_n)$ *is any permutation of the arguments* $(e_1, e_2\ldots, e_n)$.

Proof. Let

$$f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

$$f\,(e_1, e_2\ldots, e_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

Since $(d_1, d_2\ldots, d_n)$ is a permutation of $(e_1, e_2\ldots, e_n)$, we have $d_j = e_j$, for all j, and then

$$f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) = f\,(e_1, e_2\ldots, e_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Monotonicity). *Assume f is the Quasi-OWAD operator, if* $d_i \geq e_i$, *for all i, then*:

$$f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) \geq f\,(e_1, e_2\ldots, e_n) \tag{11}$$

Proof. Let

$$f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

$$f\,(e_1, e_2\ldots, e_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{13}$$

Since $d_i \geq e_i$, for all d_i, it follows that, $d_i \geq e_i$, and then

$$f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) \geq f\,(e_1, e_2\ldots, e_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Bounded). *Assume f is the Quasi-OWAD operator, then*:

$$\mathrm{Min}\{d_i\} \leq f\,(d_1, d_2\ldots, d_n) \leq \mathrm{Max}\{d_i\} \tag{14}$$

Proof. Let max$\{d_i\}$ = c, and min$\{d_i\}$ = d, then

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(c^{\lambda}\sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda}\sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{16}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) \leq c \tag{17}$$

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) \geq d \tag{18}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{d_i\} \leq f(d_1, d_2\ldots, d_n) \leq \text{Max}\{d_i\}$$ ■

Theorem 4 (Idempotency). *Assume f is the Quasi-OWAD operator, if $d_i = d$, for all d_i, then*:

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) = d \tag{19}$$

Proof. Since $d_i = d$, for all d_i, we have

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda}\sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{20}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(d_1, d_2\ldots, d_n) = d$$ ■

Another interesting issue to analyze is the attitudinal character of the Quasi-OWAD operator. Based on the measure developed for the Quasi-OWA operators in [2], it can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first type we get the following:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{21}$$

A further issue to consider is the measure of dispersion of the weights *W*. It is a measure that provides the type of information being used. Using the same methodology as in [1], it can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{22}$$

For example, if $w_j = 1$ for some *j*, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all *j*, then, the amount of information used is maximum.

A third measure that could be studied in the aggregation is the divergence of the weights *W*. It can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{23}$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

Families of Quasi-OWAD Operators

Analysing the Weighting Vector W

By using a different manifestation of the weighting vector in the Quasi-OWAD operator, we are able to obtain different types of distance aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized quasi-arithmetic distance and the weighted quasi-arithmetic distance.

Remark 1: The maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. And the minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. As we can see, the maximum and the minimum distances are obtained independently of the value of *g*.

Remark 2: It should also be noted that the median can also be used as Quasi-OWAD operator. We will call it the Quasi-OWAD median and it is possible to distinguish between two situations. If *n* is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument d_i. If *n* is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest d_i.

Remark 3: More generally than the maximum, the minimum and the median, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any *g*, $QOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the *k*th largest or lowest of the arguments d_i. This type of Quasi-OWAD operator is known as the step-Quasi-OWAD operator. Note that if $k = 1$, the step-Quasi-OWAD is transformed in the maximum and if $k = n$, the step-Quasi-OWAD becomes the minimum.

Remark 4: For the weighted-Quasi-OWAD median, we select the argument that has the kth largest d_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 5: The normalized quasi-arithmetic distance and the weighted quasi-arithmetic distance are also particular cases of the Quasi-OWAD operator. The normalized quasi-arithmetic distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted quasi-arithmetic distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i.

Remark 6: Other families of aggregation operators could be used in the weighting vector. For example, the Hurwicz Quasi-OWAD criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz Quasi-OWAD criteria becomes the maximum distance and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum distance.

Remark 7: When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-Quasi-OWAD operator based on the window-OWA operator [13]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-Quasi-OWAD is transformed in the maximum distance. If $m = 1$, $k = n$, then, the window-Quasi-OWAD becomes the minimum distance. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-Quasi-OWAD is transformed in the normalized quasi-arithmetic distance.

Remark 8: If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-Quasi-OWAD operator that it is based on the olympic average [16]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-Quasi-OWAD operator is transformed in the Quasi-OWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-Quasi-OWAD is transformed in the olympic-MOWAD operator.

Remark 9: Another interesting family is the S-Quasi-OWAD operator based on the S-OWA operator [13], [15]. It can be divided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-Quasi-OWAD operator. The generalized S-Quasi-OWAD operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-Quasi-OWAD operator becomes the "andlike" S-Quasi-OWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-Quasi-OWAD operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-Quasi-OWAD operator becomes the Hurwicz quasi-arithmetic distance criteria.

Remark 10: A further useful approach for obtaining the weights is the functional method introduced by Yager [16] for the OWA operator. For the Quasi-OWAD operator, it can be summarized as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the Quasi-OWAD weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{24}$$

It can easily be shown that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Remark 11: A further type of aggregation that could be used is the E-Z Quasi-OWAD weights based on the E-Z OWA weights [18]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n, and in the second class we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$. Note that for the first class, the maximum distance is obtained if $k = 1$ and $b_1 = \text{Max}\{a_i\}$, and the normalized quasi-arithmetic distance if $k = n$. In the second class, the minimum distance is obtained if $k = 1$ and $b_n = \text{Min}\{a_i\}$, and the normalized quasi-arithmetic distance if $k = n$.

Remark 12: Another method for obtaining the weights is the one suggested by Filev and Yager in [4]. Following the same methodology we can distinguish between two possibilities for the Quasi-OWAD weights. For the first method, the weights can be expressed as $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, and $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ for $j = 2$ to $n - 1$. And for the second method, the weights are obtained as $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, and $w_j = w_j(1 - w_n)$ for $j = 2$ to $n - 1$.

Remark 13: Other families of Quasi-OWAD operators could be obtained such as the weights that depend on the aggregated objects [13]. Note that in the Quasi-OWAD operator, the aggregated objects are individual distances. Then, the weights depend on the distances between the elements of the different sets. For example, we could develop the BADD-Quasi-OWAD operator based on the OWA version developed in [13].

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{25}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i, that is, the individual distances. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the normalized quasi-arithmetic distance and if $\alpha = \infty$, we get the maximum distance.

Remark 14: A second family of Quasi-OWAD operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1/b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1/b_j)^{\alpha}} \tag{26}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i. In this case, we also get the normalized Minkowski distance if $\alpha = 0$ and if $\alpha = \infty$, we get the minimum distance.

Remark 15: Another family of Quasi-OWAD operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1 - b_j)^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} (1 - b_j)^{\alpha}} \tag{27}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments d_i. Note that in this case if $\alpha = 0$, we also get the normalized quasi-arithmetic distance and if $\alpha = \infty$, we get the minimum distance. Note also that other families of dependent OWA operators could be developed in order to obtain the weighting vector.

Remark 16: A further type of aggregation operator that could be used in the Quasi-OWAD operator is the centered-OWA operator [19]. Following the same methodology, we could say that a Quasi-OWAD operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-Quasi-OWAD operator. Note that the normalized quasi-arithmetic distance is an example of this particular case of centered-Quasi-OWAD operator. Another particular situation of the centered-Quasi-OWAD operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-Quasi-OWAD operator. For this situation, we find the median Quasi-OWAD as a particular case.

Remark 17: A special type of centered-Quasi-OWAD operator is the Gaussian Quasi-OWAD weights based on the Gaussian OWA weights [11]. In order to define it, we have to consider a Gaussian distribution $\eta(\mu, \sigma)$ where

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{28}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (j - \mu_n)^2} \tag{29}$$

Assuming that

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi \sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2} \tag{30}$$

we can define the Quasi-OWAD weights as

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n} \eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2 / 2\sigma_n^2}} \tag{31}$$

Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Remark 18: By using the orness or attitudinal character and the dispersion measure it is also possible to obtain the weights of the Quasi-OWAD operator. For example, following [9] we could develop the maximal entropy Quasi-OWAD (MEQuasi-OWAD) as follows

$$\text{Maximize: } -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{32}$$

$$\text{Subject to: } g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j\, g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) = \alpha(W) \tag{33}$$

where $\alpha \in [0, 1]$, $w_j \in [0,1]$, and the sum of the weights is 1. Note that other methods similar to the MEQuasi-OWAD could be developed for obtaining the Quasi-OWAD weights following the same methodologies than [6], [7], [10], [11].

Analysing the strictly continuous monotonic function g

If we analyze g, we obtain a wide range of particular cases that includes, among others, the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator, the Hamming ordered weighted averaging distance (HOWAD) operator, the Euclidean ordered weighted averaging distance (EOWAD) operator, the ordered weighted geometric averaging distance (OWGAD) operator, the ordered weighted harmonic averaging distance (OWHAD) operator, etc.

Remark 19: The MOWAD operator [21], [22] is found when $g(D_j) = D_j^{\lambda}$. Therefore, we can see that the Quasi-OWAD operator provides a further generalization to the MOWAD operator. It can be constructed as a particular case of the Quasi-OWAD operator, but it is also possible to construct it by mixing the OWA operator with the quasi-arithmetic distance or by mixing the Hamming distance with the Quasi-OWA operator. Note that $g^{-1}(D_j) = D_j^{-\lambda}$. Its formulation is as follows.

$$MOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{34}$$

Note that from a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DMOWAD) and ascending (AMOWAD) orders. Note also that in this case we could also obtain a parameterized family of distance aggregation operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Minkowski distance, the weighted Minkowski distance, the HOWAD operator, the EOWAD operator, etc.

Remark 20: The Hamming OWAD operator or simply OWAD operator [23] is found when $g(D_j) = D_j$. Note that $g^{-1}(D_j) = D_j^{-1}$. Note also that it is also possible to obtain it as a particular case of the MOWAD operator when the parameter $\lambda = 1$. It can be formulated as follows.

$$HOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{35}$$

In this case, we can also distinguish between the descending HOWAD (DHOWAD) and the ascending HOWAD (AHOWAD) operator.

Remark 21: The Euclidean OWAD operator [21], [24] or also the ordered weighted quadratic averaging distance (OWQAD) operator is found when $g(D_j) = D_j^{2}$. Note that in this case, $g^{-1}(D_j) = D_j^{-2}$. Its formulation is as follows.

$$EOWAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j^2 \right)^{1/2} \tag{36}$$

As shown above for the other particular cases, it is possible to distinguish between descending and ascending orders.

Remark 22: Another particular case obtained with the Quasi-OWAD operator is the OWGAD operator [25]. This case is found when $g(D_j) = D_j^0$. Note that in this case we also get, $g^{-1}(D_j) = D_j^0$.

$$OWGAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} D_j^{w_j} \tag{37}$$

Note that the geometric operators cannot aggregate negative numbers and the value zero. Therefore, this distance aggregation operator is only useful in some special situations. Note also that it is possible to transform this operator as suggested in [26], so it can deal with zero or negative numbers.

Remark 23: Another special case found in the Quasi-OWAD operator is the OWHAD operator. In this case, when $g(D_j) = D_j^{-1}$. Note that in this case, $g^{-1}(D_j) = D_j^{1}$. It can be formulated as follows.

$$OWHAD(d_1, d_2,\ldots, d_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{D_j}} \tag{38}$$

As shown above in the previous particular cases of the Quasi-OWAD operator, we can distinguish between descending (DOWHAD) and ascending (AOWHAD) orders.

Conclusion

In this paper, we have suggested a new generalization of the OWA operator by using distance measures. We have called it the ordered weighted quasi-arithmetic distance (Quasi-OWAD) operator. We have seen that it is a further generalization of the Minkowski distance by using quasi-arithmetic means. We have considered some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders and some basic measures to characterize the weighting vector. Next, we have developed a wide range of particular cases of the Quasi-OWAD operator that includes all the particular cases of the MOWAD operator. We have seen that these special cases also provide a parameterized family of aggregation operators with similar properties than the Quasi-OWAD operator. We have also considered the usual families found in the weighting vector such as the Quasi-OWAD median, the step-Quasi-OWAD, the window-Quasi-OWAD, the S-Quasi-OWAD, the olympic-Quasi-OWAD, the centered-Quasi-OWAD, etc.

This paper represents a first analysis about the possibility of using OWA operators in quasi-arithmetic distances. In future research, we will develop further analysis by using different extensions of the OWA operator.

References

[1] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Trans. Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, pp. 183-190, 1988.

[2] G. Beliakov, "Learning Weights in the Generalized OWA Operators", *Fuzzy Opt. Decision Making*, vol. 4, pp. 119-130, 2005.

[3] T. Calvo, G. Mayor, and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] D.P. Filev, and R.R. Yager, "On the issue of obtaining OWA operator weights", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 94, pp. 157-169, 1998.

[5] J. Fodor, J.L. Marichal, and M. Roubens, "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Trans. Fuzzy Systems*, vol. 3, pp. 236-240, 1995.

[6] R. Fullér, and P. Majlender, "On obtaining minimal variability OWA operator weights", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 136, pp. 203-215, 2003.

[7] P. Majlender, OWA operators with maximal Rényi entropy, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 155, pp. 340-360, 2005.

[8] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Dept. Business Administration, Univ. Barcelona, Barcelona, Spain, 2007.

[9] M. O'Hagan, "Fuzzy decision aids", in : *Proc. 21st IEEE Asilomar Conf. on Signal, Systems and Computers*, vol 2, Pacific Grove, CA, 1987, pp. 624-628.

[10] Y.M. Wang, and C. Parkan, "A minimax disparity approach for obtaining OWA operator weights", *Information Sciences*, vol. 175, pp. 20-29, 2005.

[11] Z.S. Xu, "An Overview of Methods for Determining OWA Weights", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 20, pp. 843-865, 2005.

[12] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, pp. 41-69, 1992.

[13] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, pp. 125-148, 1993.

[14] R.R. Yager, "On weighted median aggregation", *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.*, vol. 2, pp. 101-113, 1994.

[15] R.R. Yager, and D.P. Filev, "Parameterized "andlike" and "orlike" OWA operators", *Int. J. General Systems*, vol. 22, pp. 297-316, 1994.

[16] R.R. Yager, "Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators", *Int. J. Intelligent Systems*, vol. 11, pp. 49-73, 1996.

[17] R.R. Yager, "Generalized OWA Aggregation Operators", *Fuzzy Opt. Decision Making*, vol. 3, pp.93-107, 2004.

[18] R.R. Yager, "An extension of the naïve Bayesian classifier", *Information Sciences*, vol. 176, pp. 577-588, 2006.

[19] R.R. Yager, "Centered OWA operators", *Soft Computing*, vol. 11, pp. 631-639, 2007.

[20] R.R. Yager, and J. Kacprzyck, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

[21] N. Karayiannis, "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Trans. Neural Networks*, vol. 11, 1093-1105, 2000.

[22] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Using the OWA operator in the Minkowski Distance", *Int. J. Computer Science*, submitted for publication, 2008.

[23] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "The Ordered Weighted Averaging Distance Operator", *Lectures on Modelling and Simulation*, vol. 2007 (1), to be published.
[24] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "On the Use of the OWA Operator in the Euclidean Distance", *Int. J. Computer Science and Engineering*, submitted for publication.
[25] J.M. Merigó, and A.M. Gil-Lafuente, "Geometric Operators in the Selection of Human Resources", *Int. J. Computer and Information Science and Engineering*, submitted for publication, 2008.
[26] J.M. Merigó, and M. Casanovas, "Geometric operators in decision making with minimization of regret", *Int. J. Computer Systems Science and Engineering*, vol. 1, pp. 111-118, 2008.
[27] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.
[28] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, and A. Terceño, *Mathematics for economic and business management*, (in Spanish), Ed. Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.
[29] E. Szmidt, and J. Kacprzyk, "Distances between intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 114, pp. 505-518, 2000.
[30] G.H. Hardy, J.E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.
[31] A.N. Kolmogoroff, "Sur la notion de la moyenne", *Atti Della Accademia Nazionale Dei Lincei*, vol. 12, pp. 388-391, 1930.
[32] M. Nagumo, Uber eine klasse der mittelwerte, *Japanese J. of Mathematics*, vol. 6, pp. 71-79, 1930.
[33] H. Bustince, V. Mohedano, E. Barrenechea, and M. Pagola, "Aggregation Operations with Special Properties. Construction from other Aggregation Operators and Proximity Functions. Generalized Distances", in: *Methods for Decision Making, Modelling and Aggregation of Preferences*, (in Spanish), Ed. E. Herrera-Viedma, Copicentro, Granada, Spain, 2005, pp. 125-139.

14.2.13. Artículo de revista 13. – Publicado en *Lectures on Modelling and Simulation*

The Ordered Weighted Averaging Distance Operator

J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (jmerigo@ub.edu; amgil@ub.edu)

Abstract

We introduce the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. It consists in using the ordered weighted averaging (OWA) operator in the Hamming distance. We give a general overview of this type of distance measure studying some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders. We also develop different examples of families of OWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the step-OWAD operator and the OWAD median.

Key words
Aggregation operator, Hamming distance, OWA operator.

1. Introduction

The Hamming distance is a very useful technique that has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, multicriteria decision making, business decisions, etc. Often, when calculating the Hamming distance, we want an average result of all the individual distances. Then, we have to normalize the Hamming distance. Essentially, we can normalize it with the arithmetic mean obtaining the normalized Hamming distance or with the weighted average obtaining the weighted Hamming distance.

Sometimes, when calculating the normalized distance, it would be interesting to consider the possibility of parameterizing the results from the maximum distance to the minimum distance. A very common technique for the aggregation of the information providing a parameterized family of aggregation operators that ranges from the maximum to the minimum is the ordered weighted averaging (OWA) operator [1]. The OWA operator has been used in a wide range of applications such as [2-18].

The aim of this paper is to introduce a new type of distance measure by normalizing the Hamming distance with the OWA operator. Then, the normalization developed will provide a parameterized family of distance aggregation operators that will include the maximum distance, the minimum distance and the normalized Hamming distance as special cases. We will call this distance measure as the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. Note that it can also be called as the Hamming OWAD (HOWAD) operator. We will study its definition and some of its main properties. We will also study different families of OWAD operators such as the weighted Hamming distance, the step-OWAD operator, the window-OWAD operator, the olympic OWAD average, the E-Z OWAD weighted and the OWAD median.

In order to do so, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the Hamming distance and the OWA operator. In Section 3 we introduce the OWAD operator. In Section 4 we study different families of OWAD operators. Finally, in Section 5 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Preliminaries

Normalized Hamming distance

The normalized Hamming distance [19] is a useful technique for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 1. A normalized Hamming distance of dimension n is a mapping d_H:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$d_H(A,B) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} | a_i - b_i | \right) \tag{1}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the Hamming distance we prefer to give different weights to each individual distance. Then, the distance is known as the weighted Hamming distance. It can be defined as follows.

Definition 2. A weighted Hamming distance of dimension n is a mapping d_{WH}:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$d_{WH}(A,B) = \left(\sum_{i=1}^{n} w_i \, | a_i - b_i | \right) \tag{2}$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively. Note that the formulations shown above are the general expressions. For the formulation used in fuzzy set theory see for example [20-22].

OWA operator

The OWA operator [1] provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [3,8,23]. Note that this distinction in the reordering step is relevant in order to distinguish between situations where the highest argument is the best result and situations where the lowest argument is the best result. The OWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [1]. Different families of OWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector [1,5,8-18].

3. Ordered Weighted Averaging Distance (OWAD) Operator

The OWAD (or Hamming OWAD) operator is an extension of the traditional normalized Hamming distance by using OWA operators. The main difference is the reordering of the arguments of the individual distances according to their values. Then, it is possible to calculate the distance between two elements, two sets, two fuzzy sets, etc., modifying the results according to the interests of the decision maker. For example, this type of distance is useful when a decision maker wants to compare two fuzzy subsets but he wants to give more importance to the highest individual distance because he believes that it will be more significant in the analysis. Different applications of this distance measure have been shown in [4,24]. It can be defined as follows.

Definition 4. An OWAD operator of dimension n is a mapping $OWAD{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j \right) \tag{4}$$

where D_j is the jth largest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, we adapt the characteristics of the Hamming distance to the characteristics of the OWA operator. Note that we could also denote it as $OWAD(A,B)$.

A fundamental aspect of the OWAD operator is the reordering of the arguments based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case with the usual Hamming distance, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If D is a vector corresponding to the ordered arguments D_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWAD aggregation can be expressed as:

$$OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = W^T D \tag{5}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWAD (DOWAD) and the ascending OWAD (AOWAD) operators. Note that it is possible to use them in situations where the highest value is the best result or in situations where the lowest value is the best result. The DOWAD operator has the same definition than the OWAD operator.

Definition 5. An AOWAD operator of dimension n is a mapping $AOWAD{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then, the distance between two sets A and B is:

$$AOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j D_j \right) \tag{6}$$

where D_j is the jth lowest of the d_i and d_i is the individual distance between A and B. That is, $d_i = |a_i - b_i|$. As we can see, the elements D_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $D_1 \leq D_2 \leq \ldots \leq D_n$.

The OWAD operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = OWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$, where $(e_1, \ldots, e_n)$ is any permutation of the arguments $(d_1, \ldots, d_n)$. It is monotonic because if $d_i \geq e_i$, for all d_i, then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \geq OWAD(e_1, e_2, \ldots, e_n)$. It is bounded because the OWAD aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\mathrm{Min}\{d_i\} \leq OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) \leq \mathrm{Max}\{d_i\}$. It is idempotent because if $d_i = d$, for all d_i, then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = d$.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the OWAD operator such as the attitudinal character, the dispersion and the divergence. Based on the measures developed for the OWA operators in [1,14], they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{7}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right) \tag{8}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending on if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{9}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \quad (10)$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

4. Families of OWAD Operators

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the OWAD operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance and the weighted Hamming distance.

For the DOWAD operator, the maximum distance is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Min}\{d_i\}$. For the AOWAD operator, the maximum distance is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. Then, $AOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_n = \text{Max}\{d_i\}$. The minimum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. Then, $AOWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_1 = \text{Min}\{d_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = D_k$, where D_k is the kth largest or lowest of the arguments d_i. We will call this special type as step-OWAD operator.

The normalized Hamming distance and the weighted Hamming distance are also particular cases of the OWAD operator. The normalized Hamming distance is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted Hamming distance is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of D_j and i is the ith argument of d_i. Note that both the DOWAD and the AOWAD operators obtain these particular cases.

Other families of aggregation operators could be obtained by using a different manifestation in the weighting vector. For example, the Hurwicz OWAD criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$, then, $OWAD(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \alpha$ $\text{Max}\{d_i\} + (1 - \alpha)\ \text{Min}\{d_i\}$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz OWAD criteria becomes the maximum distance and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum distance. Also note that a similar approach can be developed for the AOWAD operator with the difference that now the reordering of the arguments is ascendant. The weights of the AOWAD operator are related to the weights of the OWAD or DOWAD operator by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAD operator. For the rest of the analysis we will just analyze the OWAD family because the ascending version is straightforward.

When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-OWAD operator that it is based on the window-OWA operator [9]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-OWAD is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, then, the window-OWAD becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-OWAD is transformed in the average criteria.

Another interesting family is the S-OWAD operator based on the S-OWA operator [9,11]. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-OWAD operator. The "orlike" S-OWAD operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-OWAD operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-OWAD operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-OWAD operator becomes the "andlike" S-OWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-OWAD operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-OWAD operator becomes the Hurwicz criteria.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic OWAD average that it is based on the olympic average [12]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic OWAD average is transformed in the OWAD median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-OWAD is transformed in the olympic OWAD average.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z OWAD weights that it is based on the E-Z OWA weights [16]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

We note that the median and the weighted median can also be used as OWAD operators. For the OWAD median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument a_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest a_i. For the weighted OWAD median, we follow a different procedure than [10]. We select the argument that has the kth largest a_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

In [13], Filev and Yager suggested two methods for obtaining the OWA weights. Following their methodology we can apply these methods for the OWAD weights as follows. For the first method, the weights can be expressed as $w_1 = \alpha$, $w_n = w_{n-1}(1 - w_1)/w_1$, and $w_j = w_{j-1}(1 - w_1)$ for $j = 2$ to $n - 1$. For the second method, the weights are obtained as $w_n = 1 - \alpha$, $w_1 = w_2(1 - w_n)/w_n$, and $w_j = w_j(1 - w_n)$ for $j = 2$ to $n - 1$.

A very useful approach for obtaining the weights that can be also used for the OWAD operator is the functional method introduced by Yager [12] for the OWA operator. It can be summarized as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \to [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the OWAD weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{11}$$

It can easily be shown that using this method, the w satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

By using the orness or attitudinal character and the dispersion measure it is also possible to obtain the weights of the OWAD operator. For example, following [5] we could develop the maximal entropy OWAD (MEOWAD) as follows

$$\text{Maximize: } -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln w_j \tag{12}$$

$$\text{Subject to: } \frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}(n-i)w_j = \alpha \tag{13}$$

where $\alpha \in [0, 1]$, $w_j \in [0,1]$, and the sum of the weights is 1. Note that other methods similar to the MEOWAD could be developed for obtaining the OWAD weights.

Another family of aggregation operators that could be used in the OWAD operator is the centered OWA weights. This type of operator has been suggested by Yager [17] for the OWA operator. Following the same methodology, we could say that an OWAD operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered OWAD operator. Note that the normalized Hamming distance is an example of this particular case of centered OWAD operator. Another particular situation of the centered OWAD operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered OWAD operator. For this situation, we find the median distance as a particular case.

5. Conclusions

We have introduced the OWAD operator. First we have reviewed some basic concepts such as the OWA operator and the normalized Hamming distance. Then, we have developed the OWAD operator. We have defined it and we have studied some of its main properties. Finally, we have given different examples of OWAD operators such as the maximum distance, the minimum distance, the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the step-OWAD operator, the window-OWAD operator and the OWAD median.

References

[1] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, vol. 18, no. 1, pp. 183-190, 1988.

[2] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation operators: New trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, “Characterization of the ordered weighted averaging operators”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 236-240, 1995.

[4] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Using the OWA operators in the selection of financial products”, in: *Proceedings of the 41st CLADEA Congress*, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.

[5] M. O’Hagan, “Fuzzy decision aids”, in : *Proceedings of the 21st IEEE Asilomar Conference on Signal, Systems and Computers*, vol. 2, Pacific Grove, CA, pp. 624-628, 1987.

[6] Z.S. Xu, Q.L. Da, “The Uncertain OWA Operator”, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 17, no. 6, pp. 569-575, 2002.

[7] Z.S. Xu, Q.L. Da, "An Overview of Operators for Aggregating Information", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 18, no. 9, pp. 953-969, 2003.
[8] R.R. Yager, "On generalized measures of realization in uncertain environments", *Theory and Decision*, vol. 33, no. 1, pp. 41-69, 1992.
[9] R.R. Yager, "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, no. 2, pp. 125-148, 1993.
[10] R.R. Yager, "On weighted median aggregation", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 2, no. 1, pp. 101-113, 1994.
[11] R.R. Yager, D.P. Filev, "Parameterized "andlike" and "orlike" OWA operators", *International Journal of General Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 297-316, 1994.
[12] R.R. Yager, "Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 11, no. 1, pp. 49-73, 1996.
[13] D.P. Filev, R.R. Yager, "On the issue of obtaining OWA operator weights", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 94, no. 2, pp. 157-169, 1998.
[14] R.R. Yager, "Heavy OWA Operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 1, no. 4, pp. 379-397, 2002.
[15] Yager R.R., "Decision making using minimization of regret", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 36, no. 2, pp. 109-128, 2004.
[16] R.R. Yager, "An extension of the naïve Bayesian classifier", *Information Sciences*, vol. 176, no. 5, pp. 577-588, 2006.
[17] R.R. Yager, "Centered OWA operators", *Soft Computing*, vol. 11, no. 7, pp. 631-639, 2007.
[18] R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[19] R.W. Hamming, "Error-detecting and error-correcting codes", *Bell Systems Technical Journal*, vol. 29, pp. 147-160, 1950.
[20] A. Kaufmann, *Introduction to the theory of fuzzy subsets*, Academic Press, New York, 1975.
[21] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, A. Terceño, *Matemática para la economía y la gestión de empresas*, Ed. Foro Científico, Barcelona, Spain, 1994.
[22] E. Szmidt, J. Kacprzyk, "Distances between intuitionistic fuzzy sets", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 114, no. 3, pp. 505-518, 2000.
[23] J.M. Merigó, M. Casanovas, "Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure", in: *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, pp. 709-727, 2006.
[24] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Acquisition of financial products that adapt to different environments", in: *Proceedings of the MS International Conference*, Konya, Turkey, pp. 719-723, 2006.

14.2.14. Artículo de revista 14. – Publicado en *Modelling, Measurement and Control D*

Analysing the unification point in the selection of polyvalent financial products

J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu)

Abstract

We study the unification point in the selection of polyvalent financial products. The result obtained is that the selection process developed with the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level, is the same because these indexes follow the same methodology in these particular situations. We develop the analysis describing the process to follow in the selection of polyvalent financial products. We also consider different aggregation operators such as the average, the weighted average and the ordered weighted average. Then, we analyze the unification point and we find that all the indexes have the same formulation than the Hamming distance. We distinguish between total and partial unification point. The paper ends with an illustrative example where we can see numerically, the unification point in the selection of polyvalent financial products.

Key words
Unification point, Selection of polyvalent financial products, Hamming distance, Adequacy coefficient, OWA operator.

1. Introduction

The selection of the most appropriate financial products for the company represents a fundamental problem for its good development. With the great variety of alternatives existing in the market, the enterprise needs to analyze the products in order to find the best one for them. In order to do this, the company, with the help of its group of experts, has to develop a decision making problem to find the optimal choice. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus on the models developed in (Gil-Aluja, 1998; J. Gil-Lafuente, 2001; 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007d) about selection of human resources and the models developed in (A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2007a) about selection of financial products. Note that other applications could be developed in the business environment such as the selection of investments, strategies, assets, policies, etc. For more information on different applications, see for example (Merigó, 2007).

Sometimes when analysing the market, the experts find that the uncertain environment can evolve in different ways. Then, depending on the evolution of the market, the necessities of the enterprise about its optimal financial product can be completely different. For modelling this problem, it is necessary to use an approach that it is able to select the optimal financial product considering that the future evolution of the market is uncertain. Then, instead of using one financial product, it is better to use more than one in order to consider the different situations that could happen in the future. This problem has been studied in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006b).

Another problem is that sometimes, the different selection indexes used in the decision problem become the same index. This situation is known as the unification point. As it is shown in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a), the unification point appears when some special conditions are found in the financial products. Basically, the key condition is that the real results of the financial products have to be lower than the ideal ones.

The aim of this paper is to analyze the unification point in the selection of polyvalent financial products. That is, the unification point in situations where we need to select a financial product that can be used in different scenarios with different requirements. We will consider the unification point between the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. We will distinguish between cases that use the same degree of importance in the characteristics, different degrees of importance and different degrees of optimism in the selection process. We will also consider the total and partial unification point. That is, situations where all the financial products accomplish the conditions to be in the unification point, and situations where not all but at least one of them accomplishes the unification point.

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the selection of polyvalent financial products. Section 3 explains the basic concepts of the unification point in the selection of polyvalent financial products with the Hamming distance and the adequacy coefficient. In Section 4, we develop the unification point with the index of maximum and minimum level. Section 5 gives an illustrative example of the new approaches developed in the paper. Finally, Section 6 summarizes the main conclusions found in the paper.

2. Selection of polyvalent financial products

This type of selection is very similar to the traditional selection of financial products with the difference that here it can occur different situations in the future (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006b). Then, the selection needs to consider this aspect and search for the financial product that better adapts to the different possible situations that could occur. The mathematical process will be equal with the difference that here we will have more than one ideal fuzzy subset. With this additional information, the fuzzy subsets of each product will be compared with all the ideal fuzzy subsets that we have. Then, the process to follow will consist in the following steps similar to (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; J. Gil-Lafuente, 2001; 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2007a; 2007c):

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2, \dots, C_i, \dots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Identification of the different possible scenarios that could occur in the future where we should need different ideal fuzzy subsets. These z fuzzy subsets will be considered as: $h = 1, 2, \dots, z$; where each fuzzy subset would represent the necessities of the company in each situation h.

Step 3: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form different ideal financial products for all the possible situations that could occur. That is:

Table 1. Ideals depending on the scenario

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
$P_h =$	μ_1^h	μ_2^h	…..	μ_i^h	…..	μ_n^h

where P_h is the *h*th ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *h*th ideal financial product.

Step 4: Grouping of all the different ideal financial products in one fuzzy subset.

Table 2. All the ideal financial products

	C_1	…	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_{1,..,z} =$	μ_1^1	…	μ_n^1	…	μ_1^z	…	μ_n^z

where $P_{1, 2, \ldots, z}$ refers to the grouping of the *h*th ideal financial products expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to consider and $\mu_i^h \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *h*th ideal financial product.

Step 5: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. Theoretically, it will be represented as:

Table 3. Available financial products

	C_1	C_2	…..	C_i	…..	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…..	$\mu_i^{(k)}$	…..	$\mu_n^{(k)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the *k*th financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the *i*th characteristic to be considered and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the *i*th characteristic of the *k*th financial product.

Step 6: Construction of a fuzzy subset for each financial product that is adapted to the ideal financial product with different situations. It consists in create a fuzzy subset with the fuzzy subset of the financial product *k* repeated *z* times.

Table 4. Financial product for different environments

	C_1	…	C_n	…	C_1	…	C_n
$P_k^{(p)}=$	$\mu_1^{(j)}$	…	$\mu_n^{(j)}$	…	$\mu_1^{(j)}$	…	$\mu_n^{(j)}$
		1		…		z	

Step 7: Comparison between the ideal financial product and the different financial products, and determination of the level of removal.

In this step, we have to express numerically the approximation between the ideal financial product and the different financial products considered. To solve this problem, we have a lot of different selection indexes that can be used (Beliakov *et al.* 2007; Calvo *et al.* 2002; Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 2005; J.Gil-Lafuente, 2001; 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2007a; 2007b; 2007c; 2007d; 2007e; Yager, 1988; 1992; 1993; 2007a; 2007b; Yager and Kacprzyk, 1997). In this paper, we will use the Hamming distance, the adequacy coefficient and the index of maximum and minimum level. In these three cases, we will consider the situation that the characteristics have the same level of importance, the situation with different degrees of importance and the situation found with the OWA operator. Note that the OWA operator is an aggregation operator introduced in (Yager, 1988) that provides a parameterized family of operators such as the maximum, the minimum and the average, and it has been used in different applications (Merigó, 2007; Yager, 1992; 1993; 2007a; 2007b; Yager and Kacprzyk, 1997).

If we use the normalized Hamming distance (NHD), we will get the following:

$$\text{NHD}(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \tag{1}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ $(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

If we use the weighted Hamming distance (WHD), we will get the following:

$$\text{WHD}(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \tag{2}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ $(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$ and the sum of w_i^h is equal to 1 and $w_i^h \in [0,1]$.

If we use the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007b), we will get:

$$\text{OWAD}(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h D_j \tag{3}$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$. As it can be seen, it has been introduced an Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992) in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Note that it is possible to distinguish between the descending OWAD (DOWAD) and the ascending OWAD (AOWAD) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAD and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAD operator.

Also note that for the three distances, it is possible to consider their dual by using *Dual* = 1 − *Distance* and it is also possible to consider other measures such as the Euclidean distance, the Minkowski distance, etc (Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007c).

If we use the adequacy coefficient, we also have to distinguish between these cases. For the normalized adequacy coefficient (NAC) we will get:

$$\text{NAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})] \tag{4}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ $(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)}) \in \mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

If we use the weighted adequacy coefficient (WAC), we will get the following:

$$\text{WAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h [1 \wedge (1-\mu_i^h + \mu_i^{(k)})] \tag{5}$$

with: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ $(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)})$ $\in$ $\mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$ and the sum of w_i^h is equal to 1 and $w_i^h \in [0,1]$.

If we use the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007e), we will get:

$$\text{OWAAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h K_j \tag{6}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i^h + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Note that it is possible to distinguish between the descending OWAAC (DOWAAC) and the ascending OWAAC (AOWAAC) operator by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAAC operator.

Also note that for the three indexes, it is possible to consider their dual by using $\text{NAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = 1 - \text{NDAC}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z})$. Note that the dual version of the adequacy coefficient uses $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$ for comparing the subsets (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006b; 2007a).

If we use the index of maximum and minimum level, we also have to distinguish between these cases. For the normalized index of maximum and minimum level (NIMAM) we will get the following:

$$\text{NIMAM}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]\right) \tag{7}$$

where u refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and v refers to the characteristics to be considered with the adequacy coefficient. We should note that $u + v = zn$. That is, the sum of both groups of characteristics is equal to the total number of characteristics. Also note that $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ $(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)})$ $\in$ μ_i^h, $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$.

If we use the weighted index of maximum and minimum level (WIMAM), we will get:

$$\text{WIMAM}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(w_i^h(u)\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + w_i^h(v)[0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]\right) \tag{8}$$

where u refers to the characteristics to be considered with the Hamming distance and v to the characteristics with the adequacy coefficient. Note that $u + v = zn$. Also note that: $i = 1,2,\ldots,n$; and $\forall$ $(P_{1,2,\ldots,z}, P_k^{(p)})$ $\in$ $\mu_i^h, \mu_i^{(k)} \in [0,1]$ and the sum of $w_i^h(u) + w_i^h(v)$ is equal to 1 and $w_i^h \in [0,1]$.

If we use the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) operator, we will get:

$$\text{OWAIMAM}(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \sum_{j=1}^{zn} w_j S_j \tag{9}$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_{zn}$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the dual index of the adequacy coefficient. And w_j represents a weighting vector $W = (w_1, w_2, \ldots, w_{zn})^T$, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{zn} w_j = 1$.

Note that it is possible to distinguish between the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAIMAM operator. Different families of OWAIMAM operators can be obtained following a similar methodology as in (Yager, 1993). For example, we could get the step-OWAIMAM, the S-OWAIMAM, etc.

Also note that for the three indexes, it is possible to consider their dual by using NIMAM($P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}$) = 1 - NDIMAM($P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}$).

Step 8: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps.

3. Unification point between the Hamming distance and the adequacy coefficient in the selection of polyvalent financial products

The unification point is a situation where the Hamming distance and the adequacy coefficient become the same index (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a). Then, the analysis done with the Hamming distance is the same than the adequacy coefficient. With the initial results, we get the complementary result of the other index (J. Gil-Lafuente, 2002), but if we use the removal index of the adequacy coefficient, then the results are exactly the same. The reason is that the adequacy coefficient consists in not penalize the values over the ideal. But in the unification point, it is impossible to get values over it, so the calculation consists only in calculate the distance to the ideal.

Before starting the analysis with polyvalent financial products, let us recall the unification point when there is only one possible scenario.

Theorem 1. Assume $NHD(P,P_k)$ is the selection of financial products with the normalized Hamming distance and $NDAC(P_k \rightarrow P)$ the selection of financial products with the dual adequacy coefficient. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$NHD(P,P_k) = NDAC(P_k \rightarrow P) \tag{10}$$

Proof. Let

$$NHD(P,P_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} | \mu_i - \mu_i^{(k)} |$$ and

$$NDAC(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, and then

$$NDAC(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = NHD(P,P_k)$$ ■

Analysing this theorem, we could generalize it for all the financial products considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the financial products *k* (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a).

Now, we are going to extend this theorem for the selection of polyvalent financial products. Then, we will have to consider the different scenarios of the uncertain problem. First, we will use the NHD and the NAC by using Eq. (1) and Eq. (4), respectively.

Theorem 2. Assume $NHD(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)})$ is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance and $NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z})$ the selection of polyvalent financial products with the dual adequacy coefficient for the financial product *k*. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then:

$$NHD(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) \tag{11}$$

Proof. Let

$$NHD(P_{1,2,\ldots z}, P_k^{(p)}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \quad \text{and}$$

$$NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,2,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all *i* and *h*, and then

$$NDAC(P_k^{(p)} \rightarrow P_{1,\ldots,z}) = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = NHD(P_{1,\ldots z}, P_k^{(p)}) \qquad \blacksquare$$

This theorem can also be developed with the WHD and the WAC by using Eq. (2) and Eq. (5), respectively. Then, we get the following.

Theorem 3. Assume WHD_k is the selection of polyvalent financial products with the weighted Hamming distance and $WDAC_k$ the selection of polyvalent financial products with the weighted dual adequacy coefficient for the financial product *k*. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then:

$$WHD_k = WDAC_k \tag{12}$$

Proof. Let

$$WHD_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h \left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \quad \text{and}$$

$$WDAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h [0 \vee \mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all *i* and *h*, and then

$$WDAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = WHD_k \quad \blacksquare$$

A similar result can also be obtained when using the OWAD and the OWAAC operators by using Eq. (3) and Eq. (6), respectively. Then, we get the following.

Theorem 4. Assume $OWAD_k$ is the selection of polyvalent financial products with the ordered weighted averaging distance operator and $OWADAC_k$ the selection of polyvalent financial products with the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient for the financial product *k*. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then:

$$OWAD_k = OWADAC_k \tag{13}$$

Proof. Let

$$OWAD_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h D_j \quad \text{and}$$

$$OWADAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h Q_j$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all *i* and *h*, and then

$$OWADAC_k = \sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} w_i^h D_j = OWAD_k \quad \blacksquare$$

Note that a particular situation of these theorems is the case when $\mu_i^h = 1$, for all *i* and *h*. In this case, we always find the unification point because $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i* and *h*.

These theorems represent the unification point for one financial product. As it is explained in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a), this unification could be considered as a partial unification point in the selection process because not all the financial products are affected by this situation. In the following we are going to show the situation when all the financial products of the problem are affected by the unification point. We will call it total unification point. We will just show the case with the NHD and the NAC because the other cases are straightforward from this one.

Theorem 5. Assume *NHD* is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance for all the available financial products and *NDAC* the selection of polyvalent financial products with the dual adequacy coefficient for all the available financial products. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all *i*, *k* and *h*, then:

$$NHD = NDAC \tag{14}$$

Proof. Let

$$NHD = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n} \left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \quad \text{and}$$

$$NDAC = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i, k and h, and then

$$NDAC = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) = NHD \qquad \blacksquare$$

By using the weighted and the ordered weighted aggregations, the result is the same. We just need to consider that now, in theorems (3) and (4), all the financial products k are affected by this situation.

Note that it is also interesting to study the degree of partial unification point of the decision problem. This can be done with:

$$\%\text{Unification} = \frac{n^{o}\ \ of\ \ fin.\ prod.\ with\ unification}{total\ \ n^{o}\ \ of\ \ financial\ \ products} \tag{15}$$

As we can see, if the % of unification is 1, that means that we are in a situation of total unification point. If the % of unification is 0, then, we are in a situation without unification. From this, values near 1 means that there are a high percentage of financial products that accomplishes the conditions of the unification point while values near 0 means the opposite.

4. Unification point in the index of maximum and minimum level

The unification point in the index of maximum and minimum level is a situation that transforms the index in the Hamming distance. In the following, we are going to show the unification point with the normalized index of maximum and minimum level (NIMAM).

Theorem 6. Assume NHD_k is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance and $NIMAM_k$ the selection of polyvalent financial products with the normalized index of maximum and minimum level for the financial product k. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h, then:

$$NHD_k = NIMAM_k \tag{16}$$

Proof. Let

$$NHD_k = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \qquad \text{and}$$

$$NIMAM_k = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]\right)$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i and h, and then

$$NIMAM_k = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) \ = NHD_k \qquad \blacksquare$$

Note that it is also possible to analyse the unification point with the WIMAM and with the OWAIMAM. Their analysis is straightforward by looking to theorem (6) and replacing their equations with Eq. (2) and (8) for the WIMAM, and with Eq. (3) and (9) for the OWAIMAM operator.

Theorem (6) shows the unification point in the NIMAM for one financial product. As it has been explained in Section 3, this situation represents the analysis done for the partial unification point and it can affect several financial products of the selection process with the condition that at least one of them is not affected by the unification.

Now, we are going to show the total unification point in the NIMAM and in the selection of polyvalent financial products. The result will be that the NIMAM will become the NHD for all the available financial products.

Theorem 7. Assume *NHD* is the selection of polyvalent financial products with the normalized Hamming distance for all the available financial products and *NIMAM* the selection of polyvalent financial products with the normalized index of maximum and minimum level for all the available financial products. If $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then:

$$NHD = NIMAM \tag{17}$$

Proof. Let

$$NHD = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left|\mu_i^h - \mu_i^{(k)}\right| \qquad \text{and}$$

$$NIMAM = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}\left(\left|\mu_i^h(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right| + [0 \vee (\mu_i^h(v) - \mu_i^{(k)}(v))]\right)$$

Since $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h, then, $[0 \vee (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i^h - \mu_i^{(k)})$ for all i, k and h, and then

$$NIMAM = \frac{1}{zn}\sum_{h=1}^{z}\sum_{i=1}^{n}(\mu_i^h - \mu_i^{(k)}) \ = NHD \qquad \blacksquare$$

Note that it is also possible to analyse the total unification point with the WIMAM and with the OWAIMAM operator. Their analysis is straightforward by looking to theorem (7) and replacing their equations with Eq. (2) and (8) for the WIMAM, and with Eq. (3) and (9) for the OWAIMAM operator. Obviously, the theorems show that the WIMAM and the OWAIMAM become the WHD and the OWAD, respectively.

5. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to understand numerically the unification point in the selection of polyvalent financial products.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics for the company. Assume that a company wants to select a financial product and it has 3 alternatives P_1, P_2, P_3, with different characteristics. It is considered for each characteristic a property.

Step 2: Identification of the different scenarios that could occur in the future. The group of experts of the company has found three possible scenarios that affect the decision. These scenarios are: S_1 = High demand, S_2 = Medium demand, S_3 = Low demand.

Step 3 - 4: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the ideal financial products according to the scenario as:

Table 5. Ideals depending on the scenario

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P^*_1	0.9	0.8	0.9	0.8	0.7
P^*_2	0.8	0.7	0.8	0.7	0.7
P^*_3	0.8	0.9	0.9	1	1

Step 5 - 6: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. For each of these characteristics, it is found the following information. Note that we have to repeat each financial product three times in order to adequate the problem with the ideal financial products.

Table 6. Available financial products

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1	0.7	0.6	0.8	0.5	0.5
P_2	0.6	0.5	0.6	0.7	0.5
P_3	0.4	0.6	0.8	0.5	0.4

Step 7: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered. First, we will consider the NHD, the WHD, the OWAD and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the following weighting vector: W = (0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0.05, 0'1, 0'1, 0'1, 0'1, 0'1).

If we elaborate the selection process with the Hamming distance by using Eq. (1), (2) and (3), we will get the following. The results are shown in table 7.

Table 7. Aggregated results with the Hamming distance

	NHD	*WHD*	*OWAD*	*AOWAD*
P_1	0.206	0.23	0.175	0.245
P_2	0.246	0.27	0.22	0.275
P_3	0.286	0.31	0.245	0.335

In this case, our decision will consist in selecting the financial product with the smallest distance. Then, we will select P_1 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient by using Eq. (4), (5) and (6), we will get the following. The results are shown in table 8.

Table 8. Aggregated results with the adequacy coefficient

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
P_1	0.794	0.77	0.825	0.755
P_2	0.754	0.73	0.78	0.725
P_3	0.714	0.69	0.755	0.665

The decision will consist in selecting the financial product with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_1 because it gives us the highest result for all the cases.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in table 9.

Table 9. Aggregated results with the dual *AC*

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
P_1	0.206	0.23	0.175	0.245
P_2	0.246	0.27	0.22	0.275
P_3	0.286	0.31	0.245	0.335

Analysing the unification point, we see that the Hamming distance and the dual adequacy coefficient gets the same result because they accomplish the conditions explained in theorem (5). That is: $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h. In this particular case, we see that we are in a total unification point because all the financial products accomplish the conditions of the theorem.

Finally, if we use the IMAM in the selection process by using Eq. (7), (8) and (9), we will get the following. In this example we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. The results are shown in table 10.

Table 10. Aggregated results with the *IMAM*

	NIMAM	*WIMAM*	*OWAIMAM*	*AOWAIMAM*
P_1	0.206	0.23	0.175	0.245
P_2	0.246	0.27	0.22	0.275
P_3	0.286	0.31	0.245	0.335

Then, our decision will consist in select P_1 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

Analysing the unification point, we see that the IMAM gets the same results than the Hamming distance because it accomplishes the conditions of theorem (7). That is: $\mu_i^h \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, k and h. As theorem (7) is for all the financial products, we are in a situation of total unification point.

6. Conclusions

In this paper, we have studied a large number of instruments for the selection of polyvalent financial products by using the Hamming distance, the adequacy coefficient, the index of maximum and minimum level and the OWA operator. Analysing these indexes we have found that there are some situations where they become the same index. We have called these situations the unification point. We have developed a wide range of theorems that has proved the unification between these indexes. We have distinguished between the total and the partial unification point. Finally, we have developed an illustrative example where we have seen numerically the unification point.

This work represents an extension in the field of selection of financial products. The unifications we have considered have been applied for the selection of polyvalent financial products but it is also applicable to the selection of polyvalent human resources, polyvalent investments, polyvalent strategies, etc. These cases use the same theorems of this paper with the difference that they consider a different business application.

References

[1] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[2] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation operators: New trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] J. Gil-Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[4] A.M. Gil-Lafuente, “Técnicas de selección de un instrumento financiero”, in: *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, Spain, 1990.

[5] A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[6] J. Gil-Lafuente, “El “índice del máximo y mínimo nivel” en la optimización del fichaje de un deportista”, *X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM)*, Reggio Calabria, Italia, 2001.

[7] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia. Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[8] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.

[9] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.

[10] J.M. Merigó, *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.

[11] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Using the OWA operators in the selection of financial products”, in: *Proceedings of the 41th CLADEA Conference*, Montpellier, France, CD-ROM, 2006a.

[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Acquisition of financial products that adapt to different environments", in: *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Konya, Turkey, pp. 719-723, 2006b.
[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "Unification point in methods for the selection of financial products", *Fuzzy Economic Review*, vol. 12, no. 1, pp. 35-50, 2007a.
[14] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "The ordered weighted averaging distance operator", in: *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007b.
[15] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "On the use of the OWA operator in the Euclidean distance", in: *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007c.
[16] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "OWA operators in the Selection of Human Resources", in: *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, CD-ROM, 2007d.
[17] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, "On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient", in: *Proceedings of the AMSE International Conference on Modelling and Simulation*, Terni, Italy, CD-ROM, 2007e.
[18] R.R. Yager, "On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making", *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 18, no. 1, pp. 183-190, 1988.
[19] R.R. Yager, "On Generalized Realizations in Uncertain Environments", *Theory and Decision*, vol. 33, no. 1, pp. 41-69, 1992.
[20] R.R. Yager, "Families of OWA operators", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, no. 2, pp. 125-148, 1993.
[21] R.R. Yager, "Centered OWA operators", *Soft Computing*, vol. 11, no. 7, pp. 631-639, 2007a.
[22] R.R. Yager, "Using Stress Functions to Obtain OWA Operators" *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 1122-1129, 2007b.
[23] R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators. Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, 1997.

14.2.15. Artículo de revista 15. – Publicado en *Modelling, Measurement and Control D*

On the use of the OWA operator in the adequacy coefficient

J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain (jmerigo@ub.edu; amgil@ub.edu)

Abstract

We introduce the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator. Basically, it consists in using the ordered weighted averaging (OWA) operator in the adequacy coefficient. We give a general overview of this type of index studying some of its main properties such as the distinction between ascending and descending orders and different measures for characterizing its weighting vector. We also study different families of OWAAC operators such as the maximum, the minimum, the traditional adequacy coefficient, the step-OWAAC, the window-OWAAC, the OWAAC median, etc. Finally, we apply the suggested method in the selection of investments where we can see the different results obtained by using different types of OWAAC operators.

Key words
OWA operator, Adequacy coefficient, Selection of investments.

1. Introduction

The adequacy coefficient (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) is a very useful technique that has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. Often, we prefer to use the normalized adequacy coefficient because we want an average result of all the individual comparisons. This type of index is also known as weighted adequacy coefficient when we prefer to give different degrees of importance to the individual comparisons instead of giving them the same importance.

Sometimes, when calculating the normalized adequacy coefficient, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for aggregating the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in (Yager, 1988). The OWA operator is an aggregation operator that includes the maximum, the minimum and the average criteria as special cases. It has been used in a wide range of applications (Calvo *et al*, 2002; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2007b; 2007c; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1994; 1996; 2002; 2003; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

In this paper we generalize the adequacy coefficient by introducing the attitudinal character of the decision maker in the index. We will call this generalization, the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator. The fundamental characteristic of this index is that it normalizes the adequacy coefficient with the OWA operator. Then, it is possible to develop a more general adequacy coefficient that includes the maximum, the minimum and the normalized adequacy coefficient as special cases. We will study the basic definitions and some of its main properties such as the measures for characterizing the weighting vector and the distinction between descending and ascending orders. We will also study different families of OWAAC operators such as the step-OWAAC operator, the OWAAC median, the window-OWAAC operator, the olympic-OWAAC operator, the E-Z OWAAC weights, etc.

We will also develop an application of this new method in a business problem. We will apply it in the selection of investments as this problem can be considered as a general one that includes a wide range of business problems. Summarizing the potential applications, we can see that this new approach can be used in almost all the situations where the normalized adequacy coefficient has been used.

In order to do this, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the OWA operator and the adequacy coefficient. Section 3 introduces the OWAAC operator. Section 4 analyzes different families of OWAAC operators. Finally, Section 5 and 6 develop an application in the selection of investments.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly describe some basic aggregation operators to be used throughout the paper.

2.1. OWA operator

The OWA operator introduced in (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (Calvo et al, 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager (1988).

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping F:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$F(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). Note that the weights of this two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average (Yager, 1988). For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The average is found when $w_j = 1/n$ for all j. Other families of OWA operators can be found in (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994; 1996; 2002; 2003; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997).

2.2. Adequacy coefficient

The normalized adequacy coefficient (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is very similar to the Hamming distance with the difference that it neutralizes the result when the comparison shows that the real element is higher than the ideal one. For two sets A and B, it can be defined as follows.

Definition 2. A normalized adequacy coefficient of dimension n is a mapping K:$R^n \rightarrow R$ such that:

$$K(P_k \rightarrow P) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[1 \wedge (1-\mu_i + \mu_i^{(k)}] \quad (2)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

Sometimes, when normalizing the adequacy it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the weighted adequacy coefficient. It can be defined as follows.

Definition 3. A weighted adequacy coefficient of dimension n is a mapping K:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Then:

$$K(P_k \rightarrow P) = \sum_{i=1}^{n} w_i [1 \wedge (1-\mu_i + \mu_i^{(k)}] \quad (3)$$

where a_i and b_i are the ith arguments of the sets A and B respectively.

3. The ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) operator

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the adequacy coefficient. We will call it the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWAAC operator of dimension n, is a mapping $OWAAC$:$R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{4}$$

where K_j represents the jth largest of the $p_i = [1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAAC (DOWAAC) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAAC (AOWAAC) operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWAAC aggregation can be expressed as:

$$OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{5}$$

Also note that the OWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = OWAAC(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, where $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ is any permutation of the arguments $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$. It is monotonic because if $p_i \geq r_i$, for all p_i, then, $OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq OWAAC(r_1, r_2, \ldots, r_n)$. It is bounded because $\text{Min}\{p_i\} \leq OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq \text{Max}\{p_i\}$. It is idempotent because if $p_i = p$, for all p_i, then, $OWAAC(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p$.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the OWAAC operator. Based on the measures developed for the OWA operators in (Yager, 1988; 2002), they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated in two different forms depending on the type of ordering used. For the first form we get the following:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{6}$$

And for the second, we get:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{j-1}{n-1} \right) \tag{7}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$. Note that we will also select one of these two equations according to the problem analyzed. That is, our selection will be different depending if we are in a situation where the highest argument is the best result or in a situation where the lowest value is the best result.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{8}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{9}$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

Analogously to the OWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAAC because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (OWADAC). It can be defined as follows.

Definition 5. An OWADAC operator of dimension n, is a mapping $OWADAC{:}R^{+n} \rightarrow R^{+}$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADAC(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{10}$$

where Q_j represents the jth largest of the $q_i = [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADAC (DOWADAC) and the ascending OWADAC (AOWADAC) operator. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWADAC operator. Note that the OWADAC operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection process. As it has been explained in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a), the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new approach suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAD and the OWAAC accomplish the theorems explained in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007a). Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point. In the following, we briefly show the main theorem when using the OWA operator in this type of problems.

Theorem 1. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the OWAD operator and $OWADAC(P_k \rightarrow P)$ the OWADAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWADAC(P_k \rightarrow P) \tag{11}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid \qquad \text{and}$$

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Analysing this theorem, we could generalize it for all alternatives considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the alternatives *k*.

4. Families of OWAAC operators

By using a different manifestation of the weighting vector in the OWAAC operator, we are able to obtain different types of aggregation operators with the adequacy coefficient. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the normalized adequacy coefficient and the weighted adequacy coefficient.

The maximum is obtained when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The normalized adequacy coefficient is obtained when $w_j = 1/n$, for all j. The weighted adequacy coefficient is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of K_j and i is the ith argument of p_i. Note that both the DOWAAC and the AOWAAC operators obtain these particular cases. Their weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWAAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWAAC operator.

Other families of aggregation operators could be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993; 1994; 1996; 2002; 2003; 2007; Yager and Filev, 1994; Yager and Kacprzyk, 1997). For example, the Hurwicz OWAAC criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq 1,n$. Note that if $\alpha = 1$, the Hurwicz OWAAC criteria becomes the maximum and if $\alpha = 0$, it becomes the minimum.

Note that the median and the weighted median can be used as OWAAC operators. For the OWAAC median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the $[(n + 1)/2]$th largest argument K_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest K_i. For the weighted OWAAC median, we select the argument that has the kth largest K_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-OWAAC operator that it is based on the window-OWA operator (Yager, 1993). Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, then, the window-OWAAC is transformed in the maximum. If $m = 1$, k

= n, then, the window-OWAAC becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-OWAAC is transformed in the normalized adequacy coefficient.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-OWAAC average that it is based on the olympic average (Yager, 1996). Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-OWAAC average is transformed in the OWAAC median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-OWAAC is transformed in the olympic-OWAAC average.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z OWAAC weights that it is based on the E-Z OWA weights (Yager, 2003). In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n, and in the second class we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$.

Another interesting family is the S-OWAAC operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-OWAAC operator. The "orlike" S-OWAAC operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-OWAAC operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-OWAAC operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-OWAAC operator becomes the "andlike" S-OWAAC operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-OWAAC operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-OWAAC operator becomes the Hurwicz criteria.

Another family of aggregation operators that could be used in the OWAAC operator is the centered-OWA weights. This type of operator has been suggested by Yager (2007) for the OWA operator. Following the same methodology, we could define an OWAAC operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-OWAAC operator. Note that the normalized adequacy coefficient is an example of this particular case of centered-OWAAC operator. Another particular situation of the centered-OWAAC operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-OWAAC operator. For this situation, we find the median as a particular case.

Other families of OWAAC operators that could be considered are the dependent OWAAC weights, the maximal entropy OWAAC (MEOWAAC) weights, etc. (Merigó, 2007).

Also note that it is possible to obtain different families of aggregation operators with the OWADAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the normalized dual adequacy coefficient (NDAC) and the weighted dual adequacy coefficient (WDAC). The maximum is obtained in the same form than the minimum of the OWAAC and the minimum in the same form than the maximum of the OWAAC. The NDAC is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WDAC is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Other families could be obtained following the same methodology as explained above for the OWAAC operator.

5. Selection of investments with the OWAAC operator

The reason for using the OWAAC operator in the selection of investments appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase. This can be useful in a lot of situations, for example, in situations where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more conservative decision than in normal cases. Obviously, this increase in the risk aversion can affect our decision doing that we select a different investment than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of investments with the OWAAC operator is similar to the process developed in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b), with the difference that now we are considering a problem of investments instead of financial products. The 5 steps can be summarized as follows:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the available investments for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider of the investment and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each characteristic in order to form the ideal investment.

Table 1. Ideal investment

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P =$	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

where P is the ideal investment expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the investments considered.

Table 2. Available alternatives

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the kth investment expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$; $i = 1, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth investment.

Step 4: Comparison between the ideal investment and the different alternatives considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them. In this step, the objective is to express numerically the removal between the ideal investment and the different alternatives considered. For this, it can be used the different available selection indexes shown in Sections 3 and 4.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps. Finally, we should take the decision about which investment select. Obviously, our decision will consist in choose the investment with the best results according to the index used.

6. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to see the results obtained in the aggregation by using different types of OWAAC operators. The information about the example is found in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007c) although we have made some changes in the paper. We will study the selection of investments where the decision maker needs to find the best investment according to his interests. Note that other selection problems could be developed such as the selection of human resources or financial products (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; J. Gil-Lafuente, 2002; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006a; 2006b; 2007b; 2007c).

Assume that an enterprise wants to increase its volume of activities. In order to do this, the board of directors has established five possible investments that the enterprise could develop in the future. They have submitted this information to their experts. After careful review of the information, the experts have given the following general information. They have summarized the information of the investments in five main characteristics C_i with the following results. Note that the results are valuations between 0 and 1.

Table 3. Characteristics of the investments

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
A	0.7	0.6	0.6	0.4	0.9
B	0.5	0.7	0.7	0.6	0.7
C	0.2	0.8	0.9	0.4	0.9
D	0.6	0.7	0.8	0.7	0.6
E	0.7	0.5	0.8	0.3	0.8

According to the objectives and policies of the enterprise, the experts have established the ideal investment for the enterprise independently of the investments available. They have established the following valuations for it.

Table 4. Ideal investment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
Ideal	0.8	0.9	1	0.6	0.8

With this information we can develop different aggregation methods in order to select an investment such as the normalized adequacy coefficient, the weighted adequacy coefficient, the OWAAC operator and the AOWAAC operator. Note that for the last three cases we will use the weighting vector $W = (0.1, 0.3, 0.2, 0.2, 0.2)$. Also note that for the normalized adequacy coefficient, we will use Eq.2; for the weighted adequacy coefficient, Eq.3; for the OWAAC and for the AOWAAC operator, Eq.4. The results are shown in table 5.

Table 5. Aggregated results

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
A	0.8	0.78	0.79	0.81
B	0.82	0.83	0.81	0.82
C	0.8	0.85	0.79	0.84
D	0.84	0.84	0.82	0.84
E	0.8	0.77	0.79	0.81

As we can see, if we use the NAC or the OWAAC, our decision will be investment *D*. If we use the WAC, then our optimal choice is *C*. And if we use the AOWAAC, our choice can be either *C* or *D*.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. This, is obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in table 6.

Table 6. Aggregated results with the dual coefficient

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
A	0.2	0.22	0.21	0.19
B	0.18	0.17	0.19	0.18
C	0.2	0.15	0.21	0.16
D	0.16	0.16	0.18	0.16
E	0.2	0.23	0.21	0.19

Now, we are going to study different families of OWAAC operators. We will consider the step-OWAAC operator (k = 4), the OWAAC median, the olympic-OWAAC and the EZ-OWAAC operator (k = 2). The results are shown in table 7.

Table 7. Families of OWAAC operators

	Step	*Median*	*Olympic*	*EZ-1*	*EZ-2*
A	0.7	0.8	0.8	0.65	0.95
B	0.7	0.8	0.8	0.7	0.95
C	0.8	0.9	0.86	0.6	0.95
D	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9
E	0.7	0.8	0.8	0.65	0.95

As we can see, we will select a different investment depending on the family of OWAAC operators used in the aggregation. With the EZ-2 OWAAC operator, we will be indifferent in selecting alternative *A*, *B*, *C* or *E*. With the OWAAC median and the olympic-OWAAC, our choice will be alternative *C*. With the first class of EZ-EOWAD weights, our choice will consist in selecting alternative *D*. Finally, with the step-OWAAC operator, our choice will be alternative *C* or *D*.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in table 8. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 8. Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
NAC	$A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_3=A_5$	*Step*	$A_3=A_4 \succ A_1=A_2=A_5$
WAC	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$	*Median*	$A_3 \succ A_1=A_2=A_4=A_5$
OWAAC	$A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_3=A_5$	*Olympic*	$A_3 \succ A_1=A_2=A_4=A_5$
AOWAAC	$A_3=A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_5$	*EZ-1*	$A_4 \succ A_2 \succ A_1=A_5 \succ A_3$
		EZ-2	$A_1=A_2=A_3=A_5 \succ A_4$

As a general conclusion for the example, we can see that depending on the method used in the selection process, our decision will be different. Note that the method used has to be in accordance with the interests of the decision maker.

7. Conclusion

We have developed the OWAAC operator. First we have reviewed some basic concepts such as the OWA operator and the adequacy coefficient. Then, we have developed the OWAAC operator. We have defined it and we have studied some of its main properties such as the distinction between descending and ascending orders and the measures for characterizing the weighting vector. Next, we have develop different examples of OWAAC operators such as the maximum, the minimum, the normalized adequacy coefficient, the weighted adequacy coefficient, the step-OWAAC operator, the OWAAC median, the window-OWAAC operator, the olympic-OWAAC average and the E-Z OWAAC weights. Finally, we have developed an illustrative example where we have seen the different results obtained by using these methods in a decision making problem.

References

[1] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, *Aggregation operators: New trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[2] J. Gil-Aluja, *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[3] A.M. Gil-Lafuente, “Técnicas de selección de un instrumento financiero”, in: *V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica*, Vigo, Spain, 1990.

[4] A.M. Gil-Lafuente, *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin, 2005.

[5] J. Gil-Lafuente, *Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo, 2002.

[6] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.

[7] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona, 1987.

[8] J.M. Merigó, *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona, 2007.
[9] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Using the OWA operators in the selection of financial products”, in: *Proceedings of the 41st CLADEA Congress*, Montpellier, France, CD-ROM, 2006.
[10] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Selection of financial products that adapt to different environments”, in: *Proceedings of the MS International Conference*, Konya, Turkey, pp. 719-723, 2006.
[11] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Unification point in methods for the selection of financial products”, *Fuzzy Economic Review*, vol. 13, no. 1, pp. 35-50, 2007.
[12] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “The ordered weighted averaging distance operator”, in: *Proceedings of the MS International Conference*, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “On the use of the OWA operator in the Euclidean distance”, in: *Proceedings of the MS International Conference*, Algiers, Algeria, CD-ROM, 2007.
[14] Z.S. Xu, “An Overview of Methods for Determining OWA Weights”, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 20, no. , pp. 843-865, 2005.
[15] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, vol. 18, no. 1, pp. 183-190, 1988.
[16] R.R. Yager, “On generalized measures of realization in uncertain environments”, *Theory and Decision*, vol. 33, no. 1, pp. 41-69, 1992.
[17] R.R. Yager, “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, no. 2, pp. 125-148, 1993.
[18] R.R. Yager, “On weighted median aggregation”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 2, no. 1, pp. 101-113, 1994.
[19] R.R. Yager, “Quantifier Guided Aggregation Using OWA operators”, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 11, no. 1, pp. 49-73, 1996.
[20] R.R. Yager, “Heavy OWA Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 1, no. 4, pp. 379-397, 2002.
[21] R.R. Yager, “E-Z OWA weights”, in: *Proceedings of the 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, pp. 39-42, 2003.
[22] R.R. Yager, “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, vol. 11, no. 7, pp. 631-639, 2007.
[23] R.R. Yager, D.P. Filev, “Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators”, *International Journal of General Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 297-316, 1994.
[24] R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.

14.2.16. Artículo de revista 16. – Publicado en *Journal of International Business Disciplines*

DECISION MAKING WIH DEMSPTER-SHAFER THEORY AND UNCERTAIN INDUCED AGGREGATION OPERATORS

Montserrat Casanovas, University of Barcelona
mcasanovas@ub.edu

José M. Merigó, University of Barcelona
jmerigo@ub.edu

ABSTRACT

We develop a new approach for decision making with Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence. We focus on a problem where the available information is uncertain and it can be assessed with interval numbers. In order to aggregate the information, we suggest the use of different types of uncertain induced aggregation operators such as the uncertain induced ordered weighted averaging (UIOWA) and the uncertain induced hybrid averaging (UIHA) operator. As a result, we get new types of aggregation operators such as the belief structure – uncertain induced OWA (BS-UIOWA) and the belief structure – uncertain induced hybrid averaging (BS-UIHA) operator. The main advantage of using these operators is the possibility of using complex attitudinal characters in situations where it is not possible to simply use the degree of optimism of the decision maker. We study some of their main properties. We also develop an application of the new approach in a financial decision making problem about selection of investments.

I. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence (Dempster, 1967; 1968; Shafer, 1976) provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes the situations of risk and ignorance as special cases. For further reading on the D-S theory, we recommend for example (Srivastava and Mock, 2002; Yager et al. 1994; Yager and Liu, 2008).

Usually, when using the D-S theory in decision making, it is assumed that the available information are exact numbers (Engemann et al. 1996; Merigó and Casanovas, 2006; 2007a; Yager, 1992; 2004). However, this may not be the real situation found in the decision making problem because often, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, a better approach may be the use of interval numbers. Note that other studies have considered similar approaches by using fuzzy numbers (Casanovas and Merigó, 2007) and linguistic variables (Merigó et al. 2007).

Going a step further, the aim of this paper is to suggest a new approach for uncertain decision making with D-S theory by using uncertain induced aggregation operators. Then, we will be able to use in the same formulation a unifying framework between ignorance and risk, uncertain information assessed with interval numbers and a reordering process in the aggregation step that uses order inducing variables. We will consider different types of uncertain induced aggregation operators such as the uncertain induced ordered weighted averaging (UIOWA) and the uncertain induced hybrid averaging (UIHA) operator.

The main advantage of using these operators is the possibility of considering complex attitudinal characters in situations where it is not possible to use the degree of optimism of the decision maker. Moreover, it is possible to assess the uncertain information by using interval numbers. Then, we are able to represent the uncertain problem considering the best and worst possible scenario. Note that depending on the type of interval number used, it is also possible to consider the most possible scenarios.

These operators provide a parameterized family of aggregation operators that includes the uncertain maximum, the uncertain minimum, the uncertain average and the uncertain OWA (UOWA) operator, among others. By using these aggregation operators, we will be able to create new aggregation methods such as the belief structure – UIOWA (BS-UIOWA) and the belief structure – UIHA (BS-UIHA) operator. We study some of their main properties and we develop different families of UIOWA and UIHA operators that could be used in the analysis such as the step-UIOWA, the S-UIOWA, the centered-UIOWA, the olympic-UIOWA, etc.

In order to do this, the remainder of the paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic concepts such as the interval numbers, the D-S theory, the UIOWA and the UIHA operator. Section 3 introduces the new approach when the information is aggregated with the UIOWA operator. In Section 4, we develop a similar approach with the UIHA operator. Finally, in Section 5 we present an illustrative example of the new approach in a financial decision making problem.

II. PRELIMINARIES

In this Section, we briefly review some basic concepts about the interval numbers, the UIOWA operator, the UIHA operator and the D-S theory.

Interval numbers

The interval number is a very useful and simple technique for representing the uncertainty. It has been used in an astonishingly wide range of applications. For further reading, see for example (Kaufmann and Gil-Aluja, 1987, 1990; Kaufmann et al. 1994; Kaufmann and Gupta, 1985; Moore, 1966).

In the literature, we find different types of interval numbers. For example, if we assume a 4-tuple (a_1, a_2, a_3, a_4), that is to say, a quadruplet; we could consider that a_1 and a_4 represents the minimum and the maximum of the interval number, and a_2 and a_3, the interval with the highest probability or possibility, depending on the use we want to give to the interval numbers. Note that $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. If $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the interval number is an exact number and if $a_2 = a_3$, it is a 3-tuple known as triplet.

In the following, we are going to review some basic interval numbers operations as follows. Let A and B be two triplets, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

4) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
5) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
6) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied (Kaufmann et al. 1985; Moore, 1966) but in this paper we will focus on these ones.

