PARTE V

CONCLUSIONES

"*No debemos pensar que éste es un aprendizaje matemático, ya que la habilidad para escribir cifras no tiene nada que ver con la capacidad para comprender su valor y utilizarlos correctamente. Asimismo, la incapacidad para escribir un número no debe confundirse con la incapacidad para comprender las matemáticas.*" (Castro, Rico y Castro)

Comenzábamos esta tesis diciendo que todas las personas somos capaces de hacer matemáticas y utilizarlas en nuestras vidas. Para Hempel (1969) las matemáticas son un "sistema deductivo axiomatizado". A lo largo de estas páginas hemos visto que las "matemáticas" son un entramado de conocimientos más complejo. Niss (1995), por ejemplo, distingue cuatro tipos de "matemática".[303] Bishop (1999), por su parte, las define como un proceso cultural. Newman y otros (1969) hablan de las matemáticas desde un punto de vista exclusivamente lógico-formal. Nosotros por nuestra parte nos hemos propuesto acercarnos a esta disciplina desde cuatro puntos de vista diferentes, a fin de aprehender la globalidad del concepto. Al hacerlo así, enseguida percibimos que se trata de un campo de conocimiento bien acotado desde el punto de vista instrumental, al que podemos aproximarnos de diversas maneras, que dependen, como dice Bishop (1999), de la cultura y el entorno societal.

Como también decíamos en la presentación, las matemáticas están rodeadas de mitos y falsas creencias, que en parte se han construido a propósito por personas que querían hacer de esta disciplina un símbolo de distinción. Niss (1995) se refiere a alguno de esos mitos (la invisibilidad, por ejemplo) y Bishop (2000) los denuncia.

Al comenzar esta tesis pensábamos que entre la idea académica de "matemáticas" y las matemáticas "de la vida real" existía una gran brecha, de manera que nada tenían que ver las unas con las otras. Nuestro objetivo era mostrar cómo se manifiesta esta brecha, para ver de qué manera afecta en la educación de personas adultas. Pretendíamos mostrar, desde el punto de vista cognitivo, cómo saben utilizar las matemáticas las personas, para tenerlo en cuenta a la hora de planificar un currículum académico, por ejemplo. Por eso, nos centramos en el ejemplo de las proporciones (escogido por las personas adultas con las que hemos trabajado), de gran valor para la educación matemática. Así, hemos utilizado las trayectorias cognitivas de aprendizaje para ver cómo podemos mejorar la enseñanza de las matemáticas y lograr encontrar vías para transformar los mitos que existen en torno a esta disciplina científica.

[303] Ver el apartado "Matemáticas y vida cotidiana" en el capítulo correspondiente.

Conclusiones sobre la primera hipótesis

En la primera hipótesis decíamos que "**Existe una brecha entre las matemáticas de la vida real y las matemáticas académicas. Esta brecha se manifiesta de diferentes formas.**"

- Ahora, después de estos años de trabajo, podemos decir que realmente existe tal brecha. Creemos que a lo largo de estas páginas hemos corroborado la primera de nuestras hipótesis. Y no sólo ha sido así únicamente mediante el análisis de la abundante bibliografía que existe sobre el tema. Así, podemos recordar aquí los trabajos de Nunes, por ejemplo, por lo que respecta a la *street mathematics*.[304] El análisis de las entrevistas, de la tertulia y de la sesión de actividades con las personas participantes también nos ofrece múltiples ejemplos de ello, como el comentario de "G", cuando dice que "*las matemáticas que hacemos las mujeres, no las hacéis vosotros los matemáticos...*".[305] ¿A qué se refiere esta persona? Se refiere a que, para ella, los números significan pagar recibos, comprar el billete del autobus, calcular lo que le queda para final de mes, etc., pero eso no lo ve ella como matemáticas (o, por lo menos, no son las matemáticas que se encuentra en los libros de "matemáticas"). Para esta persona no existe una identificación de esos "conocimientos de la vida cotidiana" como matemáticas (lo cual parece ser un ejemplo de la "paradoja de la invisibilidad" de la que habla Niss, 1995). Al principio de la investigación, las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* de la escuela decían que las matemáticas consistían en aplicar el *m.c.m.* para resolver una ecuación, por ejemplo, o resolver un problema de paréntesis. Cuando hablan de "matemáticas", se refieren siempre a las matemáticas académicas.[306]

[304] Ver Carraher, Carraher & Schliemann, 1982, 1985; Nunes, Schliemann & Carraher, 1993.
[305] Ver cita del apartado "la práctica de ejercicios" en el capítulo 15.
[306] Se trata de una idea descontextualizada de las matemáticas, que es heredera del movimiento de "renovación" de la matemática moderna.

