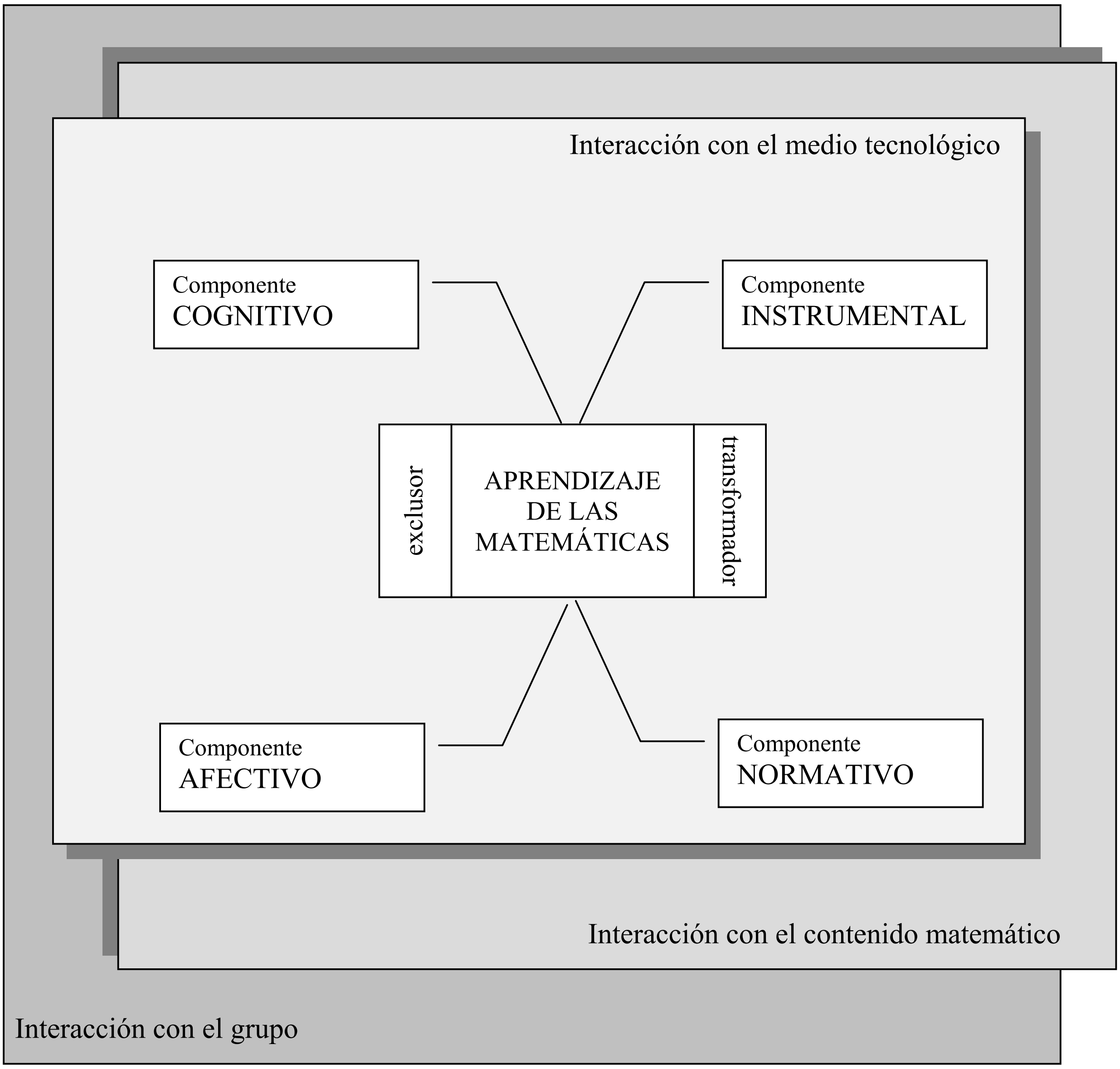
PARTE IV

ANÁLISIS DE LOS DATOS

ESQUEMA CONCEPTUAL DE LA PARTE IV



Presentamos aquí la cuarta parte de este trabajo. Se trata del relato argumentado del análisis que hemos realizado, a partir del trabajo de campo recogido, durante las entrevistas, la tertulia comunicativa y la sesión práctica que se grabó en vídeo, con el apoyo de las notas que recogimos en el diario de investigación. En el primer capítulo hacemos una breve incursión en la experiencia y las vivencias que han tenido las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas,* en relación con el aprendizaje de las matemáticas. Para ello analizamos los resultados obtenidos desde los tres puntos de vista que hemos comentado en la segunda parte (correspondiente a la metodología). En este sentido, por un lado, se tiene en cuenta todo aquello relacionado con el contenido matemático. Aparecen aquí temas como la imagen que varias de las mujeres del grupo han vivido de las matemáticas o el sentimiento que les merecen ahora. Y por otro lado, también se habla de la relación de las personas con el grupo, desde el punto de vista de la interacción en el aula. De este modo aparecen temas como la solidaridad que se genera entre compañeras, la importancia del diálogo, etc. Finalmente, hablamos del medio tecnológico y de su impacto como soporte del aprendizaje. En el segundo capítulo analizamos en profundidad los elementos que han aparecido a lo largo de las entrevistas, desde esos mismos tres puntos de vista. Distinguimos a lo largo de todo el capítulo entre fenómenos exclusores y fenómenos transformadores, porque lo que nos interesa es averiguar cuáles son las barreras que dificultan el aprendizaje de las matemáticas, cuáles las maneras de superarlas y cómo se relacionan con el tipo de matemáticas que hacen las mujeres del grupo en el aula. Para ello, tenemos en cuenta los cuatro tipos de fenómenos que intervienen en el aprendizaje de matemáticas, que definimos en la parte metodológica (cognitivos, afectivos, instrumentales y normativos). En el tercer capítulo nos centramos ya, únicamente, en los fenómenos cognitivos, por ser los que más nos acercan a comprender el tipo de aprendizaje de las matemáticas y los factores que actúan sobre dicho aprendizaje, aspectos que nos permitirán ver si realmente existe una brecha entre las matemáticas "académicas" y las "matemáticas de la vida real" y cuál es su impacto.

14. DE LAS MATEMÁTICAS VIVIDAS A LAS MATEMÁTICAS DE LA ESCUELA DE LA VERNEDA – SANT MARTÍ

En este capítulo comenzamos relatando la experiencia de vida de las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas*. Hacemos un repaso de su memoria y apelamos a la evocación de sus recuerdos para situar el punto de partida en el que están respecto al aprendizaje de las matemáticas. A partir de ese "recuerdo" vamos hilvanando la idea que tienen las mujeres del grupo acerca de las matemáticas y las dinámicas que se generan en el aula, a partir de las interacciones. Para ello utilizamos los tres puntos de vista de los que hablábamos en la parte de metodología: la interacción de las personas con el contenido matemático, la relación de la persona con el grupo y la relación de la persona con el medio tecnológico.

14.1. La interacción de las personas con el contenido matemático

Conversando con las personas participantes del *Grupo de matemáticas dialógicas* de la escuela de la Verneda, fuimos construyendo poco a poco la imagen que tienen esas personas de las matemáticas.

> Antes era todo de carrerilla. La tabla la hacían aprender, toda. Pero también te preguntaban salteado, sí, sí. A mí me lo preguntaban salteado. Es que era muy diferente a ahora. El colegio de antes no había ni una parte. Ahora es una gloria todo. Eso es bueno.

Durante la tertulia, las mujeres que participaron rememoraban la escuela que habían vivido. Una escuela caracterizada por las grandes series de números, divisiones inacabables, de cinco o seis dígitos, el recitar las tablas de multiplicar. Una mujer del grupo lo resume diciendo que "antes todo era de carrerilla".

Las matemáticas que han vivido estas personas son muy diferentes de las que aprenden en la escuela de la Verneda y, por supuesto, no tienen nada que ver con las actividades informáticas que hicieron en el grupo.

Cuando explican las actividades que han realizado en el grupo, es muy sintomático que resalten precisamente la variedad de las actividades, además de otros elementos relacionados con el propio medio. Aparecen elementos como la práctica: una mujer del grupo, por ejemplo, afirma claramente que "*las cosas se aprenden poniéndolas en la práctica y cuanto más se práctica, mejor*." Esta afirmación entra en contradicción con la imagen de las matemáticas que esas señoras traían de sus anteriores experiencias escolares. La memoria les trae recuerdos de unas matemáticas monótonas, mecánicas y "memorionas". En las entrevistas las mujeres del grupo relatan cómo el contenido matemático estaba encorsetado por las "cuatro reglas" y explican que no se aprendía nada más sobre matemáticas. Campos tales como la teoría de números, el álgebra, las funciones, la geometría y tantos otros ámbitos de la matemática, no aparecen en ningún momento a lo largo de las entrevistas y de la tertulia, salvo cuando se refieren a lo que están aprendiendo en la escuela de la Verneda, en el momento actual. En cambio, las matemáticas que sí rememoran son unas matemáticas estrictamente funcionales. Con esta expresión nos referimos a que las mujeres del grupo de matemáticas explican que aprendieron lo justo para saber defenderse en la vida.

Esta relación "vida cotidiana – matemáticas" es una relación muy marcada que aparece en varias ocasiones, cuando las mujeres del grupo hablan de las matemáticas. Ellas vinculan la parte instrumental de la disciplina a la utilidad que les ofrece. A menudo las mujeres comentan que les encantan las matemáticas, porque las encuentran muy útiles. Éste es otro elemento que, de alguna manera, aparece ligado al contenido matemático (aunque sea desde un punto de vista estrictamente utilitarista).

> ...a mí lo que me gusta es entender las cosas, porque así las hago, fijándome entonces no las entiendo y lo que quiero yo es entenderlas, pero vaya...

Y todo esto nos lleva a otro aspecto que aparece en el diálogo con las mujeres del grupo de matemáticas: para ellas "aprender matemáticas" no significa repetir la lección (como hace el loro de Denis Guedj).[197] Las mujeres no se cansan de decir que saber matemáticas consiste en comprenderlas, entenderlas, y enfatizan mucho esta afirmación.

> A ver, a mí me gusta todo, pero lo que más me gusta es solucionar los problemas, digamos, y las cuentas, cuando... cuando hay que dividir, restar o multiplicar.

Y, por supuesto, aquí cada cual tiene sus preferencias. Hay quien afirma preferir los quebrados, porque resulta que entiende bien cómo funciona lo del mínimo común múltiplo y le coge gusto. En cambio, otras personas ven un problema sobre cómo distribuir unos armarios en la pared de una cocina y enseguida se entusiasman con ello. A lo largo de las entrevistas queda claro que cada persona tiene un gusto distinto y elige un contenido matemático u otro, según sus preferencias.

Pero no puede por menos que dejar de sorprendernos una y otra vez el "embrujo" de las matemáticas. Me refiero aquí a que las mujeres del grupo de matemáticas, cuando te explican lo que les gusta de las matemáticas, cuando piensan en los contenidos que saben utilizar se les ilumina la cara y te explican lo que es una gran victoria para ellas. Y este es otro de los elementos importantes que aparece en la relación que tienen las personas con las matemáticas. De igual modo que hay momentos en que la personas relatan sus frustraciones, en otros, cuando te explican algo sobre una operación que han logrado entender, lo hacen como el triunfo que realmente significa para ellas.

> A.- Claro, claro. Porque aquí tienes menos tres, negativo, y aquí tienes dos. Pues de aquí te sobra uno, que es este que pones aquí, claro.
> E.- Pues mira, ahora me lo estás explicando de una manera...
> A.- Es que está chupado!

[197] Guedj, D. 1998. *El teorema del lloro.* Barcelona: Editorial Empúries.

Sin embargo, eso no significa que no surjan nunca dificultades, al contrario, sí que aparecen y las mujeres explican que cada día se encuentran con conceptos matemáticos que no logran entender y esto muchas veces las desmoraliza. No obstante, igual que pierden los ánimos cuando encuentran alguna dificultad, de la misma manera los recuperan en cuanto hablan entre ellas y encuentran la forma de transformar la situación.

Pero cuando eso de las equis, pues eso no las entiendo. Lo de arriba no lo entiendo, no. Porque es que yo no sé si tiene que jugar el número de abajo con el de arriba, si tiene que multiplicarlo con el de arriba, o hay que multiplicar con el de abajo, no lo sé

En esas circunstancias cada cual tiene su estrategia propia para afrontar la situación: hay quien explica que pregunta y pregunta y vuelve a preguntar al profesor o a las compañeras. En cambio, otras personas prefieren pararse, tranquilizarse y volver otra vez con renovadas fuerzas a la actividad que se resiste. La actitud frente al contenido matemático problemático puede variar, pero un punto común que aparece en prácticamente todas las entrevistas que hemos realizado es "el espíritu de lucha" que tienen esas mujeres, que no se preocupan porque no les salga una operación en el momento, sino que te dicen que tienen todo el tiempo del mundo para aprenderla bien. En estas situaciones, por supuesto, aparecen multitud de fenómenos que ya analizaremos en los capítulos siguientes.

Ahora bien, ¿qué hay del contenido matemático, estrictamente hablando? Pues respecto a esto cabe decir que al hacer las entrevistas constantemente aparecen números y operaciones, y cálculos, que se entremezclan con los recuerdos, con los sentimientos y con las emociones de esas personas. Lo cual es totalmente lógico, porque los guiones de las entrevistas y de la tertulia (aunque esta última en menor medida) han sido pensados para introducir elementos explícitos de contenido matemático en las conversaciones.

Sí, pero todo eso, eso me lo sé muy bien, porque ya me dijo mi hijo que el mínimo común lo tenía que dividir entre el de abajo y luego multiplicar por el de arriba.

Todo esto nos sirve para explicar que las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* de la escuela saben matemáticas y las utilizan con perfecta desenvoltura en la conversación. Aparecen sumas, restas, paréntesis, mínimos comunes múltiplos, ecuaciones y también las proporciones, entre otros muchos elementos matemáticos. Y, aparecen a nivel descriptivo. Con esto quiero decir que no se plantean las matemáticas desde un punto de vista teórico, entrando en dilucidar las regularidades y las relaciones abstractas que existen en los conceptos matemáticos. Se utilizan conceptos como un valor de uso, como herramientas, pero no se reflexiona en torno a esos conceptos y cómo funcionan (sus propiedades, sus características, etc.). Como dice una de las mujeres del grupo, las matemáticas que hacen en la clase son diferentes de las que hacen los matemáticos.

14.2. La interacción de las personas con el grupo

Yo la teoría la tengo buena, lo que pasa es que yo a lo mejor estoy equivocada porque yo corro mucho... y pregunto a la de al lado, sí que yo le pregunto, porque yo pregunto mucho y a mí no me importa que me pregunten, y si yo sé una cosa, pues decírselo a la compañera, pues sí.

Pasamos ahora a considerar la relación que tienen las personas entrevistadas con el grupo. Para comenzar, el primer aspecto que sobresale es el trabajo en grupo, la colaboración entre varias personas que comentan, preguntan y reflexionan conjuntamente sobre las diferentes actividades que aparecen en la pantalla. Las mujeres del grupo de matemáticas colaboran activamente entre ellas durante la clase. En el diario de campo se deja constancia de este hecho, que también aparece en ocasiones durante la conversación en las entrevistas.

Pero a ver, ¿estos...? a ver, que yo me entere bien porque si no... éstos se cuentan ocho positivos. Y éstos siete negativos? ¿pero se le quitan a éstos?

Las personas participantes hablan, plantean sus dudas en voz alta, preguntan a la persona que tienen al lado, sin ningún tipo de tapujos y comparten el conocimiento que tienen sobre cada tema. Y esta dinámica se aprecia en múltiples formas. Por ejemplo, las personas adultas siempre preguntan sus dudas. Hay una participación altísima en el aula. Es más, no sólo participan, sino que exigen del profesorado una actitud también plenamente activa. Durante varios momentos, en las entrevistas sobre todo, queda constancia de este rasgo al que nos estamos refiriendo. La persona no sólo responde a las preguntas que se le hacen, sino que también pone preguntas, comenta cosas que no entiende, etc.

Todo esto nos lleva a otro elemento que aparece continuamente durante el trabajo de campo con las personas participantes: la transformación de las dificultades. Las mujeres se ayudan mutuamente en la clase, colaboran entre ellas, buscan la respuesta a los problemas matemáticos y se explican unas a otras los diferentes conceptos. Esto da lugar a la aparición de una riqueza muy grande dentro de la clase, puesto que el trabajo en grupo contribuye a la aparición de múltiples explicaciones y caminos diferentes para llegar al mismo resultado. Por otro lado, es importante resaltar otro elemento que es clave: en varias ocasiones la explicación que da una mujer del grupo de matemáticas acaba resultando más comprensible que la que ofrece el profesor o la que se encuentra explicada en el libro y la comparten entre ellas. Como dice una de las personas que intervinieron en la tertulia, "*había dos o tres señoras que no lo entendían, pues particularmente pasé del profesor y se lo expliqué a aquella señora...*".

La dinámica de grupo en ocasiones da lugar a compartir las mismas sensaciones hacia las matemáticas y se crean complicidades implícitas entre varias mujeres que comparten los mismos miedos y las mismas ilusiones. En la tertulia, por ejemplo, aparecen varios comentarios de este tipo. Una mujer interviene y, enseguida, el resto de compañeras (o algunas de ellas) dan muestras de asentimiento a lo que dice. No obstante, la relación de cada persona con el grupo siempre adopta formas diferentes. Hay quien encuentra en el grupo el apoyo necesario para continuar estudiando y hay quien prefiere optar por vías más individuales y no participa tanto. Hay quien revierte en el grupo sus propias dudas y quien explica la manera que utiliza para resolver un determinado ejercicio. El grupo entero se nutre con todas estas interacciones y el resultado es un colectivo de personas vivo, dinámico. A lo largo de las entrevistas, de la tertulia, del diario de campo y del vídeo digital, queda patente cómo las mujeres se ayudan unas a otras y que existe una gran colaboración entre todas ellas.

14.3. La interacción de las personas con el medio tecnológico

Finalmente, vamos a referirnos a la relación que mantienen las personas con el medio tecnológico (es decir, con el ordenador, con la pizarra, con el libro de matemáticas, etc.). Este aspecto tiene una relevancia especial para las personas que integran el grupo de matemáticas dialógicas de la escuela de la Verneda, porque una de las cosas más notables que han hecho es la construcción del sitio web. En el diario de campo se relatan los debates que se produjeron dentro del aula sobre cómo hacer la página web de matemáticas. De todas maneras, lo que hay que resaltar es el uso del ordenador como una herramienta técnica que permite la construcción de un entorno de aprendizaje.

La relación que establecen las personas participantes con los ordenadores depende del grado de conocimiento que tengan de la herramienta. A lo largo de las entrevistas, así como de las tertulias, y durante las horas que estuvimos juntos en el aula de informática, las mujeres del grupo muchas veces preguntaban cómo se utilizaba tal o cual aplicación informática, pedían que se les conectara el programa de matemáticas o preguntaban a la persona de enfrente cómo había encontrado el resultado de un ejercicio concreto. El diálogo siempre aparece como un elemento presente, que permite manifestar y resolver las dudas.

Normal, es que es normal, porque muchas veces vas y miras cómo lo has hecho para ver cómo lo puedes hacer, y miras la libreta... y vas viendo la lógica, vull dir... haciéndolo.

> No, no, a ver, todo esto está muy bien, lo que es, lo que es el ordenador y todo eso, si lo sabes manejar, tanto si son matemáticas como si es lo que sea, está muy bien, y es más rápido, en el sentido que ves una cosa allí que d'eso, y entonces pues ya lo haces, y no estás allí una hora pues, así...

Más adelante comentaremos cómo se utilizan los diferentes soportes tecnológicos,[198] pero en este apartado sobre la experiencia de vida lo que queremos resaltar son las ganas con las que las mujeres del grupo iban al aula de informática. A lo largo no sólo de las entrevistas y de la tertulia, sino en el vídeo y durante las sesiones del *Grupo de matemáticas dialógicas*, se constata que las mujeres del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela han disfrutado aprendiendo matemáticas en un medio tecnológico, como es el aula de ordenadores. Comentarios como "yo me lo paso muy bien, con el ordenador" o "es más entretenido, haces más cosas", son habituales y dan idea de la relación que establecieron esas mujeres con el medio de aprendizaje. Para varias de ellas el tema de los ordenadores es completamente novedoso: es la primera vez que tienen la oportunidad de trabajar con uno de ellos. Y eso lo viven como algo motivador, tal y como se desprende de los comentarios que hacen durante las entrevistas y en la tertulia comunicativa.

> Hombre, a mí el ordenador me divierte mucho y me pongo muy, mira yo muchas veces no vengo porque digo la gente dirá: esta señora está loca, porque, porque me emociono tanto, y me gusta tanto, que yo qué sé.

Ahora bien, de igual modo que hemos descrito este cúmulo de sensaciones positivas de la relación que establecen las personas adultas del grupo de matemáticas con el medio en el que están aprendiendo las matemáticas, también es cierto que otras veces las mismas mujeres hacen comentarios sobre el desconocimiento de las herramientas (de los ordenadores, en este caso). En estas ocasiones los comentarios no son tan positivos como explicábamos anteriormente. Las personas participantes revelan sus miedos, sus reparos y las angustias que les producen las tecnologías de la información y de la comunicación. Frases como "es que no es tan sencillo" o "también hay que pensar que no somos jóvenes", denotan el sentimiento de respeto que produce el manejo de ordenadores. Durante la clase, a menudo, aparecían situaciones de cierto apuro para las personas participantes, como era el manejo del *ratón*, por ejemplo. El uso de ese aparato electrónico supone una coordinación entre los movimientos de la

> A la gente que les cuestan más las matemáticas, la idea del ordenador les hacía más llevaderas las matemáticas. Había señoras que disfrutaban con el ratoncillo, pa'rriba, pa'bajo...

[198] Ver el apartado "El análisis de la relación entre la persona y el medio tecnológico" del capítulo 14.

mano y el recorrido que hace el cursor por la pantalla, saltando de una opción a otra del programa informático. Las personas que no tenían práctica en el uso de este tipo de herramientas encontraron que el uso del *ratón* era algo complicado al principio. Otro ejemplo, que muestra la relación complicada con el medio, fue la disposición de las diversas páginas que formaban parte del sitio web. Las personas participantes pedían la ayuda al profesor para acceder a las diversas actividades y, al principio, no entendían qué significaban las diferentes formas que adoptaba el cursor en la pantalla (que pasaba de puntero con forma de flecha a una mano señalando con un dedo, según si el cursor atravesaba por una zona activa de la pantalla o por una zona no activa). Éstos son dos ejemplos que describen la relación inicial que mantuvieron la mayor parte de las mujeres del grupo con el medio de aprendizaje. Por otro lado, otra de las barreras que se derivaron de la relación entre las matemáticas y el medio tecnológico fue la claridad en la presentación del enunciado de las actividades. A veces la secuenciación a través de diferentes pantallas y el uso de "trucos" para introducir informaciones aclaratorias o ayudas para resolver las actividades no fue lo suficientemente clara, debido a la falta de hábito en la navegación por páginas web de la mayoría de las mujeres del grupo.[199]

Lo que pasa es que... como no sé navegar, pues hasta que no llegaba al sitio, pues me costaba mucho. Ahora, una vez que ya estaba encarrilao, pues era muy distraído, muy divertido.

Ése es otro tema... El tema del ratón siempre es algo que todo el mundo... Y no sé, a nivel de cosas del programa, cosas que tú dijeras, pues esto lo veo muy difícil para nosotras...

Todos estos aspectos constituyeron los elementos exclusores del aprendizaje, que se derivan del desconocimiento o falta de hábito en el uso de las tecnologías. La mayor parte de las mujeres del grupo de matemáticas explican que no utilizan los ordenadores habitualmente. Algunas tienen ordenador en casa, pero lo utilizan los hijos y ellas ni se acercan. Otras no tienen ordenador, porque tampoco se han planteado nunca la idea de tener uno. Éstos son ejemplos de la "*brecha digital*" de la que hablan los especialistas en teorías de la comunicación. Eco (1993), por ejemplo, utiliza los conceptos de "interactuantes" e "interactuados" para referirse las "personas que

Pero ¿ves? Aquí ves que es una resta, una suma, una multiplicación, una división. Pero es que hay programas allí que no sabes lo que es. Entonces, tú te imaginas algo y empiezas a contestar y no es aquello, o... a lo mejor es que se ha de escribir de otra manera distinta a la que lo escribes tú.

[199] Como ya se ha explicado en el capítulo 13, sobre las etapas de la investigación, éste fue uno de los motivos para rediseñar el sitio web.

tienen acceso a los medios y a la gestión de la información" y las que "no tienen dicho acceso" (respectivamente). El no tener acceso es una nueva forma de desigualdad social.[200]

Estas dificultades iniciales no lograron mermar el interés de las mujeres del grupo por el trabajo en el aula de informática, sino al contrario. Las personas participantes se mostraron siempre muy contentas de poder aprender matemáticas en un medio informatizado.

Esta dicotomía entre la sensación de dificultad y la motivación son los dos elementos que más se destacan en todas las transcripciones que hemos analizado, por lo que respecta a la interacción entre las mujeres del grupo de matemáticas dialógicas y el medio en el que desarrollan el aprendizaje.

14.4. Aportaciones del capítulo

A lo largo de este capítulo se puede ver cómo las matemáticas son un tema de interés para las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas*. Estas personas identifican claramente la *existencia de una "diferencia" entre la imagen de las matemáticas que tenían y las matemáticas que se encuentran en la escuela de La Verneda*. Según ellas, esta diferencia viene dada por varios motivos, pero sobre todo por la diversidad de las actividades que ven en el aula y también porque se les pide que entiendan las operaciones que realizan, no que las hagan "de carrerilla". Ésta es una de las aportaciones más interesantes de este capítulo: las mujeres del grupo exigen **entender** las matemáticas. A lo largo del análisis de los comentarios que hacen las mujeres del grupo, vemos que para ellas "entender" una operación matemática significa ser capaces de utilizarla y resolverla. Se trata de una idea pragmática de "comprensión" más ligada con la aplicación práctica de las matemáticas en la vida cotidiana para resolver

[200] Ver el capítulo 1.

situaciones problemáticas, que con la propia naturaleza de la operación en cuestión. Como dice una de las mujeres entrevistadas:

> "Sí, sí. Bueno, porque es que las matemáticas es como la vida misma, hijo mío. Porque tú, pongo por ejemplo, dices, lo dices muchas veces, ay lo que me ha costado esto, no sé qué no sé cuántos, y tú dices, pues esto es también pues equivale a que tengo que hacer yo tanto, un trabajo de lo que sea, claro, equivalencias matemáticas... El exponente, y todo, y todo lo que se habla en matemáticas se habla en general."

En su diálogo no aparece, en ningún momento, que la equivalencia es una propiedad que cumplen todas las proporciones, por ejemplo.[201] En cambio, sí que aparece su interés por saber aplicar ese conocimiento a la vida real. Y para ello necesita entender por lo menos la equivalencia a nivel cuantitativo.