Uncertain induced OWA operator

The uncertain induced OWA operator was introduced by Xu (2006a). It is an extension of the OWA operator (Beliakov et al. 2007; Calvo et al. 2002; Merigó 2007; Yager, 1988; 1993; Yager and Kacprzyk, 1997) that uses the main characteristics of two well known aggregation operators: the induced OWA (Merigó and Gil-Lafuente, 2007; Yager, 2003; Yager and Filev, 1999) and the uncertain OWA operator (Ahn, 2006; 2007; Xu and Da, 2003). Then, it uses interval numbers for representing the uncertain information and a reordering process that it is based on order inducing variables. It can be defined as follows:

Definition 1. *Let Ω be the set of interval numbers. An UIOWA operator of dimension n is a mapping UIOWA: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$UIOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the UIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable represented in the form of interval numbers.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between descending (DUIOWA) and ascending (AUIOWA) orders. Note that in this case, it is not necessary to compare interval numbers because the reordering step is developed with order inducing variables. The only case where we need to compare interval numbers is in the final result. For doing this, we will use the following criteria. First, we will analyse if there is on order between the interval numbers. If not, we will calculate an average of the interval number. For example, if $n = 2$, $(a_1 + a_2) / 2$; if $n = 3$, $(a_1 + 2a_2 + a_3) / 4$; etc. If there is still a tie, then, we will follow a subjective criterion such as considering only the minimum, the maximum, etc.

Note also that different families of UIOWA operators can be studied by choosing a different weighting vector such as the step-UIOWA operator, the window-UIOWA, the median-UIOWA, the olympic-UIOWA, the centered-UIOWA, the S-UIOWA, etc.

Uncertain induced hybrid averaging operator

The uncertain induced hybrid averaging operator is an extension of the hybrid averaging (Xu, 2006b; Xu and Da, 2003) that uses the weighted average (WA) and the OWA operator, at the same time. It also uses interval numbers for representing the uncertain information and a reordering process based on order inducing variables. It can be defined as follows:

Definition 2. *Let Ω be the set of interval numbers. An UIHA operator of dimension n is a mapping UIHA: $\Omega^n \to \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$UIHA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the $\hat{a}_i$ ($\hat{a} = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$) value of the UIHA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

Note that in this case it is also possible to distinguish between descending (DUIHA) and ascending (AUIHA) orders. Also note that it is only necessary to compare interval numbers in the final result because in the reordering step of the aggregation, this problem is solved by using inducing variables. In this case, we will also follow the same criterion as the one explained for the UIOWA operator.

By using a different manifestation in the weighting vector we are able to develop a wide range of families of UIHA operators. For example, we could obtain the maximum, the minimum, the uncertain average (UA), the uncertain weighted average (UWA), the uncertain OWA, among others. Other families that could be studied are the step-UIHA, the window-UIHA, the median-UIHA, the olympic-UIHA, centered-UIHA, the S-UIHA, etc.

Dempster-Shafer theory of evidence

The D-S theory of evidence (Dempster, 1967; Shafer, 1976) provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the situations of risk and ignorance as special cases. Note that the case of certainty is also included as it can be seen as a particular case of risk or ignorance. Since its appearance, the D-S theory has been applied in a wide range of applications (Reformat and Yager, 2008, Srivastava and Mock, 2002; Yager et al. 1994; Yager and Liu, 2008).

Definition 3. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots,n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m*: $2^X \to [0, 1]$ *such that*:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$. (3)
(3) $m(A) = 0, \forall A \neq B_j$.

As said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in (Shafer, 1976).

III. USING UIOWA OPERATORS IN DECISION MAKING WITH D-S THEORY

In this Section, we describe the process to follow when using UIOWA operators in decision making with D-S theory. We divide it in three subsections. In the first one, we comment the decision process. In the second one, we analyze the aggregation used in the problem. And in the third one, we study different types of UIOWA operators that could be used in the aggregation.

Decision making approach

A new approach for decision making with D-S theory is possible by using uncertain induced aggregation operators. The main advantages of using this type of aggregation are: the possibility of dealing with uncertain information, the possibility of using an aggregation that provides a parameterized family of aggregation operators between the maximum and the minimum, and the possibility of using a general formulation in the reordering of the arguments by using inducing variables. Note that in this paper we will focus on the UIOWA and the UIHA operators, but it is also possible to consider other types of uncertain induced aggregation operators by using generalized means and quasi-arithmetic means. The motivation for using interval numbers appear because sometimes, the available information is not clear and it is necessary to assess it with another approach such as the use of interval numbers. Although the information is uncertain and it is difficult to take decisions with it, at least we can represent the best and worst possible scenarios. The decision process can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ is the uncertain payoff, given in the form of interval numbers, to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the uncertain payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.

Step 3: Calculate the collection of weights, w, to be used in the UIOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker (Merigó, 2007; Yager, 1988; 1993; 2007; Yager and Filev, 1994).

Step 4: Determine the uncertain payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.

Step 5: Calculate the uncertain aggregated payoff, V_{ik} = UIOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of i and k.

Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{r=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{4}$$

Step 7: Select the alternative with the largest C_i as the optimal.

UIOWA operators in belief structures

Analyzing the aggregation in *Steps* 5 and 6 of the previous subsection, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call this process the belief structure – UIOWA (BS-UIOWA) aggregation. It can be defined as follows.

Definition 4. *A BS-UIOWA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{5}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} *is the* $\tilde{a}_{i_k}$ *value of the UIOWA pair* $\langle \tilde{a}_{i_k}, \tilde{a}_{i_k} \rangle$ *having the* j_k*th largest* u_{i_k}, u_{i_k} *is the order inducing variable and the* $\tilde{a}_{i_k}$ *are interval numbers, and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment.*

Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements. The BS-UIOWA operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between descending and ascending orders by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the BS-DUIOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the BS-AUIOWA operator. Then, we obtain the BS-DUIOWA and the BS-AUIOWA operators.

Families of BS-UIOWA operators

By choosing a different manifestation in the weighting vector of the UIOWA operator, we are able to develop different families of UIOWA and BS-UIOWA operators. As it can be seen in definition 4, each focal element uses a different weighting vector in the aggregation step with the UIOWA operator. Therefore, the analysis needs to be done individually.

For example, it is possible to obtain the uncertain maximum, the uncertain minimum, the UA and the UWA. The uncertain maximum is found if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$. The uncertain minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq$

p, and u_p = Min{u_i}. The UA is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$ and the UWA is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all a_i.

Other families of UIOWA operators could be used in the BS-UIOWA operator such as the step-UIOWA, the S-UIOWA, the olympic-UIOWA, the window-UIOWA and the centered-UIOWA operator, among others. Note that recently, it is appearing a wide range of papers dealing with the problem of determining OWA weights. In this subsection we simply give a general overview commenting some basic cases that are applicable in the UIOWA operator.

The step-UIOWA operator is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$ and the window-UIOWA when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$.

For the median-UIOWA, we distinguish between two cases. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument $\tilde{a}_i$ with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign, for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i.

For the weighted median-UIOWA we select the argument $\tilde{a}_i$ that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

The olympic-UIOWA operator is found if $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Note that the olympic-UIOWA is transformed in the olympic-UOWA if $w_p = w_q = 0$, such that u_p = Max{$\tilde{a}_i$} and u_q = Min{$\tilde{a}_i$}, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

A further family is the centered-UIOWA operator. This type of aggregation operator is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ which is known as softly decaying centered-UIOWA operator. Note also the possibility of removing the third condition. Then, we shall refer to this type of aggregation as non-inclusive centered-UIOWA operator.

A further interesting family is the S-UIOWA operator. In this case, we can distinguish between three types: the "orlike", the "andlike", and the "generalized" S-UIOWA operator. The orlike S-UIOWA operator is found when $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, u_p = Max{$\tilde{a}_i$}, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for all $j \neq p$ with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the UA and if $\alpha = 1$, we get the uncertain maximum. The andlike S-UIOWA operator is found when $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, u_q = Min{$\tilde{a}_i$}, and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for all $j \neq q$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that if $\beta = 0$ we get the UA and if $\beta = 1$, the uncertain minimum. Finally, the generalized S-UIOWA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with u_p = Max{$\tilde{a}_i$}; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with u_q = Min{$\tilde{a}_i$}; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, we get the andlike S-UIOWA and if $\beta = 0$, the orlike S-UIOWA.

Another type of UIOWA operator that we could mention is the EZ-UIOWA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n.

Further families of UIOWA operators that could be used include those that depend on the aggregated objects. For example, we could develop the BADD-UIOWA operator as follows.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{6}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, and b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the UIOWA pair $\langle u_i, \tilde{a}_i \rangle$ having the jth largest u_i. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the UA and if $\alpha = \infty$, we get the uncertain maximum. In this operator, it appears the problem of how to deal with interval numbers. For simplicity, we recommend to use the average of the interval as the value $\tilde{a}_i$ to be used in the calculation of the weights.

Other families of UIOWA operators that depend on the aggregated objects could be developed by using $(1 - b_j)^{\alpha}$, $(1/ b_j)^{\alpha}$, etc., instead of b_j^{α}. Note that these families were developed for the OWA operator in (Yager, 1993).

A further useful method for obtaining the weighting vector is the functional method known as basic interval monotonic function (BUM) (Yager, 1996). Let f be a function f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. Using this BUM function we obtain the UIOWA weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{7}$$

It is easy to see that the weights w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Finally, if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-uncertain maximum, the BS-uncertain minimum, the BS-UA, the BS-UWA, the BS-step-UIOWA, the BS-S-UIOWA, the BS-olympic-UIOWA, , the BS-centered-UIOWA, etc.

IV. USING UIHA OPERATORS IN D-S THEORY

In some situations, the decision maker could prefer to use another type of uncertain aggregation operator such as the UIHA operator. The main advantage of this operator is that it uses the characteristics of the UWA and the UIOWA in the same aggregation. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S theory, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, UWAs and UIOWAs.

In order to use this type of aggregation in D-S framework we should consider that now in *Step* 3, when calculating the collection of weights to be used in the aggregation, we are using two weighting vectors because we are mixing in the same problem the UWA and the UIOWA.

In *Step* 5, when calculating the uncertain aggregated payoff, we should use the UIHA operator instead of the UIOWA operator by using Eq. (2).

In this case, it is also possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call it the BS-UIHA operator.

Definition 5. *A BS-UIHA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{8}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} *is the* $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$) *value of the UIHA pair* $\langle u_{i_k}, \tilde{a}_{i_k} \rangle$ *having the* j_k*th largest* u_{i_k}, u_{i_k} *is the order inducing variable* $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ *is the weighting vector of the* $\tilde{a}_i$, *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, *and the* $\tilde{a}_{i_k}$ *are interval numbers, and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the UIHA operator. Note that if $\omega_i = 1/n$ for all i, then, Eq. (8) is transformed in Eq. (5).

In this case, we could also study different properties and particular cases of the BS-UIHA operator, in a similar way as it has been explained for the BS-UIOWA operator such as the distinction between descending (BS-DUIHA) and ascending (BS-AUIHA) orders.

When aggregating the collection of uncertain payoffs of each focal element, it is also possible to consider a wide range of families of UIHA operators. For example, we could mention the uncertain hybrid maximum, the uncertain hybrid minimum, the uncertain Hurwicz hybrid criteria, the UA, the UWA and the UIOWA operator. These operators are obtained in a similar way as it has been explained in subsection 3.3 excepting for the UWA and the UIOWA. Note that the UWA is found when $w_j = 1/n$, for all j, and the UIOWA operator when $\omega_i = 1/n$, for all i, respectively.

Other families of UIHA operators that could be used are the step-UIHA operator, the window-UIHA, the olympic-UIHA, the S-UIHA, the EZ-UIHA, the median-UIHA, the centered-UIHA, the BADD-UIHA, etc. Note that these families follow a similar methodology as it has been explained for the UIOWA operator.

Finally, if we use the same family of UIHA operator for all the focal elements, then, we can refer to the aggregation as the BS-uncertain hybrid maximum, the BS-uncertain hybrid minimum, the Hurwicz BS-uncertain hybrid criteria, the BS-step-UIHA, the BS-window-UIHA, the BS-olympic-UIHA, the BS-S-UIHA, the BS-centered-UIHA, etc.

V. APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

In the following, we are going to develop an application of the new approach in a decision making problem. We will develop an application in the selection of financial strategies. Note that other decision making applications could be developed such as the selection of investments, financial products, human resources, assets, etc.

We will develop the example considering a wide range of uncertain induced aggregation operators such as the UA, the UWA, the UOWA, the UIOWA and the UIHA operator.

Assume a company is planning its financial strategy for the next year and they consider 5 possible financial strategies to follow.

- A_1 = Financial strategy 1.
- A_2 = Financial strategy 2.
- A_3 = Financial strategy 3.
- A_4 = Financial strategy 4.

In order to evaluate these financial strategies, the company uses a group of experts. They consider that the key factor is the economic situation of the company for the next year. After careful analysis, the experts have considered five possible situations that could happen in the future: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Normal, S_4 = Good, S_5 = Very good.

Depending on the uncertain situations that could happen in the future, the experts establish the uncertain payoff matrix. As the available information about the future benefits of the company is very imprecise, the experts use interval numbers to assess the information. The results are shown in Table 1.

TABLE 1: UNCERTAIN PAYOFF MATRIX

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(10,20,30)	(40,50,60)	(70,80,90)	(40,50,60)	(50,60,70)
A_2	(50,60,70)	(30,40,50)	(20,30,40)	(60,70,80)	(40,50,60)
A_3	(70,80,90)	(40,50,60)	(30,40,50)	(30,40,50)	(40,50,60)
A_4	(30,40,50)	(50,60,70)	(20,30,40)	(50,60,70)	(60,70,80)

After careful analysis of the information, the experts have obtained some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief structure about the states of nature.

Focal element

$B_1 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3$

$B_2 = \{S_1, S_2, S_5\} = 0.3$

$B_3 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 0.4$

The attitudinal character of the company is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors. Therefore, the experts use order inducing variables for analysing the attitudinal character of the enterprise. The results are shown in Table 2.

TABLE 2: ORDER INDUCING VARIABLES

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	22	16	35	26
A_2	12	18	24	20	30
A_3	16	11	21	33	25
A_4	30	26	12	18	24

The experts establish the following weighting vectors for both the UWA and the UIOWA operator.

Weighting vector
$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$
$W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$
$W_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$

With this information, we can obtain the aggregated payoffs. The results are shown in Table 3.

TABLE 3: UNCERTAIN AGGREGATED PAYOFFS

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
V_{11}	(50,60,70)	(49,59,69)	(49,59,69)	(52,62,72)	(52,62,72)
V_{12}	(33.3,43.3,53.3)	(35,45,55)	(31,41,51)	(34,44,54)	(40,50,60)
V_{13}	(40,50,60)	(43,53,63)	(37,47,57)	(37,47,57)	(42,51,60)
V_{21}	(36.6,46.6,56.6)	(39,49,59)	(35,45,55)	(36,46,56)	(36,46,56)
V_{22}	(40,50,60)	(40,50,60)	(39,49,59)	(41,51,61)	(37,46.5,56)
V_{23}	(40,50,60)	(40,50,60)	(37,47,57)	(37,47,57)	(32.5,41,49.5)
V_{31}	(33.3,43.3,53.3)	(33,43,53)	(33,43,53)	(34,44,54)	(34,44,54)
V_{32}	(50,60,70)	(49,59,69)	(49,59,69)	(49,59,69)	(44.5,54.5,64.5)
V_{33}	(42.5,52.5,62.5)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(34.5,43,51.5)
V_{41}	(40,50,60)	(41,51,61)	(38,48,58)	(38,48,58)	(38,48,58)
V_{42}	(46.6,56.6,66.6)	(48,58,68)	(45,55,65)	(48,58,68)	(55.5,66,76.5)
V_{43}	(37.5,47.5,57.5)	(37,47,57)	(35,45,55)	(35,45,55)	(34,43,52)

Once we have the aggregated results, we have to calculate the uncertain generalized expected value. The results are shown in Table 4.

TABLE 4: UNCERTAIN GENERALIZED EXPECTED VALUE

	UA	*UWA*	*UOWA*	*UIOWA*	*UIHA*
A_1	(41,51,61)	(42.4,52.4,62.4)	(38.8,48.8,58.8)	(40.6,50.6,60.6)	(44.4,54,63.6)
A_2	(39,49,59)	(39.7,49.7,59.7)	(37,47,57)	(37.9,47.9,57.9)	(34.9,44.15,53.4)
A_3	(42,52,62)	(40.6,50.6,60.6)	(40.6,50.6,60.6)	(40.9,50.9,60.9)	(37.35,46.75,56.15)
A_4	(41,51,61)	(41.5,51.5,61.5)	(38.9,48.9,58.9)	(39.8,49.8,59.8)	(41.65,51.4,61.15)

As we can see, depending on the uncertain aggregation operator used, the results and decisions may be different. A further interesting issue is to establish an ordering of the financial strategies. Note that this is very useful when the decision maker wants to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5.

TABLE 5: ORDERING OF THE FINANCIAL STRATEGIES

	Ordering		*Ordering*
UA	$A_3 \succ A_1 = A_4 \succ A_2$	*UIOWA*	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2$
UWA	$A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2$	*UIHA*	$A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_2$
UOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2$		

As we can see, depending on the aggregation operator used, the results and the decisions may be different. With the UA, the UOWA and the UIOWA the optimal choice is A_3. And with the UWA and the UIHA, the best result is A_1.

VI. CONCLUSIONS

We have studied the D-S theory of evidence in decision making with uncertain information assessed with interval numbers. By using interval numbers, we can represent uncertain situations where the results are not clear but it is possible to consider the best and worst possible scenarios and the most possible ones. We have also used uncertain induced aggregation operators because it gives more flexibility in the attitudinal character of the decision maker in order to assess complex situations such as the decisions taken by the board of directors of an enterprise. Mainly, we have focussed on the UIOWA and the UIHA operators. Then, we have obtained two new aggregation operators: the BS-UIOWA and the BS-UIHA operator. We have analysed some of the main properties and different particular cases.

We have also developed an application of the new approach in a business decision making problem about selection of financial strategies. We have seen the usefulness of this approach about using probabilities, UWAs and UIOWAs in the same problem. We have also seen that depending on the aggregation operator used, the results and decisions may be different.

In future research, we expect to develop further extensions to this approach by adding new characteristics in the problem and applying it to other decision making problems.

VII. REFERENCES

Ahn, B.S. (2006). The uncertain OWA aggregation with weighting functions having a constant level of orness. *International Journal of Intelligent Systems 21*(5), 469-483.

Ahn, B.S. (2007). The OWA aggregation with uncertain descriptions on weights and input arguments. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15*(6), 1130-1134.

Beliakov, G., A. Pradera, T. Calvo. (2007). *Aggregation Functions: A guide for practitioners*. Berlin: Springer-Verlag.

Calvo, T., G. Mayor, R. Mesiar. (2002). *Aggregation Operators: New Trends and Applications*. New York: Physica-Verlag.

Casanovas, M., J.M. Merigó. (2007). Using fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure. In: *Proceedings of the AEDEM International Conference,* Krakow, Poland, pp. 475-486.

Dempster, A.P. (1967). Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping. *Annals of Mathematical Statistics 38*(2), 325-339.

Dempster, A.P. (1968). A generalization of Bayesian inference. *Journal of the Royal Statistical Society B 30*(2), 205-247.

Engemann, K.J., H.E. Miller and R.R. Yager. (1996). Decision making with belief structures: an application in risk management. *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4*(1), 1-26.

Kaufmann, A., J. Gil-Aluja. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre* (In Spanish). Barcelona: Hispano-europea.

Kaufmann, A., J. Gil-Aluja. (1990). *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre* (In Spanish). Madrid: Centro de Estudios Ramón Areces.

Kaufmann, A., J. Gil-Aluja, A. Terceño. (1994). *Matemática para la economía y la gestión de empresas* (In Spanish). Barcelona: Foro Científico.

Kaufmann, A., M.M. Gupta. (1985). *Introduction to fuzzy arithmetic*. Rheinhold: Publications Van Nostrand.

Merigó, J.M. (2007). *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*. Unpublished thesis (In Spanish). Department of Business Administration, University of Barcelona.

Merigó, J.M., M. Casanovas. (2006). Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure. In: *Proceedings of the 13th SIGEF Congress*, Hammamet, Tunisia, pp.709-727.

Merigó, J.M., M. Casanovas. (2007). Induced aggregation operators in decision making with the Dempste-Shafer belief structure. *Working Papers in Economics 184*, University of Barcelona.

Merigó, J.M., M. Casanovas, L. Martínez. (2007). Linguistic decision making using Dempster-Shafer theory of evidence. In: *Proceedings of the 14th SIGEF Congress*, Poiana-Brasov, Romania, pp. 658-671.

Merigó, J.M., A.M. Gil-Lafuente. (2007). The induced generalized OWA operator. In: *Proceedings of the conference EUSFLAT 2007* volume 2, pp. 463-470, Ostrava, Czech Republic.

Moore, R.E. (1966). *Interval Analysis*. New Jersey: Prentice Hall.

Reformat, M., R.R. Yager. (2008). Building ensemble classifiers using belief functions and OWA operators. *Soft Computing 12*(6), 543-558.

Shafer, G.A. (1976). *Mathematical Theory of Evidence*. New Jersey: Princeton University Press.

Srivastava, R.P., T. Mock. (2002). *Belief Functions in Business Decisions*. Heidelberg: Physica-Verlag.

Xu, Z.S. (2006a). Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making. *Information Fusion 7*(2), 231-238.

Xu, Z.S. (2006b). A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information. *Group Decision and Negotiation 15*(6), 593-604.

Xu, Z.S., Q.L. Da. (2002). The Uncertain OWA Operator. *International Journal of Intelligent Systems 17*(6), 569-575.

Xu, Z.S., Q.L. Da. (2003). An Overview of Operators for Aggregating the Information. *International Journal of Intelligent Systems 18*(9), 953-969.

Yager, R.R. (1988). On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18*(1), 183-190.

Yager, R.R. (1992). Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties. *International Journal of General Systems 20*(3), 233-245.
Yager, R.R. (1993). Families of OWA operators. *Fuzzy Sets and Systems 59*(2), 125-148.
Yager, R.R. (1996). Quantifier guided aggregation using OWA operators. *International Journal of Intelligent Systems 11*(1), 49-73.
Yager, R.R. (2003). Induced aggregation operators. *Fuzzy Sets and Systems 137*(1), 59-69.
Yager, R.R. (2004). Uncertainty modelling and decision support. *Reliability Engineering and System Safety 85*(1), 341-354.
Yager, R.R. (2007). Centered OWA operators. *Soft Computing 11*(7), 631-639.
Yager, R.R., M. Fedrizzi and J. Kacprzyk. (1994). *Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence*. New York: John Wiley & Sons.
Yager, R.R., D.P. Filev. (1994). Parameterized "andlike" and "orlike" OWA Operators. *International Journal of General Systems 22*(3), 297-316.
Yager, R.R., D.P. Filev. (1999). Induced ordered weighted averaging operators. *IEEE Transaction on Systems, Man and Cybernetics 29*(2), 141-150.
Yager, R.R., J. Kacprzyk. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*. Norwell: Kluwer Academic Publishers.
Yager, R.R., L. Liu. (2008). *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions*. Berlin: Springer-Verlag.

14.2.17. Artículo de revista 17. – Aceptado en *Fuzzy Sets and Systems*

Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators

José M. Merigó[7], Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain

Abstract

In this paper, we analyse in detail the ordered weighted averaging (OWA) operator and some of the extensions developed about it. We specially focus on distinguishing between operators with descending or ascending orders. With this introduction, we suggest some new extensions about the OWA operator such as the induced heavy OWA (IHOWA) operator, the uncertain heavy OWA (UHOWA) operator and the uncertain induced heavy OWA (UIHOWA) operator. For these three new extensions, we consider some of its main properties and some examples of special cases found in the weighting vector. Finally, we develop an application of the new approach.

Keywords: Aggregation operators; OWA operator; IOWA operator; HOWA operator.

1. Introduction

A very common aggregation method for aggregating the information is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced by Yager in [27]. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications [3,19,38] and a lot of new extensions have been developed about it [1,4-15,17-18,20-37]. It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average criteria.

Among the great variety of extensions developed about the OWA operator, this paper will focus on the induced OWA (IOWA) operator, the heavy OWA (HOWA) operator and the uncertain OWA (UOWA) operator. The IOWA operator was introduced in [37] by Yager and Filev motivated by the ideas of [14]. Its main characteristic is that the reordering step is not developed with the values of the arguments. In this case, the reordering step is induced by another mechanism such that the ordered position of the arguments depends upon the values of their associated order inducing variables. Recently, a lot of new extensions have appeared about it such as [4-7,10-11,15,17,21,23-24,32-33,35,37]. The HOWA operator was introduced in [31] by Yager. The main characteristic of this type of operator is that it provides a wider class of aggregation operators by allowing the weighting vector to range between the OWA operator and the total operator. This type of aggregation has also been studied in [34]. The UOWA operator was introduced in [25] by Xu and Da and its main characteristic is

[7] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 402 45 80.
E-mail addresses: jmerigo@ub.edu (J.M. Merigó), mcasanovas@ub.edu (M. Casanovas).

that it uses uncertain information in the aggregation. Recently, a lot of new developments have appeared about it such as [1,20,22-23].

The aim of this paper is to introduce three new extensions about the OWA operator. We will call these three extensions as the induced HOWA (IHOWA) operator, the uncertain HOWA (UHOWA) operator and the uncertain induced HOWA (UIHOWA) operator. The main characteristic of the IHOWA operator is that the reordering step is not developed with the values of the arguments as it was done in the HOWA operator. In this case, the reordering step of the HOWA operator is induced by another mechanism such that the ordered position of the arguments depends upon their associated order inducing variables. The main characteristic of the UHOWA operator is that it aggregates uncertain information providing a wider class of aggregation operators by allowing the weighting vector to range from the UOWA operator to the uncertain total operator. The main characteristic of the UIHOWA operator is that it uses at the same time a reordering step based on order inducing variables, uncertain information and a weighting vector that provides a wider class of aggregation operators that range from the UIOWA operator to the uncertain total operator.

For these three new extensions, we will introduce them by giving their definition and providing some of their main properties. We will also focus on distinguishing between aggregations with descending or ascending orders. We will study a wide range of families of HOWA operators for each extension including the push up allocation, the push down allocation, the uniform allocation, the median type, the step-HOWA aggregation, the olympic average allocation and the Arrow-Hurwicz aggregation.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we describe some basic aggregation operators such as the OWA operator, the IOWA operator, the HOWA operator and the UOWA operator. In Section 3, we analyse the first extension, the IHOWA operator. In Section 4, we develop the second one, the UHOWA operator. In Section 5, we introduce the third one, the UIHOWA operator. In Section 6, we develop a numerical example. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Aggregation operators

2.1. OWA operator

The OWA operator was introduced in [27]. It provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [3,19,38]. In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager [27].

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA: R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum is one and $w_j \in [0, 1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

Although the reordering step is used in most of the cases in decreasing order, due to the large number of different cases found, we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent both for the DOWA and the AOWA operator [7,18]. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we could obtain the maximum, the minimum and the arithmetic mean [27]. Other types of aggregations can be seen in [8,29-30,36].

Another factor to consider, are the three measures introduced by Yager [27,31] for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure $\alpha(W)$, is the attitudinal character and it is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{2}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure, also introduced in [27] by Yager, is called the entropy of dispersion of W. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{3}$$

This can be used to provide a measure of the information being used. For example, if $w_j = 1$ for some j, known as step-OWA [29], then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

The third measure was introduced in [31], it is called the divergence of W and it is useful in some exceptional situations. It is defined as:

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{4}$$

These three measures can also be used with the AOWA operator by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

2.2. Induced OWA operator

The Induced OWA (IOWA) operator was introduced in [37] and it represents an extension to the OWA operator. In this case, the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. Here, the reordering step is induced by another mechanism represented as u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the inducing variable u_i. In the following, we provide a definition of the IOWA operator as suggested by Yager and Filev [37].

Definition 2. An IOWA operator of dimension n is a mapping $IOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is one, then:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5}$$

where b_j is the a_i value of the IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator. It is easy to see that they are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DIOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AIOWA operator. Note that it is also possible to find this relation by looking to the inducing variables.

The IOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent [37] both for the DIOWA and the AIOWA operator.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum and the average [7,37]. We should note that a similar analysis could be developed for the AIOWA operator by using ascending orders.

2.3. Heavy OWA operator

The Heavy OWA operator was introduced in [31] and it represents an extension of the OWA operator. The motivation for using this operator is because there are situations where the available information is independent from each other and this aspect needs to be considered in the aggregation. In this case, the difference with the OWA operator is that the sum of the weights is allowed to be between 1 and n instead of being restricted to sum up to 1. With this, we get a wider class of aggregation operators that include mean operators and totalling operators. In the following, we provide a definition of the HOWA operator as suggested by Yager [31].

Definition 3. A Heavy OWA operator of dimension n is a mapping $HOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between [1, n], then:

$$HOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{6}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending HOWA (DHOWA) operator and the Ascending HOWA (AHOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AHOWA operator.

The HOWA operator is monotonic and commutative both for the DHOWA and the AHOWA operator. Note that the HOWA operator is not bounded by the minimum and the maximum. In this case, it is bounded by the minimum and the total operator which represents the sum of all the arguments.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [31], the OWA operator is found when the sum of the weights is one. The total operator is found when the sum of the weights is n. The minimum is found when $w_n = 1$, $w_j = 0$ for all $j \neq n$ and the sum of the weights is one. For obtaining the maximum and the average criteria, we could find it from different aggregations as the weighting vector can be higher than 1. We should note that these results could also be found for the AHOWA operators.

Another interesting issue to comment is the sum of the elements of the weighting vector W that is denoted by Yager [31] as $|W|$ and it is called the magnitude of W. In order to normalize this feature, Yager introduced a characterizing parameter called the beta value of the vector W. It was defined as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be seen, if $\beta = 1$, we get the total operator and if $\beta = 0$, we get the usual OWA operator.

Once analysed the magnitude of W, it is possible to study the measures used for characterizing the weighting vector. For the HOWA operator, Yager [31] defined two measures very similar to the measures used with OWA operators. The first measure, the attitudinal character, was defined as:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right) \tag{7}$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Note that the total operator has $\alpha(W) = 0.5$. The second measure, the entropy of dispersion, was defined as:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{8}$$

Note that for the total operator, $H(W) = -\ln n$. Also note that both measures are reduced to the usual definitions [27] when $|W| = 1$.

As it has been suggested for the case with OWA operators [31], a third measure that could be introduced for characterizing the weighting vector of the HOWA operator, is the divergence of W. It can be defined as:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{9}$$

Note that if $|W| = 1$, we get the same divergence measure than the OWA operator. If $|W| = n$, we get the divergence for the total operator and it is the same divergence than the average. That is, $Div(W) = (1/12)[(n + 1)/(n - 1)]$.

These three measures could also be studied with the AHOWA operator by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AHOWA operator.

2.4. Uncertain OWA operator

The Uncertain OWA (UOWA) operator was introduced in [25]. The main difference with the OWA operator is that the information given in the UOWA operator is uncertain. For the weighting vector, the parameters cannot be specified but value ranges can be obtained and for the input arguments the information is given in the form of an interval number. Note that it is also possible to consider that the weighting vector uses exact numbers. In the following, we provide a definition of the UOWA operator as suggested by Xu and Da in [25]:

Definition 4. Let Ω be the set of interval numbers. An UOWA operator of dimension n is a mapping $UOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is one, then:

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{10}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers. We should note that for the ordering of the interval numbers, we should use one of the traditional criteria used for comparing interval numbers such as the method suggested in [25]. For further information on interval numbers, see for example [16].

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending UOWA (DUOWA) operator and the Ascending UOWA (AUOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUOWA operator.

The UOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent both for the DUOWA and the AUOWA operator.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the uncertain maximum, the uncertain minimum and the uncertain average (UA).

When analysing the weighting vector, we should use a method to obtain these weights by using the partial information given. For example, we could use the method proposed in [25]. Once obtained the weights, we could analyse the three measures proposed by Yager in [27,31] for characterizing the weighting vector of the UOWA operator. These measures should use in the UOWA operator the same methodology as in the OWA operator because we only consider the weighting vector.

3. Induced heavy OWA operator

3.1. Introduction

The induced heavy OWA (IHOWA) operator is an extension of the OWA operator and it consists in combining in the same operator, the characteristics of the HOWA operator with the characteristics of the IOWA operator. In general, this operator uses at the same time an inducing order represented by an inducing order variable u_i and a sum of the weights that can range from 1 to n. The main advantage of this operator against the IOWA operator is the possibility of including independent information in the problem. Then, when aggregating the arguments, the average result has to be higher than a simple average because the final result will include all the information.

Definition 5. An IHOWA operator of dimension n is a mapping $IHOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$IHOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{11}$$

where b_j is the a_i value of the IHOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

As we can see, by allowing the weighting vector to be higher than one, we are accepting the possibility that some part of the information is independent. Analysing the reordering step, we can distinguish between the Descending IHOWA (DIHOWA) operator and the Ascending IHOWA (AIHOWA) operator. The DIHOWA operator is defined as in definition 7.

Definition 6. An AIHOWA operator of dimension n is a mapping $AIHOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$AIHOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j c_j \tag{12}$$

where c_j is the a_i value of the IHOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth lowest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable. As it can be seen, the elements c_j (j = 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way according to the values of u_i: $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$. Note that these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DIHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AIHOWA operator.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the IHOWA operator can be expressed both for the DIHOWA and the AIHOWA operator as:

$$IHOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = W^T B \tag{13}$$

The IHOWA operator is commutative and monotonic both for the DIHOWA and the AIHOWA operator. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $IHOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle,\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = IHOWA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle\ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$, where $(d_1,\ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1,\ldots, a_n)$. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$ for all i, then, $IHOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq IHOWA(\langle u_1,d_1\rangle, \langle u_2,d_2\rangle\ldots, \langle u_n,d_n\rangle)$. Note that the IHOWA operator is bounded by the minimum and the total operator.

When analyzing the magnitude of the weighting vector $|W|$ for the IHOWA operator, we can use a similar methodology to the one used by Yager for the HOWA operator [31]. As this feature does not depend upon the reordering of the arguments, the formulation is the same as the HOWA operator. Then, we can define it as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be seen, if $\beta = 1$, we get the total operator and if $\beta = 0$, we get the usual IOWA operator. Note that it is possible to look to the negation of β. Then, $\rho = 1 - \beta$. If $\rho = 0$, we get the total operator and if $\rho = 1$, we get the usual IOWA operator.

Another interesting issue to comment with the IHOWA operator is the problem of ties in the order inducing variables of the arguments. For the OWA operator, a tie between two arguments did not represent a problem as the result was the same independently of the reordering of the tie. But in the induced aggregation operators such as the IOWA or the IHOWA operator, this represents a problem because the final result is different depending on which argument is selected first in the reordering process. In order to solve this problem in the IHOWA operator, we recommend to follow the policy suggested by Yager and Filev in [37] where they replace each argument of the tied OWA pairs $\langle u_i,a_i \rangle$ and $\langle u_j,a_j \rangle$, by their average: $(a_i + a_j) / 2$. Note that if the tie is between more than two order inducing variables, then, the policy to follow is to replace the arguments of these order inducing variables by their average. Other policies could be used when dealing with ties such as the use of the weighted average when replacing the arguments of the order inducing variables. In this case, the difference would be that we could give more or less importance to the tied arguments according to our interests. Also note, that these methodologies explained when dealing with ties, are applicable both for the DIHOWA and the AIHOWA operator.

As it was explained in [37], the values used for the order inducing variables can be drawn from a space such that the only requirement is to have a linear ordering. Then, it is possible to use different kinds of attributes that permit, for example, to mix numbers with words in the aggregations following the ideas of Zadeh [39-40]. For the IHOWA operator, this would mean that we have numerical arguments to be ordered by linguistic order inducing variables. Note that in some situations it is possible to use the implicit lexicographic ordering associated with words such as the ordering in the dictionaries [37]. Also note that the reordering of these methodologies can be either ascendant or descendant.

3.2. Families of IHOWA operators

In the following, we are going to consider different types of IHOWA operators. We will do this by choosing a different manifestation of the weighting vector. First of all, we will consider the cases when the IHOWA operator becomes the OWA operator, the IOWA operator, the HOWA operator, the total operator, the weighted average and the minimum criteria. The OWA operator is obtained when the ordered position of the u_i is the same than the ordered position b_j such that b_j is the jth largest of the a_i and $\beta = 0$. The IOWA operator is found when $\beta = 0$. The HOWA operator is found when the ordered position of the u_i is the same than the ordered position b_j such that b_j is the jth largest of the a_i. The total operator is obtained when $\beta = 1$. The weighted average is found when the ordered position of the u_i is the same than the ordered position of the a_i and $\beta = 0$. Note that if $\beta \neq 0$, then, we get the heavy weighted average. Finally, the minimum is obtained when $w_p = 1$, $w_j = 0$, for all $j \neq p$, $u_p = \text{Min}\{a_i\}$ and $\beta = 0$.

Now, we will develop another group of particular cases of IHOWA operators based on the HOWA operator developed by Yager [31]. The first one is the push up allocation. The objective of this type of operator is to allocate as much as possible of the magnitude W at the top of the weighting vector. The problem here is that the weights w_j are not associated with the attitudinal character $\alpha(W)$, so we cannot use this measure in the analysis. Apart from this problem, the formulation is the same than before. That is, $w_j = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Note that if the ordered position of the u_i is the same than the ordered position b_j such that b_j is the jth largest of the a_i, then, the IHOWA operator becomes the HOWA operator. In this case, it is possible to use the attitudinal character $\alpha(W)$. Also note that if $\beta = 0$, $W_{pu} = W^*$, $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$, then, $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W^*) = 1$. If $\beta = 1$, $W_{pu} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

The dual allocation of the push up is the push down allocation [31]. The objective of this type of aggregation is to allocate as much as possible of the magnitude W at the bottom of the weighting vector. In this case, the formulation is $w_{n-j+1} = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Note that if the ordered position of the u_i is the same than the ordered position b_j such that b_j is the jth largest of the a_i, then, the IHOWA operator becomes the HOWA operator. In this case, it is possible to use the attitudinal character measure $\alpha(W)$. Also note that if $\beta = 0$, $W_{pd} = W_*$, $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq$ n, then, $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_*) = 0$. If $\beta = 1$, $W_{pd} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

Another type of allocation of the IHOWA operator is the uniform allocation. In this case, we assign the weights as $w_j = |W|/n$ for all j. In this allocation we always find a neutral attitudinal character $\alpha(W) = 0.5$. Note that if $\beta = 0$, we get the arithmetic mean.

A further interesting allocation for the IHOWA operator is the median type allocation. The objective is to push as much weight to the center of W. In these cases, we have to distinguish between the cases when n is even or odd. If n is even, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+j} = w_{a+1-j} = [1 \wedge ((|W| - 2(j - 1))/2)] \vee 0$. If n is odd, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+1} = 1$ and $w_{a+1-j} = w_{a+1+j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. Note that if the ordered position of the u_i is the same than the ordered position b_j such that b_j is the jth largest of the a_i, then, the IHOWA operator becomes the HOWA operator. In this case, it is possible to use the attitudinal character measure $\alpha(W)$ and for the median type allocation we find that it is 0.5 as it accomplishes the theorem developed by Yager [31] where he shows that any symmetric weighting vector has $\alpha(W) = 0.5$.

Let us look at the step-IHOWA aggregation. In this case, the weighting vector is focused at the Kth largest element. In the following, let $b = \text{Min}[(K - 1), (n - K)]$. We allocate the weights for j to b as $w_K = 1$ and $w_{K+j} = w_{K-j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. If $b = K - 1$, $K - 1 < n - K$, then, $w_{j+2K-1} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. If $b = n - K$, $K - 1 > n - K$, then, $w_{2K-n-j} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. Note that if the ordered position of the u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i, then, the step-IHOWA operator becomes the step-HOWA operator. In this case, it can be seen that for $K = 1$, the step-IHOWA becomes the push up allocation, for $K = n$, the step-IHOWA becomes the push down allocation and for $K = (n + 1)/2$, it becomes the median allocation.

A further type of allocation of the IHOWA operator is the olympic average allocation. As it is explained in [31] for the HOWA operator, we have to distinguish between two cases. In the first case, where $|W| < n - 2m$, we allocate the weights as $w_j = |W|/(n - 2m)$ for $j = m + 1$ to $n - m$, and $w_j = 0$ for $j = 1$ to m and for $j = n - m + 1$ to n. In the second case, where $|W| \geq n - 2m$, we allocate the weights as $w_j = 1$ for $j = m + 1$ to $n - m$ and $w_{m+1-j} = w_{n-m+j} = [1 \wedge ([(|W| - (n - 2m)) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$ for $j = 1$ to m.

The last type of IHOWA operator that we will consider is the Arrow-Hurwicz aggregation [2]. Note that the usual aggregation of this method uses $\lambda\text{Max}\{a_i\} + (1 - \lambda)\text{Min}\{a_i\}$. For the IHOWA operator we shall assume that $|W| = q$ and dimension n. We define the weights in two directions, push up and push down. First, we calculate $\omega_j = (1$

$\wedge (\lambda q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n and $\hat{w}_{n-j+1} = (1 \wedge ((1 - \lambda)q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n. Then, we define the weights as $w_i = \omega_i + \hat{w}_i$.

By using a similar methodology as for the DIHOWA operators, we could also analyse different types of AIHOWA operators such as the AOWA operator, the AIOWA operator, the AHOWA operator, the total operator, the weighted average or the minimum criteria. Other families of AIHOWA operators could be obtained such as the push up allocation, the push down allocation, the uniform allocation, the median type, the step-AIHOWA type, the olympic AIHOWA average and the Arrow-Hurwicz AIHOWA aggregation. These families are related to the descending version by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DIHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AIHOWA operator

4. Uncertain heavy OWA operator

4.1. Introduction

The uncertain heavy OWA (UHOWA) operator is an extension of the OWA operator. It consists in combining in the same operator the characteristics of the UOWA operator with the characteristics of the HOWA operator. Then, the main advantage of this operator is that it uses uncertain information with a weighting vector that ranges from the UOWA operator to the uncertain total operator.

Definition 7. Let Ω be the set of interval numbers. An UHOWA operator of dimension n is a mapping *UHOWA*: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$UHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{14}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers. We should note that for the ordering of the interval numbers, we should use one of the traditional criteria used for comparing interval numbers as for example, the method proposed in [25].

Analysing the reordering step, we see that we have to distinguish between the Descending UHOWA (DUHOWA) operator and the Ascending UHOWA (AUHOWA) operator. Note that the weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUHOWA operator.

If we want to use a vector notation in the UHOWA operator, we should assume that B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j and we should call it the ordered argument vector. We should also assume that W^T is the transpose of the weighting vector, then, we could express the UHOWA operator both for the DUHOWA and the AUHOWA operator as:

$$UHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = W^T B \tag{15}$$

The UHOWA operator is monotonic and commutative both for the DUHOWA and the AUHOWA operator. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$ for all i, then, $UHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) \geq UHOWA(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $UHOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = UHOWA(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$, where $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n)$. Note that this operator is bounded by the uncertain minimum and the uncertain total operator.

In this case, it is also interesting to analyse the magnitude of the weighting vector $|W|$. Following the same methodology as in the HOWA operator, we can define the magnitude $|W|$ for the UHOWA operator as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be seen, if $\beta = 1$, we get the uncertain total operator and if $\beta = 0$, we get the usual UOWA operator. In the UHOWA operator, it is also possible to look to the negation of β. Then, $\rho = 1 - \beta$. If $\rho = 0$, we get the uncertain total operator and if $\rho = 1$, we get the usual UOWA operator.

As it has been explained in the HOWA operator, once analysed the magnitude of $|W|$, it is possible to study the measures used for characterizing the weighting vector. For the UHOWA operator, we get the following. The first measure, the attitudinal character, can be defined as:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{16}$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Note that the formulation is the same than the HOWA operator because the uncertain arguments do not affect the result. Also note that the uncertain total operator has $\alpha(W) = 0.5$. The second measure, the entropy of dispersion, can be defined as:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|} \right) \tag{17}$$

Note that for the uncertain total operator, $H(W) = -\ln n$. For the third measure, the divergence of W, we will use:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{18}$$

If $|W| = n$, we get the divergence for the uncertain total operator and it is the same divergence than the average. That is, $Div(W) = (1/12)[(n + 1)/(n - 1)]$. Also note that these three measures are reduced to the usual definitions [27,31] when $|W| = 1$.

These three measures could also be studied with the AUHOWA operator. Then, for the first measure we get:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{j-1}{n-1} \right) w_j \tag{19}$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Note that the uncertain total operator has also $\alpha(W) = 0.5$. For the second measure, the result is the same as with DUHOWA operators although the reordering step is different. For the third measure, we get:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j\left(\frac{j-1}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{20}$$

If $|W| = n$, we get the divergence for the uncertain total operator and it is the same divergence than the average. Also note that if $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$, the $Div(W) = 0$.

4.2. Families of UHOWA operators

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of UHOWA operators. For example, we can obtain the UOWA operator, the uncertain total operator, the uncertain weighted average and the uncertain minimum. The UOWA operator is obtained when $\beta = 0$. The uncertain total operator is found when $\beta = 1$. The uncertain weighted average is obtained when the ordered position of the b_j is the same than the ordered position of the a_i and $\beta = 0$. Note that if $\beta \neq 0$, the uncertain weighted average becomes the uncertain heavy weighted average. Finally, the uncertain minimum is found when $w_n = 1$, $w_j = 0$, for all $j \neq n$ and $\beta = 0$.

Another group of particular cases of the UHOWA operator can be developed following the same methodology that Yager [31] used for the HOWA operator. The first type of UHOWA operator we will study is the uncertain push up allocation. In this case, we get $w_j = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Note that if $\beta = 0$, $W_{pu} = W^*$, $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$, then, $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W^*) = 1$. If $\beta = 1$, $W_{pu} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

The second type of UHOWA operator we will study is the dual allocation of the push up. This type is known as the uncertain push down allocation and it is defined as $w_{n-j+1} = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. Note that if $\beta = 0$, $W_{pd} = W_*$, $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq$ n, then, $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_*) = 0$. If $\beta = 1$, $W_{pd} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

A further interesting allocation is the uncertain uniform allocation. In this case, we assign the weights as $w_j = |W|/n$ for all j. In this allocation, we always find a neutral attitudinal character $\alpha(W) = 0.5$. Note that if $\beta = 0$, we get the uncertain arithmetic mean.

The next type of allocation that we will consider is the uncertain median type allocation. In this case, we have to distinguish between the case when n is even or odd. If n is even, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+j} = w_{a+1-j} = [1 \wedge ((|W| - 2(j - 1))/2)] \vee 0$. If n is odd, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+1} = 1$ and $w_{a+1-j} = w_{a+1+j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. As the weighting vector is symmetric, $\alpha(W) = 0.5$. Note that if $\beta = 0$, we get the UOWA median and if $\beta = 1$, we get the total operator.

A further type of UHOWA operator that we will study is the step-UHOWA operator. In this case, the weighting vector is focused at the Kth largest element. That is, assuming $b = \text{Min}[(K - 1), (n - K)]$, we allocate the weights for j to b as $w_K = 1$ and $w_{K+j} = w_{K-j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. If $b = K - 1$, $K - 1 < n - K$, then, $w_{j+2K-1} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. If $b = n - K$, $K - 1 > n - K$, then, $w_{2K-n-j} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. Note that if $K = 1$, the step-UHOWA becomes the uncertain push up allocation, if $K = n$, the step-UHOWA becomes the uncertain push down allocation and if $K = (n + 1)/2$, it becomes the uncertain median allocation.

Another type of allocation of the UHOWA operator is the uncertain olympic average allocation. In this type of allocation, we have to distinguish between two cases. In the first case, where $|W| < n - 2m$, we allocate the weight as $w_j = |W|/(n - 2m)$ for $j = m + 1$ to $n - m$, and $w_j = 0$ for $j = 1$ to m and for $j = n - m + 1$ to n. In the second case, where $|W| \geq n - 2m$, we allocate the weights as $w_j = 1$ for $j = m + 1$ to $n - m$ and $w_{m+1-j} = w_{n-m+j} = [1 \wedge ([(|W| - (n - 2m)) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$ for $j = 1$ to m.

Finally, the last type of allocation we will consider for the UHOWA operator is the Arrow-Hurwicz aggregation [2]. Assuming that $|W| = q$ and dimension n, we define the weights in two directions, push up and push down. First, we calculate $\omega_j = (1 \wedge (\lambda q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n and $\hat{w}_{n-j+1} = (1 \wedge ((1 - \lambda)q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n. Then, we define the weights as $w_i = \omega_i + \hat{w}_i$. Note that $\omega_j = 0$ for all $j \geq \lambda q + 1 \geq \lambda|W| + 1$ and $\hat{w}_j = 0$ for $j \leq n - (1 - \lambda)q \leq n - |W| + \lambda|W|$.

If we use a similar methodology for the AUHOWA operator as it has been shown above for the DUHOWA operator, we can obtain a wide range of special cases of AUHOWA operators by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUHOWA operator. For example, we could analyse the AUOWA operator, the uncertain total operator, the uncertain weighted average and the minimum criteria. Other types of AUHOWA operators that could be used are the uncertain push up allocation, the uncertain push down, the uncertain uniform allocation, the uncertain median type, the step-AUHOWA, the olympic AUHOWA and the Arrow-Hurwicz AUHOWA aggregation.

5. Uncertain induced heavy OWA operator

5.1. Introduction

The uncertain induced heavy OWA (UIHOWA) operator represents also an extension of the OWA operator. It consists in using in the same operator the characteristics of the UOWA operator, the characteristics of the IOWA operator and the characteristics of the HOWA operator. In general, this operator uses uncertain information with an inducing order represented by an inducing order variable u_i and a sum of the weights that can range from 1 to n. Then, the main advantage of this operator is that it is more complete than the IHOWA operator because it represents the information with interval numbers. Note that the IHOWA operator is a particular case of the UIHOWA when the interval numbers are reduced to exact numbers.

Definition 8. Let Ω be the set of interval numbers. An UIHOWA operator of dimension n is a mapping $UIHOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that $w_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is between $[1, n]$, then:

$$UIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{21}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the OWA pair $\langle u_i,\tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is an interval number. In this case, it is not necessary to establish a criterion for comparing interval numbers because the reordering of the arguments is developed with the order inducing variables.

Analysing the reordering step, we can distinguish between the Descending UIHOWA (DUIHOWA) operator and the Ascending UIHOWA (AUIHOWA) operator. Note that these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUIHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUIHOWA operator. As it has been explained in Section 3 for the IHOWA operator, it is also possible to study this relation by looking to the inducing variables.

Note that it is also possible to express the UIHOWA operator in vector notation. Then, if we assume that B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j, called the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, we can express the UIHOWA operator as:

$$UIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = W^T B \tag{22}$$

Note that it is possible to use a descending or an ascending order in the vector notation of the UIHOWA operator.

The UIHOWA operator is commutative and monotonic both for the DUIHOWA and the AUIHOWA operator. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $UIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = UIHOWA(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle)$, where $(\tilde{e}_1,\ldots, \tilde{e}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1,\ldots, \tilde{a}_n)$. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$ for all i, then, $UIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) \geq UIHOWA(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_1\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_1\rangle)$. Note that the UIHOWA operator is also bounded by the uncertain minimum and the uncertain total operator.

Another issue to consider is the magnitude of the weighting vector $|W|$ of the UIHOWA operator. As this feature does not depend upon the uncertain arguments, the formulation is the same than the IHOWA operator. That is: $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. Note that if $\beta = 1$, we get the uncertain total operator and if $\beta = 0$, we get the usual UIOWA operator of Xu [23]. Note also that it is possible to look to the negation of β.

A common problem when analyzing induced aggregation operators is the reordering of ties in the arguments. As it has been explained for the IHOWA operator, we recommend to follow the policy developed by Yager and Filev in [37] where they replace each argument of the tied UIHOWA pairs $\langle u_i,a_i\rangle$ and $\langle u_j,a_j\rangle$, by their uncertain average. Note that other policies could be used when dealing with ties. For example, when replacing the arguments of the tied order inducing variables, we could use the weighted average instead of the simple average.

As it has been explained in the IHOWA operator, the values used for the order inducing variables can be selected from a space such that the only requirement is to have a linear ordering. Then, it is possible to use different kinds of attributes that permit, for example, to mix numbers with words in the aggregations. Note that in this case, it is also possible to use the implicit lexicographic ordering associated with words such as the ordering of the dictionaries.

5.2. Families of UIHOWA operators

Different families of UIHOWA operators could be used by choosing a different manifestation in the weighting vector. First, we will consider the cases when the UIHOWA operator becomes the UOWA operator, the UIOWA operator, the UHOWA operator, the uncertain total operator, the uncertain weighted average and the uncertain minimum. The UOWA operator is found when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i and $\beta = 0$. The UIOWA operator is obtained when $\beta = 0$. The

UHOWA operator is found when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i. The uncertain total operator is obtained when $\beta = 1$. The uncertain weighted average is found when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument a_i and $\beta = 0$. Finally, the uncertain minimum is obtained when $w_p = 1$, $w_j = 0$, for all $j \neq p$, $u_p = \text{Min}\{a_i\}$ and $\beta = 0$.

In the following, we will study another group of particular cases of UIHOWA operators based on the HOWA operator developed by Yager [31]. The first type we will study is the uncertain push up allocation. In this case, we have $w_j = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. The problem here is that the weights w_j are not associated with the attitudinal character $\alpha(W)$, so we cannot use this measure in the analysis. The only case where we can use it is when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i because then, the UIHOWA operator becomes the UHOWA operator. Then, if $\beta = 0$, $W_{pu} = W^*$, $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$, then, $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W^*) = 1$. If $\beta = 1$, $W_{pu} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

The second type of allocation we will study is the dual allocation of the uncertain push up. This type is known as the uncertain push down allocation and it is formulated as $w_{n-j+1} = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. In this case, we find the same problem than the push up allocation about the measure $\alpha(W)$.

A further type of allocation for the UIHOWA operator is the uncertain uniform allocation. In this case, we assign the weights as $w_j = |W|/n$ for all j. In this allocation we always find a neutral attitudinal character $\alpha(W) = 0.5$. Note that if $\beta = 0$, we get the uncertain arithmetic mean.

Another possible allocation for the UIHOWA operator is the uncertain median type allocation. As it has been explained in the IHOWA operator, we have to distinguish between the cases when n is even or odd. If n is even, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+j} = w_{a+1-j} = [1 \wedge ((|W| - 2(j - 1))/2)] \vee 0$. If n is odd, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+1} = 1$ and $w_{a+1-j} = w_{a+1+j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$.

The next type of allocation we will study is the step-UIHOWA aggregation. In this case, the weighting vector is focused at the Kth largest element. Assuming that $b = \text{Min}[(K - 1), (n - K)]$, we allocate the weights for j to b as $w_K = 1$ and $w_{K+j} = w_{K-j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$. If $b = K - 1$, $K - 1 < n - K$, then, $w_{j+2K-1} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. If $b = n - K$, $K - 1 > n - K$, then, $w_{2K-n-j} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$.

Another special type of allocation for the UIHOWA operator is the uncertain olympic average allocation. As it is explained in the HOWA operator [31], we have to distinguish between two cases. In the first case, where $|W| < n - 2m$, we allocate the weight as $w_j = |W|/(n - 2m)$ for $j = m + 1$ to $n - m$, and $w_j = 0$ for $j = 1$ to m and for $j = n - m + 1$ to n. In the second case, where $|W| \geq n - 2m$, we allocate the weights as $w_j = 1$ for $j = m + 1$ to $n - m$ and $w_{m+1-j} = w_{n-m+j} = [1 \wedge ([(|W| - (n - 2m)) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$ for $j = 1$ to m.

The last type of allocation we will consider for the IHOWA operator is the Arrow-Hurwicz aggregation. Assuming that $|W| = q$ and dimension n, we define the weights in two directions, push up and push down. First, we calculate $\omega_j = (1 \wedge (\lambda q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n and $\hat{w}_{n-j+1} = (1 \wedge ((1 - \lambda)q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n. Then, we define the weights as $w_i = \omega_i + \hat{w}_i$.

By using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUIHOWA operator and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUIHOWA operator, we can also study a wide range of AUIHOWA operators such as the AUOWA operator, the AUIOWA operator, the AUHOWA operator, the uncertain total operator, the uncertain weighted average, the uncertain minimum, the uncertain push up allocation, the uncertain push down allocation, the uncertain uniform allocation, the uncertain median type, the step-AUIHOWA type, the olympic AUIHOWA average and the Arrow-Hurwicz AUIHOWA aggregation.

6. Numerical example

In the following, we present a numerical example of the new aggregation operators in the selection of strategies. Note that other applications could be developed such as the selection of financial products [12], the selection of investments [13], etc. The motivation for using heavy aggregation operators is the possibility of using independent information between the experts. That is to say, some part of the information given by one expert has not been considered by the others and so on. Then, the aggregation of the information cannot be developed with an average because the expected result would be much lower than the real result. The solution for this problem consists in calculating the percentage of independent information and increasing the weighting vector in this percentage. Obviously, by doing this, we are allowing the weighting vector to be higher than one.

Note also that we will use: $(a_1 + 2a_2 + a_3)/4$; for ranking the interval numbers in the aggregation and if there is still a tie, we will use a pessimistic point of view.

Assume that a company is analysing its general strategy for the next year and it considers five possible alternatives.

The company has brought together a group of experts in order to solve the problem. Each expert gives its opinion about the expected benefits coming from each strategy. The results are shown in Table 1.

Table 1
Uncertain payoff matrix.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1	(30,40,50)	(60,70,80)	(40,50,60)	(50,60,70)	(50,60,70)
A_2	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)	(50,60,70)	(60,70,80)
A_3	(20,30,40)	(50,60,70)	(70,80,90)	(30,40,50)	(50,60,70)
A_4	(70,80,90)	(10,20,30)	(20,30,40)	(60,70,80)	(50,60,70)
A_5	(30,40,50)	(30,40,50)	(40,50,60)	(50,60,70)	(50,60,70)

In this analysis, each expert has different information about the consequences of each strategy in the market. Then, each expert has focussed in different parts of the market. Due to this some part of the information given by the experts is independent from the other ones. In other words, the expected result given by each expert has not included the whole market. Therefore, the expected result should be higher if it includes all the market.

Initially, the group of experts has established the attitudinal character of the company and they assume the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). When using order inducing variables, they assume the following results shown in Table 2.

Table 2: Order inducing variables.

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1	12	16	19	10	17
A_2	14	18	23	12	11
A_3	16	15	19	17	21
A_4	22	18	21	14	19
A_5	17	13	18	21	15

After careful analysis, the experts believe that the independent information will increase their results in 50%. That is, the weighting vector W, instead of being 1, it will be 1.5 and it will have the following values: W^* = (0.15, 0.3, 0.3, 0.3, 0.45).

Analysing the aggregation, first, we will consider the results obtained when using the UHOWA operator. We will use the uncertain heavy average (UHA), the uncertain weighted heavy average (UWHA), the UHOWA and the AUHOWA operator. These results are presented in Table 3.

Table 3: Aggregated results 1.

	UHA	UHWA	UHOWA	AUHOWA
A_1	(69,84,99)	(77,92,107)	(64.5,79.5,94.5)	(73.5,88.5,103.5)
A_2	(69,84,99)	(72,87,102)	(64.5,79.5,94.5)	(73.5,88.5,103.5)
A_3	(66,81,96)	(60.5,75.5,90.5)	(58.5,73.5,88.5)	(73.5,88.5,103.5)
A_4	(63,78,93)	(60,75,90)	(54,69,84)	(72,87,102)
A_5	(60,75,90)	(63,78,93)	(57,72,87)	(63,78,93)

Now, we are going to consider the results obtained when the heavy aggregation is transformed in the usual one. We will consider the UOWA, the AUOWA, the UIOWA and the AUIOWA operator. The results are shown in Table 4.

Table 4: Aggregated results 2.

	UOWA	AUOWA	UIOWA	AUIOWA
A_1	(43,53,63)	(49,59,69)	(47,57,67)	(45,55,65)
A_2	(43,53,63)	(49,59,69)	(49,59,69)	(43,53,63)
A_3	(39,49,59)	(49,59,69)	(44,54,64)	(44,54,64)
A_4	(36,46,56)	(48,58,68)	(41,51,61)	(43,53,63)
A_5	(38,48,58)	(42,52,62)	(38,48,58)	(42,52,62)

Next, we will consider the results with the UIHOWA operator. We will use the UIHOWA, the AUIHOWA, the olympic UIHOWA and the median UIHOWA allocation. The results are presented in Table 5.

Table 5: Aggregated results 3.

	UIHOWA	AUIHOWA	Olympic	Median
A_1	(70.5,85.5,100.5)	(67.5,82.5,97.5)	(70,85,100)	(80,95,110)
A_2	(73.5,88.5,103.5)	(64.5,79.5,94.5)	(70,85,100)	(65,80,95)
A_3	(66,81,96)	(66,81,96)	(60,75,90)	(52.5,67.5,82.5)
A_4	(61.5,76.5,91.5)	(64.5,79.5,94.5)	(55,70,85)	(57.5,72.5,87.5)
A_5	(57,72,87)	(63,78,93)	(60,75,90)	(52.5,67.5,82.5)

Finally, we will develop an ordering of the strategies depending on the aggregation operator used. The results are shown in Table 6.

Table 6: Ordering of the strategies.

	Ordering		Ordering
UHA	$A_1=A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_5$	UIOWA	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_5$
UHWA	$A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_4$	AUIOWA	$A_1 \succ A_3 \succ A_2=A_4 \succ A_5$
UHOWA	$A_1=A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$	UIHOWA	$A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_5$
AUHOWA	$A_1=A_2=A_3 \succ A_4 \succ A_5$	AUIHOWA	$A_1 \succ A_3 \succ A_2=A_4 \succ A_5$
UOWA	$A_1=A_2 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4$	Olympic-UIHOWA	$A_1=A_2 \succ A_3=A_5 \succ A_4$
AUOWA	$A_1=A_2=A_3 \succ A_4 \succ A_5$	Median-UIHOWA	$A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3=A_5$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the strategies is different.

7. Conclusions

In this paper, we have suggested three new extensions of the OWA operator. First, we have reviewed the main concepts of some relevant aggregation operators for the analysis such as the OWA operator, the IOWA operator, the HOWA operator and the UOWA operator. Then, we have introduced the three new extensions. The first extension that we have developed is the IHOWA operator and its main characteristic is that it uses order inducing variables in the HOWA operator. The second extension that we have introduced is the UHOWA operator with the main characteristic that it uses uncertain information in the HOWA operator. The last extension that we have developed is the UIHOWA operator and its main characteristic is that it uses order inducing variables with uncertain information in the arguments of the HOWA operator. For the three extensions, we have first introduced them giving their definition and some of its main properties. Then, we have studied different particular cases such as the push up allocation, the push down allocation, the uniform allocation, the median type, the step-HOWA aggregation, the olympic average and the Arrow-Hurwicz allocation. We have also developed a numerical example where we have seen the applicability of the new approach.

Acknowledgements

We would like to thank the anonymous referees for their valuable comments that have improved the quality of the paper.

References

[1] B.S. Ahn, The Uncertain OWA Aggregation with Weighting Functions Having a Constant Level of Orness, Internat. J. Intell. Systems 21 (2006) 469-483.

[2] K.J. Arrow, L. Hurwicz, An optimality criterion for decision making under ignorance, in: C.F. Carter, J.L. Ford (Eds.), Uncertainty and Expectations in Economics, Kelley, New Jersey, 1972.

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] S.J. Chen, S.M. Chen, A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, Cybernetics and Systems 34 (2003) 109-137.

[5] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, Internat. J. Intell. Systems 19 (2004) 233-255.

[6] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Rationality of induced ordered weighted operators based on the reliability of the source of information in group decision making, Kybernetika 40 (2004) 121-142.

[7] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, S. Alonso, Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations, European J. Oper. Res. 182 (2007), 383-399.

[8] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Trans. Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.

[9] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, Internat. J. Intell. Systems 18 (2003) 689-707.

[10] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, IEEE Trans. Fuzzy Systems 15 (2007), 863-877.

[11] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Trans. Systems Man Cybern. B 37 (2007) 176-189.

[12] J.M. Merigó, M. Casanovas, Decision making using maximization of negret, Internat. J. Computational Intelligence 4 (2007) 171-178.

[13] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Econom. Rev. 12 (2007) 35-50.

[14] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression, Internat. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems 5 (1997) 429-436.

[15] H.B. Mitchell, P.A. Schaefer, Multiple priorities in an induced ordered weighted averaging operators, Internat. J. Intell. Systems 15 (2000) 317-327.

[16] R.E. Moore, Interval Analysis, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[17] G. Pasi, R. R. Yager, Modeling the concept of majority opinion in group decision making, Inform. Sci. 176 (2006) 390-414.

[18] P.A. Schaefer, H.B. Mitchell, A generalized OWA operator, Internat. J. Intell. Systems 14 (1999) 123-143.

[19] V. Torra, Information Fusion in Data Mining, Springer, New York, 2002.

[20] Z.S. Xu, Uncertain linguistic aggregation operators based approach to multiple attribute group decision making under uncertain linguistic environment, Inform. Sci. 168 (2004) 171-184.
[21] Z.S. Xu, Extended IOWG operator and its use in group decision making based on multiplicative linguistic preference relations, American J. Applied Sciences 2 (2005) 633-643.
[22] Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, Decision Support Systems 41 (2006) 488-499.
[23] Z.S. Xu, Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, Inform. Fusion 7 (2006) 231-238.
[24] Z.S. Xu, On generalized induced linguistic aggregation operators, Internat. J. General Systems 35 (2006) 17-28.
[25] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Uncertain OWA Operator, Internat. J. Intell. Systems 17 (2002) 569-575.
[26] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, Internat. J. Intell. Systems 18 (2003) 953-969.
[27] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Trans. Systems Man Cybern. B 18 (1988) 183-190.
[28] R.R. Yager, On generalized realizations in uncertain environments, Theory and Decision 33 (1992) 41-69.
[29] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[30] R.R. Yager, On weighted median aggregation, Internat. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems 2 (1994) 101-113.
[31] R.R. Yager, Heavy OWA Operators, Fuzzy Optim. Decision Making 1 (2002) 379-397.
[32] R.R. Yager, The induced fuzzy integral aggregation operator, Internat. J. Intell. Systems 17 (2002) 1049-1065.
[33] R.R. Yager, Induced aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003) 59-69.
[34] R.R. Yager, Monitored heavy fuzzy measures and their role in decision making under uncertainty, Fuzzy Sets and Systems 139 (2003) 491-513.
[35] R.R. Yager, Choquet aggregation using order inducing variables, Internat. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Systems 12 (2004) 69-88.
[36] R.R. Yager, An extension of the naive Bayesian classifier, Inform. Sci. 176 (2006) 577-588.
[37] R.R. Yager, D.P. Filev, Induced ordered weighted averaging operators, IEEE Trans. Systems Man Cybern. B 29 (1999) 141-150.
[38] R.R. Yager, J. Kacprzyck, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[39] L.A. Zadeh, Fuzzy logic = computing with words, IEEE Trans. Fuzzy Systems 4 (1996) 103-111.
[40] L.A. Zadeh, Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic, Fuzzy Sets and Systems 90 (1997) 111-127.

14.2.18. Artículo de revista 18. – Aceptado en *Information Sciences*

The induced generalized OWA operator

José M. Merigó[8], Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We present the induced generalized ordered weighted averaging (IGOWA) operator. It is a new aggregation operator that generalizes the OWA operator by using the main characteristics of two well known aggregation operators: the generalized OWA and the induced OWA operator. Then, this operator uses generalized means and order inducing variables in the reordering process. With this formulation, we get a wide range of aggregation operators that include all the particular cases of the IOWA and the GOWA operator, and a lot of other cases such as the induced ordered weighted geometric (IOWG) operator and the induced ordered weighted quadratic averaging (IOWQA) operator. We further generalize the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-IOWA operator. Finally, we also develop a numerical example of the new approach in a financial decision making problem.

Keywords: Aggregation operator; OWA operator; Generalized mean; Quasi-arithmetic mean; Decision making.

1. Introduction

In the literature, we find a wide range of aggregation operators for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator [29]. It provides a parameterized family of aggregation operators that include the maximum, the minimum and the average, as special cases. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications [1-8,11-45].

In [43], Yager and Filev, motivated by the work of Mitchell and Estrakh [20], developed an extension of the OWA operator called induced ordered weighted averaging (IOWA) operator. The difference is that the reordering step is not developed with the values of the arguments. In this case, the reordering step is induced by another mechanism such that the ordered position of the arguments depends upon the values of their associated order inducing variables. In the last years, the IOWA operator has been receiving increasing attention as it is seen in the different works developed about it such as [7-8,12-13,28,34-35,37].

Another interesting extension is the generalized OWA (GOWA) operator [15,38] that generalizes the OWA operator by using generalized means. The generalized mean [9-10] generalizes a wide range of mean operators such as the arithmetic mean,

[8] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

the geometric mean and the quadratic mean. Then, with the GOWA operator, it is possible to generalize a wide range of OWA operators such as the OWA itself, the ordered weighted geometric (OWG) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. In [3], Beliakov developed a further extension of the GOWA operator by using quasi-arithmetic means. Then, he obtained the Quasi-OWA operator developed by [11]. Further studies on these generalizations are found in [4-5].

The objective of this paper is to introduce the induced generalized OWA (IGOWA) operator. It is an extension of the OWA operator that uses the main characteristics of the IOWA and the GOWA operator. That is to say, it uses order inducing variables in the reordering process and generalized means. Then, we can obtain a generalization that includes the IOWA operator and its particular cases, and a lot of other situations such as the induced OWG (IOWG) operator [7,28], the induced OWQA (IOWQA) operator and the induced OWHA (IOWHA) operator. Note that this generalization also includes the GOWA operator and its special cases such as the OWA, the generalized mean (GM), the weighted generalized mean (WGM), etc. We will study different properties and families of this operator such as the olympic-IGOWA, the median-IGOWA, the S-IGOWA, etc.

We will further generalize the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. Then, we will get the Quasi-IOWA operator. Note that the Quasi-IOWA can be seen as an extension of the Quasi-OWA operator that uses order inducing variables in the reordering process. With this generalization, we will get as special cases, the IGOWA operator and a lot of other situations such as the exponential IOWA, the trigonometric IOWA, the radical IOWA, etc.

We will also develop an application of the new approach. We will focus on a financial decision making problem about selection of investments. Note that the main advantage of the IGOWA operator in decision making is that it includes a lot of particular cases that can be used for taking the decision. Then, it is possible to consider different types of aggregations that may lead to different decisions. Note that this situation is also found with the OWA operator but with the IGOWA, we have more possibilities. Note also that other decision making applications could be developed such as the selection of financial products, human resource management, strategic decision making, product management, etc.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts such as the OWA, the IOWA and the GOWA operator. In Section 3, we present the IGOWA operator. Section 4 analyzes different families of IGOWA operators. In Section 5 we present the Quasi-IOWA operator. In Section 6 we develop an application of the new approach. Finally, Section 7 summarizes the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we will briefly describe the OWA operator, the IOWA operator and the GOWA operator.

2.1. OWA operator

The OWA operator was introduced by Yager in [29] and it provides a parameterized family of aggregation operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator [30]. The OWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent [29].

2.2. IOWA operator

The IOWA operator was introduced by Yager and Filev [43] and it represents an extension of the OWA operator. Its main difference is that the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is developed with order inducing variables. The IOWA operator also includes as particular cases the maximum, the minimum and the average criteria. It can be defined as follows.

Definition 2. An IOWA operator of dimension n is a mapping $IOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (2)$$

where b_j is the a_i value of the IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

Note that it is possible to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator. The IOWA operator is also monotonic, bounded, idempotent and commutative [43].

2.3. GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced in [11,38]. It generalizes the OWA operator by using generalized means. It can be defined as follows.

Definition 3. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \qquad (3)$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

In this case, it is also possible to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA (or GOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in [11,38], the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent both for the DGOWA and the AGOWA operator. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and the weighted generalized mean. Note that the weighted generalized mean is obtained when $j = i$, for all i and j, where j is the jth argument of the b_j and i is the ith argument of the a_i.

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator [29], the ordered weighted geometric (OWG) operator [6,27], the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator [38] and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator [38]. When $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, the OWG operator. When $\lambda = -1$, the OWHA operator. And when $\lambda = 2$, the OWQA operator.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the GOWA operator. In [38], Yager defined it as:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$ and for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$.

If we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$ [3], then, the GOWA operator becomes the Quasi-OWA operator [11]. It can be formulated as follows.