A lo largo de los capítulos anteriores se citan multitud de ejemplos que lo corroboran: el hecho de resolver una tabla, el preguntar salteado, las respuestas a multitud de ejercicios que aparecen a lo largo de las citas, etc.[307] Son éstas las matemáticas que ellas consideran difíciles. Alguna de las mujeres, incluso cuando respondía a las preguntas de la entrevista, era completamente consciente de la existencia de tal brecha, por ejemplo la persona A, que después de explicar cómo resuelve los ejercicios, más tarde dice que no los entiende, en el sentido de que no les encuentra el sentido ni la utilidad.

- Por otro lado, otra idea importante que ha quedado clara durante el trabajo de campo es que, por lo general, las mujeres del grupo de matemáticas prefieren éste método de cálculo (el "hacer las cuentas de cabeza") antes que utilizar las posibilidades que les ofrecen para ello los ordenadores.

  Como hemos mostrado en el segundo capítulo de la cuarta parte esto se debe, en gran medida, al desconocimiento del medio tecnológico. Éste es uno de los elementos cruciales que explican el no utilizar de manera generalizada los ordenadores, sino sólo para acceder al enunciado de los problemas. Utilizar los ordenadores como herramienta requiere una cierta "predisposición", es decir, unas ciertas habilidades que podríamos denominar "uso de tecnologías como herramientas" para resolver situaciones problemáticas. Y es algo a lo que las personas del grupo no están habituadas, porque las tecnologías no han sido algo "normal" en sus vidas. Este es un ejemplo fehaciente de nueva desigualdad en la sociedad de la información, de la que habla Eco (1993).

- La mujeres del grupo de matemáticas utilizan estrategias que nos recuerdan ejemplos de resolución de problemas que están ampliamente documentados en el caso de la educación infantil. Así, por ejemplo, el agrupar las cantidades cuando se opera con ellas en vez de utilizar el método aritmético (Gravemeijer, 1997).

[307] Ver las citas qua aparecen en la parte correspondiente al análisis del trabajo de campo.

Por ello, pensamos que es adecuada la idea de ir de lo concreto a lo abstracto (desde el punto de vista teórico) y que está situada en la perspectiva de la "educación matemática realista" (*realistic mathematics education*). Esta idea parte de la fenomenología de Freudenthal (1983).[308] En matemáticas el último nivel de conceptualización es el de la formalización a través de la vía de la axiomática. Freudenthal (1983) dice que es un error pensar la didáctica desde la generalización: es un error querer enseñar directamente las matemáticas como conjuntos de axiomas que se rigen por una serie de leyes y de principios.[309]

- Nos parece adecuado que el trabajo se contextualice. Sin embargo, como las mujeres del grupo tienen cárácterísticas heterogéneas (es decir, no tienen una historia o una profesión común, como por ejemplo en Hoyles, Noss, Pozzy, 2001), no es fácil decir que un ejemplo de actividad contextualizada es mejor que otro.

- Como se puede ver, nosotros hemos podido comprobar que las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* saben resolver por métodos aritméticos y geométricos las situaciones de proporcionalidad. Ellas optan por recurrir a métodos intuitivos, más relacionados con el sentido común que al análisis formal del problema. Aspecto que no es, en absoluto, algo negativo, sino al contrario. Como dice Davis (1995), "*la cultura subyacente no tiene que ser despreciada*"[310]: implica tanto las estrategias intuitivas como el lenguaje lógico-formal.