Las tecnologías aparecen como herramientas que facilitan llegar a ese entendimiento, aunque, a veces, resultan difíciles de manejar (por diversos motivos, como el desconocimiento, por ejemplo). Aquí aparece otra de las aportaciones relevantes del capítulo: el debate sobre cuál es el mejor soporte para facilitar el aprendizaje de un concepto, el papel, el ordenador o las "cuentas de cabeza". Respecto a este punto se puede decir que depende de la experiencia previa de cada persona. Si la persona está acostumbrada a hacer todo "de cabeza", las máquinas se convierten en engorros, ya que hay que aprender a utilizarlas para sacarles provecho. Y, al revés, quien maneja normalmente máquinas (como la calculadora, el ordenador, etc.), las prefiere para resolver las operaciones.

Finalmente, otra de las aportaciones que se destaca en este capítulo es *la forma de aprender matemáticas mediante el diálogo*. La solidaridad en el aula, entre compañeras, es un recurso reconocido como

[201] Si P(a,b) = P(a', b'), significa que tiene que haber dos números x e y que, multiplicados por a y b, den como resultado a' ($a'=a\cdot x$) y b' ($b'=b\cdot y$), de manera que a/b y a'/b' son equivalentes.

fundamental para abordar las situaciones problemáticas. Las clases de la escuela de la Verneda son clases altamente participativas, en las que las personas colaboran entre ellas para entender y resolver las diferentes actividades que aparecen durante las sesiones de clase.

15. ANÁLISIS DE LOS DATOS EN BASE AL MODELO DE VARIABLES PROPUESTO

Después de la descripción de los aspectos que hemos ido observando durante el trabajo de campo, en este capítulo entramos a analizar las diferentes situaciones y comentarios que hacen las personas adultas en la clase de matemáticas. Para ello utilizamos el modelo de cuatro componentes que hemos construido a partir de la lectura de Habermas y del trabajo científico de CREA. Los componentes cognitivos, afectivos, instrumentales y normativos tratan de constituir un modelo que atraviesa todos los acontecimientos que se producen dentro de la clase, desde esos cuatro puntos de vista. Además, consideramos que la acción siempre se desarrolla desde una perspectiva social, objetiva o subjetiva, y que los matices que introducen ambos puntos de vista son importantes en la comprensión de los diferentes fenómenos que hemos ido observando a lo largo del capítulo anterior. De igual modo, organizamos la información en torno a los tres ejes de análisis que venimos utilizando durante toda la investigación: la interacción de las personas con el contenido matemático, la relación de la persona con el grupo y la relación de la persona con el medio tecnológico. De esta manera, se mantiene la coherencia de la investigación y, por otro lado, esta estructura nos permite continuar profundizando en un análisis más pormenorizado de la información recabada.

15.1. El análisis de la relación entre la persona y los contenidos matemáticos

A lo largo del análisis nos hemos encontrado con diversas situaciones, vivencias y formas de actuar de las personas participantes, que se pueden recoger a través de los componentes cognitivos, de los instrumentales, de los afectivos y de los normativos. Aparecen aspectos conocidos de la Psicología del Aprendizaje, como son la repetición de conceptos (idea que nos trae a la memoria las teorías de corte conductista o neoconductista) o la consecución de éxitos. Aparecen también elementos más relacionados con los procesos psicológicos superiores (Vigotsky, 1979b), cuya interpretación nos remite a las teorías cognitivistas (especialmente a la corriente soviética o a la *Gestalt*).

Además, también aparecen detalles que nos sitúan en la dimensión normativa del aprendizaje de las matemáticas, a propósito del impacto de las reglas y de la simbología matemática en el aprendizaje que han realizado las personas del *Grupo de matemáticas dialógicas*.

Asismismo encontramos componentes afectivos, que resultan ser uno de los aspectos más cruciales a la hora de aprender matemáticas, como veremos más adelante.

Antes de pasar al análisis pormenorizado de la relación entre la persona y el contenido matemático, adjuntamos un breve esquema donde se apuntan los elementos que se comentarán en cada una de las dimensiones de análisis.

Cognitivos	- Las alusiones al método de enseñanza - La inteligencia cultural - La consideración del saber previo propio - La creación de sentido - La repetición - La comprensión - Los errores conceptuales - Las metáforas
Afectivos	- La vivencia del bloqueo - El éxito
Instrumentales	- La percepción - La práctica de ejercicios - La existencia de conceptos desconocidos
Normativos	- Los símbolos matemáticos - Los procedimientos matemáticos - El uso del lenguaje matemático - El estudio de las normas

Esquema 15.1. Fenómenos del análisis de la relación que establecen las personas con los contenidos matemáticos. Elaboración propia.

En las secciones siguientes entraremos a analizar todos y cada uno de estos fenómenos. Lo vamos a hacer destacando tanto fenómenos que son transformadores, como fenómenos que son exclusores.

15.1.1. *Los componentes cognitivos*

Las alusiones al método de enseñanza

Antes ya hemos visto que uno de los aspectos que resaltan las personas participantes, cuando reflexionan sobre los contenidos del currículum de matemáticas, es la diferencia que existe entre lo que hacen actualmente en clase y lo que hacían cuando eran niñas.[202]

Los métodos de enseñanza tradicionales (tengan connotaciones conductistas o bien procedentes de otras perspectivas asociacionistas,

[202] Ver capítulo anterior.

como el procesamiento de la información o las teorías computacionales de los años ochenta)[203] originan un tipo de aprendizaje caracterizado por la respuesta (más o menos) mecánica a las preguntas o a las situaciones problemáticas con las que se encuentra el estudiante.

En cambio, ellas prefieren entender las actividades matemáticas. De esta forma, las propias mujeres resaltan la existencia de una conexión entre el contenido y el saber, que, a nivel cognitivo, va más allá de la simple repetición de las ideas. Con su visión crítica lo que están haciendo es remitirnos al debate que se estableció entre las teorías conductistas y la línea organicista y estructuralista, que sugieren que existe una “conexión” significativa entre los conceptos.

Siguiendo lo que dice Pozo (1990) sobre las diferencias entre las teorías asociacionistas y las teorías de la reestructuración,[204] el testimonio de las personas participantes avala la metodología didáctica que se basa en la creación de sentido. Las teorías cognitivas de la reestructuración utilizan un paradigma funcionalista (la mayor parte

[203] Como, por ejemplo, la teoría ACT de Anderson (Pozo, 1990), que se basa en la idea de que *“todos los procesos cognitivos superiores, como memoria, lenguaje, solución de problemas, imágenes, deducción e inducción son manifestaciones diferentes de un mismo sistema subyacente.”* (Pozo, 1990: 119). Desde este punto de vista el sistema cognitivo de las personas está formado por tres tipos diferentes de memoria: declarativa, de producciones y de trabajo. Entre estos tres tipos de memoria se desarrollan múltiples procesos diferentes, tales como: almacenamiento y recuperación, emparejamiento, ejecución y aplicación. Y, finalmente, entre este sistema cognitivo y el mundo exterior aparecen procesos tales como la codificación de las informaciones que vienen del exterior y la actuación sobre dicho mundo exterior. O la teoría general de los esquemas, en la que destacan trabajos de Bartlett o Piaget (Pozo, 1990). *“La unidad básica del procesamiento serían los esquemas, consistentes en «paquetes de información» sobre conceptos genéricos.”* (Pozo, 1990: 137). Los autores que se sitúan en esta tradición de pensamiento afirman que entre los diversos conceptos que forman un esquema existe una relación semántica, de manera que se crean árboles de significado formados por conjuntos de esquemas interrelacionados entre sí. Ésta es la base de técnicas como los mapas conceptuales.

[204] Pozo (1990) establece varias diferencias entre ambas tradiciones de pensamiento en la psicología cognitiva: mientras que las teorías asociacionistas asumen un concepto estático del aprendizaje, atomista, basado en el principio de la correspondencia, donde el sujeto es una “caja negra” entre los estímulos que proceden del exterior y la respuesta que dicho sujeto da, las teorías organicistas o de la reestructuración asumen que la relación del sujeto con el entorno es dinámica, que se aprende por insight, según unos autores, o por un proceso de equilibración entre la asimilación y la acomodación, según otros autores.

de las veces) para explicar cómo aprendemos las personas y establecen un sistema organicista formado por los estudiantes y el medio ambiente en el que están. El aprendizaje es el resultado del intercambio dinámico entre estudiantes y medio.

La inteligencia cultural

Algunos métodos didácticos basados en teorías cognitivas, como el conductismo (especialmente las teorías de Thorndike, 1913 y Hull, 1943, sobre el aprendizaje por refuerzo) o las teorías cognitivas enfocadas desde un punto de vista individualista (Tolman, 1977; Greeno, 1989, etc.), conducen a la construcción de enormes brechas entre las personas que "saben" y las que "no saben". Las expectativas que cada cual crea sobre sí mismo, según esté etiquetado como "persona que sabe" o como "persona que no sabe", son muy diferentes. Mientras que la persona que "sabe" desarrolla una imagen positiva y motivadora de la escuela, a quien "no sabe", a menudo, le ocurre precisamente lo contrario.

Este fenómeno es una barrera muy importante que dificulta el aprendizaje de todas las personas y agudiza situaciones de desigualdad que se producen dentro del aula, porque crea bajas expectativas que al final acaban por autocumplirse.[205]

---

[205] La desigualdad que se produce entre las diferentes personas tiene causas tanto individuales como sociales. Por un lado, cada persona es diferente, tiene una forma de pensar y de interpretar la realidad propia, motivada por su propia biografía. Pero, por otro lado, es importante resaltar que las desigualdades también tienen una vertiente social. Numerosas investigaciones (Bourdieu, 1979; Bernstein, 1988, 1989, 1993; Baudelot y Establet, 1971, etc.) dejan constancia de esa desigualdad social desde diferentes puntos de vista (con alguno de los cuales no coincidimos por ser claramente reproduccionistas de esa desigualdad que denuncian). El grupo social de pertenencia (Wright, 1984), el contexto de vida, la tradición cultural, la familia, el barrio, etc., son algunos de los elementos sociológicos que explican las diferencias entre las personas. Y todas estas diferencias se manifiestan dentro del aula, donde es importante que exista una orientación clara hacia la igualdad de oportunidades, para que todas las personas (independientemente de dónde provengan) puedan tener acceso al mismo nivel de conocimientos y tengan las mismas ocasiones de desarrollar sus inquietudes y sus sueños.

Sin embargo, en una clase donde se aplica un método de enseñanza basado en el aprendizaje dialógico, esto no ocurre. Desde el aprendizaje dialógico se desarrolla una metodología didáctica basada en estrategias cognitivas y que potencian las capacidades de todas las personas por igual.

La *inteligencia cultural* es una característica del aprendizaje dialógico[206] que deja constancia de la diversidad de formas de entender los conceptos que se aprenden dentro del aula. Todas las personas tenemos inteligencia. Lo que ocurre es que cada cual desarrolla más unas formas de inteligencia que otras. En el aula de ordenadores había una mujer que aprendió a encontrar sola la calculadora del *Windows* y a partir de aquel momento ya no volvió a utilizar el papel para hacer las operaciones necesarias para resolver las diferentes actividades que aparecían en el ordenador. Era una señora terriblemente inquieta, ávida de saber nuevas cosas, que quería conocer las entrañas del ordenador y encontrarle todas las utilidades posibles. Se trataba de una mujer que no había ido nunca a la escuela, pero que aprendió matemáticas (entre otras cosas) gracias a que un hombre de su pueblo le enseñó y le ponía deberes todos los días.

La consideración del saber previo propio

Otro elemento a resaltar dentro de las variables cognitivas sociales es lo que denominamos “saber previo”. Todas las personas tenemos una experiencia de vida que nos marca y que nos aporta diferentes maneras de resolver problemas de la vida cotidiana y esto es particularmente cierto en el caso de la educación de personas adultas.[207]

[206] Flecha, 2000.
[207] Tal vez ésta sea una de las diferencias más marcadas entre la educación infantil y la educación de personas adultas.

En la Unión Europea hace años que se están realizando importantes esfuerzos en el reconocimiento académico de las habilidades y de las capacidades que cada persona ha desarrollado a lo largo de su vida. Varios países (como el Reino Unido, por ejemplo) han institucionalizado este esfuerzo, las "políticas APEL" (políticas de reconocimiento de la experiencia previa). Mediante métodos diversos, como el *portafolio* o la *entrevista*, las escuelas reconocen y acreditan aquellos conocimientos del currículum que tienen las personas.[208] La Unión Europea ha financiado diversos *proyectos Sócrates* para difundir y dar a conocer las "políticas APEL".[209]

Las mujeres del grupo de matemáticas proceden de diferentes ambientes y han tenido una experiencia de vida muy diferente todas ellas. Así, encontramos a personas que no han conocido la escuela y a otras que salieron disgustadas de ella o que tuvieron malas experiencias. En el mismo espacio comparten la clase con otras mujeres que tienen buen recuerdo de la escuela, pero que debido a las circunstancias sociales de la época tuvieron que abandonar los estudios para ocuparse de las tareas de la casa. Todas estas realidades configuran un mosaico diverso de experiencias, sensaciones, y conocimientos, que compartido, da lugar a un entorno de aprendizaje igualitario.

Durante las entrevistas las personas adultas destacaban la importancia de este tipo de conocimientos adquiridos a lo largo de sus vidas. De todas maneras, en un primer momento, prácticamente siempre estos conocimientos aparecen desligados de la noción de "saber matemático" y las personas adultas no los relacionan hasta que no se produce el debate sobre la distancia que separa las "matemáticas

[208] Ésta es una práctica que en España todavía no está institucionalizada y que se deja a la discrecionalidad de cada centro educativo de EA, que es quien decide reconocer la experiencia previa de las personas adultas y cómo hacerlo (mediante examen, entrevista, portafolio, etc.).
[209] Es significativo que un proyecto de la Comisión Europea sobre APEL (en el que CREA ha participado) se renovó en dos ocasiones consecutivas, aspecto que indica la importancia que se otorga a este tipo de proyectos.

académicas" de las "matemáticas de la vida real". Esto es un ejemplo de la paradoja de la "invisibilidad" de la que habla Niss (1995) en sus artículos y constituye un claro elemento exclusor que dificulta el aprendizaje de las matemáticas, porque las mujeres del grupo creen que ellas "no saben matemáticas" cuando existen numerosos ejemplos de lo contrario, como iremos viendo.

La creación de sentido

Otro dato revelador es la apropiación del lenguaje matemático por parte de las personas participantes. Esta "apropiación" no se hace como algo carente de sentido: las citas que se adjuntan muestran como cada palabra, que se refiere a un símbolo o a un procedimiento matemático, se utiliza como herramienta para explicar cómo se resuelve esa situación concreta.

B.- ah, sí, claro, si hay un puntico aquí. Que son 4 por 3, 12, no? Pero menos. Pero ahora, menos por menos es más. Porque has puesto aquí más. Bueno, ahora ya lo veo. Ahora ya está. Y ahora hay que sumarle los 36. Vale, ya está. claro, son menos diez. Eso está cogido ya. Vale, ahora vamos a éste.

Esta "apropiación" muestra que las personas participantes adquieren la nomenclatura y los procedimientos y "se los hacen suyos", es decir, los dotan de sentido.

Quisiera distinguir claramente entre este tipo de sentido y el "sentido matemático", que es un concepto totalmente diferente. El "sentido matemático" es una idea que nos remite al propio significado de las matemáticas. Newman (1969), en la introducción a los seis artículos que presenta en *Matemática, verdad, realidad*, escribía sobre lo que significan las matemáticas:

> "Las afirmaciones matemáticas son constrictivas, pero su fuerza es de una naturaleza especial: son verdaderas, pero su verdad está definida de un modo peculiar. El razonamiento matemático es riguroso y deductivo y las proposiciones matemáticas son simplemente las consecuencias de aplicar ese razonamiento a ciertos axiomas primitivos." (Newman, 1969: 6).

Aunque existen diversos puntos de vista sobre lo que hace que un argumento pueda calificarse con el adjetivo de "matemático", tal y como reconoce Newman (1969), parece que está comúnmente aceptado por la comunidad científica internacional, que el sentido matemático de un argumento reside en el cumplimiento de unos determinados rasgos relacionados con un método y unos procedimientos de carácter deductivo, más o menos rigurosos, y sistematizados de acuerdo con algún tipo de criterio axiomático. Se trata de un "sentido" ligado al objeto de aprendizaje desde el punto de vista instrumental. Sin embargo, cuando nosotros utilizamos el conjunto de palabras "creación de sentido", no nos estamos refiriendo en absoluto a este tipo de "sentido" que acabamos de explicar.

La "creación de sentido" es un rasgo del aprendizaje dialógico.[210] Estas palabras indican un fenómeno: la apropiación que hace una persona de un aprendizaje en la escuela. Así, se produce "creación de sentido" cuando el objeto de estudio deja de ser un concepto frío, abstracto y lejano, y pasa a formar parte de la vida de la persona (del *mundo de la vida cotidiana*, en lenguaje fenomenológico). De este modo, por ejemplo, la lectura no deja de ser un aprendizaje. No obstante, en el momento que esa "lectura" abre las puertas al conocimiento y a la autonomía de la persona, para desenvolverse con total libertad en las más diversas situaciones, deja de ser un simple aprendizaje. Entonces se convierte en un conocimiento lleno de sentido y de significado para la persona, que de repente es capaz de dejar de depender de otras personas para moverse por un mundo alfabetizado.

Lo mismo ocurre con el aprendizaje de las matemáticas. En el momento que alguien aprende a sumar y restar, deja de depender de terceras personas y es más libre en el mundo que le rodea para tomar decisiones. El sentido de ese aprendizaje es precisamente esa libertad,

[210] Flecha, 2000.

ese conocimiento, que abre las puertas a nuevos horizontes, antes vedados a la persona. Por tanto, crear sentido, para nosotros (y desde la perspectiva del aprendizaje dialógico), es crear las oportunidades para acceder libremente al conocimiento, no aprender mecánicamente retahílas de significados en listas inmensas de conceptos.

> Entonces iba yo al banco y me decía las cosas y, a pesar de que yo las entendía, pues como que no las entendía. Me hacían firmar y bueno, no podía ni firmar, de lo... que me temblaba la mano.

Cuando analizamos lo que ha ido ocurriendo en el aula de informática, así como las entrevistas y otra documentación que hemos acumulado a lo largo de estos dos años, vemos detalles que muestran la creación de ese "sentido" del que estamos hablando. Por ejemplo, una señora del grupo de matemáticas dialógicas explicaba que tenía mucho miedo de ir al banco, porque no entendía nada y eso le creaba muchas inseguridades. Después de un año en la escuela, la misma persona dice que esa inseguridad que tenía en espacios públicos, donde era necesario tener una serie de conocimientos adquiridos, la ha superado.

> Cuando vine a hacer certificado, la primera tarde, le dije a la Rosa, mira, yo me pongo aquí en una mesa, yo solita, porque como me miren las señoras, yo no voy a escribir. Y nada, y a los dos días me puse y, ahora sí, ahora ya lo he superado.

El análisis de situaciones como ésta (y otras parecidas) muestra como la "creación de sentido" propia del aprendizaje dialógico es un rasgo fundamental en el aprendizaje. Es un ingrediente de la ilusión por el aprendizaje que motiva profundamente a las personas, porque las hace más libres y más autónomas. Las personas adultas del *Grupo de matemáticas dialógicas* en ningún momento han aprendido para "superar un examen". Esas personas van a la escuela de adultos por el gusto de aprender y tener más conocimientos, para poder depender menos en la toma de decisiones que todos tenemos que afrontar en nuestra vida cotidiana. Y la enseñanza tiene sentido por eso, no por saber el nombre de una función matemática concreta o por ser capaz de calcular proporciones con los ojos cerrados. Por este motivo, la relación que tienen las personas con los contenidos matemáticos queda supeditada al sentido que encuentran en el aprendizaje de esos contenidos.

La repetición

Para las personas participantes "aprender" no significa saber recitar la lección, significa mucho más. Las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* de la escuela afirman que existe una diferencia clara entre "repetir la lección" y "entenderla".[211]

Esa "diferencia" tiñe el concepto de matemáticas y aparece, a menudo, en el discurso de las personas adultas que afirman querer "aprender" matemáticas. Aprender implica "saber" el significado de aquello que se está haciendo. Y hay una diferencia muy grande entre aquellos ejercicios que se resuelven de una manera mecánica y aquellos otros que implican un esfuerzo de razonamiento lógico-matemático, como comentábamos ya en el apartado sobre "las alusiones al método de enseñanza".

Saber hacerlo de una manera, de otra, el entenderlo...

A lo largo de las entrevistas, las mujeres del grupo entretejen sus reflexiones sobre las matemáticas con su experiencia respecto a la escuela. En estos pasajes construidos de recuerdos pasados, varias de esas personas critican la forma en que les enseñaron las matemáticas cuando eran más jóvenes. Como ya hemos visto en el apartado sobre el *método de aprendizaje*, en la escuela franquista los maestros aplicaban métodos de enseñanza basados en procedimientos totalmente conductistas: repetición, premio y castigo, asociación rápida de ideas, etc. Las personas del grupo de matemáticas se quejaron varias veces que eso no era aprender matemáticas, ni nada, y muestran una preferencia clara por el contenido de las clases de matemáticas que hemos visto juntos y juntas, durante las horas que pasamos en el aula de informática.

[211] Alsina sintetiza muy bien esta idea en la introducción de la lección magistral que pronunció para abrir el curso 2002/2003 en el edificio del teatro del Campus Mundet de la UB. Destaco aquí un fragmento: *"Escarlata: ¡Oh Red! Lo han destruido todo. No saben las tablas, no saben los afluentes del Ebro, no conocen lo que es el esfuerzo... ¿a dónde iremos a parar? Red: Pitjor que nosaltres no crec que surtin, Escarlata. Nosaltres no vàrem aprendre res de debó. Vàrem ser cotorres esforçades de taules i llistes però res més."* (Alsina, 2002: 7).

Las personas participantes tienen una postura muy crítica y piden que se les enseñe el significado de aquello que están haciendo. No quieren copiar las operaciones que aparecen en la pizarra simplemente: exigen entenderlo.

Las mujeres del grupo de matemáticas prefieren que se expliquen los contenidos poco a poco, hasta entenderlos y piden que se vaya por pasos, de lo más sencillo a lo más complejo.[212]

Sin embargo, a pesar de ese discurso, lo cierto es que durante las sesiones en las que estuvimos juntos y juntas, la secuenciación de los contenidos no fue una variable especialmente relevante de los aprendizajes, porque la misma persona que tenía problemas con un ejercicio supuestamente sencillo, después resultaba que era capaz de resolver el caso más complicado, tranquilamente.

Las dificultades no se encontraban en la secuenciación, sino en los conocimientos previos de la persona y la forma de preguntar las cosas. Ejemplo de ello fue el paso de unas cantidades a otras inmediatamente contiguas, pero que implicaban un cambio de unidad.

La comprensión

Como decíamos en el apartado anterior, las mujeres del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela de La Verneda afirman que quieren entender lo que hacen en el aula de ordenadores. Ahora bien, ¿qué significa entender un concepto matemático? Dice Chamorro (2003) que:

[212] La idea de secuenciación también está presente en el propio diseño de las páginas web, donde las primeras actividades siempre son más sencillas que las últimas, de manera que el grado de dificultad (si es que se puede señalar algún tipo de medida) es ascendente.

> "El enunciado de un problema es un escrito matemático particular que tiene características propias, podríamos incluso decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión la adquisición de ciertas claves y alguna dosis de entrenamiento." (Chamorro, 2003:101).[213]

Tal y como advierte Godino (2002), en la comprensión tenemos que distinguir dos elementos: el objeto de conocimiento y el proceso de conocimiento.[214] Citando la distinción que hace Skemp (1980) entre *comprensión instrumental* y *comprensión relacional*,[215] Godino elabora un modelo de competencias que recoge diferentes procesos matemáticos que intervienen en el fenómeno de la comprensión.

Godino nos habla de la resolución de problemas, del razonamiento y de la prueba, de la comunicación, de las conexiones y de las representaciones, como procesos que intervienen, de una manera u otra, en el fenómeno de la comprensión matemática. A la luz de sus propuestas podemos identificar alguno de estos elementos en el propio discurso que utilizan las mujeres del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela. El proceso de la comunicación, por ejemplo, es clave.[216] Siempre, cuando las mujeres explican algún proceso matemático, hacen el esfuerzo de ordenar sus ideas y buscar las conexiones lógicas, para que su discurso sea coherente y verdadero.

E- cuatro más cinco nueve... éste está bien. Menos ocho más... menos diez, menos tres, menos cuatro. Éste me da menos cuatro.
B- Sí, bueno, es que éste lo hice aquí y me dio menos cuatro...
E- Sí, menos cuatro. Muy bien. ¿Éste lo hiciste tú?
B- Sí, éste lo hice yo, sí. Ahora, éstos ya, lo que tú me dijiste, al tanto, que ahora...
- A ver... dos y seis ocho. Después aquí tenemos cuarenta y cuatro negativos y siete negativos son 51 negativos...
B- Pero a ver, ¿éstos...? a ver, que yo me entere bien porque si no... esto se cuentan ocho positivos. Y éstos siete negativos? ¿pero se le quitan a éstos?
E- No, no, primero lo de dentro del paréntesis...
B- Ah, primero lo de dentro del paréntesis. Vale, vale...
E- Y entonces venimos aquí. Tenemos 51 negativos y tenemos... son treinta y seis...
B- O sea, que esto como dice más es más, pero negativos, porque este es más grande, el 44 es más grande?

[213] Chamorro, 2003.
[214] Godino, 2002.
[215] Skemp (1980) define la comprensión de la siguiente manera: "*Comprender algo significa asimilarlo dentro de un esquema adecuado.*" (Skemp, 1980: 50). Después se refiere a la naturaleza subjetiva de la comprensión y distingue entre la asimilación directa de las ideas matemáticas (en referencia clara a los conceptos utilizados por Piaget de asimilación y acomodación) y la reflexión sobre los esquemas interiorizados. De hecho, Skemp establece una diferencia clara entre la inteligencia intuitiva y la inteligencia reflexiva.
[216] Godino (2002) afirma que la comunicación sirve para organizar y consolidar el pensamiento matemático. Al comunicar las ideas matemáticas, tenemos que analizar previamente el pensamiento matemático y los procesos que queremos comunicar a los demás. Por otro lado, siempre que se establece una conversación entre dos (o más personas) sobre matemáticas, ocurre que tenemos que hacer el esfuerzo de interiorizar lo que nos están diciendo, analizarlo, y crear una respuesta coherente con la información que hemos recibido. Y eso es una forma de comprensión del contenido matemático.