Definition 4. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping QOWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0, 1]$, then:

$$\text{QOWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \, g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

3. The induced generalized OWA operator

The induced generalized OWA (IGOWA) operator represents an extension of the GOWA operator. The main difference between them is that the reordering step of the IGOWA operator is not developed with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is induced by another mechanism represented as u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the order inducing variable u_i. Then, we get a more general formulation of the reordering process that it is able to consider complex situations.

Definition 5. An IGOWA operator of dimension n is a mapping $IGOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where b_j is the a_i value of the IGOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, a_i is the argument variable and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Example 1. Assume the following collection of arguments with their respective inducing variables $\langle u_i,a_i\rangle$: $\langle 7, 25\rangle$, $\langle 2, 40\rangle$, $\langle 10, 20\rangle$, $\langle 3, 60\rangle$. If we assume that W = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3) and $\lambda = 1$, then, the aggregation process is:

$$0.2 \times 20 + 0.2 \times 25 + 0.3 \times 60 + 0.3 \times 40 = 39$$

As we can see, the order inducing variables u_i reorder the argument variables a_i in a decreasing way.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending induced generalized OWA (DIGOWA) operator and the ascending induced generalized OWA (AIGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DIGOWA (or IGOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AIGOWA operator.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the IGOWA operator can be expressed as:

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the IGOWA operator can be expressed as:

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

The IGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). *Assume f is the IGOWA operator, if $a_i \geq e_i$, for all a_i, then*:

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq f(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle) \tag{9}$$

Proof. Let

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

$$f(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

Since $a_i \geq e_i$, for all a_i, it follows that, $a_i \geq e_i$, and then

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq f(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle) \quad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). *Assume f is the IGOWA operator, then*:

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = f(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle) \tag{12}$$

where $(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle)$ *is any permutation of the arguments* $(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle)$.

Proof. Let

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{13}$$

$$f(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{14}$$

Since $(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle)$ is a permutation of $(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle)$, we have $a_j = e_j$, for all j, and then

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = f(\langle u_1,e_1\rangle, \ldots, \langle u_n,e_n\rangle) \quad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). *Assume f is the IGOWA operator, if $a_i = a$, for all a_i, then*:

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = a \tag{15}$$

Proof. Since $a_i = a$, for all a_i, we have

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{16}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = a \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). *Assume f is the IGOWA operator, then*:

$$\mathrm{Min}\{a_i\} \leq f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \leq \mathrm{Max}\{a_i\} \tag{17}$$

Proof. Let max$\{a_i\} = c$, and min$\{a_i\} = d$, then

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(c^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{18}$$

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{19}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \leq c \tag{20}$$

$$f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \geq d \tag{21}$$

Therefore,

$$\mathrm{Min}\{a_i\} \leq f(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) \leq \mathrm{Max}\{a_i\} \qquad \blacksquare$$

An interesting issue when analysing induced aggregation operators is the problem of ties in the reordering step. In order to solve this problem, we recommend to follow the policy developed by Yager and Filev [43] where they replace each argument of the tied IOWA pair by their average. For the IGOWA operator, instead of using the arithmetic mean, we will replace each argument of the tied IGOWA pair by its generalized mean. Then, depending on the parameter of λ, we will use a different type of mean to replace the tied arguments.

As it is explained in [43] for the IOWA operator, when studying the order inducing variables of the IGOWA operator, we should note that the values used can be drawn from a space such that the only requirement is to have a linear ordering. Then, it is possible to use different kinds of attributes for the order inducing variables that permit us, for example, to mix numbers with words in the aggregations [43]. For the IGOWA operator, this would mean that we have numerical arguments to be ordered by linguistic order inducing variables. Note that in some situations it is possible to use the implicit lexicographic ordering associated with words such as the ordering of words in dictionaries [43].

The IGOWA operator is a generalization of the IOWA operator. Therefore, the IGOWA operator is applicable to different situations already discussed for the IOWA operator. For example, we could use it for modeling nearest neighbour rule [43], for model building [43] and for the aggregation of complex objects [35]. Other potential applications could be developed for decision making, group decision making, business decisions, etc. Note that in this paper we will develop an application in financial decision making.

4. Families of IGOWA operators

In this Section, we will consider different types of IGOWA operators. We will distinguish between two main classes. The first class will focus on the weighting vector W and the second class on the parameter λ. The main advantage of using these families is that they can be very useful for the decision maker in some specific situations. However, each family is just one particular case. Therefore, they can only be used in some particular cases but they cannot be seen as a general model that can be used in different frameworks.

4.1. Analysing the weighting vector *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the IGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the maximum, the minimum, the generalized mean, the weighted generalized mean and the GOWA operator. Note that these results can be obtained both for the DIGOWA and the AIGOWA operator.

Remark 1: The maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, then, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Max}\{a_i\}$. The minimum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Min}\{a_i\}$, then, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \text{Min}\{a_i\}$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = b_k$, where b_k is the the a_i value of the IGOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the kth largest u_i. The generalized mean is found when $w_j = 1/n$, for all a_i. The weighted generalized mean is obtained if $u_i > u_{i+1}$, for all i, and the GOWA operator is obtained if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i.

Remark 2: Other families of IGOWA operators could be obtained by using a different weighting vector. For example, when $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-IGOWA operator that it is based on the window-OWA operator [31]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, and the initial position of the highest u_i is also the initial position of the highest a_i, then, the window-IGOWA is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, and the initial position of the lowest u_i is also the initial position of the lowest a_i, then, the window-IGOWA becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-IGOWA becomes the generalized mean.

Example 2 (window-IGOWA). Assume a weighting vector of dimension 7 ($n = 7$). If $k = 2$ and $m = 4$, then, the weighting vector to be used in the aggregation is $W = (0, 0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0, 0)$.

Remark 3: If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic induced generalized average that it is based on the olympic average [33]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic induced generalized average is transformed in the IGOWA median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-IGOWA is transformed in the olympic induced generalized average. Also note that the olympic induced generalized average is transformed in the olympic generalized average if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \text{Max}_i\{a_i\}$ and $u_q = \text{Min}_i\{a_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

Example 3 (Olympic-IGOWA). Assume a weighting vector of dimension 7 (n = 7). Then, the weighting vector to be used in the aggregation is W = (0, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2, 0).

Remark 4: Another type of aggregation that could be used is the E-Z IGOWA weights that it is based on the E-Z OWA weights [36]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for j = 1 to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for j = 1 to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n. Note that the E-Z IGOWA weights becomes the E-Z GOWA weights for the first class if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, from j = 1 to k. And for the second class, the E-Z IGOWA weights becomes the E-Z GOWA weights if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, from $j = n - k + 1$ to n.

Example 4 (E-Z IGOWA). Assume that k = 4 and n = 7. For the first class, the weighting vector is: W = (0.25, 0.25, 0.25, 0.25, 0, 0, 0) and for the second class, W = (0, 0, 0, 0.25, 025, 0.25, 0.25).

Remark 5: We note that the generalized median and the weighted generalized median [32] can also be used as induced aggregation operators. For the IGOWA median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument a_i with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i. For the weighted IGOWA median, we select the argument a_i that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5. Note that if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, then, the IGOWA median and the weighted IGOWA median become the GOWA median and the weighted GOWA median respectively.

Example 5 (median-IGOWA). Assume n = 7. Then, the weighting vector to be used is: W = (0, 0, 0, 1, 0, 0, 0).

Remark 6.1: Another interesting family is the S-IGOWA operator based on the S-OWA operator [31,42]. It can be divided in three classes, the “orlike”, the “andlike” and the generalized S-IGOWA operator. The “orlike” S-IGOWA operator is found when $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for all $j \neq p$ with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The “andlike” S-IGOWA operator is found when $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, $u_q = \text{Min}\{a_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for all $j \neq q$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-IGOWA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IGOWA operator becomes the “andlike” S-IGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the “orlike” S-IGOWA operator.

Remark 6.2: Note that it is also possible to consider the usual definition of the S-OWA without using the inducing orders [42]. Then, we get another type of S-IGOWA but it does not take into account the maximum and the minimum arguments. Instead, it takes into account the arguments with the first and the last position according to the order inducing variables. In this case, the generalized S-IGOWA operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IGOWA becomes the "andlike" S-IGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-IGOWA operator.

Example 6 (Generalized S-IGOWA). Assume the IGOWA pairs of the Example 1, α = 0.1 and β = 0.3. Then, the weighting vector to be used in the aggregation is: W = (0.45, 0.15, 0.25, 0.15). If we consider Remark 6.2, then, the weighting vector is: W = (0.25, 0.15, 0.15, 0.45).

Remark 7: Other families of IGOWA operators could be developed such as the weights that depend on the aggregated objects [31]. Note that in these cases, the results obtained with the IGOWA are equal to the ones obtained with the GOWA because the order inducing variables do not affect the final result. For example, we could develop the BADD-IGOWA operator that it is based on the OWA version developed in [31,42].

$$w_j = \frac{b_j^\alpha}{\sum_{j=1}^n b_j^\alpha} \tag{22}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments a_i. Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$. Also note that if $\alpha = 0$, we get the generalized mean and if $\alpha = \infty$, we get the maximum. Another family of IGOWA operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1-b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^n (1-b_j)^\alpha} \tag{23}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments a_i. Note that in this case if $\alpha = 0$, we also get the generalized mean and if $\alpha = \infty$, we get the minimum. A third family of IGOWA operator that depends on the aggregated objects is

$$w_j = \frac{(1/b_j)^\alpha}{\sum_{j=1}^n (1/b_j)^\alpha} \tag{24}$$

where $\alpha \in (-\infty, \infty)$, b_j is the jth largest element of the arguments a_i. In this case, we also get the generalized mean if $\alpha = 0$. If $\alpha = 1$, we obtain the harmonic mean and if $\alpha = \infty$, we get the minimum.

Example 7 (BADD-IGOWA). Assume the IGOWA pairs of the Example 1 and α = 1. Then, the weighting vector obtained is: W = (0.1379, 01724, 0.4137, 0.2758).

Remark 8: A very useful approach for obtaining the weights that it is also applicable for the IGOWA operator is the functional method introduced by Yager [33] for the OWA operator. It can be summarized as follows. Let f be a function f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we obtain the IGOWA weights w_j for j = 1 to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{25}$$

It can easily be shown that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Example 8 (BUM function). Assume $f(x) = x^2$ and $n = 5$. In this case, the weighting vector to be used is: W = (0.04, 0.12, 0.2, 0.28, 0.36).

Remark 9: Another family of aggregation operators that could be used in the IGOWA operator is the centered IGOWA weights. This type of operator has been suggested by Yager [39] for the OWA operator. Following the same methodology, we could say that an IGOWA operator is a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered IGOWA operator. Note that the generalized mean is an example of this particular case of centered IGOWA operator. Another particular situation of the centered IGOWA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered IGOWA operator. For this situation, we find the IGOWA median as a particular case.

Remark 10: A special type of centered IGOWA operator is the Gaussian IGOWA weights which follows the same methodology than the Gaussian OWA weights suggested by Xu [25]. In order to define it, we have to consider a Gaussian distribution $\eta(\mu, \sigma)$ where

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{26}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{27}$$

Assuming that

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{28}$$

we define the IGOWA weights as

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{29}$$

Note that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Example 9 (Gaussian-IGOWA). Assume n = 5. Then, applying the previous equations, we get the following weighting vector: W = (0.1117, 0.2364, 0.3036, 0.2364, 0.1117). As we can see, it is a centered aggregation operator because it accomplishes the conditions explained in Remark 9.

Remark 11: Other families of IGOWA operators could be obtained in the weighting vector following a similar methodology as developed for the OWA operator such as those developed in [1-2,16-17,21-25,40].

4.2. Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ in the IGOWA operator, we obtain another group of particular cases such as the usual IOWA operator, the induced OWG (IOWG) operator [7,28], the induced OWHA (IOWHA) operator and the induced OWQA (IOWQA) operator.

Remark 12: When λ = 1, the IGOWA operator becomes the IOWA operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{30}$$

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the DIOWA operator and the AIOWA operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DIOWA operator has a descending order and the AIOWA operator an ascending order. Note that an example of this case has been given after Definition 5.

Remark 13: When λ = 0, the IGOWA operator becomes the IOWG operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{31}$$

With the DIGOWA operator we obtain the descending IOWG (DIOWG) operator and with the AIGOWA operator, the ascending IOWG (AIOWG) operator.

Example 10 (IOWG). Assume the same collection of IGOWA pairs of the Example 1 and the same weighting vector. If we assume that λ = 0 (IOWG), then, the aggregation process is:

$$IGOWA = 20^{0.2} \times 25^{0.2} \times 60^{0.3} \times 40^{0.3} = 35.7978$$

Remark 14: When $\lambda = -1$, we get the IOWHA operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{32}$$

Note that from a generalized perspective of the reordering step we get the descending IOWHA (DIOWHA) operator and the ascending IOWHA (AIOWHA) operator.

Example 11 (IOWHA). Assume the same information used in Example 1, but now $\lambda = -1$. Then, the aggregation is:

$$IGOWA = \frac{1}{\frac{0.2}{20} + \frac{0.2}{25} + \frac{0.3}{60} + \frac{0.3}{40}} = 32.7868$$

Remark 15: When $\lambda = 2$, we get the IOWQA operator.

$$IGOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{33}$$

In this case, we obtain the descending IOWQA (DIOWQA) operator and the ascending IOWQA (AIOWQA) operator.

Example 12 (IOWQA). Assume the same information used in Example 1, but now $\lambda = 2$. In this case, the aggregation is:

$$IGOWA = \left(0.2 \times 20^2 + 0.2 \times 25^2 + 0.3 \times 60^2 + 0.3 \times 40^2\right)^{1/2} = 42.0119$$

Remark 16: Note that other families could be obtained by using different values in the parameter λ. Note also that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1, where we study different properties and families of the induced aggregation operators.

5. Induced Quasi-OWA operators

As it is explained in [3], a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following a similar methodology, we can suggest a similar generalization of the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. Then, we will get the Quasi-IOWA operator. The main advantage of using this operator is that it provides a more complete generalization because it considers a lot of cases that are not included in the IGOWA operator. It can be defined as follows.

Definition 6. A Quasi-IOWA operator of dimension n is a mapping $QIOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$QIOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{34}$$

where b_j is the a_i value of the Quasi-IOWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable, a_i is the argument variable and $g(b)$ is a general strictly monotone function. As we can see, we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$.

Note that in this case we can also distinguish between descending (Quasi-DIOWA) and ascending (Quasi-AIOWA) orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DIOWA (or Quasi-IOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the Quasi-AIOWA operator.

Note also that all the properties and particular cases commented in the IGOWA operator are also applicable in this generalization. Then, the Quasi-IOWA operator is monotonic, bounded, idempotent and commutative. The problem of ties is solved by replacing the tied arguments by the quasi-arithmetic mean. And different families of Quasi-IOWA operators can be studied such as the olympic-Quasi-IOWA, the S-Quasi-IOWA, the IOWA itself, the IOWQA, etc.

A further interesting aspect is that the Quasi-IOWA operator includes a lot of other particular cases that are not included in the IGOWA operator. For example, we could mention the trigonometric IOWA operator, the exponential IOWA operator and the radical IOWA operator.

The trigonometric IOWA is found when $g_1(t) = \sin((\pi/2)\ t)$, $g_2(t) = \cos((\pi/2)\ t)$ and $g_3(t) = \tan((\pi/2)\ t)$ are the generating functions. Then, the trigonometric IOWA functions are:

$$QIOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \sin\left(\frac{\pi}{2} b_j\right)\right) \tag{35}$$

$$QIOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \frac{2}{\pi}\arccos\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \cos\left(\frac{\pi}{2} b_j\right)\right) \tag{36}$$

$$QIOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tan\left(\frac{\pi}{2} b_j\right)\right) \tag{37}$$

The exponential IOWA is found when $g(t) = \gamma^t$, if $\gamma \neq 1$, and $g(t) = t$, if $\gamma = 1$. Then, the exponential IOWA operator is: $\log_{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \gamma^{b_j}\right)$, if $\gamma \neq 1$, and the IOWA if $\gamma = 1$.

The radical IOWA is found if $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, and the generating function is $g(t) = \gamma^{1/t}$. Then, the radical IOWA operator is:

$$QIOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle, \ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \left(\log_\gamma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \gamma^{1/b_j}\right)\right)^{-1} \tag{38}$$

Finally, note that in these cases it is also possible to study their properties and different particular cases as it has been explained in Section 3 and 4.1.

6. Numerical example

In the following, we are going to develop an illustrative example of the new approach in a decision making problem. We will study an investment selection problem where an investor is looking for an optimal investment. Note that other decision making applications could be developed such as the selection of financial products [19], human resource management, strategic decision making, product management, etc.

We will analyze different particular cases of the IGOWA operator such as the AM, the WA, the OWA, the AOWA, the IOWA, the AIOWA, the QA, the IOWG, the IOWQA, the step-IOWA (k = 2), the median-IOWA and the olympic-IOWA. Note that with this analysis, we can analyze the optimal choice depending on the aggregation operator used. Then, we will see that each aggregation operator may lead to different results and decisions. Obviously, the question, as in other decision making problems, is the selection of the aggregation operator. By now, the answer we can give is that each decision maker will select one or more aggregation operators according to its interests. And depending on the aggregation operator used, his decisions will be different. The main advantage of the IGOWA is that it includes a wide range of particular cases that can be considered in the decision making problem. Then, the decision maker can consider a lot of possibilities and select the aggregation operator that is in accordance with its interests.

Assume an investor wants to invest some money in an enterprise in order to get high profits. Initially, he considers five possible alternatives.

- A_1 is a computer company.
- A_2 is a chemical company.
- A_3 is a food company.
- A_4 is a car company.
- A_5 is a TV company.

In order to evaluate these investments, the investor uses a group of experts. This group considers that the key factor is the economic environment of the economy. After careful analysis, they consider five possible situations for the economic environment: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in Table 1.

Table 1
Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	80	50	70	40	60
A_2	60	30	80	80	40
A_3	70	50	20	70	90
A_4	50	40	60	60	70
A_5	20	50	50	80	80

In this problem, the experts assume the following weighting vector: W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Due to the fact that the attitudinal character is very complex because it involves the opinion of different members of the board of directors, the experts use order inducing variables to express it. The results are represented in Table 2.

Table 2
Inducing variables

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	17	10	15	22	12
A_2	15	20	22	25	13
A_3	24	18	20	22	15
A_4	16	19	21	25	28
A_5	18	12	26	23	21

With this information, we can aggregate the expected results for each state of nature in order to take a decision. In Table 3 and 4, we present different results obtained by using different types of IGOWA operators.

Table 3
Aggregated results 1

	AM	WA	OWA	AOWA	IOWA	AIOWA
A_1	60	58	56	64	61	59
A_2	58	56	53	63	54	62
A_3	60	62	53	67	62	58
A_4	56	58	53	59	54	58
A_5	56	62	50	62	56	56

Table 4
Aggregated results 2

	QA	IOWQA	IOWG	Step	Median	Olympic
A_1	56.92	62.36	59.58	80	70	70
A_2	61.48	57.44	50.41	80	30	56.6
A_3	64.49	66.93	54.92	70	20	46.6
A_4	56.92	54.77	53.19	60	60	53.3
A_5	60.33	60.33	50.23	80	80	60

If we establish an ordering of the alternatives, a typical situation if we want to consider more than one alternative, then, we get the following results shown in Table 5. Note that the first alternative in each ordering is the optimal choice.

Table 5
Ordering of the investments

	Ordering		Ordering
AM	$A_1=A_3 \succ A_2 \succ A_4=A_5$	QA	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1=A_4$
WA	$A_3=A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_2$	IOWQA	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$
OWA	$A_1 \succ A_2=A_3=A_4 \succ A_5$	IOWG	$A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_5$
AOWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4$	Step-IOWA	$A_1=A_2=A_5 \succ A_3 \succ A_4$
IOWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2=A_4$	Median-IOWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3$
AIOWA	$A_2 \succ A_1 \succ A_3=A_4 \succ A_5$	Olympic-IOWA	$A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the investments may be different. Then, the decision about which investment or investments select may be also different.

7. Conclusions

In this paper, we have presented the IGOWA operator. It uses the main characteristics of two well known aggregation operators: the GOWA and the IOWA operator. Therefore, this operator uses generalized means and order inducing variables in the reordering of the arguments. Then, it can be seen from two different points of view: as a generalization of the IOWA operator by using generalized means or as an extension of the GOWA operator that uses order inducing variables in the reordering process. With the IGOWA operator, we have been able to generalize a wide range of OWA operators that include all the cases of the IOWA and the GOWA operator, and a lot of other cases such as the IOWG and the IOWQA operator. Moreover, we have further generalized the IGOWA operator by using quasi-arithmetic means. As a result, we have obtained the Quasi-IOWA operator which is a wider generalization that includes the IGOWA operator as a particular case and a lot of other cases.

We have also developed a numerical example of the new approach in order to see the applicability of the IGOWA operator in a financial decision making problem. The main advantage of this aggregation operator is that it includes a wide range of special cases. Then, depending on the special case used, the results and decisions may be different.

In future research, we expect to develop further extensions by adding new characteristics in the problem such as the use of uncertain information represented in the form of interval numbers, fuzzy numbers, linguistic variables, etc. We will also consider other decision making problems such as strategic decision making, product management, etc.

Acknowledgements

We would like to thank the editor in chief and the anonymous referees for their valuable comments and suggestions that have led to an improved version of the paper.

References

[1] G.R. Amin, Note on a preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 3636-3638.

[2] B.S. Ahn, Preference relation approach for obtaining OWA operator weights, International Journal of Approximate Reasoning 47 (2008) 166-178.

[3] G. Beliakov, Learning weights in the generalized OWA operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 4 (2005) 119-130.

[4] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A guide for practitioners, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[5] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[6] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[7] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, International Journal of Intelligent Systems 19 (2004) 233-255.

[8] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera, S. Alonso, Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations, European Journal of Operational Research 182 (2007), 383-399.

[9] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektro-technickog Faculteta Beograd, Serija Mate-matika i Fizika, No. 483, pp. 147-158, 1974.

[10] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as a model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.

[11] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.

[12] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15 (2007) 863-877.

[13] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 37 (2007) 176-189.

[14] Y.C. Hu, J.F. Tsai, Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 15 (2007) 717-735.

[15] N. Karayiannis, Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, IEEE Transactions on Neural Networks 11 (2000) 1093-1105.

[16] X. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, International Journal of Approximate Reasoning 45 (2007) 68-81.

[17] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 77-97.
[18] B. Llamazares, Choosing OWA operator weights in the field of Social Choice, Information Sciences 177 (2007) 4745-4756.
[19] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 13 (2007) 35-50.
[20] H.B. Mitchell, D.D. Estrakh, A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 5 (1997) 429-436.
[21] J.H. Wang, J. Hao, A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14 (2006) 435-445.
[22] Y.M. Wang, Y. Luo, Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, Information Sciences 177 (2007) 3356-3363.
[23] Y.M. Wang, C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 1867-1877.
[24] J. Wu, C.Y. Liang, Y.Q. Huang, An argument-dependent approach to determining OWA operator weights based on the rule of maximum entropy, International Journal of Intelligent Systems 22 (2007) 209-221.
[25] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[26] Z.S. Xu, J. Chen, An interactive method for fuzzy multiple attribute group decision making, Information Sciences 177 (2007) 248-263.
[27] Z.S. Xu, Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[28] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[29] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18 (1988) 183-190.
[30] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, Theory and Decision 33 (1992) 41-69.
[31] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[32] R.R. Yager, On weighted median aggregation, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2 (1994) 101-113.
[33] R.R. Yager, Quantifier Guided Aggregation Using OWA Operators, International Journal of Intelligent Systems 11 (1996) 49-73.
[34] R.R. Yager, The induced fuzzy integral aggregation operator, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 1049-1065.
[35] R.R. Yager, Induced aggregation operators, Fuzzy Sets and Systems 137 (2003) 59-69.
[36] R.R. Yager, E-Z OWA weights, in: Proc. 10th International Fuzzy Systems Association (IFSA) World Congress, Istanbul, Turkey, 2003, pp. 39-42.
[37] R.R. Yager, Choquet aggregation using order inducing variables, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12 (2004) 69-88.

[38] R.R. Yager, Generalized OWA Aggregation Operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (2004) 93-107.
[39] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[40] R.R. Yager, Using stress functions to obtain OWA operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15 (2007) 1122-1129.
[41] R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, Information Sciences 178 (2008) 363-380.
[42] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators. International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.
[43] R.R. Yager, D.P. Filev, Induced Ordered Weighted Averaging Operators, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 29 (1999) 141-150.
[44] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[45] D.Y. Yeh, C.H. Cheng, H.W. Yio, Empirical research of the principal component analysis and ordered weighted averaging integrated evaluation model on software projects, Cybernetics and Systems 38 (2007) 289-303.

Induced aggregation operators in decision making with the Dempster-Shafer belief structure

J.M. Merigó,[9] M. Casanovas[10]
Department of Business Administration, University of Barcelona, Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain

We study the induced aggregation operators. The analysis begins with a revision of some basic concepts such as the induced ordered weighted averaging (IOWA) operator and the induced ordered weighted geometric (IOWG) operator. We then analyze the problem of decision making with Dempster-Shafer theory of evidence. We suggest the use of induced aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer theory. We focus on the aggregation step and examine some of its main properties, including the distinction between descending and ascending orders and different families of induced operators. Finally, we present an illustrative example in which the results obtained using different types of aggregation operators can be seen.

1. INTRODUCTION

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence was developed by Dempster[1-2] and Shafer[3] and has subsequently been used in an astonishingly wide range of applications[4-5]. It provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include situations of risk and ignorance in the same formulation.

When using the D-S theory in decision making, the decision information must first be aggregated. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator developed by Yager[6]. Since it first appeared, the OWA operator has been used in a wide range of applications[7-8]. It provides a parameterized family of aggregation operators that includes the arithmetic mean, the maximum and the minimum as special cases[6]. Recently, Chiclana *et al.*[9] have developed the ordered weighted geometric (OWG) operator and it has subsequently been extensively analysed by a number of authors[10-12]. It combines the OWA operator with the geometric mean in the same aggregation thereby providing another parameterized family of aggregation operators that include the maximum and the minimum among others[9].

In Ref. 13, Yager and Filev introduced an extension of the OWA operator – the induced ordered weighted averaging (IOWA) operator – while, in[14-15], it was introduced a geometric version of the IOWA operator, known as the induced ordered weighted geometric (IOWG) operator. Since their introduction, they have been examined in a number of studies[16-28]. The main characteristic of the induced aggregation operators is that the reordering step is not conducted with the values of the arguments used for the OWA operators. In these cases, the reordering step is induced by means of another

---

[9] To whom correspondence should be addressed: email: jmerigo@ub.edu
[10] Email: mcasanovas@ub.edu

mechanism so that the order of the arguments depends upon the values of their associated inducing variables.

Yager[29] developed a more general formulation for decision making in the face of evidential knowledge by using the OWA operator. This problem has also been studied by other authors[11,30-34]. In this paper, we suggest the use of induced aggregation operators in situations of decision making with D-S theory of evidence. The reason for doing this is because there are situations where we prefer to aggregate the variables with an inducing order instead of aggregating with the traditional OWA operator. For example, such a method is useful when the attitudinal character of the decision maker is particularly complex or when there are a number of external factors affecting the decision analysis. We also propose using different types of orderings in the aggregation of the D-S theory depending on the specific situation with which we are dealing. We study these problems in detail by conducting an extensive analysis of the induced aggregation operators in which we introduce different families of induced operators such as the step-IOWA operator, the window-IOWA operator, the olympic-IOWA operator, the E-Z IOWA operator and the median-IOWA operator, among others.

The remainder of this paper is organized as follows. In Section 2, we describe different types of aggregation operators. Section 3 briefly describes the Dempster-Shafer theory of evidence. In Section 4, we describe the process for using IOWA operators in decision making with D-S belief structures. In Section 5, we develop a similar approach for using IOWG operators. Section 6 provides an illustrative example of the new approach. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2. AGGREGATION OPERATORS

In this Section, we briefly describe the basic aggregation operators that are used in the paper such as the OWA operator, the OWG operator, the IOWA operator and the IOWG operator.

2.1. OWA operator

The OWA operator, introduced by Yager[6], provides a parameterized family of aggregation operators that include the arithmetic mean, the maximum and the minimum.

DEFINITION 1. *An OWA operator of dimension n is a mapping OWA:* $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j *is the jth largest of the* a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator[31]. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the *j*th weight of the DOWA (or OWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AOWA operator.

2.2. OWG operator

The OWG operator was introduced in Chiclana *et al.*[9]. It combines the OWA operator and the geometric mean in the same aggregation. The OWG operator provides a parameterized family that includes the minimum, the maximum and the geometric mean. In the following, we provide a definition of the OWG operator as introduced by Xu and Da where we can distinguish between descending and ascending orderings[12].

DEFINITION 2. *An OWG operator of dimension n is a mapping OWG:* ${R^+}^n \rightarrow R^+$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ *and* $w_j \in [0,1]$*, then*:

$$OWG(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{2}$$

where b_j *is the jth largest of the* a_i*, and* R^+ *is the set of positive real numbers*.

2.3. Induced OWA operator

The induced OWA (IOWA) operator was introduced by Yager and Filev[13] and is an extension of the OWA operator. It differs in the fact that the reordering step is not carried out with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is induced by another mechanism represented as u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the inducing variables u_i.

DEFINITION 3. *An IOWA operator of dimension n is a mapping IOWA:* $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ *and* $w_j \in [0,1]$*, then*:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j *is the* a_i *value of the OWA pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i*,* u_i *is the order inducing variable and* a_i *is the argument variable*.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending IOWA (DIOWA) operator and the ascending IOWA (AIOWA) operator. Note that these orderings are based on the inducing variable and their weighting vectors are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DIOWA (or IOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AIOWA operator. Note also that the elements b_j of the AIOWA operator are ordered in an increasing way such that $\langle \text{Min}\{u_i\},b_1\rangle \leq \ldots \leq \langle \text{Max}\{u_i\},b_n\rangle$.

2.4. Induced OWG operator

The induced OWG (IOWG) operator[14-15] is an extension of the OWG operator. It involves combining the IOWA operator with the geometric mean. Unlike in the OWG operator, the reordering step in the IOWG is not carried out with the values of the arguments a_i. In this case, the reordering step is induced by another mechanism represented by u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the inducing variable u_i.

DEFINITION 4. *An IOWG operator of dimension n is a mapping IOWG:* $R^{+^n} \to R^+$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$IOWG(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle \dots, \langle u_n,a_n\rangle) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{4}$$

where b_j *is the* a_i *value of the OWG pair* $\langle u_i,a_i\rangle$ *having the jth largest* u_i, u_i *is the order inducing variable and* a_i *is the argument variable*.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending IOWG (DIOWG) operator and the ascending IOWG (AIOWG) operator. Note that these orderings are also based on the inducing variable such that the DIOWG operator is ordered as $\langle \text{Max}\{u_i\},b_1\rangle \le \dots \le \langle \text{Min}\{u_i\},b_n\rangle$, and the AIOWG operator as $\langle \text{Min}\{u_i\},b_1\rangle \le \dots \le \langle \text{Max}\{u_i\},b_n\rangle$. Note also that the weighting vectors are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DIOWG (or IOWG) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the AIOWG operator.

3. THE DEMPSTER-SHAFER THEORY OF EVIDENCE

The D-S theory of evidence was introduced by Dempster[1-2] and Shafer[3] and subsequently many new developments have been made[4-5]. Formulations of this type provide a unifying framework for representing uncertainty as it can include cases of risk and ignorance as special occurrences. Obviously, the case of certainty is also included in this generalization as it can be seen as a particular situation of risk or ignorance. Note that the case of certainty could also appear in other particular situations of the D-S formulation. Apart from these traditional cases, the D-S framework allows other forms of information that a decision maker might have about the states of nature to be represented.

DEFINITION 5. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X,* B_j *for* $j = 1,\dots,n$, *called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m:* $2^X \to [0, 1]$ *such that*:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.

(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.

(3) $m(A) = 0,\ \forall A \neq B_j$.

As described above, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. In the case of risk, a belief structure is known as a Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, it is evident that we are in a situation of decision making under a risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment, as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in Shafer[3].

Two important evidential functions associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief. In the following, we provide a definition of these two measures as developed by Shafer[3].

DEFINITION 6. *The plausibility measure Pl is defined as, Pl:* $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

$$\text{Pl}(A) = \sum_{A \cap B_j \neq \varnothing} m(B_j) \tag{5}$$

DEFINITION 7. *The belief measure Bel is defined as Bel:* $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

$$\text{Bel}(A) = \sum_{B_j \subseteq A} m(B_j) \tag{6}$$

Bel(A) represents the exact support to A and Pl(A) represents the possible support to A. With these two measures we can form the interval of support to A as [Bel(A),Pl(A)]. This interval can be seen as the lower and upper bounds of the probability to which A is supported such that $\text{Bel}(A) \leq \text{Prob}(A) \leq \text{Pl}(A)$. From this we see that $\text{Pl}(A) \geq \text{Bel}(A)$ for all A. Another interesting feature about these two measures is that they are connected by $\text{Bel}(A) = 1 - \text{Pl}(\bar{A})$ or $\text{Pl}(A) = 1 - \text{Bel}(\bar{A})$, where $\bar{A}$ is the complement of A.

4. INDUCED OWA OPERATORS IN DECISION MAKING WITH DEMPSTER-SHAFER BELIEF STRUCTURES

4.1. Decision making approach

The problem of decision making with D-S belief structures has been studied by various authors[11,29-34]. In Ref. 29, Yager proposed a more generalized methodology by using the OWA operator.

A new method for decision making with D-S belief structures is possible by using the IOWA operator in the aggregation step instead of the OWA operator. The reason for using the IOWA operator in these cases is that the decision maker may, on occasions, have an attitudinal character that differs from the values of the arguments. Then, in order to aggregate the arguments, he prefers to use another mechanism in the reordering step which is closer accordance with his interests. Similar explanations for using the IOWA operator in such circumstances might be offered, but the principal idea is the possibility of using different reordering methods in the aggregation.

The procedure to follow for taking decisions with the IOWA operator in the D-S theory of evidence is similar to that used with OWA operators, with the difference that now the IOWA operator is used in the aggregation step. The procedure can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. a_{ih} is the payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, the following steps should be taken:

Step 1: Calculate the payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.

Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker by determining the values u_i. Note that in this case the measure $\alpha(W)$ is different from that adopted by Yager[6] and is dependent upon the mechanism used in the reordering step. That is:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j e_j \tag{7}$$

where e_j is the d_i value of the OWG pair $\langle u_i, d_i \rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $d_i = (n - j) / (n - 1)$.

Step 4: Calculate the collection of weights, w, to be used in the IOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker[32].

Step 5: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik} = IOWA(M_{ik}), using Eq. (3), for all the values of i and k.

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{8}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal. Note that in a situation of costs or similar, we should select the alternative with the lowest C_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between ascending and descending orders in the IOWA aggregation. The reason for drawing this distinction is the reordering of the inducing variables, among which the highest value is sometimes the first result in the reordering step, but on other occasions the first result is the lowest value. This depends on the mechanism used for the reordering of the arguments.

The procedure to follow if we use the AIOWA operator in the aggregation step is the same than the procedure used for the IOWA or DIOWA operator with the following differences.

In *Step 3*, when calculating the inducing variables we should consider that in these cases, the lowest inducing variable is the first result in the reordering of the arguments.

In *Step 4*, when calculating the collection of weights, we should consider that the reordering will now be different so that we might associate each weight correctly with its corresponding position.

In *Step 6*, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = AIOWA(M_{ik}), using Eq. (4), for all the values of i and k.

4.2. Using IOWA operators in belief structures

Analyzing the aggregation in *Steps 6* and *7* of Section 4.1., we can formulate the whole aggregation process in one equation. Then, the result obtained is that the focal weights are aggregating the results obtained by using the IOWA operator. We will call this process the BS-IOWA operator and it can be defined as follows.

DEFINITION 8. *A BS-IOWA operator is defined by*:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{9}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} *is the* a_{i_k} *value of the IOWA pair* $\langle u_{i_k}, a_{i_k} \rangle$ *having the* j_k*th largest* u_{i_k}, u_{i_k} *is the order inducing variable,* a_{i_k} *is the argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements.

The BS-IOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. We can prove these properties with the following theorems.

THEOREM 1 (Commutativity). *Assume f is the BS-IOWA operator, then*

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1} \rangle, \ldots, \langle u_{q_r}, a_{q_r} \rangle) = f(\langle u^*_{1_1}, a^*_{1_1} \rangle, \ldots, \langle u^*_{q_r}, a^*_{q_r} \rangle) \tag{10}$$

where $(\langle u^*_{1_1}, a^*_{1_1} \rangle, \ldots, \langle u^*_{q_r}, a^*_{q_r} \rangle)$ *is any permutation of* $(\langle u_{1_1}, a_{1_1} \rangle, \ldots, \langle u_{q_r}, a_{q_r} \rangle)$ *for each focal element k*.

Proof. Let

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1} \rangle, \ldots, \langle u_{q_1}, a_{q_1} \rangle, \ldots, \langle u_{q_r}, a_{q_r} \rangle) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \quad \text{and}$$

$$f(\langle u^*_{1_1}, a^*_{1_1} \rangle, \ldots, \langle u^*_{q_1}, a^*_{q_1} \rangle, \ldots, \langle u^*_{q_r}, a^*_{q_r} \rangle) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b^*_{j_k}$$

Since $(\langle u^*_{1_1}, a^*_{1_1}\rangle,...,\langle u^*_{q_r}, a^*_{q_r}\rangle)$ is a permutation of $(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle)$ for each focal element *k*, we have $b_{j_k} = b^*_{j_k}$, and then

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = f(\langle u^*_{1_1}, a^*_{1_1}\rangle,...,\langle u^*_{q_r}, a^*_{q_r}\rangle) \qquad \blacksquare$$

THEOREM 2 (Monotonicity). *Assume f is the BS-IOWA operator, if* $a_{i_k} \geq \hat{a}_{i_k}$, $\forall i$, *then*

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) \geq f(\langle u_{1_1}, \hat{a}_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, \hat{a}_{q_r}\rangle) \tag{11}$$

Proof. Let

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_1}, a_{q_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \qquad \text{and}$$

$$f(\langle u_{1_1}, \hat{a}_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_1}, \hat{a}_{q_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, \hat{a}_{q_r}\rangle) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \hat{b}_{j_k}$$

Since $a_{i_k} \geq \hat{a}_{i_k}$, $\forall i$, it follows that $b_{j_k} \geq \hat{b}_{j_k}$, and then

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) \geq f(\langle u_{1_1}, \hat{a}_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, \hat{a}_{q_r}\rangle) \qquad \blacksquare$$

THEOREM 3 (Boundedness). *Assume f is the BS-IOWA operator, then*

$$\min\{a_i\} \leq f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_1}, a_{q_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) \leq \max\{a_i\} \tag{12}$$

Proof. Let max{a_i} = b and min{a_i} = a, then

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \leq \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b = b\sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k}$$

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \geq \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} a = a\sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k}$$

Since $\sum_{j_k=1}^{q_k} w_{j_k} = 1$ for each focal element and $\sum_{k=1}^{r} m(B_k) = 1$, we get

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle,...,\langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = b$$

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle, ..., \langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = a$$

Therefore,

$$\min\{a_i\} \leq f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle, ..., \langle u_{q_1}, a_{q_1}\rangle, ..., \langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) \leq \max\{a_i\} \qquad \blacksquare$$

THEOREM 4 (Idempotency). *Assume f is the BS-IOWA operator, if* $a_i = a \ \ \forall\, i \in N$, *then*

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle, ..., \langle u_{q_1}, a_{q_1}\rangle, ..., \langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = a \tag{13}$$

Proof. Since $a_i = a \ \forall i \in N$, we have

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle, ..., \langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} a = a \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k}$$

Since $\sum_{j_k=1}^{q_k} w_{j_k} = 1$ for each focal element and $\sum_{k=1}^{r} m(B_k) = 1$, we get

$$f(\langle u_{1_1}, a_{1_1}\rangle, ..., \langle u_{q_1}, a_{q_1}\rangle, ..., \langle u_{q_r}, a_{q_r}\rangle) = a \qquad \blacksquare$$

A further interesting feature is the distinction drawn between descending and ascending orders by using $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the BS-DIOWA (or BS-IOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the BS-AIOWA operator. Then, we obtain the BS-DIOWA and the BS-AIOWA operator. Obviously, these operators also fulfil the properties discussed in Theorems (1) - (4).

If there is a tie in the reordering step of the BS-DIOWA or the BS-AIOWA operator, we can follow the policy explained in Yager and Filev[13] where the tied arguments are substituted by their arithmetic mean. Note also that it is possible to conduct the reordering of the arguments with words or lexicographic orders that combine words with numbers in the aggregation[37].

4.3. Families of BS-IOWA operators

Following a similar methodology as that adopted for the OWA operator, we are able to develop different types of aggregation operators by choosing a different manifestation of the weighting vector in the BS-IOWA operator. Note that it is possible to obtain these results both with the BS-DIOWA or the BS-AIOWA operators by using $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the BS-DIOWA (or BS-IOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the BS-AIOWA operator.

As can be seen in Definition 8, each focal element uses a different weighting vector in the aggregation step with the IOWA operator. Therefore, it is possible to use different families of IOWA operators in the same BS-IOWA process. For example, assuming that we have three focal elements, we could use the maximum criteria for the first, the minimum criteria for the second and the average criteria for the third. For this reason, in order to conduct the analysis, we will consider different families of IOWA operators individually for each focal element. Note that the nomenclature used in this subsection is not the same as that adopted in earlier subsections.

For example, it is possible to obtain the maximum, the minimum, the average, the Hurwicz criteria, the weighted average (WA) and the OWA operator. These families are obtained in accordance with Yager and Filev[13]. In other words, the maximum is obtained if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$; the minimum, if $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$; the average criteria, when $w_j = 1/n$, for all a_i; the Hurwicz criteria, when $w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for all $j \neq p,q$, and $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$, $u_q = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$; the weighted average, if $u_i > u_{i+1}$, for all i; and the OWA operator if the ordered position of u_i is the same as that of b_j such that b_j is the jth largest of a_i.

Other families of aggregation operators could be used in the IOWA operator by using a different manifestation of the weighting vector. For example, when $w_p = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq p$ we are using the step-IOWA operator[13,38]. Note that if $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$, the step-IOWA becomes the maximum and if $u_p = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$, the step-IOWA becomes the minimum.

When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-IOWA operator that is based on the window-OWA operator[38]. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, and the initial position of the highest u_i is also the initial position of the highest a_i, then, the window-IOWA becomes the maximum. If $m = 1$, $k = n$, and the initial position of the lowest u_i is also the initial position of the lowest a_i, then, the window-IOWA becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-IOWA becomes the average criteria.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-IOWA operator that is based on the olympic-OWA[39]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-IOWA becomes the IOWA-median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-IOWA becomes the olympic-IOWA. Also note that the olympic-IOWA becomes the olympic average if $w_p = w_q = 0$, such that $u_p = \mathrm{Max}_i\{a_i\}$ and $u_q = \mathrm{Min}_i\{a_i\}$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z IOWA weights that it is based on the E-Z OWA weights[40]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/k)$ for $j = 1$ to k and $w_j = 0$ for $j > k$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - k$ and $w_j = (1/k)$ for $j = n - k + 1$ to n. Note that the E-Z IOWA weights becomes the E-Z OWA weights if the ordered position of u_i is the same as that of the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, from $j = 1$ to k for the first class, or $j = n - k + 1$ to n for the second class. Note also for the first class that the maximum is obtained if $k = 1$ and $b_1 = \mathrm{Max}\{a_i\}$, and the average criteria if $k = n$. In the second class, the minimum is obtained if $k = 1$ and $b_n = \mathrm{Min}\{a_i\}$, and the average if $k = n$.

It should also be noted that the median and the weighted median can be used as induced aggregation operators. For the IOWA-median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others, and this affects the argument a_i with the $[(n + 1)/2]$th largest u_i. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$, and this affects the arguments with the $(n/2)$th and $[(n/2) + 1]$th largest u_i. Note that if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, then, the IOWA-median is transformed in the OWA-median.

For the weighted IOWA-median, we follow a similar procedure to that described by Yager[41]. We select the argument a_i that has the kth largest inducing variable u_i, such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5. Note that if the ordered position of u_i is the same than the ordered position of b_j such that b_j is the jth largest of a_i, then, the weighted IOWA-median becomes the weighted OWA-median.

A further type of IOWA aggregation is the S-IOWA operator based on the S-OWA operator[42]. For this type, we have to distinguish between three cases, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-IOWA operator. The "orlike" S-IOWA operator is obtained when $w_p = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for all $j \neq p$ with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we obtain the average and if $\alpha = 1$, the maximum. The "andlike" S-IOWA operator is obtained when $w_q = (1/n)(1 - \beta) + \beta$, $u_q = \text{Min}\{a_i\}$, and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for all $j \neq q$ with $\beta \in [0, 1]$. In this case, if $\beta = 0$ we obtain the average and if $\beta = 1$, the minimum. Finally, the generalized S-IOWA operator is found when $w_p = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, with $u_p = \text{Max}\{a_i\}$; $w_q = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, with $u_q = \text{Min}\{a_i\}$; and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for all $j \neq p,q$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-IOWA operator becomes the "andlike" S-IOWA operator and if $\beta = 0$, the "orlike" S-IOWA operator.

Other families of IOWA operators that could be developed include those that depend on the aggregated objects. For example, we could develop the BADD-IOWA operator as follows.

$$w_j = \frac{b_j^{\alpha}}{\sum_{j=1}^{n} b_j^{\alpha}} \tag{14}$$

with $\alpha \in (-\infty, \infty)$ and b_j is the value a_i of the OWA pair with the jth largest u_i. Note that $\Sigma_j w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$. Note also that if $\alpha = 0$, we obtain the average and if $\alpha = \infty$, the maximum. Other families of IOWA operators that depend on the aggregated objects could be developed by using $(1 - b_j)^{\alpha}$, $(1/b_j)^{\alpha}$, etc., instead of b_j^{α}. These families were developed for the OWA operator by Yager[38].

A further useful method for obtaining the weighting vector is the functional method known as basic unit interval monotonic function (BUM)[39]. Let f be a function f: $[0, 1] \to [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ y $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. Using this BUM function we obtain the IOWA weights for $j = 1$ to n as:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{15}$$

Using this method, it is easy to see that $\Sigma_j w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$.

A further type of IOWA operator that could be used in the aggregation is the centered-IOWA operator. Following the same methodology that Yager used for the OWA operator[43], we can define the centered-IOWA operator as an aggregation that is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a relaxation of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. This situation is known as softly decaying centered-IOWA operator. An example of this particular situation is the average criteria.

Another particular situation appears if we remove the third condition. This case is known as non-inclusive centered-IOWA operator. An example of this case is the IOWA-median. Note that the attitudinal character of the centered-IOWA is not equal to 0.5 because it depends on the inducing variables.

A special type of centered-IOWA operators are the Gaussian-IOWA weights. Note that it is based on the Gaussian-OWA weights developed by Xu[36]. In order to define the weighting vector, first we have to consider a Gaussian distribution $\eta(\mu, \sigma)$ where:

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n+1}{2} \tag{16}$$

$$\sigma_n = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(j-\mu_n)^2} \tag{17}$$

Assuming that:

$$\eta(j) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi\sigma_n}} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2} \tag{18}$$

we define the IOWA weights as:

$$w_j = \frac{\eta_j}{\sum_{j=}^{n}\eta(j)} = \frac{e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}}{\sum_{j=1}^{n} e^{-(j-\mu_n)^2/2\sigma_n^2}} \tag{19}$$

Note that $\Sigma_j w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$.

Finally, if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-maximum, the BS-minimum, the BS-average, the BS-WA, the BS-step-IOWA operator, the BS-window-IOWA, the BS-median-IOWA, the BS-olympic-IOWA, the BS-centered-IOWA, the BS-Gaussian-IOWA, the BS-S-IOWA, the BS-EZ-IOWA, etc.

5. INDUCED OWG OPERATORS IN DEMPSTER-SHAFER FRAMEWORK

An alternative for decision making with D-S theory is made possible by using the IOWG operator in the aggregation step. The reason for using IOWG operators arises because there are situations in which it is better to reorder the arguments with a different mechanism rather than using that of their values. In this mechanism, we introduce an inducing variable for each argument from which we can develop the reordering step. Then, it is possible to aggregate with a different method to that used with the OWG operator[11]. Note that in the 21st Century, it seems more useful to use the IOWA operator but mathematically it is also interesting to consider the geometric version, especially for future research related with decision making with preference relations.

The procedure to follow when taking decisions with the IOWG operator is very similar to the previous method commented when using IOWA operators in the D-S belief structure. The difference is that in this case, the arguments are aggregated with the IOWG operator. Assuming the same variables as with the IOWA operator explained in Section 4.1, we could summarize the procedure with the following steps:

Step 1: Calculate the payoff matrix.
Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.
Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker by determining the values u_i.
Step 4: Calculate the collection of weights, w, to be used in the IOWG aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker[36].
Step 5: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{C_{ij} \mid S_j \in B_k\}$.
Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik} = IOWG(M_{ik}), using Eq. (4), for all the values of i and k.
Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik} m(B_k) \tag{20}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal. Note that in a situation of costs or similar, we should select the alternative with the lowest C_i.

Analyzing the aggregation in *Step 6* and *Step 7*, we can formulate the whole aggregation process in one equation as follows. We will call this the BS-IOWG operator.

DEFINITION 9. *A BS-IOWG operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \prod_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) b_{j_k}^{w_{j_k}} \tag{21}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} *is the* a_{i_k} *value of the IOWG pair* $\langle u_{i_k}, a_{i_k} \rangle$ *having the* j_k*th largest* u_{i_k}, u_{i_k} *is the order inducing variable,* a_{i_k} *is the argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements. Also note that the IOWG operator can only aggregate positive numbers.

The BS-IOWG operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. The demonstration of these properties is straightforward by looking to theorems (1) – (4) developed for the BS-IOWA operator.

From a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between the DIOWG and the AIOWG operators. Their use in D-S framework is straightforward by using $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the BS-DIOWG (or BS-IOWG) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the BS-AIOWG operator. The reason for using BS-AIOWG operators arises because it is sometimes better to use an ascending order in the inducing variable. For example, we could use it in situations where the lowest inducing variable is the best result and we want to start the reordering step from this result. Note that it is possible to use words in the inducing variables and if there is a tie in the reordering step of the BS-DIOWG or the BS-AIOWG operator, we should also follow the policy explained in Yager and Filev[13].

Adopting the same methodology than Section 4.3, we can develop a wide range of families of BS-IOWG operators. As each focal element uses a different weighting vector, the analysis should be conducted individually. Then we could analyze among others, the maximum, the minimum, the geometric mean (GM), the weighted geometric mean (WGM), the step-IOWG operator, the window-IOWG, the IOWG median, the olympic-IOWG, the centered-IOWG, the S-IOWG, etc. If we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-maximum, the BS-minimum, the BS-GM, the BS-WGM, the BS-step-IOWG operator, the BS-window-IOWG, the BS-IOWG median, the BS-olympic-IOWG, the BS-centered-IOWG, the BS-S-IOWG, etc.

6. ILLUSTRATIVE EXAMPLE

In the following, we present an illustrative example using the methodologies described above. We analyze a decision making problem with the D-S belief structure. We use different types of aggregation operators to solve the problem such as the arithmetic mean (AM), the WA, the OWA, the AOWA, the IOWA and the AIOWA operator. We also use different types of geometric aggregation operators such as the GM, the WGM, the OWG, the AOWG, the IOWG and the AIOWG operator. Note that in all cases we assume a situation in which the highest value is the best result. Then, for each situation, we select the alternative with the highest result. Note also that we consider an investment selection problem but it is also possible to consider other applications such as the selection of financial products[44], etc.

Step 1: Assume a decision maker has five possible investment opportunities and he wants to select the alternative that adapts best to his interests.

1) A_1 is a car company.
2) A_2 is a pharmaceutical company.
3) A_3 is a computer company.
4) A_4 is a chemical company.
5) A_5 is a TV company.

The possible results, depending on the future state of nature, are represented in Table 1. Note that the results are income values.

Table I. Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
A_1	20	40	50	80	30	60	80	50
A_2	30	30	60	70	40	70	50	40
A_3	50	60	20	40	30	50	80	70
A_4	40	50	30	60	50	60	60	60
A_5	60	40	50	30	70	70	60	30

The states of nature represent different economic situations affecting the companies. These situations are evaluated by the world growth rate: S_1 = strong recession, S_2 = weak recession, S_3 = growth rate near 0, S_4 = very low growth rate, S_5 = low growth rate, S_6 = medium growth rate, S_7 = high growth rate, S_8 = very high growth rate.

Step 2: The decision maker has brought together a group of experts in order to solve the problem. After careful analysis, the experts have obtained some probabilistic information about the state of nature that will occur in the future. This information is represented by the following belief function *m* about the states of nature.

Focal element

$B_1 = \{S_1, S_5, S_6, S_7\} = 0.4$

$B_2 = \{S_1, S_3, S_8\} = 0.3$

$B_3 = \{S_2, S_3, S_4\} = 0.3$

Step 3: Assume the following attitudinal character for the decision maker when using induced aggregation operators, represented in Table 2.

Table II. Inducing variables

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8
A_1	25	16	24	18	20	13	19	14
A_2	18	34	22	12	24	16	20	26
A_3	13	21	28	22	19	25	16	26
A_4	20	24	14	31	27	25	19	18
A_5	25	16	23	30	15	21	18	26

Step 4: Assume we have used one of the existing methods for determining the weights[36,38] and we have obtained the following results for the different number of arguments.

Weighting vector

$W_2 = (0.7, 0.3)$

$W_3 = (0.4, 0.4, 0.2)$

$W_4 = (0.3, 0.3, 0.2, 0.2)$

Step 5: Calculate the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of *i* and *k*.

A_1: $M_{11} = \langle 20, 30, 60, 80\rangle$; $M_{12} = \langle 20, 50, 50\rangle$; $M_{13} = \langle 40, 50, 80\rangle$.

A_2: $M_{21} = \langle 30, 40, 70, 50\rangle$; $M_{22} = \langle 30, 60, 40\rangle$; $M_{23} = \langle 30, 60, 70\rangle$.

A_3: $M_{31} = \langle 50, 30, 50, 80\rangle$; $M_{32} = \langle 50, 20, 70\rangle$; $M_{33} = \langle 60, 20, 40\rangle$.

A_4: $M_{41} = \langle 40, 50, 60, 60\rangle$; $M_{42} = \langle 40, 30, 60\rangle$; $M_{43} = \langle 50, 30, 60\rangle$.

A_5: $M_{51} = \langle 60, 70, 70, 60\rangle$; $M_{52} = \langle 60, 50, 30\rangle$; $M_{53} = \langle 40, 50, 30\rangle$.

From the sixth step, we can distinguish between four different types of aggregation operators: the IOWA operator, the AIOWA operator, the IOWG operator and the AIOWG operator.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik}, using Eq. (3) for the IOWA operator and using Eq. (4) for the IOWG operator. The results are shown in Tables 3 and 4.

Table III. Aggregated payoff

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*	*IOWA*	*AIOWA*
V_{11}	47.5	43	52	43	43	52
V_{12}	40	38	44	38	38	44
V_{13}	56.6	50	58	50	60	58
V_{21}	47.5	45	50	45	47	48
V_{22}	43.3	44	46	40	46	44
V_{23}	53.3	50	58	50	50	58
V_{31}	52.5	50	55	50	50	55
V_{32}	46.6	42	52	42	46	52
V_{33}	40	40	44	36	36	44
V_{41}	52.5	51	54	51	53	52
V_{42}	43.3	40	46	40	46	44
V_{43}	46.6	44	50	44	50	44
V_{51}	65	65	66	64	65	65
V_{52}	46.6	50	50	44	46	50
V_{53}	40	42	42	38	40	42

Table IV. Aggregated payoff for the geometric operators

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*	*IOWG*	*AIOWG*
V_{11}	41.19	37.12	45.70	37.12	37.12	45.70
V_{12}	36.84	34.65	41.62	34.65	34.65	41.62
V_{13}	50.13	46.89	55.55	46.89	57.70	55.18
V_{21}	45.27	42.91	47.75	42.91	45.15	45.38
V_{22}	41.60	41.92	44.41	38.66	44.41	41.92
V_{23}	50.13	46.89	55.55	46.89	46.89	55.55
V_{31}	49.49	47.12	51.97	47.12	47.12	51.97
V_{32}	41.21	37.06	47.62	37.06	39.65	47.62
V_{33}	36.34	35.65	40.95	32.87	32.87	40.95
V_{41}	51.80	50.30	53.34	50.30	52.38	51.22
V_{42}	41.60	38.66	44.41	38.66	44.41	41.92
V_{43}	44.81	42.27	48.55	42.27	48.55	42.27
V_{51}	64.80	64.80	65.81	63.81	64.80	64.80
V_{52}	44.81	48.55	48.55	42.27	43.84	48.55
V_{53}	39.14	41.28	41.28	37.27	38.98	41.28

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. (8) for the IOWA operator and Eq. (20) for the IOWG operator.

Table V. Generalized expected value

	AM	*WA*	*OWA*	*AOWA*	*IOWA*	*AIOWA*
A_1	48	43.6	51.4	43.6	46.6	51.4
A_2	48	46.2	51.2	45	47.6	49.8
A_3	47	44.6	50.8	43.4	44.6	50.8
A_4	48	45.6	50.4	45.6	50	47.2
A_5	52	53.6	54	50.2	51.8	53.6

Table VI. Generalized expected value for the geometric operators

	GM	*WGM*	*OWG*	*AOWG*	*IOWG*	*AIOWG*
A_1	42.56	39.31	47.43	39.31	42.55	47.32
A_2	45.62	43.80	49.08	42.82	45.45	47.39
A_3	43.06	40.66	47.35	39.82	40.60	47.35
A_4	46.64	44.39	49.22	44.39	48.84	45.74
A_5	51.10	52.86	53.27	49.39	50.76	52.86

Step 8: Select the best alternative for each aggregation operator. As we can see, in this problem, the best alternative is A_5.

If we establish an order for the investments, a typical situation if we want to select more than one alternative, we can see that each aggregation gives us a different order. Note that $\succ$ means *preferred to*. The results are shown in Table 7.

Table VII. Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
AM	$A_5 \succ A_1 = A_2 = A_4 \succ A_3$	*GM*	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
WA	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$	*WGA*	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
OWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$	*OWG*	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$
AOWA	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$	*AOWG*	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1$
IOWA	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$	*IOWG*	$A_5 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3$
AIOWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$	*AIOWG*	$A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$

7. CONCLUSIONS

In this paper, we have proposed the use of induced aggregation operators in decision making with D-S belief structure. We have seen that this approach is useful when the decision maker has a complex attitudinal character or when we want to aggregate the information with a particular reordering. We have outlined the process that should be followed when using induced aggregation operators in the D-S theory of evidence. We have distinguished between the use of the IOWA and the IOWG operator. We have studied some of its main properties, including the distinction between ascending and descending orders and different families of induced aggregation operators. An interesting result found in this case is the possibility of using different families of aggregation operators in the same problem because it uses different aggregations in the process. Finally, an illustrative example has been provided in which we have reported the results obtained when using the OWA, the OWG, the IOWA and the IOWG operators in decision making with D-S belief structure.

References

[1] Dempster AP. Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, Annals Math Stat 1967;38:325-339.

[2] Dempster AP. A generalization of Bayesian inference, J Royal Stat Soc B 1968;30:205-247.

[3] Shafer G. Mathematical theory of evidence, NJ: Princeton University Press; 1976.

[4] Srivastava RP, Mock T. Belief functions in business decisions, Heidelberg: Physica-Verlag; 2002.
[5] Yager RR, Fedrizzi M, Kacprzyk J. Advances in the Dempster-Shafer theory of evidence, New York: John Wiley & Sons; 1994.
[6] Yager RR. On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Trans Syst Man Cybern B 1988;18:183-190.
[7] Calvo T, Mayor G, Mesiar R. Aggregation operators: New trends and applications, New York: Physica-Verlag; 2002.
[8] Yager RR, Kacprzyck J. The ordered weighted averaging operators: Theory and applications, Norwell: Kluwer Academic Publishers; 1997.
[9] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E. The ordered weighted geometric operator: Properties and application. In: Proc 8th Int Conf on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems (IPMU), Madrid, Spain; 2000. pp. 985-991.
[10] Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making, Int J Intell Syst 2003;18:689-707.
[11] Merigó JM, Casanovas M. Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, Inform Sci, submitted for publication.
[12] Xu ZS, Da QL. The ordered weighted geometric averaging operators, Int J Intell Syst 2002;17:709-716.
[13] Yager RR, Filev DP. Induced ordered weighted averaging operators, IEEE Trans Syst Man Cybern B 1999;29:141-150.
[14] Xu ZS, Da QL. An overview of operators for aggregating information, Int J Intell Syst 2003;18:953-969.
[15] Chiclana F, Herrera F, Herrera-Viedma E, Alonso S. Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, Int J Intell Syst 2004;19:233-255.
[16] Chiclana F, Herrera-Viedma E, Herrera F, Alonso S. Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations, Eur J Oper Res 2007;182:383-399.
[17] Chen SJ, Chen S.M. A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, Cybern Syst 2003;34:109-137.
[18] Herrera-Viedma E, Alonso S, Chiclana F, Herrera F. A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, IEEE Trans Fuzzy Syst 2007;15:863-877.
[19] Herrera-Viedma E, Chiclana F, Herrera F, Alonso S. Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Trans Syst Man Cybern B 2007;37:176-189.
[20] Merigó JM, Casanovas M. Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators, Fuzzy Sets Syst, to be published.
[21] Mitchell HB, Schaefer PA. Multiple priorities in an induced ordered weighted averaging operators, Int J Intell Syst 2000;15:317-327.
[22] Xu ZS. Extended IOWG operator and its use in group decision making based on multiplicative linguistic preference relations, Amer J Appl Sci 2005;2:633-643.
[23] Xu ZS. An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, Dec Sup Syst 2006;41:488-499.

[24] Xu ZS. Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, Inform Fusion 2006;7:231-238.
[25] Xu ZS. On generalized induced linguistic aggregation operators, Int J Gen Syst 2006;35:17-28.
[26] Yager RR. The induced fuzzy integral aggregation operator, Int J Intell Syst 2002;17:1049-1065.
[27] Yager RR. Induced aggregation operators, Fuzzy Set Syst 2003;137:59-69.
[28] Yager RR. Choquet aggregation using order inducing variables, Int J Uncert Fuzziness Knowledge-Based Syst 2004;12:69-88.
[29] Yager RR. Decision making under Dempster-Shafer uncertainties, Int J Gen Syst 1992;20:233-245.
[30] Engemann KJ, Miller HE, Yager RR. Decision making with belief structures: an application in risk management, Int J Uncert Fuzziness Knowledge-Based Syst 1996;4:1-26.
[31] Yager RR. On the inclusion of variance in decision making under uncertainty, Int J Uncert Fuzziness Knowledge-Based Syst 1996;4:401-419.
[32] Yager RR. On the valuation of alternatives for decision making under uncertainty, Int J Intell Syst 2002;17:687-707.
[33] Yager RR. Decision making using minimization of regret, Int J Approx Reas 2004;36:109-128.
[34] Yager RR. Uncertainty modeling and decision support, Reliability Eng Syst Safety 2004;85:341-354.
[35] Yager RR. On generalized realizations in uncertain environments, Theory Dec 1992;33:41-69.
[36] Xu ZS. An overview of methods for determining OWA weights, Int J Intell Syst 2005;20:843-865.
[37] Zadeh LA. Fuzzy logic = computing with words, IEEE Trans Fuzzy Syst 1996;4:103-111.
[38] Yager RR. Families of OWA operators, Fuzzy Set Syst 1993;59:125-148.
[39] Yager RR. Quantifier guided aggregation using OWA operators, Int J Intell Syst 1996;11:49-73.
[40] Yager RR. E-Z OWA weights, In: Proc 10th IFSA World Congress, Istanbul, Turkey; 2003, pp. 39-42.
[41] Yager RR. On weighted median aggregation, Int J Uncert Fuzziness Knowledge-Based Syst 1994;2:101-113.
[42] Yager RR, Filev DP. Parameterized "andlike" and "orlike" OWA Operators, Int J Gen Syst 1994;22:297-316.
[43] Yager RR. Centered OWA operators, Soft Comp 2007;11:631-639.
[44] Merigó JM, Gil-Lafuente AM. Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Econ Rev 2007;12:35-50.

14.2.20. Artículo de revista 20. – Enviado a *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems*

Fuzzy induced heavy OWA operators

José M. Merigó[11], Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain

Abstract. We introduce a new extension of the ordered weighted averaging (OWA) operator called the fuzzy induced heavy ordered weighted averaging (FIHOWA) operator. This operator uses in the same aggregation the main characteristics of three well known aggregation operators: the heavy OWA operator, the induced OWA operator and the fuzzy OWA operator. Therefore, this operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes the OWA operator and the total operator as special cases. It uses order inducing variables in the reordering of its arguments and it deals with uncertain information represented in the form of fuzzy numbers. We study some of the main properties of this operator and develop a wide range of families of FIHOWA operators.

Keywords: Aggregation operators, fuzzy numbers, heavy OWA operator, induced OWA operator, fuzzy OWA operator.

1. Introduction

The ordered weighted averaging (OWA) operator was introduced in [27] and it is a very common method for fusing the information. Since its appearance it has been used in a wide range of applications [2,3,5-8,10-11,13-16,18-19,21-35]. One of its main characteristics is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes among others, the maximum, the minimum and the average criteria.

In this paper, we will focus on three extensions of the OWA operator: the heavy ordered weighted averaging (HOWA) operator, the induced ordered weighted averaging (IOWA) operator and the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator.

The HOWA operator was introduced in [31] and its main characteristic is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes among others, the minimum, the OWA operator and the total operator. As we can see, this operator allows the weighting vector to range between the OWA operator and the total operator. This extension has also been studied in [15-16,32].

The IOWA operator was introduced in [34] motivated by [18] and its main characteristic is that it uses a reordering process different from the values of the arguments. In this case, the reordering process is developed with order inducing variables that reorders the arguments to be aggregated. This extension has been studied by different authors such as in [5-8,10-11,13,15,18-19,21-23,25,33-34].

The FOWA operator has been studied in [3,5,13,16,19], and its main characteristic is that it deals with uncertain information that can be assessed with fuzzy numbers (FN).

[11] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 402 45 80; E-mail: jmerigo@ub.edu.

Note that in the literature we find a wide range of FN such as triangular FN, trapezoidal FN, L-R FN, interval-valued FN, intuitionistic FN, etc. For further information on FN, see for example [4,9,12,24,26,36].

Recently [16], Merigó and Casanovas have developed a new extension of the HOWA operator for situations where the available information is given in the form of FN. Going a step further, we can see that sometimes, it is useful to develop a reordering of the arguments that does not depend on their values. For doing this, we can use the concept of the IOWA operator where the reordering process is developed with order inducing variables. Then, we can obtain an aggregation operator that uses order inducing variables in the reordering of the arguments, deals with uncertain information represented in the form of FN and allows the weighting vector to range between the OWA operator and the total operator. We will call this new aggregation operator the fuzzy induced heavy ordered weighted averaging (FIHOWA) operator. As said before, this operator uses the main characteristics of the HOWA operator, the IOWA operator and the FOWA operator. We will study the main concepts of this new extension and we will develop a wide range of particular cases such as the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy median allocation, the fuzzy uniform allocation, etc.

The remainder of the paper is organized as follows. In Section 2 we review some aggregation operators such as the HOWA, the IOWA and the FOWA operator. Section 3 introduces the FIHOWA operator. Section 4 develops different families of FIHOWA operators. Finally, in Section 5 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Preliminaries

In this section, we briefly review the heavy OWA operator, the induced OWA operator and the fuzzy OWA operator.

2.1. Heavy OWA operator

The Heavy OWA operator is an extension of the OWA operator introduced in [31]. The reason for using this operator is because there are situations where the available information is independent from each other and this aspect needs to be considered in the aggregation. In this case, the difference with the OWA operator is that the sum of the weights is allowed to be between 1 and n instead of being restricted to sum up to 1. With this, we get a wider class of aggregation operators that include mean operators and totalling operators. In the following, we provide a definition of the HOWA operator as suggested by Yager [31].

Definition 1. A Heavy OWA operator of dimension n is a mapping $HOWA: R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

then:

$$HOWA(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad (1)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending HOWA (DHOWA) operator and the Ascending HOWA (AHOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AHOWA operator.

The HOWA operator is monotonic and commutative both for the DHOWA and the AHOWA operator. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$, for all i, then, $HOWA(a_1,\ldots, a_n) \geq HOWA(d_1,\ldots, d_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. Note that the HOWA operator is bounded by the minimum and the total operator.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [31], the OWA operator is found when the sum of the weights is one. The total operator is found when the sum of the weights is n. The minimum is found when $w_n = 1$, $w_j = 0$ for all $j \neq n$ and the sum of the weights is one. We should note that these results could also be obtained for the AHOWA operators.

Another interesting issue to comment is the sum of the elements of the weighting vector W that is denoted by Yager [31] as $|W|$ and it is called the magnitude of W. In order to normalize this feature, Yager introduced a characterizing parameter called the beta value of the vector W. It was defined as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be seen, if $\beta = 1$, we get the total operator and if $\beta = 0$, we get the usual OWA operator. Note that it is possible to look to the negation of β [31].

Once analysed the magnitude of W, it is possible to study the measures used for characterizing the weighting vector of the HOWA operator such as the attitudinal character [31] and the divergence of W [15]. Note that other measures have been studied in [16,31].

The attitudinal character is defined as follows:

$$\alpha(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \qquad (2)$$

As it can be seen, $\alpha(W) \in [0, 1]$. Note that the total operator has $\alpha(W) = 0.5$.

The divergence of W, is defined as follows:

$$Div(W) = \frac{1}{|W|} \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \qquad (3)$$

Note that if $|W| = n$, we get the divergence for the total operator and it is the same divergence than the average. That is, $Div(W) = (1/12)[(n + 1)/(n - 1)]$.

Note also that these measures are reduced to the usual definitions of the OWA operator when $|W| = 1$.

By using the AHOWA operator, it is also possible to obtain these four measures. It is straightforward by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AHOWA operator.

2.2. Induced OWA operator

The Induced OWA (IOWA) operator is an extension of the OWA operator introduced in [34]. In this case, the reordering step is not developed with the values of the arguments a_i. Here, the reordering step is induced by another mechanism represented as u_i, where the ordered position of the arguments a_i depends upon the values of the inducing variable u_i. It can be defined as follows.

Definition 2. An IOWA operator of dimension n is a mapping $IOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

then:

$$IOWA(\langle u_1,a_1\rangle, \langle u_2,a_2\rangle\ldots, \langle u_n,a_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{4}$$

where b_j is the a_i value of the OWA pair $\langle u_i,a_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and a_i is the argument variable.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending IOWA (DIOWA) operator and the Ascending IOWA (AIOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DIOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AIOWA operator.

The IOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent [34] both for the DIOWA and the AIOWA operator.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example [34], the maximum is found when $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$. The minimum is obtained when $w_p = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq p$, and $u_p = \text{Min}\{a_i\}$. The average is found when $w_j = 1/n$, for all j. The Hurwicz criteria is obtained when $w_p = \alpha$, $w_q = 1 - \alpha$, $w_j = 0$ for all $j \neq p$, q, and $u_p = \text{Max}\{a_i\}$, $u_q = \text{Min}\{a_i\}$. The weighted average is found when $u_i = i$, for all i, where i is the ordered position of the a_i. Finally, the OWA operator is obtained when $u_i = a_i$, for all i. Note that a similar analysis could be developed with the AIOWA operator.

2.3. Fuzzy OWA operator

The FOWA operator is an extension of the OWA operator that has been studied in [3,5,13,16,19]. Essentially, its main difference is that it uses uncertain information in the arguments of the OWA operator represented in the form of FN. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FN. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

Definition 3. Let Ψ be the set of FN. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN. Among others, we could mention as examples of FN the triangular FN, the trapezoidal FN, the L-R FN, the interval-valued FN, the intuitionistic FN, etc. For further information about FN, see for example [4,9,12,24,26,36].