[308] Aunque ya encontramos referencias en la obra de Piaget, por ejemplo.
[309] Lo que propone Freudenthal (1983) es la reinvención de las matemáticas, es decir, dice que en la clase lo que hay que hacer es ir descubriendo las ideas matemáticas. Para ello crea modelos a partir de situaciones de la vida cotidiana. Se llama *matematización*. Lo que hace es quitar todos aquellos aspectos que pueden despistar del contenido matemático y poner situaciones que provoquen aprendizaje de las ideas matemáticas.
[310] "*The surrounding culture cannot be neglected. Mathematics is taught, studied, applied, discovered, created, elaborated a discussed using a mixture of common and specialized languages and symbolic techniques.*" (Davis, 1995: 36).

- Durante la clase hemos visto la combinación de ambos niveles de trabajo: cualitativo y cuantitativo en el tratamiento de la proporcionalidad. Schliemann y Carraher (2002) dicen que lo que prima en el caso de los adultos son los métodos de resolución de problemas basados en la experiencia de la vida cotidiana, pero cuando un problema se "sale" de esa "experiencia previa" las personas adultas, entonces, lo que hacen es demandar procedimientos más formales.[311] Nosotros hemos podido ver algo parecido a lo largo del trabajo de campo. Un ejemplo claro es la resolución de las actividades 6 y 7. En el primer caso, las mujeres lo que hicieron fue jugar con los puntos de referencia (la profesora o ellas mismas), para responder si las alturas de la profesora y de la puerta en algún momento llegaban a ser "iguales". En cambio, en el segundo caso, el de las dos hojas de papel, como no resultó ser un ejemplo habitual para la mayor parte de las mujeres del grupo, al final aplicaron el método aritmético para ver si los folios eran proporcionales siguiendo las indicaciones de la profesora. Lo que no aparece es ningún intento de formalización, que queda relegado al ámbito de la matemática profesional.

- Por otro lado, otro de los elementos que hemos podido constatar a través del análisis de las entrevistas, la tertulia y la sesión práctica ha sido la existencia de diversas formas de resolver las actividades. Siguiendo la actividad 6, sobre la comparación de las alturas (relativas) de la profesora y de la puerta, durante la resolución de la actividad aparecieron 3 estrategias diferentes para afrontar el problema. [312] Ahora bien, a la luz de los datos recogidos, no podemos decir si las personas adultas prefieren unos procedimientos de resolución más "visuales" o más "notacionales".

[311] "*These results suggest that everyday situations can ''prime'' reasoning in novel contexts. The fisherman had experience with ratios between quantities of processed versus unprocessed seafood and the cooks had experience with quantities involved in recipes. Those experiences seem to allow them to recognize that problems involving such relations can be solved through the same computation procedures they use for prices. But when subjects had no prior experience with the context, as was the case of medicine formula in the cooks study, they did not assume that the amounts in the problem should involve the same relationships.*" (Schliemann and Carraher, 2002: 252).

[312] Ver el capítulo 15.

Lo cierto es que las personas adultas del *Grupo de matemáticas dialógicas* recurren a ambos tipos de procedimientos de resolución de problemas.

Conclusiones sobre la segunda hipótesis

La segunda de las hipótesis que propusimos a la hora de hacer esta tesis era que "**La distancia entre las matemáticas de la vida real y las matemáticas académicas genera actitudes negativas que dificultan el aprendizaje de las matemáticas**."

- Contamos con varias evidencias de que esta hipótesis se cumple y ejemplo de ello son los comentarios que alguna de las mujeres del grupo hacía al encontrase con actividades que no sabía resolver. Vemos, a veces, en las trascripciones que las personas adultas dicen "no servir para las matemáticas" o que "son muy difíciles". Estos comentarios coinciden con las aportaciones de otras investigaciones en el terreno de la educación matemática de personas adultas y las emociones. Evans (2002), por ejemplo, muestra el caso de una mujer, Fiona, que vive las matemáticas con un sentimiento de "ansiedad".[313] Ingleton y O'Regan (2002), a su vez, muestran ejemplos de personas que han tenido experiencias negativas con las matemáticas, aspecto éste que les ha generado un profundo rechazo hacia ellas.[314]

- El papel del "tutor" en este aspecto es crucial. El efecto del etiquetaje y las "bajas expectativas" desaniman a las personas adultas y eso constituye una barrera clara que dificulta, cuando no impide, el acceso al conocimiento matemático.[315] Nosotros vemos algo parecido en el recuerdo que tienen las