> Sí, bueno, esto que pusiste tú... Pues yo, a partir de esto, todo esto ya lo soluciono <se refiere a una ecuación que me está enseñando y se refiere a la parte que va hasta la resolución del m.c.m. y la eliminación de los denominadores que previamente ha igualado>. Pero entonces, esto, pues yo puse: 2 por 3 aquí 6. Que yo no sé si está bien o está mal. Y dos por equis, pues, igual a 2x, yo qué sé. Esto no lo sé. Y luego, éste, esta X es ésta, no? Y, este 2 pues es el mínimo común, porque sólo hay un número. Este dos yo lo multipliqué dos veces por 180, y me salió esto. Pues a partir de aquí ya, pues las equis, nueve equis, y esto, dividido por nueve, 40. Y esto. A partir de esto muy bien. Pero esto, lo puse porque estaba ya puesto. Pero yo no sé, porque esto qué quiere decir? Tres equis igual a tres equis, igual a cuarenta, ciento veinte. Y, yo digo, y eso qué quiere decir? Y, yo pensé, bueno, pues cuarenta...

Analizando el discurso de las personas que han participado en el trabajo de campo, se constata que en el fenómeno de la comprensión intervienen la mayor parte de los procesos que señala Godino (2002). Es cierto, sin embargo, que por lo general las mujeres prefieren alcanzar los resultados correctos a las actividades y que sin el resultado, a veces, la comprensión del concepto en cuestión es imposible.

De hecho, como veremos más adelante, cuando analicemos la variable instrumental, algunas de las mujeres del grupo repasan las actividades que han realizado en el aula de ordenadores en sus casas, hasta encontrarles el sentido.

Este hecho concuerda con Skemp (1980) en que el elemento instrumental de la comprensión es, a menudo, más “popular” que la parte relacional. No obstante, tal vez fuese necesario indagar más el sentido en que se relacionan ambas partes. El aspecto que resaltamos aquí es que los componentes prácticos, discursivos y lingüísticos del aprendizaje de cada situación matemática, en un contexto con aprendizaje dialógico, afloran en el discurso de las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas*. Y lo hacen mediante las conexiones que establecen entre los diversos pasos necesarios para llegar a la solución de un ejercicio, cuando los explican al resto de compañeros y compañeras o cuando una señora señala sobre el libro la forma de representar la solución, mientras le explica a otra compañera el significado de una actividad matemática. El análisis semántico que propone Chamorro (2003) nos sirve para ver esos elementos prácticos, discursivos y lingüísticos de los que habla Godino (2002).

Durante las transcripciones nos encontramos con varios ejemplos en lo cuales puede apreciarse perfectamente cómo las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* desarrollan paso a paso su razonamiento, hasta llegar a la solución. En el ejemplo que adjuntamos en la cita de la página anterior, vemos como esa persona desarrolla un proceso argumental para alcanzar la solución de una ecuación en la que aparecen números quebrados, sabe que tiene que utilizar al *m.c.m.* para llegar a la solución y reconoce los diferentes pasos para hacerlo. Esta persona, mediante sus explicaciones, nos está comunicando su argumento. El diálogo, por tanto, es una forma de aprendizaje que obliga a la persona a organizar la información y encontrar las conexiones lógicas, de manera que su discurso sea coherente y capaz de explicar todo el proceso. Por tanto, existe una relación clara entre el diálogo y la comprensión, por lo menos en el sentido que anuncia Godino (2002) en su trabajo.

Los errores conceptuales

Respecto a la comprensión, un elemento al que nos tenemos que referir son las ocasiones en las que se produce un error, es decir, esos momentos en los que un concepto matemático es mal aprendido o no se acaba de ver su significado correcto.

Ausubel y Novak (1983) hicieron de este hecho la base de su teoría constructivista (desde el punto de vista de los 'saberes' previos). En la didáctica de las matemáticas el error también ha sido un elemento sugerente en cuanto a propuestas, como deja patente el trabajo desarrollado por la línea francófona de Brousseau (1983) y Chevalard (1991).

> B.- Sí. Bueno, pero a ver, éstos digamos que son negativos, aunque ponga más, pero se cuentan negativos... pero éste no tiene paréntesis, bueno, es igual, estará dentro del paréntesis...

Uno de los peores elementos exclusores que se han puesto de manifiesto en el diálogo con las personas participantes es la asunción de los errores conceptuales. En ocasiones se han producido situaciones en las que una persona desconocía el significado de algún concepto que se estaba utilizando en ese momento y, pese al desconocimiento, han continuado resolviendo los ejercicios. Ésta es una actitud contraproducente, porque crea malos hábitos que después son difíciles de transformar.

En una situación de diálogo abierto e igualitario es difícil que ocurran casos como éste, porque todas las personas participan y aprenden juntas, de manera que cuando alguna de ellas hace algún comentario que no es correcto, el resto de compañeras enseguida se lo hacen notar y entre todas buscan la respuesta correcta. En estas circunstancias asumir un error conceptual resulta más difícil.

En cambio, en contextos de aprendizaje individualistas sí que se encuentran situaciones en las que la persona asume como correcto un conocimiento que es erróneo (de hecho existe toda una línea teórica en didáctica de las matemáticas que se dedica al estudio de estos fenómenos y cómo transformarlos: la transposición didáctica). En ocasiones, algunas de las dificultades que tienen las personas participantes están motivadas por conceptos erróneos que tienen asumidos.

Un ejemplo muy usual es pensar que siempre que encontramos el signo negativo indica una resta. Como es bien sabido, el signo negativo puede significar la idea de "número negativo" o la idea de "operación de la resta". Y son dos significados muy diferentes. La contradicción aparece cuando en una resta de dos números enteros negativos el resultado es una suma, porque se trata de un resultado completamente contradictorio con la idea (de sentido común) de lo que significa restar.[217] En este caso se puede apreciar claramente la existencia de un obstáculo epistemológico, que dificulta la comprensión del concepto "operación de la resta". Y esto es una barrera para el aprendizaje.

[217] Normalmente, cuando se explica el significado del signo – (que es un signo totalmente arbitrario), se asocia a la operación de "resta". Pero en matemáticas, al ser un símbolo polisémico, ocurre que cuando aparece el otro significado que tiene, da lugar a errores, no porque la persona desconozca el significado de "valor negativo", sino porque no lo asocia con ese símbolo.

Las metáforas

En muchas ocasiones las personas utilizamos metáforas en nuestro discurso, como ejemplos para explicar nuestras ideas, nuestras creencias, la manera que tenemos de hacer las cosas o cómo las entendemos nosotros y nosotras. En este sentido, las metáforas son recursos cognitivos muy útiles, que nos permiten comunicarnos con otras personas y hacerles entender una idea cualquiera mediante un llamamiento (implícito o explícito) a un referente de conocimiento, que necesariamente tiene que ser compartido.

Las metáforas son una analogía que se hace entre dos fenómenos entre los que se establece una relación de correspondencia.[218]

En didáctica este recurso se suele utilizar como herramienta que "facilita" el aprendizaje de un concepto matemático abstracto. Lo que se hace es establecer una analogía con algún fenómeno de la vida cotidiana conocido por la persona que está aprendiendo y que le resulte fácil de identificar.

En este caso, nos hemos encontrado con que algunas de las personas participantes recurren al uso de las metáforas cuando quieren explicar cómo han entendido el procedimiento de resolución de un problema matemático o de una situación matemática concreta.

Una de las metáforas que más se suelen utilizar es la "metáfora del dinero". Al explicarse, las personas participantes recurren frecuentemente al procedimiento de poner un ejemplo "con dinero",

---

[218] Existen varios tipos de "metáforas", según sea el sentido de la relación entre el referente y la idea. Según el Diccionario de la Real Academia Española, una metáfora es una palabra que procede del latín *metaphora*, que a su vez procede del griego μεταφορα. Esta palabra es un "*tropo que consiste en trasladar el sentido recto de las voces en otro figurado, en virtud de una comparación tácita*". También viene definida como "*alegoría en que unas palabras se toman en sentido recto y otras en sentido figurado*". (Real Academia Española, 1980: 872). Las metáforas pueden ser directas o indirectas, según la relación que exista entre el referente y la idea, o bien metáforas puras cuando no existe el referente.

que les resulta mucho más cercano a la realidad. Las personas participantes utilizan una estrategia pragmática para explicar los conceptos y los procedimientos matemáticos y que toma como referente la vida real.

B- Sí, bueno, es que éste lo hice aquí, y me dio menos cuatro...
(...)
B.- Eso, o sea que lo que te da lo multiplicas por... esto se llama denominador?

Este tipo de explicación se caracteriza por ser particularista y práctica, rasgos propios del modelo que hemos denominado como "matemática de la vida real". En el siguiente ejemplo, señalado al margen, se puede apreciar claramente cómo la persona participante comprende perfectamente el concepto de "resta de números enteros". Esta persona, para explicar el concepto, recurre a la "metáfora del dinero", ya que le resulta útil como herramienta cognitiva para argumentar de dónde sale el resultado que expresa y explicarlo al interlocutor. Además, es importante notar que ella es perfectamente consciente de que sabe cómo resolver el problema, tal y como expresa en la última frase.

15.1.2. *Los componentes afectivos*

La vivencia del bloqueo

En primer término trataremos un elemento exclusor: el bloqueo. A menudo los conocimientos previos que están equivocados ocasionan problemas de aprendizaje. Sin embargo, también es cierto que otras veces ocurre que la persona se bloquea y no es porque exista una base errónea de conocimientos, sino simplemente porque no se entiende el concepto y el profesor tampoco logra comunicarlo.

A lo largo de las entrevistas que hemos realizado, hemos podido ver varias situaciones de bloqueo. A veces el problema era la actividad, que implicaba el uso de una serie de procedimientos matemáticos que todavía no se habían asumido. Éste es el caso del uso de la constante de proporcionalidad. En el vídeo digital se puede ver como las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* de la escuela saben resolver las actividades sobre proporciones, pero no utilizan la constante de proporcionalidad, sino que aplican un método más intuitivo, como es el cálculo aproximativo. En otros casos lo que ocurre es que no se tiene suficiente conocimiento del funcionamiento de la herramienta. A veces una persona se ha quedado parada por no saber cómo pasar a la página web siguiente, por ejemplo.

Las personas participantes, cuando se encuentran ante una dificultad, a veces se bloquean porque no saben por dónde continuar para encontrar la solución. Entonces las personas participantes generan un discurso negativo en el que se encierran y que impide cualquier iniciativa de transformación para superar ese momento de crisis. En esas ocasiones suelen aparecer sentimientos y sensaciones negativas, que influyen emocionalmente a la persona y dificultan el aprendizaje totalmente. ¿Cómo superar estos momentos? En estos casos lo mejor es calmar los nervios y preguntar, tal como comentan ellas mismas.

E.- ¿Y tú qué haces para entenderlo? Cuando una cosa no la entiendes, ¿cómo te lo montas? G.- Si no lo entiendo, la dejo. Cuando me pongo nerviosa, la dejo. Entonces, ya, pues déjalo estar... Entonces otro día cojo y me miro de entenderlo y si no que me lo expliquen.

Coben (2000) propone un concepto para analizar este fenómeno, que es lo que ella llama "pared de ladrillos" (*the brick wall).* Coben utiliza este concepto para referirse a ese punto de la comprensión de los conocimientos matemáticos (difícil de identificar) que es imposible de rebasar. Se trata de un umbral de conocimiento a partir del cual todo lo que está al otro lado resulta ser indescifrable e incomprensible para uno.[219]

En ocasiones alguna persona del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela de La Verneda – Sant Martí se ha refugiado en un discurso pesimista como respuesta al fenómeno cognitivo del bloqueo.

[219] "*The brick wall – the point (usually in childhood) at which mathematics ceased to make sense; for some people it was long division, for others fractions or algebra, while others never hit the brick wall. For those who did, the impact was often traumatic and long-lasting."* (Coben, 2000: 54).

El hecho de que digas, pues mira, pues me ha salido, pues parece que no seas tan tonto. ¿Verdad?

A.- Sí, por ejemplo... A ver, a mí me gusta todo, pero lo que más me gusta es solucionar los problemas, digamos, y las cuentas, cuando... cuando hay que dividir, restar o multiplicar. Pues eso me gusta.

D.- Yo el ordenador el primer día de venir, pues yo lo tocaba, y me temblaba mucho la mano, bueno, es que, es que, nada, es que, jolines, no sé si me atrevía. Y ahora no, ahora veo que ya lo he superado un poco y me gusta cantidad el ordenador. Principalmente cuando hago un ejercicio y me pone: eres muy buena con los números, yo digo, uy, que contenta me pongo. Y me emociono yo sola. Es verdad. Sabes que aquel día que estuvimos tú y yo en el ordenador, es que me gusta, me gusta... Es que yo cuando hago una cosa y me sale bien, me pongo contentísima.

Sin embargo, la experiencia en la clase con las personas del grupo muestra cómo entre todas buscan vías alternativas para vadear "la pared" y conseguir resolver los problemas matemáticos, como muestra la cita anterior. Este testimonio ejemplifica uno de los principios de la pedagogía de la liberación de Paulo Freire: "*las dificultades se pueden transformar en posibilidades*" (Freire, 1998).

El éxito

Sin embargo no todo son aspectos negativos. Las mujeres del grupo de matemáticas, mediante el diálogo, logran superar todos los días un montón de barreras al aprendizaje. Por esto, otro de los elementos importantes que aparece en el análisis de las entrevistas es el éxito en la resolución de los problemas. Para las personas participantes alcanzar los resultados correctos es clave, porque se demuestran a sí mismas que son capaces de encontrar la solución a problemas matemáticos.

El resolver un ejercicio con éxito nos remite a una de las ideas conductistas que, tal vez, todavía pueden tener cierta vigencia (a pesar de que ha sido demostrado que la perspectiva conductista es muy limitada como explicación del aprendizaje). Se trata de la idea del "refuerzo positivo". Las personas adultas, cuando ven que son capaces de resolver alguna de las actividades de las que aparecen en la pantalla del ordenador, se motivan muchísimo y eso es un espaldarazo importante a la confianza que tienen en sí mismas y a la seguridad que muestran después en la resolución del resto de las actividades. En la cita adjunta se puede apreciar cómo la persona entrevistada manifiesta una motivación clara, cuando recibe un refuerzo positivo de parte de la máquina. Este elemento es muy importante a la hora de diseñar materiales didácticos en soporte informático.

Además, resolver problemas para algunas personas es una actividad motivadora en sí misma, porque se une a las ganas que tienen por aprender matemáticas y saber resolver los ejercicios que se les presentan. Nos encontramos entonces con casos de personas que tratan de comprender cómo se resuelve una actividad matemática en concreto e indagan con todas las herramientas que tienen a su alcance hasta encontrar tanto el resultado, como la manera de llegar a él (es decir, el procedimiento matemático).

Esto significa que muchas veces motivación y cognición son dos aspectos que aparecen relacionados directamente (sobre la base de un contenido instrumental).

A.- Y las matemáticas yo las cojo mucho: el libro lo tengo ya gastado. Y, y... y el cuaderno que traigo también, porque yo, a mi manera, soluciono los problemas, pero a mi manera, luego a lo mejor los veo, los veo que están hechos... hay unos ejercicios en matemáticas que son así: tienen una raya y otra raya. Y yo muchas veces pues digo y esto ¿de qué va? Entonces yo, con la maquineta los saco, y digo, pues esto está bien. Pero luego, claro, como hay los signos y hay la raíz cuadrada y hay esas cosas, pues no sé de qué va: yo sólo los soluciono, pero después no sé de qué va, porque no los entiendo, no lo entiendo...

15.1.3. *Los componentes instrumentales*

La percepción

La percepción es un elemento claramente subjetivo. Sin embargo lo situamos en esta sección, porque nos referimos al fenómeno de la percepción que tienen las personas del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela sobre los contenidos instrumentales de las actividades.

Una de las hipótesis principales de este trabajo es que existe una brecha entre las “matemáticas académicas” y “las matemáticas de la vida real”, que se manifiesta de diferentes formas (hipótesis 1). Esta afirmación que hemos enunciado de acuerdo con la lectura de diversas investigaciones sobre el tema, se ha confirmado en buena parte durante el trabajo de campo que hemos realizado. En el propio discurso de las personas participantes aparecen elementos que nos llevan a pensar en la existencia de una brecha entre estos “dos tipos” de matemáticas.[220]

Esto indica que existe una conciencia generalizada de que tal brecha existe. Lo cual es positivo, porque las personas que “ven” dicha brecha son conscientes de que ellas también saben matemáticas (quizás otro tipo de matemáticas, pero matemáticas al fin y al cabo). Por esto, la percepción consciente de la existencia de esta brecha es un elemento claramente positivo, porque estimula el aprendizaje en la medida que las mujeres del grupo son conscientes de que ellas también saben matemáticas (aunque sea de una forma más intuitiva y no tan académica).

G.- “Las matemáticas que hacemos las mujeres, no las hacéis los matemáticos. Porque para hacer cada ejercicio tenemos que hacer saltos mortales. Vull dir, me vengo a referir, de que si tú, una mujer que sepa llevar el ordenador, bueno, hace maravillas, porque, porque mejor matemáticas que ésas, sabes, que llegas y que has pagado el bus, y cada vez pagas lo mismo, si este mes es lo mismo que antes, vull dir, con los recibos, con... bueno, con la cantidad de recibos que manejan en casa: el teléfono, el colegio, el tal... el entierro, todo.”

La práctica de ejercicios

“*Las cosas se aprenden poniéndolas en práctica y cuanto más se practica, mejor*”. Esta máxima recuerda las teorías conductistas que están detrás de los modelos didácticos tradicionales. La repetición[221] es un modelo que ha utilizado los principios de la frecuencia y de la proximidad temporal o ley del ejercicio de Thorndike (1913) como estrategias cognitivas de aprendizaje. Se trata de un modelo tremendamente popular, como ponen de manifiesto algunos de los testimonios de las personas participantes.

La práctica de ejercicios es una estrategia cognitiva subjetiva que hemos adquirido socialmente, porque este tipo de discurso ha sido el imperante en la mayoría de los contextos en los que nos hemos encontrado. Y sí que las personas participantes dicen que se aprende practicando mucho las actividades. La persistencia es un elemento claramente transformador.

[220] Ver el apartado “El descuido de las matemáticas en la vida real”.
[221] Watson, 1914. Gurthrie, 1952.

Lo que no queda claro es cuándo se produce ese aprendizaje, si es fruto de la repetición (que consigue generar una pauta de comportamiento, como dirían aquellas personas más cercanas al conductismo) o si lo que ocurre es que en algún momento de las “repeticiones” la persona logra captar el significado de la operación que está realizando y, entonces, es cuando dicha operación cobra sentido para ella y se puede decir que la ha aprendido.

> B.- Siempre, pero si tengo... mira, nada más que tenga... para que veas... nada más que tenga un poquito de papel, ya está. Antes de irme a dormir siempre hago cuentas, siempre: dos o tres
> (...)
> G.- Las haces una vez y otra vez y sí. Siempre se aprende, siempre.

Desde la Psicología del Aprendizaje las posturas son muy dispares. Mientras que algunas personas afirman que la repetición asociada a algún tipo de recompensa produce, a la larga, un resultado satisfactorio, otras personas afirman que el aprendizaje funciona en base a la interiorización de esquemas de conocimiento. Y hasta que una persona no es capaz de entender (es decir, dar sentido) un esquema concreto, no se produce ningún tipo de aprendizaje efectivo.

A lo largo del trabajo de campo que hemos realizado hemos visto como las personas que han participado señalaban la importancia de la repetición en la resolución de las actividades. Sin embargo, también hemos visto que por más repetición que hubiese, el aprendizaje no era efectivo hasta que la persona no era capaz de comprender el significado de un concepto matemático determinado. Es importante señalar que varias de las personas participantes entrevistadas vieron claramente la diferencia que existe entre responder a los ejercicios de la *web site* sin más y “captar la idea” de lo que estaban haciendo. Y esto sí que podemos decir, junto con todas esas personas, que es una diferencia clave en el aprendizaje.

> A.- Y entonces pues voy haciendo y hago tres números y miro y a lo mejor uno lo tengo bien y dos mal. O sea, yo lo hago y después me fijo a ver si lo he hecho bien o lo he hecho mal, que no me fijo porque a mí lo que me gusta es entender las cosas, porque así las hago, fijándome entonces no las entiendo y lo que quiero yo es entenderlas, pero vaya...

En todo el proceso el diálogo que se produce entre las compañeras permite debatir sobre diferentes formas de alcanzar un resultado y consensuar la forma que más clara resulta. La práctica de ejercicios lo que permite es poder tener material sobre el que discutir y debatir en la clase, para poner sobre la mesa los diferentes procedimientos de resolución y compartirlos entre todas.

La existencia de conceptos desconocidos

B.- Bueno voy a ponerlos, y uno por uno es uno. Y ahora los ceros... Son mil cajetillas... Ah, claro! Es que yo estoy liada en el exponente, estoy liada en el exponente. Pero claro, el exponente es que es 3 veces esto. Ya, ya, ya... bueno, pero ¿cómo lo hago ahora? Eso lo tengo que poner en limpio...

Otro de los problemas que nos encontramos a la hora de aprender matemáticas es la existencia de conceptos desconocidos. A veces suele ocurrir que en un problema, de repente, aparece un concepto desconocido, que bloquea a la persona que está tratando de resolver dicho ejercicio. Por ejemplo, en la cita adjunta la persona nos comenta que los exponentes suponen una dificultad para ella. Tal vez lo que ocurre es que el concepto de potencia y su representación simbólica (mediante la base y el exponente) es nuevo para la persona participante, que sí que entiende cómo funciona la multiplicación, pero se confunde en cuanto aparecen las potencias. De hecho, visualmente no es lo mismo escribir en la libreta 10 x 10 x 10, que 10^3. Para entender este tipo de notación es necesario comprender bien el concepto de potencia y las normas que rigen su funcionamiento. Y, aunque parezca lo mismo escribirlo de una manera que de la otra, para tener esta impresión (de que parezca lo mismo) hay que tener los conocimientos matemáticos necesarios para ello. En caso contrario, lo que ocurre es que las personas se confunden, mezclan conceptos (bastante parecidos) y esto se convierte en un obstáculo (propiciado por la notación matemática simbólica).

B.- Mil seiscientos veinticinco, menos cuarenta y cinco, menos cuarenta y cinco. De cinco a cinco cero, de cuatro a doce, seis-ocho, y llevo una. De una a seis cinco, y el uno qué se hace ahora, se baja también? Claro, porque no tiene... ¿Se hace así?
(...)
E.- Muy bien. Éstas ya veo que las controlas... Y a ver éstas, con un decimal: 2305 más 32,03.
B.- Sí. Espérate, no me digas nada, a ver si la sé poner. A ver, dos mil trescientas cinco. Treinta y dos... ¿Pero se pone la coma primero, no?

Lo mismo que ocurre con la multiplicación y las potencias y cuando introducimos en la clase el uso de números decimales. La aparición sobre el terreno de números que tienen “comas” supone la dificultad de saber cómo colocar esos números, requisito fundamental para ser capaz de resolver un problema sobre el papel.

La existencia de conceptos matemáticos desconocidos se convierte en un problema de aprendizaje, especialmente cuando se utilizan para explicar otros conceptos que también resultan nuevos para la persona. En esas situaciones resulta que la dificultad del nuevo concepto se ve incrementada por el desconocimiento de los procesos matemáticos que están asociados. Un ejemplo clave es la resolución de sumas o restas con números quebrados. Cuando no se ha terminado de entender el funcionamiento del *m.c.m.*, resolver una expresión del tipo "1/2 + 2/3 =" puede llegar a constituir todo un reto para la persona. Por eso es clave poder identificar estos vacíos, a fin de debatirlos en la clase y llegar a comprender todos los contenidos instrumentales del currículum de matemáticas.

> A.- Sí, ya, pero esto claro, esto es más fácil que hacerlo así con el mínimo común. Pero el mínimo común es más fácil para hacerlo yo porque, a partir del mínimo común, yo ya más o menos me lo sé. Pero cuando no me lo sé, ahora te enseñaré luego cómo las he hecho, bueno, las he hecho, he hecho dos <se refiere a dos ecuaciones>, bueno, que hay muchas cosas que las he copiado, pero no sé cómo van.

15.1.4. *Los componentes normativos*

Los símbolos matemáticos

Un aspecto a tener en cuenta que ha aparecido en bastantes ocasiones a lo largo del trabajo de campo es la escritura de los símbolos matemáticos. Con esto nos queremos referir a que es diferente, por ejemplo, hacer una multiplicación "de cabeza" que hacerla "sobre el papel".

> E.- Sí, 1025 por 0,24. Entonces hacemos una multiplicación normal... 4 por 5 veinte, me llevo dos, 4 por 2 son ocho, y dos 10, te llevas 1, cero y dos, cero, y una que te llevabas es una, y 4 por una es 4. Y abajo lo mismo. Dos por cinco, diez, 2 por 2 cuatro, cero, y dos. Total: 246.
> B.- Cero, cero, seis cuatro y dos. No, lo que no sabía yo, Javi, es que se ponía así para multiplicar. ¿Esto qué quiere decir, que son decimales?

En el caso de utilizar la libreta para hacerla, la operación se puede plantearse "en vertical" o "en horizontal". Normalmente se empieza poniendo los números en vertical, uno debajo del otro, con una equis al lado y una raya debajo del todo, que separa el enunciado del resultado. Entonces ocurre que la persona tiene que hacer toda una serie de movimientos con los números y conocer bien dónde tiene que apuntar los resultados, qué número multiplica a qué número, si "nos llevamos alguna", saber dónde se pone y a quién suma después, etc. En fin, hacer una multiplicación sobre el papel supone conocer toda una serie de normas que rigen la resolución de esta operación sobre el papel, sin las cuales es imposible lograr llegar al resultado (a pesar de que a lo mejor esa persona sepa perfectamente encontrar la respuesta "de cabeza").

Y algo parecido ocurre cuando se plantea la operación en formato horizontal.

A.- Sí, claro. Y de memoria, mira, de memoria estoy en... por las noches, los martes no puedo dormir porque estoy pensando: zicuzicuzi... y yo de mi cabeza lo saco y lo sé. Pero luego, cuando yo quiero hacer un ejercicio, tengo que poner: la mitad de no sé qué, la mitad de no sé cuántas, la octava, y yo qué sé, la octava muchas veces la pongo encima o al revés... no sé, eso no sé. Y no sé cómo lo voy a aprender, lo veo difícil.

En la cita adjunta, por ejemplo, destaca el concepto de "multiplicación normal". El adjetivo de "normal" indica que la persona que lo utiliza distingue entre una "multiplicación normal" y otra que no es "normal". En este caso, por el contexto, se ve claramente que la multiplicación usando números decimales es la que se considera como "no normal", en el sentido que rompe con los esquemas previos que tiene esa persona de lo que es una multiplicación. Formas del discurso como ésta es lo que nos lleva a identificar un concepto de las matemáticas más próximo al nivel intuitivo que al académico.