Note that it is also possible to use FN in the weighting vector of the FOWA operator. The motivation for doing so is because sometimes it is not clear the attitudinal character of the decision maker and he prefers to use different degrees of optimism or pessimism in order to take the decision. Due to the fact that this problem has a lot of internal problems such as the problem that the sum of the weights is not exactly one, etc., we will not consider this situation here.

Note also that sometimes, it is not clear how to reorder the arguments. Then, it is necessary to establish a criterion for ranking FN.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator.

The FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of FOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the FOWA median operator, the S-FOWA, the centered-FOWA operator, etc. Further information about these families is found in [13].

Another interesting issue to consider is the measures for characterizing the weighting vector of the FOWA operator and the type of aggregation it performs. Among others, we can consider the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator. Further information about these measures is found in [13,16].

3. Fuzzy induced heavy OWA operator

The fuzzy induced heavy OWA (FIHOWA) operator is an extension of the OWA operator. It consists in using in the same operator the characteristics of the FOWA operator, the characteristics of the IOWA operator and the characteristics of the HOWA operator. In general, this operator uses uncertain information represented in the form of FN, with an inducing order in the reordering of the arguments and a sum of the weights that can range from 1 to n.

Definition 4. Let Ψ be the set of FN. A FIHOWA operator of dimension n is a mapping $FIHOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

then:

$$FIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{6}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the OWA pair $\langle u_i,\tilde{a}_i\rangle$ having the jth largest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is a FN. Among others, we could mention as examples of FN to be used in the FHOWA aggregation, the triangular FN, the trapezoidal FN, the L-R FN, the interval-valued FN, the intuitionistic FN, etc. For further information about FN, see for example [4,9,12,24,26,36].

Note also that in this case, it is also possible to use FN in the weighting vector of the FIHOWA operator. The motivation for doing so is because sometimes it is not clear the attitudinal character of the decision maker and he prefers to use different degrees of optimism or pessimism in order to take the decision.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the Descending FIHOWA (DFIHOWA) operator and the Ascending FIHOWA (AFIHOWA) operator. The DFIHOWA operator is defined as in Definition 4.

Definition 5. Let Ψ be the set of FN. An AFIHOWA operator of dimension n is a mapping $AFIHOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $1 \leq \sum_{j=1}^{n} w_j \leq n$

then:

$$AFIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle \ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{7}$$

where b_j is the $\tilde{a}_i$ value of the OWA pair $\langle u_i,\tilde{a}_i\rangle$ having the jth lowest u_i, u_i is the order inducing variable and $\tilde{a}_i$ is the argument variable in the form of a FN.

As it can be seen, the elements b_j (j = 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way according to the values of u_i: $u_1 \leq u_2 \leq \ldots \leq u_n$. Then, it is easy to see that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFIHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFIHOWA operator.

Note that it is also possible to express the FIHOWA operator in vector notation. Then, if we assume that B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j, called the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, we can express the FIHOWA operator as:

$$FIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = W^T B \tag{8}$$

The FIHOWA operator is commutative and monotonic. We can prove these properties with the following theorems.

Theorem 1 (Commutativity). Assume f is the FIHOWA operator, then

$$f\,(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = f\,(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle) \tag{9}$$

where $(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle)$ is any permutation of $(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle)$.

Proof. Let

$$f\,(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad \text{and}$$

$$f\,(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j d_j$$

Since $(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle)$ is a permutation of $(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle)$, we have $b_j = d_j$, and then

$$f\,(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = f\,(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Monotonicity). Assume f is the FIHOWA operator, if $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$ for all i, then

$$f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) \geq f(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_1\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_1\rangle) \tag{10}$$

Proof. Let

$$f\,(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \qquad \text{and}$$

$$f\,(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_n\rangle) = \sum_{j=1}^{n} w_j d_j$$

Since $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$ for all i, it follows that $b_j \geq d_j$, and then

$$f(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) \geq f(\langle u_1,\tilde{e}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{e}_1\rangle\ldots, \langle u_n,\tilde{e}_1\rangle) \qquad \blacksquare$$

Note that the FIHOWA operator is not bounded by the minimum and the maximum. In this case, it is bounded by the minimum and the total operator. That is:

$$\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \le FIHOWA(\langle u_1,\tilde{a}_1\rangle, \langle u_2,\tilde{a}_2\rangle,\ldots, \langle u_n,\tilde{a}_n\rangle) \le \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_i \tag{11}$$

Another issue to consider is the magnitude of the weighting vector $|W|$ for the FIHOWA operator. We can use a similar methodology as explained in [15] for the IHOWA operator because this feature does not depend upon the uncertain arguments. Then, we can define it as $\beta(W) = (|W| - 1) / (n - 1)$. Since $|W| \in [1, n]$, then, $\beta \in [0, 1]$. As it can be demonstrated, if $\beta = 1$, we get the fuzzy total operator and if $\beta = 0$, we get the usual FIOWA operator. Note that it is also possible to look to the negation of β. Then, $\rho = 1 - \beta$. If $\rho = 0$, we get the fuzzy total operator and if $\rho = 1$, we get the usual FIOWA operator.

With this magnitude, we could study some measures for characterizing the weighting vector of the FIHOWA operator such as the entropy of dispersion and the balance operator. The entropy of dispersion is defined as follows:

$$H(W) = -\frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n} w_j \ln\left(\frac{w_j}{|W|}\right) \tag{12}$$

This measure analyzes the amount of information being used in the aggregation. Note that for the total operator, $H(W) = -\ln n$.

For the balance operator, we get the following:

$$BAL(W) = \frac{1}{|W|}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{n+1-2j}{n-1}\right) w_j \tag{13}$$

This measure analyzes the degree of balance between favouring the first or the last elements of the reordering process. It can be shown that $BAL(W) \in [-1, 1]$. In this case, if $|W| = n$, we get the balance for the total operator.

Note also that these two measures are reduced to the usual definitions of the OWA operator [27,30] when $|W| = 1$.

A further interesting issue to comment when analyzing induced aggregation operators is the reordering of ties in the arguments. As it has been explained for the IHOWA operator [15], as the tie appears in the order inducing variable, the result of the aggregation will be different depending on which argument we select first. In order to solve this problem we recommend to follow the policy developed by Yager and Filev in [34] where they replace each argument of the tied OWA pairs $\langle u_i,a_i\rangle$ and $\langle u_j,a_j\rangle$, by their average: $(a_i + a_j) / 2$. The difference in the FIHOWA operator is that the arguments are FN. Note that if the tie is between more than two order inducing variables, then the policy to follow is to replace the arguments of these order inducing variables by their fuzzy average. Other policies could be used when dealing with ties such as the use of the weighted average instead of the simple average.

As it was explained in [34], the values used for the order inducing variables can be drawn from a space such that the only requirement is to have a linear ordering. Then, it is possible to use different kinds of attributes that permit, for example, to mix numbers with words in the aggregations following the ideas of Zadeh [37-38]. For the FIHOWA operators, this would mean that we have numerical arguments to be ordered by linguistic order inducing variables. Note that in some situations it is possible to use the implicit lexicographic ordering associated with words such as the ordering in the dictionaries [34].

4. Families of FIHOWA operators

Different families of FIHOWA operators can be obtained by using a different manifestation in the weighting vector. First, we will consider the cases when the FIHOWA operator becomes the FOWA operator, the FIOWA operator, the FHOWA operator, the fuzzy total operator, the fuzzy heavy weighted average (FHWA), the fuzzy weighted average and the fuzzy minimum criteria. The FOWA operator is obtained when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i and $\beta = 0$. The FIOWA operator is found when $\beta = 0$. The FHOWA operator is found when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i. The fuzzy total operator is obtained when $\beta = 1$. The FHWA is found when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument a_i. Note that if $\beta = 0$; in the FHWA, then, we get the fuzzy weighted average. Finally, the fuzzy minimum is obtained when $w_p = 1$, $w_j = 0$, for all $j \neq p$, $u_p = \text{Min}\{a_i\}$ and $\beta = 0$.

In the following, we will study another group of particular cases of FIHOWA operators based on the HOWA operator developed by Yager [31]. The first type we will study is the fuzzy push up allocation. In this case we get $w_j = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. The problem here is that the weights w_j are not associated with the attitudinal character $\alpha(W)$, so we cannot use this measure in the analysis. The only case where we can use it is when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i because then, the FIHOWA operator becomes the FHOWA operator. Note that if $\beta = 0$, $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. If $\beta = 1$, $W_{pu} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pu}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

The second type of allocation we will study is the dual allocation of the fuzzy push up. This type is known as the fuzzy push down allocation and it is formulated as $w_{n-j+1} = (1 \wedge (|W| - (j - 1))) \vee 0$. In this case, we find the same problem than the fuzzy push up allocation about the measure $\alpha(W)$ excepting for the special case when the FIHOWA operator becomes the FHOWA operator. Note that if $\beta = 0$, $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq$ n. If $\beta = 1$, $W_{pd} = W_T$, $w_j = 1$ for all j and $\alpha(W_{pd}) = \alpha(W_T) = 0.5$.

Another possible allocation for the FIHOWA operator is the fuzzy median type allocation. As it has been explained for the HOWA operator [31], in this case we have to distinguish between the cases when n is even or odd. If n is even, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+j} = w_{a+1-j} = [1 \wedge ((|W| - 2(j - 1))/2)] \vee 0$. If n is odd, we allocate the weights for $j = 1$ to a as $w_{a+1} = 1$ and $w_{a+1-j} = w_{a+1+j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$.

The next type of allocation we will study is the step-FIHOWA allocation. In this case, the weighting vector is focused at the Kth largest element. Assuming that $b = \text{Min}[(K - 1), (n - K)]$, we allocate the weights as $w_K = 1$ and $w_{K+j} = w_{K-j} = [1 \wedge ([(|W| - 1) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$, for j to b. If $b = K - 1$, $K - 1 < n - K$, then, $w_{j+2K-1} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. If $b = n - K$, $K - 1 > n - K$, then, $w_{2K-n-j} = [1 \wedge ((|W| - (1 + 2b)) - (j - 1))] \vee 0$, for $j = 1$ to $n - 2K + 1$. Note that if the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth largest of the a_i, then, the step-FIHOWA operator becomes the step-FHOWA operator [16]. In this case, it can be seen that for $K = 1$, the step-

FIHOWA becomes the fuzzy push up allocation, for $K = n$, the step-FIHOWA becomes the fuzzy push down allocation and for $K = (n + 1)/2$, it becomes the fuzzy median allocation.

A further type of allocation that can be used in the FIHOWA operator is the Arrow-Hurwicz aggregation [1]. Assuming that $|W| = q$ and dimension n. Let λ be our Hurwicz coefficient. We define the weights in two directions, push up and push down. First, we calculate $\omega_j = (1 \wedge (\lambda q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n and $\hat{w}_{n-j+1} = (1 \wedge ((1 - \lambda)q - (j - 1))) \vee 0$ for $j = 1$ to n. Then, we define the weights as $w_i = \omega_i + \hat{w}_i$.

Another special type of allocation for the FIHOWA operator is the fuzzy uniform allocation. In this case, we assign the weights as $w_j = |W|/n$ for all j. In this allocation we always find a neutral attitudinal character $\alpha(W) = 0.5$. Note that if $\beta = 0$, we get the fuzzy arithmetic mean.

A further special type of allocation for the FIHOWA operator is the olympic-FIHOWA allocation. As it is explained for the HOWA operator [31], we have to distinguish between two cases. In the first case $|W| < n - 2m$, we allocate the weight as $w_j = |W|/(n - 2m)$ for $j = m + 1$ to $n - m$, and $w_j = 0$ for $j = 1$ to m and for $j = n - m + 1$ to n. In the second case, where $|W| \geq n - 2m$, we allocate the weights as $w_j = 1$ for $j = m + 1$ to $n - m$ and $w_{m+1-j} = w_{n-m+j} = [1 \wedge ([(|W| - (n - 2m)) - 2(j - 1)]/2)] \vee 0$ for $j = 1$ to m. Note that it is also possible to consider the case when the FIHOWA operator becomes the FHOWA operator.

If we use a similar methodology for the AFIHOWA operator as it has been shown above for the DFIHOWA operator, we can also study a wide range of AFIHOWA operators such as the AFOWA operator, the AFIOWA operator, the AFHOWA operator, the fuzzy total operator, the fuzzy weighted average and the fuzzy minimum criteria. The AFOWA operator is obtained when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth lowest of the a_i and $\beta = 0$. The AFIOWA operator is found when $\beta = 0$. The AFHOWA operator is found when the ordered position of the order inducing variable u_i is the same than the ordered position of the argument b_j such that b_j is the jth lowest of the a_i. The fuzzy total operator is obtained when $\beta = 1$. The fuzzy weighted average is found when the ordered position of the u_i is the same than the ordered position of the argument a_i and $\beta = 0$. Finally, the fuzzy minimum is obtained when $w_p = 1$, $w_j = 0$, for all $j \neq p$, $u_p = \text{Min}\{a_i\}$ and $\beta = 0$.

Other families of AFIHOWA operators could be obtained such as the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy uniform allocation, the fuzzy median type, the step-AFIHOWA type, the olympic-AFIHOWA average and the Arrow-Hurwicz AFIHOWA aggregation. Note that the formulation of the ascending version is very similar to the descending one. The weights of the ascending families are related to the descending families by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFIHOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFIHOWA operator.

5. Numerical example

In the following, we present a numerical example about the use of the FIHOWA operator in an investment selection problem. Note that it is also possible to apply it to other fields such as the selection of financial products [17], the selection of suppliers [20], etc. We use different types of fuzzy induced heavy aggregation operators. Note that for each aggregation operator, we select the alternative with the highest result. Note also that we will use: $(a_1 + 2a_2 + a_3)/4$; for ranking FN in the aggregation and if there is still a tie, then, we will use a pessimistic point of view.

Assume a decision maker has five possible investment opportunities and he wants to select the alternative that adapts best to his interests.

1) A_1 is a food company.
2) A_2 is a car company.
3) A_3 is a TV company.
4) A_4 is a computer company.
5) A_5 is a chemical company.

The decision maker has brought together a group of experts in order to solve the problem. Each expert gives its opinion about the expected benefits coming from each investment. The results are shown in Table 1.

Table 1
Payoff Matrix

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1	(30,50,70)	(40,50,60)	(30,35,40)	(40,50,60)	(50,60,70)
A_2	(40,50,60)	(60,65,70)	(30,50,70)	(40,45,50)	(40,50,60)
A_3	(40,50,60)	(50,60,70)	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)
A_4	(50,60,70)	(30,40,50)	(50,60,70)	(30,40,50)	(40,50,60)
A_5	(20,30,40)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)	(70,80,90)

In this analysis, the experts have different information about the problem so each of them has considered different parts of the potential market that could give benefits to the investments. Due to this, some part of the information given by the experts is independent from the other ones. This means that some part of the information has not been considered by them. Therefore, the expected benefits given by them should by higher if they should have considered this information.

Initially, the decision maker has established his attitudinal character with the following inducing variables shown in Table 2.

Table 2
Inducing Variables

	E_1	E_2	E_3	E_4	E_5
A_1	12	16	18	14	20
A_2	15	10	18	20	17
A_3	19	14	12	18	16
A_4	20	12	13	14	18
A_5	14	17	19	15	13

Due to the fact that some part of the information is independent, the decision maker considers that the aggregated result coming from the opinion of the experts has to be a bit higher. After careful analysis, he believes that the independent information found by the experts will increase the final result in 50%. That is, the weighting vector W, instead of being 1, it will be 1.5. In this case, he will use the following weighting vector W = (0.2, 0.3, 0.3, 0.3, 0.4) for the cases where it is necessary. Note that the sum of the weights is 1.5 and it is possible to transform this weighting vector to a normal one dividing it by 1.5. In this case, for the aggregation operators that use a normal weighting vector, we get: W = (0.133, 0.2, 0.2, 0.2, 0.266).

First of all, we are going to analyze the results found in the aggregation with the FHOWA operator. That is, when we do not use the inducing variables in the FIHOWA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3
Aggregated Results 1

	FHAM	FHWA	FHOWA	AFHOWA
A_1	(57,73.5,90)	(59,74.5,90)	(55,71,87)	(59,76,93)
A_2	(63,78,93)	(63,78,93)	(61,76,91)	(65,80,95)
A_3	(63,78,93)	(62,77,92)	(61,76,91)	(65,80,95)
A_4	(60,75,90)	(59,74,89)	(58,73,88)	(62,77,92)
A_5	(60,75,90)	(65,80,95)	(55,70,85)	(65,80,95)

As we can see, with the FHAM and the FHOWA operator, the optimal choice is either A_2 or A_3. With the FHWA, the best alternative is A_5 and with the AFHOWA operator, the best are either A_2, A_3 or A_5.

Now, we are going to consider the results obtained with different families of FHOWA operators such as the push up FHOWA, the push down FHOWA, the olympic FHOWA and the Arrow-Hurwicz FHOWA allocation. Note that for the Arrow-Hurwicz type we assume λ = 0.6. Then, w_1 = 0.9 and w_5 = 0.6. The results are shown in Table 4.

Table 4
Aggregated Results 2

	Push up FH	Push down FH	Olympic FH	Arrow-Hurwicz
A_1	(70,85,100)	(45,60,75)	(55,75,95)	(63,75,87)
A_2	(80,90,100)	(55,70,85)	(55,75,95)	(78,85.5,93)
A_3	(75,90,105)	(50,65,80)	(65,80,95)	(63,78,93)
A_4	(75,90,105)	(45,60,75)	(60,75,90)	(63,78,93)
A_5	(95,110,125)	(35,50,65)	(55,70,85)	(75,90,105)

As we can see, the best choice for the push up and the Arrow-Hurwicz allocations is A_5. For the push down allocation, we get A_2 as optimal choice and for the olympic allocation, the best result is A_3.

Another interesting group of particular cases are found when the heavy aggregation is transformed in the usual one. That is, when we assume that there is no independent information and the expected result is going to be some kind of weighted average. Note that this cases are found when |W| = 1. In this example, we will consider the FOWA operator, the AFOWA operator, the FIOWA operator and the AFIOWA operator. The results are given in Table 5.

Table 5
Aggregated Results 3

	FOWA	AFOWA	FIOWA	AFIOWA
A_1	(36.6,47.3,58)	(39.3,50.6,62)	(36.6,48.3,60)	(39.3,49.6,60)
A_2	(40.6,50.6,60.6)	(43.3,53.3,63.3)	(43.3,53.3,63.3)	(40.6,50.6,60.6)
A_3	(40.6,50.6,60.6)	(43.3,53.3,63.3)	(42,52,62)	(42,52,62)
A_4	(38.6,48.6,58.6)	(41.3,51.3,61.3)	(38.6,48.6,58.6)	(41.3,51.3,61.3)
A_5	(36.6,46.6,56.6)	(43.3,53.3,63.3)	(42.6,52.6,62.6)	(37.3,47.3,57.3)

As we can see, the optimal investment for the FOWA operator is A_2 or A_3. For the AFOWA operator, either A_2, A_3 or A_5 are optimal. For the FIOWA operator, the best result is A_2 and for the AFIOWA operator, A_3.

In the following, we are going to consider the results obtained when using FIHOWA operators such as the DFIHOWA operator, the AFIHOWA operator, the push up FIHOWA and the push down FIHOWA allocations. The results are shown in Table 6.

Table 6
Aggregated Results 4

	FIHOWA	AFIHOWA	Push up FIH	Push down FIH
A_1	(55,72.5,90)	(59,74.5,90)	(65,77.5,90)	(50,75,100)
A_2	(65,80,95)	(61,76,91)	(55,70,85)	(80,90,100)
A_3	(63,78,93)	(63,78,93)	(75,90,105)	(65,80,95)
A_4	(58,73,88)	(62,77,92)	(70,85,100)	(55,70,85)
A_5	(64,79,94)	(56,71,86)	(45,60,75)	(80,95,110)

As we can see, the optimal investment if we use the FIHOWA operator is A_2. If we use the AFIHOWA operator or the push up allocation, then, the best result is A_3. And with the push down allocation, we get A_5 as optimal result.

Other families of FIHOWA operators that could be used in the analysis are the olympic FIHOWA allocation, the median FIHOWA allocation, the step-FIHOWA allocation and the Arrow-Hurwicz FIHOWA allocation. Note that for the Arrow-Hurwicz allocation we consider $\lambda = 0.6$ and for the step-FIHOWA we consider $k = 2$. The results are shown in Table 7.

Table 7
Aggregated Results 5

	Olympic FIH	Median FIH	Step FIH	Arrow-Hurwicz
A_1	(55,67.5,80)	(57.5,71.25,85)	(52.5,62.5,72.5)	(63,84,105)
A_2	(55,75,95)	(57.5,75,92.5)	(50,73.75,97.5)	(72,79.5,87)
A_3	(65,80,95)	(55,70,85)	(67.5,82.5,97.5)	(60,75,90)
A_4	(60,75,90)	(52.5,67.5,82.5)	(60,75,90)	(63,78,93)
A_5	(50,65,80)	(62.5,77.5,92.5)	(50,65,80)	(69,84,99)

As we can see, A_3 is the optimal investment if we use the olympic or the step-FIHOWA allocation. With the Arrow-Hurwicz allocation, we get A_1 as the optimal choice and with the median allocation, the best result is A_5.

If we establish an ordering of the investments depending on the aggregation operator used, we get the following results shown in Table 8. Note that this is very useful when the decision maker wants to consider more than one alternative.

Table 8
Ranking of the investments

	Ranking		Ranking
FHAM	$A_2=A_3 \succ A_4=A_5 \succ A_1$	FIOWA	$A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
FHWA	$A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$	AFIOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$
FHOWA	$A_2=A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5$	FIHOWA	$A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1$
AFHOWA	$A_2=A_3=A_5 \succ A_4 \succ A_1$	AFIHOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$
Push up FHOWA	$A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2 \succ A_1$	Push up FIHOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$
Push down FH	$A_2 \succ A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5$	Push down FIH	$A_5 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$
Olympic-FHOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_5$	Olympic-FIHOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5$
Arrow-Hurwicz-FH	$A_5 \succ A_2 \succ A_3=A_4 \succ A_1$	Median-FIHOWA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
FOWA	$A_2=A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5$	Step-FIHOWA	$A_3 \succ A_4 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1$
AFOWA	$A_2=A_3=A_5 \succ A_4 \succ A_1$	Arr-Hur-FIHOWA	$A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the investments will be different. Note that the decision maker will use the aggregation operator that better fits his interests.

6. Conclusions

In this paper we have introduced a new extension of the OWA operator. We have called it the fuzzy induced heavy OWA (FIHOWA) operator. Basically, we could say that this operator uses the main characteristics of three well known operators: the HOWA operator, the IOWA operator and the FOWA operator. Therefore, this operator consists in using uncertain information represented in the form of FN in situations where the weighting vector can range from the usual FOWA operator to the fuzzy total operator and with a reordering step of the arguments that depends on a complex mechanism based on inducing order variables. Focusing on the perspective of the HOWA operator, we could say that we have considered situations of the HOWA operator where the reordering of the arguments is assessed with order inducing variables and where the available information is uncertain and can be assessed with FN.

We have analyzed this new operator giving its definition and studying some of its main properties. We have also developed a wide range of families of FIHOWA operators such as the fuzzy push up allocation, the fuzzy push down allocation, the fuzzy median allocation, the fuzzy uniform allocation, etc.

In future research, we expect to develop new extensions of the FIHOWA operator by considering other characteristics in the aggregation such as the possibility of using FN in the inducing variables and in the weighting vector of the FIHOWA operator.

References

[1] K.J. Arrow and L. Hurwicz, An optimality criterion for decision making under ignorance, in: *Uncertainty and Expectations in Economics*, C.F. Carter, J.L. Ford, Eds., Basil Blackwell, Oxford, 1972.

[2] T. Calvo, G. Mayor and R. Mesiar, *Aggregation operators: New trends and applications*, Physica-Verlag, New York, 2002.

[3] G. Canfora and L. Troiano, An extensive comparison between OWA and OFNWA aggregation, in: *Proceedings of the 8th SIGEF Congress*, Napoli, Italy, 2001.

[4] S.S.L. Chang and L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* **2** (1972), 30-34.

[5] S.J. Chen and S.M. Chen, A new method for handling multi-criteria fuzzy decision making problems using FN-IOWA operators, *Cybernetics and Systems* **34** (2003), 109-137.

[6] F. Chiclana, F. Herrera and E. Herrera-Viedma, Rationality of induced ordered weighted operators based on the reliability of the source of information in group decision making, *Kybernetika* **40** (2004), 121-142.

[7] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma and S. Alonso, Induced ordered weighted geometric operators and their use in the aggregation of multiplicative preference relations, *International Journal of Intelligent Systems* **19** (2004), 233-255.

[8] F. Chiclana, E. Herrera-Viedma, F. Herrera and S. Alonso, Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations, *European Journal of Operational Research* **182** (2007), 383-399.

[9] D. Dubois and H. Prade, *Fuzzy sets and systems: theory and applications*, Academic Press, New York, 1980.

[10] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana and F. Herrera, A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **15** (2007), 863-877.

[11] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera and S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* **37** (2007), 176-189.

[12] A. Kaufmann and M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Van Nostrand Rheinhold, New York, 1985.

[13] J.M. Merigó, *New Extensions to the OWA Operators and its application in business decision making*, Thesis (in Spanish), Department of Business Administration, University of Barcelona, Spain, 2007.

[14] J.M. Merigó and M. Casanovas, Geometric operators in decision making with minimization of regret, *International Journal of Computer Systems Science and Engineering* **1** (2007), 111-118.

[15] J.M. Merigó and M. Casanovas, Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators, *Fuzzy Sets and Systems*, to be published.

[16] J.M. Merigó and M. Casanovas, Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators, *International Journal of Information Technology* **4** (2007), 177-182.

[17] J.M. Merigó and A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Economic Review* **12** (2007), 35-50.

[18] H.B. Mitchell and D.D. Estrakh, A modified OWA operator and its use in lossless DPCM image compression, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **5** (1997), 429-436.
[19] H.B. Mitchell and D.D. Estrakh, An OWA operator with fuzzy ranks, *International Journal of Intelligent Systems* **13** (1998), 69-81.
[20] W.Y. Wu, C. Lin, J.Y. Kung and C.T. Lin, A new fuzzy TOPSIS for fuzzy MADM problems under group decisions, *Journal of Intelligent & Fuzzy Systems* **18** (2007), 109-115.
[21] Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, *Decision Support Systems* **41** (2006), 488-499.
[22] Z.S. Xu, Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, *Information Fusion* **7** (2006), 231-238.
[23] Z.S. Xu, On generalized induced linguistic aggregation operators, *International Journal of General Systems* **35** (2006), 17-28.
[24] Z.S. Xu, Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, in press.
[25] Z.S. Xu and Q.L. Da, An overview of operators for aggregating information, *International Journal of Intelligent Systems* **18** (2003), 953-969.
[26] Z.S. Xu and R.R. Yager, Some geometric aggregation operators based on intuitionistic fuzzy sets, *International Journal of General Systems* **35** (2006), 417-433.
[27] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* **18** (1988), 183-190.
[28] R.R. Yager, On generalized measures of realization in uncertain environments, *Theory and Decision* **33** (1992), 41-69.
[29] R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* **59** (1993), 125-148.
[30] R.R. Yager, Constrained OWA aggregation, *Fuzzy Sets and Systems* **81** (1996), 89-101.
[31] R.R. Yager, Heavy OWA operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **1** (2002), 379-397.
[32] R.R. Yager, Monitored heavy fuzzy measures and their role in decision making under uncertainty, *Fuzzy Sets and Systems* **139** (2003), 491-513.
[33] R.R. Yager, Induced aggregation operators, *Fuzzy Sets and Systems* **137** (2003), 59-69.
[34] R.R. Yager and D.P. Filev, Induced ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Systems Man Cybernetics B* **29** (1999), 141-150.
[35] R.R. Yager and J. Kacprzyck, *The ordered weighted averaging operators: Theory and applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[36] L.A. Zadeh, The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning: Part 1, *Information Sciences* **8** (1975), 199-249; Part 2, *Information Sciences* **8** (1975), 301-357; Part 3, *Information Sciences* **9** (1975), 43-80.
[37] L.A. Zadeh, Fuzzy logic = computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **4** (1996), 103-111.
[38] L.A. Zadeh, Toward a theory of fuzzy information granulation and its centrality in human reasoning and fuzzy logic, *Fuzzy Sets and Systems* **90** (1997), 111-127.

14.2.21. Artículo de revista 21. – Enviado a *Knowledge Based Systems*

The generalized hybrid averaging operator and its application in decision making

José M. Merigó[12], Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We present the generalized hybrid averaging (GHA) operator. It is a new aggregation operator that generalizes the hybrid averaging (HA) operator by using the generalized mean. Then, we are able to generalize a wide range of mean operators such as the HA, the hybrid geometric averaging (HGA), the hybrid quadratic averaging (HQA), the generalized ordered weighted averaging (GOWA) operator, the weighted generalized mean (WGM), etc. We further generalize the GHA by using quasi-arithmetic means. Then, we obtain the quasi-arithmetic hybrid averaging (Quasi-HA) operator. Finally, we apply the new approach in a financial decision making problem.

Keywords: Aggregation operator; OWA operator; Generalized mean; Decision making

1. Introduction

Different types of aggregation operators are found in the literature for aggregating the information. A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator [30]. It provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the maximum, the minimum and the average criteria. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications [1-7,10-40].

In [29], Xu and Da introduced the hybrid averaging (HA) operator. It is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator in the same formulation. Then, it is able to consider in the same problem the attitudinal character of the decision maker and the subjective probablity. For further research on the HA operator, see [21-24].

Another interesting aggregation operator is the generalized OWA (GOWA) operator [13,37]. It generalizes the OWA operator by using generalized means [8-9]. Then, it includes as special cases, the maximum, the minimum and the average criteria, and a wide range of other means such as the OWA operator itself, the ordered weighted geometric (OWG) operator [7,28], the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator, etc. The GOWA operator has been further generalized by using quasi-arithmetic means [4] obtaining the Quasi-OWA operator [10]. For further research on the GOWA operator, see [4-6,17].

In this paper, we introduce the generalized hybrid averaging (GHA) operator. It generalizes the HA operator by using generalized means. Then, it includes in the same formulation all the cases coming from the generalized mean such as the arithmetic

[12] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

mean, the geometric mean, the quadratic mean, etc, and a lot of other cases such as the weighted generalized mean (WGM) and the generalized ordered weighted averaging (GOWA) operator. We also obtain new aggregation operators such as the hybrid geometric averaging (HGA) operator, the hybrid quadratic averaging (HQA) operator, the hybrid harmonic averaging (HHA) operator, etc. We further generalize the GHA operator by using quasi-arithmetic means, obtaining the quasi-HA operator. We also develop an application of the new approach in a financial decision making problem where we can see how it can be implemented in the real life. The main advantage of using the GHA is that it gives a more complete view of the problem to the decision maker because it generalizes a wide range of mean operators.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic aggregation operators. In Section 3, we present the GHA operator. Section 4 studies different families of GHA operators. In Section 5, we introduce the Quasi-HA operator. Section 6 develops an application of the new approach in a financial decision making problem. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions found in the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we will briefly describe the HA operator and the GOWA operator.

2.1. Hybrid averaging operator

The HA operator [29] is an aggregation operator that uses the WA and the OWA operator in the same formulation. Then, it is possible to consider in the same problem, the attitudinal character of the decision maker and its subjective probability. One of its main characteristics is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum, the arithmetic mean (AM), the WA and the OWA operator. It can be defined as follows.

Definition 1. An HA operator of dimension n is a mapping HA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$HA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the a_i, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending HA (DHA) operator and the ascending HA (AHA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AHA operator.

Note that different families of HA operators are found by using a different manifestation in the weighting vector such as the step-HA operator, the window-HA operator, the median-HA operator, the centered-HA operator, etc.

2.2. Generalized OWA operator

The GOWA operator [13,37] is a generalization of the OWA operator by using generalized means. It includes a wide range of means such as the arithmetic mean (AM), the OWG operator, etc. It can be defined as follows.

Definition 2. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is explained in [37], the GOWA operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and the weighted generalized mean, among others. Other families of GOWA operators are found in [13,34] such as the step-GOWA operator, the olympic-GOWA, the S-GOWA, etc.

If we analyze different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases of GOWA operators such as the usual OWA operator, the OWG operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. When $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, we get the OWG operator. When $\lambda = -1$, the OWHA operator. When $\lambda = 2$, the OWQA operator.

If we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$ [4], then, the GOWA operator becomes the Quasi-OWA operator [10]. It can be formulated as follows.

Definition 3. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping QOWA: $R^n \rightarrow$ R that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0, 1]$, then:

$$\text{QOWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

3. The generalized hybrid averaging operator

The GHA operator is a generalization of the HA operator by using generalized means. It includes in the same formulation the weighted generalized mean and the

GOWA operator. Then, this operator includes the WA, the OWA and the OWG operator as special cases. It is defined as follows.

Definition 4. A GHA operator of dimension n is a mapping GHA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the a_i, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that if $\lambda \leq 0$, we can only use positive numbers R^+, in order to get consistent results. From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending GHA (DGHA) operator and the ascending GHA (AGHA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGHA operator. As we can see, the main difference is that in the AGHA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the DGHA (or GHA) they are ordered in a decreasing way.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the GHA operator can be expressed as:

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the GHA operator can be expressed as:

$$GHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

The GHA operator is monotonic, commutative and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). Assume f is the GHA operator, if $a_i \geq u_i$, for all a_i, then

$$f(a_1, a_2 \ldots, a_n) \geq f(u_1, u_2 \ldots, u_n) \tag{7}$$

Proof. Let

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

$$f(u_1, u_2\ldots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j v_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

Since $a_i \geq u_i$, for all a_i, it follows that, $b_i \geq v_i$, and then

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) \geq f(u_1, u_2\ldots, u_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). Assume f is the GHA operator, then

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = f(u_1, u_2\ldots, u_n) \tag{10}$$

where $(u_1, u_2\ldots, u_n)$ is any permutation of the arguments $(a_1, a_2\ldots, a_n)$.

Proof. Let

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

$$f(u_1, u_2\ldots, u_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j v_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

Since $(u_1, u_2\ldots, u_n)$ is a permutation of $(a_1, a_2\ldots, a_n)$, we have $b_j = v_j$, for all j, and then

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = f(u_1, u_2\ldots, u_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). Assume f is the GHA operator, if $a_i = a$, for all a_i, then

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = a \tag{13}$$

Proof. Since $a_i = a$, for all a_i, we have

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{14}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(a_1, a_2\ldots, a_n) = a \qquad \blacksquare$$

Note that this operator is not bounded by the maximum and the minimum because for some special situations it can be higher and lower than the maximum and the minimum, respectively. Mainly, this problem is found when using the hybrid maximum and minimum in the aggregation and in similar situations.

Another interesting issue to consider are the measures for characterizing the weighting vector $W = (w_1, w_2\ldots, w_n)$ of the GHA operator such as the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator. Note that these measures follow the same methodology as the original version developed for the OWA operator [30,34-35].

Using a similar methodology as it was used by Yager [37] for the GOWA operator we can define the attitudinal character as follows:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

For the entropy of dispersion, we get:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{16}$$

For the divergence of W:

$$DIV(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{17}$$

And for the balance operator:

$$BAL\ (W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1} \right) w_j \tag{18}$$

Note that in this case, we could also distinguish between descending and ascending orders.

4. Families of GHA operators

In the GHA operator we find different families of aggregation operators. Mainly, we can classify them in two types. The first type represents all the families found in the weighting vector W and the second type, the families found in the parameter λ.

4.1. Analysing the weighting vector *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the GHA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the hybrid maximum, the hybrid minimum, the generalized mean (GM), the weighted generalized mean (WGM) and the GOWA operator.

The hybrid maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The hybrid minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and w_j

= 0, for all $j \neq k$, we get for any λ, $GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The GM is found when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all a_i. The WGM is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. The GOWA is found when $\omega_i = 1/n$, for all a_i.

Following a similar methodology as it has been developed in [1-3,13-15,18-20,26,31-33,36,38-40], we could study other particular cases of the GHA operator such as the step-GHA, the window-GHA, the olympic-GHA, the centered-GHA operator, the S-GHA operator, the median-GHA, the E-Z GHA, the maximal entropy GHA weights, the minimal variability GHA, the minimax disparity GHA weights, the nonmonotonic GHA operator, etc.

For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-GHA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-GHA is transformed in the hybrid maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-GHA becomes the hybrid minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-GHA is transformed in the GM.

The olympic-GHA, based on the olympic average [33], is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-GHA is transformed in the median-GHA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-GHA is transformed in the olympic-GHA.

Note that the median can also be used as GHA operators. For the median-GHA, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

For the weighted median-GHA, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z GHA weights that it is based on the E-Z OWA weights [36]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j* = 1$ to $n - q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z GHA becomes the hybrid maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z GHA becomes the hybrid minimum.

A further interesting family is the S-GHA operator. It can be subdivided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-GHA operator. The generalized S-GHA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-GHA operator becomes the "andlike" S-GHA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-GHA operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the generalized hybrid Hurwicz criteria.

Another family of aggregation operator that could be used is the centered-GHA operator. Following the same methodology than [38], we could define a GHA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. Note that these properties have to be accomplished for the weighting vector w of the OWA operator but not necessarily for the weighting vector ω of the WA. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-GHA operator. Another particular situation of the centered-GHA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-GHA operator.

4.2. Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual HA operator, the hybrid geometric averaging (HGA) operator, the hybrid harmonic averaging (HHA) operator and the hybrid quadratic averaging (HQA) operator.

When $\lambda = 1$, we get the HA operator.

$$GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{19}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WA and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the OWA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the arithmetic mean (AM). From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DHA operator and the AHA operator.

When $\lambda = 0$, the GHA operator becomes the HGA operator.

$$GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{20}$$

If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WGM and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the OWG operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the geometric mean (GM). In this case, we can also distinguish between descending (DHGA) and ascending (AHGA).

When $\lambda = -1$, we get the HHA operator.

$$GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{21}$$

In this case, we get the descending HHA (DHHA) operator and the ascending HHA (AHHA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the weighted harmonic mean (WHM) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the harmonic mean (HM).

When $\lambda = 2$, we get the HQA operator.

$$GHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{22}$$

In this case, we can also distinguish between the descending HQA (DHQA) operator and the ascending HQA (AHQA) operator. If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the WQM and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the OWQA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the quadratic mean (QM).

Note that we could analyze other families by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1 where we study different properties and families of the aggregation operator.

5. The Quasi-HA operator

Going a step further, it is possible to generalize the GHA operator by using quasi-arithmetic means in a similar way as it was done for the GOWA operator [4]. The result is the Quasi-HA operator which is a hybrid version of the Quasi-OWA operator [10]. It can be defined as follows.

Definition 4. A Quasi-HA operator of dimension n is a mapping QHA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}HA(a_1, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{23}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i a_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the a_i, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

As we can see, we replace b^λ with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AHA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the GHA operator, are also included in this generalization. For example, we could study different families of Quasi-HA operators such as the Quasi-OWA, the Quasi-WA, the Quasi-step-HA, the Quasi-window-HA, the Quasi-median-HA, the Quasi-olympic-HA, the Quasi-centered-HA, etc.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the Quasi-HA operator. Following a similar methodology than [4], we can define the following measure:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{24}$$

Note that in this case it is also possible to consider other measures such as the entropy of dispersion, the divergence of W or the balance operator. Their formulation is practically the same as it has been explained in the end of Section 3 for the GHA operator.

A further interesting aspect is that the Quasi-HA operator includes a lot of other particular cases that are not included in the GHA operator. For example, we could mention the trigonometric HA operator, the exponential HA operator and the radical HA operator.

The trigonometric HA is found when $g_1(t) = \sin((\pi/2)\ t)$, $g_2(t) = \cos((\pi/2)\ t)$ and $g_3(t) = \tan((\pi/2)\ t)$ are the generating functions. Then, the trigonometric HA functions are:

$$HA(a_1, \ldots, a_n) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \sin\left(\frac{\pi}{2} b_j\right)\right) \tag{25}$$

$$HA(a_1, \ldots, a_n) = \frac{2}{\pi}\arccos\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \cos\left(\frac{\pi}{2} b_j\right)\right) \tag{26}$$

$$HA(a_1, \ldots, a_n) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tan\left(\frac{\pi}{2} b_j\right)\right) \tag{27}$$

The exponential HA is found when $g(t) = \gamma^t$, if $\gamma \neq 1$, and $g(t) = t$, if $\gamma = 1$. Then, the exponential HA operator is: $\log_\gamma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \gamma^{b_j}\right)$, if $\gamma \neq 1$; and the HA if $\gamma = 1$.

The radical HA is found if $\gamma > 0$, $\gamma \neq 1$, and the generating function is $g(t) = \gamma^{1/t}$. Then, the radical IOWA operator is:

$$HA(a_1, \ldots, a_n) = \left(\log_\gamma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \gamma^{1/b_j}\right)\right)^{-1} \tag{28}$$

Finally, note that in these cases it is also possible to study their properties and different particular cases as it has been explained in Section 3 and 4.1.

6. Numerical example

Now, we are going to develop an application of the new approach in a decision making problem. We will analyze an investment selection problem where an investor is looking for an optimal investment. Note that other decision making applications could be developed such as the selection of financial products [16], the selection of strategies, the selection of human resources, etc.

We will develop the analysis considering a wide range of particular cases of the GHA operator such as the maximum, the minimum, the arithmetic mean (AM), the WA, the OWA, the OWQA, the HA, the AHA, the HQA and the HGA. Note that we do not consider the hybrid maximum and the hybrid minimum because sometimes its results are inconsistent. This inconsistency happens because the results may be higher than the maximum and lower than the minimum. Due to this, we will not use them in this example. The hybrid maximum and minimum are useful for taking decisions but they do not correctly fuse the information in the sense that they are not bounded by the maximum and minimum arguments.

Assume an investor wants to invest some money in an enterprise in order to get high profits. Initially, he considers five possible alternatives.

- A_1 is a computer company.
- A_2 is a food company.
- A_3 is a TV company.
- A_4 is a chemical company.
- A_5 is a car company.

In order to evaluate these investments, the investor uses a group of experts. This group of experts considers that the key factor is the economic environment of the economy. After detailed analysis, they consider five possible situations for the economic environment: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Normal, S_4 = Good, S_5 = Very good. The expected results depending on the state of nature S_i and the alternative A_k are shown in Table 1.

Table 1
Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	30	60	50	80	20
A_2	30	30	90	60	40
A_3	70	40	50	20	60
A_4	50	70	30	40	50
A_5	90	10	10	70	70

In this example, we assume that the group of experts assumes the following weighting vector for all the cases of the WA and the OWA operator: W = (0.1, 0.1, 0.2, 0.3, 0.3).

With this information, it is possible to aggregate it in order to take a decision. First, we consider the results obtained with some basic aggregation operators. The results are shown in Table 2.

Table 2
Aggregated results 1

	Max	Min	AM	WA	OWA
A_1	80	20	48	49	39
A_2	90	30	50	54	44
A_3	70	20	48	45	41
A_4	70	30	48	45	40
A_5	90	10	50	54	36

As we can see, the optimal investment is different depending on the aggregation operator used.

In the following, we will consider other particular cases of the GHA operator with more complexity. The results are shown in Table 3.

Table 3
Aggregated results 2

	OWQA	HA	AHA	HQA	HGA
A_1	43.4	36.5	61.5	46.9	29.4
A_2	45.0	39	69	49.7	28.3
A_3	44.1	36	54	41.1	32.1
A_4	44.6	37	53	40.3	34.4
A_5	48.3	34.5	73.5	51.4	17.5

Again, we can see that the optimal investment is not the same for all the aggregations used. Note that other types of GHA operators may be used in the analysis such as the ones explained in Section 4.

A further interesting issue is to establish an ordering of the investments. This is very useful when the investor wants to consider more than one alternative. The results are shown in Table 4.

Table 4
Ordering of the investments

	Ordering
Max	$A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 = A_2$
Min	$A_2 = A_4 \succ A_1 = A_3 \succ A_5$
AM	$A_2 = A_5 \succ A_1 = A_3 = A_4$
WA	$A_2 = A_5 \succ A_1 \succ A_3 = A_4$
OWA	$A_2 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5$
OWQA	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_1$
HA	$A_2 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
AHA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
HQA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
HGA	$A_4 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$

As we can see, we get different orderings of the investments depending on the aggregation operator used.

7. Conclusions

We have introduced a new type of aggregation operator: the generalized hybrid averaging (GHA) operator. It is a generalization of the hybrid averaging (HA) operator by using generalized means. We have seen that it is very useful when we want to consider subjective probabilities and the attitudinal character of the decision maker in the same problem. With this generalization we have found different special cases such as the hybrid geometric averaging (HGA), the hybrid quadratic averaging (HQA), the WA, the OWA operator, the WGM, the OWG operator, the WQM, the OWQA operator, etc. We have further generalized the GHA operator by using quasi-arithmetic means. Then, we have obtained the quasi-HA operator.

We have ended the paper with an application of the new approach in a decision making problem. We have focussed in a financial problem where we have seen the usefulness of the new approach in the selection of investments. The main advantage of using the GHA operator is that it gives a complete view of the decision problem because it includes a lot of particular cases that can be used in the aggregation of the information according to the interests of the decision maker.

In future research, we expect to develop further extensions of the GHA operator by adding new characteristics in the problem such as the use of order inducing variables, interval numbers, fuzzy numbers, linguistic variables, etc. We will also consider other decision making applications.

References

[1] G.R. Amin, Note on a preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 3636-3638.

[2] B.S. Ahn, Preference relation approach for obtaining OWA operator weights, International Journal of Approximate Reasoning 47 (2008) 166-178.

[3] B.S. Ahn, H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, International Journal of Intelligent Systems 23 (2008) 33-49.

[4] G. Beliakov, Learning weights in the generalized OWA operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 4 (2005) 119-130.

[5] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, (Springer-Verlag, Berlin, 2007).

[6] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, (Physica-Verlag, New York, 2002).

[7] F. Chiclana, F. Herrera, E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.

[8] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektro-technickog Faculteta Beograd, Serija Mate-matika i Fizika, No. 483, pp. 147-158, 1974.

[9] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as a model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.

[10] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.

[11] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 37 (2007) 176-189.

[12] Y.C. Hu, J.F. Tsai, Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 15 (2007) 717-735.

[13] N. Karayiannis, Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted aggregation operators, IEEE Transactions on Neural Networks 11 (2000) 1093-1105.

[14] X. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, International Journal of Approximate Reasoning 45 (2007) 68-81.

[15] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 77-97.

[16] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 13 (2007) 35-50.

[17] J.H. Wang, J. Hao, A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14 (2006) 435-445.

[18] Y.M. Wang, Y. Luo, Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, Information Sciences 177 (2007) 3356-3363.

[19] Y.M. Wang, C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 1867-1877.
[20] J. Wu, C.Y. Liang, Y.Q. Huang, An argument-dependent approach to determining OWA operator weights based on the rule of maximum entropy, International Journal of Intelligent Systems 22 (2007) 209-221.
[21] Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, Information Sciences 166 (2004) 19-30.
[22] Z.S. Xu, A note on linguistic hybrid arithmetic averaging operator in multiple attribute group decision making with linguistic information, Group Decision and Negotiation 15 (2006) 593-604.
[23] Z.S. Xu, Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment, Fuzzy Optimization and Decision Making 6 (2007) 221-236.
[24] Z.S. Xu, Intuitionistic fuzzy aggregation operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15 (2007) 1179-1187.
[25] Z.S. Xu, A method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in linguistic setting, Knowledge-Based Systems 20 (2007) 719-725.
[26] Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, Information Fusion 9 (2008) 310-316.
[27] Z.S. Xu, On multi-period multi-attribute decision making, Knowledge-Based Systems 21 (2008) 164-171.
[28] Z.S. Xu, Q.L. Da, The ordered weighted geometric averaging operators, International Journal of Intelligent Systems 17 (2002) 709-716.
[29] Z.S. Xu, Q.L. Da, An overview of operators for aggregating information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[30] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18 (1988) 183-190.
[31] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[32] R.R. Yager, On weighted median aggregation, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2 (1994) 101-113.
[33] R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, International Journal of Intelligent Systems 11 (1996) 49-73.
[34] R.R. Yager, Constrained OWA aggregation, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 89-101.
[35] R.R. Yager, Heavy OWA operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 1 (2002) 379-397.
[36] R.R. Yager, E-Z OWA weights, in: Proc. 10th International Fuzzy Systems Association (IFSA) World Congress, Istanbul, Turkey, 2003, pp. 39-42.
[37] R.R. Yager, Generalized OWA aggregation operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (2004) 93-107.
[38] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[39] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators. International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.
[40] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, (Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997).

14.2.22. Artículo de revista 22. – Enviado a *Cybernetics & Systems*

THE FUZZY GENERALIZED OWA OPERATOR AND ITS APPLICATION IN STRATEGIC DECISION MAKING

José M. Merigó[13], Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract
We present the fuzzy generalized OWA (FGOWA) operator. It is an extension of the GOWA operator for uncertain situations where the available information is given in the form of fuzzy numbers. This generalization includes a wide range of mean operators such as the fuzzy average (FA), the fuzzy OWA (FOWA) and the fuzzy generalized mean (FGM). We also develop a further generalization by using quasi-arithmetic means that we call the Quasi-FOWA operator. The paper ends with an illustrative example where we apply the new approach in the selection of strategies.

Keywords: Aggregation operators, Fuzzy OWA operator, Decision making, Selection of strategies.

1. Introduction

Different types of aggregation operators are found in the literature for aggregating the information (Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002). A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the maximum, the minimum and the average criteria. Since its appearance, the OWA operator has been used in a wide range of applications such as (Ahn and Park, 2008; Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Chang et al., 2008; Chen and Chen, 2003; 2005; Cheng et al., 2006; Fodor et al., 1995; Hu and Tsai, 2007; Karayiannis, 2000; Merigó and Casanovas, 2008; Merigó and Gil-Lafuente, 2007; Wu and Chen, 2007; Yager, 1993; 1994; 1996a; 1996b; 2002; 2003; 2004; 2007; 2008; Yager and Kacprzyk, 1997; Yeh et al., 2007; Zarghami et al., 2008).

When using the OWA operator, it is assumed that the available information are exact numbers or singletons. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, it is necessary to use another approach that is able to assess the uncertainty such as the use of fuzzy numbers (FNs). With the use of FNs, we are able to analyze the best and worst possible scenario and the possibility that the internal values of the fuzzy interval will occur. This approach has received different names. In this paper, we will refer to it as the fuzzy OWA operator. The main characteristic of this operator is that it uses uncertain information in the aggregation represented by FNs. The FOWA operator has been studied by different

---

[13] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

authors such as (Chang et al., 2006; Chen and Chen, 2003; 2005; Cheng et al., 2006; Merigó and Casanovas, 2008; Mitchell and Estrakh, 1998; Yager, 2008; Zarghami et al., 2008).

In (Karayiannis, 2000; Yager, 2004), it has been suggested a generalization of the OWA operator by using generalized means (Dyckhoff and Pedrycz, 1984). It is known as the generalized OWA (GOWA) operator. With this generalization, it is possible to include the special cases found in the OWA operator such as the maximum and the minimum, and the special cases found in the generalized mean such as the geometric and the harmonic mean. The GOWA operator has been further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005). Then, the result obtained is the Quasi-OWA operator suggested in (Fodor et. al., 1995).

The objective of this paper is to present the fuzzy generalized OWA (FGOWA) operator. It is a fuzzy aggregation operator that uses the main characteristics of the GOWA and the FOWA operator. Then, it uses generalized means and uncertain information represented in the form of FNs. The main advantage of the FGOWA operator is that it is able to assess the uncertain information in a more complete way because it represents the best and worst scenario and the possibility that the internal values will occur. It also includes a wide range of fuzzy aggregation operators such as the fuzzy average (FA), the fuzzy weighted average (FWA), the fuzzy OWA (FOWA), the fuzzy generalized mean (FGM), the fuzzy weighted generalized mean (FWGM), etc.

We further generalize the FGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-FOWA operator. It generalizes the FGOWA and a lot of other cases not included in the FGOWA operator. This aggregation operator can be seen as an extension of the OWA operator that uses quasi-arithmetic means and uncertain information represented in the form of FNs.

We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. The main advantage of the FGOWA operator in this type of problems is that it is possible to consider a wide range of fuzzy aggregation operators. Then, the decision maker can consider different results depending on the aggregation operator used. Obviously, depending on his interests, the decision maker will select a different type of aggregation operator that will lead to different decisions.

This paper is organized as follows. In Section 2, we describe some basic aggregation operators such as the OWA operator, the FOWA operator, the generalized mean and the GOWA operator. Section 3 develops the FGOWA operator studying some of its main properties. In Section 4, we suggest a further generalization to the FGOWA operator by using quasi-arithmetic means. Finally, in Section 5 we develop an illustrative example where we apply the new approach in the selection of strategies.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review some basic concepts about the FNs, the FOWA and the GOWA operator.

2.1. Fuzzy numbers

The FN was introduced in (Chang and Zadeh, 1972; Zadeh, 1975). Since then, it has been studied and applied by a lot of authors such as (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985).

A FN is a fuzzy subset (Zadeh, 1965) of a universe of discourse that is both convex and normal (Kaufmann and Gupta, 1985). Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number (Moore, 1966) although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings.

In the literature, we find a wide range of FNs (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985). For example, a trapezoidal FN (TpFN) A of a universe of discourse R can be characterized by a trapezoidal membership function $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that:

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \overline{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha \in$ [0, 1] and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \le a_2 \le a_3 \le a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a singleton and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a triangular FN (TFN). Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

In the following, we are going to review the FN arithmetic operations as follows. Let A and B be two TFN, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985) but in this paper we will focus on these ones. Note also that there are a lot of papers that gives a general introduction about FNs such as (Chen and Chen, 2003; 2005).

2.2. GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced by Yager in (2004). It generalizes a wide range of aggregation operators that includes the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. It can be defined as follows.

Definition 1. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA{:}R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in$ [0,1], then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators can be found in (Yager, 2004).

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases. When $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, we obtain the OWG (OWG) operator. When $\lambda = -1$, we obtain the OWHA (OWHA) operator. When $\lambda = 2$, we obtain the OWQA (OWQA) operator.

2.3. FOWA operator

The FOWA operator is an extension of the OWA operator. Essentially, its main difference is that it uses uncertain information in the arguments represented in the form of FNs. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FNs. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

Definition 2. Let Ψ be the set of FNs. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA: \Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FN.

Note that sometimes, it is not clear how to reorder the arguments. Then, it is necessary to establish a criterion for comparing FNs. For simplicity, we recommend the following method. Select the FN with the highest value in the membership level $\alpha = 1$. Note that if the membership level $\alpha = 1$ is an interval, then, we will calculate the average of the interval.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator. The FOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of FOWA operators can be obtained by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FOWA operator, the window-FOWA operator, the FOWA median operator, the S-FOWA, the centered-FOWA operator, etc.

3. The fuzzy generalized OWA operator

The fuzzy generalized OWA (FGOWA) operator is an extension of the GOWA operator that uses uncertain information in the aggregation represented in the form of FNs. The reason for using this operator is that sometimes, the uncertain factors that affect our decisions are not clearly known and in order to assess the problem we need to use FNs in order to consider the different uncertain results that could happen in the future. It can be defined as follows.

Definition 3. Let Ψ be the set of FNs. An FGOWA operator of dimension n is a mapping $FGOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, the arguments $\tilde{a}_i$ are FNs and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that different types of FNs (Dubois and Prade, 1980; Kaufmann and Gupta, 1985; Xu, 2007) could be used such as triangular FNs, trapezoidal FNs, L-R FNs, interval-valued FNs, intuitionistic FNs, etc.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^{λ}, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the FGOWA operator can be expressed as:

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(W^T B \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the FGOWA operator can be expressed as:

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

Note that the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using FN. Then, in some cases, it is not clear which FN is higher, so we need to establish an additional criteria for reordering the FN. For simplicity, we recommend the following procedure. Select the FN with the highest value in the membership level α = 1. Note that if the membership level α = 1 is an interval, then, we will calculate the average of the interval.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending fuzzy generalized OWA (DFGOWA) operator and the ascending fuzzy generalized OWA (AFGOWA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFGOWA operator. As we can see, the main difference is that in the AFGOWA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the DFGOWA (or FGOWA) they are ordered in a decreasing way.

The FGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent. It is monotonic because if $\tilde{a}_i \geq \tilde{u}_i$, for all $\tilde{a}_i$, then, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \geq FGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. That is, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = FGOWA(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$, where $(\tilde{u}_1, \tilde{u}_2\ldots, \tilde{u}_n)$ is any permutation of the arguments $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n)$. It is bounded because the FGOWA aggregation is delimitated by the minimum and the maximum. That is, $\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\}$. It is idempotent because if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then, $FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a}$.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the FGOWA operator. Using a similar methodology as it was used by (Yager, 2004) for the GOWA operator we can define the following measure:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the arithmetic mean $\alpha(W) = 0.5$.

The entropy of dispersion measures the amount of information being used in the aggregation.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{8}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, known as step-FGOWA, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

The divergence of W measures the divergence of the weights against the attitudinal character measure. It is useful in some exceptional situations when the attitudinal character and the entropy of dispersion are not enough to correctly analyze the weighting vector of an aggregation.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{9}$$

The balance operator measures the tendency of the weighting vector to the orness or the andness.

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1} \right) w_j \tag{10}$$

It can be shown that $Bal(W) \in [-1, 1]$. Note that for the optimistic criteria, $Bal(W) = 1$, and for the pessimistic criteria, $Bal(W) = -1$

4. Families of FGOWA operators

In this Section we analyze different families of FGOWA operators. Basically, we distinguish between the families found in the weighting vector *W* and those found in the parameter λ.

4.1. Analysing the weighting vector *W*

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the FGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy generalized mean (FGM) and the fuzzy weighted generalized mean (FWGM).

The fuzzy maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The fuzzy minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, where b_k is the *k*th largest argument $\tilde{a}_i$. The FGM is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The FWGM is obtained if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$.

Following a similar methodology as it has been developed in (Yager, 1993), we could study other particular cases of the FGOWA operator such as the step-FGOWA, the window-FGOWA, the olympic-FGOWA, the centered-FGOWA operator, the S-FGOWA operator, the FGOWA median, the E-Z FGOWA, the maximal entropy FGOWA weights, the minimal variability FGOWA, the Gaussian FGOWA weights, the minimax disparity FGOWA weights, the nonmonotonic FGOWA operator, etc. For example, when $w_{j^*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$, we are using the window-FGOWA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-FGOWA is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-FGOWA becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-FGOWA is transformed in the FGM.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j^*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-FGOWA that it is based on the olympic average (Yager, 1996a). Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-FGOWA is transformed in the FGOWA median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-FGOWA is transformed in the olympic-FGOWA.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z FGOWA weights that it is based on the E-Z OWA weights (Yager, 2003). In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j^*} = (1/q)$ for $j^* = 1$ to q and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > q$, and in the second class, we assign $w_{j^*} = 0$ for $j^* = 1$ to $n - q$ and $w_{j^*} = (1/q)$ for $j^* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z FGOWA becomes the maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z FGOWA becomes the minimum. Note that the E-Z FGOWA is transformed in the FGM if $q = n$. If $q = m$ and $k = 1$, then, the E-Z FGOWA weights becomes the window-FGOWA operator for the first class. And for the second class, it is found the window-FGOWA if $q = m$ and $k = n - q + 1$.

We note that the median and the weighted median can also be used as FGOWA operators. For the FGOWA median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. For the weighted FGOWA median, we select the argument b_k that has the *k*th largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Another interesting family is the S-FGOWA operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993; Yager and Filev, 1994). It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-FGOWA operator. The "orlike" S-FGOWA operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the arithmetic mean and if $\alpha = 1$, we get the maximum. The "andlike" S-FGOWA operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the average and if $\beta = 1$, we get the minimum. Finally, the generalized S-FGOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-FGOWA operator becomes the "andlike" S-FGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-FGOWA operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-FGOWA operator becomes the fuzzy generalized Hurwicz criteria.

Another family of aggregation operator that could be used is the centered-FGOWA operator. This type of operator has been suggested by (Yager, 2007) for the OWA operator. Following the same methodology, we could define a FGOWA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-FGOWA operator. Note that the FGM is an example of this particular case of centered-FGOWA operator. Another particular situation of the centered-FGOWA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-FGOWA operator. For this situation, we find the FGOWA median as a particular case.

Other families of FGOWA operators could be studied such as the maximal entropy FGOWA (MEFGOWA) operator, etc. Note that these families follow a similar methodology than the OWA version. For more information, see for example (Ahn, 2008; Wang and Parkan, 2007; Yager, 1993).

4.2. Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual FOWA operator, the fuzzy OWG (FOWG) operator (Xu, 2002), the fuzzy OWHA (FOWHA) operator and the fuzzy OWQA (FOWQA) operator.

When $\lambda = 1$, the FGOWA operator becomes the FOWA operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{11}$$

From a generalized perspective of the reordering step we distinguish between the DFOWA operator and the AFOWA operator. In both cases, the formulation is the same with the difference that the DFOWA operator has a descending order and the AFOWA operator an ascending order. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy average (FA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted average (FWA).

When $\lambda = 0$, the FGOWA operator becomes the FOWG operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{w_j} \tag{12}$$

With the DFGOWA operator we obtain the descending FOWG (DFOWG) operator and with the AFGOWA operator, the ascending FOWG (AFOWG) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy geometric average (FGA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted geometric average (FWGA).

When $\lambda = -1$, we get the FOWHA operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{13}$$

In this case, from a generalized perspective of the reordering step, we obtain the descending FOWHA (DFOWHA) operator and the ascending FOWHA (AFOWHA) operator. In both cases, the formulation is the same although the reordering step is different. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy harmonic average (FHA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted harmonic average (FWHA).

When $\lambda = 2$, we get the FOWQA operator.

$$FGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{14}$$

With the DFGOWA operator we obtain the descending FOWQA (DFOWQA) operator and with the AFGOWA operator, the ascending FOWQA (AFOWQA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy quadratic average (FQA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the fuzzy weighted quadratic average (FWQA).

Note that other families could be obtained by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually analysing different cases such as the step-FGOWA, the olympic-FGOWA, the S-FGOWA etc.

5. The Quasi-FOWA operator

As it is explained in (Beliakov, 2005), a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology as (Fodor et al., 1995), we can suggest a similar generalization to the FOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-FOWA operator. It can be defined as follows.

Definition 4. Let Ψ be the set of FNs. A Quasi-FOWA operator of dimension n is a mapping $QFOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right) \right) \tag{15}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$ and the arguments $\tilde{a}_i$ are FNs. As we can see, we replace b^λ with a general continuous strictly monotone function $g(b)$.

In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AFOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the FGOWA operator, are also included in this generalization. Then, for example, we could mention the problem of reordering the arguments when they are FNs. Note that in this case we follow the same method for reordering FNs.

Note also that the Quasi-FOWA operator contains a lot of situations that are not included in the FGOWA such as the exponential FOWA and the radical FOWA operator.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the Quasi-FOWA operator. Following a similar methodology than Beliakov (2005), we can formulate the following measure:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{16}$$

In this case, we could also make a distinction between descending and ascending orders. Note that in this case it is also possible to consider other measures such as the entropy of dispersion, the divergence of W or the balance operator.

6. Application in strategic decision making

In the following, we are going to develop an illustrative example about the use of the new approaches commented above. We will analyze a decision making problem where a company is studying which strategy is the most appropriate for them. As the environment is very uncertain the group of experts of the company needs to assess the available information with FNs. In this example, we will assume that the available information can be assessed with triangular FNs. We will analyze the results obtained by using different types of FN aggregation operators in order to see that depending on the aggregation operator used the decision will be different. We will consider the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA), the fuzzy geometric average (FGA), the fuzzy quadratic average (FQA), the fuzzy weighted average (FWA), the FOWA operator, the AFOWA operator, the FOWG operator and the FOWQA operator.

Assume a company that operates in Europe and North America is analyzing the general policy for the next year and they consider 5 possible strategies to follow.

(1) A_1: Expand to the Asian market.
(2) A_2: Expand to the African market.
(3) A_3: Expand to the South American market.
(4) A_4: Expand to all 3 continents.
(5) A_5: Do not develop any expansion.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 6 possible situations for the next year: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in Table 1. Note that the results are triangular FNs.

Table 1. Payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(30,40,50)	(60,70,80)	(50,60,90)	(20,25,40)	(30,50,60)	(60,70,80)
A_2	(20,30,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(70,80,90)
A_3	(30,40,50)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)	(30,40,50)
A_5	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,70,80)

In this problem, the group of experts considers that the general attitudinal character of the company is given by the following weighting vector: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3).

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. First, we will consider some basic aggregation operators such as the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the FA, the FGA and the FQA. The results are shown in Table 2.

Table 2. Aggregated results 1

	Max	*Min*	*FA*	*FGA*	*FQA*
A_1	(60,70,80)	(20,25,40)	(41.6,52.5,66.6)	(38.4,49.4,64.0)	(44.5,54.9,69.0)
A_2	(70,80,90)	(20,30,50)	(41.6,51.6,63.3)	(39.1,49.6,62.2)	(44.1,53.6,64.5)
A_3	(70,80,90)	(30,40,50)	(45,55,65)	(42.2,52.7,63.0)	(47.7,57.3,66.9)
A_4	(60,70,80)	(20,30,40)	(40,50,60)	(37.3,47.9,58.2)	(42.4,51.9,61.6)
A_5	(40,70,80)	(30,40,50)	(40,53.3,63.3)	(39.5,52.5,62.6)	(40.4,54.1,64.0)

As we can see, the decision is different depending on the aggregation used. If we use the FA, the FGA or the FQA, then the optimal strategy is A_3. If we use the maximum, then, both A_2 and A_3 are optimal solutions. And if we use the minimum, then, the optimal strategies are A_3 and A_5.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of FGOWA operators such as the FWA, the FOWA, the AFOWA, the FOWG or the FOWQA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 2

	FWA	*FOWA*	*AFOWA*	*FOWG*	*FOWQA*
A_1	(42,53,66)	(35,45.5,59)	(48,58.5,73)	(32.1,42.3,56.5)	(38.0,48.4,61.5)
A_2	(47,57,68)	(37,47,60)	(47,57,68)	(34.3,44.9,59.1)	(39.6,49.0,60.9)
A_3	(49,59,69)	(39,49,59)	(52,62,72)	(36.8,47.2,57.4)	(41.5,51.0,60.7)
A_4	(37,47,57)	(34,44,54)	(46,56,66)	(31.5,42.0,52.4)	(36.6,46.0,55.6)
A_5	(40,56,66)	(38,50,60)	(41,57,67)	(37.5,49.2,59.3)	(38.4,50.7,60.6)

As we can see, in this case we also get different results depending on the operator used. If we use the FWA, the AFOWA or the FOWQA operator, then, the optimal choice is the strategy 3. And if we use the FOWA or the FOWG operator, then, the optimal decision is A_5.

Note that the results given in the form of triangular FNs, can also be represented by using their membership functions. For simplicity, we will simply consider the results shown in Table 2 and 3.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 4. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 4. Ordering of the strategies

	Ordering		*Ordering*
Max	$A_2=A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5$	*FWA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
Min	$A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$	*FOWA*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
FA	$A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_4$	*AFOWA*	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_5$
FGA	$A_3 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_4$	*FOWG*	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$
FQA	$A_3 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_4$	*FOWQA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

As we can see, depending on the aggregation used, the ordering of the strategies is different. Therefore, depending on the aggregation operator used, the results may lead to different decisions.

7. Conclusions

We have introduced the FGOWA operator. It is an aggregation operator that uses generalized means and uncertain information represented in the form of FNs. It is very useful for uncertain situations where the decision maker can not assess the information with exact numbers or singletons but it is possible to assess it with FNs. This generalization includes a wide range of fuzzy aggregation operators such as the FA, the FWA, the FOWA, the FOWQA, the FGM and the FWGM.

We have also presented the Quasi-FOWA operator. It generalizes the FOWA operator by using quasi-arithmetic means. With this generalization we have obtained the FGOWA operator as a particular case and a lot of other situations.

We have developed an application of the new approach in a strategic decision making problem. We have seen that the FGOWA is very useful because it represents very well the uncertain information by using FNs. We have also seen that depending on the particular case of the FGOWA operator used the results may lead to different decisions.

In future research we expect to develop further extensions by adding new characteristics in the problem such as the use of inducing variables or hybrid aggregations. We will also consider other decision making applications such as human resource management, investment selection, product management, etc.

References

Ahn, B.S. and H. Park. 2008. Least-Squared Ordered Weighted Averaging Operator Weights, *International Journal of Intelligent Systems*, 23:33-49.

Beliakov, G. 2005. Learning Weights in the Generalized OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 4:119-130.

Beliakov, G., A. Pradera and T. Calvo. 2007. *Aggregation Functions: A guide for practicioners*, Springer-Verlag, Berlin.

Calvo, T., G. Mayor and R. Mesiar. 2002. *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, Physica-Verlag, New York.
Chang, J.R., T.H. Ho, C.H. Cheng, A.P. Chen. 2006. Dynamic fuzzy OWA model for group multiple criteria decision making, *Soft Computing*, 10:543-554.
Chang, S.S.L. and L.A. Zadeh. 1972. On fuzzy mapping and control, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, 2:30-34.
Chen, S.J. and S.M. Chen. 2003. A new method for handling multi-criteria fuzzy decision-making problems using FN-IOWA operators, *Cybernetics and Systems*, 34:109-137.
Chen, S.J. and S.M. Chen. 2005. Aggregating fuzzy opinions in the heterogeneous group decision-making environment, *Cybernetics and Systems*, 36: 309-338.
Cheng, C.H., J.R. Chang and T.H. Ho. 2006. Dynamic fuzzy OWA model for evaluating the risks of software development, *Cybernetics and Systems*, 37:791-813.
Dubois, D. and H. Prade. 1980. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, Academic Press, New York.
Dyckhoff, H. and W. Pedrycz. 1984. Generalized means as model of compensative connectives, *Fuzzy Sets and Systems*, 14:143-154.
Fodor, J., J.L. Marichal and M. Roubens. 1995. Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, 3:236-240.
Hu, Y.C. and J.F. Tsai. 2007. Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 15:717-735.
Karayiannis, N. 2000. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators, *IEEE Transactions on Neural Networks*, 11:1093-1105.
Kaufmann, A. and M.M. Gupta. 1985. *Introduction to fuzzy arithmetic*, Publications Van Nostrand, Rheinhold.
[13] Merigó, J.M. and M. Casanovas. 2008. Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators. *International Journal of Information Technology*, 4:177-182.
[14] Merigó, J.M. and A.M. Gil-Lafuente. 2007. Unification point in methods for the selection of financial products. *Fuzzy Economic Review*, 12:35-50.
Mitchell, H.B. and D.D. Estrakh. 1998. An OWA operator with fuzzy ranks, *International Journal of Intelligent Systems*, 13:69-81.
Wang, Y.M. and C. Parkan. 2007. A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, *Information Sciences*, 177:1867-1877.
Wu, Z. and Y. Chen. 2007. The maximizing deviation method for group multiple attribute decision making under linguistic environment, *Fuzzy Sets and Systems*, 158:1608-1617.
Xu, Z.S. 2007. Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6:221-236.
Yager, R.R. 1988. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, B 18:183-190.
Yager, R.R. 1993. Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems*, 59:125-148.
Yager, R.R. 1996a. Quantifier guided aggregation using OWA operators, *International Journal of Intelligent Systems*, 11:49-73.
Yager, R.R. 1996b. Constrained OWA Aggregation, *Fuzzy Sets and Systems*, 81:89-101.

Yager, R.R. 2002. Heavy OWA Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 1:379-397.

Yager, R.R. 2003. E-Z OWA weights, in: *Proc. 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, pp. 39-42.

Yager, R.R. 2004. Generalized OWA Aggregation Operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 3:93-107.

Yager, R.R. 2007. Centered OWA operators, *Soft Computing*, 11:631-639.

Yager, R.R. 2008. Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, *Information Sciences*, 178:363-380.

Yager, R.R. and D.P. Filev. 1994. Parameterized andlike and orlike OWA Operators, *International Journal of General Systems*, 22:297-316.