[313] "*I always had difficulty with that, I didn't enjoy it at all. School wasn't a particularly happy time for me anyway, so you might well find that a lot of my answers are negative...*" (Evans, 2002: 86). En este estudio, Evans lo que hace es analizar el discurso desde dos puntos de vista: hace un análisis estructural y un análisis textual. A través de ambas perspectivas ve las interrelaciones entre la actitud hacia las matemáticas dentro del aula y elementos como las prácticas laborales de los padres (referencia a la clase social), el entorno familiar en el que está inscrita la persona, etc.
[314] Ingleton, O'Regan, 2002.
[315] "*Why should he be so nervous in this learning situation? The tutor's judgement of his ability is unequivocal: 'he had no idea... it would be impossible for him to pass... ther is not much hope.'*

mujeres del grupo de las matemáticas que hicieron en la escuela. A menudo, los adjetivos que se utilizan para referirse a ellas tienen un matiz negativo. Ingleton y O'Regan (2002) describen en su trabajo varias "actitudes" frente a las matemáticas, como el rechazo y la baja autoestima. Nosotros hemos visto que la "baja autoestima" es uno de los aspectos que produce situaciones de bloqueo ante los problemas de matemáticas. No obstante estos problemas por otra parte cuando aparecen contextualizados las personas son capaces de resolverlos perfectamente, como es el caso de una actividad sobre el uso de las potencias[316] donde la persona comprende perfectamente la idea de multiplicar varias veces el mismo número. Sin embargo, durante el diálogo aparecen una y otra vez sus bajas expectativas que las conducen a buscar que el profesor les conteste la pregunta.

- En cambio, la solidaridad y las "altas expectativas" tienen efectos totalmente contrarios: transforman las situaciones problemáticas en posibilidades de aprendizaje y de adquisición de nuevos conceptos, así como ideas y estrategias matemáticas de resolución de problemas.

- Así pues, constatamos lo acertado del esquema de las dos líneas de Ingleton y O'Regan (2002), porque hemos encontrado numerosos ejemplos que lo confirman. La primera línea es: orgullo – solidaridad – confianza – disposición al aprendizaje. La segunda línea es: vergüenza – alienación – miedo – indisposición al aprendizaje. Ambas líneas dependen de las relaciones sociales que se establecen dentro del aula.

The tutor's negative judgement is reinforced by another student's easy handling of the problem." (Ingleton, O'Regan, 2002: 98).

[316] Ver anexo.

Conclusiones sobre la tercera hipótesis

La tercera de las hipótesis que marcamos al inicio de este estudio era que "**Las personas utilizan formas de aprendizaje basadas en el diálogo igualitario para aprender el concepto matemático de proporciones.**" Esta hipótesis parte de una concepción del aprendizaje muy concreta: el aprendizaje dialógico.[317] Una concepción del aprendizaje que es, ante todo, social. No se puede entender el aprendizaje como un proceso individual, desligado del contexto donde se produce.[318]

- Uno de los elementos más destacados del aprendizaje dialógico, cuya importancia hemos señalado a lo largo del trabajo de campo, es la "creación de sentido".[319] Ya vimos que "sentido matemático" y "creación de sentido" son dos ideas que nada tienen que ver entre sí.[320] A lo largo del trabajo de campo se puede observar cómo las personas del grupo de matemáticas responden de manera más segura a las actividades que les resultan "familiares" que a las que no lo son.

- A lo largo de la investigación aparecen múltiples casos de la importancia de la experiencia previa (como fuente de sentido) en la resolución de las diferentes actividades sobre proporciones. El análisis de las respuestas que