El análisis del trabajo de campo nos muestra, una y otra vez, que existe una gran distancia entre la forma de hacer las operaciones "de cabeza" y la resolución sobre el papel de las mismas operaciones. El hecho de tener que escribirlas utilizando los símbolos matemáticos correctos (matemáticas académicas) añade una dificultad al aprendizaje, porque la escritura implica el uso de los símbolos matemáticos, que a veces no se tienen bien familiarizados.

A.- Y yo pues a mi manera los resuelvo y todo los resuelvo a mi manera. Pero luego al colocarlos no sé, ¿qué te tengo que decir?

Por tanto, el conocimiento de las normas para colocar correctamente los números y hacer las operaciones adecuadas es un requisito indispensable para resolver las actividades. Y estos procedimientos suelen ser diferentes para las matemáticas académicas y para las matemáticas de la vida real. Su desconocimiento constituye una barrera que dificulta (cuando no impide) el aprendizaje de las matemáticas.

Los procedimientos matemáticos

La matemática está regida por un conjunto de símbolos y de normas que regulan las relaciones que se pueden establecer entre los diferentes símbolos (agrupados en axiomas, principios, conceptos, leyes, teorías, etc.). Saber matemáticas implica no sólo conocer dichos símbolos (que corresponderían al componente instrumental), sino también conocer y saber aplicar las normas que rigen los diversos procedimientos matemáticos.

En las citas señaladas al margen se puede apreciar cómo las personas adultas resuelven diferentes tipos de actividades, tales como operaciones básicas con números enteros, resolución de paréntesis, etc. Las personas van siguiendo el hilo de las operaciones, apuntan los resultados parciales y los retoman para proseguir con los cálculos, hasta llegar al final de la serie de operaciones.

Es importante resaltar el papel que tiene el diálogo en la resolución de las actividades. Las personas van comentando las operaciones que están realizando y preguntan para comprobar que están en el camino correcto. Por otro lado, también es importante resaltar el uso de normas popularizadas (como la conocida regla de los signos para los números enteros), como herramientas que permiten llegar al resultado correcto.

El uso del lenguaje matemático

Uno de los primeros elementos que hay que tener en cuenta dentro de las variables instrumentales objetivas es precisamente el lenguaje matemático, es decir, el conjunto de símbolos que se utilizan desde las matemáticas para modelizar y describir el mundo.[222] El lenguaje matemático formal se distingue del lenguaje natural porque es unívoco

<contexto: resolución de operaciones con números enteros. No hay un planteamiento del enunciado. Se trata de una operación planteada y se espera la respuesta de la persona participante> B.- 34 menos 36, eso son dos, más 12, son 14.
E.- No, menos 2 más 12... 12 menos 2:
B.- Ah, sí, sí, 10... a ver que yo me entere bien. Éste es esto, éste yo lo he sacado de aquí, y esto son treinta y cuatro. Y ahora, éstos son multiplicados porque tiene el puntico. O sea, que 12 por 3, hemos dicho que son 36. Vale. Ahora vamos aquí: menos 3, esto cuenta menos 3? O menos por menos es más? Ése es menos.
(...)
<contexto: resolución de una operación con paréntesis> B.- Bueno, ahora ya, como hemos quitado el éste, era más 4, menos 1, tú ya vas contando, así que son más 3. y ahora hay que hacer todo lo del paréntesis, digamos, que son 45, 47... 47 y 3 que tengo de aquí, no? Son 50. ¿O no son 50? Porque menos por más también queda menos.

[222] Alcalá, 2002.

y no está sujeto ni a interpretaciones arbitrarias, ni a dobles significados o exageraciones.

En las citas que se adjuntan vemos cómo personas participantes se esfuerzan en utilizar dicho lenguaje, para resolver las actividades que aparecen en la *web site*.

En estos ejemplos se aprecia cómo las personas participantes están operando con números enteros. A continuación se muestran casos referentes a otros contenidos instrumentales, como el concepto de número entero negativo o el concepto de denominador.

En todos estos ejemplos se pone de manifiesto cómo las personas adultas del *Grupo de matemáticas dialógicas* utilizan con soltura los diferentes conceptos e, incluso cuando no conocen el significado de alguno de ellos, también son capaces de utilizarlos para indagar cuál es su significado y cómo se utilizan.

B.- Entonces son: 45, 47, pero que da menos. 47, que son menos. Bueno. Y éste es multiplicado. 3 por 2 seis, pero como no tiene nada aquí, ¿qué es, positivo o...? Y ¿esta rayita, que había aquí una rayita?
E.- No, esta rayita era un corchete que cierra todo el paréntesis...
B.- Ah! era el paréntesis...
Bueno, vamos a ver si yo lo entiendo ahora. Así que esto se queda: 3 positivos, y esto es 47 negativos... ¿multiplicamos?
E.- Sí.
B.- Multiplicado... pero esto ¿se hace junto?
E.- Sí.
B.- 3... ¿ya se multiplica esto?

Otro elemento destacable es el uso de expresiones matemáticas o de conocimientos matemáticos en el lenguaje cotidiano, que han acabado por institucionalizarse en la jerga popular. Ejemplo de ello es la conocida “regla de tres”, que es una forma cotidiana de resolver ecuaciones de primer grado con una incógnita.

Sin embargo, también es cierto que el razonamiento lógico-matemático formal es complicado por sí mismo: existen procedimientos, reglas, normas, maneras de hacer, operaciones prohibidas, incongruencias, etc., que es necesario conocer para saber resolver una operación académica.

En matemáticas no todo vale. Existen unas normas que se tienen que respetar y su desconocimiento es una dificultad al aprendizaje matemático. Durante las entrevistas, la tertulia y las actividades que se realizaron para el trabajo de campo, aparecieron numerosas ocasiones de bloqueo debidas precisamente a este motivo que estamos comentando.

El estudio de las normas

B- Sí, bueno, es que éste lo hice aquí y me dio menos cuatro...
(...)
B.- Eso, o sea que lo que te da lo multiplicas por... esto se llama denominador?

Ya hemos comentado que las personas adultas suelen esforzarse en repasar los ejercicios realizados en la clase, hasta que entienden cómo funcionan y saben encontrar el resultado (y el por qué de ese resultado).

Algunas personas, cuando estudian las actividades, combinan, a veces, diferentes formas de llegar al resultado y las contrastan entre sí, para comprobar que por todos los caminos son capaces de llegar al resultado correcto.

Esta forma de hacer es particularmente fecunda, porque permite aprender a utilizar varias formas de resolver una actividad, lo cual redunda en un mayor aprendizaje.

15.2. El análisis de la relación entre la persona y el grupo

En este apartado analizamos la relación que se establece entre la persona y el grupo-clase. Como es sabido, el aprendizaje no es nunca un fenómeno exclusivamente individual. Desde un punto de vista social, varios autores han señalado la importancia de pertenencia a un grupo, que es el referente en la transmisión de los conocimientos, a través de la institución escolar.[223] Tal y como podemos leer en *La construcción social de la realidad* [224], el conocimiento se construye socialmente. Pero una vez construido, se institucionaliza y se

[223] Berger y Luckmann, 1988.
[224] Berger y Luckmann, 1988.

transmite a través de la escuela en un largo proceso de "socialización secundaria".

> A.- Pero cuando eso de las equis, pues eso no las entiendo. Lo de arriba no lo entiendo, no. Porque es que yo no sé si tiene que jugar el número de abajo con el de arriba, si tiene que multiplicarlo con el de arriba, o hay que multiplicar con el de abajo, no lo sé <se está refiriendo a realizar ecuaciones donde algunos números son fracciones y es necesario calcular el m.c.m. para resolverlas. Lo que dice que no sabe hacer es el m.c.m. para quitar denominadores>
> (...)
> A.- Pues claro, cuando no hay fracciones ya me lío, porque ya no sé... qué tengo que multiplicar, si el número de abajo por la equis de arriba, yo no sé si va esto con la equis de arriba, o, eh? No me entero.

Desde un punto de vista mucho más concreto, Vigotsky (1979a, 1979b), con sus experimentos a principios del siglo XX, ya dictaminó que existe un fuerte componente social en el aprendizaje.[225] A lo largo de las secciones siguientes analizaremos más en detalle qué fenómenos cognitivos, afectivos, instrumentales y normativos les suceden a las personas del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela, a fin de mostrar de qué forma la interacción de las personas con el grupo incentiva el aprendizaje y la superación de barreras.

Los fenómenos que vamos a discutir son los siguientes:

Cognitivos	- La interacción - Preguntar para aprender - La igualdad de las diferencias
Afectivos	- La solidaridad en el aprendizaje - La transformación
Instrumentales	- El diálogo
Normativos	- ∅

Esquema 15.2. Fenómenos del análisis de la relación entre las personas y el grupo. Elaboración propia.

[225] Otro autor que es de referencia ineludible es Mead (uno de los "padres" del interaccionismo simbólico), que estudió cómo los niños, mediante el juego, interiorizan las normas sociales y construyen una imagen del otro en sí mismos. Para referirse a esa "conciencia social", Mead utiliza el dativo "mí", que contrapone al nominativo "yo" y al prefijo "*self*".

15.2.1. *Los componentes cognitivos*

La interacción

El aprendizaje no es un proceso individual exclusivamente. Las personas siempre aprendemos en contextos de interacción con otras personas, mediante el intercambio de ideas, como ya nos mostró Vigotsky con su concepto de la "zona de desarrollo próximo" (ZDP). En la escuela de personas adultas de *La Verneda – Sant Martí* todas las personas que hay en el aula participan en el desarrollo de la clase. Así, cada persona aporta sus conocimientos, su experiencia, sus vivencias, que constituyen herramientas básicas utilizadas por todas las personas participantes y por el profesorado, para aprender los diferentes conceptos matemáticos y dotarlos de sentido.

> G.- Muy bien, que te sirve de mucho hablarlo con la señora de al lado y a lo mejor alguna pues encuentra el resultado, porque tú sólo te bloqueas, te bloqueas y no vas pa l'ante, y hablarlo ayuda, la verdad. Pero antes, antes me pasaba la vida con el libro en el pasillo, porque yo normalmente soy una persona que, que... bueno que hablo y que tampoco me puedo quedar callada, y eso antes te mandaban al pasillo... Y si tienes alguna duda determinada, pues una va y lo pregunta, o lo comenta, y entre todas sale. Y, entonces, pues esto de que se pueda compartir, muchas veces nos quedamos abajo en el bar y comentamos, hacemos los ejercicios y a veces quedamos en casa de alguna, para hacer los ejercicios, sí, vull dir, que sí, que yo encuentro que sí.

Ese "sentido" sólo se alcanza plenamente a través de la participación igualitaria de todos los estudiantes y de todas las estudiantes (es decir, de dar las mismas oportunidades para que todo el mundo participe por igual en la clase).

Esta participación igualitaria se pone de manifiesto en el uso del *diálogo intersubjetivo,* mediante el cual las personas comparten experiencias propias con el resto de compañeros y de compañeras (experiencias que varias veces resultan ser compartidas por más de una persona). Esas "experiencias" ayudan sensiblemente en el aprendizaje de nociones matemáticas abstractas, porque cada persona las sitúa en un contexto de vida concreto, caracterizado por unos referentes que tienen "sentido" para ella.

Por otro lado, cada persona aporta su bagaje personal de conocimiento. De esta manera los contenidos formales de la clase de matemáticas quedan sensiblemente enriquecidos con la experiencia de las personas que están en la clase. Cuando esta experiencia se presenta en un contexto dialógico e igualitario, este proceso revierte muy positivamente en el aprendizaje.

Cuando una persona está aprendiendo una asignatura cualquiera en la escuela, es habitual que pregunte cuando le surge alguna duda. Por lo general, las personas participantes suelen preguntar al profesor las dudas que les aparecen cuando están resolviendo las actividades. Pero, también resulta muy habitual que las personas participantes establezcan un diálogo entre ellas para resolver conjuntamente las dudas que aparecen a lo largo de la clase. Y el hecho de poner en duda es un elemento que consideramos importante en el aprendizaje, porque indica que existe un proceso de reflexión detrás. El "poner en duda", el "cuestionar" son elementos de la interacción, que generan aprendizaje.

> B.- Pues esto es, que me lo dijo la M, sí. <está intentando ver de dónde salen unos apuntes que hay en su libreta, mientras busca el anterior ejercicio> Y me lo enseñó y... pero bueno... ¿cómo has sacado el resultado? Pues a ver si lo saco yo <B durante varias semanas ha estado fuera de viaje y hay una parte de los apuntes que se los ha pasado M> Mira, en un paquete hay 10 cajas, cada una contiene 10 cartones... a ver, a ver, no es tan difícil... un paquete, hay 10 cajas, cada una contiene 10 cartones... a ver, Javi, ¿cómo se hace? Aquí tengo hojas vacías y luego ya lo pongo yo en limpio. Es que a mí no me gusta copiarlo, si no, no tiene gracia. A ver, en un paquete hay 10 cajas: y qué se pone ¿10?

Vigotsky (1979a, 1979b) ya se percató de este aspecto social del aprendizaje. Desde su punto de vista, todas las personas tenemos la capacidad para aprender unos determinados conocimientos y, para ello, sólo es necesario contar con la ayuda de otra persona que tenga ya esos conocimientos adquiridos. Mediante la comunicación entre esas dos personas, la que no sabe llega por fin a alcanzar el conocimiento que la otra persona le transmite con su ejemplo. Desde el punto de vista del aprendizaje dialógico, todavía se puede añadir otro aspecto fundamental a las estrategias cognitivas sociales: la intersubjetividad.

Y al contrario, en el caso de utilizar argumentos de poder, lo más habitual es que se generen aprendizajes mecánicos, carentes de sentido para la persona que los aprende. Este aspecto es uno de los principales obstáculos epistemológicos con los que se tienen que enfrentar las personas que tienen una experiencia negativa de su escolarización.

Preguntar para aprender

Una forma concreta de interacción es el fenómeno de "preguntar para aprender". Algunas personas adultas recurren a las preguntas como estrategia para aprender. Las preguntas (que muchas veces pueden ser retóricas) aparecen en contextos diferentes. Existen personas que no saben cómo se resuelve un problema concreto, entonces preguntan para averiguar qué tienen que hacer para solucionarlo. En otras ocasiones, en cambio, saben resolverlo perfectamente, pero preguntan para asegurarse de que lo que están haciendo es correcto. A veces también ocurre que no saben cómo se hace algo y preguntan, no para averiguarlo, sino simplemente para que se lo digan y ya está. En cualquiera de estos casos la pregunta es una estrategia de aprendizaje clara. En este sentido, queremos resaltar el primer caso y el segundo, porque tienen connotaciones que son importantes.

En el primer caso (la pregunta como herramienta para averiguar cómo se llega a la solución) las personas utilizan la pregunta para indagar qué camino tienen que seguir para alcanzar la respuesta. Es un ejemplo que muestra el aprendizaje como un proceso social, tal y como decía Vigotsky (1979a, 1979b). Más aún, dado que las preguntas casi siempre implican un diálogo con otra(s) persona(s), son una muestra del carácter intersubjetivo del aprendizaje, tal y como se sostiene desde la perspectiva del aprendizaje dialógico.

Lo importante es que durante la investigación se puso de manifiesto cómo el ambiente igualitario de la clase potenció que surgieran esas preguntas. La participación de todas las personas permitió compartir sus conocimientos y sus experiencias, de manera que todo el mundo se sintió libre para expresar dónde estaban los obstáculos que no les permitían captar el significado de un concepto determinado. Al existir varios puntos de vista diferentes (varias maneras de llegar al mismo resultado, no necesariamente académicas todas ellas), la pregunta fue

> B.- ¿Pongo cartones?... Esto es lo que me falta a mí mucho, saber cómo... Cartones de tabaco. Cada uno de los cuales contiene a su vez 10 cajetillas. O sea, yo comprendo muy bien que cada cartón de éste son 10 cajetillas. Y pongo cada cartón, para saber yo que es... Cada cartón contiene pones, no?
> E.- Ahá...
> B.- Aquí o no?, aquí, sí. También con una equis así? ... Contiene 10 cajetillas ... 10 cajetillas... Expresa en forma de potencia, el número total de cajetillas. Entro un tres... me voy a arriesgar, y lo coloco ahí... me parece que está bien, no?

B.- No te digo que nosotros teníamos un pequeño negocio, y cuando salió lo del IVA, y mis hijos pues venga a echar números y cuentas, y por qué hacéis esas cuentas, la mama sabe lo que es, si son 101 pesetas pues son 21 pesetas, porque si es el 20%, 7, 14, 21. Y se quedaban mirando, pero mama, ¿cómo puede ser? De cabeza me sale bien. A parte que yo había ido al colegio. Luego, ya no eran las enseñanzas de antes, luego ya me tuve que poner a trabajar, he trabajado para mí, pero bueno, no ha sido una cosa de haber ido a otro sitio a aprender más ni, pero la cabeza sí... mi vecina a veces vamos a comprar, y el otro día eran... nos cobraban 3400 y pico. Y yo, no puede ser, es que no puede ser: esto no cuesta 400 pesetas más. Pero yo sabía, si llevaba una compra de 7 u 8 cosas, sabía si se había equivocado. Porque decía, 200 de esto, 100 y pico de lo otro... y claro, encuentras alguna cosa bien y luego metes la pata. Bueno, vamos a ver...

una de las mejores estrategias cognitivas que utilizaron las personas para compartir sus conocimientos y aprender.

En el segundo caso al que nos referíamos antes (preguntar para asegurarse de que se está haciendo bien el ejercicio), la pregunta no es tanto una estrategia de aprendizaje, como una forma de ganar confianza en uno mismo. Y éste es uno de los elementos cruciales en el aprendizaje de personas adultas en lo que hemos podido ver hasta ahora. En este caso la persona sabe perfectamente que conoce la solución y sabe cómo hallarla. No obstante, ocurre que no confía en sus propias posibilidades. La pregunta aquí sirve más para asegurar que lo que se sabe es correcto que para aprender.

La igualdad de las diferencias

En la misma línea que venimos comentando, resaltamos la idea de la "igualdad de las diferencias" propia del aprendizaje dialógico. No todas las personas resuelven de la misma manera las actividades que se encuentran en la pantalla del ordenador. Muchas veces, en la misma actividad, una mujer del grupo de matemáticas dialógicas procede de una manera, mientras que otra compañera sigue un procedimiento completamente diferente y ambas llegan al mismo resultado. A este fenómeno, desde el aprendizaje dialógico, se le denomina "igualdad de las diferencias". Lo que quiere decir es que dentro del aula se encuentran personas que tienen diferentes bagajes culturales y eso les abre los ojos para ver diferentes formas de alcanzar la solución de un problema. En el caso de las actividades que realizamos en las sesiones del *Grupo de matemáticas dialógicas* de la escuela, esto es particularmente cierto. Cada persona revierte en la clase su propia formación o experiencia.

Es interesante señalar que cada persona desarrolla sus propias formas de resolver las situaciones problemáticas, aplicando una serie de normas de las que se ha apropiado y ha hecho suyas.

Los contenidos instrumentales de cada situación matemática son iguales para todas las personas. Sin embargo, cada cual aplica sus propias maneras de resolver el problema, que son igualmente válidas si el procedimiento y el resultado al que se llega son correctos. El diálogo lo que hace es permitir que aflore toda esta riqueza de situaciones, maneras y formas de resolver los ejercicios, de manera que todo el mundo tiene la ocasión de utilizar la manera que mejor le sirve para aprender matemáticas. Durante las veces que nos hemos encontrado las personas participantes y yo en el aula de informática, hemos podido constatar la existencia de este amplio mosaico de estrategias cognitivas para resolver los problemas matemáticos. Vuelvo a citar el caso de la señora que usaba la calculadora, mientras que su compañera prefería el cálculo mental, como ejemplo de esto que estamos diciendo.

15.2.2. *Los componentes afectivos*

La solidaridad en el aprendizaje

En el ejemplo anterior se puede apreciar que la persona participante prefiere el método del aprendizaje dialógico al método de aprendizaje tradicional, que se utilizaba en las escuelas hace medio siglo. El tipo de metodología al que se refiere implícitamente no produce un sentimiento de motivación por el aprendizaje.

La motivación, como se puede apreciar en otras partes de la entrevista, partía de la propia competitividad entre los compañeros y las compañeras de la clase. Dentro de la clase siempre había quien sacaba buenas notas y quien las sacaba malas.

> B.- Claro, yo antes no me puedo quejar, igual que la gente se queja porque les daban con la tabla, yo no, está feo decirlo, pero yo casi siempre ponía... antes ¿sabes cómo era? Al más espabilado lo ponían delante. Y, yo siempre... la verdad es que no estaba de las de atrás. Es lo que recuerdo.

En varias investigaciones se ha mostrado que la competitividad produce diferencias dentro del aula entre las personas que obtienen el éxito académico y las que no.[226] Lejos de incentivar al aprendizaje de todas las personas que hay en el aula, la competitividad polariza a los estudiantes, que quedan estigmatizados dentro del aula por la imagen social que se les atribuye.[227] Este tipo de procesos, ampliamente estudiados en investigaciones que toman el referente de las teorías del etiquetaje, explican por qué dentro de la clase hay personas a las que la competitividad anima para aprender más, mientras que existen otras que se sienten desazonadas e, incluso, llegan a abandonar todo interés por los estudios, con lo que implícitamente asumen una autoexclusión.

Sí, claro. Mira, la otra misma, es una mujer que lo ha cogido, y a veces hemos venido aquí para esto de tutoría y no ha venido nadie, pues ella nos lo ha dicho...

La solidaridad produce el efecto contrario. Las personas dentro de la clase se animan y se ayudan mutuamente durante el aprendizaje. Comparten conocimientos, puntos de vista y maneras de explicar los conceptos matemáticos. Esta forma de proceder transforma las imágenes sociales que se asocian a las personas dentro del aula, de manera que es más difícil que el discurso pesimista o la desmotivación producidas por la interiorización de una imagen social negativa de uno mismo tengan lugar. Este cambio de punto de vista se refleja en la ilusión de las personas que están dentro del aula.

E.- ¿Sí? Y cómo es que ahora es una gloria y antes no? ¿qué es... el trato, la manera de cómo enfocar las clases, o los contenidos, que son más variados...?
B.- También, también. Pero la manera... hombre habrá personas de todo, pero yo como he tenido la suerte de venir aquí y **todas han sido estupendas**, de verdad, una gloria, es una gloria, sí, sí.

Esta ilusión es un elemento indispensable para superar las dificultades que van apareciendo a lo largo del aprendizaje de las matemáticas. Siempre resulta más fácil aprender cuando el ambiente social en el que uno está inmerso es alentador y potencia la capacidad que todas las personas tenemos para aprender. Sin embargo, esta solidaridad es más difícil que aparezca en una escuela donde se utilice una metodología de enseñanza – aprendizaje basada en los principios de la diferencia y de la competitividad. Cuando la base es la solidaridad, la propia

[226] Secada, Fennema y Adajian, 1997.
[227] Este fenómeno en educación se conoce como "efecto Pigmalión" (García Serón, 1995). El efecto Pigmalión consiste en acabar juzgando a una persona según la etiqueta que le han colocado. Por ejemplo, si pensamos que es una persona "inteligente", acabaremos por pensar que todo lo que hace es inteligente. Y, al contrario, si pensamos que es un "negado", haga lo que haga, siempre estará mal.

enseñanza transforma la actitud de las personas participantes, que están mucho más dispuestas y animadas a aprender, a pesar de las dificultades de los contenidos instrumentales. Los testimonios de las mujeres que han sido entrevistadas durante el trabajo de campo muestran ejemplos fehacientes de ello.

La transformación

Esto nos lleva a un segundo elemento crucial: la transformación. Se trata de uno de los siete principios que se resaltan en el aprendizaje dialógico desarrollado por CREA. Para las personas del grupo, aprender matemáticas significa un sueño que cumplen cada día, pero también significa transformar su sentimiento hacia las matemáticas (porque las consideran difíciles, complicadas, fuera de su alcance, etc.).

Algunas de las mujeres que han participado en el grupo de matemáticas siempre han sido "amas de casa", jamás pudieron ayudar a sus hijos con las tareas de la escuela, siempre se sintieron inferiores, y, ahora, resulta que alcanzar logros en la escuela les sirve para conquistar un espacio de igualdad en sus espacios de vida.

Por tanto, "transformar" aquí significa aprender nuevos conocimientos matemáticos, pero también cambiar la imagen de sí mismas. Y éste es un elemento emocional que juega un papel realmente importante para superar las barreras sociales contra las que tienen que luchar esas personas para lograr aprender matemáticas.

R.- Hombre, claro. Yo, me quedé también admirada de un señor, que no sé cómo se llama, me acerqué a darle la enhorabuena, porque nos dio una charla que te dan ganas hasta de llorar y todo, porque decir que él no nos ayudaba a nosotros, que éramos nosotros los que le habíamos enriquecido a él... eso se te cae el alma encima, chico. Es una gozada escuchar eso... si hubiera muchas personas como esa, que estuvieran dispuestas a eso, a demostrarles a los demás que cualquier persona que vaya por la calle que apenas sepa hablar, tiene algo que enseñarte, eso es una gozada, chico. Es una maravilla, escuchar eso (...) Las personas que no tienen autoestima, que se sienten inferiores, que, que... que yo a dónde voy a ir, y yo qué voy a hacer... escuchas a este señor y dices, cómo que no soy yo nada. Claro que soy, soy una persona y tengo mi personalidad y tengo mi autoestima y sirvo para algo. (...) todos somos iguales. Entonces, algo hay...

15.2.3. *Los componentes instrumentales*

El diálogo[228]

A lo largo de las transcripciones que hemos analizado, vemos innumerables ejemplos en los que aparece el diálogo como vehículo transmisor de ideas. Pero, además, el diálogo aparece también como herramienta de aprendizaje propiamente dicha. En otras palabras, es a través del diálogo como las personas son capaces de plantear sus dudas y encontrar soluciones, o transmitir sus hallazgos a otras personas del grupo.

De hecho, muchas veces se prefiere comentar las cosas para aprenderlas, como muestran las citas adjuntas.

Por otro lado, comentar las diversas actividades en el grupo también sirve para detectar los errores y resolverlos. El diálogo es un mecanismo para solucionar problemas de los que ya habíamos hablado antes, como son el bloqueo o los errores conceptuales.[229] Siempre las equivocaciones en clase son errores llamémosles "académicos", es decir, errores motivados por el desconocimiento de la simbología matemática. El diálogo es el mecanismo para que las personas, con conocimientos diferentes de las matemáticas, puedan poner en común sus impresiones y, a través del proceso comunicativo, lleguen a acuerdos sobre el significado de cada símbolo matemático. Como dice una de las personas participantes, siempre es mejor

> Pues mira. Las he ido aprendiendo, hmmm... yo no había forma de que entraran las de dos cifras. Y,entonces, S, que yo estaba con S en certificado, dice, mira M, para saber si lo que te da... a ver si te lo sé decir, que no me sale... Sí hombre, si yo tengo por ejemplo 78 entre 63, pues a ver... o quien dice esa cifra pues dice otra, pues entonces multiplico 63, pongo por un, y a ver, entonces veo por qué puedo. Así es como me las arreglo.