Yager, R.R. and J. Kacprzyk. 1997. *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications,* Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

Yeh, D.Y., C.H. Cheng and H.W. Yio. 2007. Empirical research of the principal component analysis and ordered weighted averaging integrated evaluation model on software projects, *Cybernetics and Systems*, 38:289-303.

Zadeh, L.A. 1965. Fuzzy Sets, *Information and Control*, 8:338-353.

Zadeh, L.A. 1975. The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1, *Information Sciences*, 8:199-249; Part 2, *Information Sciences*, 8:301-357, Part 3, *Information Sciences*, 9:43-80.

Zarghami, M., F. Szidarovszky and R. Ardakanian. 2008. A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 7:1-15.

14.2.23. Artículo de revista 23. – Enviado a *Information Fusion*

A generalization of the linguistic aggregation operators and its application in decision making

José M. Merigó[14], Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We introduce the linguistic generalized ordered weighted averaging (LGOWA) operator. It is a new aggregation operator that uses linguistic information and generalized means in the OWA operator. It is very useful for uncertain situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use linguistic assessments. This aggregation operator generalizes a wide range of aggregation operators that use linguistic information such as the linguistic generalized mean (LGM), the linguistic weighted generalized mean (LWGM), the linguistic OWA (LOWA) operator, the linguistic ordered weighted quadratic averaging (LOWQA) operator, etc. We also introduce a new type of Quasi-LOWA operator by using quasi-arithmetic means in the LOWA operator. Finally, we develop an application of the new approach. We analyze a decision making problem about selection of strategies.

Keywords: Linguistic aggregation operator; Linguistic OWA operator; Generalized mean; Linguistic decision making; Strategic decision making.

1. Introduction

In the literature, we find a wide range of aggregation operators for fusing the information. A very well known aggregation operator is the ordered weighted averaging (OWA) operator [25]. The OWA operator has been studied by a lot of authors such as [1-36].

Often, when using the OWA operator, it is considered that the available information is numerical. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with numerical values. Therefore, it is necessary to use another approach such as a qualitative one that uses linguistic assessments. In [8], they introduced the first linguistic version of the OWA operator. They called it the linguistic OWA (LOWA) operator. Since then, a lot of new developments have been suggested about it such as [7,9,16,19-22].

Another interesting extension of the OWA operator is the generalization that uses generalized means [37-38]. This type of aggregation is known as the generalized OWA (GOWA) operator [12,32]. It generalizes a wide range of aggregation operators such as the ordered weighted geometric (OWG) operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator, etc. The GOWA operator has been further

[14] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

generalized [3] by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-OWA operator [6]. For further information on the GOWA operator, see [3-5,12,16,32].

The aim of this paper is to develop a generalized OWA operator for situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use linguistic assessments. We will call it the linguistic generalized OWA (LGOWA) operator. This type of linguistic aggregation operator uses the LOWA operator and the generalized mean in the same formulation. Then, it is able to include a wide range of particular cases such as the LOWA itself, the linguistic OWG (LOWG) operator, the linguistic OWHA (LOWHA) operator, the linguistic ordered weighted quadratic averaging (LOWQA) operator, the linguistic average (LA), the linguistic weighted average (LWA), the linguistic quadratic average (LQA), etc. Note that the linguistic model used follows the ideas of [19-22]. Then, we should note that this paper is a first step in the process of generalizing the LOWA operator because there are other linguistic models that could be used in the analysis such as the 2-tuple linguistic representation model [9].

We further generalize the LGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-LOWA operator. We should note that recently, a different linguistic Quasi-OWA operator has been studied in [16]. We also develop an application of the new approach in a strategic decision making problem in order to see its implementation in the real life. The main advantage of the LGOWA operator is that it gives a more complete view to the decision maker of the decision problem because it includes a lot of linguistic aggregation operators in the same formulation. Then, the decision maker will be able to consider a wide range of optimistic or pessimistic scenarios and select the one that is in accordance with its interests.

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly discuss the linguistic approach to be used in the paper, the LOWA and the GOWA operator. In Section 3, we present the LGOWA operator. Section 4 analyzes different families of LGOWA operators. In Section 5, we discuss the Quasi-LOWA operator. Section 6 develops a decision making application of the new approach. Finally, in Section 7, we summarize the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly discuss the linguistic approach to be used throughout the paper, the LOWA operator and the GOWA operator.

2.1. Linguistic approach

Usually, people are used to work in a quantitative setting, where the information is expressed by means of numerical values. However, many aspects of the real world cannot be assessed in a quantitative form. Instead, it is possible to use a qualitative one, i.e., with vague or imprecise knowledge. In this case, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical values. The linguistic approach represents qualitative aspects as linguistic values by means of linguistic variables [39].

We have to select the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantics. One possibility for generating the linguistic term set consists in directly supplying the term set by considering all terms distributed on a scale on which a total order is defined [7]. For example, a set of seven terms S could be given as follows:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M, s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Note that N = *None*, VL = *Very low*, L = *Low*, M = *Medium*, H = *High*, VH = *Very high*, P = *Perfect*. Usually, in these cases, it is required that in the linguistic term set there exists:

- A negation operator: Neg(s_i) = s_j such that $j = g+1-i$.
- The set is ordered: $s_i \leq s_j$ if and only if $i \leq j$.
- Max operator: Max(s_i, s_j) = s_i if $s_i \geq s_j$.
- Min operator: Min(s_i, s_j) = s_i if $s_i \leq s_j$.

Different approaches have been developed for dealing with linguistic information such as [7-9,16,19-22]. In this paper, we will follow the ideas of [19-22]. Then, in order to preserve all the given information, we extend the discrete linguistic term set S to a continuous linguistic term set $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t, \alpha \in [1, t]\}$, where, if $s_\alpha \in S$, we call s_α the original linguistic term, otherwise, we call s_α the virtual linguistic term.

Consider any two linguistic terms $s_\alpha, s_\beta \in \hat{S}$, and $\mu, \mu_1, \mu_2 \in [0, 1]$, we define some operational laws as follows [19-22]:

- $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$.
- $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$.
- $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$.
- $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$.

2.2. Linguistic OWA operator

In the literature, we find a wide range of linguistic aggregation operators [7-9,16,19-22]. In this study, we will consider the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) operator with its particular cases that include among others the linguistic average (LA) and the linguistic weighted average (LWA). Note that we follow the ideas developed by Xu in [19-20]. Then, we should point out that the LOWA operator we are going to use is also known as the extended OWA (EOWA) operator [19].

Definition 1. *A LOWA operator of dimension n is a mapping LOWA*: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, *which has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$LOWA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{1}$$

where s_{β_j} *is the jth largest of the* s_{α_i}.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending LOWA (DLOWA) and the ascending LOWA (ALOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DLOWA (or LOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALOWA operator. Note that the ALOWA operator is known in other studies as the inverse LOWA (I-LOWA) operator [7].

The LOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the LA and the linguistic weighted average (LWA). The LA is obtained when all the weights w_j are equal for all j. The LWA is obtained if the ordered position of the s_{β_j} is the same than the ordered position of the s_{α_i}.

In this type of operator it is possible to use different measures for characterizing the weighting vector W by using the same measures that it has been used for the OWA operator [1-5,10-14,17-18,23,25-36] such as the attitudinal character or the measure of dispersion.

2.3. Generalized OWA operator

The GOWA operator [12,32] is a generalization of the OWA operator by using generalized means. It includes a wide range of means such as the OWG operator, the ordered weighted quadratic averaging operator (OWQA), etc. It can be defined as follows.

Definition 2. *A GOWA operator of dimension n is a mapping GOWA*: $R^n \rightarrow R$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j *is the jth largest of the* a_i, *and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending generalized OWA (DGOWA) operator and the ascending generalized OWA (AGOWA) operator.

As it is demonstrated in [32], the GOWA operator is a mean operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators could be considered [12,32] such as the step-GOWA operator, the window-GOWA, the olympic-GOWA, the median-GOWA, the centered-GOWA, the S-GOWA, etc.

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator, the OWG operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the OWQA operator. When $\lambda = 1$, we obtain the usual OWA operator. When $\lambda = 0$, we get the OWG operator. When $\lambda = -1$, the OWHA operator. When $\lambda = 2$, the OWQA operator.

3. The linguistic generalized OWA operator

The LGOWA operator is an extension of the OWA operator that uses linguistic assessments and generalized means. It provides a parameterized family of linguistic aggregation operators that includes the LOWA operator, the linguistic maximum, the linguistic minimum and the linguistic average (LA), among others. It can be defined as follows.

Definition 3. *A LGOWA operator of dimension n is a mapping LGOWA*: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where s_{β_j} *is the jth largest of the* s_{α_i}, *and* λ *is a parameter such that* $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that if $\lambda \leq 0$, we can only use positive numbers R^+, in order to get consistent results. From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending LGOWA (DLGOWA) operator and the ascending LGOWA (ALGOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DLGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ALGOWA operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments $s_{\beta_j}^{\lambda}$, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the LGOWA operator can be expressed as:

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(W^T B \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the LGOWA operator can be expressed as:

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

The LGOWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be demonstrated with the following theorems.

Theorem 1 (Commutativity). *Assume f is the LGOWA operator, then*

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = f(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n}) \tag{6}$$

where $(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n})$ *is any permutation of the arguments* $(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n})$.

Proof. Let

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

$$f(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\chi_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (8)$$

Since $(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n})$ is a permutation of $(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n})$, we have $s_{\beta_j} = s_{\chi_j}$, for all j, and then

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = f(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n}) \quad \square$$

Theorem 2 (Monotonicity). *Assume f is the LGOWA operator, if* $s_{\alpha_i} \geq s_{\varepsilon_i}$, *for all i, then*

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \geq f(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n}) \quad (9)$$

Proof. Let

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (10)$$

$$f(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\chi_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \quad (11)$$

Since $s_{\alpha_i} \geq s_{\varepsilon_i}$, for all i, it follows that, $s_{\beta_j} \geq s_{\chi_j}$, and then

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \geq f(s_{\varepsilon_1}, \ldots, s_{\varepsilon_n}) \quad \square$$

Theorem 3 (Bounded). *Assume f is the LGOWA operator, then*

$$\text{Min}\{s_{\alpha_i}\} \leq f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \leq \text{Max}\{s_{\alpha_i}\} \quad (12)$$

Proof. Let $\max\{s_{\alpha_i}\} = c$, and $\min\{s_{\alpha_i}\} = d$, then

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(c^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \quad (13)$$

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \quad (14)$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \leq c \quad (15)$$

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \geq d \quad (16)$$

Therefore,

$$\mathrm{Min}\{s_{\alpha_i}\} \le f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) \le \mathrm{Max}\{s_{\alpha_i}\} \qquad \square$$

Theorem 4 (Idempotency). *Assume f is the LGOWA operator, if $a_i = a$, for all i, then*

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = s_\alpha \tag{17}$$

Proof. Since $s_{\alpha_i} = s_\alpha$, for all i, we have

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\alpha}^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(s_{\alpha}^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{18}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = s_\alpha \qquad \square$$

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the LGOWA operator. Using a similar methodology as it was used by [32] for the GOWA operator we can define the following measure:

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{19}$$

Note that other measures could be discussed such as the entropy of dispersion [25], the divergence of W [30] and the balance operator [29]. The entropy of dispersion is defined as follows:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{20}$$

For the balance operator, we get:

$$BAL(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1}\right) w_j \tag{21}$$

And for the divergence of W:

$$DIV(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W)\right)^2 \tag{22}$$

Note that in this case, it is also possible to distinguish between descending and ascending orders.

4. Families of LGOWA operators

Different families of linguistic aggregation operators are found in the LGOWA operator. Basically, we can classify them in two general groups. The first group represents all the families found in the weighting vector W and the second group, the families found in the parameter λ.

4.1. Analysing the weighting vector W

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the LGOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, we can obtain the linguistic maximum, the linguistic minimum, the linguistic generalized mean (LGM) and the linguistic weighted generalized mean (LWGM).

The linguistic maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The linguistic minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = s_{\beta_j}$, where s_{β_j} is the kth largest argument s_{α_i}. The LGM is found when $w_j = 1/n$, for all i. The LWGM is obtained when the ordered position of i is the same as j.

Following a similar methodology as it has been developed in [1-5,10-14,17-18,23,25-36], we could study other particular cases of the LGOWA operator such as the step-LGOWA, the window-LGOWA, the olympic-LGOWA, the centered-LGOWA operator, the S-LGOWA operator, the median-LGOWA, the E-Z LGOWA, the maximal entropy LGOWA weights, the minimal variability LGOWA, the Gaussian LGOWA weights, the minimax disparity LGOWA weights, the nonmonotonic LGOWA operator, etc. In the following, we are going to study some of these cases.

Remark 1: The olympic-LGOWA is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j^*} = 1/(n-2)$. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-LGOWA is transformed in the median-LGOWA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-LGOWA is transformed in the olympic-LGOWA.

Remark 2: A further type of aggregation that could be used is the E-Z LGOWA weights that it is based on the E-Z OWA weights [31]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j^*} = (1/q)$ for $j^* = 1$ to q and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > q$, and in the second class, we assign $w_{j^*} = 0$ for $j^* = 1$ to $n - q$ and $w_{j^*} = (1/q)$ for $j^* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z LGOWA becomes the linguistic maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z LGOWA becomes the linguistic minimum. Note that the E-Z LGOWA is transformed in the LGM if $q = n$. If $q = m$ and $k = 1$, then, the E-Z LGOWA becomes the window-LGOWA operator for the first class. And for the second class, it is found the window-LGOWA if $q = m$ and $k = n - q + 1$.

Remark 3: The linguistic median can also be used as LGOWA operators. If n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j^*} = 0$ for all others.

Remark 4: For the weighted median-LGOWA, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 5: The window-LGOWA is found when $w_{j^*} = 1/m$ for $k \leq j^* \leq k + m - 1$ and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-LGOWA is transformed in the linguistic maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-LGOWA becomes the linguistic minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-LGOWA is transformed in the LGM.

Remark 6: A further family of linguistic aggregation operator that could be used is the centered-LGOWA operator, that it is based on the OWA version [33]. We can define a LGOWA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-LGOWA operator. Note that the LGM is an example of this particular case of centered-LGOWA operator. Another particular situation of the centered-LGOWA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-LGOWA operator. For this situation, we find the median-LGOWA as a particular case.

Remark 7: Another interesting family is the S-LGOWA operator based on the S-OWA operator [26,35]. It can be subdivided in three classes, the "orlike", the "andlike" and the generalized S-LGOWA operator. The "orlike" S-LGOWA operator is found when $w_1 = (1/n)(1 - \alpha) + \alpha$, and $w_j = (1/n)(1 - \alpha)$ for $j = 2$ to n with $\alpha \in [0, 1]$. Note that if $\alpha = 0$, we get the LGM and if $\alpha = 1$, we get the linguistic maximum. The "andlike" S-LGOWA operator is found when $w_n = (1/n)(1 - \beta) + \beta$ and $w_j = (1/n)(1 - \beta)$ for $j = 1$ to $n - 1$ with $\beta \in [0, 1]$. Note that in this class, if $\beta = 0$ we get the LGM and if $\beta = 1$, the linguistic minimum. Finally, the generalized S-LGOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-LGOWA operator becomes the "andlike" S-LGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-LGOWA operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the linguistic generalized Hurwicz criteria.

Remark 8: Using a similar methodology, we could develop a lot of other families of LGOWA weights in a similar way as it has been developed in a lot of studies for the OWA operator such as [1-3,13-14,17-18,23,26-29,31,33,35]. Note that it is easy to apply these methods to the LGOWA operator because the weights are not affected by the linguistic information. Obviously, it is possible to consider more complex analysis where the weights are also linguistic variables but in this paper we will not enter in this problem.

4.2. Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual LOWA, the LOWG, the LOWHA and the LOWQA operator. Note that it is possible to distinguish between descending and ascending orders in all the cases.

When $\lambda = 1$, we get the LOWA operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{23}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the LA and if the ordered position of $i = j$, the LWA.

When $\lambda = 2$, we get the LOWQA operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j}^2 \right)^{1/2} \tag{24}$$

If $w_j = 1/n$, for all i, we get the LQA and if $i = j$, for all i, the linguistic weighted quadratic mean (LWQM).

When $\lambda = 0$, we get the LOWG operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \prod_{j=1}^{n} s_{\beta_j}{}^{w_j} \tag{25}$$

If $w_j = 1/n$, for all i, we get the linguistic geometric average (LGA) and if $i = j$, for all i, the linguistic weighted geometric average (LWGA).

When $\lambda = -1$, we get the LOWHA operator.

$$LGOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{s_{\beta_j}}} \tag{26}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the linguistic harmonic mean (LHM) and if $i = j$, for all i, the linguistic weighted harmonic mean (LWHM).

Note that we could analyze other families by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Sections 3 and 4.1 where we study different properties and families of the aggregation operator.

5. The Quasi-LOWA operator

As it is explained in [3], a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology than [6], we can suggest a similar generalization of the LGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-LOWA operator. Note that this generalization is different than [16] because it uses a different linguistic approach. The Quasi-LOWA operator can be defined as follows.

Definition 4. *A Quasi-LOWA operator of dimension n is a mapping QLOWA*: $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$ *that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is* 1 *and* $w_j \in [0,1]$, *then*:

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(s_{\beta_j}\right) \right) \tag{27}$$

where s_{β_j} *is the jth largest of the* s_{α_i}.

As it has been explained for the LGOWA, if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the Quasi-LOWA operator can be expressed as:

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = g^{-1}\left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(s_{\beta_j}\right)\right) \tag{28}$$

As we can see, we replace s_β^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(s_\beta)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the *j*th weight of the Quasi-DLOWA and w^*_{n-j+1} the *j*th weight of the Quasi-ALOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the LGOWA operator are also included in this generalization. For example, we could study different families of Quasi-LOWA operators such as the Quasi-LA, the Quasi-LWA, the Quasi-S-LOWA, the Quasi-window-LOWA, the Quasi-median-LOWA, the Quasi-olympic-LOWA, the Quasi-centered-LOWA, etc.

Note also that the Quasi-LOWA operator includes a lot of other cases that are not included in the LGOWA such as the trigonometric LOWA, the radical LOWA, the exponential LOWA, etc. These aggregations follow the same methodology as the OWA version [4] with the difference that now we are using linguistic information in the problem.

For example, for the radical LOWA we get:

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \left(\log_\gamma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \gamma^{1/s_{\beta_j}}\right)\right)^{-1} \tag{29}$$

For the exponential LOWA, we get the following: $\log_\gamma\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \gamma^{s_{\beta_j}}\right)$, if $\gamma \neq 1$; and the LOWA if $\gamma = 1$.

And for the trigonometric LOWA operator we get:

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \sin\left(\frac{\pi}{2}s_{\beta_j}\right)\right) \tag{30}$$

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \frac{2}{\pi}\arccos\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \cos\left(\frac{\pi}{2}s_{\beta_j}\right)\right) \tag{31}$$

$$QLOWA(s_{\alpha_1}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \frac{2}{\pi}\arctan\left(\sum_{j=1}^{n} w_j \tan\left(\frac{\pi}{2}s_{\beta_j}\right)\right) \tag{32}$$

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the Quasi-LOWA operator. Following a similar methodology than [3], we can define the following measure:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{33}$$

Note that in this case, it is also possible to consider other measures such as the entropy of dispersion, the divergence of *W* and the balance operator.

6. Numerical example

In the following, we are going to develop a numerical example about the use of the LGOWA operator in a business decision making problem. We will analyze a strategic decision making problem where an enterprise is analysing which is the most appropriate global strategy for them. We will assume that they consider five alternatives for the next period. As the environment is very uncertain, the group of experts of the enterprise is not able to use numerical information in the analysis. Instead, they will use linguistic information. Note that other decision making applications could be developed with the LGOWA operator such as financial decision making [15], human resource selection, etc.

We will analyze the results obtained by using different types of LGOWA operators. In this example, we consider the linguistic maximum, the linguistic minimum, the LA, the LGA, the LQA, the LWA, the LOWA operator, the ALOWA, the LOWG and the LOWQA operator.

Assume an enterprise that operates in Europe and North America is analyzing the general policy for the next year and they consider five possible strategies to follow.

- A_1 = Expand to the Asian market.
- A_2 = Expand to the South American market.
- A_3 = Expand to the African market.
- A_4 = Expand to the 3 continents.
- A_5 = Do not develop any expansion.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the company for the next year. After careful analysis, the experts have considered five possible situations that could happen in the future: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Regular, S_4 = Good, S_5 = Very good. The linguistic expected results depending on the situation N_i and the alternative A_k are shown in Table 1. Note that the results are linguistic values.

Table 1
Linguistic payoff matrix

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5
A_1	S_3	S_6	S_2	S_4	S_5
A_2	S_7	S_3	S_1	S_2	S_6
A_3	S_5	S_4	S_4	S_3	S_4
A_4	S_2	S_3	S_6	S_5	S_4
A_5	S_4	S_2	S_7	S_5	S_2

In this example, we assume that the group of experts assumes the following weighting vector for all the cases: *W* = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). Note that this weighting vector will be used as a weighted average in the LWA, but for the LOWA, ALOWA, LOWG and LOWQA, it will be used as the attitudinal character of the enterprise.

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. First, we consider some basic linguistic aggregation operators. The results are shown in Table 2.

Table 2
Aggregated results 1

	Max	Min	LA	LGA	LQA
A_1	S_6	S_2	S_4	$S_{3.72}$	$S_{4.24}$
A_2	S_7	S_1	$S_{3.8}$	$S_{3.02}$	$S_{4.44}$
A_3	S_5	S_3	S_4	$S_{3.94}$	$S_{4.04}$
A_4	S_6	S_2	S_4	$S_{3.72}$	$S_{4.24}$
A_5	S_7	S_2	S_4	$S_{3.54}$	$S_{4.42}$

As we can see, the decision is different depending on the linguistic aggregation operator used.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of LGOWA operators such as the LWA, the LOWA, the ALOWA, the LOWG and the LOWQA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3
Aggregated results 2

	LWA	LOWA	ALOWA	LOWG	LOWQ
A_1	$S_{4.2}$	$S_{3.6}$	$S_{4.4}$	$S_{3.34}$	$S_{3.84}$
A_2	$S_{3.7}$	$S_{3.4}$	$S_{4.1}$	$S_{2.48}$	$S_{3.87}$
A_3	$S_{3.9}$	$S_{3.8}$	$S_{4.2}$	$S_{3.75}$	$S_{3.84}$
A_4	$S_{4.2}$	$S_{3.6}$	$S_{4.4}$	$S_{3.34}$	$S_{3.84}$
A_5	$S_{3.8}$	$S_{3.5}$	$S_{4.5}$	$S_{3.12}$	$S_{3.88}$

As we can see, in this case we also get different results depending on the linguistic aggregation operator used. Note that more particular cases of the LGOWA operator could be considered in the analysis such as the ones explained above in the previous sections.

Another interesting issue is to establish an ordering of the strategies. Note that this is especially useful when we want to consider more than one strategy in the analysis. The results are shown in Table 4.

Table 4
Ordering of the investments

	Ordering		Ordering
Max	$A_2=A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_3$	LWA	$A_1 \succ A_4 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_2$
Min	$A_3 \succ A_1=A_4=A_5 \succ A_2$	LOWA	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5 \succ A_2$
LA	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$	ALOWA	$A_5 \succ A_1=A_4 \succ A_3 \succ A_2$
LGA	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5 \succ A_1$	LOWG	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_5 \succ A_2$
LQA	$A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_3$	LOWQA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1=A_3=A_4$

As we can see, depending on the linguistic aggregation operator used, the ordering of the strategies is different. Then, the decision maker will be able to consider a wide range of scenarios and select the particular case that is in accordance with its interests.

7. Conclusions

We have presented the LGOWA operator. It is an aggregation operator that uses linguistic information and generalized means in the OWA operator. We have seen that this operator is very useful for situations where the available information can not be assessed with numerical values but it is possible to use linguistic ones. We have studied some of its main properties and we have found a wide range of particular cases such as the LOWA operator, the LOWG operator and the LOWQA operator. We have seen that it is possible to further generalize it by using quasi-arithmetic means. The result is the new version of the Quasi-LOWA operator explained in Section 5.

We have applied the new approach in a business decision making problem. We have analyzed the selection of strategies with the new aggregation operator. We have seen that the results and decisions are different depending on the particular LGOWA operator used.

In future research, we expect to develop more extensions of the LGOWA operator by introducing more characteristics in the problem and applying it in different business problems. For example, we could mention the possibility of using different linguistic approaches such as the 2-tuple fuzzy linguistic representation model and the use of inducing orders, hybrid aggregations, etc.

References

[1] B.S. Ahn, Preference relation approach for obtaining OWA operator weights, International Journal of Approximate Reasoning 47 (2008) 166-178.

[2] B.S. Ahn, H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, International Journal of Intelligent Systems 23 (2008) 33-49.

[3] G. Beliakov, Learning weights in the generalized OWA operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 4 (2005) 119-130.

[4] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[5] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[6] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 3 (1995) 236-240.

[7] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, Aggregation operators for linguistic weighted information, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 27 (1997) 646-655.

[8] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, Information Sciences 85 (1995) 223-239.

[9] F. Herrera, L. Martínez, A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 8 (2000) 746-752.

[10] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 37 (2007) 176-189.

[11] Y.C. Hu, J.F. Tsai, Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 15 (2007) 717-735.
[12] N. Karayiannis, Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted aggregation operators, IEEE Transactions on Neural Networks 11 (2000) 1093-1105.
[13] X. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, International Journal of Approximate Reasoning 45 (2007) 68-81.
[14] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 77-97.
[15] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 13 (2007) 35-50.
[16] J.H. Wang, J. Hao, A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 14 (2006) 435-445.
[17] Y.M. Wang, Y. Luo, Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, Information Sciences 177 (2007) 3356-3363.
[18] Y.M. Wang, C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 1867-1877.
[19] Z.S. Xu, EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 12 (2004) 791-810.
[20] Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, Information Sciences 166 (2004) 19-30.
[21] Z.S. Xu, Induced uncertain linguistic OWA operators applied to group decision making, Information Fusion 7 (2006) 231-238.
[22] Z.S. Xu, A method for multiple attribute decision making with incomplete weight information in linguistic setting, Knowledge-Based Systems 20 (2007) 719-725.
[23] Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, Information Fusion 9 (2008) 310-316.
[24] Z.S. Xu, On multi-period multi-attribute decision making, Knowledge-Based Systems 21 (2008) 164-171.
[25] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18 (1988) 183-190.
[26] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[27] R.R. Yager, On weighted median aggregation, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2 (1994) 101-113.
[28] R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, International Journal of Intelligent Systems 11 (1996) 49-73.
[29] R.R. Yager, Constrained OWA aggregation, Fuzzy Sets and Systems 81 (1996) 89-101.
[30] R.R. Yager, Heavy OWA operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 1 (2002) 379-397.

[31] R.R. Yager, E-Z OWA weights, in: Proceedings of the 10th International Fuzzy Systems Association (IFSA) World Congress, Istanbul, Turkey, 2003, pp. 39-42.
[32] R.R. Yager, Generalized OWA aggregation operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 3 (2004) 93-107.
[33] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[34] R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, Information Sciences 178 (2008) 363-380.
[35] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators. International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.
[36] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[37] J. Dujmovic, Weighted conjunctive and disjunctive means and their application in system evaluation, Publikacije Elektro-technickog Faculteta Beograd, Serija Matematika i Fizika 483 (1974) 147-158.
[38] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, Generalized means as a model of compensative connectives, Fuzzy Sets and Systems 14 (1984) 143-154.
[39] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1, Information Sciences 8 (1975) 199-249, Part 2, Information Sciences 8 (1975) 301-357, Part 3, Information Sciences 9 (1975) 43-80.

14.2.24. Artículo de revista 24. – Enviado a *International Journal of Fuzzy Systems*

The Fuzzy Generalized Hybrid Averaging Operator and its Application in Decision Making

José M. Merigó[15], Montserrat Casanovas
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

The hybrid averaging is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the ordered weighted averaging (OWA) operator in the same formulation. In this paper, we introduce the fuzzy generalized hybrid averaging (FGHA) operator. It is a new aggregation operator that uses generalized means and uncertain information represented by fuzzy numbers in the hybrid averaging operator. The main advantage of this operator is that it generalizes a wide range of fuzzy aggregation operators that can be used in different applications such as decision making. For example, we could mention the fuzzy hybrid averaging (FHA), the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA), the fuzzy weighted generalized mean (FWGM), the fuzzy generalized OWA (FGOWA), etc. We end the paper with an application of the new approach in a decision making problem.

Keywords: Aggregation operators; Fuzzy numbers; Hybrid averaging; OWA operator; Decision making.

1. Introduction

The hybrid averaging (HA) operator [1] is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the ordered weighted averaging (OWA) operator, that is, two of the most common aggregation operators [2-32], in the same formulation. An interesting extension of the HA operator for situations where it is not possible to use exact numbers because the information is uncertain, is the fuzzy HA (FHA) operator. It represents the uncertain information to be aggregated with the HA operator by using FNs.

Another interesting aggregation operator is the generalized OWA (GOWA) operator [8, 25]. It generalizes the OWA operator by using generalized means. Recently [14], a further generalization has been suggested by using FNs in the GOWA operator. This operator is known as the fuzzy GOWA (FGOWA) operator. The main advantage of this operator is that it generalizes a wide range of mean operators such as the fuzzy OWA (FOWA), the fuzzy ordered weighted quadratic averaging (FOWQA), the fuzzy generalized mean (FGM), etc. The FGOWA operator can be further generalized by using quasi-arithmetic means [6]. The result is the Quasi-FOWA operator. Other generalizations of the OWA operator by using generalized or quasi-arithmetic means can be found in [3-4, 16-17].

[15] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Going a step further, in this paper we introduce the fuzzy generalized hybrid averaging (FGHA) operator. It is an aggregation operator that uses the main characteristics of the GOWA, the FOWA and the HA operator. Then, this operator uses generalized means in the HA operator and in uncertain situations where the available information can not be represented with exact numbers but it is possible to use FNs. By using the HA operator, the FGHA considers the WA and the OWA in the same problem. In decision making problems, this implies that the FGHA operator considers the subjective probability and the attitudinal character of the decision maker in the same formulation. One of the key features of the FGHA operator is that it generalizes a wide range of aggregation operators such as the FGM, the FWGM, the FGOWA, the FWA, the FOWA, the FHA, the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA), the fuzzy hybrid geometric averaging (FHGA), the fuzzy hybrid harmonic averaging (FHHA), the FOWQA, etc. Then, it is able to provide a more complete view of the decision problem to the decision maker, so he will to take the appropriate decision according to his interests.

We further generalize the FGHA by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-FHA operator. We also develop a numerical example of the new approach in a decision making problem about selection of strategies. With this example, we will see that depending on the aggregation operator used, the results may lead to different decisions.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts about the FNs, the FHA and the GOWA operator. In Section 3 we present the FGHA operator. Section 4 briefly analyses some basic families of the FGHA operator. Section 5 introduces the Quasi-FHA operator. In Section 6 we develop a numerical example of the new approach. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we give a brief overview of the FNs, the FHA and the GOWA operator.

2.1. Fuzzy Numbers

The FN was first introduced by [33-34]. Since then, it has been studied and applied by a lot of authors such as [35-36].

A FN is a fuzzy subset of a universe of discourse that is both convex and normal. Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings. In the literature, we find a wide range of FNs [35-36]. For example, a trapezoidal FN (TpFN) A of a universe of discourse R can be characterized by a trapezoidal membership function $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \overline{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha \in$ [0, 1] and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a crisp value and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a triangular FN (TFN). Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

In the following, we are going to review some basic FN arithmetic operations as follows. Let A and B be two TFN, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied [35-36] but in this paper we will focus on these ones.

2.2. Fuzzy Hybrid Averaging Operator

The FHA operator is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator in the same formulation. Then, it is possible to consider in the same decision making problem, the attitudinal character of the decision maker and its subjective probability. It also deals with uncertain environments where the available information cannot be assessed with exact numbers but it is possible to find approximate results using FNs. It can be defined as follows.

Definition 1. Let Ψ be the set of FNs. A FHA operator of dimension n is a mapping FHA: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are FNs.

Similar to the FOWA operator, it is possible to analyze different properties of the FHA operator. Note that in this case, we should also consider the problem of comparing FNs in the reordering process. For simplicity, we recommend to follow the policy explained in [12, 14].

2.3. GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator is a generalization of the OWA operator by using generalized means. It was introduced in [8, 25]. It includes a wide range of mean operators such as the usual OWA, the OWG operator, the ordered weighted quadratic averaging operator (OWQA), etc. It can be defined as follows.

Definition 3. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

For further reading on the GOWA and its recent developments, see for example [3-4, 14, 16].

If we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$ [3], then, the GOWA operator becomes the Quasi-OWA operator [6]. It can be formulated as follows.

Definition 4. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping QOWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0, 1]$, then:

$$\mathrm{QOWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g(b_j) \right) \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i and $g(b)$ is a strictly continuous monotonic function.

3. The Fuzzy Generalized Hybrid Averaging Operator

The fuzzy generalized hybrid averaging operator is an extension of the HA operator that uses generalized means and uncertain information that can be represented by using FNs. Then, we can represent the problems considering the best and worst result and the possibility that the internal values of the FN will occur. With this generalization, we include in the same formulation a lot of aggregation operators such as the FHA, the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA), the FGOWA, the FWGM, etc. It can be defined as follows.

Definition 3. Let Ψ be the set of FNs. A FGHA operator of dimension n is a mapping $FGHA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, the $\tilde{a}_i$ are FNs and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

Note that if $\lambda \leq 0$, we can only use positive numbers R^+, in order to get consistent results. Note also that different types of FNs could be used in the aggregation such as TFNs, TpFNs, L-RFNs, interval-valued FNs, intuitionistic FNs [21, 37], etc.

In this case, the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using FNs. Then, in some cases it is not clear which FN is higher, so we need to establish an additional criteria for reordering the FNs. For simplicity, we recommend the following procedure. Select the FN with the highest value in the membership level $\alpha = 1$. Note that if the membership level $\alpha = 1$ is an interval, then, we will calculate the average of the interval.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending FGHA (DFGHA) and the ascending FGHA (AFGHA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFGHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFGHA operator.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^λ, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the FGHA operator can be expressed as:

$$FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the FGHA operator can be expressed as:

$$FGHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\frac{1}{W}\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^\lambda\right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

The FGHA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). *Assume f is the FGHA operator, if* $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, *for all* $\tilde{a}_i$, *then*:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \tag{8}$$

Proof: Let

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^\lambda\right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

$$f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^\lambda\right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

Since $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, for all $\tilde{a}_i$, it follows that, $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, and then

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). *Assume f is the FGHA operator, then*:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \tag{11}$$

where $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n)$ *is any permutation of the arguments* $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n)$.

Proof: Let

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

$$f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\ldots, \tilde{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{13}$$

Since $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n)$ is a permutation of $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\ldots, \tilde{e}_n)$, we have $b_j = d_j$, for all j, and then

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\ldots, \tilde{e}_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). *Assume f is the FGHA operator, if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, then*:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a} \tag{14}$$

Prof: Since $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $\tilde{a}_i$, we have

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a} \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). *Assume f is the FGHA operator, then*:

$$\mathrm{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \leq \mathrm{Max}\{\tilde{a}_i\} \tag{16}$$

Proof: Let $\max\{\tilde{a}_i\} = c$, and $\min\{\tilde{a}_i\} = d$, then

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(c^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{17}$$

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{18}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \leq c \tag{19}$$

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) \geq d \tag{20}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \le f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \le \text{Max}\{\tilde{a}_i\} \qquad \blacksquare$$

A further interesting issue to consider are the measures for characterizing the weighting vector W of the FGHA operator such as the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator. Note that these measures follow the same methodology as the original version developed for the OWA and the GOWA operator [14, 22, 25] but they do not affect directly the weighting vector ω.

4. Families of FGHA operators

In this Section, we analyze different families of FGHA operators. We will distinguish between those found in the weighting vector W and those found in the parameter λ. The main advantage of using these families is that they can be very useful for the decision maker in some specific situations. However, each family is just one particular case. Therefore, they can only be used in some particular situations but they cannot be seen as a general model that can be used in different frameworks such as the general formulation explained in Definition 3.

4.1. Analysing the weighting vector *W*

By using a different weighting vector in the FGHA operator, we are able to obtain different types of fuzzy aggregation operators. For example, it is possible to obtain the fuzzy hybrid maximum, the fuzzy hybrid minimum, the fuzzy generalized mean (FGM), the fuzzy weighted generalized mean (FWGM) and the FGOWA operator.

Remark 1: The fuzzy hybrid maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The fuzzy hybrid minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $FGHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The FGM is found when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all a_i. The FWGM is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. The FGOWA is found when $\omega_i = 1/n$, for all a_i.

Remark 2: Following a similar methodology as it has been developed in [2, 9-11, 14, 16, 18-20, 23-24, 26-27, 29], we could study other particular cases of the FGHA operator. For example, when $w_{j^*} = 1/m$ for $k \le j^* \le k + m - 1$ and $w_{j^*} = 0$ for $j^* > k + m$ and $j^* < k$, we are using the window-FGHA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \le n$.

Remark 3: The olympic-FGHA, is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j^*} = 1/(n - 2)$. A general form [10] of the olympic-FGHA can be used considering that $w_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and for all others $w_{j^*} = 1/(n - 2k)$, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, this general form becomes the usual olympic aggregation. If $k = (n - 1)/2$, then, this general form becomes the median-FGHA aggregation. That is, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j^*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j^*} = 0$ for all others.

Remark 4: Another type of aggregation that could be used is the E-Z FGHA weights. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = 1$ to q and $w_{j*} = 0$ for $j* > q$, and in the second class, we assign $w_{j*} = 0$ for $j* = 1$ to $n - q$ and $w_{j*} = (1/q)$ for $j* = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z FGHA becomes the fuzzy hybrid maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z FGHA becomes the fuzzy hybrid minimum.

Remark 5: For the weighted median-FGHA, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 6: A further interesting family is the S-FGHA operator based on the S-OWA operator [29]. It can be subdivided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-FGHA operator. The generalized S-FGHA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-FGHA operator becomes the "andlike" S-FGHA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-FGHA operator.

Remark 7: Another family of aggregation operator that could be used is the centered-FGHA operator. We could define a FGHA operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive. Note that these properties have to be accomplished for the weighting vector w of the FOWA operator but not necessarily for the weighting vector ω of the FWA. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-FGHA operator. Another particular situation of the centered-FGHA operator appears if we remove the third condition. We shall refer to it as a non-inclusive centered-FGHA operator.

Remark 8: Other families of FGHA operators could be studied such as the Gaussian FGHA weights, the nonmonotonic FGHA operator, etc. For more information, see for example [2, 9-11, 14, 16, 18-20, 23-24, 26-27, 29].

4.2. Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual FHA operator, the fuzzy hybrid geometric averaging (FHGA) operator, the fuzzy hybrid harmonic averaging (FHHA) operator and the fuzzy hybrid quadratic averaging (FHQA) operator.

Remark 9: When $\lambda = 1$, we get the FHA operator.

$$FGHA(a_1, a_2 \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{21}$$

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the DFHA operator and the AFHA operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the FWA and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the FOWA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy average (FA).

Remark 10: When $\lambda = 0$, the FGHA operator becomes the FHGA operator.

$$FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{22}$$

In this case, it is also possible to distinguish between descending (DFHGA) and ascending (AFHGA) orders. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy weighted geometric average (FWGA) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy OWG (FOWG) operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy geometric mean (FGM).

Remark 11: When $\lambda = -1$, we get the FHHA operator.

$$FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{23}$$

In this case, we get the descending FHHA (DFHHA) operator and the ascending FHHA (AFHHA) operator. Note that if $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy weighted harmonic mean (FWHM) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy ordered weighted harmonic averaging (FOWHA) operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy harmonic mean (FHM).

Remark 12: When $\lambda = 2$, we get the FHQA operator.

$$FGHA(a_1, a_2\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2 \right)^{1/2} \tag{24}$$

In this case, we also get the descending FHQA (DFHQA) operator and the ascending FHQA (AFHQA) operator. If $w_j = 1/n$, for all a_i, we get the fuzzy weighted quadratic average (FWQA) and if $\omega_j = 1/n$, for all a_i, we get the FOWQA operator. If $w_j = 1/n$, and $\omega_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the fuzzy quadratic average (FQA).

Remark 13: Note that other families could be obtained by using different values in the parameter λ. Note also that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1, where we study different properties and families of the fuzzy hybrid aggregation operators.

5. The Quasi-FHA operator

As it is explained in [3], it is possible to further generalize the GOWA operator by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology as in [3, 6], we can suggest a similar generalization to the FGHA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-FHA operator. It can be defined as follows.

Definition 5. Let Ψ be the set of FN. A Quasi-FHA operator of dimension n is a mapping $QFHA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$Quasi\text{-}FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{25}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, the $\tilde{a}_i$ are FNs and $g(b)$ is a strictly continuous monotonic function.

As we can see, we replace b^λ of the FGHA with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DFHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AFHA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the FGHA operator, are also included in this generalization. Then, for example, we could mention the problem of reordering the arguments when they are FN. In order to solve this problem, we recommend the method explained in [12, 14].

6. Numerical example

In the following, we are going to develop a numerical example in order to illustrate the new approach. We will consider a decision making problem where a company is analysing the optimal strategy for the next period. We will use different types of FGHA operators such as the FA, the FWA, the FOWA, the FHA and the AFHA operator.

Assume that a company that it is operating in Europe and North America, is analysing its general policy for the next year and they consider 5 possible strategies to follow.

- A_1: Expand to the Asian market.
- A_2: Expand to the South American market.
- A_3: Expand to the African market.
- A_4: Do not develop any expansion.
- A_5: Expand to the 3 continents.

In order to evaluate these strategies, the group of experts of the company considers that the key factor for the next year is the economic situation. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 5 possible situations for the next year: S_1 = Very bad, S_2 = Bad, S_3 = Normal, S_4 = Good, S_5 = Very good. The results are shown in Table 1. Note that the results are TFN.

Table 1: Fuzzy payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
A_1	(20,30,40)	(40,50,60)	(30,40,50)	(50,60,70)	(60,70,80)
A_2	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)
A_3	(40,50,60)	(60,70,80)	(20,30,40)	(50,60,70)	(30,40,50)
A_4	(60,70,80)	(60,70,80)	(50,60,70)	(30,40,50)	(10,20,30)
A_5	(30,40,50)	(60,70,80)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)

In this example, we assume that the experts use the following weighting vector for all the cases of the WA and the OWA: $W = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3)$.

With this information, it is possible to aggregate it in order to take a decision. The results are shown in Table 2.

Table 2: Fuzzy aggregated results

	FA	FWA	FOWA	FHA	AFHA
A_1	(40,50,60)	(44,54,64)	(36,46,56)	(36,45,54)	(52,63,74)
A_2	(42,52,62)	(38,48,58)	(38,48,58)	(36,45.5,55)	(40,50.5,61)
A_3	(40,50,60)	(39,49,59)	(36,46,56)	(35,44.5,54)	(43,53.5,64)
A_4	(42,52,62)	(37,47,57)	(37,47,57)	(32.5,43,53)	(41.5,51,61)
A_5	(42,52,62)	(42,52,62)	(39,49,59)	(37.5,47,56.5)	(46.5,57,67.5)

As we can see, depending on the aggregation operator used, the optimal strategy may be different.

A further interesting issue is to establish an ordering of the strategies. This is very useful when we want to consider more than one alternative. Note that if the ordering is not clear due to the FNs, we will have to establish a criterion for comparing FNs. As it has been explained in Section 3, we recommend to follow the method explained in [12, 14] where we calculate an average or a weighted average of the FNs. The results are shown in Table 3.

Table 3: Ordering of the strategies

	Ordering
FA	$A_2=A_4=A_5 \succ A_1=A_3$
FWA	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4$
FOWA	$A_5 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1=A_3$
FHA	$A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4$
AFHA	$A_1 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$

As we can see, we get different orderings depending on the aggregation operator used. The main advantage of this analysis is that the decision maker gets a more complete view of the different scenarios that could happen in the future depending on the method used. Although he will select the alternative that it is in accordance with his interests, he will be concerned on other potential results that could happen in the uncertain environment.

7. Conclusions

We have presented the FGHA operator. We have seen that it is an extension of the HA operator that uses generalized means and uncertain information assessed with

FNs. Moreover, we have seen that it includes the WA and the OWA in the same formulation because it is an extension of the HA operator. Particularly, this operator includes the FWGM and the FGOWA operator by using the hybrid formulation. It also includes a lot of other types of aggregation operators such as the FHA, the FHGA, the FHQA, etc.

We have further generalized it by using quasi-arithmetic means. As a result, we have obtained the Quasi-FHA operator. We have also developed an application of the FGHA operator in a decision making problem about selection of strategies. Note that a lot of other applications could be developed with the FGHA such as in statistics, in operational research, etc.

In future research we expect to develop further extensions of the FGHA operator by adding new characteristics in the aggregation such as the use of order inducing variables and applying it to other decision making problems.

References

[1] Z.S. Xu, Q.L. Da, "An Overview of Operators for Aggregating Information", *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 18, no. 9, pp. 953-969, 2003.

[2] B.S. Ahn, "Preference relation approach for obtaining OWA operator weights", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 47, no. 2, pp. 166-178, 2008.

[3] G. Beliakov, "Learning weights in the generalized OWA operators", *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 4, no.2, pp. 119-130, 2005.

[4] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, *Aggregation Functions: A guide for practitioners*, Berlin: Springer-Verlag, 2007.

[5] H. Dyckhoff, W. Pedrycz, "Generalized means as a model of compensative connectives", *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 14, no. 2, pp. 143-154, 1984.

[6] J. Fodor, J.L. Marichal, M. Roubens, "Characterization of the ordered weighted averaging operators", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 3, no. 2, pp. 236-240, 1995.

[7] Y.C. Hu, J.F. Tsai, "Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators", *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 717-735, 2007.

[8] N. Karayiannis, "Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators", *IEEE Transactions on Neural Networks*, vol. 11, no. 5, pp. 1093-1105, 2000.

[9] X. Liu, "The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 45, no. 1, pp. 68-81, 2007.

[10] X. Liu, "Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method", *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, (to be published).

[11] X. Liu, S. Han, "Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary", *International Journal of Approximate Reasoning*, vol. 48, no. 1, pp. 77-97, 2008.

[12] J.M. Merigó, M. Casanovas, "Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators", *International Journal of Information Technology*, vol. 4, no. 3, pp. 177-182, 2008.

[13] J.M. Merigó, M. Casanovas, “Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, (to be published).

[14] J.M. Merigó, M. Casanovas, “The fuzzy generalized OWA operator and its application in strategic decision making”, *Cybernetics and Systems*, (submitted for publication).

[15] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “Unification point in methods for the selection of financial products”, *Fuzzy Economic Review*, vol. 13, no. 1, pp. 35-50, 2007.

[16] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, “The induced generalized OWA operator”, *Information Sciences*, (to be published).

[17] J.H. Wang, J. Hao, “A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 14, no. 3, pp. 435-445, 2006.

[18] Y.M. Wang, Y. Luo, Z. Hua, “Aggregating preference rankings using OWA operator weights”, *Information Sciences*, vol. 177, no. 16, pp. 3356-3363, 2007.

[19] Y.M. Wang, C. Parkan, “A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making”, *Information Sciences*, vol. 177, no. 8, pp. 1867-1877, 2007.

[20] J. Wu, C.Y. Liang, Y.Q. Huang, “An argument-dependent approach to determining OWA operator weights based on the rule of maximum entropy”, *International Journal of Intelligent Systems*, vol. 22, no. 2, pp. 209-221, 2007.

[21] Z.S. Xu, “Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 6, no. 3, pp. 221-236, 2007.

[22] R.R. Yager, “On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B*, vol. 18, no.1, pp. 183-190, 1988.

[23] R.R. Yager, “Families of OWA operators”, *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 59, no. 2, pp. 125-148, 1993.

[24] R.R. Yager, “On weighted median aggregation”, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, vol. 2, no. 1, pp. 101-113, 1994.

[25] R.R. Yager, “Generalized OWA Aggregation Operators”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 3, no. 1, pp. 93-107, 2004.

[26] R.R. Yager, “Centered OWA operators”, *Soft Computing*, vol. 11, no. 7, pp. 631-639, 2007.

[27] R.R. Yager, “Using stress functions to obtain OWA operators”, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, vol. 15, no. 6, pp. 1122-1129, 2007.

[28] R.R. Yager, “Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation”, *Information Sciences*, vol. 178, no. 2, pp. 363-380, 2008.

[29] R.R. Yager, D.P. Filev, “Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators”, *International Journal of General Systems*, vol. 22, no. 3, pp. 297-316, 1994.

[30] R.R. Yager, J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Norwell: Kluwer Academic Publishers, 1997.

[31] D.Y. Yeh, C.H. Cheng, H.W. Yio, “Empirical research of the principal component analysis and ordered weighted averaging integrated evaluation model on software projects”, *Cybernetics and Systems*, vol. 38, no. 3, pp. 289-303, 2007.

[32] M. Zarghami, F. Szidarovszky, R. Ardakanian, “A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making”, *Fuzzy Optimization and Decision Making*, vol. 7, no. 1, pp. 11-15, 2008.

[33] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh, “On fuzzy mapping and control”, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 2, no. 1, pp. 30-34, 1972.

[34] L.A. Zadeh, “The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning”, Part 1, *Information Sciences*, vol. 8, no. 2, pp. 199-249, 1975; Part 2, *Information Sciences*, vol. 8, no. 4, pp. 301-357, 1975; Part 3, *Information Sciences*, vol. 9, no. 1, pp. 43-80, 1975.

[35] D. Dubois, H. Prade, *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications*, New York: Academic Press, 1980.

[36] A. Kaufmann, M.M. Gupta, *Introduction to fuzzy arithmetic*, Rheinhold: Publications Van Nostrand, 1985.

[37] X. Wang, “Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Arithmetic Aggregation Operators”, *International Journal of Fuzzy Systems*, vol. 10, no. 2, pp. 104-111, 2008.

14.2.25. Artículo de revista 25. – En segunda ronda de revisión (*major revision*) en *Information Sciences*

Decision making techniques for the selection of financial products

José M. Merigó[16], Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain.

Abstract

We develop a new approach that uses the ordered weighted averaging (OWA) operator in different decision making methods used for the selection of financial products. The objective of this new model is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select financial products according to his degree of optimism or pessimism. We suggest three new indexes for the selection of financial products that uses the OWA operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. The main advantage of using the OWA operator is that we get a parameterized family of aggregation operators for each index. Then, the analysis developed in the decision process by the decision maker is much more complete. The work ends with an illustrative example that shows the results obtained by using different types of aggregation operators in the new approaches for the selection of financial products.

Keywords: Decision making; OWA operator; selection of financial products; Hamming distance.

1. Introduction

The selection of the more adequate financial products for the company represents a fundamental problem for its good development. With the great variety of alternatives that exist in the market, the enterprise needs to know which the best financial products are for them. In order to solve this problem, the company has to develop a selection process in which they have to compare the different characteristics of each product found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in decision making, this work will focus on the models developed in [7,14] about selection of human resources, the models developed in [8-9,20] about selection of financial products and the models developed in [10] about selection of players in sport management. Note that these methods follow a similar methodology than the TOPSIS approach [5,14,25]. Note also that a general overview of other decision making methods can be found in [6].

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results according to the interests of the decision maker. This problem becomes important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. One common method for aggregating the information

[16] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
E-mail addresses: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu.

considering the decision attitude of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator [33]. Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors such as [1-4,11-13,16-24,26-30,32-42].

Our objective in this paper consists in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of financial products. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the OWA operator because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWA operator. We will introduce in the selection of financial products, the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator, the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) and the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). We will study some of its main properties and some of its main particular cases.

The main advantage of this new approach is that we get a parameterized family of aggregation operators for each index, so the information obtained by using this methodology in the selection of financial products is much more complete. Then, the decision maker will be able to consider the decision problem in a more clear way according to his interests. We will also develop an illustrative example in order to understand numerically the new approach. We will see that depending on the particular type of aggregation operator used, the results will lead to different decisions. Note that these indexes can be used in other problems such as in the calculation of distances between intuitionistic fuzzy sets [31], interval-valued fuzzy sets, etc.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the OWA operator. Section 3 explains the basic aspects considered for the selection of financial products with fuzzy techniques. In Section 4, we develop the process to follow when using the OWA operator in the selection of financial products. Section 5 gives an illustrative example of the suggested methodology and in Section 6 we end the paper with the main conclusions.

2. OWA Operator

The OWA operator [33] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications [1-4,11-13,16-24,26-30,32-42]. It can be defined as follows.

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping $OWA : R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$OWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

A fundamental aspect of this operator is the reordering of the arguments, based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case of the usual weighted average, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator. The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, idempotent and bounded.

3. Selection of financial products with the OWA Operator

The use of the OWA operator in the selection of financial products appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. The problem comes from the fact that the traditional methods in selection of financial products [8,20] are neutral against the attitude of the decision maker. Then, introducing the OWA operators in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation step. This can be useful in a lot of situations, for example, in situations where the decision maker wants to under estimate the results in order to take a more safety decision than in normal cases. Obviously, this increase in the security can affect our decision doing that we select a different financial product than we would have chosen with a neutral criteria.

In order to understand how the OWA operator can under estimate or over estimate the results, we will show a brief example.

Example 1. Assume we want to evaluate a product and we have 3 characteristics $C = \{C_1, C_2, C_3\}$ with values (0.5, 0.8, 0.2). We do not know anything about which characteristic is more important in the problem. Therefore, we are in a situation of total uncertainty and we can not use probabilities or weighted averages. If we use a neutral position, then, we should calculate the average of the characteristics in order to obtain a general result. Then, $(0.5 + 0.8 + 0.2) / 3 = 0.5$. Sometimes, the decision maker wants to evaluate the product in an optimistic or in a pessimistic way. Then, he will use a weighted average that gives more importance to the highest (optimistic) or the lowest (pessimistic) results. In other words, he will use the OWA operator. In this example, assume that we use the following weighting vector: $W = (0.6, 0.3, 0.1)$. Then, if we want to evaluate the product in an optimistic way: $0.6 \times 0.8 + 0.3 \times 0.5 + 0.1 \times 0.2 = 0.65$. And if we want to evaluate it in a pessimistic way: $0.6 \times 0.2 + 0.3 \times 0.5 + 0.1 \times 0.8 = 0.35$. As we can see, if we evaluate the product in an optimistic way, we get a higher result (0.65) than if we evaluate it with a neutral criterion (0.5) or with a pessimistic criterion (0.35).

The process to follow in the selection of financial products with the OWA operator, is similar to the process developed in [7,15] for human resources and in [8-9,20] for financial products, with the difference that the instruments used will include the OWA operator in the selection process. Then, the 5 steps to follow will be:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company. Theoretically, it will be represented as:

$C = \{C_1, C_2, \ldots, C_i, \ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider in the financial product and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal financial product. Note that this financial product is not real but it explains which the best financial product is for the decision maker, although it does not exist in the market. That is:

Table 1
Ideal financial product

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P =	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

where P is the ideal financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. That is:

Table 2
Available financial products considered

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
P_1 =	$\mu_1^{(1)}$	$\mu_2^{(1)}$	…	$\mu_i^{(1)}$	…	$\mu_n^{(1)}$
…	…	…	…	…	…	…
P_k =	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$
…	…	…	…	…	…	…
P_m =	$\mu_1^{(m)}$	$\mu_2^{(m)}$	…	$\mu_i^{(m)}$	…	$\mu_n^{(m)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the kth financial product expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$; $i = 1, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth financial product.

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them. In this step, the objective is to express numerically the removal between the ideal financial product and the different financial products considered. For this, it can be used the different available selection indexes such as the Hamming distance, the adequacy coefficient, the index of maximum and minimum level, etc. [20]. Note that in this paper, we will develop new approaches by using the OWA operator in these selection indexes.

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps. Finally, we should take the decision about which financial product select. Obviously, our decision will consist in choose the financial product with the best results according to the index used.

4. Using the OWA operator in the Hamming distance for the selection of financial products

In this Section, we introduce a new index for the selection of financial products that uses the OWA operator in the Hamming distance. We will call it the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWAD operator of dimension n, is a mapping $OWAD$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$ such that:

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{2}$$

where D_j represents the jth largest of the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, μ_i is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the ideal financial product P, $\mu_i^{(k)}$ is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the kth financial product considered, and $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that this definition can be generalized to all the real numbers R by using OWAD: $R^n \times R^n \rightarrow R$. Note also that from a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between ascending and descending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAD (DOWAD) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAD (AOWAD) operator.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments D_j, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the OWAD operator can be expressed as:

$$OWAD(P,P_k) = W^T B \tag{3}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the OWAD operator can be expressed as:

$$OWAD(P,P_k) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{4}$$

Another factor to consider, are the measures [33] for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure $\alpha(W)$, the attitudinal character, is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{5}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0.

The second measure [33] is called the entropy of dispersion of the weighting vector W. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{6}$$

This can be used to provide a measure of the information being used. For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

As we can see, the OWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Commutativity). *Assume f is the OWAD operator and d_i the ith individual distance $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, then*:

$$f(d_1, \ldots, d_n) = f(e_1, \ldots, e_n) \tag{7}$$

where $(d_1, \ldots, d_n)$ is any permutation of the arguments $(e_1, \ldots, e_n)$.

Proof. Let

$$f(d_1, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{8}$$

$$f(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j E_j \tag{9}$$

Since $(d_1, \ldots, d_n)$ is a permutation of $(e_1, \ldots, e_n)$, we have $D_j = E_j$, for all j, and then

$$f(d_1, \ldots, d_n) = f(e_1, \ldots, e_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Monotonicity). *Assume f is the OWAD operator, if $d_i \geq e_i$, for all i, then*:

$$f(d_1, \ldots, d_n) \geq f(e_1, \ldots, e_n) \tag{10}$$

Proof. Let

$$f(d_1, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \tag{11}$$

$$f(e_1, \ldots, e_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j E_j \tag{12}$$

Since $d_i \geq e_i$, for all i, it follows that, $d_i \geq e_i$, and then

$$f(d_1, \ldots, d_n) \geq f(e_1, \ldots, e_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). *Assume f is the OWAD operator, if* $d_i = d$, *for all i, then*:

$$f(d_1, \ldots, d_n) = d \tag{13}$$

Proof. Since $d_i = d$, for all i, we have

$$f(d_1, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j = \sum_{j=1}^{n} w_j d = d \sum_{j=1}^{n} w_j \tag{14}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(d_1, \ldots, d_n) = d \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). *Assume f is the OWAD operator, then*:

$$\text{Min}\{d_i\} \le f(d_1, \ldots, d_n) \le \text{Max}\{d_i\} \tag{15}$$

Proof. Let $\max\{d_i\} = r$, and $\min\{d_i\} = s$, then

$$f(d_1, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \le \sum_{j=1}^{n} w_j r = r \sum_{j=1}^{n} w_j \tag{16}$$

$$f(d_1, \ldots, d_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \ge \sum_{j=1}^{n} w_j s = s \sum_{j=1}^{n} w_j \tag{17}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(d_1, \ldots, d_n) \le r \tag{18}$$

$$f(d_1, \ldots, d_n) \ge s \tag{19}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{d_i\} \le f(d_1, \ldots, d_n) \le \text{Max}\{d_i\} \qquad \blacksquare$$

Remark 1. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, with the DOWAD operator the maximum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized Hamming distance is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted Hamming distance is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Remark 2. Other families of OWAD operators could be obtained by using different manifestations of the weighting vector such as the step-OWAD, the olympic-OWAD, the S-OWAD, the nonmonotonic-OWAD, etc [21,26,34-36,39]. Note that these families follow a similar methodology than the OWA version. For further information, see for example [1,16-18,21,23-24,26-27,34-37,39-40].

Remark 3. The step-OWAD is found when $w_k = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq k$. Note that if $k = 1$, the step-OWAD is transformed in the maximum distance and if $k = n$, the step-OWAD becomes the minimum distance.

Remark 4. The olympic-OWAD is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Following the ideas of [17], it is possible to develop a general form of the olympic-OWAD considering that $w_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2k)$, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, this general form becomes the usual olympic-OWAD. If $k = (n - 1)/2$, then, this general form becomes the median-OWAD aggregation. That is, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

Remark 5. Following the ideas of [17], it is also possible to develop the contrary case of the general olympic-OWAD operator. In this case, $w_j = (1/2k)$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and $w_j = 0$, for all others, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, we get the contrary case of the median-OWAD.

Remark 6. A further interesting family is the S-OWAD operator based on [39]. It can be subdivided in three classes: the “orlike”, the “andlike” and the generalized S-OWAD operator. The generalized S-OWAD operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-OWAD operator becomes the “andlike” S-OWAD operator and if $\beta = 0$, it becomes the “orlike” S-OWAD operator.

Remark 7. Another interesting family is the nonmonotonic-OWAD operator that follows the ideas of [35]. It is found when at least one of the weights w_j is lower than 0 and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Note that a key aspect of this operator is that it does not always accomplish the monotonicity property.

5. Using the OWA operator in the adequacy coefficient

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the selection of financial products with the adequacy coefficient. We will call it the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC).

Definition 3. An OWAAC operator of dimension n, is a mapping $OWAAC$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, such that:

$$OWAAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{20}$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, μ_i is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the ideal financial product P, $\mu_i^{(k)}$ is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the kth financial product considered and $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAAC (DOWAAC) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAAC (AOWAAC) operator.

As we can see, the OWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that it is straightforward to prove these properties by looking to Theorems 1- 4.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, with the DOWAAC operator the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized adequacy coefficient is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted adequacy coefficient is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j.

Other families of OWAAC operators could be obtained by using a similar methodology as for the OWAD operator. Then, for example, we could suggest the step-OWAAC operator, the window-OWAAC, the olympic-OWAAC, the OWAAC-median, the E-Z OWAAC, the centered-OWAAC, the S-OWAAC, the nonmonotonic-OWAAC, etc. The formulation of these families is straightforward by using the weights explained in Remarks 2 – 7 and in [1,16-18,21,23-24,26-27,34-37,39-40].

Analogously to the OWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAAC because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (OWADAC). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWADAC operator of dimension n, is a mapping $OWADAC$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, such that:

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{21}$$

where Q_j represents the jth largest of the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, μ_i is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the ideal financial product P, $\mu_i^{(k)}$ is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the kth financial product considered, and $k = 1,2,\ldots,m$.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADAC (DOWADAC) and the ascending OWADAC (AOWADAC) operator by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWADAC operator.

Note that it is also possible to obtain different families of aggregation operators with the OWADAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the normalized dual adequacy coefficient (NDAC), the general olympic-OWADAC, etc.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of financial products [20] between the Hamming distance and the adequacy coefficient. As it has been explained in [20], the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new methods suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAD and the OWAAC accomplish the conditions of the theorems explained in [20]. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point. Note also that we consider the unification point for one financial product.

Theorem 5. *Assume* $OWAD(P,P_k)$ *is the selection of financial products with the OWAD operator and* $OWADAC(P_k \rightarrow P)$ *the selection of financial products with the OWADAC operator. If* $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ *for all i, then*:

$$OWAD(P,P_k) = OWADAC(P_k \rightarrow P) \tag{22}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid \qquad \text{and}$$

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Remark 8. Analysing this theorem, we could generalize it for all the financial products considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to Theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the financial products *k*.

6. Using the OWA operator in the index of maximum and minimum level

In this Section, we develop an index for the selection of financial products that uses the OWA operator in the index of maximum and minimum level. We will call it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). It can be defined as follows.

Definition 5. An OWAIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWAIMAM$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ such that:

$$S(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j S_j \tag{23}$$

where S_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; μ_i is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the ideal financial product P, $\mu_i^{(k)}$ is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the kth financial product considered, with $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we could distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator.

Following a similar methodology in the calculation of the weighting vector W as it has been explained in Remarks 1 – 7 and in [1,16-18,21,23-24,26-27,34-37,39-40], we could develop different families of OWAIMAM operators such as the normalized index of maximum and minimum level (NIMAM), the weighted index of maximum and minimum level (WIMAM), the general olympic-OWAIMAM, the S-OWAIMAM, the centered-OWAIMAM, the nonmonotonic-OWAIMAM, etc.

Analogously to the OWAIMAM operator, we can suggest an equivalent removal index that is a dual of the OWAIMAM because $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level (OWADIMAM). It can be defined as follows.

Definition 6. An OWADIMAM operator of dimension n, is a mapping *OWADIMAM*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then:

$$OWADIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j R_j \tag{24}$$

where R_j represents the jth largest of all the $[1 - |\mu_i - \mu_i^{(k)}|]$ and the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$; μ_i is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the ideal financial product P, $\mu_i^{(k)}$ is the valuation between [0, 1] of the ith characteristic of the kth financial product considered, with $k = 1,2,\ldots,m$.

In this case, we can also distinguish between the descending OWAIMAM and the ascending OWAIMAM and we are also able to obtain a wide range of operators by using a different manifestation in the weighting vector.

A further interesting issue to consider is the unification point in the index of maximum and minimum level. As it has been explained in [20], in these situations, the index of maximum and minimum level becomes the Hamming distance. If we analyze the new type of index of maximum and minimum level suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAIMAM accomplishes the theorems explained in [20]. In this case, the OWAIMAM becomes the OWAD operator. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point. In the following, we briefly show the main theorem when using the OWA operator. Note that we consider the unification point for one financial product. That is, the result obtained for the partial unification point.

Theorem 6. *Assume $OWAD(P,P_k)$ is the selection of financial products with the OWAD operator and $OWAIMAM(P_k \rightarrow P)$ the selection of financial products with the OWAIMAM operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then*:

$$OWAD(P,P_k) = OWAIMAM(P_k \rightarrow P) \tag{25}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \,|\, \mu_i - \mu_i^{(k)} \,| \qquad \text{and}$$

$$OWAIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} [w_j *[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] + w_j^{'} \,|\, \mu_i - \mu_i^{(k)} \,|]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, and $w_j^* + w_j' = w_j$, then

$$OWAIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Remark 9. Analysing this theorem, we could generalize it for all the financial products considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to Theorem (2) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the financial products *k*.

7. Numerical example

The information about the example is found in [8] although we have made some changes in the paper.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the interesting financial products for the company.

It is assumed that in a financial market exist three financial products P_1, P_2 y P_3 with different characteristics in relation to:

- C_1 = prize of the money.
- C_2 = devolution period.
- C_3 = renewal possibilities.
- C_4 = the break up of the amortization.
- C_5 = velocity in the concession.

It is considered for each characteristic a property. For C_1 *cheap money*, for C_2 *a good devolution period*, for C_3 *renewal possibilities*, for C_4 *ideal break up of the amortization*, for C_5 *velocity in the concession*.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the fuzzy subset of ideals for the company as follows.

Table 3
Ideal financial product

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P^* =	0,9	0,83	0,66	0,66	0,33

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different financial products considered. For each of these characteristics, it is found the following information:

- For C_1: The price of P_1 is 20%, of P_2 22% and of P_3 18%.
- For C_2: The devolution period of P_1 is 5 years, of P_2 6 years and of P_3 4 years.
- For C_3: The renewal possibilities of P_1 are half of P_2 and 1/3 of P_3.
- For C_4: The amortization of P_1 is accomplished quarterly, of P_2 monthly and of P_3 quarterly.
- For C_5: The renewal of P_1 is estimated to be three times faster than P_2 and five times faster than P_3.

With this information, we can obtain a fuzzy subset for each of the financial products. Then, we will obtain the following results shown in Table 4.

Table 4
Available financial products

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0,9	0,83	0,33	1	1
P_2 =	0,81	1	0,66	0,33	0,33
P_3 =	1	0,66	1	1	0,2

These results show the level that each product has about the different characteristics considered: C_i, i = 1, 2, 3, 4, 5.

Step 4: Comparison between the ideal financial product and the different financial products considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. We will consider the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the OWAD operator and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the following weighting vector: W = (0'1, 0'1, 0'2, 0'3, 0'3). With this weighting vector, we can calculate the degree of optimism of the decision as: $\alpha(W)$ = 0'35 $\Rightarrow$ 35%, and the degree of dispersion as: $H(W)$ = 1'504.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each financial product. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using Eq. (2) and considering the type of aggregation we are developing. The results are shown in Table 5.

Table 5
Aggregated results with the Hamming distance

	NHD	*WHD*	*OWAD*	*AOWAD*
P_1	0.266	0.366	0.166	0.363
P_2	0.118	0.126	0.068	0.168
P_3	0.212	0.232	0.169	0.255

In this case, our decision will consist in selecting the financial product with the smallest distance. Then, we will select P_2 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal financial product. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered using Eq. (20). The results are shown in Table 6.

Table 6
Aggregated results with the adequacy coefficient

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
P_1	0.933	0.933	0.898	0.966
P_2	0.915	0.891	0.871	0.957
P_3	0.938	0.943	0.907	0.969

The decision will consist in selecting the financial product with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal financial product. Then, we will select P_3 because it gives us the highest result for all the cases.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in Table 7.

Table 7
Aggregated results with the dual adequacy coefficient

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
P_1	0.067	0.067	0.102	0.034
P_2	0.085	0.109	0.129	0.043
P_3	0.062	0.057	0.093	0.031

Finally, if we use the index of maximum and minimum level in the selection process as a combination of the normalized Hamming distance and the normalized adequacy coefficient, we will get the following. In this example, we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using Eq. (23). Here, we note that in the reordering step, it will be only considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained with the adequacy coefficient or with the Hamming distance. The results are shown in Table 8.

Table 8
Aggregated results with the index of maximum and minimum level

	NIMAM	*WIMAM*	*OWAIMAM*	*AOWAIMAM*
P_1	0.266	0.366	0.166	0.366
P_2	0.082	0.108	0.041	0.125
P_3	0.191	0.221	0.111	0.246

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the financial product with the smallest removal to the ideal.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent approximation index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $R(P_k \rightarrow P) = 1 - S(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in Table 9.

Table 9
Aggregated results with the dual index of maximum and minimum level

	NDIMAM	*WDIMAM*	*OWADIMAM*	*AOWADIMAM*
P_1	0.734	0.634	0.834	0.634
P_2	0.918	0.892	0.959	0.875
P_3	0.809	0.779	0.889	0.754

Step 5: As we can see, depending on the aggregation operator used in the selection of financial products, the results may lead to different decisions.

8. Conclusions

We have studied a large number of instruments for the selection of financial products. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have suggested the possibility of change this neutrality with the introduction of the OWA operator in the selection process. As we have seen, the OWA operator permits under estimate or over estimate the selection process according to a degree of optimism. With this in mind, we have introduced three new instruments for the selection of financial products that uses the OWA operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. Then, we have obtained a new method that permits reflect the attitude of the decision maker in the selection process of financial products.

We have called these new indexes, the OWAD operator, the OWAAC operator and the OWAIMAM operator. We have studied some of its main properties including different particular cases found in the weighting vector. We have also developed a numerical example in order to see the applicability of the new approach in the selection of financial products.

This work represents a first analysis about the possibility of using the OWA operator in different selection indexes. In this paper, we have focussed on the selection of financial products but it is important to note that these new methods can also be applied to other selection processes such as the selection of human resources, strategies, investments, etc. In future research, we will analyse how these methods can be applied in other selection processes and we will consider other selection indexes and other types of OWA operators.

References

[1] B.S. Ahn, H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, International Journal of Intelligent Systems 23 (2008) 33-49.

[2] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A guide for practitioners, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[3] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[4] L. Canós, V. Liern, Soft computing-based aggregation methods for human resource management, European Journal of Operational Research 189 (2008) 669-681.

[5] T.Y. Chen, C.Y. Tsao, The interval-valued fuzzy TOPSIS method and experimental analysis, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1410-1428.

[6] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys, Springer, Boston, 2005.

[7] J. Gil-Aluja, The interactive management of human resources in uncertainty, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998.

[8] A.M. Gil-Lafuente, Fuzzy logic in financial analysis, Springer, Berlin, 2005.

[9] A.M. Gil-Lafuente, J.M. Merigó, Acquisition of financial products that adapt to different environments, Lectures on Modelling and Simulation (2006) 42-48.

[10] J. Gil-Lafuente, The index of maximum and minimum level in the selection of players in sport management (In Spanish), in: Proc. 10th International Conference of the European Academy of Management and Business Economics (AEDEM), Reggio Calabria, Italy, pp.439-443, 2001.