[317] Flecha, 1997, 2000.
[318] El aprendizaje dialógico es "social" en otro sentido. No sólo es igualitario e intersubjetivo, porque supera la polémica de si es conveniente dejar a las personas participantes a su libre albedrío, para que descubran las matemáticas por sí solas (cuando si alguien no sabe algo, es muy difícil que llegue a descubrirlo, como está históricamente demostrado). Lo que tenemos que hacer es aprovechar el conocimiento que han descubierto otros y, como decía Newton, "caminar a hombros de gigantes". Para eso es importante que cada cual aporte su conocimiento y que la búsqueda del conocimiento sea una búsqueda social, compartida y creada entre varias personas, no individualmente, porque el conocimiento es social. De la misma manera, el aprendizaje también es social, es la apropiación individual de ese cuerpo de conocimientos, pero esa apropiación tiene más probabilidades de alcanzar el éxito si se hace con otras personas (que te pueden ayudar, echar un cable cuando lo necesitas, compartir inquietudes y despertar inquietudes nuevas, etc., como ya mostró Vigotsky y después de él, la línea de la psicología soviética).
[319] Bishop dice que la formación formal de matemáticas debería ser, por lo menos, una formación que aporte "*algo relevante para sus vidas presentes, que para ellos tenga significado aprenderlo y sea útil en sus vidas futuras*." (Bishop, 2000: 38). Las matemáticas tienen que motivar, estimular y enriquecer.
[320] Ver capítulo 15.

hemos analizado en el capítulo 16 son ejemplo de ello. A través de las diferentes "interpretaciones comprensivas" podemos ver cómo las personas participantes recurren a su acervo de conocimiento para responder a las preguntas de la profesora. Las personas adultas razonan siempre de lo concreto a lo abstracto. Citamos como ejemplo el uso de la estructura "doble / mitad", que es una de las ideas más básicas subyacentes al concepto de proporción, y que aparece en expresiones cotidianas como "inversa" o "al revés".

Cuando las mujeres del grupo de matemáticas se encontraban ante un problema que no les resultada conocido, ni tenía rasgo alguno que fuese habitual para ellas, tendían a responder utilizando conocimientos básicos que ya sabían, como es el ejemplo de las cajetillas de tabaco, referenciado antes.[321]

Estos ejemplos muestran la importancia que tiene el uso de la experiencia previa como fuente de sentido para entender y resolver un ejercicio matemático.

- Todo esto nos lleva a reflexionar sobre el contenido instrumental de la enseñanza de las matemáticas (que es precisamente otro de los principios del aprendizaje dialógico). Como dice Bishop (2000):

> *"Las investigaciones nos recuerdan que gran parte de este conocimiento se adquiere fuera del aula y fuera de la escuela. De hecho, algunos argumentarían que, por lo tanto, no es necesario enseñar las habilidades y los conocimientos básicos relacionados con la alfabetización numérica en clase de matemáticas. Pero éste es un supuesto peligroso. El hecho de que gran parte del conocimiento matemático básico del alumnado proceda de un aprendizaje no escolar no significa que todos los alumnos adquirirán el mismo conocimiento fuera de la escuela."* (Bishop, 2000: 41).

[321] En vez de calcular 10^3, lo que hizo la persona participante es razonar que tenía que multiplicar 10 tres veces. Ver anexo.

Esto es particularmente cierto en el caso de la enseñanza de las matemáticas: un aspecto son los procedimientos por los que se llega al conocimiento, que pueden ser diferentes según la experiencia previa que tenga uno (aquí es donde hablamos nosotros de "matemáticas académicas" y "matemáticas de la vida real"). Sin embargo, lo que no se puede rebajar son los contenidos instrumentales, como a veces ocurre en algunas escuelas (sobre todo, de infantil, primaria y secundaria), donde en vez de hacer un currículum académico de calidad, se aplica la llamada "vía de la felicidad" (es decir, se rebaja el nivel de exigencia). La LOGSE se basa en la estrategia de la adaptación curricular, teniendo en cuenta el principio de la diferencia (en lugar de la igualdad de las diferencias). El resultado es que, de acuerdo con dicho principio, se justifica que haya currícula menos exigentes para unas personas que para otras, lo cual genera exclusión educativa y social. Esta situación es muy usual en la asignatura de matemáticas, donde muchas veces lo que ocurre es que, sencillamente, se segrega a los estudiantes en función de si "saben" o "no saben", generándose un "efecto Mateo" (tal y como dice Merton, 1968).[322] Desde el aprendizaje dialógico, lo que se propone es una enseñanza sin barreras para todo el mundo.

- Por otro lado, otro elemento importante a destacar es el papel de la igualdad en el aprendizaje y no únicamente por lo que se refiere al acceso, sino también en el propio proceso de adquisición del conocimiento. A lo largo del trabajo de campo hemos podido corroborar que las personas adultas utilizan el diálogo para aprender y superar las dificultades.