> A mí, es que yo necesito que me expliquen mucho las cosas para que se me quede algo.

> Y ella, como sabe más, esa chavala es joven y sabe más, bueno, lo planteó de una forma, dice: ¡Ya está! dice, mira, así y así. Digo, oy, pues yo no me entero, je-je-je. Entonces vino a explicármelo a mí y se había confundido ella. Explicándomelo a mí, vi el error suyo.

[228] Incluimos el diálogo dentro de los componentes instrumentales porque es la forma que utilizamos para transmitir los contenidos matemáticos al resto de personas del grupo, por excelencia. No es que el diálogo sea, en sí mismo, un elemento instrumental, pero hace de puente (de medio) para que una persona pueda comunicar ideas matemáticas a otra(s) persona(s).

[229] Independientemente de la naturaleza de esos errores (sea porque la persona ha aprendido mal los conceptos o, sencillamente, los desconoce o no sabe con qué relacionarlos), el diálogo es una de las formas para corregirlos o aclararlos. Según Piaget, lo que ocurre es que la nueva información crea un conflicto con las estructuras cognitivas previas, de manera que la persona tiene que reestructurar su conocimiento para acomodar los nuevos conceptos en su "estructura de conocimiento" y llegar a un nuevo equilibrio.

comentar las cosas con alguien que esperar a que se te encienda "la bombilla", porque en muchas ocasiones no se te enciende.

> "Porque a veces nos hemos puesto A. y yo juntas, un par de veces: pues, mira, y ¿cómo será esto? Pues mira, esto, esto es así, o asao. O sea, comentando y... ah! Pues, esto es así. Y, si no se le ocurre a uno, se le ocurre a otro. Pero uno solo, si no se te enciende la bombilla, pues estás allí y, ay, cómo será, cómo será. Pero siempre va mejor comentarlo con alguien o preguntar."

El aprendizaje dialógico introduce un nuevo elemento: la intersubjetividad, que caracteriza a todos los aprendizajes que se producen en un marco igualitario. Las mujeres del grupo de matemáticas para entender algo siempre lo plantean al resto de la clase y es mediante este diálogo como aparecen las diferentes maneras de entender los contenidos matemáticos.

Durante el diálogo, de alguna manera, se produce algo parecido a la idea gestáltica de "entendimiento súbito". Cuando varias personas comparten el esfuerzo por entender un razonamiento lógico y buscan argumentos juntas para entenderlo. Lo que ocurre, normalmente, no es que repitan mecánicamente la idea de una de ellas, sino que las explicaciones de una compañera "alumbran" a otra y se produce un avance de la comprensión compartido.

Por otro lado, al utilizar el aprendizaje dialógico, los diálogos que se producen en el aula parten de una relación de igualdad entre todas las personas que intervienen. La dinámica en la clase no se basa en relaciones de poder, es decir, en una relación unidireccional (y vertical) entre profesor y alumnas, en la que es el docente quien "conoce la materia" y las alumnas escuchan "porque no saben". Al contrario, en las diferentes sesiones que se han llevado a cabo con el *Grupo de matemáticas dialógicas*, la relación ha partido de la igualdad y cada persona ha aportado conocimiento al resto de la clase desde su experiencia previa. El diálogo, en este contexto, es una forma de transmitir los argumentos para sustentar una afirmación o rebatir otro argumento. De esta forma, como ya hemos comentado anteriormente, han aparecido diversas explicaciones para un mismo concepto matemático y varias maneras de resolver un mismo problema.

> Sí, pero más bien de cabeza. Mira, este ejercicio que hicisteis de las cajetillas, pues yo dije, bueno, tantas cajas, pues tantas cajas tiene, y lo fui apuntando. Y luego pensé: 10 cajas, a 10 cartones, son...

15.3. El análisis de la relación entre la persona y el medio tecnológico

> A ver, yo siempre he hecho las cosas en la libreta, o sea, que en papel siempre sabes cómo poner las cosas, las operaciones... vull dir, que la libreta es lo que has utilizado siempre. En el ordenador también, vas siguiendo las pantallas, etc, no sé... Por la pantalla, o en un papel, midiendo y poniendo, porque así lo vas viendo, y es una manera de que te vaya quedando más en la mente

En este último apartado nos detenemos para analizar la relación que se establece entre las personas del *Grupo de matemáticas dialógicas* y el medio tecnológico en el que se desarrollan las actividades de aprendizaje. Bien es sabido que el medio es un elemento fundamental en el análisis del aprendizaje y que en diferentes medios también ocurren diferentes procesos que condicionan el aprendizaje de diferente manera. Los medios tecnológicos, por ejemplo, introducen mayores ventajas en aspectos como el dinamismo en la representación geométrica o la posibilidad de hacer cálculos enormes en un instante.[230] Así, por ejemplo, no es lo mismo aprender las proporciones en una clase, en la pizarra, que delante del ordenador, porque los medios técnicos al alcance de la mano son distintos. En las secciones siguientes vamos a analizar diferentes fenómenos que hemos ido observando a lo largo del trabajo de campo, desde el punto de vista de las cuatro variables que consideramos en este trabajo.

[230] Hay muchos profesionales de la educación que no están de acuerdo con el uso de tecnologías en el aula, como es el caso de las calculadoras científicas, porque impiden que el alumno sea capaz de encontrar el resultado por sí mismo. Desde mi punto de vista, lo importante no es que la calculadora sustituya el razonamiento del estudiante, sino que evite los esfuerzos de cálculo innecesarios. Lo que tenemos que pensar son actividades en las que el estudiante pueda utilizar la calculadora (o el ordenador) como una herramienta de trabajo para llegar al resultado, pero el camino para alcanzarlo lo tiene que pensar él o ella.

Cognitivos	- Desconocimiento de la herramienta - El cálculo mental - El uso de diferentes soportes para resolver las operaciones - El salto del papel a la pantalla - La incomprensión y el medio
Afectivos	- El gusto por la diversidad y por la novedad - La imagen del ordenador como juguete
Instrumentales	- La barrera del conocimiento de la herramienta - Diferencia entre las matemáticas "habladas" y las matemáticas que aparecen "escritas" en la pantalla
Normativos	- ∅

Esquema 15.3. Fenómenos del análisis de la relación entre las personas y el medio tecnológico. Elaboración propia.

En los siguientes apartados hablaremos tanto de ejemplos de fenómenos transformadores, como exclusores.

15.3.1. *Los componentes cognitivos*

Desconocimiento de la herramienta

Dentro de las variables cognitivas sociales un elemento que debemos resaltar es el conocimiento de la herramienta que se está utilizando para aprender matemáticas. Algunas investigaciones sobre las implicaciones educativas de las tecnologías de la información y de la comunicación en la educación de las personas adultas (CREA, 1998, 1999) ponen de manifiesto que el desconocimiento de la herramienta (en este caso, del ordenador) es una barrera que en un primer momento dificulta el aprendizaje. En el caso del aprendizaje de las matemáticas, el desconocimiento de cómo se utiliza el ordenador se

G.- Hombre pues claro que sí, vull dir, que algo siempre se aprende, siempre, yo creo que sí... Pero también va más lento, como lo tienes que pensar, es más lento, porque hasta que no lo tienes por la mano... bueno. Una vez que coges el truquillo vas más rápido, claro, que hacerlo a mano."

añade a la propia dificultad inherente a la materia (a las matemáticas), por lo que aparece una doble barrera al aprendizaje. En esta investigación se ha puesto de manifiesto la necesidad de dedicar unas sesiones previas a la formación en el uso de ordenadores. De este modo, una vez que se consigue romper el miedo hacia ese tipo de herramientas, la motivación se genera en las personas adultas y descubren que son capaces de utilizar una nueva herramienta, aumentando las ganas de aprender matemáticas.

A nivel cognitivo, aprender a utilizar el ordenador supone también la adquisición de formas nuevas de proceder, de pensar, de actuar (por ejemplo, utilizar herramientas para resolver cálculos, no hacerlos "de cabeza" cuando son muy fatigosos de realizar, y "comprobar" el resultado haciendo estimaciones de lo que debería dar el resultado, aspecto que desarrolla la habilidad matemática de la estimación y de la aproximación).[231]

Por otro lado, si bien al principio el desconocimiento bloquea el aprendizaje, a medida que la persona va adquiriendo soltura en el uso del ordenador, también gana en rapidez y desenvoltura en la resolución de los problemas matemáticos (ya que se va directamente al problema y no se pierde con cálculo fatigosos, que a veces pueden provocar que uno pierda la globalidad del problema). Al final, el rechazo inicial hacia un medio desconocido acaba convirtiéndose en justamente lo contrario.

Si... Y ¡ay! Y cómo le doy y cómo le doy. Y no sabía ni cómo coger el ratón. Y ahora ya sí, ya lo veo... y además me gusta.

Por tanto, el desconocimiento de la herramienta es un elemento exclusor, siempre y cuando no se encuentren formas de transformarlo.

[231] La estimación es una de las habilidades matemáticas que destaca Bishop (1991, 2000).

El cálculo mental

Una de las estrategias cognitivas subjetivas que más utilizan las personas participantes es la realización de operaciones matemáticas "de cabeza", sin necesidad de utilizar soportes, como el papel o la pantalla de un ordenador. El operar, sin dejar constancia escrita de las operaciones que se están realizando, implica el uso de la memoria.

En cambio, cuando se utiliza el papel o cualquier otro soporte para realizar operaciones, el dejar constancia escrita de los números, "libera" a la memoria de esa tarea de "retener la información" y permite poner más énfasis en otros procedimientos cognitivos subjetivos, tales como la compresión o la atribución de significados, entre otros.[232]

En 1979 Pólya recogió diversas estrategias cognitivas subjetivas que las personas utilizamos para resolver los problemas matemáticos. Estas estrategias, básicamente, eran las siguientes: descomponer el problema en sus elementos más simples, tal como ya aconsejaba Descartes en su conocido método para "llegar a la verdad"; esperar a que aparezca la "brillante idea" que permitirá resolver el problema (aspecto que Pólya retoma de la tradición *gestáltica*); el establecimiento de analogías entre el problema que se tiene entre manos y situaciones parecidas; o el uso de figuras como herramientas gráficas para comprender el problema y encontrar la vía de solución.

La cita adjunta, que aparece al margen, revela que las personas adultas, cuando realizan operaciones "de cabeza", utilizan estrategias para "atajar" o "simplificar" esas operaciones. No disponemos de datos suficientes para afirmar que es la estrategia preferida por las personas adultas, pero sí que es cierto que la mayor parte de las

B.- De cabeza sí, pero claro, es que esto...
E.- Pero cómo lo haces?
B.- No, porque yo pienso, 28, o sea, menos 36, menos ocho, pues son 6 que quito y dos de los otros... te vas a reír de mí...

[232] Esto puede contribuir a explicar por qué hay personas que tienen una mayor agilidad mental, mientras que otras dependen de escribir las operaciones sobre un papel para poder resolverlas con éxito. Se trata de dos formas diferentes de resolver operaciones.

Pero entonces, esto, pues yo puse: 2 por 3 aquí 6. Que yo no sé si está bien o está mal. Y dos por equis pues igual a 2x, yo qué sé. Esto no lo sé. Y luego, éste, esta X es ésta, no? Y este 2 pues es el mínimo común, porque sólo hay un número. Este dos yo lo multipliqué dos veces por 180 y me salió esto. Pues a partir de aquí ya, pues las equis, nueve equis, y esto, dividido por nueve, 40. Y esto. A partir de esto muy bien. Pero esto, lo puse porque estaba ya puesto. Pero yo no sé, porque esto qué quiere decir? Tres equis igual a tres equis, igual a cuarenta, ciento veinte. Y yo digo, y eso qué quiere decir? Y yo pensé, bueno, pues cuarenta... E.- ¿Esto de dónde lo sacaste? A.- Del libro, del libro no, del cuaderno que tengo yo. Te voy a explicar lo que hice. Bueno, pues este cuarenta lo multiplico por esto, cuarenta por tres, ciento veinte, que es el dinero que tiene, digo y la equis y este dos, ni idea. Y entonces el cuarenta éste lo dividí por dos, y sale veinte, y entonces digo, pues ya está: 20, 40 y 120, que cada uno tiene.

personas del grupo de matemáticas dialógicas trataban de simplificar las situaciones y quedarse sólo con aquello que consideraban esencial para entender (y resolver) el problema.

Entre las estrategias de "simplificación" que utilizan las personas del grupo de matemáticas en el aula cabe destacar varios ejemplos, como el duplicar cantidades (tanto para la suma como para la resta); hacer números "redondos"; operar con las cantidades "enteras" y añadir el resto al final de la operación (por ejemplo, en la suma 52 más 37, se dice: 50+30 son 80, 7+2 son 9, y 80 son 89); partir un número en cantidades más "manejables"; etc. Todas estas estrategias cognitivas aparecen cuando las personas participantes hacen las operaciones "de cabeza" para resolver un ejercicio cualquiera.

En general, la idea que se desprende del análisis de todas las operaciones que hacen las personas adultas "con la cabeza" es que suelen utilizar estrategias simplificadoras de agrupación o de fraccionamiento de los números en cantidades más grandes o más pequeñas. Esta estrategia les permite operar de manera rápida y recuerda a la teoría de conjuntos como forma de organizar la información dentro de la mente de cada cual.[233]

Esta manera de resolver situaciones matemáticas problemáticas indica la existencia de una diferencia muy grande entre la manera que tenemos de pensar las personas que hemos aprendido a resolver operaciones de manera académica[234] y la que tienen otras personas para resolver las mismas operaciones utilizando otras vías más imaginativas, que han aprendido a lo largo de su vida.

[233] Aunque la idea de los conjuntos pasó ya de moda, sí que es verdad que se ajusta bien para describir las estrategias cognitivas subjetivas que utiliza cada cual en sus razonamientos.

[234] Nos referimos aquí a la serie de pasos y procedimientos estandarizados que una persona sigue apuntando las cifras sobre un papel, en el sitio normativamente "adecuado" el resultado de la operación y con todos los símbolos matemáticos que acompañen a esa operación.

Ahora bien, ¿por qué se prefiere el uso del "método de hacer las cuentas de cabeza" si en teoría exige mayor esfuerzo porque implica tener que recordar las cantidades a la vez que se opera con ellas? La respuesta vuelve a estar en el desconocimiento (o falta de hábito en el uso) de la simbología matemática escrita. Cuando las personas participantes ven por escrito aquello que han hecho "de cabeza", a menudo, no lo reconocen de entrada y tienen que invertir grandes esfuerzos para aprender a "reconocer" operaciones que en sus vidas cotidianas hacen cada día "sin tanto símbolo".

E.- Y otra de las cosas que ha salido es que muchas personas lo que hacen es apuntar en una hoja los resultados, para después poder saber cómo han resuelto ese ejercicio para el próximo día...
G.- Normal, es que es normal, porque muchas veces vas y miras cómo lo has hecho para ver cómo lo puedes hacer, y miras la libreta... y vas viendo la lógica, vull dir... haciéndolo.

En la clase muchas veces se ha comentado que encontrar la respuesta pensándola o buscarla escribiendo en la libreta (o en la pizarra, o en la pantalla) son dos cosas totalmente diferentes (y algunas personas adultas se sorprenden de que después de hacer unos cuantos cálculos, aparentemente sin sentido, el resultado sea el mismo que han encontrado mentalmente). Eso revela la existencia de procesos cognitivos diferenciados en ambos tipos de situaciones.

El uso de diferentes soportes para resolver las operaciones

Todo lo anterior nos lleva a resaltar la diferencia que existe entre diferentes soportes en lo que se refiere a la volatilidad / permanencia de los datos y a su comprensión.

Bueno, yo es que en la pantalla no es que lo vea diferente. Lo que pasa es que, por ejemplo, en el libro lo tengo como más para repasar yo, no? Lo leo allí 20 veces, y lo controlo, y lo vuelvo a anotar, lo vuelvo a leer...

Un dato importante, que pone de manifiesto el análisis del trabajo de campo, es la paradoja que se produce cuando se utilizan las tecnologías de la información y de la comunicación para resolver problemas matemáticos (presentados en formato *html*).

Las personas participantes prefieren utilizar el "método de hacer las cuentas de cabeza" para resolver los ejercicios, antes que hacerlos sobre el papel, como ya hemos comentado, pese al esfuerzo de memorización y manejo mental de cierto número de cifras.

Sin embargo, cuando esas mismas personas están delante de la pantalla, entonces ocurre que les gusta más hacer las cuentas sobre el papel, porque pueden escribir y dejar constancia de todo lo que hacen, mientras que en el ordenador no saben cómo hacerlo (se trata de personas que no están habituadas al uso de los ordenadores y que no tienen claros conceptos como "guardar la información", "imprimir", o "usar la libreta electrónica", por ejemplo, por falta de práctica y por la novedad de la herramienta).

> Es que los jóvenes, que están ahora con los ordenadores y que van subiendo con esta posibilidad nueva, pues claro, ya lo ven todo mucho más fácil: aquí busco, aquí... Ya tienen eso en mente. Mientras que yo por ejemplo casi ya no pienso en el ordenador, porque, claro, soy ya gente grande y, entonces, pues claro, je-je, lo que más tengo es mi, en mi conciencia o lo que se diga, pues es esto, el libro, y repasarlo allí o preguntarlo.

¿Por qué ahora las personas participantes prefieren escribir las respuestas a las preguntas, antes que hacerlas "de cabeza" y apuntar el resultado –y el procedimiento- en el ordenador? La explicación de esta paradoja nos la dan las propias personas participantes: resulta que la libreta, a pesar de la dificultad del código matemático, es un soporte conocido que se puede recuperar para repasar y estudiar los ejercicios realizados (práctica muy frecuente entre las personas adultas que están estudiando). El ordenador, para la mayor parte de las personas participantes que formaron el grupo de matemáticas dialógicas de la escuela, era una herramienta desconocida y ese desconocimiento fue lo que motivó que prefirieran la libreta al ordenador.

> Lo que pasa es que, mmm, por ejemplo, yo, que soy mayor, lo tengo ya como más mentalidad, pues el libro y los apuntes... Es, es psicológico. Ya, es que la otra opción, la del ordenador, no me la planteo casi.

Por otro lado, también existe una cierta creencia de que el ordenador es para las generaciones jóvenes. Es una concepción totalmente edista que tiene consecuencias claramente exclusoras y que además no responde a la realidad, porque en la propia escuela de La Verneda nos encontramos con personas de todas las edades que trabajan con los ordenadores en el aula de informática.

Este discurso pesimista que esgrimen algunas personas no es más que una justificación para no enfrentarse a nuevos conocimientos o "cubrirse las espaldas", por si no los acaban de entender y les "salen mal" los ejercicios.

El salto del papel a la pantalla

Ya hemos analizado la importancia que tiene el soporte del material y de la herramientas que se utilizan en el aprendizaje de las matemáticas. A veces el uso de los ordenadores como herramientas didácticas no siempre es positivo. El éxito depende del conocimiento previo que se tenga de las tecnologías, de la actitud, de la práctica, etc., como ya hemos comentado.

Algunas personas afirman que cuando una persona se encuentra ante una herramienta que le resulta desconocida, a la dificultad de la materia (en este caso las matemáticas) se le suma la complejidad de la herramienta (el ordenador). No obstante, varias investigaciones, que han sido ampliamente contrastadas por la comunidad científica internacional, muestran que ocurre lo contrario: ese desconocimiento estimula a las personas a aprender más todavía.[235]

> G.- Hombre claro, claro que lo utilizamos. Y lo importante es que sepamos utilizarlo, claro... porque las matemáticas en el ordenador, pues te parece que vas más despacio y, claro, porque te parece que aquello pues ya lo hacías de seguida en el papel, pues, me entiendes..."

Sin embargo, las entrevistas muestran que algunas de las personas del grupo de matemáticas tienen unas expectativas de sí mismas muy bajas y, cuando están delante de la pantalla, se bloquean y se olvidan de la curiosidad para descubrir la nueva herramienta.

El efecto negativo de las tipificaciones lleva a la construcción de una imagen propia negativa que se justifica de acuerdo con esas tipificaciones. Además, asume su situación como algo normal, cosa que constituye una barrera muy fuerte al aprendizaje.

[235] Ejemplo de esto son las experiencias de *Success for all* y aprendizaje acelerado en Estados Unidos y las Comunidades de Aprendizaje en España.

La incomprensión y el medio

A veces, algunas personas participantes lo que hacen es apuntar en sus libretas lo que está escrito en la pizarra, sin comprender el significado de lo que están escribiendo. Esta práctica, que es un deje absolutamente académico, no aporta nada bueno al aprendizaje y se convierte en un elemento claramente exclusor.

> Y esto. A partir de esto muy bien. Pero esto, lo puse porque estaba ya puesto. Pero yo no sé, porque esto qué quiere decir? Tres equis igual a tres equis, igual a cuarenta, ciento veinte. Y yo digo, y eso qué quiere decir? Y yo pensé, bueno, pues cuarenta...

Las personas participantes apuntan lo que hay en la pizarra para no perder ningún paso de la explicación. La mayor parte de las veces aquellos símbolos que han apuntado en la libreta sirven después como material para comentar dentro o fuera del aula, en sus casas, con personas de sus familias, etc. Sin embargo, cuando esa interacción no se produce, suele ocurrir que esas personas se encuentran ante unos apuntes que no comprenden y, más que ayudar, generan el efecto contrario.

15.3.2. *Los componentes afectivos*

El gusto por la diversidad y por la novedad

> G.- Yo me lo paso muy bien, con el ordenador, la verdad es que me gusta mucho. Es más entretenido. Haces más cosas, cosas diferentes, no sé, me gustan.

Como ya dijimos en el capítulo 14, un elemento afectivo claramente transformador es la motivación que produce en las personas participantes el uso como herramientas didácticas de tecnologías nuevas, como los ordenadores. Este tipo de instrumentos llaman mucho la atención y son un elemento positivo que anima a todo el mundo a participar con más ilusión en la clase, porque las personas participantes ven que el futuro está en saber utilizar este tipo de herramientas y quieren aprender también a usarlas.

La imagen del ordenador como un juguete

Por otro lado, en el ámbito de las tecnologías de la información y de la comunicación, hay que volver a destacar que los ordenadores animan, pero que este sentimiento está socialmente compartido. En primer lugar, el hacer la clase en el aula de ordenadores rompe la dinámica de la clase y la vuelve más "atractiva" y, en segundo lugar, el usar unas herramientas innovadoras siempre es interesante (además de divertido), porque las personas participantes saben muy bien que el futuro está en saber cómo utilizar esa clase de tecnologías.

15.3.3. *Los componentes instrumentales*

La barrera del conocimiento de la herramienta

Las tecnologías motivan y son transformadoras siempre y cuando no se abuse de ellas y se parta del conocimiento que tienen las personas participantes de estas herramientas. En caso contrario lo que suele ocurrir es que, a pesar de la motivación que produce hacer matemáticas utilizando un ordenador, el no saber usar la herramienta puede convertirse en un elemento de bloqueo que dificulte precisamente aquello que quiere potenciar: el aprendizaje de las matemáticas. En alguna ocasión nos hemos encontrado con comentarios de personas que se quejaban de la falta de conocimiento de la herramienta y pedían aprender primero a utilizar bien el ordenador, antes de utilizarlo para aprender matemáticas.

D.- Es que no es tan sencillo. Bueno, claro, para quien sabe utilizar el ordenador es más rápido, pero... para el que no sabe...

Diferencia entre las matemáticas "habladas" y las matemáticas que aparecen "escritas" en la pantalla

> B.- Sí, claro, es que no sé qué pasó, porque, yo... claro, porque eran números bajos, bueno, el último sí que era de millón, lo tengo en la otra libreta, bueno ya lo hice superbien (je-je). Pero el otro día es que, claro, a lo mejor vi muchos números ahí y ya no supe, ya no... como vaya con la cosa de que eso ya no lo saco, uy, eso ya no lo saco. Pero vaya, pensándolo bien, eso, no sé, más o menos lo voy haciendo. Y ves? Esto, esto que también me dijiste, también lo había hecho. Bueno, en graduado ya lo hice, ¡ay! En graduado...

Una de las dificultades más interesantes que hemos observado es la diferencia que existe entre las matemáticas "habladas" y las matemáticas que aparecen "escritas" en la pantalla. Aparentemente el código es el mismo: en un sitio aparece escrito y en el otro se comenta de viva voz. Sin embargo, la representación simbólica es diferente en ambos casos.

La cita adjunta en la parte superior relata el caso de una persona que intentó resolver en el ordenador un ejercicio que consistía en decir qué número seguía a una cantidad (acabada en 9), pero puesta de tal manera que el número siguiente implicaba el cambio a una unidad inmediatamente superior (por ejemplo, a 1.199.999 le sigue el "un millón, doscientas mil").[236]

Esta persona encontró dificultades para pasar del código simbólico al lenguaje hablado, lo que pone de manifiesto las dificultades ante las representaciones o códigos semióticos.

> Me lo explica un hijo, después otro, me chillan, pero bueno, no es cómo me lo explican, es problema de que yo hace años que no estudio, hace años que yo aquello no lo he tocado, porque hasta ahora todo esto pues ya lo había hecho, lo que pasa es que ya lo había olvidado. No sabes, y es normal.

En otros casos, lo que sucedió fue que las personas eran capaces de encontrar la respuesta a las preguntas que se formulaban, pero no sabían cómo escribirlo en la libreta. Este desconocimiento también es una barrera que dificulta el seguimiento de un libro de matemáticas, por ejemplo.

Por tanto, cuando estamos hablando de contenidos matemáticos formales, no sólo tenemos que estar atentos a la dificultad propia de esos contenidos, sino también a la dificultad añadida del lenguaje

[236] Se trató de una actividad que formaba parte del paquete de actividades matemáticas del *Clic*, que es una aplicación didáctica desarrollada por la "Xarxa Telemática d'Educació de Catalunya".

simbólico matemático (de la escritura), sobre todo cuando no hay una relación directa y aparecen conflictos semánticos.

15.4. Aportaciones del capítulo

A lo largo de este capítulo hemos ido analizando diferentes elementos que intervienen en el aprendizaje de las matemáticas al utilizar las tecnologías de la información y de la comunicación como recurso didáctico.

La primera aportación relevante que resaltamos es la importancia del diálogo en todo el proceso de aprendizaje. Éste es un elemento claramente transformador. Las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* se enfrentan a situaciones problemáticas que son nuevas para ellas. Y lo son en dos sentidos. Así, por un lado, desde el punto de vista matemático, aparecen conceptos que desconocen y, por otro, la propia herramienta de trabajo les exige un conocimiento previo, que no tienen siempre. El reto, por tanto, es doble: resolver las actividades y hacerlo utilizando los ordenadores. A lo largo de las páginas precedentes, se puede apreciar como el diálogo es lo que más se utiliza para afrontar problemas que uno no sabe resolver. Comentando las dificultades del contenido matemático, cada persona aporta su "saber" y entre todas logran resolver los problemas propuestos (y encontrar muchas más vías de solución).