[11] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15 (2007) 863-877.

[12] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 37 (2007) 176-189.

[13] Y.C. Hu, J.F. Tsai, Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 15 (2007) 717-735.

[14] C.L. Hwang, K. Yoon, Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin, 1981.

[15] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, Introduction to the theory of fuzzy subsets in business management (In Spanish), Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela, 1986.

[16] X. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, International Journal of Approximate Reasoning 45 (2007) 68-81.

[17] X. Liu, Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, to be published.

[18] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 77-97.

[19] B. Llamazares, Choosing OWA operator weights in the field of Social Choice, Information Sciences 177 (2007) 4745-4756.

[20] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 13 (2007) 35-50.

[21] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, Information Sciences, to be published.
[22] X. Wang, Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Arithmetic Aggregation Operators, International Journal of Fuzzy Systems 10 (2008) 104-111.
[23] Y.M. Wang, C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 1867-1877.
[24] J. Wu, C.Y. Liang, Y.Q. Huang, An argument-dependent approach to determining OWA operator weights based on the rule of maximum entropy, International Journal of Intelligent Systems 22 (2007) 209-221.
[25] W.Y. Wu, C. Lin, J.Y. Kung, C.T. Lin, A new fuzzy TOPSIS for fuzzy MADM problems under group decisions, Journal of Intelligent & Fuzzy Systems 18 (2007) 109-115.
[26] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[27] Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, Information Fusion 9 (2008) 310-316.
[28] Z.S. Xu, On multi-period multi-attribute decision making, Knowledge-Based Systems 21 (2008) 164-171.
[29] Z.S. Xu, Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations, Information Sciences 178 (2008) 452-467.
[30] Z.S. Xu, J. Chen, An interactive method for fuzzy multiple attribute group decision making, Information Sciences 177 (2007) 248-263.
[31] Z.S. Xu, J. Chen, An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 16 (2008) 529-555.
[32] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[33] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18 (1988) 183-190.
[34] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[35] R.R. Yager, Nonmonotonic OWA operators, Soft Computing 3 (1999) 187-196.
[36] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[37] R.R. Yager, Using stress functions to obtain OWA operators, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15 (2007) 1122-1129.
[38] R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, Information Sciences 178 (2008) 363-380.
[39] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized “andlike” and “orlike” OWA operators. International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.
[40] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[41] D.Y. Yeh, C.H. Cheng, H.W. Yio, Empirical research of the principal component analysis and ordered weighted averaging integrated evaluation model on software projects, Cybernetics and Systems 38 (2007) 289-303.
[42] M. Zarghami, F. Szidarovszky, R. Ardakanian, A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making, Fuzzy Optimization and Decision Making 7 (2008) 11-15.

14.2.26. Artículo de revista 26. – Enviado a *International Journal of Approximate Reasoning*

Fuzzy aggregation operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure

Montserrat Casanovas, José M. Merigó[17]
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We study the decision making problem with Dempster-Shafer theory of evidence. We analyze how to deal with this model when the available information is uncertain and it can be represented with fuzzy numbers. We use different types of aggregation operators that aggregate fuzzy numbers such as the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator and the fuzzy hybrid averaging (FHA) operator. As a result, we get new aggregation operators: the belief structure fuzzy ordered weighted averaging (BS-FOWA) operator and the belief structure fuzzy hybrid averaging (BS-FHA) operator. We also develop an illustrative example about the selection of investments where we can see the different results obtained by using different types of fuzzy aggregation operators.

Keywords: Decision making; Uncertainty; Dempster-Shafer theory; Fuzzy numbers; Fuzzy OWA operator; Investment selection.

1. Introduction

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence was introduced by Dempster [8] and by Shafer [29]. Since its appearance, this theory has been studied and applied in a lot of situations such as [4,9-11,13,18,24,27,30,33-34,40,44,49]. It provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes as special cases the situations of risk and ignorance. The difference between their works is that each one associated a different semantics in the creation of the theory although their ideas were practically the same. Dempster was interested in a probabilistic framework while Shafer was more oriented to belief measurement. The two fundamental measures of the theory developed by Shafer, belief and plausibility, were previously studied by Dempster although he referred to them as upper and lower probabilities.

Usually, when using the D-S theory in decision making it is considered that the available information are exact numbers [13,30,40,44]. However, this may not be the real situation found in the decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with exact numbers. Then, it is necessary to use another approach that is able to assess the uncertainty such as the use of fuzzy numbers (FNs). In order to develop the fuzzy approach, we will follow the ideas of [7,12,17,51]. Note that in the literature, there are

[17] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: mcasanovas@ub.edu, jmerigo@ub.edu

several studies dealing with uncertain information in different aspects of the D-S theory such as [10-11,24,33]

In this paper, we will study the decision making problem with D-S belief structure using information given in the form of FNs. Note that different types of FNs may be used in the decision problem such as the usual triangular FN (TFN), the trapezoidal FN (TpFN), the L-R FN [12], the interval-valued FN (IVFN) [6], the intuitionistic FN (IFN) [36], the interval-valued intuitionistic FN (IVIFN) [38], the generalized FN (GFN) [6], the interval-valued generalized FN (IVGFN), the intuitionistic generalized FN (IGFN), the interval-valued intuitionistic generalized FN (IVIGFN), etc. The main advantage of using FNs in the analysis is that it gives more complete information to the decision maker because it considers the best and worst scenarios, and the possibility that the internal values between the maximum and the minimum will occur.

In order to aggregate the information given in the form of FNs, we will use different types of FN aggregation operators. The main advantage of using different types of FN aggregation operators is that we want to show that the fuzzy decision making problem with D-S theory can be modelled in different ways depending on the interests of the decision maker. We will use the fuzzy ordered weighted averaging (FOWA) operator because it provides a parameterized family of fuzzy aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average (FA), among others. The FOWA operator is an extension of the traditional ordered weighted averaging (OWA) operator [1-3,5,13,15,19-21,23-26,31-32,35-37,39-48,50,52] for the cases where the information is given in the form of FNs. Note that the use of fuzzy information in the OWA operator started with the linguistic OWA (LOWA) [14] and since then, it has been studied in a lot of problems such as [16,22,28,36,46,52].

We will also use the fuzzy hybrid averaging (FHA) operator because this operator uses in the same formulation the fuzzy weighted average (FWA) and the FOWA operator. Note that the FHA is an extension of the hybrid averaging (HA) [35] when using FNs in the analysis. For all these types of fuzzy aggregation operators we will consider different families of operators that could be used in the fuzzy decision making problem with D-S belief structure such as the step-FOWA operator, the olympic-FOWA operator, the centered-FOWA operator, the FOWA median, etc.

In order to do this, the remainder of the paper is structured as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts about the FNs, the FOWA and the FHA operator. Section 3 comments some basic aspects of the D-S theory of evidence. Section 4 develops the new approach about using information given in the form of FNs in decision making with D-S theory of evidence considering different types of fuzzy aggregation operators. In Section 5, we present an illustrative example about the use of the new approach. Finally, Section 6 summarizes the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly present the main aspects of the FNs, the FOWA operator, the FHA operator and the Dempster-Shafer theory of evidence.

2.1. Fuzzy numbers

The FN was introduced by [7,51]. Since then, it has been studied and applied by a lot of authors such as [6,12,17,22,28,36,38,46].

A FN A is defined as a fuzzy subset of a universe of discourse that is both convex (i.e., $\mu_A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$; for $\forall x_1, x_2 \in R$ and $\lambda \in [0, 1]$) and normal (i.e., $\sup_{x \in R} \mu_A(x) = 1$).

Note that the FN may be considered as a generalization of the interval number although it is not strictly the same because the interval numbers may have different meanings. In the literature, we find a wide range of FNs [6,12,17,22,28,36,38,46] such as the TFN, the TpFN, the IVFN [6], the IFN [36], the GFN [6], the IVGFN, etc.

For example, a TpFN A of a universe of discourse R can be characterized by a trapezoidal membership function (α–cut representation) $A = (\underline{a}, \overline{a})$ such that

$$\begin{aligned} \underline{a}(\alpha) &= a_1 + \alpha(a_2 - a_1), \\ \overline{a}(\alpha) &= a_4 - \alpha(a_4 - a_3). \end{aligned} \tag{1}$$

where $\alpha \in [0, 1]$ and parameterized by (a_1, a_2, a_3, a_4) where $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$, are real values. Note that if $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the FN is a crisp value and if $a_2 = a_3$, the FN is represented by a TFN. Note that the TFN can be parameterized by (a_1, a_2, a_4).

In the following, we are going to review some basic FN arithmetic operations as follows. Let A and B be two TFNs, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.

Note that other operations could be studied but in this paper we will focus on these ones. For more complete overviews about FNs, see for example [6,12,17].

2.2. Fuzzy OWA operator

The FOWA operator is an extension of the OWA operator that uses uncertain information in the arguments represented in the form of FNs. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the available information cannot be assessed with exact numbers and it is necessary to use other techniques such as FNs. The FOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the fuzzy maximum, the fuzzy minimum and the fuzzy average criteria, among others.

Definition 1. Let Ψ be the set of FNs. A FOWA operator of dimension n is a mapping $FOWA$: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are FNs.

Note that sometimes, it is not clear how to reorder the arguments. Then, it is necessary to establish a criterion for comparing FNs. For simplicity, we recommend the following method. Select the FN with the highest value in its highest membership level, usually, when $\alpha = 1$. Note that if the membership level $\alpha = 1$ is an interval, then, we will calculate the average of the interval. If there is still a tie, then, we recommend to use an average or a weighted average of the FN according to the interests of the decision maker.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending FOWA (DFOWA) operator and the ascending FOWA (AFOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFOWA operator. By using a different manifestation in the weighting vector, we can obtain different families of FOWA operators such as the step-FOWA operator, the olympic-FOWA operator, the S-FOWA, the nonmonotonic-FOWA, the centered-FOWA operator, etc [1,19-21,26,31-32,37,41-43,45,47].

2.3. Fuzzy hybrid averaging operator

The FHA operator is an aggregation operator that uses the weighted average (WA) and the OWA operator at the same time. Then, it is possible to consider in the same decision making problem, the attitudinal character of the decision maker and its subjective probability. It also deals with uncertain environments where the available information cannot be assessed with exact numbers but it is possible to find some good approximations with FNs. The FHA provides another parameterized family of aggregation operators that includes the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA), the fuzzy weighted average (FWA) and the FOWA operator. In order to define it, first, we need to consider some basic aspects about the FNs. Assuming the same considerations made in the previous subsection, we can define the FHA as follows.

Definition 2. Let Ψ be the set of FNs. A FHA operator of dimension n is a mapping FHA: $\Psi^n \rightarrow \Psi$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$, then:

$$FHA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i\tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the weighting vector of the $\tilde{a}_i$, with $\omega_i \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1, and the $\tilde{a}_i$ are FNs.

Note that different types of FNs can be used in the aggregation process according to the interests or necessities of the decision maker such as the TFN, the TpFN, the L-R FN, the IVFN, the GFN, the IVGFN, the IFN, etc.

Similar to the FOWA operator, from a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending FHA (DFHA) operator and the ascending FHA (AFHA) operator. The weights of these operators are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DFHA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AFHA operator. Different families of FHA operators can be found by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the step-FHA operator, the window-FHA operator, the olympic-FHA operator, the centered-FHA operator, etc. Note that these families follow a similar methodology than [1,19-21,26,31-32,37,41-43,45,47].

Note that in this case, we should also consider the problem of comparing FNs in the reordering process. For simplicity, we also recommend to follow the policy explained in Section 2.2. Also note that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights are also FNs and the possibility of combining in the same problem information given with interval numbers and information given with FNs or different types of FNs in the same problem.

2.4. Dempster-Shafer theory of evidence

The D-S theory of evidence was introduced by Dempster [8] and by Shafer [29]. Since then, a lot of new developments have been developed about it such as [4,9-11,13,18,24,27,30,33-34,40,44,49]. This type of formulation provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the cases of risk and ignorance as special cases. Obviously, the case of certainty is also included in this generalization as it can be seen as a particular situation of risk or ignorance. Note that the case of certainty could also appear in other particular situations of the D-S formulation. Apart from these traditional cases, the D-S framework allows to represent various other forms of information a decision maker may have about the states of nature.

Definition 3. A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X, B_j for $j = 1,\ldots, n$, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m: $2^X \rightarrow [0, 1]$ such that:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.
(3) $m(A) = 0, \ \forall A \neq B_j$.

As said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure if it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\ \{x_j\}$.

The case of ignorance is found when the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other special cases of belief structures such as the consonant belief structure or the simple support function are studied in [29]. Note that two important evidential functions associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief [29].

3. Fuzzy OWA operators in decision making with Dempster-Shafer theory

In this Section, we present the new approach about using FNs and OWA operators in decision making with D-S belief structure. First, we will describe the decision making process in these situations. Next, we will analyze the aggregation process found when mixing the focal elements with the OWA operator. Finally, we will consider different particular types of FOWA operators that could be used in the analysis.

3.1. Decision making approach

In [40], Yager suggested a more generalized methodology for decision making with D-S belief structure by using the OWA operator. Since then, this problem has been studied by different authors such as [13,24,40,44,49].

A new method for decision making with D-S belief structures is possible by using FNs in the problem. The motivation for using FNs appears because sometimes, the available information is not clear and can not be assessed with exact numbers. Then, a better approach may be the use of FNs in the problem. Although in these cases we do not know exactly the future outcomes, we can approximate them with FNs so we know the best and worst possible scenario, and the most possible results of the fuzzy interval. Then, the decision maker is able to take a decision according to the available information. In this problem, it becomes important to consider that now, we will use aggregation operators that use FNs such as the FOWA operator and the FHA operator. Note that other types of fuzzy aggregation operators could be considered in the problem such as the fuzzy generalized OWA or the fuzzy quasi-arithmetic OWA operator, but for simplicity we will only use the two operators explained in Section 2 as they generalize a wide range of them.

The procedure to follow for taking decisions with FNs in D-S belief structure is similar to the procedure used with exact numbers with the difference that now we use FNs in the problem and this means that we need to use fuzzy aggregation operators such as the FOWA operator. The procedure can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{S_1, \ldots, S_n\}$. $\tilde{a}_{ih}$ is the payoff, given in the form of FN, to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is S_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which gives the best result to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the fuzzy payoff matrix.

Step 2: Calculate the belief function m about the states of nature.

Step 3: Calculate the attitudinal character of the decision maker $\alpha(W)$ [39].

Step 4: Calculate the collection of weights, w, to be used in the FOWA aggregation for each different cardinality of focal elements. Note that it is possible to use different methods depending on the interests of the decision maker [1,19-21,26,31-32,41-43,45,47].

Step 5: Determine the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{a_{ih} \mid S_h \in B_k\}$.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik} = FOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of i and k.

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, where:

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik}\, m(B_k) \tag{4}$$

Step 8: Select the alternative with the largest C_i as the optimal. Note that in a situation of costs or similar, we should select the alternative with the lowest C_i.

Remark 1. From a generalized perspective of the reordering step, we could distinguish in the FOWA aggregation between ascending and descending orders. The motivation for making this distinction is because of the different types of decisions we can find depending on the problem analyzed. From a business perspective, we could distinguish between situations involving costs or benefits. As we can see, in benefits, the highest result is the best one while in costs the highest result is the worst one. Then, in order to coordinate these situations we need to consider two different aggregations. For example, a descending aggregation for benefits such as the FOWA operator and an ascending aggregation for costs such as the AFOWA operator.

3.2. Belief structures in the FOWA operator

Analyzing the aggregation in *Steps* 6 and 7 of Section 3.1., it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. We will call this process the belief structure – FOWA (BS-FOWA) aggregation. It can be defined as follows.

Definition 4. *A BS-FOWA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{5}$$

where w_{j_k} is the weighting vector of the kth focal element such that $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ and $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} is the j_kth largest of the $\tilde{a}_{i_k}$, the $\tilde{a}_{i_k}$ are FNs, and $m(B_k)$ is the basic probability assignment.

Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements. The BS-FOWA operator is monotonic, commutative, bounded and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). *Assume f is the BS-FOWA operator, if $\tilde{a}_{i_k} \geq \tilde{e}_{i_k}$, $\forall i$, then*

$$f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) \geq f(\tilde{e}_{1_1}, \ldots, \tilde{e}_{q_r}) \tag{6}$$

Proof. Let

$$f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{7}$$

$$f(\tilde{e}_{1_1}, \ldots, \tilde{e}_{q_1}, \ldots, \tilde{e}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b^*_{j_k} \tag{8}$$

Since $\tilde{a}_{i_k} \geq \tilde{e}_{i_k}$, $\forall$ *i*, it follows that $b_{j_k} \geq \hat{b}^*_{j_k}$, and then

$$f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) \geq f(\tilde{e}_{1_1}, \ldots, \tilde{e}_{q_r}) \qquad \square$$

Theorem 2 (Commutativity). *Assume f is the BS-FOWA operator, then*

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = f(\tilde{e}_{1_1},...,\tilde{e}_{q_r}) \tag{9}$$

where $(\tilde{e}_{1_1},...,\tilde{e}_{q_r})$ *is any permutation of* $(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r})$ *for each focal element k.*

Proof. Let

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{10}$$

$$f(\tilde{e}_{1_1},...,\tilde{e}_{q_1},...,\tilde{e}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b^*_{j_k} \tag{11}$$

Since $(\tilde{e}_{1_1},...,\tilde{e}_{q_r})$ is a permutation of $(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r})$ for each focal element *k*, we have $b_{j_k} = b^*_{j_k}$, and then

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = f(\tilde{e}_{1_1},...,\tilde{e}_{q_r}) \qquad \square$$

Theorem 3 (Idempotency). *Assume f is the BS-FOWA operator, if* $\tilde{a}_i = \tilde{a}\ \ \forall i \in N$, *then*

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = \tilde{a} \tag{12}$$

Proof. Since $\tilde{a}_i = \tilde{a}\ \forall\ i \in N$, we have

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} =$$

$$= \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \tilde{a} = \tilde{a} \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \tag{13}$$

Since $\sum_{j_k=1}^{q_k} w_{j_k} = 1$ for each focal element and $\sum_{k=1}^{r} m(B_k) = 1$, we get

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = \tilde{a} \qquad \square$$

Theorem 4 (Boundedness). *Assume f is the BS-FOWA operator, then*

$$\min\{\tilde{a}_i\} \le f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_1},...,\tilde{a}_{q_r}) \le \max\{\tilde{a}_i\} \tag{14}$$

Proof. Let $\max\{\tilde{a}_i\} = b$ and $\min\{\tilde{a}_i\} = a$, then

$$f(\tilde{a}_{1_1},...,\tilde{a}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \le$$

$$\leq \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b = b \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \tag{15}$$

$$f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \geq$$

$$\geq \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} a = a \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \tag{16}$$

Since $\sum_{j_k=1}^{q_k} w_{j_k} = 1$ for each focal element and $\sum_{k=1}^{r} m(B_k) = 1$, we get

$$f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) = b \tag{17}$$

$$f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) = a \tag{18}$$

Therefore,

$$\min\{\tilde{a}_i\} \leq f(\tilde{a}_{1_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_1}, \ldots, \tilde{a}_{q_r}) \leq \max\{\tilde{a}_i\} \qquad \square$$

Remark 2. From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between descending and ascending orders by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the BS-DFOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the BS-AFOWA operator.

3.3. Families of BS-FOWA operators

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the FOWA operator, we are able to obtain different types of fuzzy aggregation operators in the decision process with D-S framework. For example, we can obtain the usual fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the fuzzy average (FA) and the Hurwicz fuzzy criteria. More families of FOWA operators [4,9-11,13,18,24,27,30,33-34,40,44,49] could be used in the aggregation step of the D-S framework such as the step-FOWA, the olympic-FOWA, the centered-FOWA, the FOWA median, the S-FOWA operator, the maximal entropy FOWA (MEFOWA) weights, the minimax disparity FOWA weights, among others. Note that these methods follow the same methodology than the original version developed for the OWA operator, with the only difference that now the arguments are FNs instead of exact numbers and they are implemented in the D-S framework. In the following, we will briefly show how to use some of these families.

Remark 3. The fuzzy maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$ and the fuzzy minimum if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we use the step-FOWA in the D-S framework. The FA is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$.

Remark 4. A useful method for obtaining the weighting vector is the functional method known as basic unit interval monotonic function (BUM) [42]. Let f be a function f: [0, 1] $\rightarrow$ [0, 1] such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. Using this BUM function we obtain the FOWA weights for $j = 1$ to n as:

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{19}$$

Using this method, it is easy to see that $\Sigma_j\, w_j = 1$ and $w_j \in [0,1]$.

Remark 5. A further interesting family is the S-FOWA operator based on [47]. It can be subdivided in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-FOWA operator. The generalized S-FOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-FOWA operator becomes the "andlike" S-FOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-FOWA operator.

Remark 6. A further type of FOWA operator that could be used in the aggregation is the centered-FOWA operator. Following the ideas of [45], we can define the centered-FOWA operator as an aggregation that is symmetric, strongly decaying and inclusive. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$, then $w_i < w_j$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a relaxation of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ and in some cases it is possible to remove the third condition obtaining the non-inclusive centered-FOWA operator.

Remark 7. The olympic-FOWA is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Following the ideas of [20], it is possible to develop a general form of the olympic-FOWA considering that $w_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2k)$, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, this general form becomes the usual olympic-FOWA. If $k = (n - 1)/2$, then, this general form becomes the median-FOWA aggregation. That is, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

Remark 8. Following the ideas of [20], it is also possible to develop the contrary case of the general olympic-FOWA operator. In this case, $w_j = (1/2k)$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and $w_j = 0$, for all others, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, we get the contrary case of the median-FOWA.

Remark 9. A further interesting family is the nonmonotonic-FOWA operator that follows the ideas of [43]. It is found when at least one of the weights w_j is lower than 0 and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Note that a key aspect of this operator is that it does not always accomplish the monotonicity property.

Finally, note that if we assume that all the focal elements use the same weighting vector, then, we can refer to these families as the BS-maximum, the BS-minimum, the BS-FA, the BS-step-FOWA operator, the BS-olympic-FOWA, the BS-median-FOWA, the BS-centered-FOWA, the BS-S-FOWA, etc.

4. Fuzzy hybrid averaging operators in D-S framework

In some situations, we could prefer to use another type of fuzzy aggregation operator in the D-S decision process such as the FHA operator. The main advantage of this operator is that it uses in the same aggregation the characteristics of the FWA and the characteristics of the FOWA operator. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S belief structures, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, FWAs and FOWAs.

In order to use this type of aggregation operator in D-S framework, we should make the following changes to the decision process explained above for the FOWA operator.

In *Step* 3 and 4, when calculating the collection of weights, *w*, to be used in the FHA aggregation for each different cardinality of focal elements, we should consider that now we have to define two weighting vectors. Note that these two weighting vectors are used for combining in the same aggregation the FWA and the FOWA operator.

In *Step* 5, when calculating the fuzzy aggregated payoff, we should use V_{ik} = FHA(M_{ik}), using Eq. (2) for all the values of *i* and *k*.

In this case, we could also formulate in one equation the whole aggregation process as follows. We will call it the belief structure - fuzzy hybrid averaging (BS-FHA) operator.

Definition 5. *A BS-FHA operator is defined by*

$$C_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} b_{j_k} \tag{20}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, b_{j_k} *is the j*th *largest of the* $\hat{a}_i$ ($\hat{a}_i = n\omega_i \tilde{a}_i$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ *is the weighting vector of the* $\tilde{a}_i$, *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, *the* $\tilde{a}_{i_k}$ *are FNs, and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the FHA operator, which combines in the same aggregation the FWA and the FOWA operator. Note that if all the weights ω_i are 1/*n*, for all *i*, then, Eq. (11) is transformed in Eq. (5).

The BS-FHA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that it is straightforward to prove these properties by looking at Theorems (1) – (4).

Remark 10. In this case, it is also possible to find situations where it is better to use an ascending order in the aggregation. Then, we will use the AFHA operator in the decision process with D-S theory. We should note that the main differences against the FHA operator is that now, in *Step 3* we should use an ascending order in the collection of weights and in *Step 5* we should use V_{ik} = AFHA(M_{ik}).

Remark 11. When aggregating the collection of fuzzy payoffs of each focal element with the FHA operator, it is also possible to use a wide range of families of FHA operators. For example, we could obtain the fuzzy maximum, the fuzzy minimum, the

Hurwicz fuzzy criteria, the FA and the FWA. Note that these particular cases are obtained from the weighting vector w_j that affects the FOWA operator. Then, to obtain these families, it is necessary that ω_i is $1/n$, for all i. Also note that other families could be obtained as it has been commented previously in Section 3.3. with the FOWA operator.

Remark 12. Another possibility could be to consider these families mixed with the weighting vector ω_i which is related with the FWA. Then, the result would be the fuzzy hybrid maximum, the fuzzy hybrid minimum, the Hurwicz fuzzy hybrid criteria, the FA, the FWA, the step-FHA operator, the olympic-FHA operator, the FHA median, the centered-FHA operator, the S-FHA operator, etc.

5. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to understand numerically the new approach commented above. We will use the new approach in an investment selection problem. We will analyze a decision making problem with D-S belief structure and we will use different types of fuzzy aggregation operators such as the FA, the FWA, the FOWA, the AFOWA, the FHA and the AFHA operator in order to see the different results obtained depending on the aggregation operator used.

Step 1: Assume an investment company has five possible investments and they want to select the alternative that better adapts to their interests.

1) A_1 is a computer company.
2) A_2 is a chemical company.
3) A_3 is a car company.
4) A_4 is a TV company.
5) A_5 is a food company.

Depending on the different uncertain situations that could happen in the future, the experts of the investment company establishes the payoff matrix. As the future states of nature are very imprecise, the experts cannot determine exact numbers in the payoff matrix. Instead, they use FNs to calculate the future benefits of the companies depending on the state of nature that happens in the future. The results are shown in Table 1.

Table 1: Fuzzy payoff matrix.

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(50,60,70)	(40,50,60)	(20,40,60)	(50,60,70)	(70,80,90)	(70,80,90)
A_2	(40,50,60)	(60,70,80)	(70,80,90)	(30,40,50)	(20,30,40)	(70,80,90)
A_3	(60,70,80)	(60,70,80)	(60,70,80)	(50,60,70)	(50,60,70)	(40,50,60)
A_4	(10,20,30)	(10,20,30)	(60,70,80)	(60,70,80)	(70,80,90)	(70,80,90)
A_5	(30,40,50)	(60,70,80)	(40,50,60)	(40,50,60)	(60,70,80)	(60,70,80)

The states of nature represent different economical situations that affect the companies. These situations are evaluated by the world economic growth rate: S_1 =

Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate.

Step 2: The decision maker has acquired a group of experts in order to solve the problem. After careful analysis, the experts have obtained some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief function *m* about the states of nature.

Focal element

$B_1 = \{S_1, S_2, S_3, S_4\} = 0.4$

$B_2 = \{S_4, S_5, S_6\} = 0.3$

$B_3 = \{S_1, S_3, S_5\} = 0.3$

Step 3 - 4: Assume we have used one of the existing methods for determining the weights [4,9-11,13,18,24,27,30,33-34,40,44,49] and we have obtained the following results for different number of arguments.

Weighting vector

$W_3 = (0.3, 0.3, 0.4)$

$W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3)$

Step 5: Calculate the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k.

- A_1: $M_{11} = \langle(50,60,70), (40,50,60), (20,40,60), (50,60,70)\rangle$;
  $M_{12} = \langle(50,60,70), (70,80,90), (70,80,90)\rangle$;
  $M_{13} = \langle(50,60,70), (20,40,60), (70,80,90)\rangle$.
- A_2: $M_{21} = \langle(40,50,60), (60,70,80), (70,80,90), (30,40,50)\rangle$;
  $M_{22} = \langle(30,40,50), (20,30,40), (70,80,90)\rangle$;
  $M_{23} = \langle(40,50,60), (70,80,90), (20,30,40)\rangle$.
- A_3: $M_{31} = \langle(60,70,80), (60,70,80), (60,70,80), (50,60,70)\rangle$;
  $M_{32} = \langle(50,60,70), (50,60,70), (40,50,60)\rangle$;
  $M_{33} = \langle(60,70,80), (60,70,80), (50,60,70)\rangle$.
- A_4: $M_{41} = \langle(10,20,30), (10,20,30), (60,70,80), (60,70,80)\rangle$;
  $M_{42} = \langle(60,70,80), (70,80,90), (70,80,90)\rangle$;
  $M_{43} = \langle(10,20,30), (60,70,80), (70,80,90)\rangle$.
- A_5: $M_{51} = \langle(30,40,50), (60,70,80), (40,50,60), (40,50,60)\rangle$;
  $M_{52} = \langle(40,50,60), (60,70,80), (60,70,80)\rangle$;
  $M_{53} = \langle(30,40,50), (40,50,60), (60,70,80)\rangle$.

Step 6: Calculate the aggregated payoff, V_{ik}, for the different types of fuzzy aggregation operators considered in the problem. Note that for the FHA and the AFHA, we also use the weighting vector $\omega = (0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.2)$. The results are shown in Table 2.

Table 2: Fuzzy aggregated payoff.

	FA	*FWA*	*FOWA*	*AFOWA*	*FHA*	*AFHA*
V_{11}	(40,52.5,65)	(39,52,65)	(38,51,64)	(42,54,66)	(33,43.8,54.6)	(36,49.2,62.4)
V_{12}	(63.3,73.3,83.3)	(64,74,84)	(62,72,82)	(59,68,77)	(74.4,86.4,98.4)	(76.8,88.8,100,8)
V_{13}	(46.6,60,73.3)	(49,62,75)	(44,58,72)	(49,62,75)	(44.4,57.6,70.8)	(49.8,63.6,77.4)
V_{21}	(50,60,70)	(50,60,70)	(47,57,67)	(53,63,73)	(42,50.4,58.8)	(48,57.6,67.2)
V_{22}	(40,50,60)	(43,53,63)	(38,48,58)	(43,53,63)	(45.6,57.6,69.6)	(51.6,63.6,75.6)
V_{23}	(43.3,53.3,63.3)	(41,51,61)	(41,51,61)	(46,56,66)	(42,51.6,61.2)	(48,58.2,68.4)
V_{31}	(57.5,67.5,77.5)	(57,67,77)	(57,67,77)	(58,68,78)	(48,56.4,64.8)	(54,63.6,73.2)
V_{32}	(46.6,56.6,66.6)	(46,56,66)	(46,56,66)	(47,57,67)	(55.2,67.2,79.2)	(56.4,68.4,80.4)
V_{33}	(56.6,66.6,76.6)	(56,66,76)	(56,66,76)	(57,67,77)	(54,63.6,73.2)	(57.6,67.8,78)
V_{41}	(35,45,55)	(40,50,60)	(30,40,50)	(40,50,60)	(32.4,40.8,49.2)	(45.6,55.2,64.8)
V_{42}	(66.6,76.6,86.6)	(67,77,87)	(66,76,86)	(67,77,87)	(79.2,91.2,103.2)	(80.4,92.4,104.4)
V_{43}	(46.6,56.6,66.6)	(49,59,69)	(43,53,63)	(49,59,69)	(49.2,58.8,68.4)	(57,67.2,77.4)
V_{51}	(42.5,52.5,62.5)	(42,52,62)	(41,51,61)	(44,54,64)	(35.4,43.8,52.2)	(39.6,49.2,58.8)
V_{52}	(53.3,63.3,73.3)	(54,64,74)	(52,62,72)	(54,64,74)	(62.4,74.4,86.4)	(64.8,76.8,88.8)
V_{53}	(43.3,53.3,63.3)	(45,55,65)	(42,52,62)	(45,55,65)	(43.2,52.8,62.4)	(48.6,58.8,69)

Step 7: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. (2) for the FOWA operator and Eq. (3) for the FHA operator. The results are shown in Table 3.

Table 3: Generalized expected value.

	FA	*FWA*	*FOWA*	*AFOWA*	*FHA*	*AFHA*
A_1	(49,61,73)	(49.5,61.6,73.7)	(47,59.4,71.8)	(49.2,60.6,72)	(48.8,60.7,72.6)	(52.3,65.4,78.4)
A_2	(45,55,65)	(45.2,55.2,65.2)	(42.5,52.5,62.5)	(47.9,57.9,67.9)	(43.0,52.9,62.8)	(49.1,59.5,70.1)
A_3	(54,64,74)	(53.4,63.4,73.4)	(53.4,63.4,73.4)	(54.4,64.4,74.4)	(51.9,61.8,71.7)	(55.8,66.3,76.8)
A_4	(48,58,68)	(50.8,60.8,70.8)	(44.7,54.7,64.7)	(50.8,60.8,70.8)	(51.4,61.3,71.2)	(59.4,69.9,80.4)
A_5	(46,56,66)	(46.5,56.5,66.5)	(44.6,54.6,64.6)	(47.3,57.3,67.3)	(45.8,55.6,65.5)	(49.8,60.3,70.8)

Note that the results given in the form of triangular fuzzy numbers, can also be shown by using their membership functions. For simplicity, we give the following results shown in Tables 4 and 5 for triangular fuzzy numbers when using their membership function.

Table 4: Generalized expected value using the α–cut representation 1.

	FA	*FWA*	*FOWA*
A_1	(49+12α, 73–12α)	(49.5+12.1α, 73.7–12.1α)	(47+12.4α, 71.8–12.4α)
A_2	(45+10α, 65–10α)	(45.2+10α, 65.2–10α)	(42.5+10α, 62.5–10α)
A_3	(54+10α, 74–10α)	(53.4+10α, 73.4–10α)	(53.4+10α, 73.4–10α)
A_4	(48+10α, 68–10α)	(50.8+10α, 70.8–10α)	(44.7+10α, 64.7–10α)
A_5	(46+10α, 66–10α)	(46.5+10α, 66.5–10α)	(44.6+10α, 64.6–10α)

Table 5: Generalized expected value using the α–cut representation 2.

	AFOWA	*FHA*	*AFHA*
A_1	(49.2+11.4α, 72–11.4α)	(48.8+11.9α, 72.6–11.9α)	(52.3+13.1α, 78.4–13α)
A_2	(47.9+10α, 67.9–10α)	(43.0+9.9α, 62.8–9.9α)	(49.0+10.5α, 70.0–10.5α)
A_3	(54.4+10α, 74.4–10α)	(51.9+9.9α, 71.7–9.9α)	(55.8+10.5α, 76.8–10.5α)
A_4	(50.8+10α, 70.8–10α)	(51.4+9.9α, 71.2–9.9α)	(59.4+10.5α, 80.4–10.5α)
A_5	(47.3+10α, 67.3–10α)	(45.8+9.8α, 65.5–9.9α)	(49.8+10.5α, 70.8–10.5α)

Step 8: Select the best alternative for each aggregation operator. As we can see, if we use the FA, the FWA, the FOWA, the AFOWA and the FHA operators, the optimal solution is A_3. However, if we use the AFHA operator, then, we will select the alternative A_4.

If we establish an ordering of the investments, a typical situation if we want to select more than one alternative, we can see that each aggregation operator gives us a different ordering of the investments. Note that $\succ$ means *preferred to*. The results are shown in Table 6.

Table 6: Ordering of the investments.

	Ordering		*Ordering*
FA	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2$	*AFOWA*	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$
FWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2$	*FHA*	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2$
FOWA	$A_3 \succ A_1 \succ A_4 \succ A_5 \succ A_2$	*AFHA*	$A_4 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_2$

As we can see, depending on the fuzzy aggregation operator used, the results may be different leading to different decisions. Then, the decision maker will get a more complete view of the decision problem so he will be able to take a better decision according to his interests. Note also that other types of fuzzy aggregation operators could be considered in the decision process such as the ones commented in Section 3.3.

7. Conclusions

We have studied the decision making problem with Dempster-Shafer belief structure when the available information is given in the form of FNs. The main advantage of this approach is that it is able to assess in a more complete way the uncertain environment because with the use of FNs it is possible to consider the best and worst possible scenario and the possibility that the internal values between the maximum and the minimum will occur.

When dealing with this approach, we have used different types of fuzzy aggregation operators in order to aggregate the information. We have used the FOWA operator because it is one of the most common aggregation operators and it provides a parameterized family of aggregation operators between the maximum and the minimum. We have also considered the FHA operator because it uses the FWA and the

FOWA operator at the same time. Then, we have been able to use probabilities, WAs and OWAs in the same formulation. We have studied some of the main properties of these fuzzy aggregation operators in the D-S framework.

We have also developed an illustrative example in order to understand numerically the new decision making approach. We have presented an application in an investment selection problem. We have seen that depending on the fuzzy aggregation operator used the results may lead to different decisions. The main advantage of having this information is that the decision maker gets a more complete information of the decision problem.

In future research we expect to develop further extensions to this approach by using other types of fuzzy aggregation operators such as the ones that use inducing variables, generalized means, etc. We will also consider other decision making applications and other types of FNs to be used in the decision problem.

References

[1] B.S. Ahn, Preference relation approach for obtaining OWA operator weights, International Journal of Approximate Reasoning 47 (2008) 166-178.

[2] B.S. Ahn, H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, International Journal of Intelligent Systems 23 (2008) 33-49.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A Guide for Practitioners, Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[4] I. Bloch, Defining belief functions using mathematical morphology – Application to image fusion under imprecision, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 437-465.

[5] T. Calvo, G. Mayor, R. Mesiar, Aggregation Operators: New Trends and Applications, Physica-Verlag, New York, 2002.

[6] S.J. Chen, S.M. Chen, Fuzzy risk analysis based on measures of similarity between interval-valued fuzzy numbers, Computers & Mathematics with Applications 55 (2008) 1670-1685.

[7] S.S.L. Chang, L.A. Zadeh, On fuzzy mapping and control, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics 2 (1972) 30-34.

[8] A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, Annals of Mathematical Statistics 38 (1967) 325-339.

[9] A.P. Dempster, The Dempster-Shafer calculus for statisticians, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 365-377.

[10] T. Denoeux, Reasoning with imprecise belief structures, International Journal of Approximate Reasoning 20 (1999) 79-111.

[11] T. Denoeux, Modeling vague beliefs using fuzzy-valued belief structures, Fuzzy Sets and Systems 116 (2000) 167-199.

[12] D. Dubois, H. Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications, Academic Press, New York, 1980.

[13] K.J. Engemann, H.E. Miller and R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 4 (1996) 1-26.

[14] F. Herrera, E. Herrera-Viedma, J.L. Verdegay, A sequential selection process in group decision making with linguistic assessments, Information Sciences 85 (1995) 223-239.

[15] E. Herrera-Viedma, F. Chiclana, F. Herrera, S. Alonso, Group decision-making model with incomplete fuzzy preference relations based on additive consistency, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 37 (2007) 176-189.
[16] Y.C. Hu, J.F. Tsai, Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 15 (2007) 717-735.
[17] A. Kaufmann, M.M. Gupta, Introduction to fuzzy arithmetic, Publications Van Nostrand, Rheinhold, 1985.
[18] C.A. Le, V.N. Huynh, A. Shimazu, Y. Nakamori, Combining classifiers for word sense disambiguation based on Dempster-Shafer theory and OWA operators, Data and Knowledge Engineering 63 (2007) 381-396.
[19] X. Liu, A general model of parameterized OWA aggregation with given orness level, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 598-627.
[20] X. Liu, Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, to be published.
[21] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 77-97.
[22] J.M. Merigó, M. Casanovas, Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators, International Journal of Information Technology 4 (2008) 177-182.
[23] J.M. Merigó, M. Casanovas, Uncertain decision making with Dempster-Shafer theory, Proceedings of IPMU'08, Torremolinos (Málaga), Spain, 2008, pp. 425-432.
[24] J.M. Merigó, M. Casanovas, Induced and uncertain heavy ordered weighted averaging operators, Fuzzy Sets and Systems, to be published.
[25] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 13 (2007) 35-50.
[26] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, Information Sciences, to be published.
[27] M. Reformat, R.R. Yager, Building ensemble classifiers using belief functions and OWA operators, Soft Computing 12 (2008) 543-558.
[28] R. Sadiq, S. Tesfamariam, Developing environmental indices using fuzzy numbers ordered weighted averaging (FN-OWA) operators, Stochastic Environmental Research and Risk Assessment 22 (2008) 495-505.
[29] G.A. Shafer, Mathematical Theory of Evidence, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976.
[30] R.P. Srivastava, T. Mock, Belief Functions in Business Decisions, Physica-Verlag, Heidelberg, 2002.
[31] Y.M. Wang, Y. Luo, Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, Information Sciences 177 (2007) 3356-3363.
[32] Y.M. Wang, C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, Information Sciences 177 (2007) 1867-1877.
[33] Y.M. Wang, J.B. Yang, D.L. Xu, K.S. Chin, On the combination and normalization of interval-valued belief structures, Information Sciences 177 (2007) 1230-1247.
[34] W.Z. Wu, Attribute reduction based on evidence theory in incomplete decision systems, Information Sciences 178 (2008) 1355-1371.
[35] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.

[36] Z.S. Xu, Multi-person multi-attribute decision making models under intuitionistic fuzzy environment, Fuzzy Optimization and Decision Making 6 (2007) 221-236.
[37] Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, Information Fusion 9 (2008) 310-316.
[38] Z.S. Xu, R.R. Yager, Dynamic intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 246-262.
[39] R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18 (1988) 183-190.
[40] R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, International Journal of General Systems 20 (1992) 233-245.
[41] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[42] R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, International Journal of Intelligent Systems 11 (1996) 49-73.
[43] R.R. Yager, Nonmonotonic OWA operators, Soft Computing 3 (1999) 187-196.
[44] R.R. Yager, Decision making using minimization of regret, International Journal of Approximate Reasoning 36 (2004) 109-128.
[45] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[46] R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, Information Sciences 178 (2008) 363-380.
[47] R.R. Yager, D.P. Filev, Parameterized "andlike" and "orlike" OWA operators. International Journal of General Systems 22 (1994) 297-316.
[48] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997.
[49] R.R. Yager, L. Liu, Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions, Springer-Verlag, Berlin, 2008.
[50] D.Y. Yeh, C.H. Cheng, H.W. Yio, Empirical research of the principal component analysis and ordered weighted averaging integrated evaluation model on software projects, Cybernetics and Systems 38 (2007) 289-303.
[51] L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1, Information Sciences 8 (1975) 199-249, Part 2, Information Sciences 8 (1975) 301-357, Part 3, Information Sciences 9 (1975) 43-80.
[52] M. Zarghami, F. Szidarovszky, R. Ardakanian, A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making, Fuzzy Optimization and Decision Making 7 (2008) 11-15.

14.2.27. Artículo de revista 27. – Enviado a *Cuadernos de Gestión*

Operadores OWA en la gestión de los recursos humanos

OWA operators in human resource management

JOSÉ MARÍA MERIGÓ LINDAHL
ANNA MARÍA GIL LAFUENTE

Departamento de Economía y Organización de Empresas
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales
Universidad de Barcelona

La dirección de contacto es:
José M. Merigó Lindahl,
Departamento de Economía y Organización de Empresas, Universidad de Barcelona,
Av. Diagonal, 690; 08034 Barcelona, España;
Email: *jmerigo@ub.edu*
Teléfono de contacto: +34 93 402 19 62
Fax: + 34 93 402 98 82

OWA Operators in human resource management

Abstract:

We develop a new approach that uses the ordered weighted averaging (OWA) operator in different indexes used for the selection of human resources. The objective of this new model is to manipulate the neutrality of the old methods, so the decision maker can select human resources according to his degree of optimism or pessimism. In order to develop this model, first, a short revision of the OWA operators is introduced. Next, we briefly explain the general model for the selection of human resources. Then, we suggest three new indexes for the selection of human resources that uses the OWA operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. The main advantage of this method is that it is more complete than the previous ones so the decision maker gets a better understanding of the decision problem. The work ends with an illustrative example that shows the results obtained by using different types of aggregation operators in the new approaches.

Keywords:

OWA operator, Selection of human resources, Hamming distance, Adequacy coefficient

JEL Classification:

D81, M12, M51

Resumen:

Se propone un nuevo modelo que utiliza el operador "media ponderada ordenada" (OWA) en diferentes índices de selección utilizados en la selección de los recursos humanos. El objetivo de este modelo es el poder manipular la neutralidad de los modelos clásicos de decisión de recursos humanos, de tal forma que el decisor puede seleccionar recursos humanos en función de su grado de optimismo o pesimismo. En primer lugar, se elabora una breve introducción a los operadores OWA. A continuación, se presenta el modelo básico de selección de recursos humanos. Con esta información de partida, se proponen tres nuevos índices de selección de recursos humanos que utilizan el operador OWA en la distancia de Hamming, en el coeficiente de adecuación y en el índice del máximo y el mínimo nivel. La principal ventaja de este nuevo modelo reside en la posibilidad de considerar una amplia gama de casos particulares, de entre los cuales, se encuentran los utilizados tradicionalmente. De esta forma, el decisor recibe una información mucho más completa que le permite adquirir un mejor conocimiento del problema estudiado. El trabajo finaliza con un ejemplo ilustrativo que muestra los resultados obtenidos a través de utilizar diferentes operadores de agregación en los nuevos índices de selección de recursos humanos.

Palabras clave:

Operador OWA, Selección de recursos humanos, Distancia de Hamming, Coeficiente de adecuación.

1. Introduction

The selection of the most appropriate human resources for the company represents a fundamental problem for its good development. The enterprise needs to analyze how to select the best worker according to their interests. In order to solve this problem, the company has to develop a selection process in which they have to compare the different characteristics of each available candidate found in the market with their ideals. Among the great variety of studies existing in selection, this work will focus on the models developed in (Gil-Aluja, 1998; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008a) about selection of human resources, the models developed in (A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; A.M. Gil-Lafuente and Merigó, 2006; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2007; 2008b; 2008c) about financial and strategic management and the models developed in (J. Gil-Lafuente, 2001; 2002) about selection of players in sport management. Note that other methods are studied in (Canós and Liern, 2008; Figueira et al., 2008; Karayiannis, 2000; Xu and Chen, 2008).

One problem about these selection indexes is that they are neutral against the attitudinal character of the decision maker. Then, when developing the selection process, we cannot manipulate the results according to the interests of the decision maker. This problem becomes important in situations where we want to under estimate or over estimate the decisions in order to be more or less prudent against the uncertain factors affecting the future. One common method for aggregating the information considering the decision attitude of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator introduced in (Yager, 1988). Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors such as (Beliakov et al., 2007; Karayiannis, 2000; Liu and Han, 2008; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2008b; 2008c; 2009; Wang and Parkan, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1996; 2002; 2004; 2007a; 2007b; Yager and Kacprzyk, 1997; Zarghami et al., 2008).

Our objective in this paper consists in developing new selection indexes that include the attitudinal character of the decision maker for the selection of human resources. These new indexes will consist in combining the old selection methods with the OWA operator because then, the neutrality of the old methods will be changed by the OWA operator. We will introduce in the selection of human resources, the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator, the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC) and the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM).

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe the OWA operator. Section 3 explains the basic aspects of the selection of human resources with fuzzy techniques. In Section 4, we develop the process to follow when using the OWA operator with the Hamming distance in the selection of human resources. Section 5 analyzes the combination between the OWA operator and the adequacy coefficient and Section 6 the combination between the OWA operator and the index of maximum and minimum level. Finally, Section 7 gives an illustrative example of the suggested approach and Section 8 ends the paper with the main conclusions.

2. OWA operators

The OWA operator (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (Beliakov et al., 2007; Karayiannis, 2000; Liu and Han, 2008; Merigó, 2007; Merigó and A.M. Gil-

Lafuente, 2006; 2008b; 2008c; 2009; Wang and Parkan, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1996; 2002; 2004; 2007a; 2007b; Yager and Kacprzyk, 1997; Zarghami et al., 2008). In the following, we provide a definition of the OWA operator as introduced by Yager (1988).

Definition 1. An OWA operator of dimension n is a mapping F: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$F(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

A fundamental aspect of this operator is the reordering of the arguments, based upon their values. That is, the weights rather than being associated with a specific argument, as in the case of the usual weighted average, are associated with a particular position in the ordering. This reordering introduces nonlinearity into an otherwise linear process.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWA aggregation can be expressed as:

$$F(a_1, a_2,\ldots, a_n) = W^T B \tag{2}$$

From a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992). Note that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It is commutative because any permutation of the arguments has the same evaluation. It is monotonic because if $a_i \geq d_i$ for all i, then, $F(a_1,\ldots, a_n) \geq F(d_1,\ldots, d_n)$. It is bounded because Min$\{a_i\} \leq F(a_1,\ldots, a_n) \leq$ Max$\{a_i\}$. It is idempotent because if $a_i = a$, for all i, then, $F(a_1,\ldots, a_n) = a$.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average (Yager, 1988). For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is obtained when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The average is found when $w_j = 1/n$ for all j and the weighted average when the ordered position of i is the same than the ordered position of j for all i and j. Note that other families of OWA operators are found in (Beliakov et al., 2007; Karayiannis, 2000; Liu and Han, 2008; Merigó, 2007; Merigo and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2008b; 2008c; 2009; Wang and Parkan, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; 1996; 2002; 2004; 2007a; 2007b; Yager and Kacprzyk, 1997).

Another factor to consider, are the two measures introduced in (Yager, 1988) for characterizing a weighting vector and the type of aggregation it performs. The first measure $\alpha(W)$, the attitudinal character, is defined as:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n-j}{n-1} \right) w_j \tag{3}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. The more of the weight located near the top of W, the closer α to 1 and the more of the weight located toward the bottom of W, the closer α to 0. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The second measure introduced in (Yager, 1988) is called the entropy of dispersion of W. It is defined as:

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{4}$$

This can be used to provide a measure of the information being used. That is, if $w_j = 1$ for some j, known as step-OWA (Yager, 1993), then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. Note that other measures are studied in (Yager, 1996; 2002).

3. Selection of human resources with the OWA operator

The motivation for using the OWA operator in the selection of human resources appears because the decision maker wants to take the decision with a certain degree of optimism or pessimism rather than with a neutral position. Due to the fact that the traditional methods in selection of human resources (Gil-Aluja, 1998; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) are neutral against the attitude of the decision maker, the introduction of the OWA operator in these models can change the neutrality and reflect decisions with different degrees of optimism and pessimism. These techniques can be used in a lot of situations but the general ideas about it is the possibility of under estimate or over estimate the problems in order to get results that reflects this change in the evaluation phase. This can be useful in a lot of situations, for example, in situations where the decision maker wants to over estimate the results in order to take a more risky decision than in normal cases. Obviously, this increase in the risk can affect our decision doing that we select a different person than we would have chosen with a neutral criteria.

The process to follow in the selection of human resources with the OWA operator, is similar to the process developed in (Gil-Aluja, 1998; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; 1987) with the difference that the instruments used will include the OWA operator in the selection process. Note that similar models that use the OWA operator have been developed for other selection processes (A.M. Gil-Lafuente, 1990; 2005; A.M. Gil-Lafuente and Merigó, 2006; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2006; 2007; 2008b; 2008c). The 5 steps to follow are:

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics of the available candidates for the company. Theoretically, it will be represented as: $C = \{C_1, C_2,\ldots, C_i,\ldots, C_n\}$, where C_i is the ith characteristic to consider of the candidate and we suppose a limited number n of required characteristics.

Step 2: Fixation of the ideal levels of each significant characteristic in order to form the ideal worker. That is:

Table 1
Ideal worker

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P =$	μ_1	μ_2	…	μ_i	…	μ_n

where P is the ideal worker expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i \in [0,1]$; $i = 1, 2, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic.

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. That is:

Table 2
Available candidates

	C_1	C_2	…	C_i	…	C_n
$P_k =$	$\mu_1^{(k)}$	$\mu_2^{(k)}$	…	$\mu_i^{(k)}$	…	$\mu_n^{(k)}$

with $k = 1, 2, \ldots, m$; where P_k is the kth candidate expressed by a fuzzy subset, C_i is the ith characteristic to consider and $\mu_i^{(k)} \in [0,1]$; $i = 1, \ldots, n$, is the valuation between 0 and 1 for the ith characteristic of the kth candidate.

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different candidates considered, and determination of the level of removal using the OWA operator. That is, changing the neutrality of the results to over estimate or under estimate them. In this step, the objective is to express numerically the removal between the ideal worker and the different candidates considered. For this, it can be used the different available selection indexes such as the Hamming distance, the adequacy coefficient, the index of maximum and minimum level, etc. (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007).

Step 5: Adoption of decisions according to the results found in the previous steps. Finally, we should take the decision about which person select. Obviously, our decision will consist in choose the candidate with the best results according to the index used.

4. Using the OWAD operator in the selection of human resources

In this Section we introduce a new index for the selection of human resources that uses the OWA operator in the Hamming distance. We will call it the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator. It can be defined as follows.

Definition 2. An OWAD operator of dimension n, is a mapping $OWAD$: $R^n \times R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W, with the sum of the weights equal to 1 and $w_j \in [0,1]$ such that:

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j D_j \qquad (5)$$

where D_j represents the jth smallest of the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$, because in distances, the best alternative is the one with the smallest distance to the ideal, and $k = 1,2,\ldots,m$.

As it can be seen, it has been introduced an AOWA operator in the Hamming distance because the reordering step is ascendant. Note that from a generalized perspective of the reordering step it is possible to distinguish between ascending and descending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the ascending OWAD (AOWAD) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the descending OWAD (DOWAD) operator.

As we can see, the OWAD operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum distance is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized Hamming distance is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted Hamming distance is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Note that further families of OWAD operators could be developed by using the same methodology as it has been used in the OWA operator (Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1993).

5. Using the OWAAC operator in the selection of human resources

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the selection of human resources with the adequacy coefficient. We will call it the ordered weighted averaging adequacy coefficient (OWAAC). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWAAC operator of dimension n, is a mapping $OWAAC$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \qquad (6)$$

where K_j represents the jth largest of the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, the reordering step is done in a decreasing order as the best result is the largest number. Then, the type of OWA operator used in the adequacy coefficient is the DOWA operator: $K_1 \geq K_2 \geq \ldots \geq K_n$. The final result will be a number between [0,1], being the maximum possible result 1.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we have to distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAAC (DOWAAC) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAAC (AOWAAC) operator. Also note that the OWAAC operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized adequacy coefficient is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted adequacy coefficient is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Analogously to the OWAAC operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAAC because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual adequacy coefficient (OWADAC). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWADAC operator of dimension n, is a mapping $OWADAC$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{7}$$

where Q_j represents the jth largest of the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$, and $k = 1,2,\ldots,m$. The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADAC (DOWADAC) and the ascending OWADAC (AOWADAC) operator with $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWADAC and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWADAC operator.

It is also possible to obtain different families of aggregation operators with the OWADAC operator by using different manifestations of the weighting vector such as the maximum, the minimum, the normalized dual adequacy coefficient (NDAC) and the weighted dual adequacy coefficient (WDAC). Note that the maximum is obtained in the same form than the minimum of the OWAAC and the minimum in the same form than the maximum of the OWAAC. The NDAC is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The WDAC is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources. As it has been explained in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007), the unification point appears when the results obtained in the Hamming distance are the same than the results obtained in the adequacy coefficient. In the new methods suggested in this paper, we also find the unification point when the OWAD and the OWAAC accomplish the theorems explained in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007). Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point. In the following, we briefly show the main theorem when using the OWA operator.

Theorem 1. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the selection of human resources with the OWAD operator and $OWADAC(P_k \rightarrow P)$ the selection of human resources with the OWADAC operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWADAC(P_k \rightarrow P) \quad (8)$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \,|\, \mu_i - \mu_i^{(k)} \,|$$ and

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWADAC(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \quad \blacksquare$$

Analysing this theorem, we could generalize it for all the human resources considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (1) with the difference that now we consider all the characteristics *i* and all the human resources *k*.

6. Using the OWAIMAM operator in the selection of human resources

In this Section, we develop an index for the selection of human resources that uses the OWA operator in the index of maximum and minimum level. We will call it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). It can be defined as follows.

Definition 5. An OWAIMAM operator of dimension n, is a mapping *OWAIMAM*: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$S(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j S_j \quad (9)$$

where S_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$. In this case, an AOWA operator is used in the reordering step ($S_1 \leq S_2 \leq \ldots \leq S_n$) with the particularity that it always selects the jth smallest of all the possible values, independently if it is a result coming from the Hamming distance or from the removal index of the adequacy coefficient.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we could distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator.

In this case, we are also able to obtain different types of aggregation operators by using a different weighting vector. For example, the maximum is found when $w_1 = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq 1$. The minimum is found when $w_n = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq n$. The normalized index of maximum and minimum level is obtained when $w_j = 1/n$ for all j. The weighted index of maximum and minimum level is found when the ordered position of i is the same than the ordered position of j. Note that in the case of tie in the final result, especially for the maximum and the minimum, it could be used in the decision the second best or worst result, and so on.

Analogously to the OWAIMAM operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the OWAIMAM because $R(P_k \to P) = 1 - S(P_k \to P)$. We will call it the ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level (OWADIMAM). It can be defined as follows.

Definition 6. An OWADIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWADIMAM$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \to [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADIMAM(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} w_j R_j \tag{10}$$

where R_j represents the jth smallest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that in this case it is also possible to distinguish between the descending OWADIMAM (DOWADIMAM) and the ascending OWADIMAM (AOWADIMAM) operator, and we are also able to obtain a wide range of operators by using a different manifestation in the weighting vector.

Another interesting issue to consider is the unification point in the selection of human resources for the index of maximum and minimum level. As it has been explained in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007), in these situations, the index of maximum and minimum level becomes the Hamming distance. Note that it is possible to find a total unification point or a partial unification point (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007). In the following, we show the main theorem when using the OWA operator.

Theorem 2. Assume $OWAD(P,P_k)$ is the selection of human resources with the OWAD operator and $OWAIMAM(P_k \to P)$ the selection of human resources with the OWAIMAM operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$OWAD(P,P_k) = OWAIMAM(P_k \to P) \tag{11}$$

Proof. Let

$$OWAD(P,P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid$$ and

$$OWAIMAM(P_k \to P) = \sum_{j=1}^{n} [w_j * [0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] + w_j' \mid \mu_i - \mu_i^{(k)} \mid]$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$OWAIMAM(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j(\mu_i - \mu_i^{(k)}) = OWAD(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

Note that $w_j^* + w_j' = w_j$.

Analysing this theorem, we could generalize it for all the human resources considered in the decision problem. The theorem that explains this generalization is very similar to theorem (2) with the difference that now we consider all the characteristics i and all the human resources k.

7. Illustrative example

The information about the example is found in (A.M. Gil-Lafuente, 2005) although we have made some changes in the paper.

Step 1: Analysis and determination of the significant characteristics for the company. Assume that a company wants to select a worker for a vacant and it has 3 candidates P_1, P_2, P_3, with different characteristics. It is considered for each characteristic a property.

Step 2: Fixation of the ideal level for each significant characteristic. It is defined the ideal worker for the company as:

Table 3

Characteristics of the ideal worker

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P^* =	0.9	0.8	0.6	0.8	0.3

Step 3: Fixation of the real level of each characteristic for all the different candidates considered. For each of these characteristics, it is found the following information:

Table 4

Available candidates

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5
P_1 =	0.8	0.7	0.3	1	1
P_2 =	0.8	1	0.6	0.3	0.3
P_3 =	1	0.6	1	1	0.2

Step 4: Comparison between the ideal worker and the different candidates considered, and determination of the level of removal using the OWA operators. We will consider the normalized Hamming distance, the weighted Hamming distance, the OWAD operator and the AOWAD operator. In this example, we assume that the company decides to use the following weighting vector: W = (0’1, 0’1, 0’2, 0’3, 0’3).

With this weighting vector, we can calculate the degree of optimism of the decision as: $\alpha(W)$ = 0'35 $\Rightarrow$ 35%, and the degree of dispersion as: $H(W)$ = 1'504.

If we elaborate the selection process with the Hamming distance, we will get the following. First, we have to calculate the individual distances of each characteristic to the ideal value of the corresponding characteristic forming the fuzzy subset of individual distances for each candidate. Once obtained all the distances, we will go for the aggregation. Then, we will reorder the different values of each fuzzy subset using equation (6) and considering the type of aggregation we are developing. The results are shown in table 5.

Table 5
Aggregated results with the Hamming distance

	NHD	*WHD*	*OWAD*	*AOWAD*
P_1	0.28	0.35	0.2	0.36
P_2	0.16	0.18	0.09	0.23
P_3	0.2	0.2	0.16	0.24

In this case, our decision will consist in selecting the candidate with the smallest distance. Then, we will select P_2 as it gives us the lowest distance in the four cases.

If we develop the selection process with the adequacy coefficient, we will get the following. First, we have to calculate how close the characteristics are to the ideal worker. Once calculated all the different individual values, we will construct the aggregation. In this case, the arguments will be ordered using equation (7). The results are shown in table 6.

Table 6
Aggregated results with the adequacy coefficient

	NAC	*WAC*	*OWAAC*	*AOWAAC*
P_1	0.9	0.92	0.86	0.94
P_2	0.88	0.84	0.82	0.94
P_3	0.94	0.95	0.91	0.97

The decision will consist in selecting the candidate with the highest result because this will mean a higher approximation to the ideal worker. Then, we will select P_3 because it gives us the highest result for all the cases.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent removal index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. The results are shown in table 7.

Table 7
Aggregated results with the dual adequacy coefficient

	NDAC	*WDAC*	*OWADAC*	*AOWADAC*
P_1	0.1	0.08	0.14	0.06
P_2	0.12	0.16	0.18	0.06
P_3	0.06	0.05	0.09	0.03

Finally, if we use the index of maximum and minimum level in the selection process as a combination of the normalized Hamming distance and the normalized adequacy coefficient, we will get the following. In this example we will assume that the characteristics C_1 and C_2 have to be treated with the adequacy coefficient and the other three characteristics have to be treated with the Hamming distance. Its resolution will consist in the following. First, we will calculate the individual removal of each characteristic to the ideal, independently that the instrument used is the Hamming distance or the adequacy index. Once calculated all the values for the individual removal, we will construct the aggregation using equation (10). Here, we note that in the reordering step, it will be only considered the individual value obtained for each characteristic, independently that the value has been obtained with the adequacy coefficient or with the Hamming distance. The results are shown in table 8.

Table 8
Aggregated results with the index of maximum and minimum level

	NIMAM	*WIMAM*	*OWAIMAM*	*AOWAIMAM*
P_1	0.28	0.35	0.2	0.36
P_2	0.12	0.16	0.06	0.18
P_3	0.18	0.19	0.13	0.23

Then, our decision will consist in select P_2 because it is the candidate with the smallest removal to the ideal.

Analogously to this index, we can obtain its equivalent approximation index. In an abbreviated form, this index can be obtained by using $R(P_k \to P) = 1 - S(P_k \to P)$. The results are shown in table 9.

Table 9
Aggregated results with the dual index of maximum and minimum level

	NDIMAM	*WDIMAM*	*OWADIMAM*	*AOWADIMAM*
P_1	0.72	0.65	0.8	0.64
P_2	0.88	0.84	0.94	0.82
P_3	0.82	0.81	0.87	0.77

8. Conclusion

We have studied a large number of instruments for the selection of human resources. Due to the neutrality in the attitudinal character of the old methods, we have suggested the use of the OWA operator in the selection process. As we have seen, the OWA operator permits under estimate or over estimate the selection process according to a degree of optimism. With this in mind, we have suggested three new instruments for the selection of human resources that uses the OWA operator in the Hamming distance, in the adequacy coefficient and in the index of maximum and minimum level. Then, we have obtained a new method that permits reflect the attitude of the decision makers in the selection process of human resources. We have also presented an application of the new approach in a decision making problem about selection of human resources.

In future research, we expect to develop further extensions on these methods by using different types of OWA operators and applying it in different decision making problems.

REFERENCES

BELIAKOV, G.; PRADERA, A.; CALVO, T. (2007). *Aggregation functions: A guide for practitioners*, Springer-Verlag, Berlin.

CANÓS, L.; LIERN, V. (2008). «Soft computing-based aggregation methods for human resource management», European Journal of Operational Research, vol. 189, n. 3, pp. 669-681.

FIGUEIRA, J.; GRECO, S.; EHRGOTT, M. (2005). *Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys*, Springer, Boston.

GIL ALUJA, J. (1998). *The interactive management of human resources in uncertainty*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.

GIL LAFUENTE, A.M. (1990). «Técnicas de selección de un instrumento financiero», V Jornadas Hispano-Lusas de Gestión Científica, Vigo, Spain.

GIL LAFUENTE, A.M. (2005). *Fuzzy logic in financial analysis*, Springer, Berlin.

GIL LAFUENTE, A.M.; MERIGÓ, J.M. (2006). «Selection of financial products that adapt to different environments», Lectures on Modelling and Simulation, vol. 3, n. 3, pp. 42-48.

GIL LAFUENTE, J. (2001). «El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista», X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italy, pp. 439-443.

GIL LAFUENTE, J. (2002). *Algoritmos para la excelencia: Claves para el éxito en la gestión deportiva*, Ed. Milladoiro, Vigo.

KARAYIANNIS, N. (2000). «Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted averaging operators», IEEE Transactions on Neural Networks, vol. 11, n. 5, pp. 1093-1105.

KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1986). *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas*, Ed. Milladoiro, Santiago de Compostela.

KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. (1987). *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre*, Ed. Hispano-europea, Barcelona.

LIU, X.W., HAN, S. (2008). «Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary», International Journal of Approximate Reasoning, vol. 48, n. 1, pp. 77-97.

MERIGÓ, J.M. (2007). *Nuevas extensiones a los operadores OWA y su aplicación en los métodos de decisión empresarial*, Unpublished thesis, Department of Business Administration, University of Barcelona.

MERIGÓ, J.M.; GIL LAFUENTE, A.M. (2006). «Using the OWA operators in the selection of financial products», Proceedings of the 41st CLADEA Congress, Montpellier, France, CD-ROM.

MERIGÓ, J.M.; GIL LAFUENTE, A.M. (2007). «Unification point in methods for the selection of financial products», Fuzzy Economic Review vol. 13, n. 1, pp. 35-50.

MERIGÓ, J.M.; GIL LAFUENTE, A.M. (2008a). «Geometric operators in the selection of human resources», International Journal of Computer and Information Science and Engineering, vol. 2, n. 1, pp. 45-51.

MERIGÓ, J.M.; GIL LAFUENTE, A.M. (2008b). «On the use of the OWA operator in the Euclidean distance», International Journal of Computer Science and Engineering, vol. 2, n. 4, pp. 170-176.

MERIGÓ, J.M.; GIL LAFUENTE, A.M. (2008c). «Using the OWA operator in the Minkowski distance», International Journal of Computer Science, vol. 3, n. 2, pp. 149-157.

MERIGÓ, J.M.; GIL LAFUENTE, A.M. (2009). «OWA operators in generalized distances», International Journal of Applied Mathematics and Computer Science, vol. 5, n. 1, pp. 11-18.

WANG, Y.M.; PARKAN, C. (2007). «A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights», Information Sciences, vol. 177, n. 8, pp. 1867-1877.

XU, Z.S. (2005). «An overview of methods for determining OWA weights», International Journal of Intelligent Systems, vol. 20, n. 8, pp. 843-865, 2005.

XU, Z.S.; CHEN, J. (2008). «An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets», International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems, vol. 16, n. 4, pp. 529-555.

YAGER, R.R. (1988). «On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making», IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B, vol. 18, n. 1, pp. 183-190.

YAGER, R.R. (1992). «On generalized measures of realization in uncertain environments», Theory and Decision, vol. 33, n. 1, pp. 41-69.

YAGER, R.R. (1993). «Families of OWA operators», Fuzzy Sets and Systems, vol. 59, n. 2, pp. 125-148.

YAGER, R.R. (1996). «Constrained OWA aggregation», Fuzzy Sets and Systems, vol. 81, n. 1, pp. 89-101.

YAGER, R.R. (2002). «Heavy OWA operators», Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 1, n. 4, 379-397.

YAGER, R.R. (2004). «Generalized OWA aggregation operators», Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 3, n. 1, 93-107.

YAGER, R.R. (2007a). «Centered OWA operators», Soft Computing, vol. 11, n. 7, pp. 631-639.

YAGER, R.R. (2007b). «Using stress functions to obtain OWA operators», IEEE Transactions on Fuzzy Systems, vol. 15, n. 6, pp.1122-1129.

YAGER, R.R.; KACPRZYK, J. (1997). *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications*, Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA.

ZARGHAMI, M.; SZIDAROVSKY, F.; ARDAKANIAN, R. (2008). «A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making», Fuzzy Optimization and Decision Making, vol. 7, n. 1, pp. 1-15.

14.2.28. Artículo de revista 28. – En segunda ronda de revisión (*major revision*) en *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*

LINGUISTIC AGGREGATION OPERATORS FOR LINGUISTIC DECISION MAKING BASED ON THE DEMPSTER-SHAFER THEORY OF EVIDENCE

J.M. MERIGO, M. CASANOVAS
Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain
Emails: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

L. MARTINEZ
Department of Computer Sciences
University of Jaén, 23071, Jaén, Spain
Email: martin@ujaen.es

Received (received date)
Revised (revised date)
Accepted (accepted date)

In this paper, we develop a new approach for decision making with Dempster-Shafer theory of evidence by using linguistic information. We suggest the use of different types of linguistic aggregation operators in the model. Then, we obtain as a result, the belief structure - linguistic ordered weighted averaging (BS-LOWA), the BS - linguistic hybrid averaging (BS-LHA), the BS - linguistic ordered weighted geometric (BS-LOWG), the BS - linguistic hybrid geometric averaging (BS-LHGA), and a wide range of particular cases. Some of their main properties are studied. Finally, we give an illustrative example where we can see the different results obtained by using different types of linguistic aggregation operators in the new approach.

Keywords: Decision making; linguistic information; Dempster-Shafer theory of evidence; linguistic aggregation operators.

1. Introduction

The Dempster-Shafer (D-S) theory of evidence was introduced by Dempster in [3] and by Shafer in [19]. Since its appearance, this theory has been used in a lot of situations [11,18,20,39-41]. It provides a unifying framework for representing uncertainty because it includes as special cases the situations of risk and ignorance. The difference between their works is that each one associated a different semantics in the theory although their ideas were practically the same. Dempster was interested in a probabilistic framework while Shafer was more oriented to belief measurement. The two fundamental measures of the theory developed by Shafer [19], belief and plausibility, were previously studied by Dempster. He referred to them as upper and lower probabilities.

Usually, when using the D-S theory in decision making it is considered that the available information is numerical [4,16,29,35,39]. However, this may not be the real situation found in all decision making problem. Sometimes, the available information is vague or imprecise and it is not possible to analyze it with numerical values [14-15]. Therefore, it is necessary to use another approach such as a qualitative one that uses linguistic assessments. The use of the fuzzy linguistic approach [42] provides a direct way to model linguistic assessments by means of linguistic variables. In this paper we will study the decision making problem with D-S belief structure and propose a model in such framework using linguistic information.

The use of linguistic information implies processes of computing with words (CW) [9,23,24]. Then, in order to develop the linguistic decision model with D-S belief structure we will follow the ideas of [9-10,23-24,26] and focus on the approach proposed in [23-24,26] where it is implicitly assumed high levels of uncertainty by using a continuous linguistic term set [23-24] to establish an order of the alternatives in the decision making problem without losing the information given in the aggregation step.

The processes of CW carried out in the decision model proposed are aggregation operators that can be accomplished in different ways, depending on the interests of the decision maker in the problem. Our proposal will use the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) [5-8,23] operator because it provides a parameterized family of linguistic aggregation operators that include the maximum, the minimum and the linguistic average (LA), among others. The LOWA operator is a linguistic extension of the traditional ordered weighted averaging (OWA) operator [28-31,38]. We should note that we will use the LOWA operator developed by Xu in [23] that it is also known as the extended ordered weighted averaging (EOWA) operator. Apart from the LOWA operator, we will study the use of the linguistic ordered weighted geometric (LOWG) operator which is a geometric version of the LOWA operator developed by Xu in [23-24]. We will also use the linguistic hybrid averaging (LHA) operator [24,26] and the linguistic hybrid geometric averaging (LHGA) operator [24].

The application of the previous operators in D-S framework, will produce new linguistic aggregation operators: the belief structure - LOWA (BS-LOWA), the BS-LHA, the BS-LOWG and the BS-LHGA operator. For all these types of linguistic aggregation operators we will develop different families of operators that could be used in the linguistic decision making problem with D-S belief structure such as the step-LOWA operator, the window-LOWA operator, the centered-LOWA operator, the E-Z LOWA weights, the LOWA median, etc. These families will be based on the original version developed for the OWA operator [5-10,12-13,16,21-31,33-38].