  Hemos visto ejemplos claros de cómo la participación igualitaria, la solidaridad, la valoración del conocimiento que tienen todas las personas del grupo (inteligencia cultural), el dar las mismas oportunidades a todas las personas respetando sus diferencias, han tenido como resultado una "creación de sentido" en torno a los contenidos instrumentales referentes a las proporciones matemáticas.

[322] Merton, 1968.

De la misma manera, cuando han aparecido en la clase diálogos basados no en la igualdad, sino en las relaciones de poder (manifestadas a través de un lenguaje muy perlocucionario), entonces hemos visto como ha ocurrido el caso contrario, es decir, las personas del grupo no han "creado sentido" a lo que estaban aprendiendo e, incluso, se han producido errores conceptuales. Nosotros hemos explorado, sobre todo, la perspectiva cognitiva.

- Las personas que asistieron a una clase basada en los principios del aprendizaje dialógico[323] cambiaron totalmente su actitud: la solidaridad que se generó en el grupo sirvió para que esas mujeres acabaran "tirando del grupo" y participando activamente durante la clase para encontrar la solución a los problemas planteados.

- En el caso de la sesión de proporciones hemos podido ver cómo la participación igualitaria, por otro lado, no sólo transforma las situaciones de exclusión, sino que, además, abre la clase hacia "otras formas" de hacer matemáticas y "otros procedimientos" que, como hemos visto líneas más arriba, son totalmente válidos (me estoy refiriendo aquí a la distinción entre las "matemáticas académicas" y las "matemáticas de la vida real").

- Por todo ello, es muy importante la actitud que se mantiene en la clase. Cuando alguien de la clase (sea la profesora, sea alguna compañera) se sitúa por encima del resto de personas del grupo, aparece entonces un desnivel que no resuelve las dificultades y genera rechazo.[324] Nosotros hemos visto que se produce algo parecido a través del análisis del efecto perlocucionario o ilocucionario de los actos de habla, tanto de las mujeres del grupo como de la profesora. Cuando este acto de habla es perlocucionario, y parte de una situación de desnivel, no da lugar a la reflexión colectiva, ni a la aparición de nuevas formas de resolver un

[323] Flecha, 1997, 2000.
[324] Algo que han confirmado diversas investigaciones. Ver Ingleton y O'Regan, 2002, por ejemplo.

ejercicio, al margen del procedimiento "académico". Esto es lo que vemos en el caso de la actividad sobre los folios, ya referenciada. En cambio, en un entorno de diálogo igualitario ocurre todo lo contrario: todas las personas intervienen y "construyen" las ideas matemáticas conjuntamente. Lo cual, además, les da todo el sentido, porque todas las personas acaban por "apropiarse" dichas ideas y hacérselas suyas.

Perspectivas de futuro

Hemos visto que existen varias investigaciones precedentes que estudian la existencia de la brecha que nosotros afirmamos que existe entre las "matemáticas académicas" y las "matemáticas de la vida real." Incluso algunos autores señalan el impacto que generan esas "matemáticas académicas", más formales, sobre la expectativa y la confianza que tiene cada uno en sí mismo.

La innovación de esta investigación se encuentra en reconocer, mediante el análisis, que existe la capacidad de las personas adultas para superar esa "brecha" y hacer matemáticas.

Estamos convencidos que las cuatro dimensiones que hemos señalado están interrelacionadas de una forma mucho más estrecha de la que aparece en esta tesis. Los estudios actuales que se están realizando en la educación matemática van en la misma línea.

El debate social que despierta el concepto de *numeracy* (frente a *math literacy*), el papel del contexto en la matematización, el cómo análizar más los elementos exclusores dentro del aula para mejorar la calidad del currículum y de los aprendizajes, el análisis exhaustivo de las tecnologías como soportes para el aprendizaje, el rol del género, el análisis sobre las minorías, la exploración detallada del alcance de la dimensión instrumental para saber cuáles son las habilidades básicas y cuáles no, son temas de estudio en torno a los que se está trabajando en la actualidad y a los que esta tesis no ha podido dar respuesta.

Se abre aquí, pues, un camino para continuar con la investigación en años venideros.