Muchas de las mujeres del grupo acaban por preferir los métodos tradicionales y recurren al uso del lápiz y del papel, o bien, prefieren hacer las cuentas "de cabeza". Esto no significa que tenga que ser exclusor. Lo que ocurre es que primero resuelven el ejercicio en la libreta y, luego, apuntan en la pantalla el resultado que han encontrado. Los motivos de este comportamiento son diversos: falta de hábito en el uso del ordenador, deseo de conservar las operaciones realizadas para poder repasarlas en otro momento, desconfianza de su capacidad para utilizar el ordenador, desconocimiento de la máquina, etc.

Lo cierto es que hemos detectado que a nivel cognitivo existen claras diferencias entre el uso de la libreta y el uso del ordenador, como soporte para resolver las actividades.

En cualquier caso, siempre el diálogo es la forma elegida para resolver las dudas y transmitir los pasos que se han seguido para resolver cada ejercicio. A través de los diversos ejemplos, vemos como las mujeres del grupo se juntan en grupos,[237] comparten experiencias, conocimientos, dudas, discuten sobre la interpretación correcta del planteamiento de las actividades y, finalmente, llegan a la solución del ejercicio por consenso. Cada persona aporta diferentes argumentos para justificar su punto de vista y la respuesta que da a cada ejercicio. El diálogo es la manera de compartir esos argumentos y ponerlos en común para toda la clase. Ejemplo de ello son las ocasiones en las que la persona que había logrado descubrir la solución a un determinado ejercicio lo decía en voz alta para el resto de la clase y explicaba la manera de hacerlo.

Otra de las aportaciones relevantes que aparece en el análisis que realizamos durante este capítulo es la concepción del aprendizaje desde la dimensión cognitiva de los contenidos matemáticos. A lo largo de las páginas anteriores aparecen ejemplos que muestran la complejidad del aprendizaje. A diferencia de lo que han defendido siempre los investigadores que se sitúan en el paradigma atomista (de las teorías del aprendizaje), leyendo las transcripciones de los comentarios de las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas,* vemos que en el aprendizaje intervienen multitud de –llamémosles-

[237] Unos grupos que definimos como “grupos interactivos”, porque se juntan personas con diferentes grados de conocimiento del medio y del contenido y funcionan a través del diálogo igualitario, en base a argumentos, no a relaciones de poder.

factores internos de la mente (como la experiencia previa, las prenociones, las creencias, los estereotipos, etc.). Todo este "mundo de la vida" (siguiendo la nomenclatura de Schütz y Luckmann, 1973) interviene en el aprendizaje, aunque de una manera mucho más compleja de lo que dicen Novak, Ausubel y Hanesian (1983).[238] Estos tres autores simplemente analizan el aprendizaje desde un punto de vista estrictamente individualista (como proceso cognitivo interno que ocurre dentro de cada persona), y recogen las aportaciones de la teoría de la equilibración de Piaget (1968, 1980), haciendo alguna precisión más.

Sin embargo, el aprendizaje siempre se produce en un entorno social, de manera que también hay que tener en cuenta las relaciones intersubjetivas. La experiencia previa, las creencias, las prenociones o los estereotipos de los que antes hablábamos, son elementos que se han formado socialmente (aunque después se interioricen y actúen sobre la respuesta individual que da cada persona ante cada ejercicio de matemáticas).[239]

En este capítulo aparecen múltiples elementos para respaldar esta interpretación, como son la inteligencia cultural, la interacción, el diálogo, la solidaridad que manifiestan las personas durante el proceso de aprendizaje, etc.

Por otro lado, esto no quiere decir que no intervengan variables internas. También aparecen elementos que nos sitúan claramente en la tradición del individualismo metodológico. Las mujeres del grupo explican, por ejemplo, la importancia de la repetición en el aprendizaje. Este aspecto es una referencia explícita hacia la ley de la

[238] Estos autores trabajan desde otro punto de vista totalmente diferente. Ellos se sitúan en el constructivismo, mientras que Schütz y Luckmann (1973) están ubicados en la fenomenología. Posteriormente Luckmann, junto con Berger (1988), ponen los pilares de la corriente del constructivismo social.
[239] Para comprobar esta afirmación ver Berger y Luckmann, 1988. También se puede utilizar de referencia (aunque desde una temática diferente a la que tratamos aquí) a Gómez, 2004.

frecuencia establecida por Watson (1913), por ejemplo,[240] que tanto ha calado en el "sentido común" general, a pesar de estar demostrado que no tiene por qué existir ninguna relación entre repetir una cosa y entenderla.[241]

Desde el punto de vista individual (de la agencia), otro de los aspectos que resaltan en esta investigación es la importancia de los componentes afectivos en el proceso de aprendizaje. La actitud de las personas es fundamental. El creerse las cosas que estás haciendo es un ingrediente básico para obtener el éxito. Y, al contrario, cuando no crees en lo que haces, es prácticamente seguro que fracasarás. Esta apreciación se pone de manifiesto en temas como la vivencia del bloqueo (que normalmente tiene un carácter exclusor) o el éxito (que es transformador). Si repasamos esos apartados, vemos abundantes ejemplos que nos sirven para discutir la segunda de las hipótesis de este trabajo. Más adelante entraremos pormenorizadamente en este tema.

[240] La ley de la frecuencia indica que la fuerza de un vínculo entre un estímulo (E) y una respuesta o reflejo (R) depende del número de veces que se produce.

[241] De hecho, la "ley de la repetición" ha sido varias veces criticada y no sólo desde la perspectiva cognitivista (que sería lo más lógico, por otro lado). También autores que se sitúan en la tradición atomista han criticado con fuerza esta idea, como el propio Thorndike, que después de proponer la "ley del ejercicio" (una reformulación del modelo watsoniano), la rechazó e introdujo el "principio de pertenencia", según el cual si dos ideas mantienen algún tipo de relación de pertenencia entre ambas, será mucho más fácil que se establezca un vínculo entre ellas.

16. ANÁLISIS DE LAS TRAYECTORIAS COGNITIVAS DE APRENDIZAJE

En este capítulo nos centramos en estudiar el aprendizaje en un entorno dialógico, como es la escuela de La Verneda – Sant Martí. Para ello, partimos de las categorías que han utilizado otros investigadores desde la Psicología del Aprendizaje o la didáctica de las matemáticas. En concreto, utilizamos un modelo de análisis basado en la dicotomía concreto/abstracto, que ha sido utilizada en diversas ocasiones en el aprendizaje de las matemáticas (Piaget, 1980; Skemp, 1980; Resnik y Ford, 1990, Alcalá, 2002; Dienes, 1970) o en el desarrollo del conocimiento (Chalmers, 1991). El modelo de análisis que proponemos son las trayectorias cognitivas de aprendizaje y está basado en los modelos de análisis que utilizan Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (1998, 2002). Este modelo nos sirve como herramienta para comprender algunos aspectos del aprendizaje del concepto matemático de proporción. Para ello, utilizamos la técnica del análisis del discurso, de acuerdo con una serie de tipos de discurso que hemos categorizado.[242] A lo largo del capítulo se muestran los resultados obtenidos desde varios puntos de vista. Por un lado, se presenta una visión descriptiva, a partir de la cuantificación de los diversos tipos de discurso. Después, se muestran las diferentes trayectorias cognitivas de aprendizaje para cada una de las actividades y se analiza el significado respecto al aprendizaje. Finalmente, se analizan las regularidades que muestran las diferentes trayectorias cognitivas en el aprendizaje.

---

[242] Ver la parte de metodología.

16.1. El análisis de las intervenciones

Dice Chalmers (1991) que para llegar al conocimiento podemos proceder de dos maneras distintas: bien por inducción, bien por deducción.[243] En el primer caso, lo que hacemos es pasar de los casos concretos al concepto general y en el segundo, de enunciados generales deducimos consecuencias concretas. Teniendo en cuenta lo que dice Chalmers (1991), resulta que el conocimiento implica (por lo menos) la capacidad de pasar de lo concreto a lo general (generalizar) o, a la inversa, de lo general a lo concreto.[244] Partiendo de esta idea, aplicamos el diseño metodológico desarrollado por Dreyfus, Hershkowitz y Schwarz (1998, 2002): utilizamos una categorización basada en el binomio concreto/abstracto para ver cómo se manifiesta en los diálogos la capacidad de pasar de uno a otro registro. Para ello hablamos de "casos particulares" frente a enunciados que implican un "reconocimiento generalizado" o las "interpretaciones comprensivas".[245]

[243] Hay muchas personas que nos ofrecen análisis de la racionalidad. Popper, 1967a, 1967b, por ejemplo, es uno de ellos, pero no el único. Así, nos podemos remontar hasta Euclides, pasando por Descartes y tantos otros. En la didáctica de las matemáticas, un libro interesante es *Matemática. Verdad. Realidad.* (compilado por Newman –1969-, que junto con Nagel son las dos personas que han popularizado la obra de Kurt Gödel). En este libro encontramos textos de Hempel, Wilder, Nagel, Newman, Veblen, Wesley, Gaskin, von Mises, que nos ofrecen una breve introducción a la matemática como ciencia axiomática con un cuerpo lógico-deductivo.

[244] Piaget (1968), por ejemplo, no estaría del todo de acuerdo con esto. Según él, *"la abstracción a partir de acciones o de operaciones no consiste en una simple segregación, ni en una simple lectura de elementos disociados, sino que conlleva necesariamente una reconstrucción por medio de elementos proyectados o "reflejados" del plano inferior al superior."* (Piaget y Beht, 1968: 265). Es decir, que la generalización no es un proceso lineal, sino que implica un proceso previo de reestructuración a nivel cognitivo, que da lugar al nuevo esquema de conocimiento, que se acomoda junto a los demás esquemas de conocimiento previos.

[245] Como ya hemos dicho, recurrimos al binomio concreto/abstracto, porque consideramos que es un indicador que nos permite acercarnos a la división entre matemáticas de la vida real y matemáticas académicas. Los problemas matemáticos que nos interesan son los que tienen que ver con la realidad (en el sentido de la perspectiva realista holandesa –ver Goffree, 2000–). Aunque el planteamiento sea concreto y contextualizado en la experiencia cotidiana de las personas del grupo de matemáticas (Abreu, 2000), para resolverlos hay que ir del planteamiento concreto a la solución a través de métodos más o menos abstractos. El binomio

Si las matemáticas, como dice Alcalá (2002), son una ciencia abstracta, entonces, aprender matemáticas tiene que significar ser capaz de aprender esa "abstracción" (por lo menos, en el sentido que damos aquí a la palabra "aprender").[246] Por eso, durante el proceso de aprendizaje tienen que aparecer diálogos que sean "interpretaciones comprensivas", "reconocimientos generalizados" y no sólo referencias a los "casos concretos". Una colección de "casos concretos" no nos indica si la persona entiende (o no) el concepto de proporción. Y, además, si es cierto que todas las personas somos capaces de aprender y utilizar las matemáticas, entonces los "reconocimientos generalizados", así como las "respuestas explicativas" no tienen que ser dominio exclusivo del docente y menos en un entorno de aprendizaje dialógico, donde la participación es igualitaria.

Total

	Caso Particular (CP)	Diversos casos Particulares (DP)	Interpretación Comprensiva (IC)	Reconocimiento Generalizado (RG)	Evocación de la constante (E*k*)	Provoca (p)	Asentimiento (a)	Enunciado dubitativo (ed)	Respuesta explicativa (re)/(r)	Enunciado Asertivo (ea)	Corrección Clarificadora (cc)	**Total intervenciones**
P1	3	1	6	9	2	35	2	1	5	5	2	**71**
P2	0	0	2	1	0	3	2	1	0	2	0	**11**
P3	1	1	2	4	0	2	1	4	1	2	1	**19**
P4	5	4	1	9	2	13	2	2	3	5	1	**47**
P5	10	1	5	5	1	2	1	5	15	7	0	**52**
P6	6	0	4	3	1	2	3	3	6	3	0	**31**
Total	**25**	**7**	**20**	**31**	**6**	**57**	**11**	**16**	**30**	**24**	**4**	**231**

Tabla 16.1. Cuantificación de las intervenciones durante la resolución de los problemas propuestos. Datos absolutos. Fuente: Elaboración propia.

concreto/abstracto permite ver desde ese punto de vista el desarrollo de la trayectorias cognitivas durante el aprendizaje, para ver de qué manera se produce éste, y, sobre todo, qué relación tiene con el contenido matemático. Para ampliar esta reflexión ver la parte de metodología.

[246] "Aprender" desde un punto de vista cognitivo, no atomista.

Al contar la cantidad de veces que se generaliza el discurso, vemos que las "generalizaciones" superan a los "casos particulares" (de hecho, vemos que frente a 31 generalizaciones aparecen 25 casos particulares).[247]

Estos datos parecen indicar que la generalización es un nivel del discurso habitual en la clase de matemáticas y que predomina sobre las intervenciones relacionadas con casos particulares, como muestra del esfuerzo que se realiza en la clase por comprender los diferentes conceptos matemáticos que aparecen planteados en las actividades.

No obstante, los casos particulares también son utilizados por todas las personas participantes, tal y como se puede apreciar en los datos adjuntos.[248]

Sin embargo, cuando miramos el caso de los enunciados que implican un "reconocimiento generalizado" de alguna regla o principio matemático de las proporciones, cabría esperar que la figura de la profesora predominase, pero no es así. En la tabla 16.1 se ve perfectamente cómo la profesora "empata" a "reconocimientos generalizados" con la persona 4.[249] Y esta persona, junto con la 5, forman una pareja que aporta la mayor parte de las generalizaciones que aparecen en la tabla.[250] Esta distribución "democrática" de los enunciados que nos remiten al reconocimiento de un principio general o una norma matemática sugiere que, efectivamente, existe un diálogo igualitario en la clase y que las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* participan activamente en la construcción del conocimiento matemático.

[247] Ver tabla 16.1.
[248] Ver tabla 16.2.
[249] Podríamos imaginar que la persona 4 está actuando como catalizador, quitando protagonismo a la profesora.
[250] Hay que decir que el número que se ha asignado a cada persona coincide con el lugar que ocupaba en la mesa en torno a la que se sentaron todas las mujeres del grupo. Aquel día había seis mujeres y se juntaron haciendo "pareja" con la de al lado: la dos y la tres juntas, la cuatro y la cinco, y la seis, sola, aunque de vez en cuando hablaba y se juntaba con la cuatro y la cinco.

En la cita que adjuntamos al margen vemos como la persona 2 primero responde de manera concreta al ejercicio que se le plantea: si en el ejercicio aparece una tabla que combina kilos y euros ("a tantos kilos", "tantos euros te gastas"), en la que hay que completar los diferentes espacios en blanco, la persona 2 primero lo que hace es decir en voz alta las respuestas, pero inmediatamente se da cuenta que hay una regla inherente. Así, cuando dice "*y, así sucesivamente*", nos está diciendo que "ve" claramente esa regla y "sabe" que el resto de espacios en blanco se completan conforme a ese criterio. Aquí no aparece el significado teórico del concepto de constante de proporcionalidad, pero queda claro que la persona 2 tiene la idea de lo que significa y la sabe aplicar.

> P2.- A ver, 1 kg... importe en euros 3€, 2 kg, 6€... Entonces sería calcular el importe de los demás kilos, lo que cuestan, no?
> P1.- Sí, ¿3kg?
> P2.- Serán 9€, no? Y así sucesivamente.

Actividad 1

En general, son las personas 4, 5 y 6 las que más referencias hacen a los casos concretos. Esto se debe a que son las personas más activas dentro del aula. Si volvemos a la tabla anterior, donde se recoge el total de las intervenciones, para tomar un punto de referencia, apreciamos que efectivamente son las tres mujeres que más participan dentro de la clase. Si es un rol en el grupo o bien es debido a su nivel previo de conocimiento, no lo sabemos. Pero en nuestra experiencia siempre alguien asume ese rol y sin él no funcionaría el grupo.

En las transcripciones vemos que, la mayor parte de las veces, estos "casos concretos", en realidad, son las respuestas concretas a cada una de las actividades planteadas. En la cita adjunta ponemos un ejemplo de ello: una situación en la que la persona 3 está completando las casillas en blanco de la tabla (de la actividad 1) donde se compara la cantidad con el importe. En la cita leemos que la persona 3 sabe que para resolver el ejercicio tiene que multiplicar por 3 cada uno de los números que aparecen en la fila de los kilos,[251] pero lo que no sabe es

> P3.- A ver. Espera... 3 por 4, doce. Y tres por siete... 21. Y así. Y 6 por 3, dieciocho, euros. Tres por cinco, 15 euros. Tres por cuatro, 12 euros y siete por tres, 21 y ocho por cuatro <una compañera corrige, ocho por tres> ocho por tres, 24...

Actividad 1

[251] Ver la parte de metodología para la descripción de las actividades. Allí se pueden encontrar los enunciados de cada una de ellas.

que ese "3" significa "constante de proporcionalidad" en terminología matemática.[252]

Esto deja patente una cosa: las mujeres del grupo de matemáticas saben resolver perfectamente situaciones problemáticas que implican conocimiento matemático. Sin embargo, lo que no saben (porque nadie se lo ha explicado antes o lo han olvidado) es el nombre que a "eso" se le da en matemáticas (sea "constante de proporcionalidad", "razón", "cociente", etc.).

Caso particular

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	**TOTAL**
Actividad 1	0,0	0,0	0,0	4,2	0,0	0,0	**4,2**
Actividad 2	0,0	0,0	0,0	8,3	12,5	8,3	**29,2**
Actividad 3	4,2	0,0	0,0	0,0	4,2	0,0	**8,3**
Actividad 4	4,2	0,0	0,0	0,0	4,2	0,0	**8,3**
Actividad 5	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	8,3	**8,3**
Actividad 6	0,0	0,0	0,0	4,2	8,3	8,3	**20,8**
Actividad 7	0,0	0,0	0,0	4,2	8,3	0,0	**12,5**
Actividad 8	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**0,0**
Actividad 9	4,2	0,0	4,2	0,0	0,0	0,0	**8,3**
Actividad 10	0,0	0,0	0,0	0,0	4,2	0,0	**4,2**
TOTAL	**12,5**	**0,0**	**4,2**	**20,8**	**37,5**	**25,0**	**100,0**

Tabla 16.2. Cuantificación de las intervenciones durante la resolución de los problemas propuestos. Casos concretos. Fuente: Elaboración propia.[253]

En cambio, por lo que respecta a los enunciados que implican un "reconocimiento generalizado" de la norma matemática que hay detrás, cabría esperar que hubiese una mayor disparidad entre las personas participantes y la profesora, en cuanto a porcentaje de intervenciones.[254] El hecho de que haya una persona que sobresalga por encima del resto nos sugiere que (como ocurre en ocasiones) hay

[252] No lo sabe, porque líneas después aparece una intervención de la profesora (P1) explicando qué es la constante de proporcionalidad y pone el ejemplo del 3, que han utilizado las mujeres del grupo para resolver la actividad.

[253] Tenemos que decir que la sesión duró dos horas y las tres últimas actividades se tuvieron que hacer deprisa, sin poder destinarles todo el tiempo que hubiese sido necesario. Las personas participantes priorizaron el resolver las actividades y entregar los resultados en papel al investigador y no se pararon a discutir tanto como en las siete primeras actividades.

[254] O por lo menos esto es lo que cabría esperar que ocurriese en una clase que funcionase según el modelo académico de enseñanza-aprendizaje (Medina, 1994, 1996).

una persona que es más protagonista que el resto (quizás porque le gusta intervenir más en clase, o porque trata de mostrarse más que el resto). De todas maneras, los datos muestran claramente que el resto de las personas del grupo (salvo la persona 2) también son capaces de utilizar, reconocer y expresar la norma generalizada.

Un dato a destacar es el tipo de intervenciones que hace la persona 3. Esta persona, a pesar de ser una de las que menos participa, cuando lo hace es para introducir alguna reflexión en la línea del reconocimiento de las ideas matemáticas abstractas.[255]

Reconocimiento generalizado

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	**TOTAL**
Actividad 1	0,0	3,2	6,5	6,5	0,0	0,0	**16,1**
Actividad 2	3,2	0,0	0,0	6,5	0,0	0,0	**9,7**
Actividad 3	6,5	0,0	0,0	0,0	0,0	6,5	**12,9**
Actividad 4	9,7	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**9,7**
Actividad 5	3,2	0,0	6,5	3,2	0,0	0,0	**12,9**
Actividad 6	3,2	0,0	0,0	12,9	6,5	3,2	**25,8**
Actividad 7	3,2	0,0	0,0	0,0	6,5	0,0	**9,7**
Actividad 8	0,0	0,0	0,0	0,0	3,2	0,0	**3,2**
Actividad 9	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**0,0**
Actividad 10	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	**0,0**
TOTAL	**29,0**	**3,2**	**12,9**	**29,0**	**16,1**	**9,7**	**100,0**

Tabla 16.3. Cuantificación de las intervenciones durante la resolución de los problemas propuestos. Reconocimientos generalizados. Fuente: Elaboración propia.

Esta interpretación anterior también es aplicable al caso de las “interpretaciones comprensivas” y que se refieren a los argumentos que utilizan las personas de la clase para entender los conceptos que aparecen en las diferentes actividades matemáticas propuestas (gráfico 16.1).

[255] Ver tablas 16.1 y 16.3.

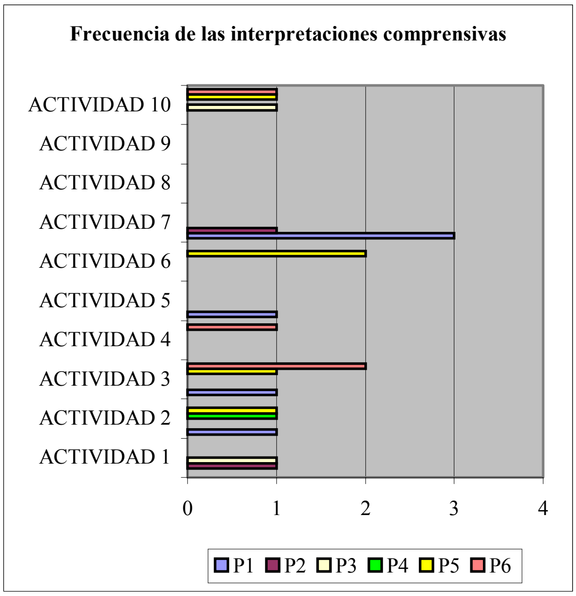
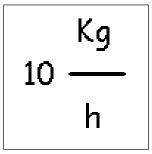


Gráfico 16.1. Frecuencia de las interpretaciones comprensivas. Fuente: Elaboración propia.

P1.- La forma matemática se presentaría así, la constante... Son 10 qué, ¿qué significa eso?
P4.- Lo de abajo es la hora, ¿no? Lo que has puesto abajo es la hora...
P1.- Sí.

Actividad 1

La cita adjunta es un ejemplo de "interpretación comprensiva". En ella vemos primero la intervención de la profesora, que explica una manera de presentar la constante (escribe en la pizarra 10 kg/h; k = 10).[256] Y, después de escribir inmediatamente "constante igual a diez kilos cada hora" en la pizarra, pregunta qué significa eso. Entonces la persona 4 mira lo que aparece escrito en la pizarra e interpreta que la "h" que aparece debajo de "kg" significa "la hora". Lo que está haciendo esa persona es intentar entender la nomenclatura que ha escrito la profesora. Por eso, se trata de una interpretación comprensiva: le está buscando el sentido a eso que ve apuntado.



Reconstrucción del contenido de la pizarra. Fuente: Elaboración propia.

Otro ejemplo de "interpretación comprensiva" lo encontramos en la cita adjunta correspondiente a la actividad 3. Ahora la actora principal es la persona 6. Primero hace una afirmación tajante (dice "*pues ahora es al revés*"), que nosotros categorizamos como "enunciado asertivo", pero no explica el por qué de su afirmación. Por eso la profesora la "provoca": primero le confirma que tiene razón, pero después le pregunta por qué. Entonces es cuando la persona 6 hace una interpretación comprensiva en la que aparecen dos conceptos

P6.- Pues ahora es al revés.
P1.- Al revés, sí, ¿por qué?
P6.- Porque el doble de personas, en una hora, pues les costará la mitad...

Actividad 3

[256] Ver imagen adjunta.

matemáticos claves: el concepto de "doble" y su opuesto, "mitad". La persona participante no llega a cuantificar la constante de proporcionalidad (2 y ½), pero tiene una idea muy clara del concepto doble / mitad.[257]

Este tipo de discurso no es tan habitual como los dos anteriores, pero aparece con suficiente frecuencia (en 20 ocasiones) como para permitirnos pensar que forma parte del esfuerzo colectivo que se realiza en la clase, para aprender los contenidos instrumentales que aparecen planteados en las diferentes actividades. Además, el gráfico 16.1. ya nos muestra que (a pesar de algún caso esporádico que se sale de la norma), por lo general, todas las personas utilizan por igual las "interpretaciones comprensivas".

Estos tres indicadores (frecuencias de "casos particulares", "reconocimientos generalizados" e "interpretaciones comprensivas") nos permiten constatar *la existencia de un diálogo fluido en la clase para construir el "conocimiento matemático"*, en el que participan todas las personas del grupo de matemáticas.

Por otro lado, otro de los elementos a destacar son las "provocaciones" al diálogo. Con este nombre nos referimos a las invitaciones al diálogo, todas esas veces en que una de las personas de la clase le pide a otra que explique un resultado, un comentario, o cualquier otra cosa en ese sentido.

[257] Estos conceptos matemáticos son una de las ideas matemáticas más básicas (casi de la misma categoría que la idea de orden o de aditividad). Cualquier otra relación de proporcionalidad implica realizar muchos más cálculos y la idea no es tan clara (incluso si se habla de las fracciones con denominador igual a 4, referentes a la partición de la unidad: ¼, 2/4, ¾). Por eso, en la parte de metodología hemos establecido como la segunda de las dimensiones en el proceso de abstracción esta idea, que se encuentra entre la noción de "aumentar / decrecer" y la dimensión cuantitativa de la proporción.

La mayor parte de las "provocaciones" corresponden a la profesora (35 sobre un total de 57).[258] Este dato parece indicar que el rol que desempeña la profesora en el aula es el de "dinamizadora": la persona que anima a las mujeres del grupo de matemáticas a intervenir en la clase. En el ejemplo que adjuntamos en la cita, vemos una muestra clara del tipo de "provocaciones" que hace la profesora para dinamizar la clase. La profesora lo que suele hacer es lanzar preguntas al grupo, para que reflexionen más sobre las ideas matemáticas y razonen el por qué de las cosas.

P1.- Sí, bueno, muy bien. Pero ¿cómo va la tabla?