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2 we briefly review some basic linguistic concepts to be used throughout the paper. Section 3 describes the main concepts of D-S theory. Section 4 presents a new linguistic decision making model based on D-S theory of evidence and present different linguistic aggregation operator based on the OWA families that can be applied to this decision model. In Section 5, we extend the analysis to the use of LHA operators. Section 6 shows an illustrative example about the use of the proposed scheme. Finally, Section 7 points out the main findings of the paper.

2. Preliminaries

In this section, we briefly describe the linguistic approach and some basic linguistic aggregation operators to be used throughout the paper.

Linguistic Approach

Usually, problems are defined in quantitative contexts, where the information is assessed by means of numerical values. However, many aspects of the real world cannot be assessed in a quantitative form. Instead, it is possible to use a qualitative one, i.e., with vague or imprecise knowledge. In this case, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical values. The fuzzy linguistic approach represents qualitative aspects as linguistic values by means of linguistic variables [42].

We have to select the appropriate linguistic descriptors for the term set and their semantics. One possibility for generating the linguistic term set consists in directly supplying the term set by considering all terms distributed on a scale on which a total order is defined [6,32]. For example, a set of seven terms S could be given as follows:

$$S = \{s_1 = N, s_2 = VL, s_3 = L, s_4 = M, s_5 = H, s_6 = VH, s_7 = P\}$$

Note that N = *None*, VL = *Very low*, L = *Low*, M = *Medium*, H = *High*, VH = *Very high*, P = *Perfect*. Usually, in these cases, it is required that in the linguistic term set there exists:

3. A negation operator: Neg(s_i) = s_j such that $j = g+1-i$.
4. The set is ordered: $s_i \leq s_j$ if and only if $i \leq j$.
5. Max operator: Max(s_i, s_j) = s_i if $s_i \geq s_j$.
6. Min operator: Min(s_i, s_j) = s_i if $s_i \leq s_j$.

Different approaches have been developed for computing with linguistic information such as [1,5,10,32]. In this paper we will use the computational model presented in [23-24]. Then, in order to preserve all the given information, we extend the discrete linguistic term set S to a continuous linguistic term set $\hat{S} = \{s_\alpha \mid s_1 < s_\alpha \leq s_t, \alpha \in [1, t]\}$, where, if $s_\alpha \in S$, we call s_α the original linguistic term, otherwise, we call s_α the virtual linguistic term. Consider any two linguistic terms s_α, $s_\beta \in \hat{S}$, and μ, μ_1, $\mu_2 \in [0, 1]$, we define some operational laws as follows [23-24]:

1. $\mu s_\alpha = s_{\mu\alpha}$.
2. $s_\alpha \oplus s_\beta = s_\beta \oplus s_\alpha = s_{\alpha+\beta}$.
3. $(s_\alpha)^\mu = s_{\alpha^\mu}$.
4. $s_\alpha \otimes s_\beta = s_\beta \otimes s_\alpha = s_{\alpha\beta}$.

With these operational laws, we are able to develop different types of linguistic aggregation operators.

Linguistic Aggregation Operators

In the literature, we find a wide range of linguistic aggregation operators [5-10,23-24,26]. In this study, we review some linguistic aggregation operators that we will apply in our proposal such as the linguistic ordered weighted averaging (LOWA) operator, the linguistic hybrid averaging (LHA) operator, the linguistic ordered weighted geometric (LOWG) operator and the linguistic hybrid geometric averaging (LHGA) operator, with their particular cases that include among others the linguistic average (LA) and the linguistic geometric average (LGA). Note that we follow the ideas developed by Xu in [23-24,26]. Then, we should point out that the LOWA operator we are going to use is also known as the extended OWA (EOWA) operator [23].

Definition 1. *A LOWA operator of dimension n is a mapping LOWA:* $\hat{S}^n \rightarrow \hat{S}$, *which has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, *then*:

$$LOWA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \qquad (1)$$

where s_{β_j} *is the jth largest of the* s_{α_i}.

From a generalized perspective of the reordering step, we have to distinguish between the descending LOWA (DLOWA) operator and the ascending LOWA

(ALOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the DLOWA (or LOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALOWA operator. Note that the ALOWA operator is known in other studies as the inverse LOWA (I-LOWA) operator [5]. This operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent.

The LOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that includes as special cases the LA and the linguistic weighted average (LWA). The LA is obtained when all the weights w_j are equal for all j. The LWA is obtained if the ordered position of the s_{β_j} is the same than the ordered position of the s_{α_i}.

In this type of operator it is possible to use different measures for characterizing the weighting vector W by using the same measures that it has been used for the OWA operator [28] such as the attitudinal character or the measure of dispersion.

Definition 2 [24,26]. *A LHA operator of dimension n is a mapping LHA: $\hat{S}^n \to \hat{S}$, which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$LHA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \sum_{j=1}^{n} w_j s_{\beta_j} \tag{2}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the linguistic weighted argument $\hat{s}_{\alpha_i}$ ($\hat{s}_{\alpha_i} = n\omega_i s_{\alpha_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ is the exponential weighting vector of the s_{α_i}, with $\omega_j \in [0, 1]$ and the sum of the weights is 1.

In this case, it is also possible to distinguish between the descending LHA (DLHA) operator and the ascending LHA (ALHA) operator. This operator is also commutative monotonic, bounded and idempotent.

By using a different manifestation of the weighting vectors, we are able to obtain different families of LHA operators. For example, the LWA is obtained when all the weights w_j are $1/n$, for all j. The LOWA operator is obtained when all the weights ω_i are $1/n$, for all i.

In the following, we are going to review different types of linguistic geometric operators [23-24]. Note that these operators are extensions of the OWG operator [2] by using linguistic variables.

Definition 3. *A LOWG operator of dimension n is a mapping LOWG: $\hat{S}^{+n} \to \hat{S}^{+}$ which has an associated weighting vector W such that $w_j \in [0, 1]$ and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, then*:

$$LOWG(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \prod_{j=1}^{n} (s_{\beta_j})^{w_j} \tag{3}$$

where s_{β_j} is the jth largest of the s_{α_i} and $\hat{S}^{+}$ is the linguistic term set. Note that $\hat{S}^{+}$ can only include positive values.

Definition 4. *A LHGA operator of dimension n is a mapping LHGA:* $\hat{S}^{+^n} \to \hat{S}^{+}$ *which has an associated weighting vector W such that* $w_j \in [0, 1]$ *and* $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$*, then*:

$$LHGA(s_{\alpha_1}, s_{\alpha_2}, \ldots, s_{\alpha_n}) = \prod_{j=1}^{n} (s_{\beta_j})^{w_j} \tag{4}$$

where s_{β_j} *is the jth largest of the linguistic weighted argument* $\hat{s}_{\alpha_i}$ ($\hat{s}_{\alpha_i} = (s_{\alpha_i})^{n\omega_i}$, $i = 1,2,\ldots,n$), $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)^T$ *is the exponential weighting vector of the* s_{α_i}, *with* $\omega_j \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1.

Note that $\hat{S}^{+}$ is the linguistic term set and it can only include positive values. In this case, it is also possible to distinguish between the descending LHGA (DLHGA) operator and the ascending LHGA (ALHGA) operator.

Finally, we should note that other types of linguistic aggregation operators could be developed for the analysis. But in this paper, we will focus on the ones explained above because they are very useful in linguistic decision making problems.

3. The Dempster-Shafer Theory of Evidence

The D-S theory of evidence was introduced by Dempster in [3] and by Shafer in [19]. Since then, a lot of new developments have been developed about it such as [11,18,20,39-41]. This type of formulation provides a unifying framework for representing uncertainty as it can include the cases of risk and ignorance as special situations of this framework. Obviously, the case of certainty is also included in this generalization as it can be seen as a particular situation of risk or ignorance. Apart from these traditional cases, the D-S framework allows to represent various other forms of information that a decision maker may have about the states of nature.

Definition 5. *A D-S belief structure defined on a space X consists of a collection of n nonnull subsets of X,* B_j *for* $j = 1,\ldots,n$*, called focal elements and a mapping m, called the basic probability assignment, defined as, m:* $2^X \to [0, 1]$ *such that*:

(1) $m(B_j) \in [0, 1]$.
(2) $m(A) = 0$, $\forall A \neq B_j$.
(3) $\sum_{j=1}^{n} m(B_j) = 1$.

As we said before, the cases of risk and ignorance are included as special cases of belief structure in the D-S framework. For the case of risk, a belief structure is called Bayesian belief structure [19] it consists of n focal elements such that $B_j = \{x_j\}$, where each focal element is a singleton. Then, we can see that we are in a situation of decision making under risk environment as $m(B_j) = P_j = \text{Prob}\{x_j\}$.

For the case of ignorance, the belief structure consists in only one focal element B, where $m(B)$ essentially is the decision making under ignorance environment as this focal element comprises all the states of nature. Thus, $m(B) = 1$. Other cases of belief structures are studied in [19].

Two important evidential functions associated with these belief structures are the measures of plausibility and belief. In the following, we provide a definition of these two measures as developed by Shafer in [19].

Definition 6. *The plausibility measure Pl is defined as, Pl:* $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

$$\mathrm{Pl}(A) = \sum_{A \cap B_j \neq \varnothing} m(B_j) \tag{5}$$

Definition 7. *The belief measure Bel is defined as Bel:* $2^X \rightarrow [0, 1]$ *such that*:

$$\mathrm{Bel}(A) = \sum_{B_j \subseteq A} m(B_j) \tag{6}$$

Bel(A) represents the exact support to A and Pl(A) represents the possible support to A. With these two measures we can form the interval of support to A as [Bel(A),Pl(A)]. This interval can be seen as the lower and upper bounds of the probability to which A is supported such that Bel(A) ≤ Prob(A) ≤ Pl(A). From this we see that Pl(A) ≥ Bel(A) for all A. Another interesting issue about these two measures is that they are connected by Bel(A) = 1 – Pl($\bar{A}$) or Pl(A) = 1 – Bel($\bar{A}$), where $\bar{A}$ is the complement of A.

4. A Model for Linguistic Decision Making in Dempster-Shafer Framework

Here, we present a new approach for linguistic decision making with D-S theory. First, we will analyze the decision making process by using the LOWA and the LOWG operator. Second, we will study the whole aggregation process. Third, we will consider different particular cases that could be used in the aggregation.

Decision Making Approach

The problem of decision making with D-S belief structures has been studied by different authors such as [4,16,29,35,39]. In [29], Yager proposed a generalized methodology by using the OWA operator. In these papers, the available information is quantitative. However, many decision making problems cannot be assessed with numerical values because the decision makers knowledge is vague and/or imprecise. Then, a better approach may be the use of linguistic assessments instead of numerical ones.

Therefore, we will propose a linguistic decision model with D-S belief structures that manages linguistic information and the processes of CW. To do so, we will use the operational laws and the different aggregation operators reviewed in Section 2. First, we will study the process to follow when using the LOWA operator in decision making with D-S theory of evidence. The procedure can be summarized as follows.

Assume we have a decision problem in which we have a collection of alternatives $\{A_1, \ldots, A_q\}$ with states of nature $\{N_1, \ldots, N_n\}$. s_{ih} is the linguistic payoff to the decision maker if he selects alternative A_i and the state of nature is N_h. The knowledge of the state of nature is captured in terms of a belief structure m with focal elements $B_1, \ldots, B_r$ and associated with each of these focal elements is a weight $m(B_k)$. The objective of the problem is to select the alternative which best satisfies the linguistic payoff to the decision maker. In order to do so, we should follow the following steps:

Step 1: Calculate the linguistic payoff matrix.

Step 2: Determine the belief function m about the states of nature and the decision makers degree of optimism α. Note that for the LOWA operator we use the same measure α used by Yager in [28].

Step 3: Calculate the collection of weights, w, to be used in the LOWA aggregation for each different cardinality of focal elements.

Step 4: Determine the linguistic payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k. Hence $M_{ik} = \{s_{ih} \mid N_h \in B_k\}$.

Step 5: Calculate the linguistic aggregated payoff, V_{ik} = LOWA(M_{ik}), using Eq. (1), for all the values of i and k. Note that it is possible to use for each focal element a different type of LOWA operator. That is, for each focal element we can use a different weighting vector W.

Step 6: For each alternative, calculate the generalized linguistic expected value, s_i, where:

$$s_i = \sum_{k=1}^{r} V_{ik}\, m(B_k) \tag{7}$$

Step 7: Select the alternative with the largest s_i as the optimal. Note that it is possible to establish an order of the results obtained.

Remark 1: Sometimes it could be preferred the use of the ALOWA operator in the D-S decision process instead of the LOWA operator. The main motivation for this choice is that we have to make a distinction when dealing with situations where the highest linguistic argument is the best result and situations where the smallest linguistic argument is the best result.

Then, if we use the ALOWA operator in decision making with D-S belief structures, we should make the following changes in the decision process.

In *Step* 2-3, when calculating the collection of weights, w, to be used in the ALOWA aggregation for each different cardinality of focal elements, we should consider that now the attitudinal character $\alpha(W)$ is defined in ascending order.

In *Step* 5, when calculating the aggregated payoff, we should use V_{ik} = ALOWA(M_{ik}), for all the values of i and k.

In *Step* 7, we should select the alternative with the lowest s_i as the optimal because the best result is the one which predicts the lowest expected values.

Remark 2: Another possibility could be the use of linguistic geometric aggregation operators such as the LOWG (see Eq.(3)) and the ALOWG operator in the decision process. In this case, the decision process is the same as explained above with the difference that now instead of using the LOWA or the ALOWA operator in the aggregation step, we will use the LOWG or the ALOWG operator.

A Belief Structure Linguistic Aggregation Operator

Analyzing the aggregation in *Steps* 5 and 6 of Section 4.1, it is possible to formulate in one equation the whole aggregation process. Then, the focal weights are computed by aggregating the results obtained by using the LOWA operator. We will call this process the belief structure - LOWA (BS-LOWA) aggregation and it can be defined as follows.

Definition 8. *A BS-LOWA operator is defined by*

$$s_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k)\, w_{j_k}\, s_{\beta_{j_k}} \tag{8}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, $s_{\beta_{j_k}}$ *is the* j_k*th largest of the* $s_{\alpha_{i_k}}$, $s_{\alpha_{i_k}}$ *is the argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

Note that q_k refers to the cardinality of each focal element and r is the total number of focal elements.

The BS-LOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. We can prove these properties with the following theorems.

THEOREM 1 (Commutativity). *Assume f is the BS-LOWA operator, then*

$$f(s_{\alpha_{1_1}}, s_{\alpha_{2_1}} ..., s_{\alpha_{q_r}}) = f(s^*_{\alpha_{1_1}}, s^*_{\alpha_{2_1}} ..., s^*_{\alpha_{q_r}}) \tag{9}$$

where $(s^*_{\alpha_{1_1}}, ..., s^*_{\alpha_{q_r}})$ *is any permutation of* $(s_{\alpha_{1_1}}, ..., s_{\alpha_{q_r}})$ *for each focal element k.*

Proof. Let

$$f(s_{\alpha_{1_1}}, ..., s_{\alpha_{q_1}}, ..., s_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_{\beta_{j_k}} \quad \text{and}$$

$$f(s^*_{\alpha_{1_1}}, ..., s^*_{\alpha_{q_1}}, ..., s^*_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s^*_{\beta_{j_k}}$$

Since $(s^*_{\alpha_{1_1}}, ..., s^*_{\alpha_{q_r}})$ is a permutation of $(s_{\alpha_{1_1}}, ..., s_{\alpha_{q_r}})$ for each focal element k, we have $s_{\beta_{j_k}} = s^*_{\beta_{j_k}}$, and then

$$f(s_{\alpha_{1_1}}, s_{\alpha_{2_1}} ..., s_{\alpha_{q_r}}) = f(s^*_{\alpha_{1_1}}, s^*_{\alpha_{2_1}} ..., s^*_{\alpha_{q_r}}) \quad \blacksquare$$

THEOREM 2 (Monotonicity). *Assume f is the BS-LOWA operator, if* $s_{\alpha_{i_k}} \geq \hat{s}_{\alpha_{i_k}}$, $\forall$ *i, then*

$$f(s_{\alpha_{1_1}}, ..., s_{\alpha_{q_r}}) \geq f(\hat{s}_{\alpha_{1_1}}, ..., \hat{s}_{\alpha_{q_r}}) \tag{10}$$

Proof. Let

$$f(s_{\alpha_{1_1}}, ..., s_{\alpha_{q_1}}, ..., s_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_{\beta_{j_k}} \quad \text{and}$$

$$f(\hat{s}_{\alpha_{1_1}}, ..., \hat{s}_{\alpha_{q_1}}, ..., \hat{s}_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} \hat{s}_{\beta_{j_k}}$$

Since $s_{\alpha_{i_k}} \geq \hat{s}_{\alpha_{i_k}}$, $\forall i$, it follows that $s_{\beta_{j_k}} \geq \hat{s}_{\beta_{j_k}}$, and then

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) \geq f(\hat{s}_{\alpha_{1_1}},...,\hat{s}_{\alpha_{q_r}}) \quad \blacksquare$$

THEOREM 3 (Boundedness). *Assume f is the BS-LOWA operator, then*

$$\min\{s_{\alpha_i}\} \leq f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) \leq \max\{s_{\alpha_i}\} \tag{11}$$

Proof. Let $\max\{s_{\alpha_i}\} = s_\beta$ and $\min\{s_{\alpha_i}\} = s_\alpha$, then

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_{\beta_{j_k}} \leq \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_\beta = s_\beta \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k}$$

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_{\beta_{j_k}} \geq \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_\alpha = s_\alpha \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k}$$

Since $\sum_{j_k=1}^{q_k} w_{j_k} = 1$ for each focal element and $\sum_{k=1}^{r} m(B_k) = 1$, we get

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) \leq s_\beta$$

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) \geq s_\alpha$$

Therefore,

$$\min\{s_{\alpha_i}\} \leq f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) \leq \max\{s_{\alpha_i}\} \quad \blacksquare$$

THEOREM 4 (Idempotency). *Assume f is the BS-LOWA operator, if* $s_{\alpha_i} = s_\alpha \;\; \forall i \in N$, *then*

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) = s_\alpha \tag{12}$$

Proof. Since $s_{\alpha_i} = s_\alpha \;\; \forall i \in N$, we have

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_{\beta_{j_k}} = \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_\alpha = s_\alpha \sum_{k=1}^{r}\sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k}$$

Since $\sum_{j_k=1}^{q_k} w_{j_k} = 1$ for each focal element and $\sum_{k=1}^{r} m(B_k) = 1$, we get

$$f(s_{\alpha_{1_1}},...,s_{\alpha_{q_1}},...,s_{\alpha_{q_r}}) = s_\alpha \quad \blacksquare$$

A further interesting feature is the distinction drawn between descending and ascending orders by using $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the BS-DLOWA (or BS-LOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the BS-ALOWA operator. Obviously, these operators also fulfill the properties discussed in Theorems (1) - (4).

Note that if we use linguistic geometric aggregation operators, we will get a similar result. We will call it the belief structure – LOWG (BS-LOWG) aggregation.

Definition 9. *A BS-LOWG operator is defined by*

$$s_i = \sum_{k=1}^{r} \prod_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) s_{\beta_{j_k}}{}^{w_{j_k}} \tag{13}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, $s_{\beta_{j_k}}$ *is the* j_k*th largest of the* $s_{\alpha_{i_k}}$, $s_{\alpha_{i_k}}$ *is the argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment.*

Obviously, this aggregation also accomplishes the same properties than the BS-LOWA and it is possible to distinguish between descending (BS-DLOWG) and ascending (BS-ALOWG) orders.

Families of LOWA Operators in Belief Structures

By choosing a different manifestation of the weighting vector in the LOWA operator, we are able to obtain different types of aggregation operators in the decision process with D-S framework. For example, we can obtain the linguistic maximum, the linguistic minimum, the LA, the Hurwicz linguistic criteria, the LWA and the LOWA operator. Note that these operators are found by using the LOWA or the ALOWA operator. These two parameterized families of aggregation operators are related by $w_j = w^*_{n+1-j}$, where w_j is the jth weight of the LOWA (or DLOWA) operator and w^*_{n+1-j} the jth weight of the ALOWA operator. Therefore, we will just consider the results obtained with the LOWA operator as the ALOWA version is straightforward.

The maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_{j*} = 0$, for all $j \neq 1$. Note that we consider that j is the reordered position of the linguistic arguments s_{ih}. The minimum is obtained if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. The LA is found when $w_j = 1/n$, for all j. The linguistic Hurwicz criteria is obtained when $w_1 = \alpha$, $w_n = 1 - \alpha$, $w_j = 0$, for $j \neq 1$ and $j \neq n$. The LWA is obtained if the initial ordered position is the same than the ordered position of j.

Other families of aggregation operators could be obtained with the LOWA operator by using a different manifestation in the weighting vector. For example, when $w_p = 1$ and $w_j = 0$ for all $j \neq p$ we are using the step-LOWA operator in the D-S framework. Note that if $p = 1$, the step-LOWA is transformed in the maximum and if $p = n$, the step-LOWA becomes the minimum.

When $w_j = 1/m$ for $k \leq j \leq k + m - 1$ and $w_j = 0$ for $j > k + m$ and $j < k$, we are using the window-LOWA operator in the aggregation step of the D-S decision process. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-LOWA is transformed in the maximum. If $m = 1$, $k = n$, the window-LOWA becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, the window-LOWA is transformed in the LA.

If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$, we are using the olympic linguistic average (OLA) that it is based on the olympic average [33]. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the OLA is transformed in the LOWA median and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-LOWA is transformed in the OLA.

Another type of aggregation that could be used is the E-Z LOWA weights that it is based on the E-Z OWA weights [34]. In this case, we should distinguish between two classes. In the first class, we assign $w_j = (1/q)$ for $j = 1$ to q and $w_j = 0$ for $j > q$, and in the second class, we assign $w_j = 0$ for $j = 1$ to $n - q$ and $w_j = (1/q)$ for $j = n - q + 1$ to n. If $q = 1$ for the first class, the E-Z LOWA becomes the maximum. And if $q = 1$ for the second class, the E-Z LOWA becomes the minimum. Note that the E-Z LOWA is transformed in the LA if $q = n$. If $q = m$ and $k = 1$, then, the E-Z LOWA weights becomes the window-LOWA operator for the first class. And for the second class, the E-Z LOWA weights becomes the window-LOWA if $q = m$ and $k = n - q + 1$.

We note that the median and the weighted median can also be used as linguistic aggregation operators. For the linguistic median, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_j = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_j = 0$ for all others. For the weighted LOWA median, we follow a different procedure than [31]. We select the argument s_j that has the jth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

More families of LOWA operators could be used in the aggregation step of the D-S framework such as the S-LOWA operator, the LOWA weights that depend on the aggregated objects, the LOWA weights that use a basic unit interval monotonic function (BUM), the centered-LOWA operator and the Gaussian LOWA weights. Other families that could be obtained are the ones that use the orness and the dispersion measure for determining the LOWA weights. For example, we could mention the maximal entropy LOWA (MELOWA) weights, the minimax disparity LOWA weights, the minimal variability LOWA weights or the maximal Rényi entropy LOWA weights, among others. Note that these methods follow the same methodology than the original version developed for the OWA operator [5-10,12-13,16,21-31,33-38] with the only difference that now the arguments are linguistic values instead of numerical ones.

Note that a similar analysis could be developed for the linguistic geometric aggregation operators. Then, we could obtain the step-LOWG, the median-LOWG, the centered-LOWG, the olympic-LOWG, the S-LOWG, etc.

5. Linguistic Hybrid Aggregation Operators in Dempster-Shafer Theory

Although we have already considered a wide range of linguistic aggregation operators that can be used in the D-S framework, in some situations, we could prefer to use another type of linguistic aggregation operator in the D-S decision process such as the LHA operator. The main advantage of this operator is that it uses in the same aggregation the characteristics of the LWA and the characteristics of the LOWA operator. Then, if we introduce this operator in decision making with D-S belief structure, we are able to develop a unifying framework that includes in the same formulation probabilities, LWAs and LOWAs.

In order to use this type of aggregation operator in D-S framework, we should make the following changes to the decision process explained in the previous section for the LOWA operator.

In *Step* 3, when calculating the collection of weights, w, to be used in the LHA aggregation for each different cardinality of focal elements, we should consider the definition of two weighting vectors. Note that these two weighting vectors are used for combining in the same aggregation the LWA and the LOWA operator.

In *Step* 5, when calculating the linguistic aggregated payoff, we should use $V_{ik} = \text{LHA}(M_{ik})$, using Eq. (2) for all the values of i and k.

In this case, we could also formulate in one equation the whole aggregation process as follows. We will call it the belief structure - linguistic hybrid averaging (BS-LHA) operator.

Definition 10. *A BS-LHA operator is defined by*

$$s_i = \sum_{k=1}^{r} \sum_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) w_{j_k} s_{\beta_{j_k}} \tag{14}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, $s_{\beta_{j_k}}$ *is the* j_k*th largest of the linguistic weighted argument* $\hat{s}_{\alpha_{i_k}}$ ($\hat{s}_{\alpha_{i_k}} = n\omega_i s_{\alpha_{i_k}}$ *;* $i = 1,2,\ldots,n$), ω_i *is the weighting vector of the* $s_{\alpha_{i_k}}$ *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, $s_{\alpha_{i_k}}$ *is the linguistic argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

As we can see, the focal weights are aggregating the results obtained by using the LHA operator, which combines in the same aggregation the LWA and the LOWA operator. Note that if all the weights ω_i are $1/n$, for all i, then, Eq. (14) is transformed in Eq. (8).

The BS-LHA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Note that it is straightforward to prove these properties by looking at Theorems (1) – (4).

In this case, it is also possible to find situations where it is better to use an ascending order in the aggregation. Then, we will use the ALHA operator in the decision process with D-S theory. We should note that the main differences against the LHA operator is that now, in *Step 3* we should use an ascending order in the collection of weights and in *Step 5* we should use V_{ik} = ALHA(M_{ik}).

When aggregating the collection of linguistic payoffs of each focal element with the LHA operator, it is also possible to use a wide range of families of LHA operators such as the linguistic hybrid maximum, the linguistic hybrid minimum, the Hurwicz linguistic hybrid criteria, the LA and the LWA.

Other families of LHA operators that could be used in the aggregation are for example, the step-LHA operator, the window-LHA operator, the olympic-LHA operator, the E-Z LHA weights, the LHA median, the weighted LHA median, the centered-LHA operator and the S-LHA operator. Note that in this case we could also consider the families that use the orness and the dispersion measure for determining the LHA weights such as the maximal entropy LHA weights or the minimal variability LHA weights.

If we use the same family of LHA operator for all the focal elements, then, we can refer to the previous families as BS-LWA, BS-maximum, BS-minimum, Hurwicz BS-linguistic hybrid criteria, BS-step-LHA, BS-window-LHA, BS-olympic-LHA, BS-LHA median, the BS-centered-LHA, the BS-S-LHA, etc. The reason is that now we are strictly using one family of LHA operator so the whole process is affected only by this case. Then, it is possible to refer to the aggregation process with this particular family. However, if we do not use the same family of LHA operator in all the focal elements, then, it happens that in the same problem, we are using different families of LHA operators depending on the focal element considered. Obviously, in this case it is not clear which is the type of family used in the whole aggregation.

Finally, note that it is also possible to develop a similar analysis with linguistic geometric aggregation operators. The decision process is the same with the only difference that now we replace the LHA operator by the LHGA or the ALHGA operator in the aggregation process. Note that the LHGA operator is explained in Eq. (4). Then, the whole aggregation process will be formulated as follows.

Definition 11. *A BS-LHGA operator is defined by*

$$s_i = \sum_{k=1}^{r} \prod_{j_k=1}^{q_k} m(B_k) s_{\beta_{j_k}}{}^{w_{j_k}} \tag{15}$$

where w_{j_k} *is the weighting vector of the kth focal element such that* $\sum_{j=1}^{n} w_{j_k} = 1$ *and* $w_{j_k} \in [0,1]$, $s_{\beta_{j_k}}$ *is the* j_k*th largest of the linguistic weighted argument* $\hat{s}_{\alpha_{i_k}}$ ($\hat{s}_{\alpha_{i_k}} = (s_{\alpha_{i_k}})^{n\omega_i}$*;* $i = 1,2,\ldots,n$), ω_i *is the exponential weighting vector of the* $s_{\alpha_{i_k}}$ *with* $\omega_i \in [0, 1]$ *and the sum of the weights is* 1, $s_{\alpha_{i_k}}$ *is the linguistic argument variable and* $m(B_k)$ *is the basic probability assignment*.

Obviously, in this case it is also possible to distinguish between the BS-DLHGA and BS-ALHGA operator, and study similar properties than the BS-LHA operator.

6. Illustrative Example

In the following, we are going to develop an illustrative example in order to clarify the procedures commented above. We will analyze a decision making problem with D-S belief structure. We will use different types of linguistic aggregation operators such as the LA, the LWA, the LOWA, the ALOWA, the LHA and the ALHA operator. We will also use different types of linguistic geometric operators such as the LGA, the LWGA, the LOWG, the ALOWG, the LHGA and the ALHGA operator. Note that other applications could be developed such as the selection of financial products [17], etc.

Step 1: Assume an investment company has five possible investments and it wants to select the alternative that better adapts to its interests [8].

1) A_1 is a car company.
2) A_2 is a food company.
3) A_3 is a computer company.
4) A_4 is a chemical company.
5) A_5 is a TV company.

Depending on different uncertain situations that could happen in the future the experts of the investment company establishes the payoff matrix. As the future states of nature are very imprecise, the experts cannot use numerical values in the payoff matrix. Instead, they use linguistic variables to calculate the future benefits of the companies depending on the state of nature that happens in the future. They establish the following linguistic scale.

S = {s_1 = *Extremely low*, s_2 = *Very low*, s_3 = *Low*, s_4 = *Medium*,

s_5 = *High*, s_6 = *Very high*, s_7 = *Extremely high*}.

The possible results that could happen in the future are shown in Table 1.

Table 1. Linguistic payoff matrix

	N_1	N_2	N_3	N_4	N_5	N_6	N_7	N_8
A_1	s_2	s_5	s_6	s_4	s_3	s_7	s_2	s_1
A_2	s_3	s_4	s_4	s_4	s_7	s_6	s_1	s_2
A_3	s_2	s_4	s_5	s_3	s_4	s_4	s_5	s_3
A_4	s_4	s_3	s_1	s_1	s_7	s_4	s_2	s_7
A_5	s_3	s_4	s_6	s_2	s_1	s_6	s_7	s_2

Step 2: Although the information is very imprecise, the experts have obtained some empirical and historical data that has permitted them to establish some probabilistic information about which state of nature will happen in the future. This information is represented by the following belief structure.

Focal element

$B_1 = \{N_2, N_3, N_4, N_5\} = 0.3$

$B_2 = \{N_1, N_3, N_7, N_8\} = 0.3$

$B_3 = \{N_1, N_4, N_5, N_6, N_7\} = 0.4$

Step 3: Assume we have used one of the existing methods for determining the LOWA, weights and we have obtained W_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3) and W_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3). For the weighting vector to be used in the hybrid aggregations we assume that ω_4 = (0.2, 0.2, 0.3, 0.3) and ω_5 = (0.1, 0.2, 0.2, 0.2, 0.3).

Step 4: Calculate the payoff collection, M_{ik}, if we select alternative A_i and the focal element B_k occurs, for all the values of i and k.

A_1: $M_{11} = \langle S_5, S_6, S_4, S_3\rangle$; $M_{12} = \langle S_2, S_6, S_2, S_1\rangle$; $M_{13} = \langle S_2, S_4, S_3, S_7, S_2\rangle$.
A_2: $M_{21} = \langle S_4, S_4, S_4, S_7\rangle$; $M_{22} = \langle S_3, S_4, S_1, S_2\rangle$; $M_{23} = \langle S_3, S_4, S_7, S_6, S_1\rangle$.
A_3: $M_{31} = \langle S_4, S_5, S_3, S_4\rangle$; $M_{32} = \langle S_2, S_5, S_5, S_3\rangle$; $M_{33} = \langle S_2, S_3, S_4, S_4, S_5\rangle$.
A_4: $M_{41} = \langle S_3, S_1, S_1, S_7\rangle$; $M_{42} = \langle S_4, S_1, S_2, S_7\rangle$; $M_{43} = \langle S_4, S_1, S_7, S_4, S_2\rangle$.
A_5: $M_{51} = \langle S_4, S_6, S_2, S_1\rangle$; $M_{52} = \langle S_3, S_6, S_7, S_2\rangle$; $M_{53} = \langle S_3, S_2, S_1, S_6, S_7\rangle$.

From the fifth step, we will distinguish different types of linguistic aggregation operators.

Step 5: Calculate the aggregated linguistic payoff, V_{ik}, using Eq. (1) for the LOWA, the ALOWA, the LA and the LWA; using Eq. (2) for the LHA and the ALHA; using Eq. (3) for the LOWG, the ALOWG, the LGA and the LWGA; using Eq. (4) for the LHGA and the ALHGA operator. The results are shown in Tables 2 and 3.

Table 2. Aggregated payoff for the linguistic aggregation operators

	LA	*LWA*	*LOWA*	*ALOWA*	*LHA*	*ALHA*
M_{11}	$s_{4.5}$	$s_{4.3}$	$s_{4.3}$	$s_{4.7}$	$s_{4.2}$	$s_{4.4}$
M_{12}	$s_{2.75}$	$s_{2.5}$	$s_{2.5}$	s_{3}	$s_{2.28}$	$s_{2.72}$
M_{13}	$s_{3.6}$	$s_{3.6}$	$s_{3.1}$	$s_{4.1}$	$s_{2.4}$	$s_{3.36}$
M_{21}	$s_{4.75}$	$s_{4.9}$	$s_{4.6}$	$s_{4.9}$	$s_{4.56}$	$s_{5.24}$
M_{22}	$s_{2.5}$	$s_{2.3}$	$s_{2.3}$	$s_{2.7}$	$s_{2.2}$	$s_{2.4}$
M_{23}	$s_{4.2}$	s_{4}	$s_{3.6}$	$s_{4.8}$	$s_{2.76}$	$s_{3.64}$
M_{31}	s_{4}	$s_{3.9}$	$s_{3.9}$	$s_{4.1}$	$s_{3.8}$	s_{4}
M_{32}	$s_{3.75}$	$s_{3.8}$	$s_{3.5}$	s_{4}	$s_{3.56}$	$s_{4.04}$
M_{33}	$s_{3.6}$	$s_{3.9}$	$s_{3.3}$	$s_{3.9}$	$s_{2.6}$	$s_{3.64}$
M_{41}	s_{3}	$s_{3.2}$	$s_{2.6}$	$s_{3.4}$	$s_{2.76}$	$s_{3.64}$
M_{42}	$s_{3.5}$	$s_{3.7}$	$s_{3.1}$	$s_{3.9}$	$s_{3.28}$	$s_{4.12}$
M_{43}	$s_{3.6}$	$s_{3.4}$	s_{3}	$s_{4.2}$	$s_{2.24}$	$s_{3.2}$
M_{51}	$s_{3.25}$	$s_{2.9}$	$s_{2.9}$	$s_{3.6}$	$s_{2.68}$	$s_{3.12}$
M_{52}	$s_{4.5}$	$s_{4.5}$	$s_{4.1}$	$s_{4.9}$	$s_{4.08}$	$s_{4.92}$
M_{53}	$s_{3.8}$	$s_{4.2}$	$s_{3.2}$	$s_{4.4}$	$s_{2.6}$	$s_{4.12}$

Table 3. Aggregated payoff for the linguistic geometric operators

	LGA	*LWGA*	*LOWG*	*ALOWG*	*LHGA*	*ALHGA*
M_{11}	$s_{4.35}$	$s_{4.16}$	$s_{4.16}$	$s_{4.56}$	$s_{4.05}$	$s_{4.25}$
M_{12}	$s_{2.21}$	$s_{2.02}$	$s_{2.02}$	$s_{2.42}$	$s_{1.85}$	$s_{2.20}$
M_{13}	$s_{3.20}$	$s_{3.20}$	$s_{2.82}$	$s_{3.62}$	$s_{2.22}$	$s_{2.87}$
M_{21}	$s_{4.60}$	$s_{4.73}$	$s_{4.47}$	$s_{4.73}$	$s_{4.32}$	$s_{5.16}$
M_{22}	$s_{2.21}$	$s_{2.02}$	$s_{2.02}$	$s_{2.42}$	$s_{1.90}$	$s_{2.14}$
M_{23}	$s_{3.47}$	$s_{3.11}$	$s_{2.85}$	$s_{4.21}$	$s_{2.12}$	$s_{2.89}$
M_{31}	$s_{3.93}$	$s_{3.83}$	$s_{3.83}$	$s_{4.03}$	$s_{3.72}$	$s_{3.94}$
M_{32}	$s_{3.49}$	$s_{3.57}$	$s_{3.25}$	$s_{3.75}$	$s_{3.32}$	$s_{3.82}$
M_{33}	$s_{3.43}$	$s_{3.76}$	$s_{3.13}$	$s_{3.76}$	$s_{2.44}$	$s_{3.40}$
M_{41}	$s_{2.14}$	$s_{2.23}$	$s_{1.83}$	$s_{2.49}$	$s_{1.90}$	$s_{2.81}$
M_{42}	$s_{2.73}$	$s_{2.91}$	$s_{2.39}$	$s_{3.12}$	$s_{2.55}$	$s_{3.31}$
M_{43}	$s_{2.95}$	$s_{2.75}$	$s_{2.42}$	$s_{3.58}$	$s_{1.92}$	$s_{2.62}$
M_{51}	$s_{2.63}$	$s_{2.32}$	$s_{2.32}$	$s_{2.98}$	$s_{2.13}$	$s_{2.52}$
M_{52}	$s_{3.98}$	$s_{3.93}$	$s_{3.61}$	$s_{4.39}$	$s_{3.54}$	$s_{4.35}$
M_{53}	$s_{3.02}$	$s_{3.28}$	$s_{2.48}$	$s_{3.67}$	$s_{2.05}$	$s_{3.27}$

Step 6: For each alternative, calculate the generalized expected value, C_i, using Eq. (7). The results are shown in Tables 4 and 5.

Table 4. Generalized linguistic expected value for the linguistic aggregation operators

	LA	*LWA*	*LOWA*	*ALOWA*	*LHA*	*ALHA*
A_1	$s_{3.615}$	$s_{3.48}$	$s_{3.28}$	$s_{4.25}$	$s_{2.904}$	$s_{3.48}$
A_2	$s_{3.855}$	$s_{3.76}$	$s_{3.51}$	$s_{4.2}$	$s_{3.132}$	$s_{3.748}$
A_3	$s_{3.765}$	$s_{3.87}$	$s_{3.54}$	$s_{3.99}$	$s_{3.248}$	$s_{3.868}$
A_4	$s_{3.39}$	$s_{3.43}$	$s_{2.91}$	$s_{3.87}$	$s_{2.708}$	$s_{3.608}$
A_5	$s_{3.845}$	$s_{3.9}$	$s_{3.38}$	$s_{4.31}$	$s_{3.068}$	$s_{4.06}$

Table 5. Generalized linguistic expected value for the linguistic geometric operators

	LGA	*LWGA*	*LOWG*	*ALOWG*	*LHGA*	*ALHGA*
A_1	$s_{3.248}$	$s_{3.134}$	$s_{2.982}$	$s_{3.542}$	$s_{2.658}$	$s_{3.083}$
A_2	$s_{3.431}$	$s_{3.269}$	$s_{3.087}$	$s_{3.829}$	$s_{2.714}$	$s_{3.346}$
A_3	$s_{3.598}$	$s_{3.724}$	$s_{3.376}$	$s_{3.838}$	$s_{3.088}$	$s_{3.688}$
A_4	$s_{2.641}$	$s_{2.642}$	$s_{2.234}$	$s_{3.115}$	$s_{2.103}$	$s_{2.884}$
A_5	$s_{3.191}$	$s_{3.187}$	$s_{2.771}$	$s_{3.679}$	$s_{2.521}$	$s_{3.369}$

Step 7: Select the best alternative for each aggregation operator. That is, select the investment with the highest linguistic expected value. As we can see, with the LA we will select alternative A_2. With the LOWA, the LHA, the LGA, the LWGA, the LOWG, the ALOWG, the LHGA and the ALHGA operator, we will select alternative A_3. Finally, we will select alternative A_5 with the LWA, the ALOWA and the ALHA operator.

If we establish an order for the investments, a typical situation if we want to select more than one alternative, we can see that each aggregation gives us a different order of the investments. Note that $\succ$ means *preferred to*. The results are shown in table 6.

Table 6. Ordering of the investments

	Ordering		*Ordering*
LA	$A_2 \succ A_5 \succ A_3 \succ A_1 \succ A_4$	*LGA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$
LWA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$	*LWGA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
LOWA	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$	*LOWG*	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$
ALOWA	$A_5 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_3 \succ A_4$	*ALOWG*	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$
LHA	$A_3 \succ A_2 \succ A_5 \succ A_1 \succ A_4$	*LHGA*	$A_3 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_5 \succ A_4$
ALHA	$A_5 \succ A_3 \succ A_2 \succ A_4 \succ A_1$	*ALHGA*	$A_3 \succ A_5 \succ A_2 \succ A_1 \succ A_4$

As we can see, depending on the linguistic aggregation operator used, the results and decisions may be different. In this example, we can see that the results obtained with the linguistic geometric operators are very similar while the results found with the linguistic arithmetic operators are more affected to modifications depending on the particular case used.

7. Conclusions

We have studied the D-S theory of evidence in situations of decision making with linguistic information. First, we have developed the new approach about using linguistic information in decision making with D-S belief structure, due to the fact that sometimes it is better to model the decision makers knowledge by means of linguistic information because the knowledge involves uncertainty. Initially we have considered different types of linguistic aggregation operators such as the LOWA operator, the LHA operator, the LOWG operator and the LHGA operator to accomplish the processes of computing with words in the linguistic decision model. Then, we have presented new linguistic aggregation operators in the D-S framework, such as, the BS-LOWA, the BS-LOWG, the BS-LHA, and the BS-LHGA operator In all these cases, we have considered different families of linguistic operators that could be used in the analysis such as the step-LOWA, the olympic-LOWA, the E-Z LOWA, the centered-LOWA, etc.

Finally, we have shown an illustrative example about the proposal introduced in the paper. We have pointed out that the results and decisions are dependent on the linguistic aggregation operator used in the decision making process.

References

1. P.P. Bonissone, A Fuzzy Sets Based Linguistic Approach: Theory and Applications, in: M.M. Gupta and E. Sanchez, Eds., Approximate Reasoning in Decision Analysis, (North-Holland, 1982) 329-339.
2. F. Chiclana, F. Herrera and E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.
3. A.P. Dempster, Upper and lower probabilities induced by a multi-valued mapping, *Ann. Math. Statist.* **38** (1967) 325-339.
4. K.J. Engemann, H.E. Miller and R.R. Yager, Decision making with belief structures: an application in risk management, *Int. J. Uncertainty, Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **4** (1996) 1-26.
5. F. Herrera and E. Herrera-Viedma, Aggregation operators for linguistic weighted information, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* **27** (1997) 646-655.
6. F. Herrera and E. Herrera-Viedma, Linguistic decision analysis: Steps for solving decision problems under linguistic information, *Fuzzy Sets Syst.* **115** (2000) 67-82.
7. F. Herrera, E. Herrera-Viedma and L. Martínez, A fusion approach for managing multigranularity linguistic term sets in decision making, *Fuzzy Sets Syst.* **114** (2000) 43-58.
8. F. Herrera, E. Herrera-Viedma and J.L. Verdegay, A Sequential Selection Process in Group Decision Making with a Linguistic Assessment Approach, *Inform. Sci.* **85** (1995) 223-239.
9. F. Herrera and L. Martínez, A 2-tuple Fuzzy Linguistic Representation Model for Computing with Words, *IEEE Trans. Fuzzy Syst.* **8** (2000) 746-752.
10. F. Herrera and L. Martínez, The 2-tuple Linguistic Computational Model. Advantages of its linguistic description, accuracy and consistency, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **9** (2001) 33-48.
11. C.A. Le, V.N. Huynh, A. Shimazu and Y. Nakamori, Combining classifiers for word sense disambiguation based on Dempster-Shafer theory and OWA operators, *Data & Know. Eng.* **63** (2007) 381-396.
12. X.W. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, *Int. J. Approx. Reason.* **45** (2007) 68-81.
13. P. Majlender, OWA operators with maximal Rényi entropy, *Fuzzy Sets Syst.* **155** (2005) 340-360.
14. L. Martinez; J. Liu, D. Ruan and J.B. Yang, Dealing with heterogeneous information in engineering evaluation processes, *Inform. Sci.* **177** (2007) 1533-1542.
15. L. Martinez, J. Liu, J.B. Yang and F. Herrera, A multi-granular hierarchical linguistic model for design evaluation based on safety and cost analysis, *Int. J. Intell. Syst.* **20** (2005) 1161-1194.
16. J.M. Merigó and M. Casanovas, Ordered weighted geometric operators in decision making with Dempster-Shafer belief structure, in: *Proc. 13th Congress of the Int. Association for Fuzzy Set Management and Economy (SIGEF)*, Hammamet, Tunisia, 2006, pp.709-727.
17. J.M. Merigó and A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Econ. Rev.* **12** (2007) 35-50.
18. M. Reformat and R.R. Yager, Building ensemble classifiers using belief functions and OWA operators, *Soft Comp.* **12** (2008) 543-558.
19. G. Shafer, *Mathematical Theory of Evidence* (Princeton University Press, Princeton, NJ, 1976).
20. R.P. Srivastava and T. Mock, *Belief Functions in Business Decisions* (Physica-Verlag, Heidelberg, 2002).
21. Y.M. Wang, Y. Luo and Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, *Inform. Sci.* **177** (2007) 3356-3363.
22. Y.M. Wang and C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, *Inform. Sci.* **177** (2007) 1867-1877.
23. Z.S. Xu, EOWA and EOWG operators for aggregating linguistic labels based on linguistic preference relations, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **12** (2004) 791-810.
24. Z.S. Xu, A method based on linguistic aggregation operators for group decision making with linguistic preference relations, *Inform. Sci.* **166** (2004) 19-30.

25. Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, *Int. J. Intell. Syst.* **20** (2005) 843-865.
26. Z.S. Xu, A Note on Linguistic Hybrid Arithmetic Averaging Operator in Multiple Attribute Group Decision Making with Linguistic Information, *Group Decis. Negot.* **15** (2006) 593-604.
27. Z.S. Xu and Q.L. Da, The Ordered Weighted Geometric Averaging Operators, *Int. J. Intell. Syst.* **17** (2002) 709-716.
28. R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. B* **18** (1988) 183-190.
29. R.R. Yager, Decision Making Under Dempster-Shafer Uncertainties, *Int. J. General Syst.* **20** (1992) 233-245.
30. R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets Syst.* **59** (1993) 125-148.
31. R.R. Yager, On weighted median aggregation, *Int. J. Uncertainty Fuzziness Knowledge-Based Syst.* **2** (1994) 101-113.
32. R.R. Yager, An Approach to Ordinal Decision Making, *Int. J. Approx. Reason.* **12** (1995) 237-261.
33. R.R. Yager, Quantifier guided aggregation using OWA operators, *Int. J. Intell. Syst.* **11** (1996) 49-73.
34. R.R. Yager, E-Z OWA weights, in: *Proc. 10th IFSA World Congress*, Istanbul, Turkey, 2003, pp. 39-42.
35. R.R. Yager, Uncertainty modeling and decision support, *Reliability Eng. Syst. Safety* **85** (2004) 341-354.
36. R.R. Yager, Centered OWA operators, *Soft Comp.* **11** (2007) 631-639.
37. R.R. Yager and D.P. Filev, Parameterized andlike and orlike OWA Operators, *Int. J. General Syst.* **22** (1994) 297-316.
38. R.R. Yager and J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications* (Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997).
39. R.R. Yager and L. Liu, *Classic Works of the Dempster-Shafer Theory of Belief Functions* (Springer-Verlag, Berlin, 2008).
40. J.B. Yang, J. Liu, J. Wang, H. S. Sii and H. W. Wang, A belief rule-base inference methodology using the evidential reasoning approach – RIMER, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern. A* **36** (2006) 266-285.
41. J.B. Yang and M.G. Singh, An evidential reasoning approach for multiple attribute decision making with uncertainty, *IEEE Trans. Syst. Man Cybern.* **24** (1994) 1-18.
42. L.A. Zadeh, The Concept of a Linguistic Variable and its application to Approximate Reasoning. Part 1, *Inform. Sci.* **8** (1975) 199-249, Part 2, *Inform. Sci.* **8** (1975) 301-357, Part 3, *Inform. Sci.* **9** (1975) 43-80.

14.2.29. Artículo de revista 29. – Enviado a *International Journal of Information Technology and Decision Making*

THE UNCERTAIN GENERALIZED OWA OPERATOR AND ITS APPLICATION IN FINANCIAL DECISION MAKING

JOSÉ M. MERIGÓ, MONTSERRAT CASANOVAS
Department of Business Administration, University of Barcelona
Av. Diagonal 690, 08034, Barcelona, Spain
Emails: jmerigo@ub.edu, mcasanovas@ub.edu

Received (received date)
Revised (revised date)
Accepted (accepted date)

We introduce the uncertain generalized OWA (UGOWA) operator. It is an extension of the OWA operator that uses generalized means and uncertain information represented in the form of interval numbers. By using the UGOWA, it is possible to obtain a wide range of uncertain aggregation operators such as the uncertain average (UA), the uncertain weighted average (UWA), the uncertain OWA (UOWA) operator, the uncertain ordered weighted geometric (UOWG) operator, the uncertain ordered weighted quadratic averaging (UOWQA) operator, the uncertain generalized mean (UGM) and a lot of other particular cases. We study some of its main properties. We further generalize the UGOWA operator by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-UOWA operator. We end the paper with an application in decision making about selection of financial strategies.

Keywords: OWA operator; Aggregation operators; Decision making; Uncertainty.

1. Introduction

The ordered weighted averaging (OWA) operator is a very well-known aggregation operator that provides a parameterized family of aggregation operators that includes the maximum, the minimum and the average, as special cases. Since its appearance, the OWA operator has been receiving increasing attention by a lot of authors and it has been applied in a lot of fields[1-43]. Specially, the OWA operator is very useful for aggregating the information in decision making problems.

In the OWA operator, it is assumed that the information is exactly known and can be represented with exact numbers or singletons. However, this may not be the real situation found in the real world. Therefore, it is necessary to use another approach to represent situations with high degrees of uncertainty. In [28], Xu and Da suggested a method for representing the uncertainty in the OWA operator by using interval numbers. This aggregation operator is known as the uncertain OWA (UOWA) operator. Recently, the UOWA operator has been studied in a lot of works such as[2-3,28-29].

A further interesting extension is the generalized OWA (GOWA) operator[11,37] that uses generalized means[44] in the OWA operator. Then, it generalizes a lot of situations such as the OWA and its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator[8], the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator and the generalized mean. The GOWA operator can be further generalized by using quasi-arithmetic means[5]. The result is the Quasi-OWA operator[9] that includes the GOWA operator and a lot of other situations such as the quasi-arithmetic mean. Further research on the GOWA and Quasi-OWA can be found in[5-7,9,11,19-20].

The aim of this paper is to present the uncertain generalized OWA (UGOWA) operator. It is an aggregation operator that uses the main characteristics of the GOWA and the UOWA operator. Then, it uses generalized means and uncertain information represented in the form of interval numbers, in the same formulation. Note that it can be seen as an extension of the UOWA operator by using generalized means or as an extension of the GOWA operator by using uncertain information represented in the form of interval numbers. With this generalization, we obtain a wide range of uncertain aggregation operators such as the uncertain average (UA), the uncertain generalized mean (UGM), the UOWA, the uncertain OWG (UOWG) and the uncertain OWQA (UOWQA) operator. We study some of its main properties and different families of UGOWA operators such as the median-UGOWA, the olympic-UGOWA, the S-UGOWA, the centered-UGOWA, etc.

Note that the uncertain weighted generalized mean (UWGM) can also be found as a particular case although its construction is a bit artificial by using the UGOWA operator. Therefore, we will also give the main definition of the UWGM in a separate way. Obviously, the UWGM also includes a wide range of particular cases such as the uncertain weighted average (UWA), the uncertain weighted geometric average (UWGA), the uncertain weighted quadratic average (UWQA), etc.

We also present a further generalization of the UGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We refer to it as the Quasi-UOWA operator. This generalization includes the UGOWA operator and a lot of other situations.

The applicability of the UGOWA is very broad. But in this paper, we apply it in a decision making problem about selection of financial strategies. Then, we see that depending on the particular case used, the results may lead to different decisions. The main problem that we can see here is that we do not have one model that gives us the best decision because we are dealing with uncertainty. Obviously, in this type of problems, the best way to assess the information is with a general model that includes all the different methods in the same formulation although it cannot provide one method with the best decision. Then, at least this general model (UGOWA) shows us the different potential results that may happen in the decision problem so the decision maker knows the different results that could happen in the future.

This paper is organized as follows. In Section 2, we briefly review some basic concepts about the interval numbers, the UOWA and the GOWA operator. In Section 3, we present the UGOWA operator. Section 4 analyzes different families of UGOWA operators. Section 5 introduces the Quasi-UOWA operator and Section 6 develops a numerical example of the new approach. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review some basic concepts about the interval numbers, the UOWA operator and the GOWA operator.

Interval Numbers

The interval numbers[45] are a very useful and simple technique for representing the uncertainty. It has been used in an astonishingly wide range of applications.

The interval numbers can be expressed in different forms. For example, if we assume a 4-tuple (a_1, a_2, a_3, a_4), that is to say, a quadruplet, we could consider that a_1 and a_4 represents the minimum and the maximum of the interval number, and a_2 and a_3, the interval with the highest probability or possibility, depending on the use we want to give to the interval numbers. Note that $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4$. If $a_1 = a_2 = a_3 = a_4$, then, the interval number is an exact number; if $a_2 = a_3$, it is a 3-tuple known as triplet; and if $a_1 = a_2$ and $a_3 = a_4$, it is a simple 2-tuple interval number.

In the following, we are going to review some basic interval number operations as follows. Let A and B be two triplets, where $A = (a_1, a_2, a_3)$ and $B = (b_1, b_2, b_3)$. Then:

1) $A + B = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
2) $A - B = (a_1 - b_3, a_2 - b_2, a_3 - b_1)$
3) $A \times k = (k \times a_1, k \times a_2, k \times a_3)$; for $k > 0$.
4) $A \times B = (a_1 \times b_1, a_2 \times b_2, a_3 \times b_3)$; for R^+.
5) $A \div B = (a_1 \div b_3, a_2 \div b_2, a_3 \div b_1)$; for R^+.

Note that R^+ refers to all the positive real numbers. Note also that other operations could be studied[45] but in this paper we will focus on these ones.

Uncertain OWA Operator

The UOWA operator was introduced by Xu and Da in[28] and it represents an extension of the OWA operator. Essentially, its main difference is that it uses interval numbers in the arguments to be aggregated. The reason for using this aggregation operator is that sometimes the environment is very uncertain and the information is not clear, then, it can only be assessed by using interval numbers. The UOWA operator provides a parameterized family of aggregation operators that include the uncertain maximum, the uncertain minimum and the UA, among others. It can be defined as follows.

Definition 1. Let Ω be the set of interval numbers. An UOWA operator of dimension n is a mapping $UOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n with the following properties:

1) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$
2) $w_j \in [0,1]$

and such that:

$$UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{1}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, and the $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

Note that we call the function f as UOWA in order to distinguish it from other types of OWA operators that will be analysed throughout the paper. Note also that the function f of the other types of OWA will be also studied with the name of the extension.

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending UOWA (DUOWA) operator and the ascending UOWA (AUOWA) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUOWA operator.

The UOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. Different families of UOWA operators can be found by choosing a different manifestation in the weighting vector such as the median-UOWA, the olympic-UOWA or the centered-UOWA operator.

Generalized OWA Operator

The generalized OWA (GOWA) operator was introduced in[11,37]. It generalizes a wide range of aggregation operators that includes the OWA operator with its particular cases, the OWG operator, the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the OWQA operator. It can be defined as follows.

Definition 2. A GOWA operator of dimension n is a mapping $GOWA$: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n with the following properties:

1) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$
2) $w_j \in [0,1]$

and such that:

$$GOWA(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{2}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between descending (DGOWA) and ascending (AGOWA) orders[19]. As it is demonstrated in[11,37], the GOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that it has as special cases the maximum, the minimum and the generalized mean.

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases such as the usual OWA operator[31], the OWG operator[8], the OWHA operator[37] and the OWQA operator[37].

3. The Uncertain Generalized OWA Operator

The uncertain generalized OWA (UGOWA) operator is an extension of the GOWA operator that uses uncertain information in the aggregation. The main difference between the UGOWA and the GOWA operator is that the UGOWA operator deals with uncertain information represented by interval numbers while the GOWA operator uses exact numbers. The reason for using this operator is that sometimes, the uncertain factors that affect our decisions are not clearly known and in order to assess the problem we need to use interval numbers in order to consider the different uncertain results that could happen in the future. By using interval numbers, we get a more complete aggregation operator that considers the maximum and the minimum result that could happen in the problem. Moreover, by using the UGOWA, we get a generalization that includes a wide range of aggregation operators such as the uncertain maximum, the uncertain minimum, the UA, etc. It can be defined as follows.

Definition 3. Let Ω be the set of interval numbers. An UGOWA operator of dimension n is a mapping $UGOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n with the following properties:

1) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$
2) $w_j \in [0,1]$

and such that:

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$, the arguments $\tilde{a}_i$ are interval numbers and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$. Note that if $\lambda \leq 0$, we can only use positive numbers R^+, in order to get consistent results.

Note that the reordering of the arguments has an additional difficulty because now we are using interval numbers. Then, in some cases, it is not clear which interval number is higher, so we need to establish an additional criteria for reordering the interval numbers. For simplicity, we recommend the following criteria. For 2-tuples, calculate the arithmetic mean of the interval: $(a_1 + a_2) / 2$. For 3-tuples and more, calculate a weighted average that gives more importance to the central values. That is, $(a_1 + 2a_2 + a_3) / 4$. Then, for 4-tuples we could calculate: $(a_1 + 2a_2 + 2a_3 + a_4) / 6$. And so on. In the case of tie, we will select the interval with the lowest increment $(a_2 - a_1)$. For 3-tuples and more we will select the interval with the highest central value. Note that for 4-tuples and more we need to calculate the average of the central values following the initial criteria.

Note also that in more complex analysis it would be possible to consider that the weights w_j are interval numbers.

If B is a vector corresponding to the ordered arguments b_j^λ, we shall call this the ordered argument vector and W^T is the transpose of the weighting vector, then, the UGOWA operator can be expressed as:

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(W^T B\right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the UGOWA operator can be expressed as:

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j b_j^\lambda\right)^{1/\lambda} \tag{5}$$

From a generalized perspective of the reordering step, we can distinguish between the descending uncertain generalized OWA (DUGOWA) operator and the ascending uncertain generalized OWA (AUGOWA) operator. Note that they can be used in situations where the highest value is the best result and in situations where the lowest value is the best result. But in a more efficient context, it is better to use one of them for one situation and the other one for the other situation. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DUGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AUGOWA operator. As we can see, the main difference is that in the AUGOWA operator, the elements b_j (j= 1, 2, …, n) are ordered in an increasing way: $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_n$ while in the DUGOWA (or UGOWA) they are ordered in a decreasing way.

The UGOWA operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Commutativity). *Assume f is the UGOWA operator, then*:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \tag{6}$$

where $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n)$ *is any permutation of the arguments* $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n)$.

Proof. Let

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

$$f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

Since $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n)$ is a permutation of $(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n)$, we have $b_j = d_j$, for all $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, and then

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Monotonicity). *Assume f is the UGOWA operator, if* $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, *for all* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *then*:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \tag{9}$$

Proof. Let

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

$$f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{11}$$

Since $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, it follows that, $\tilde{a}_i \geq \tilde{e}_i$, and then

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq f(\tilde{e}_1, \tilde{e}_2 \ldots, \tilde{e}_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Bounded). *Assume f is the UGOWA operator, then*:

$$\mathrm{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \leq \mathrm{Max}\{\tilde{a}_i\} \tag{12}$$

Proof. Let $\max\{\tilde{a}_i\} = c$, and $\min\{\tilde{a}_i\} = d$, then

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j c^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(c^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{13}$$

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j d^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(d^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{14}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \leq c \tag{15}$$

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \geq d \tag{16}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{\tilde{a}_i\} \leq f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) \leq \text{Max}\{\tilde{a}_i\} \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Idempotency). *Assume f is the UGOWA operator, if $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, then*:

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a} \tag{17}$$

Proof. Since $\tilde{a}_i = \tilde{a}$, for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, we have

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda}\right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j\right)^{1/\lambda} \tag{18}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \tilde{a} \qquad \blacksquare$$

Another interesting issue to analyze are the measures for characterizing the weighting vector W. Following a similar methodology as it has been developed for the OWA[31,34,36] and the GOWA operator[37], we can formulate the attitudinal character, the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator.

The attitudinal character measures the degree of optimism - pessimism (also known as the orness - andness) of the aggregation and it is defined as follows.

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1}\right)^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{19}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the arithmetic mean $\alpha(W) = 0.5$.

The entropy of dispersion measures the amount of information being used in the aggregation.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{20}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, known as step-UGOWA, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used.

The divergence of W measures the divergence of the weights against the attitudinal character measure. It is useful in some exceptional situations when the attitudinal character and the entropy of dispersion are not enough to correctly analyze the weighting vector of an aggregation.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \qquad (21)$$

The balance operator measures the balance of the weights against the orness or the andness.

$$Bal(W) = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{n+1-2j}{n-1} \right) w_j \qquad (22)$$

It can be shown that $Bal(W) \in [-1, 1]$. Note that for the optimistic criteria, $Bal(W) = 1$, and for the pessimistic criteria, $Bal(W) = -1$.

4. Families of UGOWA Operators

In this Section, we consider different types of UGOWA operators. First, we study the particular cases found in the weighting vector *W*. And second, we analyze the parameter λ. In Table 1, we show the different families of UGOWA operators that we consider in the paper.

Table 1. Families of UGOWA operators

Weighting vector *W*	Parameter λ
• Uncertain Maximum and Minimum	• UOWA operator
• Uncertain Generalized Mean	• UOWG operator
• Uncertain Weighted Generalized Mean	• UOWQA operator
• GOWA operator	• UOWHA operator
• Median-UGOWA	• Etc.
• S-UGOWA (orlike, andlike and generalized)	
• Olympic-UGOWA	
• Centered-UGOWA	
• Nonmonotonic-UGOWA	
• Etc.	

The main advantage of using these families is their usefulness in some specific problems. However, each family cannot be seen as a general model because they are only useful for some particular situations. Then, the motivation for showing this Section is to present a wide range of practical cases of the UGOWA operator that can be used in a wide range of applications. Then, we can see that by using the UGOWA we are presenting a general formulation that can be used in different frameworks but in order to see practical results of this aggregation operator, we need to focus on one of its particular cases.

Analysing the Weighting Vector W

Different types of UGOWA operators can be found by using a different manifestation in the weighting vector. For example, it is possible to obtain the uncertain maximum, the uncertain minimum, the UGM, the UWGM and the UGOWA operator. Note that these results can be obtained both for the DUGOWA and the AUGOWA operators.

Remark 1. The uncertain maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$ and the uncertain minimum if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, $UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = b_k$, where b_k is the *k*th largest argument $\tilde{a}_i$. The UGM is found when $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$. The UWGM is obtained if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$. Note that the UWGM is formed in an artificial way because usually, this type of aggregation looks for the importance of the characteristics of the problem and not for the attitudinal character.

Remark 2. Note that the GOWA operator and all its particular cases are found in this generalization. This happens when the interval numbers of the UGOWA are converted into exact numbers. That is, when $a = (a, a) = (a, a, a) = (a, a, a, a) =$ etc.

Remark 3. Following a similar methodology as it has been developed in[1-8,11-19,21-25,32-35,38,40-43], we could study other particular cases of the UGOWA operator such as the median-UGOWA, the S-UGOWA, the olympic-UGOWA, the window-UGOWA, the centered-UGOWA operator, the E-Z UGOWA, the maximal entropy UGOWA weights, the minimal variability UGOWA, the nonmonotonic-UGOWA operator, etc.

Remark 4. For example, for the median-UGOWA, if n is odd we assign $w_{(n+1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2)+1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted UGOWA median, we select the argument b_k that has the kth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 5. Another interesting family is the S-UGOWA operator based on the S-OWA operator[32,40]. It can be subdivided in three classes, the “orlike”, the “andlike” and the generalized S-UGOWA operator. The generalized S-UGOWA operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-UGOWA operator becomes the “andlike” S-UGOWA operator and if $\beta = 0$, it becomes the “orlike” S-UGOWA operator. Note also that if $\alpha + \beta = 1$, the generalized S-UGOWA operator becomes the uncertain generalized Hurwicz criteria.

Remark 6. If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-UGOWA operator. Note that if $n = 3$ or $n = 4$, the olympic-UGOWA becomes the median-UGOWA and if $m = n - 2$ and $k = 2$, the window-UGOWA is transformed in the olympic-UGOWA.

Remark 7. Following the ideas of [14], it is also possible to develop the contrary case of the general olympic-UGOWA operator. In this case, $w_j = (1/2k)$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and $w_j = 0$, for all others, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, we get the contrary case of the median-UGOWA.

Remark 8. When $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-UGOWA operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Note also that if $m = k = 1$, the window-UGOWA becomes the uncertain maximum. If $m = 1$, $k = n$, it becomes the uncertain minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, it is transformed in the UGM.

Remark 9. Another interesting family is the nonmonotonic-UGOWA operator that follows the ideas of [35]. It is found when at least one of the weights w_j is lower than 0 and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Note that a key aspect of this operator is that it does not always accomplish the monotonicity property.

Remark 10. A further type of UGOWA operator is the centered-UGOWA operator. Following the same methodology as in the OWA operator[38], we could define an UGOWA operator as a centered aggregation operator if it is strongly decaying, symmetric and inclusive. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is inclusive if $w_j > 0$. Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$. We shall refer to this as softly decaying centered-UOWA operator. Note that the UGM is an example of this particular type of centered-UGOWA operator. Another particular situation of the centered-UGOWA operator appears if we remove the third condition obtaining a non-inclusive centered-UGOWA operator. For this case, we find the UGOWA median as a particular case.

Remark 11. Other families of UGOWA operators could be studied such as the Gaussian UGOWA weights, E-Z UGOWA weights, the maximal entropy UGOWA (MEUGOWA) operator, etc. Note that these families follow a similar methodology than the OWA version. Then, for further information on these families we recommend to see the methodology used in the OWA operator such as[1-8,11-19,21-25,32-35,38,40-43].

Analysing the parameter λ

If we analyze different values of the parameter λ, we obtain another group of particular cases such as the usual UOWA operator, the uncertain OWG (UOWG) operator, the uncertain OWHA (UOWHA) operator and the uncertain OWQA (UOWQA) operator.

Remark 12. When $\lambda = 1$, the UGOWA operator becomes the UOWA operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{23}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the UA and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the UWA. However, note also that the applicability and meaning of the UWA (weighted average) is different from the UOWA although it is possible to include it mathematically, as a particular case.

Remark 13. When $\lambda = 0$, the UGOWA operator becomes the UOWG operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \prod_{j=1}^{n} b_j^{\,w_j} \tag{24}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain geometric average (UGA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted geometric average (UWGA).

Remark 14. When $\lambda = -1$, we get the uncertain OWHA (UOWHA) operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2 \ldots, \tilde{a}_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{b_j}} \tag{25}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain harmonic average (UHA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted harmonic average (UWHA).

Remark 15. When $\lambda = 2$, we get the UOWQA operator.

$$UGOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^2\right)^{1/2} \tag{26}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all $\tilde{a}_i$, we get the uncertain quadratic average (UQA) and if the ordered position of b_j is the same than the position of $\tilde{a}_i$, we get the uncertain weighted quadratic average (UWQA).

Remark 16. Note that we could obtain other families by using different values in the parameter λ. Also note that it is possible to study these families individually. Then, we could develop for each case, a similar analysis as it has been developed in Section 3 and 4.1 where we study different properties and families of the uncertain aggregation operator such as the distinction between descending and ascending orders, etc.

5. The Quasi-UOWA Operator

As it is explained in[5], a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. The result is the Quasi-OWA operator[9]. Following the same methodology, we can suggest a similar generalization to the UGOWA operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization the Quasi-UOWA operator. It can be defined as follows.

Definition 4. Let Ω be the set of interval numbers. A Quasi-UOWA operator of dimension n is a mapping $QUOWA$: $\Omega^n \rightarrow \Omega$ that has an associated weighting vector W of dimension n with the following properties:

1) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$
2) $w_j \in [0,1]$

and such that:

$$Quasi\text{-}UOWA(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2\ldots, \tilde{a}_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{27}$$

where b_j is the jth largest of the $\tilde{a}_i$ and the arguments $\tilde{a}_i$ are interval numbers.

As we can see, we replace the b^λ of the UGOWA operator with a general continuous strictly monotone function $g(b)$. Note that in some situations it happens that we can only use positive numbers as the cases explained in the UGOWA when $\lambda \leq 0$.

Analyzing the reordering step, we also find that the weights of the ascending and descending versions are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the QDUOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the QAUOWA operator.

In this case, we also find the problem of the reordering process of the interval numbers. For simplicity, we recommend to follow the same method as it has been explained in Section 3 for the UGOWA operator.

Note that all the properties and particular cases commented in the UGOWA operator, are also included in this generalization. Then, we could analyze a wide range of families of Quasi-UOWA operators such as the Quasi-olympic-UOWA, the Quasi-S-UOWA, the Quasi-median-UOWA, etc.

Note also that the Quasi-UOWA operator includes a lot of other situations such as the exponential-UOWA, the radical-UOWA, etc.

An interesting case that can be used as a special type of Quasi-UOWA although it is a different aggregation operator is the uncertain weighted quasi-arithmetic average (Quasi-UWA). With this generalization, we can include a wide range of particular cases such as the UWGM. The Quasi-UWA operator is very useful in a wide range of applications such as in decision making problems where the decision maker wants to consider the subjective probability or the weighted average of the characteristics of the problem. Note that the definition of the Quasi-UWA operator is very similar to the Quasi-UOWA with the difference that it does not reorder the arguments in the aggregation process.

Another interesting issue to consider is the attitudinal character of the Quasi-UOWA operator. Following a similar methodology as it was used by Beliakov[5], we can formulate the following measure:

$$\alpha(W) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(\frac{n-j}{n-1}\right)\right) \tag{28}$$

In this case, we could also make a distinction between descending and ascending orders. It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$ and for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$. Note also that the entropy of dispersion, the divergence of W and the balance operator of the Quasi-UOWA have the same formulation than the UGOWA operator.

6. Application in Decision Making

In the following, we are going to develop an application of the new approach. There are a lot of applications that could be developed with the UGOWA. In summary, we could say that the UGOWA can be used in most of the problems where the simple average has been used. For example, it could be used in the following problems:

- Statistical problems.
- Decision making problems.
- Fuzzy set theory.
- Business applications.
- Etc.

In this paper, we will analyze a decision making problem where a company is studying which financial strategy is the most appropriate for them. As the environment is very uncertain the group of experts of the company needs to assess the available information with interval numbers. In this example, we will assume that the available information can be assessed with 3-tuples or triplets.

We will analyze the results obtained by using different types of uncertain aggregation operators in order to see that depending on the aggregation operator used the decision will be different. We will consider the maximum, the minimum, the uncertain average (UA), the uncertain geometric average (UGA), the uncertain quadratic average (UQA), the uncertain weighted average (UWA), the UOWA operator, the AUOWA operator, the UOWG operator and the UOWQA operator.

Assume a company is analyzing the financial policy for the next year and they consider 5 possible financial strategies to follow.

1) A_1: Financial strategy 1.
2) A_2: Financial strategy 2.
3) A_3: Financial strategy 3.

4) A_4: Financial strategy 4.
5) A_5: Financial strategy 5.

In order to evaluate these strategies, the group of experts considers that the key factor is the economic situation of the next year. Then, depending on the situation, the expected benefits for the company will be different. The experts have considered 6 possible situations for the next year: S_1 = Negative growth rate, S_2 = Growth rate near 0, S_3 = Low growth rate, S_4 = Medium growth rate, S_5 = High growth rate, S_6 = Very high growth rate. The expected results depending on the situation S_i and the alternative A_k are shown in Table 2.

Table 2. Uncertain payoff matrix

	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6
A_1	(30,40,50)	(60,70,80)	(50,60,90)	(20,25,40)	(30,50,60)	(60,70,80)
A_2	(20,30,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,50,60)	(70,80,90)
A_3	(30,40,50)	(60,70,80)	(30,40,50)	(30,40,50)	(50,60,70)	(70,80,90)
A_4	(60,70,80)	(30,40,50)	(50,60,70)	(50,60,70)	(20,30,40)	(30,40,50)
A_5	(40,50,60)	(50,60,70)	(30,40,50)	(40,50,60)	(40,50,60)	(40,70,80)

In this problem, the group of experts considers that the general attitudinal character of the company is given by the following weighting vector: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3).

With this information, we can aggregate it in order to take a decision. First, we will consider some basic aggregation operators such as the maximum, the minimum, the UA, the UGA and the UQA. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 1

	Max	*Min*	*UA*	*UGA*	*UQA*
A_1	(60,70,80)	(20,25,40)	(41.6,52.5,66.6)	(38.4,49.4,64.0)	(44.5,54.9,69.0)
A_2	(70,80,90)	(20,30,50)	(41.6,51.6,63.3)	(39.1,49.6,62.2)	(44.1,53.6,64.5)
A_3	(70,80,90)	(30,40,50)	(45,55,65)	(42.2,52.7,63.0)	(47.7,57.3,66.9)
A_4	(60,70,80)	(20,30,40)	(40,50,60)	(37.3,47.9,58.2)	(42.4,51.9,61.6)
A_5	(40,70,80)	(30,40,50)	(40,53.3,63.3)	(39.5,52.5,62.6)	(40.4,54.1,64.0)

As we can see, the decision is different depending on the aggregation used. If we use the UA, the UGA or the UQA, then the optimal financial strategy is A_3. If we use the maximum (or optimistic), both A_2 and A_3 are optimal solutions. And if we use the minimum (or pessimistic), the optimal financial strategies are A_3 and A_5.

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of UGOWA operators such as the UWA, the UOWA, the AUOWA, the UOWG and the UOWQA operator. The results are shown in Table 4.

Table 4. Aggregated results 2

	UWA	*UOWA*	*AUOWA*	*UOWG*	*UOWQA*
A_1	(42,53,66)	(35,45.5,59)	(48,58.5,73)	(32.1,42.3,56.5)	(38.0,48.4,61.5)
A_2	(47,57,68)	(37,47,60)	(47,57,68)	(34.3,44.9,59.1)	(39.6,49.0,60.9)
A_3	(49,59,69)	(39,49,59)	(52,62,72)	(36.8,47.2,57.4)	(41.5,51.0,60.7)
A_4	(37,47,57)	(34,44,54)	(46,56,66)	(31.5,42.0,52.4)	(36.6,46.0,55.6)
A_5	(40,56,66)	(38,50,60)	(41,57,67)	(37.5,49.2,59.3)	(38.4,50.7,60.6)

As we can see, in this case we also get different results depending on the operator used. If we use the UWA, the AUOWA or the UOWQA operator, then, the optimal choice is the financial strategy 3. And if we use the UOWA or the UOWG operator, then, the optimal decision is A_5.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. This becomes useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 5. Ordering of the financial strategies

	Ordering		*Ordering*
Max	$A_2=A_3\succ A_1=A_4\succ A_5$	*UWA*	$A_3\succ A_2\succ A_5\succ A_1\succ A_4$
Min	$A_3=A_5\succ A_2\succ A_4\succ A_1$	*UOWA*	$A_5\succ A_3\succ A_2\succ A_1\succ A_4$
UA	$A_3\succ A_1\succ A_5\succ A_2\succ A_4$	*AUOWA*	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_4\succ A_5$
UGA	$A_3\succ A_5\succ A_1\succ A_2\succ A_4$	*UOWG*	$A_5\succ A_3\succ A_2\succ A_1\succ A_4$
UQA	$A_3\succ A_1\succ A_2\succ A_5\succ A_4$	*UOWQA*	$A_3\succ A_5\succ A_2\succ A_1\succ A_4$

As we can see, depending on the aggregation used, the ordering of the financial strategies is different. Therefore, depending on the particular case used, the results may lead to different decisions.

7. Conclusions

We have presented the UGOWA operator. It is an aggregation operator that uses the main characteristics of the GOWA and the UOWA operator. Then, we can consider it as an extension of the OWA operator that uses generalized means and uncertain information represented in the form of interval numbers. This operator is very useful because it generalizes the GOWA operator for uncertain situations where it is not possible to use exact numbers. Moreover, it includes a lot of different types of uncertain aggregation operators such as the UGM, the UWGM, the GOWA, the UOWA, the UOWG and the UOWQA operator.

We have also introduced the Quasi-UOWA operator. It is a further generalization of the UGOWA operator by using quasi-arithmetic means. This generalization is more complete because it includes the UGOWA operator as a special type and a lot of other situations.

We have presented an application of the new approach in a decision making problem about selection of financial strategies. The main advantage of the UGOWA operator is that it is possible to consider a wide range of situations depending on the interests of the decision maker. Then, depending on the particular case used, the results and decisions may be different.

In future research, we expect to develop further generalizations by considering other situations in the GOWA operator and applying it to other decision making problems.

References

1. G.R. Amin, Note on a preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, *Information Sciences* **177** (2007) 3636-3638.
2. B.S. Ahn, The uncertain OWA aggregation with weighting functions having a constant level of orness, *International Journal of Intelligent Systems* **21** (2006) 469-483.
3. B.S. Ahn, The OWA aggregation with uncertain descriptions on weights and input arguments, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **15** (2007) 1130-1134.
4. B.S. Ahn and H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, *International Journal of Intelligent Systems* **23** (2008) 33-49.
5. G. Beliakov, Learning weights in the generalized OWA operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **4** (2005) 119-130.
6. G. Beliakov, A. Pradera and T. Calvo, *Aggregation Functions: A Guide for Practitioners*, (Springer-Verlag, Berlin, 2007).
7. T. Calvo, G. Mayor and R. Mesiar, *Aggregation Operators: New Trends and Applications*, (Physica-Verlag, New York, 2002).
8. F. Chiclana, F. Herrera and E. Herrera-Viedma, The ordered weighted geometric operator: Properties and application, in: *Proc. 8th International Conference on Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, Madrid, Spain, 2000, pp. 985-991.
9. J. Fodor, J.L. Marichal and M. Roubens, Characterization of the ordered weighted averaging operators, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **3** (1995) 236-240.
10. Y.C. Hu and J.F. Tsai, Fusing fuzzy association rule-based classifiers using Sugeno integrals with ordered weighted averaging operators, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **15** (2007) 717-735.
11. N. Karayiannis, Soft learning vector quantization and clustering algorithms based on ordered weighted aggregation operators, *IEEE Transactions on Neural Networks* **11** (2000) 1093-1105.
12. X. Liu, The solution equivalence of minimax disparity and minimum variance problems for OWA operators, *International Journal of Approximate Reasoning* **45** (2007) 68-81.
13. X. Liu and S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, *International Journal of Approximate Reasoning* **48** (2008) 77-97.
14. X. Liu, Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* (to be published).
15. J.M. Merigó and M. Casanovas, Using fuzzy numbers in heavy aggregation operators, *International Journal of Information Technology* **4** (2008) 177-182.
16. J.M. Merigó and M. Casanovas, Decision making with Dempster-Shafer theory of evidence using geometric operators, *International Journal of Computational Intelligence* **4** (2008) 261-268.
17. J.M. Merigó and A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, *Fuzzy Economic Review* **12** (2007) 35-50.
18. J.M. Merigó and A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operator in the Minkowski distance, *International Journal of Computer Science* **3** (2008) 149-157.
19. J.M. Merigó and A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, *Information Sciences* (to be published).
20. J.H. Wang and J. Hao, A new version of 2-tuple fuzzy linguistic representation model for computing with words, *IEEE Transactions on Fuzzy Systems* **14** (2006) 435-445.
21. X. Wang, Fuzzy number intuitionistic fuzzy arithmetic aggregation operators, *International Journal of Fuzzy Systems* **10** (2008) 104-111.
22. Y.M. Wang, Y. Luo and Z. Hua, Aggregating preference rankings using OWA operator weights, *Information Sciences* **177** (2007) 3356-3363.

23. Y.M. Wang and C. Parkan, A preemptive goal programming method for aggregating OWA operator weights in group decision making, *Information Sciences* **177** (2007) 1867-1877.
24. J. Wu, C.Y. Liang and Y.Q. Huang, An argument-dependent approach to determining OWA operator weights based on the rule of maximum entropy, *International Journal of Intelligent Systems* **22** (2007) 209-221.
25. Z.S. Xu, An overview of methods for determining OWA weights, *International Journal of Intelligent Systems* **20** (2005) 843-865.
26. Z.S. Xu, An approach based on the uncertain LOWG and induced uncertain LOWG operators to group decision making with uncertain multiplicative linguistic preference relations, *Decision Support Systems* **41** (2006) 488-499.
27. Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, *Information Fusion* **9** (2008) 310-316.
28. Z.S. Xu and Q.L. Da, The uncertain OWA operator, *International Journal of Intelligent Systems* **17** (2002) 569-575.
29. Z.S. Xu and Q.L. Da, An overview of operators for aggregating information, *International Journal of Intelligent Systems* **18** (2003) 953-969.
30. Z.S. Xu and Q.L. Da, Projection method for uncertain multi-attribute decision making with preference information on alternatives, *International Journal of Information Technology and Decision Making* **3** (2004) 429-434.
31. R.R. Yager, On ordered weighted averaging aggregation operators in multi-criteria decision making, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* **18** (1988) 183-190.
32. R.R. Yager, Families of OWA operators, *Fuzzy Sets and Systems* **59** (1993) 125-148.
33. R.R. Yager, On weighted median aggregation, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems* **2** (1994) 101-113.
34. R.R. Yager, Constrained OWA aggregation, *Fuzzy Sets and Systems* **81** (1996) 89-101.
35. R.R. Yager, Nonmonotonic OWA operators, *Soft Computing* **3** (1999) 187-196.
36. R.R. Yager, Heavy OWA operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **1** (2002) 379-397.
37. R.R. Yager, Generalized OWA aggregation operators, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **3** (2004) 93-107.
38. R.R. Yager, Centered OWA operators, *Soft Computing* **11** (2007) 631-639.
39. R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, *Information Sciences* **178** (2008) 363-380.
40. R.R. Yager and D.P. Filev, Parameterized andlike and orlike OWA operators, *International Journal of General Systems* **22** (1994) 297-316.
41. R.R. Yager and J. Kacprzyk, *The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications* (Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997).
42. M. Zarghami, F. Szidarovszky and R. Ardakanian, A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making, *Fuzzy Optimization and Decision Making* **7** (2008) 1-15.
43. M. Zarghami, F. Szidarovsky and R. Ardakanian, Sensitivity analysis of the OWA operator, *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B* **38** (2008) 547-553.
44. H. Dyckhoff and W. Pedrycz, Generalized means as a model of compensative connectives, *Fuzzy Sets and Systems* **14** (1984) 143-154.
45. R.E. Moore, *Interval Analysis*, (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966).

14.2.30. Artículo de revista 30. – Enviado a *Knowledge Based Systems*

A method for decision making with the OWA operator

José M. Merigó[18], Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We present a new method for decision making that uses the ordered weighted averaging (OWA) operator in the aggregation of the information. We use a concept that it is known in the literature as the index of maximum and minimum level (IMAM). This index is based on distance measures and other techniques that are useful for decision making. By using the OWA operator in the IMAM, we form a new aggregation operator that we call the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) operator. The main advantage is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes a wide range of special cases. Then, the decision maker may take decisions according to his degree of optimism and considering ideals in the decision process. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of strategies.

Keywords: Decision making; OWA operator; Aggregation operator; Index of maximum and minimum level; Selection of strategies

1. Introduction

The index of maximum and minimum (IMAM) level [11] is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance with some differences that makes it more complete. It includes the Hamming distance and the adequacy coefficient [14] in the same formulation. Since its appearance, it has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions and multicriteria decision making [10-11,17]. Often, we prefer to use the normalized IMAM (NIMAM) because we want an average result of all the individual comparisons. This type of index is also known as the weighted IMAM (WIMAM) when we prefer to give different degrees of importance to the individual comparisons instead of giving them the same importance.

Sometimes, when calculating the NIMAM, it would be interesting to consider the attitudinal character of the decision maker. A very useful technique for aggregating the information considering the attitudinal character of the decision maker is the ordered weighted averaging (OWA) operator [32]. The OWA operator is an aggregation operator that includes the maximum, the minimum and the average criteria, as special cases. It has been used in a wide range of applications [1-4,6,12,15-16,18-22,25-26,30,33-39].

[18] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

The aim of this paper is to present a new type of IMAM operator that uses the OWA operator in the aggregation process. We call this new aggregation operator, the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM) operator. The fundamental characteristic of this index is that it normalizes the IMAM with the OWA operator. Therefore, it is possible to develop a more general IMAM that includes the maximum, the minimum and the NIMAM, as special cases. The main advantage of the OWAIMAM is the possibility of over or under estimate the results of an aggregation in order to take a decision according to a certain degree of optimism. Then, in a decision making problem, the decision maker will be able to take decisions according to his degree of optimism. We study some of its main properties and different families of OWAIMAM operators.

We also develop an application of this new method in a business decision making problem. We apply it in the selection of strategies because this problem can be considered as a general one that includes a wide range of business situations. Note that other applications could be developed such as in human resource management, supplier selection, product management, etc. Note also that in this paper we follow the ideas of [8-11,14,17-19]. For further information on other decision making methods, refer, e.g., to [4-5,7,12-13,23-24,27-29,31,38-39].

This paper is organized as follows. In Section 2 we briefly describe some basic concepts such as the OWA operator and the IMAM. Section 3 presents the OWAIMAM operator and Section 4 analyzes some of its families. Section 5 develops an application of the new approach in the selection of strategies. Finally, in Section 6 we summarize the main findings of the paper.

2. Preliminaries

In this Section, we briefly review some basic concepts to be used throughout the paper such as the IMAM and the OWA operator.

2.1. The index of maximum and minimum level

The NIMAM [11] is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In decision making, it is very useful for comparing alternatives in different business decision making problems such as financial management, human resource management, product management, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets, etc. It is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance but with some differences that makes it more complete. Basically, we could define it as a measure that includes the Hamming distance and the adequacy coefficient [8-9,14] in the same formulation. For two sets P and P_j, it can be defined as follows.

Definition 1. A NIMAM of dimension n is a mapping K: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ such that:

$$\eta(P,P_j) = \frac{1}{u+v}\left[\sum_u \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)\right| + \sum_v \left(0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))\right)\right] \tag{1}$$

where μ_i and $\mu_i^{(j)}$ are the ith arguments of the sets P and P_j respectively, and $u + v = n$.

Sometimes, when normalizing the IMAM it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the WIMAM. It can be defined as follows.

Definition 2. A WIMAM of dimension n is a mapping K: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W of dimension n with the following properties:

1) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$
2) $w_j \in [0,1]$

and such that:

$$\eta(P,P_j) = \sum_{u} Z_i(u) \times \left| \mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u) \right| + \sum_{v} Z_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v)) \right] \quad (2)$$

where μ_i and $\mu_i^{(j)}$ are the ith arguments of the sets P and P_j respectively, and $u + v = n$.

2.2. OWA operator

The OWA operator [32] provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications. It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that:

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \quad (3)$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the descending OWA (DOWA) operator and the ascending OWA (AOWA) operator. Note that the weights of these two operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AOWA operator.

For further properties and applications on the OWA operator, refer, e.g., to [1-4,6,12,15-16,18-22,25-26,30,33-39].

3. The OWAIMAM operator

In this Section, we introduce the use of the OWA operator in the IMAM. We call it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). It can be defined as follows.

Definition 4. An OWAIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWAIMAM$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, such that:

$$OWAIMAM(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{4}$$

where K_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$.

Note that from a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between descending and ascending orders. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the descending OWAIMAM (DOWAIMAM) and w^*_{n-j+1} the jth weight of the ascending OWAIMAM (AOWAIMAM) operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the OWAIMAM can be expressed as:

$$OWAIMAM(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{5}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the OWAIMAM operator can be expressed as:

$$OWAIMAM(p_1, p_2 \ldots, p_n) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{6}$$

Analogously to the OWAIMAM operator, we can suggest a removal index that it is a dual of the OWAIMAM because $Q(P_k \rightarrow P) = 1 - K(P_k \rightarrow P)$. We will refer to it as the ordered weighted averaging dual index of maximum and minimum level (OWADIMAM). It is defined as follows.

Definition 5. An OWADIMAM operator of dimension n, is a mapping $OWADIMAM$: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, with $w_j \in [0,1]$ and the sum of the weights is equal to 1, then:

$$OWADIMAM(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j Q_j \tag{7}$$

where Q_j represents the jth largest of all the $[1 - |\mu_i - \mu_i^{(k)}|]$ and the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$; with $k = 1,2,\ldots,m$.

The final result will be a number between [0,1]. Note that in this case we usually select the lowest value as the best result.

In this case, we can also distinguish between the descending OWADIMAM (DOWADIMAM) and the ascending OWADIMAM (AOWADIMAM) operator.

Note also that the OWAIMAM operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be proved with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). Assume f is the OWAIMAM operator, if $p_i \geq q_i$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{8}$$

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{9}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{10}$$

Since $p_i \geq q_i$, for all i, it follows that, $K_j \geq Q_j$, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). Assume f is the OWAIMAM operator, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{11}$$

where $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is any permutation of the arguments $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{13}$$

Since $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is a permutation of $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, we have $K_j = Q_j$, for all j, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). Assume f is the OWAIMAM operator, if $p_i = p$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \tag{14}$$

Proof. Since $p_i = p$, for all p_i, we have

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j p^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(p^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \quad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). Assume f is the OWAIMAM operator, then:

$$\mathrm{Min}\{p_i\} \le f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \le \mathrm{Max}\{p_i\} \tag{16}$$

Proof. Let max$\{p_i\} = b$, and min$\{p_i\} = a$, then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \le \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(b^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{17}$$

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \ge \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{18}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \le b \tag{19}$$

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \ge a \tag{20}$$

Therefore,

$$\mathrm{Min}\{p_i\} \le f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \le \mathrm{Max}\{p_i\} \quad \blacksquare$$

A further interesting feature to consider in the OWAIMAM operator is the unification point with distance measures. As it has been presented in [17], the unification point between the IMAM and the Hamming distance appears when $\mu_i \ge \mu_i^{(k)}$ for all i. In the OWAIMAM operator, we find a similar situation with the difference that now the unification is with the ordered weighted averaging distance (OWAD) operator [19]. Then, we get the following.

Theorem 5. Assume OWAD(P,P_k) is the OWAD operator and OWADIMAM($P_k \rightarrow P$) the OWADIMAM operator. If $\mu_i \ge \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$\mathrm{OWAD}(P,P_k) = \mathrm{OWADIMAM}(P_k \rightarrow P) \tag{21}$$

Proof. Let

$$\text{OWAD}(P,P_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \, | \mu_i - \mu_i^{(k)} |^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{22}$$

$$\text{OWADIMAM}(P_k, P) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{23}$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$\text{OWADIMAM}(P_k \rightarrow P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{OWAD}(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

As we can see, the unification with the Hamming distance is found with the dual IMAM. As it has been explained in [17], it is possible to distinguish between different types of unifications depending on the problem analyzed such as partial and total unification point. The partial unification point appears if at least one of the alternatives but not all of them is in a situation of unification point and the total unification point appears if all the alternatives accomplish the conditions of the unification point. Note that it is straightforward to prove these unifications by looking to [17] and following Theorem 5.

Another interesting issue to analyze is the different measures used to characterize the weighting vector of the OWAIMAM operator. Based on the measures developed for the OWA operator in [32,35], they can be defined as follows. For the attitudinal character, we get the following:

$$\alpha(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right) \tag{24}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used. It can be defined as follows.

$$H(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{25}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

The divergence can be defined as follows.

$$Div(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{26}$$

Note that the divergence can also be formulated with an ascending order in a similar way as it has been shown in the attitudinal character.

4. Families of OWAIMAM operators

The OWAIMAM operator provides a parameterized family of aggregation operators. Therefore, it includes a wide range of special cases. In Table 1, we present some of these families of OWAIMAM operators.

Table 1
Families of OWAIMAM operators

Weighting vector W
• Maximum and Minimum
• NIMAM and WIMAM
• Olympic-OWAIMAM
• Window-OWAIMAM
• S-OWAIMAM (orlike, andlike and generalized)
• Centered-OWAIMAM
• BUM function – OWAIMAM
• Nonmonotonic-OWAIMAM
• Etc.

For more information on these and other families of OWAIMAM operators that are based on the OWA methodology, refer, e.g., to [1-3,6,15-16,18-20,25-26,33-34,36].

In the following, we briefly comment the main features of the families presented in Table 1.

Remark 1. The maximum is obtained if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$ and the minimum if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get, $OWAIMAM(a_1, a_2\ldots, a_n) = b_k$, where b_k is the kth largest argument a_i. The NIMAM is formed when $w_j = 1/n$, and $\omega_i = 1/n$, for all a_i. The WIMAM is obtained when $w_j = 1/n$, for all a_i. Note that the construction of the WIMAM from the OWAIMAM is artificial in the sense that it considers the importance of the attributes while the OWAIMAM focuses on the degree of optimism of the aggregation.

Remark 2. The olympic-OWAIMAM is found when $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$. Following the ideas of [15], it is possible to present a general form of the olympic-OWAIMAM considering that $w_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2k)$, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, this general form becomes the usual olympic-OWAIMAM. If $k = (n - 1)/2$, then, it becomes the median-OWAIMAM aggregation. That is, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others.

Remark 3. As it has been stated in [15] for the OWA operator, it is also possible to form the contrary case of the general olympic-OWAIMAM operator. This case is obtained when $w_j = (1/2k)$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and $w_j = 0$, for all others, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, we get the contrary case of the median-OWAIMAM.

Remark 4. Following the ideas of [33], we can form the window-OWAIMAM operator. It is obtained when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-OWAIMAM becomes the maximum and if $m = 1$, $k = n$, it becomes the minimum. And if $m = n$ and $k = 1$, it is obtained the NIMAM.

Remark 5. A further interesting family is the S-OWAIMAM operator based on [33]. It can be classified in three classes: the "orlike", the "andlike" and the generalized S-OWAIMAM operator. The generalized S-OWAIMAM operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-OWAIMAM operator becomes the "andlike" S-OWAIMAM operator and if $\beta = 0$, it becomes the "orlike" S-OWAIMAM operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the Hurwicz IMAM criteria.

Remark 6. Another family of aggregation operator that could be used is the centered-OWAIMAM operator. Following the same methodology than [36], we could define an OWAIMAM operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, inclusive and strongly decaying. It is symmetric if $w_j = w_{j+n-1}$. It is inclusive if $w_j > 0$. It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$. Note that it is possible to consider a softening of the third condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ and it is possible to remove the second condition.

Remark 7: Another interesting method for determining the OWAIMAM weights is the functional method [33]. It can be described as follows. Let f be a function f: $[0, 1] \rightarrow [0, 1]$ such that $f(0) = f(1)$ and $f(x) \geq f(y)$ for $x > y$. We call this function a basic unit interval monotonic function (BUM). Using this BUM function we form the OWAIMAM weights w_j for $j = 1$ to n as

$$w_j = f\left(\frac{j}{n}\right) - f\left(\frac{j-1}{n}\right) \tag{27}$$

It is easy to see that using this method, the w_j satisfy that the sum of the weights is 1 and $w_j \in [0,1]$.

Remark 8. Another interesting family is the nonmonotonic-OWAIMAM operator based on [34]. It is possible to form it when at least one of the weights w_j is lower than 0 and $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$. Note that a key aspect of this operator is that it does not always accomplish the monotonicity property. Then, this property could not be included in this special type of the OWAIMAM operator.

5. Numerical example

In the following, we are going to present an illustrative example where we will see the applicability of the new approach. We consider a decision making problem about selection of strategies. We use different types of OWAIMAM operators such as the NIMAM, the WIMAM, the OWAIMAM, the AOWAIMAM and the olympic-OWAIMAM. We also consider the dual results.

Assume an enterprise that operates in Europe and in North America is considering an expansion for the next year and they consider 5 strategies to follow.

- A_1: Expand to Asian market.
- A_2: Expand to the South American market.
- A_3: Expand to the African market.
- A_4: Expand to the3 continents.
- A_5: Do not develop any expansion.

In order to evaluate these strategies, the company has brought together a group of experts. They consider different characteristics about the strategies that can be summarized in the following ones: C_1 = Risk of the strategy; C_2 = Difficulty; C_3 = Benefits in the short term; C_4 = Benefits in the mid term; C_5 = Benefits in the long term; C_6 = Other characteristics.

The evaluation of these characteristics is developed by the experts. They summarize the results in Table 2 depending on the characteristic C_i and the alternative A_k. Note that values near 1 imply that the results are good and values near 0, bad.

Table 2: Expected results

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.6	0.8	0.7	0.7	0.9	0.7
A_2	0.5	0.8	0.7	0.8	0.7	0.8
A_3	0.7	0.7	0.8	0.6	0.7	0.7
A_4	0.5	0.8	0.6	0.8	0.7	0.9
A_5	0.6	0.7	0.8	0.7	0.7	0.7

The group of experts considers the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). In order to develop the analysis, the experts calculate the results that an ideal strategy should have. These results are shown in Table 3.

Table 3: Ideal investment

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.9	0.8	0.9	0.9	1	0.9

In this example, we assume that the group of experts considers the three first characteristics with the Hamming distance and the other three with the adequacy coefficient. The usefulness of the IMAM is that if we believe that the Hamming distance is a good method, we can use it, but if we believe that for some characteristics we need a more specific analysis, then, we can use the adequacy coefficient.

With this information, we can aggregate the expected results in order to obtain a representative result for each alternative. First, we consider the NIMAM, the WIMAM, the OWAIMAM, the AOWAIMAM and the olympic-OWAIMAM. Note that in the olympic-OWAIMAM, we consider $w_1 = w_6 = 0$, and for all others $w_j = 1/(n - 2)$. Then, in this case, we have: $w_2 = w_3 = w_4 = w_5 = 0.25$. The results are shown in Table 4.

Table 4: Aggregated results 1

	NIMAM	WIMAM	OWAIMAM	AOWAIMAM	olympic
A_1	0.166	0.17	0.13	0.2	0.175
A_2	0.183	0.17	0.13	0.24	0.175
A_3	0.2	0.22	0.17	0.23	0.2
A_4	0.183	0.15	0.12	0.25	0.175
A_5	0.2	0.21	0.17	0.23	0.2

Now, we are going to consider the results obtained by using the OWADIMAM operator. Obviously, the results obtained are the dual of the previous ones. The results are shown in Table 5.

Table 5: Aggregated results 2

	NDIMAM	WDIMAM	OWADIMAM	AOWADIMAM	olympic
A_1	0.833	0.83	0.87	0.8	0.825
A_2	0.816	0.83	0.87	0.76	0.825
A_3	0.8	0.78	0.83	0.77	0.8
A_4	0.816	0.85	0.88	0.75	0.825
A_5	0.8	0.79	0.83	0.77	0.8

As we can see, depending on the aggregation operator used the results are different. A_1 is optimal with the NIMAM, the OWAIMAM and the olympic-OWAIMAM. A_2 with the olympic-OWAIMAM. And A_4 is the optimal choice with the WIMAM and the OWAIMAM. Obviously, the same results are found with the dual indexes.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. Note that this is useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 6.

Table 6: Ordering of the investments

	Ordering		Ordering
NIMAM	$A_1 \succ A_2=A_4 \succ A_3=A_5$	NDIMAM	$A_1 \succ A_2=A_4 \succ A_3=A_5$
WIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_5 \succ A_3$	WDIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_5 \succ A_3$
OWAIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_3=A_5$	OWADIMAM	$A_4 \succ A_1=A_2 \succ A_3=A_5$
AOWAIMAM	$A_1 \succ A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$	AOWADIMAM	$A_1 \succ A_3=A_5 \succ A_2 \succ A_4$
olympic	$A_1=A_2=A_4 \succ A_3=A_5$	olympic	$A_1=A_2=A_4 \succ A_3=A_5$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the strategies is different. Then, these results may lead to different decisions.

7. Conclusions

We have analyzed the use of the OWA operator in the index of maximum and minimum level. As a result, we have obtained a new aggregation operator: the OWAIMAM operator. This operator is very useful because it provides a parameterized family of aggregation operators in the IMAM operator that includes the maximum, the minimum and the average. The main advantage of the OWAIMAM, is that we can manipulate the neutrality of the aggregation so the decision maker can be more or less optimistic according to his interests. We have studied some of its main properties.

We have applied the new approach in a decision making problem about selection of strategies. We have seen that sometimes, depending on the particular type of OWAIMAM operator used, the results are different. Then, the decisions of the decision maker may be also different.

In future research, we expect to develop further extensions of the OWAIMAM operator by adding new characteristics in the problem such as the use of order inducing variables and applying it to other decision making problems such as product management and investment selection.

References

[1] B.S. Ahn, Preference relation approach for obtaining OWA operator weights, International Journal of Approximate Reasoning 47 (2008) 166-178.

[2] B.S. Ahn, H. Park, Least-squared ordered weighted averaging operator weights, International Journal of Intelligent Systems 23 (2008) 33-49.

[3] G. Beliakov, A. Pradera, T. Calvo, Aggregation Functions: A guide for practitioners, (Springer-Verlag, Berlin, 2007).

[4] L. Canós, V. Liern, Soft computing-based aggregation methods for human resource management, European Journal of Operational Research 189 (2008) 669-681.

[5] T.Y. Chen, C.Y. Tsao, The interval-valued fuzzy TOPSIS method and experimental analysis, Fuzzy Sets and Systems 159 (2008) 1410-1428.

[6] A. Emrouznejad, MP-OWA: The most preferred OWA operator, Knowledge-Based Systems, (2008), doi:10.1016/j.knosys.2008.03.057.

[7] J. Figueira, S. Greco, M. Ehrgott, Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys, (Springer, Boston, 2005).

[8] J. Gil-Aluja, The interactive management of human resources in uncertainty, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1998).

[9] A.M. Gil-Lafuente, Fuzzy logic in financial analysis, (Springer, Berlin, 2005).

[10] A.M. Gil-Lafuente, J.M. Merigó, Acquisition of financial products that adapt to different environments, Lectures on Modelling and Simulation 2 (2006) 42-48.

[11] J. Gil-Lafuente, The index of maximum and minimum level in the selection of players in sport management (In Spanish), Proceedings of the 10th International Conference of the European Academy of Management and Business Economics (AEDEM), Reggio Calabria, Italy, pp.439-443, 2001.

[12] E. Herrera-Viedma, S. Alonso, F. Chiclana, F. Herrera, A consensus model for group decision making with incomplete fuzzy preference relations, IEEE Transactions on Fuzzy Systems 15 (2007) 863-877.

[13] C.L. Hwang, K. Yoon, Multiple Attribute Decision Making: Methods and Applications, (Springer-Verlag, Berlin, 1981).

[14] A. Kaufmann, J. Gil-Aluja, Introduction to the theory of fuzzy subsets in business management (In Spanish), (Milladoiro, Santiago de Compostela, Spain, 1986).

[15] X. Liu, Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method, IEEE Transactions on Fuzzy Systems, (2008), to be published.

[16] X. Liu, S. Han, Orness and parameterized RIM quantifier aggregation with OWA operators: A summary, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 77-97.

[17] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 13 (2007) 35-50.
[18] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, On the use of the OWA operator in the Euclidean distance, International Journal of Computer Science and Engineering 2 (2008) 170-176.
[19] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, Using the OWA operator in the Minkowski distance, International Journal of Computer Science 3 (2008) 149-157.
[20] J.M. Merigó, A.M. Gil-Lafuente, The induced generalized OWA operator, Information Sciences, (2008), to be published.
[21] J. Vanicek, I. Vrana, S. Aly, Fuzzy aggregation and averaging for group decision making: A generalization and survey, Knowledge-Based Systems, (2008), doi:10.1016/j.knosys.2008.07.002.
[22] X. Wang, Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Arithmetic Aggregation Operators, International Journal of Fuzzy Systems 10 (2008) 104-111.
[23] G.W. Wei, Maximizing deviation method for multiple attribute decision making in intuitionistic fuzzy setting, Knowledge-Based Systems, (2008), doi: 10.1016/j.knosys.2008.03.038.
[24] Y.J. Xu, Q.L. Da, A method for multiple attribute decision making with incomplete weight information under uncertain linguistic environment, Knowledge-Based Systems (2008), doi:10.1016/j.knosys.2008.03.034.
[25] Z.S. Xu, An Overview of Methods for Determining OWA Weights, International Journal of Intelligent Systems 20 (2005) 843-865.
[26] Z.S. Xu, Dependent uncertain ordered weighted averaging operators, Information Fusion 9 (2008) 310-316.
[27] Z.S. Xu, On multi-period multi-attribute decision making, Knowledge-Based Systems 21 (2008) 164-171.
[28] Z.S. Xu, Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations, Information Sciences 178 (2008) 452-467.
[29] Z.S. Xu, J. Chen, An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets, International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 16 (2008) 529-555.
[30] Z.S. Xu, Q.L. Da, An Overview of Operators for Aggregating Information, International Journal of Intelligent Systems 18 (2003) 953-969.
[31] Z.S. Xu, R.R. Yager, Dynamic intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making, International Journal of Approximate Reasoning 48 (2008) 246-262.
[32] R.R. Yager, On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making, IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 18 (1988) 183-190.
[33] R.R. Yager, Families of OWA operators, Fuzzy Sets and Systems 59 (1993) 125-148.
[34] R.R. Yager, Nonmonotonic OWA operators, Soft Computing 3 (1999) 187-196.
[35] R.R. Yager, Heavy OWA operators, Fuzzy Optimization and Decision Making 1 (2002) 379-397.
[36] R.R. Yager, Centered OWA operators, Soft Computing 11 (2007) 631-639.
[37] R.R. Yager, Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation, Information Sciences 178 (2008) 363-380.
[38] R.R. Yager, J. Kacprzyk, The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications, (Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, 1997).

[39] M. Zarghami, F. Szidarovszky, R. Ardakanian, A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making, Fuzzy Optimization and Decision Making 7 (2008) 11-15.

14.2.31. Artículo de revista 31. – Enviado a *European Journal of Operational Research*

A general method for decision making based on generalized OWA operators

José M. Merigó[19], Anna M. Gil-Lafuente
Department of Business Administration, University of Barcelona,
Av. Diagonal 690, 08034 Barcelona, Spain

Abstract

We present a new method for decision making based on generalized ordered weighted averaging (OWA) operators. We use a concept that it is known in the literature as the index of maximum and minimum level (IMAM). This index uses distance measures and other techniques that are useful for decision making. In this paper, we suggest a generalization by using generalized and quasi-arithmetic means. As a result, we will get the generalized ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (GOWAIMAM) and the Quasi-OWAIMAAM operator. The main advantage is that it provides a parameterized family of aggregation operators that includes a wide range of special cases such as the generalized IMAM and the OWAIMAM. Then, the decision maker may take decisions according to his degree of optimism and considering ideals in the decision process. We also develop an application of the new approach in a decision making problem about selection of products.

Keywords: Decision analysis; OWA operator; aggregation operator; selection of products.

1. Introduction

The index of maximum and minimum (IMAM) level (J. Gil-Lafuente, 2001) is a very useful technique, specially for decision making, that provides similar results than the Hamming distance with some differences that makes it more complete. It includes the Hamming distance and the adequacy coefficient (Kaufmann and Gil-Aluja, 1986) in the same formulation. Since its appearance, it has been used in a wide range of applications such as fuzzy set theory, business decisions, multicriteria decision making, etc. (J. Gil-Lafuente, 2001). Note that in the literature, there are a wide range of decision making methods, refer, e.g., to (Canós and Liern, 2008; Chen and Tsao, 2008; Chiclana et al., 2007; Figueira et al., 2005; Gil-Aluja, 1998; 1999; 2001; A.M. Gil-Lafuente, 2005; Herrera et al., 2003; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008d; Wu, 2009; Y.J. Xu and Da, 2008; Xu, 2008b; 2008c; 2008d; Xu and Yager, 2008; Yager and Kacprzyk, 1997; Zarghami and Szidarovsky, 2008; Zarghami et al., 2008).

A very common aggregation method is the ordered weighted averaging (OWA) operator (Yager, 1988). It provides a parameterized family of aggregation operators that

[19] Corresponding author: Tel: +34 93 402 19 62; Fax: +34 93 403 98 82.
Email addresses: jmerigo@ub.edu, amgil@ub.edu

includes the maximum, the minimum and the average, as special cases. Since its appearance, the OWA operator has been studied by different authors (Beliakov, 2005; Beliakov et al., 2007; Calvo et al., 2002; Chiclana et al., 2007; Emrouznejad, 2008; Fodor, 1995; Herrera et al., 2003; Karayiannis, 2000; Liu, 2008a; 2008b; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008a; 2008b; 2008c; 2008d; 2008e; Wang, 2008; Xu, 2005; 2008a; Yager, 1992; 1993; 1996; 2002; 2004; 2007; 2008; Yager and Kacprzyk, 1997; Zarghami and Szidarovsky, 2008; Zarghami et al., 2008). An interesting generalization of the OWA operator is the generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) that uses generalized means (Dyckhoff and Pedrycz, 1984) in the aggregation process. Then, we can obtain a wide range of mean operators such as the generalized mean, the weighted generalized mean, the OWA operator, the ordered weighted geometric (OWG) operator, etc. The GOWA operator can be further generalized by using quasi-arithmetic means (Beliakov, 2005). The result is the Quasi-OWA operator (Fodor et al., 1995). For further developments on the GOWA and the Quasi-OWA operator, refer, e.g., to (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008c; 2008d).

Recently, Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2008e) have suggested the use of the OWA operator in the IMAM. They have called it the ordered weighted averaging index of maximum and minimum level (OWAIMAM). Going a step further, in this paper we suggest a generalization of the OWAIMAM by using generalized and quasi-arithmetic means. The result is the generalized OWAIMAM (GOWAIMAM) and the quasi-arithmetic OWAIMAM (Quasi-OWAIMAM). The main advantage of these operators is that they include a wide range of mean operators such as the normalized IMAM (NIMAM), the weighted IMAM (WIMAM), the OWAIMAM, the generalized IMAM (GIMAM), etc. We study some of their main properties and different families of GOWAIMAM operators.

We also present an application of the new approach in a decision making problem about the selection of products. We focus on the selection of products from a general point of view in order to illustrate an example that it is applicable to different products such as apartments, cars, technological products, etc. With the GOWAIMAM, we are able to evaluate different situations and results depending on the particular case used in the decision process. Then, the decision maker may take different decisions depending on the particular type of GOWAIMAM operator used.

In order to do so, this paper is organized as follows. In Section 2, we briefly describe some basic concepts about the IMAM, the OWA and the GOWA operator. In Section 3 we present the GOWAIMAM operator and in Section 4 we study different particular cases. Section 5 introduces the Quasi-OWAIMAM operator and Section 6 develops an application of the OWAIMAM in a decision making problem. Finally, in Section 7 we summarize the main conclusions of the paper.

2. Aggregation operators

In this Section, we briefly review some basic concepts to be used throughout the paper such as the IMAM, the OWA and the GOWA operator.

2.1. Index of maximum and minimum level

The NIMAM (J. Gil-Lafuente, 2001) is an index used for calculating the differences between two elements, two sets, etc. In fuzzy set theory, it can be useful, for example, for the calculation of distances between fuzzy sets, interval-valued fuzzy sets, intuitionistic fuzzy sets and interval-valued intuitionistic fuzzy sets. It is a very useful technique that provides similar results than the Hamming distance but with some differences that makes it more complete. Basically, we could define it as a measure that includes the Hamming distance and the adequacy coefficient (Gil-Aluja, 1998; A.M. Gil-Lafuente, 2005; Kaufmann and Gil-Aluja, 1986) in the same formulation. For two sets P and P_j, it can be defined as follows.

Definition 1. A NIMAM of dimension n is a mapping K: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ such that:

$$\eta(P,P_j) = \frac{1}{u+v}\left[\sum_u \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)\right| + \sum_v \left(0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))\right)\right] \tag{1}$$

where μ_i and $\mu_i^{(j)}$ are the ith arguments of the sets P and P_j, and $u + v = n$.

Sometimes, when normalizing the IMAM it is better to give different weights to each individual element. Then, the index is known as the WIMAM. It can be defined as follows.

Definition 2. A WIMAM of dimension n is a mapping K: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W of dimension n such that the sum of the weights is 1 and $w_i \in [0,1]$. Then:

$$\eta(P,P_j) = \sum_u w_i(u) \times \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(j)}(u)\right| + \sum_v w_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(j)}(v))\right] \tag{2}$$

where μ_i and $\mu_i^{(j)}$ are the ith arguments of the sets P and P_j, and $u + v = n$.

2.2. OWA operator

The OWA operator (Yager, 1988) provides a parameterized family of aggregation operators which have been used in many applications (Calvo et al, 2002; Merigó, 2007; Xu, 2005; Yager, 1992; 1993; Yager and Kacprzyk, 1997). It can be defined as follows.

Definition 3. An OWA operator of dimension n is a mapping OWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

1) $w_j \in [0, 1]$
2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{OWA}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j b_j \tag{3}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

From a generalized perspective of the reordering step we can distinguish between the Descending OWA (DOWA) operator and the Ascending OWA (AOWA) operator (Yager, 1992).

The OWA operator is a mean or averaging operator. This is a reflection of the fact that the operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. By choosing a different manifestation of the weighting vector, we are able to obtain different types of aggregation operators such as the maximum, the minimum, the average and the weighted average (Yager, 1988). For more information on other families of OWA operators, refer, e.g., to (Ahn and Park, 2008; Emrouznejad, 2008; Liu, 2008a; 2008b; Xu, 2005; Yager, 1993; 2007; Yager and Kacprzyk, 1997).

2.3. GOWA operator

The generalized OWA (GOWA) operator (Karayiannis, 2000; Yager, 2004) is an aggregation operator that generalizes a wide range of mean operators such as the OWA operator with its particular cases, the ordered weighted geometric (OWG) operator (Herrera et al., 2003), the ordered weighted harmonic averaging (OWHA) operator and the ordered weighted quadratic averaging (OWQA) operator. It can be defined as follows.

Definition 4. A GOWA operator of dimension n is a mapping GOWA: $R^n \rightarrow R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{GOWA}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{4}$$

where b_j is the jth largest of the a_i, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

In this case, it is also possible to distinguish between descending (DGOWA) and ascending (AGOWA) orders. The weights are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWA and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWA operator.

As it is demonstrated in (Yager, 2004), the GOWA operator is also commutative, monotonic, bounded and idempotent. It can also be demonstrated that the GOWA operator has as special cases the maximum, the minimum, the generalized mean and weighted generalized mean. Other families of GOWA operators are found in (Beliakov, 2005; Beliakov et al., 2007; Karayiannis, 2000; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008d; Yager, 2004).

If we look to different values of the parameter λ, we can also obtain other special cases as the usual OWA operator ($\lambda = 1$), the OWG operator ($\lambda = 0$), the OWHA operator ($\lambda = -1$) and the OWQA operator ($\lambda = 2$).

Note that if we replace b^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(b)$, then, the GOWA operator becomes the Quasi-OWA operator. It can be formulated as follows.

Definition 5. A Quasi-OWA operator of dimension n is a mapping QOWA: $R^n \to R$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{QOWA}(a_1, a_2,\ldots, a_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(b_{(j)}\right)\right) \tag{5}$$

where b_j is the jth largest of the a_i.

3. Generalized index of maximum and minimum level

It is possible to generalize the IMAM by using generalized means. Then, the result is the generalized index of maximum and minimum level (GIMAM). Going a step further, it is also possible to use the weighted generalized mean, obtaining the weighted generalized index of maximum and minimum level (WGIMAM). It can be defined as follows.

Definition 6. A WGIMAM operator of dimension n is a mapping WGIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \to [0, 1]$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

WGIMAM(P_k, P) =

$$= \left(\sum_{u} w_i(u) \times \left|\mu_i(u) - \mu_i^{(k)}(u)\right|^{\lambda} + \sum_{v} w_i(v) \times \left[0 \vee (\mu_i(v) - \mu_i^{(k)}(v))\right]^{\lambda}\right)^{1/\lambda} \tag{6}$$

where μ_i and μ_i^k are the ith arguments of the sets P_k and P, $u + v = n$, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

As we can see, if $w_i = 1/n$, we get the GIMAM operator. Note that if we look to the parameter λ, we also find a wide range of mean operators. For example, if $\lambda = 1$, we get the weighted IMAM (WIMAM), and if $\lambda = 2$, we get the weighted quadratic averaging IMAM (WQAIMAM).

Going a step further, it is possible to present a wider generalization of the WGIMAM operator by using the OWA operator. Then, we get the following.

Definition 7. A GOWAIMAM operator of dimension n is a mapping GOWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{7}$$

where K_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; $k = 1,2,\ldots,m$; and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

From a generalized perspective of the reordering step, it is possible to distinguish between the descending generalized OWAIMAM (DGOWAIMAM) operator and the ascending generalized OWAIMAM (AGOWAIMAM) operator. The weights of these operators are related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAIMAM operator.

Analogously to the GOWAIMAM operator, we can suggest an equivalent removal index that it is a dual of the GOWAIMAM because $Q(P_k, P) = 1 - K(P_k, P)$. We will call it the generalized ordered weighted averaging dual IMAM (GOWADIMAM). It can be defined as follows.

Definition 8. A GOWADIMAM operator of dimension n, is a mapping GOWADIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W, having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{GOWADIMAM}(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{8}$$

where Q_j represents the jth largest of all the $[1 - |\mu_i - \mu_i^{(k)}|]$ and the $[1 \wedge (1 - \mu_i + \mu_i^{(k)})]$; and $k = 1,2,\ldots,m$, and λ is a parameter such that $\lambda \in (-\infty, \infty)$.

In this case, we can also distinguish between the descending GOWADIMAM (DGOWADIMAM) and the ascending GOWADIMAM (AGOWADIMAM) operator.

If K is a vector corresponding to the ordered arguments K_j, we shall call this the ordered argument vector, and W^T is the transpose of the weighting vector, then the GOWAIMAM aggregation can be expressed as:

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = W^T K \tag{9}$$

Note that if the weighting vector is not normalized, i.e., $W = \sum_{j=1}^{n} w_j \neq 1$, then, the GOWAIMAM operator can be expressed as:

$$GOWAIMAM(p_1, p_2 \ldots, p_n) = \frac{1}{W} \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{10}$$

Note also that the GOWAIMAM operator is commutative, monotonic, bounded and idempotent. These properties can be demonstrated with the following theorems.

Theorem 1 (Monotonicity). Assume f is the GOWAIMAM operator, if $p_i \geq q_i$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{11}$$

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{12}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{13}$$

Since $p_i \geq q_i$, for all i, it follows that, $p_i \geq q_i$, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 2 (Commutativity). Assume f is the GOWAIMAM operator, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \tag{14}$$

where $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is any permutation of the arguments $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$.

Proof. Let

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{15}$$

$$f(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{16}$$

Since $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ is a permutation of $(q_1, q_2, \ldots, q_n)$, we have $p_j = q_j$, for all j, and then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = f(q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad \blacksquare$$

Theorem 3 (Idempotency). Assume f is the GOWAIMAM operator, if $p_i = p$, for all p_i, then:

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \tag{17}$$

Proof. Since $p_i = p$, for all p_i, we have

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j p^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(p^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{18}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = p \qquad \blacksquare$$

Theorem 4 (Bounded). Assume f is the GOWAIMAM operator, then:

$$\text{Min}\{p_i\} \leq f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq \text{Max}\{p_i\} \tag{19}$$

Proof. Let max$\{p_i\} = b$, and min$\{p_i\} = a$, then

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \leq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j b^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(b^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{20}$$

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \geq \left(\sum_{j=1}^{n} w_j a^{\lambda} \right)^{1/\lambda} = \left(a^{\lambda} \sum_{j=1}^{n} w_j \right)^{1/\lambda} \tag{21}$$

Since $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$, we get

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq b \tag{22}$$

$$f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \geq a \tag{23}$$

Therefore,

$$\text{Min}\{p_i\} \leq f(p_1, p_2, \ldots, p_n) \leq \text{Max}\{p_i\} \qquad \blacksquare$$

A further interesting problem to consider in the GOWAIMAM operator is the unification point with distance measures. As it was explained in Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2007), the unification point between the IMAM and the Hamming distance appears when $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i. In the GOWAIMAM operator, we find a similar situation with the difference that now the unification is with the Minkowski distance or with the Minkowski ordered weighted averaging distance (MOWAD) operator (Karayiannis, 2000; Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008b). Then, we get the following.

Theorem 5. Assume MOWAD(P,P_k) is the MOWAD operator and GOWADIMAM(P_k, P) the GOWADIMAM operator. If $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, then:

$$\text{MOWAD}(P, P_k) = \text{GOWADIMAM}(P_k, P) \tag{24}$$

Proof. Let

$$\text{MOWAD}(P, P_k) = \sum_{j=1}^{n} w_j \,|\, \mu_i - \mu_i^{(k)} \,| \tag{25}$$

$$\text{GOWADIMAM}(P_k, P) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j Q_j^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{26}$$

Since $\mu_i \geq \mu_i^{(k)}$ for all i, $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})] = (\mu_i - \mu_i^{(k)})$ for all i, then

$$\text{GOWADIMAM}(P_k, P) = \sum_{j=1}^{n} w_j (\mu_i - \mu_i^{(k)}) = \text{MOWAD}(P,P_k) \qquad \blacksquare$$

As we can see, the unification appears with the dual IMAM. As it was explained in Merigó and A.M. Gil-Lafuente (2007), it is possible to distinguish between different types of unifications depending on the situation found such as partial or total unification point. The partial unification point appears if at least one of the alternatives but not all of them enters in a situation of unification point. The total unification point appears if all the alternatives are in a situation of unification point. Note that it is straightforward to prove these unifications by looking to (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2007) and following Theorem 5.

Note that this unification has been studied with the general case, but it is also possible to consider different particular cases by giving different values to the parameter λ. For example, if $\lambda = 1$, we form the unification found with the IMAM and the Hamming distance. If $\lambda = 2$, we get the unification with the quadratic IMAM and the Euclidean distance.

Another interesting issue to analyze is the different measures used for characterizing the weighting vector of the GOWAIMAM operator. Based on the measures developed for the OWA operator by Yager (1988; 1996; 2002) and for the GOWA (Yager, 2004), they can be defined as follows. The attitudinal character can be formulated as follows.

$$\alpha(W) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} \right)^{\lambda} \right)^{1/\lambda} \tag{27}$$

It can be shown that $\alpha \in [0, 1]$. Note that for the optimistic criteria $\alpha(W) = 1$, for the pessimistic criteria $\alpha(W) = 0$, and for the average criteria $\alpha(W) = 0.5$.

The dispersion is a measure that provides the type of information being used (Yager, 1988). It is defined as follows.

$$\mathrm{H}(W) = -\sum_{j=1}^{n} w_j \ln(w_j) \tag{28}$$

For example, if $w_j = 1$ for some j, then $H(W) = 0$, and the least amount of information is used. If $w_j = 1/n$ for all j, then, the amount of information used is maximum.

Another interesting measure is the divergence of W (Yager, 2002). It can be defined as follows.

$$\mathrm{Div}(W) = \sum_{j=1}^{n} w_j \left(\frac{n-j}{n-1} - \alpha(W) \right)^2 \tag{29}$$

A further interesting measure that could be used is the balance of W (Yager, 1996b). It is formulated as follows.

$$\mathrm{Bal}(W) = \sum_{j=1}^{n} \frac{(n+1-2j)}{n-1} w_j \tag{30}$$

Note that it is also possible to use ascending orders in these measures by using $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the DGOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the AGOWAIMAM operator.

4. Families of GOWAIMAM operators

In this Section, we analyze different particular cases of the GOWAIMAM operator. We distinguish between two main classes. The first family refers to the different particular cases found in the parameter λ and the second family to the cases found in the weighting vector.

4.1. Analysing the parameter λ

By looking to the parameter λ, we find a wide range of mean operators such as the OWAIMAM, the OWGIMAM, the OWQAIMAM, etc. Note that they can use a descending or an ascending order.

Remark 1. When λ = 1, the GOWAIMAM operator becomes the OWAIMAM operator.

$$\mathrm{GOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = \sum_{j=1}^{n} w_j K_j \tag{31}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized IMAM (NIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted IMAM (WIMAM). Note that the WIMAM operator may have different meanings because usually it is used to aggregate the importance of the characteristics but not to the attitudinal character.

Remark 2. When λ = 0, we form the OWGIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \prod_{j=1}^{n} K_j^{\,w_j} \tag{32}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized geometric IMAM (NGIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted geometric IMAM (WGIMAM).

Remark 3. When λ = –1, we get the OWHAIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} \frac{w_j}{K_j}} \tag{33}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized harmonic IMAM (NHIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted harmonic IMAM (WHIMAM).

Remark 4. When λ = 2, we form the OWQAIMAM operator.

$$\text{GOWAIMAM}(p_1, p_2,\ldots, p_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} w_j K_j^2\right)^{1/2} \tag{34}$$

Note that if $w_j = 1/n$, for all i, we get the normalized quadratic IMAM (NQIMAM) and if the ordered position of j is the same than the position of i, we get the weighted quadratic IMAM (WQIMAM).

4.2. Analysing the weighting vector W

By using a different manifestation in the weighting vector of the GOWAIMAM operator, we are able to obtain different types of aggregation operators. For example, it is possible to obtain the maximum, the minimum, the GIMAM and the WGIMAM operator.

Remark 5. The maximum is found if $w_1 = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq 1$. The minimum, if $w_n = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq n$. More generally, if $w_k = 1$ and $w_j = 0$, for all $j \neq k$, we get for any λ, GOWAIMAM($p_1, p_2,\ldots, p_n$) = K_h, where K_h is the hth largest argument of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$. This case is known as the step-GOWAIMAM operator. The GIMAM is found when $w_j = 1/n$, for all a_i and the WGIMAM when the ordered position of i is the same than j.

Remark 6. Following a similar methodology as it has been developed in (Merigó and A.M. Gil-Lafuente, 2008d; 2008e; Xu, 2005; Yager, 1993; 2007), we could study other particular cases of the GOWAIMAM operator such as the window-GOWAIMAM, the olympic-GOWAIMAM, the median-GOWAIMAM, the centered-GOWAIMAM operator, the S-GOWAIMAM operator, etc.

Remark 7. For example, when $w_{j*} = 1/m$ for $k \leq j* \leq k + m - 1$ and $w_{j*} = 0$ for $j* > k + m$ and $j* < k$, we are using the window-GOWAIMAM operator. Note that k and m must be positive integers such that $k + m - 1 \leq n$. Also note that if $m = k = 1$, the window-GOWAIMAM becomes the maximum and if $m = 1$, $k = n$, the minimum. If $m = n$ and $k = 1$, the window-GOWAIMAM is transformed in the GIMAM.

Remark 8. If $w_1 = w_n = 0$, and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2)$, we are using the olympic-GOWAIMAM. Following the ideas of (Liu, 2008b), it is possible to present a general form of the olympic-GOWAIMAM considering that $w_j = 0$ for $j = 1, 2, \ldots, k, n, n - 1, \ldots, n - k + 1$; and for all others $w_{j*} = 1/(n - 2k)$, where $k < n/2$. Note that if $k = 1$, then, this general form becomes the usual olympic-OWAIMAM.

Remark 9. Note that the median and the weighted median can also be used as GOWAIMAM operators. For the median-GOWAIMAM, if n is odd we assign $w_{(n + 1)/2} = 1$ and $w_{j*} = 0$ for all others. If n is even we assign, for example, $w_{n/2} = w_{(n/2) + 1} = 0.5$ and $w_{j*} = 0$ for all others. For the weighted median-GOWAIMAM, we select the argument K_h that has the hth largest argument such that the sum of the weights from 1 to k is equal or higher than 0.5 and the sum of the weights from 1 to $k - 1$ is less than 0.5.

Remark 10. Another interesting family is the S-GOWAIMAM operator based on the S-OWA operator (Yager, 1993). It can be divided in three classes: the “orlike”, the “andlike” and the generalized S-GOWAIMAM operator. The generalized S-GOWAIMAM operator is obtained when $w_1 = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \alpha$, $w_n = (1/n)(1 - (\alpha + \beta)) + \beta$, and $w_j = (1/n)(1 - (\alpha + \beta))$ for $j = 2$ to $n - 1$ where $\alpha, \beta \in [0, 1]$ and $\alpha + \beta \leq 1$. Note that if $\alpha = 0$, the generalized S-GOWAIMAM operator becomes the “andlike” S-GOWAIMAM operator and if $\beta = 0$, it becomes the “orlike” S-GOWAIMAM operator. Also note that if $\alpha + \beta = 1$, we get the generalized Hurwicz criteria.

Remark 11. A further family of aggregation operator that could be used is the centered-GOWAIMAM operator, that it is based on the OWA version (Yager, 2007). We can define a GOWAIMAM operator as a centered aggregation operator if it is symmetric, strongly decaying and inclusive.

- It is symmetric if $w_j = w_{j + n - 1}$.
- It is strongly decaying when $i < j \leq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$ and when $i > j \geq (n + 1)/2$ then $w_i < w_j$.
- It is inclusive if $w_j > 0$.

Note that it is possible to consider a softening of the second condition by using $w_i \leq w_j$ instead of $w_i < w_j$ (softly decaying centered-GOWAIMAM operator). Another particular situation of the centered-GOWAIMAM operator appears if we remove the third condition (non-inclusive centered-GOWAIMAM operator).

5. Quasi-OWAIMAM operator

As it was explained in (Beliakov, 2005), a further generalization of the GOWA operator is possible by using quasi-arithmetic means. Following the same methodology than (Fodor et al., 1995), we can suggest a similar generalization for the GOWAIMAM operator by using quasi-arithmetic means. We will call this generalization, the Quasi-OWAIMAM operator. It can be defined as follows.

Definition 9. A Quasi-OWAIMAM operator of dimension n is a mapping QOWAIMAM: $[0, 1]^n \times [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$ that has an associated weighting vector W of dimension n having the properties:

(1) $w_j \in [0, 1]$
(2) $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$

and such that

$$\text{QOWAIMAM}(p_1, p_2, \ldots, p_n) = g^{-1}\left(\sum_{j=1}^{n} w_j g\left(K_{(j)}\right)\right) \tag{35}$$

where K_j represents the jth largest of all the $|\mu_i - \mu_i^{(k)}|$ and the $[0 \vee (\mu_i - \mu_i^{(k)})]$; $k = 1,2,\ldots,m$.

As we can see, we replace K^{λ} with a general continuous strictly monotone function $g(K)$.

In this case, the weights of the ascending and descending versions are also related by $w_j = w^*_{n-j+1}$, where w_j is the jth weight of the Quasi-DOWAIMAM and w^*_{n-j+1} the jth weight of the Quasi-AOWAIMAM operator.

Note that it is also possible to suggest an equivalent removal index that it is a dual of the Quasi-OWAIMAM because $Q(P_k, P) = 1 - K(P_k, P)$. We will call it the Quasi-OWADIMAM.

Also note that all the properties and particular cases commented in the GOWAIMAM operator are also applicable in the Quasi-OWAIMAM operator. For example, if $w_j = 1/n$, for all a_i, then, we get the Quasi-NIMAM operator, and if the ordered position of i is the same than j, then, we get the Quasi-WIMAM.

6. Illustrative example

In the following, we are going to develop an illustrative example where we will see the applicability of the new approach. We are going to consider a decision making problem about selection of products. We use different types of GOWAIMAM operators such as the NIMAM, the QIMAM, the WIMAM, the WQIMAM, the OWAIMAM, the AOWAIMAM, the OWQAIMAM, the step-OWAIMAM, the olympic-OWAIMAM, the median-OWAIMAM, etc.

Assume a person wants to buy a product and he considers 5 possible alternatives to follow.

- A_1: Product A.

- A_2: Product *B*.
- A_3: Product *C*.
- A_4: Product *D*.
- A_5: Product *E*.

In order to evaluate these products the decision maker considers different general characteristics about the products that can be summarized in 6 characteristics: C_1 = Prize, C_2 = Usefulness, C_3 = Quality, C_4 = Image, C_5 = Value, C_6 = Other variables.

The decision maker evaluates these characteristics, that can be summarized in Table 1 depending on the characteristic C_i and the alternative A_k. Note that values near 1 imply that the results are good and values near 0, bad.

Table 1. Expected results

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
A_1	0.7	0.6	0.9	0.9	0.7	0.7
A_2	0.8	0.4	0.7	0.6	0.8	0.9
A_3	0.6	0.7	0.7	0.8	0.9	0.7
A_4	0.5	0.8	0.8	0.8	0.6	0.9
A_5	0.7	0.8	0.9	1	0.8	0.4

The decision maker considers the following weighting vector for all the cases: W = (0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.2, 0.3). Note that this weighting vector reflects the attitudinal character of the decision maker when using the OWA operator. In order to develop the analysis, the decision maker calculates the results that the ideal product should have. The results of the ideal product are shown in Table 2.

Table 2. Ideal product

	C_1	C_2	C_3	C_4	C_5	C_6
Ideal	0.8	0.9	1	0.8	1	0.8

In this example, we will assume that the decision maker considers the three first characteristics with the Hamming distance and the other three with the adequacy coefficient. The usefulness of the IMAM is that if we believe that the Hamming distance is a good method we can use it, but if we believe that for some characteristics we need a more specific analysis, then, we can use the adequacy coefficient.

With this information, we can aggregate the expected results in order to obtain a representative result for each alternative. First, we are going to consider the NIMAM, the QIMAM, the WIMAM, the WQIMAM and the OWAIMAM operator. The results are shown in Table 3.

Table 3. Aggregated results 1

	NIMAM	QIMAM	WIMAM	WQIMAM	OWAIMAM
A_1	0.85	0.857	0.86	0.867	0.81
A_2	0.8	0.818	0.84	0.854	0.73
A_3	0.85	0.855	0.88	0.884	0.81
A_4	0.83	0.846	0.86	0.875	0.77
A_5	0.85	0.859	0.81	0.824	0.8

Now, we are going to consider the results obtained by using other particular cases of the GOWAIMAM operator such as the AOWAIMAM, the OWQAIMAM, the step-OWAIMAM (k=2), the median-OWAIMAM and the olympic-OWAIMAM operator. The results are shown in Table 4.

Table 4. Aggregated results 2

	AOWAIMAM	OWQAIMAM	step	median	olympic
A_1	0.89	0.817	0.9	0.9	0.85
A_2	0.86	0.751	1	0.8	0.825
A_3	0.89	0.815	0.9	0.85	0.85
A_4	0.89	0.784	1	0.85	0.85
A_5	0.89	0.812	0.9	0.9	0.875

As we can see, depending on the aggregation operator used the results are different. A_1 is optimal with the NAC, the OWAAC, the AOWAAC, the OWQAAC and the median-OWAAC. A_2 is optimal only with the step-OWAAC. A_3 with the NAC, the WAC, the WQAC, the OWAAC and the AOWAAC. A_4 with the AOWAAC and the step-OWAAC. Finally, A_5 is optimal with the NAC, the QAC, the AOWAAC, the median-OWAAC and the olympic-OWAAC.

Another interesting issue is to establish an ordering of the alternatives. Note that this is useful when we want to consider more than one alternative. The results are shown in Table 5. Note that $\succ$ means preferred to.

Table 5. Ordering of the products

	Ordering		Ordering
NIMAM	$A_1=A_3=A_5 \succ A_2=A_4$	AOWAIMAM	$A_1=A_3=A_4=A_5 \succ A_2$
QIMAM	$A_5 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_4 \succ A_2$	OWQAIMAM	$A_1 \succ A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$
WIMAM	$A_3 \succ A_1=A_4 \succ A_2 \succ A_5$	Step	$A_2=A_4 \succ A_1 \succ A_3 \succ A_5$
WQIMAM	$A_3 \succ A_4 \succ A_1 \succ A_2 \succ A_5$	Median	$A_1=A_5 \succ A_3=A_4 \succ A_2$
OWAIMAM	$A_1=A_3 \succ A_5 \succ A_4 \succ A_2$	Olympic	$A_5 \succ A_1=A_3=A_4 \succ A_2$

As we can see, depending on the aggregation operator used, the ordering of the products is different. Then, these results may lead to different decisions.

7. Conclusions

We have presented the GOWAIMAM operator. It is a generalization of the OWAIMAM operator by using generalized means. The main advantage of this aggregation operator is that it includes a wide range of mean operators such as the OWAIMAM, the NGIMAM, the WGIMAM, the IMAM and the OWQAIMAM. Therefore, with this generalization, we can consider a wide range of results depending on the particular case used in the aggregation process of the GOWAIMAM. We have further generalized the GOWAIMAM by using quasi-arithmetic means. As a result we have obtained the Quasi-OWAIMAM operator.

We have also presented an illustrative example of the new approach in a decision making problem about selection of products. We have seen that depending on the particular type of GOWAIMAM operator used, the results are different and they may lead to different decisions. With this formulation, the decision maker is able to consider a wide range of methods for decision making and he will select the one that it is in accordance with his interests.

In future research, we expect to develop further extensions of the GOWAIMAM operator by adding new characteristics in the problem such as the use of inducing orders and applying it to other decision making problems such as investment selection and human resource management.

References

Ahn BS, Park H. Least-squared ordered weighted averaging operator weights. International Journal of Intelligent Systems 2008;23; 33-49.

Beliakov G. Learning Weights in the Generalized OWA Operators. Fuzzy Optimization and Decision Making 2005;4; 119-130.

Beliakov G, Pradera A, Calvo T. Aggregation Functions: A guide for practitioners. Springer-Verlag: Berlin; 2007.

Calvo T, Mayor G, Mesiar R. Aggregation Operators: New Trends and Applications. Physica-Verlag: New York; 2002.

Canós L, Liern V. Soft computing-based aggregation methods for human resource management. European Journal of Operational Research 2008;189; 669-681.

Chen TY, Tsao CY. The interval-valued fuzzy TOPSIS method and experimental analysis. Fuzzy Sets and Systems 2008;159; 1410-1428.

Chiclana F, Herrera-Viedma E, Herrera F, Alonso S. Some induced ordered weighted averaging operators and their use for solving group decision-making problems based on fuzzy preference relations. European Journal of Operational Research 2007;182; 383-399.

Dyckhoff H, Pedrycz W. Generalized means as model of compensative connectives. Fuzzy Sets and Systems 1984;14; 143-154.

Emrouznejad A. MP-OWA: The most preferred OWA operator. Knowledge-Based Systems 2008; doi:10.1016/j.knosys.2008.03.057.

Figueira J, Greco S, Ehrgott M. Multiple criteria decision analysis: state of the art surveys. Springer: Boston; 2005.

Fodor J, Marichal JL, Roubens M. Characterization of the ordered weighted averaging operators. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 1995;3; 236-240.

Gil-Aluja J. The interactive management of human resources in uncertainty. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht; 1998.

Gil-Aluja J. Elements for a theory of decision in uncertainty. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht; 1999.

Gil-Aluja J. Handbook of management under uncertainty. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht; 2001.

Gil-Lafuente AM. Fuzzy logic in financial analysis. Springer: Berlin; 2005.

Gil-Lafuente J. El "índice del máximo y mínimo nivel" en la optimización del fichaje de un deportista. X Congreso Internacional de la Asociación Europea de Dirección y Economía de la Empresa (AEDEM), Reggio Calabria, Italia, 2001, p. 439-443.

Herrera F, Herrera-Viedma E, Chiclana F. A study of the origin and uses of the ordered weighted geometric operator in multicriteria decision making. International Journal of Intelligent Systems 2003;18; 689-707.

Karayiannis N. Soft Learning Vector Quantization and Clustering Algorithms Based on Ordered Weighted Aggregation Operators. IEEE Transactions on Neural Networks 2000;11; 1093-1105.

Kaufmann A, Gil-Aluja J. Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas (In Spanish). Ed. Milladoiro: Santiago de Compostela; 1986.
Liu X. A general model of parameterized OWA aggregation with given orness level. International Journal of Approximate Reasoning 2008a;48; 598-627.
Liu X. Parameterized OWA operator determination with optimization criteria: A general method. IEEE Transactions on Fuzzy Systems 2008b; to be published.
Merigó JM, Gil-Lafuente AM. Unification point in methods for the selection of financial products, Fuzzy Economic Review 2007;12; 35-50.
Merigó JM, Gil-Lafuente AM. On the use of the OWA operator in the Euclidean distance. International Journal of Computer Science and Engineering 2008a;2; 170-176.
Merigó JM, Gil-Lafuente AM. Using the OWA operator in the Minkowski distance. International Journal of Computer Science 2008b;3; 149-157.
Merigó JM, Gil-Lafuente AM. The induced generalized OWA operator. Information Sciences 2008c; to be published.
Merigó JM, Gil-Lafuente AM. The generalized adequacy coefficient, Fuzzy Economic Review 2008d;13; to be published.
Merigó JM, Gil-Lafuente AM. A method for decision making with the OWA operator, Knowledge-Based Systems 2008e; submitted for publication.
Wang X. Fuzzy Number Intuitionistic Fuzzy Arithmetic Aggregation Operators. International Journal of Fuzzy Systems 2008;10; 104-111.
Wu CW. Decision-making in testing process performance with fuzzy data. European Journal of Operational Research 2009;193; 499-509.
Xu YJ, Da QL. A method for multiple attribute decision making with incomplete weight information under uncertain linguistic environment. Knowledge-Based Systems 2008; doi:10.1016/j.knosys.2008.03.034.
Xu ZS. An Overview of Methods for Determining OWA Weights. International Journal of Intelligent Systems 2005;20; 843-865.
Xu ZS. Dependent uncertain ordered weighted averaging operators. Information Fusion 2008a;9; 310-316.
Xu ZS. On multi-period multi-attribute decision making. Knowledge-Based Systems 2008b;21; 164-171.
Xu ZS. Group decision making based on multiple types of linguistic preference relations. Information Sciences 2008c;178; 452-467.
Xu ZS, Chen J. An overview of distance and similarity measures of intuitionistic fuzzy sets. International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems 2008d;16; 529-555.
Xu ZS, Yager RR. Dynamic intuitionistic fuzzy multi-attribute decision making, International Journal of Approximate Reasoning 2008;48; 246-262.
Yager RR. On Ordered Weighted Averaging Aggregation Operators in Multi-Criteria Decision Making. IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics B 1988;18; 183-190.
Yager RR. On generalized measures of realization in uncertain environments. Theory and Decision 1992;33; 41-69.
Yager RR. Families of OWA operators. Fuzzy Sets and Systems 1993;59; 125-148.
Yager RR. Constrained OWA Aggregation. Fuzzy Sets and Systems 1996;81; 89-101.
Yager RR. Heavy OWA Operators. Fuzzy Optimization and Decision Making 2002;1; 379-397.
Yager RR. Generalized OWA Aggregation Operators. Fuzzy Optimization and Decision Making 2004;3; 93-107.

Yager RR. Centered OWA operators. Soft Computing 2007;11; 631-639.
Yager RR. Using trapezoids for representing granular objects: Applications to learning and OWA aggregation. Information Sciences 2008;178; 363-380.
Yager RR, Kacprzyk J. The Ordered Weighted Averaging Operators: Theory and Applications. Kluwer Academic Publishers: Norwell, MA; 1997.
Zarghami M, Szidarovszky F. Revising the OWA operator for fuzzy stochastic multi criteria decision making. European Journal of Operational Research 2008; doi: 10.1016/j.ejor.2008.09.014.
Zarghami M, Szidarovszky F, Ardakanian R. A fuzzy-stochastic OWA model for robust multi-criteria decision making. Fuzzy Optimization and Decision Making 2008;7; 11-15.