Actividad 1

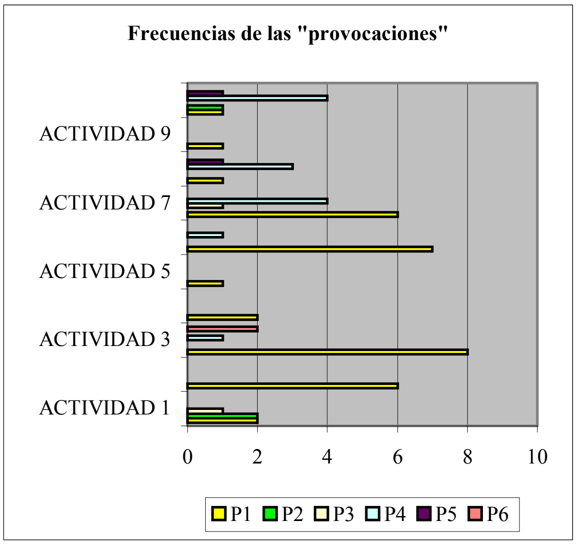


Gráfico 16.2. Frecuencia de las provocaciones. Fuente: Elaboración propia.

Sin embargo, no es sólo la profesora quien lanza preguntas al resto del grupo, como cabría esperar en una clase académica "tradicional" donde quien pregunta es el profesor y los estudiantes responden a las preguntas. Las personas 4 y 5 también intervienen varias veces para "dinamizar" el grupo y plantean sus preguntas, como hace la profesora (gráfico 16.2). No obstante, estas dos personas lo hacen de dos maneras diferentes: bien porque están leyendo los enunciados de las

258 Debemos decir que no es un objetivo de nuestro trabajo sistematizar "completamente" todas las interacciones, aunque hay material para hacerlo.

actividades (y entonces es normal que hagan una "provocación", porque la pregunta aparece en el propio enunciado de la actividad); bien en el decurso de una conversación, porque algo no ha quedado suficientemente claro. Estas últimas son, a nuestro parecer, las más provechosas para el aprendizaje.

En la cita adjunta al margen aparece el fragmento del razonamiento que hace la persona 6 para resolver uno de los ejercicios propuestos. La persona va "completando" los espacios en blanco que aparecen en la tabla del libro en voz alta:[259] *"una persona tarda sesenta minutos en limpiar el puesto del mercado, dos tardan treinta minutos, tres, veinte...*" Entonces pregunta si lo está haciendo bien (éste es uno de los aspectos más sobresalientes de la educación de personas adultas: el hecho de hacer preguntas para "asegurar" que lo que están diciendo es correcto). De todos modos, el tipo de tarea facilita que se produzca este fenómeno naturalmente. Cuando la profesora responde que sí, entonces sale la persona 5 "provocando" la continuación de la actividad y pregunta cuál sería la solución en el caso de que las personas que estuviesen recogiendo fuesen cuatro. Esto es una forma normal que adoptan las "provocaciones" en el caso de las personas participantes.

> P6.- Una persona tarda sesenta minutos, dos personas, 30; tres personas, 20... ¿no lo hago bien?
> P1.- Sí, sí.
> P5.- ¿Cuatro personas?
>
> **Actividad 3**

Si utilizamos la información de los gráficos y de las tablas como herramienta para captar el uso de un aprendizaje de carácter dialógico, podemos apreciar que las categorías que corresponden a una actitud de "poder" o "autoritaria" del profesor en la clase (como es el caso de las situaciones en que es el docente quien da la explicación de un concepto, en el hilo de su explicación "magistral") son básicamente puntuales.

[259] Ver los enunciados de las actividades, en la parte de metodología.

Total

	Caso Particular (CP)	Diversos casos Particulares (DP)	Interpretación Comprensiva (IC)	Reconocimiento Generalizado (RG)	Evocación de la constante (E*k*)	Provoca (p)	Asentimiento (a)	Enunciado dubitativo (ed)	Respuesta explicativa (re)/(r)	Enunciado Asertivo (ea)	Corrección Clarificadora (cc)	**Total intervenciones**
P1	1,3	0,4	2,6	3,9	0,9	15	0,9	0,4	2,2	2,2	0,9	**31**
P2	0	0	0,9	0,4	0	1,3	0,9	0,4	0	0,9	0	**4,8**
P3	0,4	0,4	0,9	1,7	0	0,9	0,4	1,7	0,4	0,9	0,4	**8,2**
P4	2,2	1,7	0,4	3,9	0,9	5,6	0,9	0,9	1,3	2,2	0,4	**20**
P5	4,3	0,4	2,2	2,2	0,4	0,9	0,4	2,2	6,5	3	0	**23**
P6	2,6	0	1,7	1,3	0,4	0,9	1,3	1,3	2,6	1,3	0	**13**
Total	**11**	**3**	**8,7**	**13**	**2,6**	**25**	**4,8**	**6,9**	**13**	**10**	**1,7**	**100**

Tabla 16.4. Cuantificación de las intervenciones durante la resolución de los problemas propuestos. Porcentajes respecto del total de intervenciones. Fuente: Elaboración propia.

No obstante, sí que aparecen "respuestas explicativas" de la profesora, pero lo hacen junto con otras "respuestas explicativas", que corresponden con el resto de personas que hay en el aula (de hecho, a la vista de los datos, la persona 5 da tres veces más respuestas explicativas que la profesora). Este aspecto sugiere que la profesora está aportando sus conocimientos, igual que lo hacen el resto de mujeres del grupo de matemáticas dialógicas de la escuela, y explica aquello que ella sabe.[260]

> P4.- ... durante la hora que hemos estado en el puesto, se han vendido 10 kilos de champiñones. a) Si se mantiene constante el ritmo de venta, ¿qué valores va tomando la magnitud kilos de champiñones en la siguiente tabla?

Actividad 1

De hecho, es cierto que la profesora es la persona que más interviene durante la sesión (un 31% de las veces, gráfico 16.4). A pesar de ello, si analizamos más detenidamente de qué manera interviene, rápidamente vemos que lo hace para animar la conversación. Así, de

[260] Ver tablas 16.1 y 16.4.

"las explicaciones" se encarga la persona 5 (especialmente) que, junto con la persona 6, son las dos personas participantes que más intervenciones hacen en la línea de "reconocimientos generalizados" e "interpretaciones comprensivas". Sin menospreciar, por ello, que la persona 4, por ejemplo, participa un 20% de las veces (justo por detrás de la profesora) y que también desempeña un rol de "animadora" (o, en otros términos, también juega el papel de "tirar" de las compañeras). De hecho, si repasamos la transcripción de la grabación, es la persona cuatro la que más veces lee los enunciados de las diferentes actividades.

¿Qué podemos decir, entonces, a la luz de todos estos datos? El análisis cuantitativo preliminar que llevamos hecho hasta el momento deja patente que la dinámica de la clase es diferente a la que se establece con un modelo de aprendizaje tradicional, en el que aparece el docente ante la clase y da la explicación magistral, mientras los estudiantes atienden (en el mejor de los casos) callados, tomando sus correspondientes apuntes. Estas características nos remiten al "modelo escolar" que ha sido teorizado por Óscar Medina en su tesis doctoral.[261]

En cambio, los datos que hemos presentado hasta ahora nos llevan a otro modelo diferente de aprendizaje. Medina (1994, 1996) lo llama "modelo social" y se caracteriza por la participación igualitaria de todas las personas en el desarrollo de la clase. El diálogo no sigue una flecha unívoca desde el docente hasta el alumno, sino que es bidireccional. Además, no hablamos de "alumnos", sino de "personas participantes", concepto que representa mejor la idea de una persona crítica y reflexiva en la clase.

A continuación exploraremos la forma de ese aprendizaje desde el punto de vista de las trayectorias cognitivas de aprendizaje (TCA).

[261] Ver Medina, 1994, 1996.

Con ellas esperamos poder dibujar cómo se desarrolla el aprendizaje sobre una línea, donde se representan (entre dos polos) los aspectos concretos y los aspectos abstractos del razonamiento.

16.2. Sobre las trayectorias cognitivas de aprendizaje

En los gráficos[262] que muestran las trayectorias cognitivas de aprendizaje[263] correspondientes a las actividades aparecen diferentes tipos de trayectorias. Encontramos trayectorias verticales, así como también trayectorias diagonales. Las primeras indican que el proceso de aprendizaje es lineal y no se produce ningún tipo de transición de las categorías más concretas ("caso particular" y "diversos casos particulares") hacia las categorías abstractas ("interpretación comprensiva", "reconocimiento generalizado" y "evocación de la constante"). En cambio, las trayectorias que avanzan en diagonal muestran que la(s) persona(s) hace(n) una argumentación que va de lo concreto a lo abstracto, o a la inversa. Este aspecto indica que existe la capacidad de cambiar de nivel de razonamiento, hecho que sugiere la existencia de una cierta capacidad de comprensión del concepto matemático abordado en ese momento. En estos casos lo que suele ocurrir es que el dibujo final de la trayectoria cognitiva de aprendizaje (TCA) acaba adoptando la forma de una línea de avanza en *zig-zag*, porque constantemente se producen transiciones de lo concreto a lo abstracto y vuelta a lo concreto (o al revés). Son estas formas las que más sugieren que existe un esfuerzo de comprensión en el diálogo que se produce dentro del aula.

A continuación vamos a analizar las diferentes trayectorias. Repasaremos actividad por actividad, resaltando los aspectos más relevantes que han aparecido.

[262] Ver los gráficos que se adjuntan en este apartado, en cada una de las actividades.
[263] Ver la definición de "trayectoria cognitiva de aprendizaje" en la parte de metodología, en la nota a pie 162.

1) La venta de champiñones en el mercado (I)

Descripción esquemática de la TCA_1.[264] Se trata de una trayectoria serpenteante, que presenta 3 momentos diferenciados: a) una línea ligeramente curva, que tiende hacia lo abstracto; b) varias diagonales en forma de parrilla, que van de lo concreto a lo abstracto repetidas veces; y c) de nuevo otra ondulación suave de lo concreto a lo abstracto, con un intento de interpretación comprensiva en medio.[265]

Esta trayectoria comienza con la provocación de la persona 2 y la profesora, que animan al diálogo al resto de las mujeres del grupo de matemáticas. Después, la persona 2 hace una "interpretación comprensiva" de la pregunta que le plantea su profesora y, tras otra "provocación" (en este caso de la profesora), P2 llega a un "reconocimiento generalizado".

P2.- Completa la siguiente tabla... masa kilos... importe en euros (...)
P1.- Sí, pero mira lo que pone, ¿qué puede significar ese 1, ese 6, ese 2 y ese 6...?
P2.- A ver... 1 kilo... importe en euros 3 euros, 2 kilos, 6 euros... Entonces sería calcular el importe de los demás kilos, lo que cuestan, ¿no?
P1.- Sí. ¿3 kilos?

Actividad 1

En la cita adjunta vemos todo el proceso. La persona 2 lee el enunciado del problema. La profesora llama la atención sobre los números que aparecen en la tabla. Y la persona participante enseguida "ve" que existe una regularidad y comienza a responder a cada caso particular, con el resultado correcto... Cuando esta persona pregunta "*sería calcular el importe de los demás kilos, ¿no?*", lo que hace es interpretar lo que se le pide en el problema: pregunta para asegurarse si lo ha entendido bien.

P1.- Sí, ¿3kg?
P2.- Serán 9€, no? Y así sucesivamente.

Actividad 1

Entonces es cuando la profesora le responde que sí, que ha entendido bien, y la provoca con una nueva pregunta ("sí, ¿3 kilos?). Adjuntamos de nuevo la cita que ya aparecía en el apartado anterior, correspondiente al primer "reconocimiento generalizado" que se hace en la sesión. Como decíamos antes, el adverbio "sucesivamente" indica claramente que la persona 2 ha "visto" la relación de

[264] Trayectoria Cognitiva de Aprendizaje.
[265] Ver gráfico adjunto de la TCA 1, situado justo a continuación de esta explicación.

proporcionalidad que existe entre los diversos números que aparecen en la tabla (aunque no lo teorice, ni lo llame por su nombre matemático). Esto es un ejemplo de que efectivamente esa persona entiende qué es una proporción y la sabe aplicar. Quizás, lo que le falta es identificar ese conocimiento previo que ya tiene con el nombre académico que se le da.[266]

A primera vista, sorprende la rapidez con la que se llega al "reconocimiento generalizado" de las reglas que se encuentran detrás de los problemas matemáticos planteados. Como se puede apreciar, tanto en el gráfico de trayectorias como en el fragmento que adjuntamos, la persona 2 sólo necesita un par de frases para encontrar la solución al problema planteado y, aunque no hace una "evocación de la constante" explícita, queda patente que sabe perfectamente cómo interviene la constante de proporcionalidad en el problema planteado.

P2.- Serán 9 euros, ¿no? Y así sucesivamente.
Todas.- ¡Sí!
P2.- ¿Continúas tú ahora? <a una compañera>
P3.- Es que yo soy novata.
P1.- Cuatro kilos, ¿cuánto costarían, por ejemplo?
P3.- A ver. Espera. Tres por cuatro, 12. Y tres por siete... 21, y 8 por cuatro <otra compañera corrige 8 por 3>
P3.- ...ocho por tres, 24.

Actividad 1

Sin embargo, a pesar de la rapidez de la respuesta de la persona 2, la continuación del diálogo muestra que no ha quedado nada claro para el resto del grupo. Aunque todas las mujeres del grupo coinciden con la persona 2 cuando dice "*y así sucesivamente*" para expresar que ha entendido cómo se resuelve el problema, la persona 3 se declara como "*novata*" y se resiste a dar ella una respuesta al problema. Y, cuando lo hace, se equivoca y es corregida por otra compañera. Después de esto, como se aprecia en la cita que aparece al lado de estas líneas, la propia persona 3 entra en un (llamémosle) monólogo[267] en el que va completando los espacios en blanco de la tabla. En el gráfico de la trayectoria de aprendizaje[268], este fragmento coincide con el momento

[266] Como veremos, esta es una "constante" durante toda la sesión. Las personas participantes utilizan conocimientos matemáticos, pero no lo saben porque tampoco reconocen el concepto académico que están utilizando. Nos atrevemos a decir que éste es uno de los rasgos más característicos de la educación de personas adultas. Los conocimientos académicos se refieren a conocimientos que las personas ya tienen y utilizan a menudo durante sus vidas. El diálogo sirve para hacer evidente esta situación (es decir, para sacarla a la luz) y, a través de ese diálogo, las personas llegan a ser conscientes de todo lo que ya saben.
[267] Porque sólo habla ella.
[268] Ver páginas 265 y ss.

en el que la línea adopta una forma de "zig-zag", entre los "diversos casos particulares" que aparecen (las respuestas a cada uno de los espacios en blanco) y el reconocimiento de la regla que es necesaria para contestar bien a esas preguntas. Como no aparece en ningún momento referencia explícita a la idea de constante de proporcionalidad, interpretamos que la persona 3 "ve" que para resolver el ejercicio tiene que multiplicar por 3 cada uno de los números que se encuentra en la fila superior de la tabla. No obstante, el reconocimiento de esa operación multiplicativa (Alcalá, 2002) no tiene por qué significar que también se "vea" la conexión con la constante de proporcionalidad.

Aquí se inicia una segunda parte del diálogo a partir de la intervención de la persona 3 que, junto con la 4, serán las dos protagonistas de la explicación pormenorizada de la constante de proporcionalidad que aparece en esta actividad. Cuando la profesora las provoca preguntándoles "*¿cómo va la tabla?*", se inicia un diálogo que acaba con el reconocimiento del significado de la constante de proporcionalidad.[269] Es la persona 4 la que toma la palabra esta vez para explicar cómo cree que funciona la "k".

La profesora introduce un nuevo concepto en el diálogo intentando clarificar su significado (apoyándose en el uso del libro como soporte didáctico). No obstante, la intervención de la persona 3 (que intenta hacer una interpretación comprensiva de lo que dice la profesora, pero sin éxito) deja entrever la existencia de una dificultad en todo este proceso. La persona 3 confunde la letra "k" de constante con la "k" de kilogramo. Estos dos conceptos entran en contradicción en su mente, tal y como nos induce a pensar el hecho de que mueva dubitativamente la cabeza al decirlo. La profesora, entonces, adopta un papel director en el aula y se apresura a clarificar que la "k" se refiere al concepto de "constante de proporcionalidad", para evitar

> P3.- ... la k es tres euros, k es de k, de kilo... <mueve la cabeza dubitativamente>
> P1.- k es la constante, significa constante.
> P4.- O sea, dando a k distintos valores de la primera magnitud, masa, vamos obteniendo los valores de la segunda magnitud.
> P1.- ¿Es lo que habéis hecho de cabeza, no?

Actividad 1

[269] Ver anexo.

inmediatamente que se produzca un error para resolver el conflicto semántico. En el gráfico de la trayectoria cognitiva de aprendizaje vemos que la intención de la profesora (claramente perlocucionaria) tiene éxito y, la persona 4 reacciona enseguida llegando al reconocimiento más generalizado del concepto de proporcionalidad.

Después de esto, la profesora comenta que lo que ahora han hablado en clase (la resolución de la primera de las tablas de proporciones), ya lo habían hecho "de cabeza" al inicio de la sesión (aquí se refiere a la primera respuesta que dio la persona 2, cuando comenta que el resultado de una de las casillas en blanco serán 9 euros).

Es importante comentar este punto, porque normalmente las personas participantes "hacen las operaciones de cabeza". De hecho, es una terminología que suelen utilizar mucho en su discurso. Cuando las mujeres participantes dicen que una operación la han resuelto "de cabeza", lo hacen para diferenciar la forma "académica" de resolver un problema.[270] Las mujeres del grupo cuando ven el enunciado del problema lo que hacen es pensar: si un kilo de champiñones vale 3 euros, entonces 3 kilos, por ejemplo, valen 9 euros. Eso es lo que han hecho "de cabeza". La diferencia con el procedimiento académico es que han tenido que apuntar en la libreta 3 x 3 = 9. Además, ese tres es la constante de proporcionalidad.

Así, si nos fijamos en las diversas franjas de abstracción por las que atraviesa el diálogo durante esta actividad, podemos constatar que, al principio, el diálogo se sitúa en la franja de abstracción alta. Sin

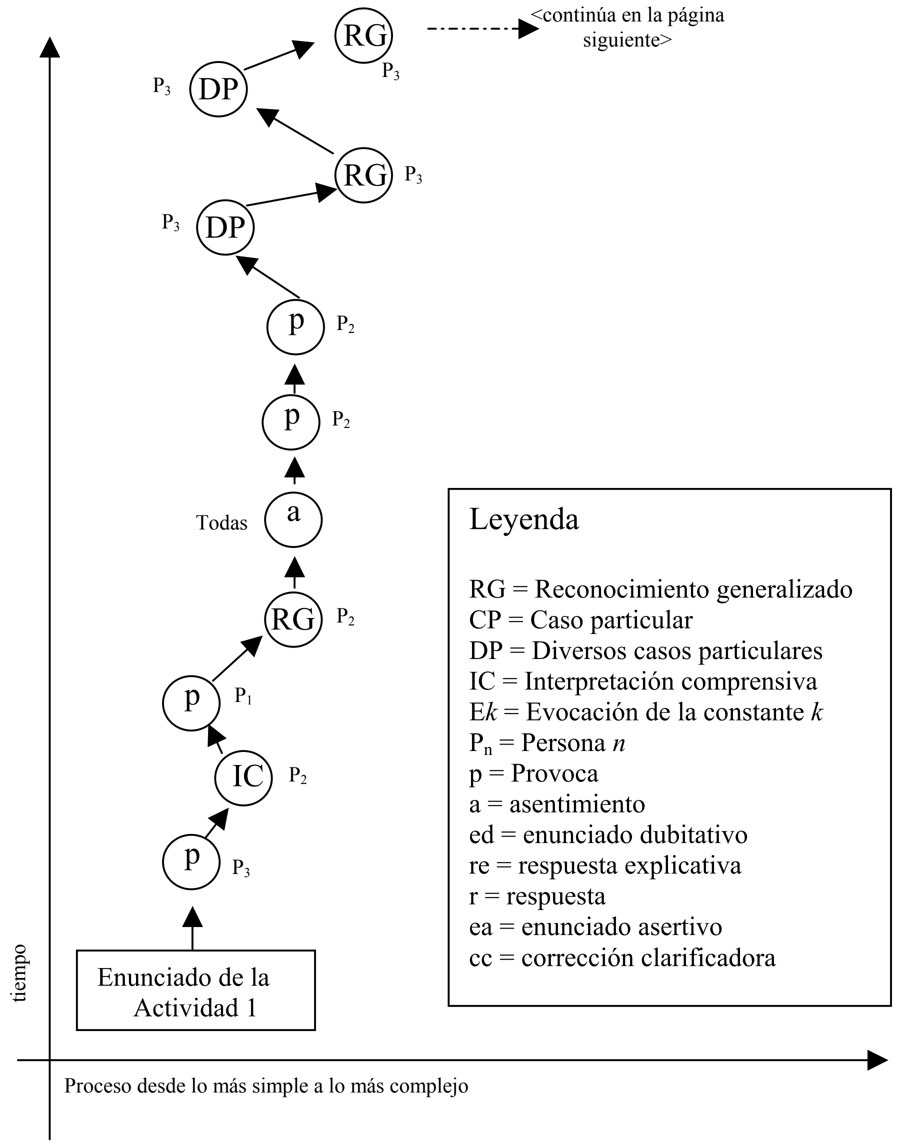
[270] En ese caso implicaría resolver el problema con el lápiz y el papel, pero hacerlo así supone conocer el lenguaje matemático (por lo menos la notación correcta para escribir las operaciones correctamente en la libreta) y saber cómo funciona. Por ejemplo, en la resta hay que saber que en la libreta un número se pone debajo del otro y debajo se pone una raya, mientras que a la izquierda se pone un guión que significa "resta". El resultado se apunta debajo de la raya. Para encontrarlo, hay que empezar por la columna de la derecha e ir de derecha a izquierda, restando los números por columnas. Si nos pasamos de diez, nos llevamos la decena y apuntamos la unidad. Todo esto resulta muy complicado para una persona acostumbrada a restar sumando mentalmente desde el número más pequeño hasta el más alto y viendo lo que le queda (que es normalmente como lo hacemos en realidad).

embargo, inmediatamente después, tras las provocaciones de la persona 2, el diálogo gira hacia el polo de lo concreto al intervenir la persona 3 en la conversación (y afirma que ella es “novata”). Entonces, a través de la interacción con otra de las personas del grupo (la persona 5) y de la provocación de la profesora, la trayectoria de la persona 3 adopta un aspecto de *zig-zag*, ir y volver de lo concreto a lo general, para volver a seguir el mismo proceso y acabar en la emisión de un “reconocimiento generalizado”. Este aspecto, marcado por las diagonales que adopta la trayectoria del diálogo, muestra cómo la persona 3 entra en una reflexión, que la lleva a interpretar diversos casos particulares en la búsqueda de la norma generalizada que se encuentra detrás. Finalmente, esta persona acaba encontrando la norma después de un proceso de diálogo, que podríamos calificar de inductivo, porque la persona 3 va dando las respuestas correctas, pero no aparece explícito en ningún momento que parta de un enunciado general.

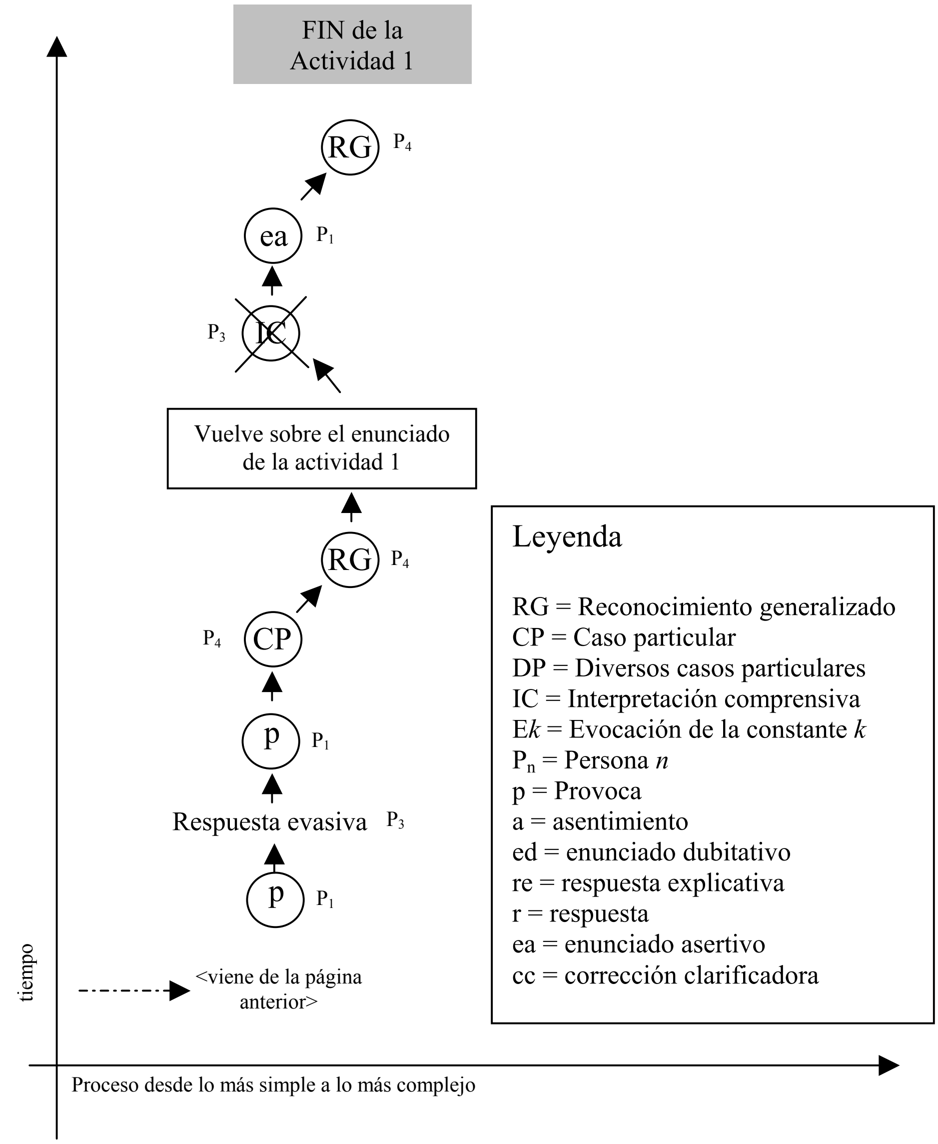
A continuación se adjunta el gráfico que representa la trayectoria cognitiva de aprendizaje colectivo.[271]

[271] Los gráficos nos permitirán comparar la posible influencia de las tareas en el tipo de desarrollo.

Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 1(a)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 1 (b)



2.) La venta de champiñones en el mercado (II)

Descripción esquemática de la TCA$_2$. La trayectoria que aparece en esta actividad es una trayectoria en general muy lineal, que comienza situándose en el nivel de lo concreto (con el uso de diversos ejemplos particulares). La trayectoria pasa después a ser más abstracta, para continuar por la línea de lo concreto hasta casi el final, cuando aparece de nuevo un *zig-zag* hacia categorías más generales. Esta primera aproximación que hacemos en la "descripción esquemática de la TCA" nos presenta dos momentos claros en la dinámica de la clase: a) uno al principio, cuando la trayectoria de aprendizaje avanza de un lado a otro, como resultado de un diálogo protagonizado sobre todo por la persona 4 (y en menor medida por la 5, que también entra en algunos momentos), y b) otro al final, momento en que la trayectoria vuelve a torcerse. El resto del tiempo la trayectoria adopta una línea casi vertical, que denota poca relevancia de la parte del reconocimiento generalizado de las normas matemáticas.

P5.- ¿Cuál es el valor numérico y el significado de la constante, kilos, en este caso?
P1.- No, kilos, no... la constante...
P5.- La constante de k...
P1.- ¿Qué quiere decir la constante en este caso, cuál es la constante?
P5.- Diez.
P1.- Diez, ¿qué?
P2.- Diez horas.
P5.- Diez kilos, ¿no? En una hora se venden 10 kilos...

Actividad 2

La actividad comienza con la lectura del enunciado. Después, inmediatamente comienzan a ocurrir "cosas". En la segunda respuesta (que da la persona 2) aparece un nuevo elemento: además del valor numérico de la constante, también sale qué es la constante (¿kilos?, ¿horas?, ¿champiñones?...). Esto crea una nueva dificultad para las mujeres del grupo, tal y como se ve en la cita adjunta. La persona 5, cuando lee el enunciado, en vez de decir "k" dice directamente "kilos".[272] La profesora lo ve, enseguida la corrige y le pregunta qué significa "constante" en este caso. Aquí la persona 5 ha confundido la "k" de constante con "k" de kilo (igual que le pasó a su compañera en la actividad anterior). Por eso si antes hablábamos de "obstáculo epistemológico" (en el sentido de Brousseau), ahora tenemos otra prueba más para reforzar nuestra interpretación anterior. Las personas participantes del grupo de matemáticas, cuando veían la "k" la asociaban a "kilo", no a "constante". Eso es así porque en su experiencia previa siempre "k" es "kilo". Es la primera vez que ven que puede tener otro significado. Éste es otro ejemplo del conflicto entre el formalismo de las matemáticas académicas y las matemáticas

[272] El enunciado es el siguiente: ¿Cuál es el valor numérico y el significado de la constante (k) en este caso? Ver en la parte de la metodología el planteamiento de las actividades.

de la vida real (o, en general, del significado que se asocia a los símbolos en la escuela y el que les asociamos en la vida real).[273]

Cerrado el debate (y aclarado que "k" es "constante" y nada tiene que ver con kilo), la profesora introduce una idea que no aparecía en el libro y que está íntimamente relacionada con el lenguaje matemático propiamente dicho: escribe en la pizarra 10 Kg / h.[274] Este nuevo reto genera un debate en el que las mujeres del grupo tratan de entender por qué "vender diez kilos cada hora" se escribe de esa manera en la pizarra. Como dijimos anteriormente, en el discurso aparece una "interpretación comprensiva". Para facilitar la asimilación de la nueva expresión matemática, la profesora pone una metáfora como ejemplo: el caso de un coche que marcha a 10 kilómetros por hora (10 Km / h).

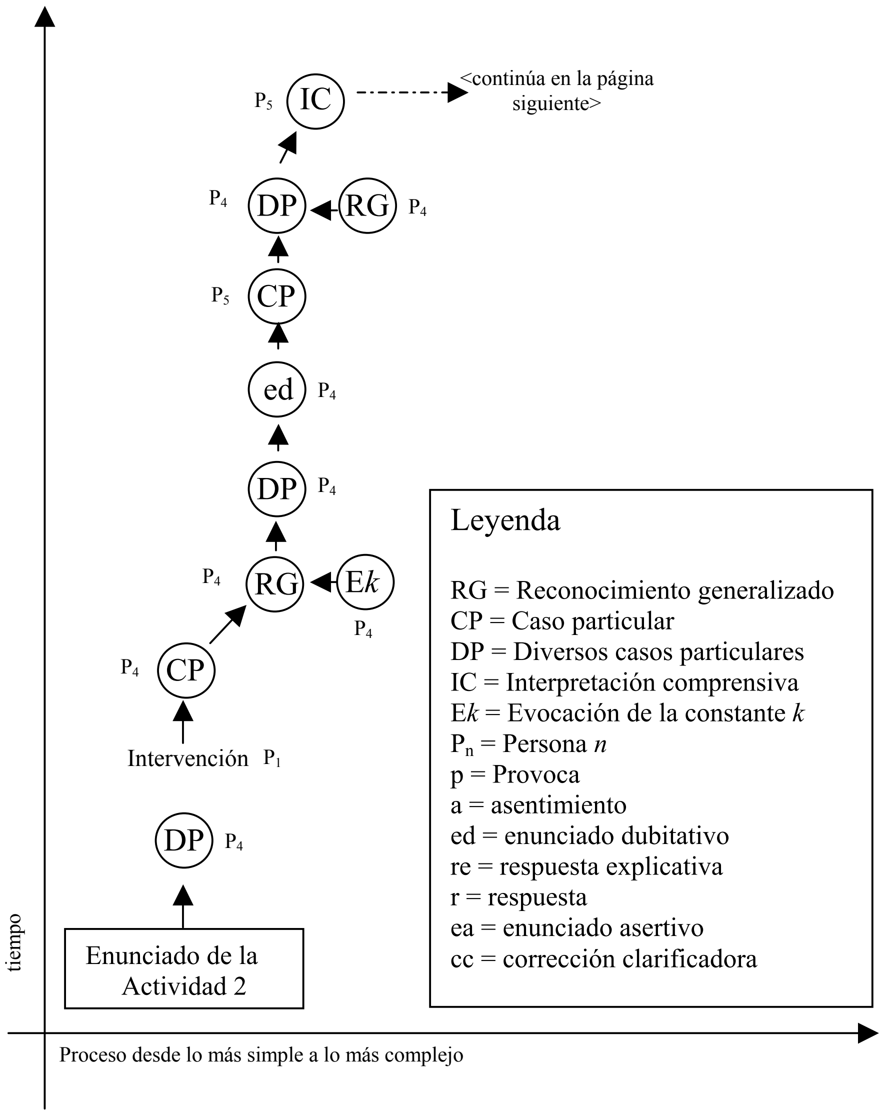
> P1.- Es como si un coche fuera a 10 Km por hora, ¿qué significa?
> P6.- Que cada hora recorre 10 kilómetros.
>
> **Actividad 2**

La profesora cierra el debate de esta actividad haciendo referencia de nuevo al significado de los dos tipos de proporción. Tal y como se ve en la cita adjunta (la proporcionalidad significa que "*cuando una cosa aumenta, aumenta todo lo demás...*"), la profesora resume de manera muy elemental la idea de proporcionalidad directa.[275] De igual modo, la profesora destaca la característica cualitativa de la proporcionalidad (la idea de aumentar o disminuir).

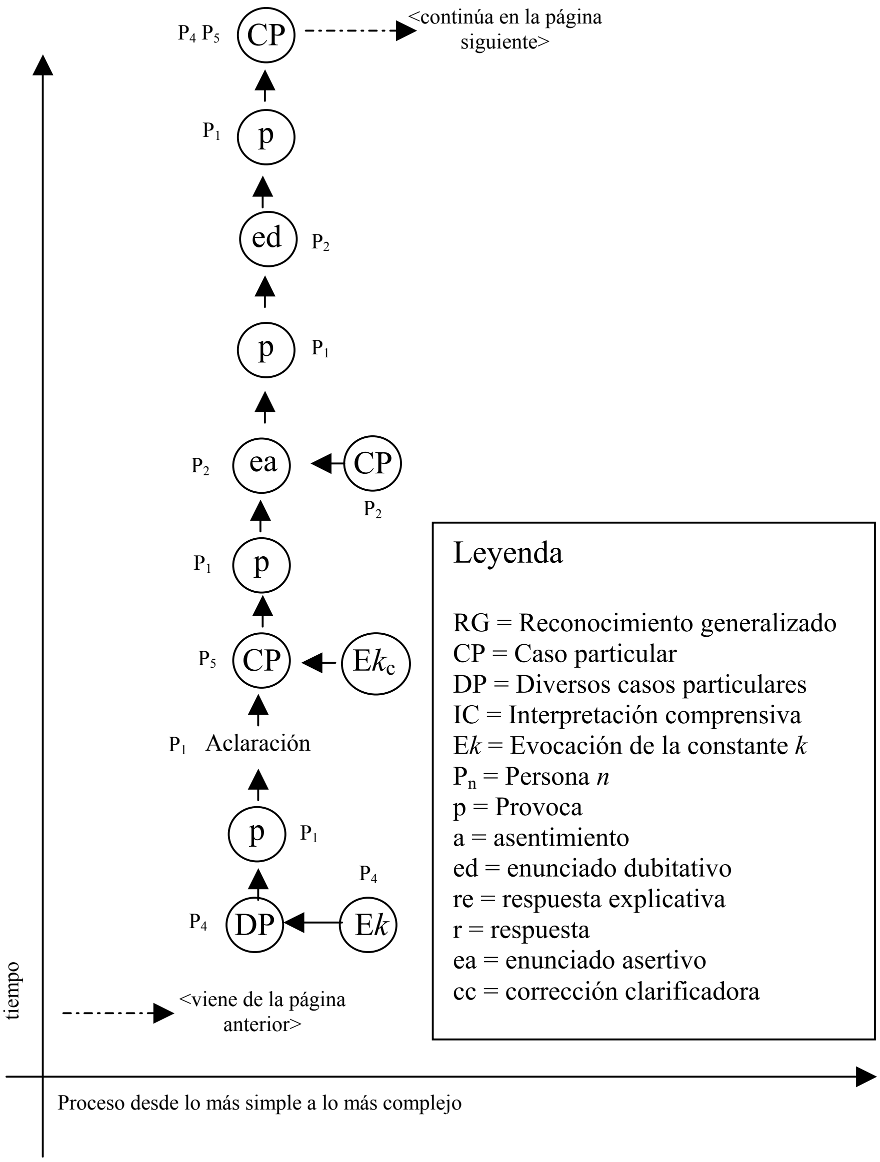
> P1.- Por ahora se va entendiendo qué es la proporcionalidad: cuando una cosa aumenta, aumenta todo lo demás.
>
> **Actividad 2**

[273] Utilizamos aquí la terminología empleada por Ferdinand de Saussure, por ser uno de los principales teóricos que han estudiado el lenguaje desde el punto de vista de la semántica. Por tanto, nos ofrece unas herramientas conceptuales que nos pueden servir para analizar este "obstáculo epistemológico" desde su dimensión semántica. Ver De Saussure, 1974.
[274] Ver la figura de la página 262.
[275] Nosotros situamos esta definición en la primera dimensión de abstracción que habíamos concretado en el apartado de las técnicas de análisis de la información. Ver la parte de metodología.

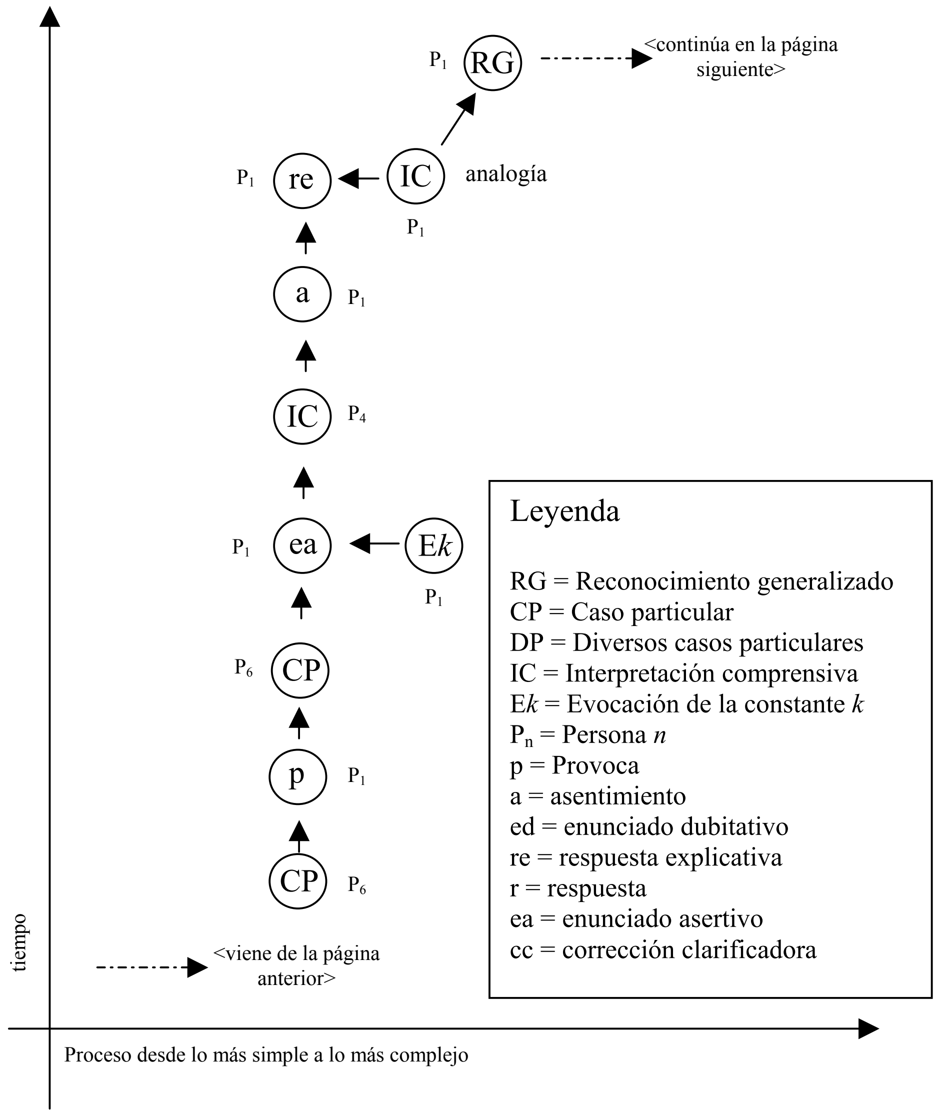
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 2 (a)



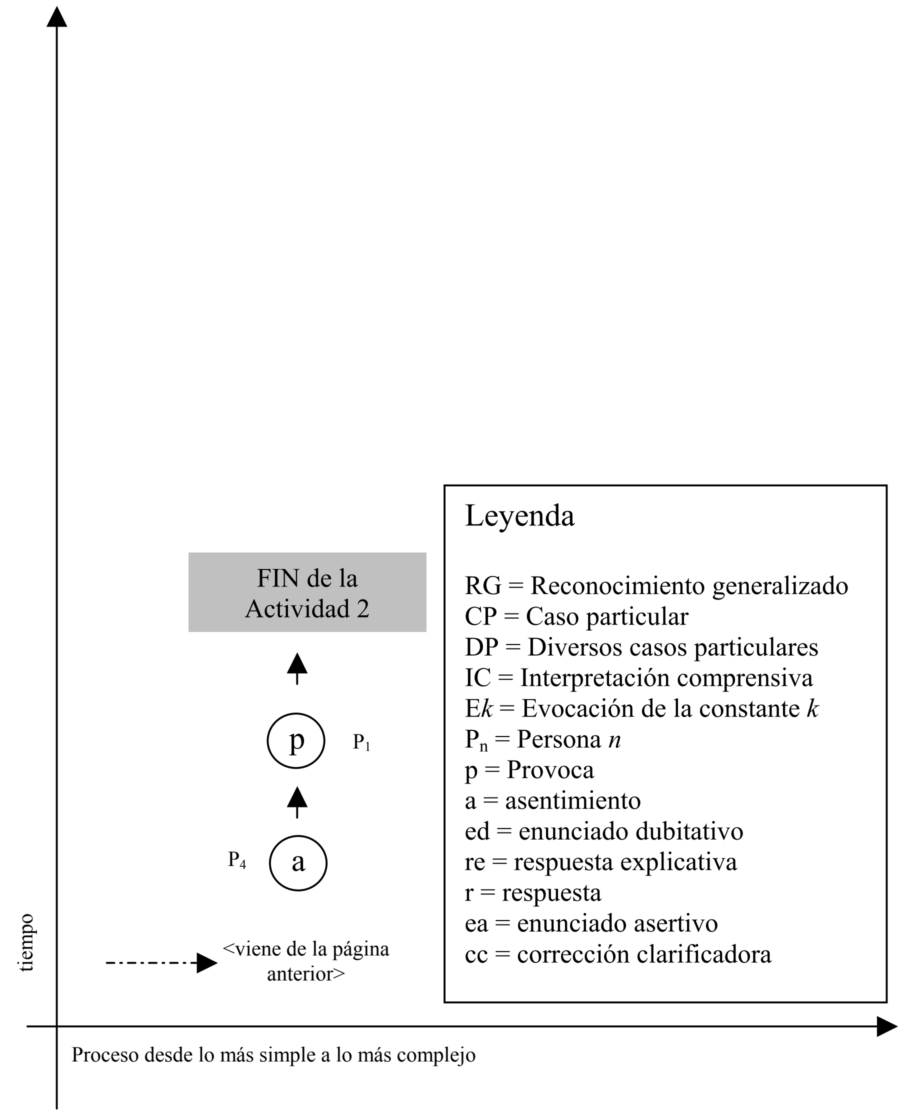
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 2 (b)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 2 (c)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 2 (d)



3) Ordenando el puesto del mercado (III)

Descripción esquemática de la TCA$_3$. La trayectoria que hemos dibujado en esta actividad es la que dura más. A lo largo de los diferentes gráficos vemos que la trayectoria atraviesa por tres momentos bien diferenciados: a) un momento inicial con alguna ruptura de la línea vertical, b) la verticalidad absoluta que toma la trayectoria durante casi todo el tiempo, y c) un tercer momento en el que se vuelve a romper la linealidad y aparece un trayecto en *zig-zag*. Hay que destacar que en medio de todo aparece un monólogo de la persona 5, que habla consigo misma mientras trata de resolver un problema. Momentos como ése explican en gran medida el por qué de la linealidad de esta trayectoria.

En esta actividad se introduce un nuevo elemento: el concepto de proporcionalidad inversa. Es un concepto bastante más complicado que el de proporcionalidad directa. Hasta ahora, desde el punto de vista del contenido matemático, se habían tratado aspectos como la aditividad o las operaciones multiplicativas. Sin embargo, con la proporcionalidad inversa aparece una idea nueva, el complementario de la multiplicación: la división.

Alcalá (2002) sitúa la división en el mismo nivel que la multiplicación.[276] Ambas son operaciones opuestas y complementarias a la vez.[277] En el caso de las proporciones ocurre algo semejante. La proporcionalidad inversa es a la proporcionalidad directa lo que la división es a la multiplicación: su opuesto. Las personas adultas enseguida ven (en el ejemplo de la actividad 3) que si una persona tarda 60 minutos en arreglar el puesto del mercado, si fuesen dos, tardarían la mitad de tiempo (30 minutos). El binomio de doble / mitad es una idea que está muy arraigada en la experiencia previa de

[276] Alcalá (2002) sitúa a ambos conceptos en las operaciones de segundo orden. Dice Alcalá que "*la experiencia de haber trabajado antes la multiplicación va a hacer que tengan más facilidad para la construcción de la división, pues tienen rasgos comunes: estructura verbal narrativa tripartita, estructura notacional idéntica, distinto nivel de significación de los números, etc."* (Alcalá, 2002: 118).

[277] La multiplicación incluye varios factores. Según Alcalá (2002), cuando trabajamos con operaciones multiplicativas, estamos trabajando con problemas de razón, de conversión, combinatorios y de comparación. En el caso de la división los contenidos son exactamente los mismos, sólo que a la inversa.

las personas adultas. En la cita adjunta vemos cómo la persona 6 utiliza este tipo de terminología con toda naturalidad y da por hecho que si hay el doble de personas trabajando para limpiar el puesto del mercado, les costará la mitad de tiempo el hacerlo. "*Pues ahora es al revés*", es el comentario que hace la persona 6. En esta frase queda claro que esa persona entiende perfectamente el significado de "contrario" ("opuesto") de la proporcionalidad inversa.

P6.- Pues ahora es al revés.
P1.- Al revés, ¿por qué?
P6.- Porque el doble de personas, en una hora, pues les costará la mitad...

Actividad 3

Si continuamos leyendo el diálogo entre la persona 6 y la profesora en la trascripción, enseguida vemos que la persona 6 da los resultados correctos para los casos en que el número de personas se dobla, se triplica, se multiplica por 4, etc. Cada vez que hay una persona más recogiendo el puesto, el tiempo total se reduce proporcionalmente, detalle que no se le escapa a la persona 6, como se puede apreciar en la cita adjunta.

P6.- Una persona tarda sesenta minutos, dos personas, 30; tres personas, 20... ¿no lo hago bien??
P1.- Sí, sí.
P4.- ¿Cuatro personas?
P5.- ... treinta... quince... ¿no lo hago bien?

Actividad 3

¿Qué podemos decir a la luz de estos datos? Se puede decir que (por lo menos) la persona 6 comprende perfectamente el concepto de proporcionalidad. Y lo hace tanto a un nivel más o menos intuitivo (como muestra la corrección con que utiliza las ideas de doble / mitad), como desde el punto de vista de la dimensión cuantitativa del concepto de proporcionalidad (dado que también da los resultados correctos para cada caso). Sin embargo, lo que no aparece es la formulación teórica de la proporcionalidad. Cuando la profesora le pregunta por qué da los resultados que está dando, la respuesta de la persona 6 es "*porque el doble de personas, en una hora, pues les costará la mitad*".

Esto da lugar a una visión parcial del fenómeno matemático, porque la persona 5, que no tiene una idea tan afianzada de la proporcionalidad como la persona 6, se queda con esta explicación y entonces pasa de los treinta minutos que tardan dos personas en recoger el puesto a quince que tardarán tres personas (30/2). Y en el caso de cuatro, la persona 5 dice que tardarán la mitad de 15 minutos, es decir, siete minutos y medio (ver cita adjunta).

Para la persona 5 la proporcionalidad inversa responde a esta estructura:

P5.- ... treinta... quince... ¿no lo hago bien? Y tanto, la mitad de treinta son quince. Cuatro personas, ¿cómo lo digo? ¿Siete y medio? Pero, ¿cómo lo represento? Siete y medio sería siete coma cinco.

Actividad 3

60/2=30
30/2=15
15/2=7,5
7,5/2=3,75

Entonces, para ella la constante de proporcionalidad consiste en dividir entre 2 cada uno de los resultados que va obteniendo.

La persona 5 ha perdido de vista que el número de referencia (el que no puede cambiar) es 60. Y la constante de proporcionalidad tiene que ser un número que multiplicado por 60, dé el resultado correcto. En este caso aparecen dos aspectos importantes. Así, por un lado, la idea de sentido común de proporcionalidad inversa es "dividir", repartir el tiempo que se tarda en arreglar el puesto del mercado entre todas las personas que participan en la limpieza. Y por otro lado, desde un punto de vista teórico, lo que en realidad estamos haciendo es una multiplicación por un número menor que uno (un cociente cuyo numerador es 1 y el denominador siempre es mayor o igual a 1).

En este caso, no es que la persona 5 no sepa matemáticas, las conoce perfectamente (por lo menos las tiene claras hasta la dimensión cuantitativa).[278] Lo que falta precisamente es clarificar esos conceptos previos y reflexionar sobre cuándo se pueden utilizar y cuándo no.[279]

[278] Ver la parte de metodología.

[279] Siguiendo con la metáfora de la "caja de herramientas" que hemos utilizado en otros momentos, las matemáticas son como una caja de herramientas, que nos proporcionan un montón de utensilios para arreglar y resolver situaciones problemáticas. Sin embargo, no todas las herramientas sirven para lo mismo, ni se pueden aplicar de la misma manera. Un destornillador de estrella no nos servirá para quitar un tornillo normal. Lo que haremos seguramente será forzar el tornillo y a lo mejor borrar la hendidura a fuerza de forzarlo, porque utilizamos la herramienta incorrecta. Con las matemáticas ocurre lo mismo.

Contextualizar la situación quizás permitiría que la persona 5 no aplicase un algoritmo desvinculado de su significado.

En este caso, el diálogo sirve para mostrar y sacar a la luz este error y aprender de él.

Más adelante, mientras las mujeres del grupo continúan resolviendo la actividad 3, la profesora propone otro contenido añadido: pasar un número decimal al valor que le corresponde en la escala sexagesimal, para expresarlo en forma de horas y minutos. En este caso vemos que el problema es un cambio de escala numérica.

En la cita adjunta vemos, de nuevo, que la respuesta de la persona 6 es inmediata: a la pregunta de cuánto representa 3,75 en minutos y segundos, responde sin dudar 3 minutos y 45 segundos. Podemos atrevernos a decir que la persona 6 tiene una forma de comprensión de tipo relacional: enseguida "ve" las pautas que hay detrás de los ejemplos y sabe dar la respuesta correcta. Más adelante aparece otro ejemplo clarificador con el número 1,87: dice que representa "*un minuto y algo más de tres cuartos*". De nuevo aparece esta característica –que hemos denominado relacional– que tiene la persona 6 de entender las cosas. Se trata de una forma muy habitual en las personas adultas que están acostumbradas a hacer las cuentas "de cabeza". En general, lo que hacemos cuando realizamos una operación siguiendo ese método, es agrupar los números y aproximarlos a los grupos de referencia más habituales. Así, si trabajamos con una medida en base 100, por ejemplo el euro, los céntimos los agrupamos tirando siempre hacia las decenas; si trabajamos con unidades de tiempo (como es el caso) y partimos la hora en cuatro partes, entonces aproximamos el resultado a cada uno de los cuartos (por ejemplo, decimos, "un poco más de un cuarto, algo menos de tres cuartos, entre dos y tres cuartos..."). Como vemos en la cita adjunta, la persona 6 recurre a esta forma de expresar el resultado matemático, con lo cual aparece un nuevo elemento en la reflexión que estamos haciendo

P6.- ... cinco personas, la mitad de 7,5 sería...
P5.- 3,75.
P1.- 3,75 pasado a segundos... 3 minutos...
P6.- ¿Cómo pasado a minutos?
P1.- Sí, pásamelo a minutos... es como 3,5 es tres minutos y 30 segundos, en este caso...
P6.- Tres minutos y 45 segundos.

Actividad 3

(desde el punto de vista del contenido matemático): la aproximación por estimación.

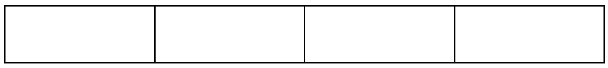
P6.- 1,87... que representa uno y algo más de tres cuartos...
P2.- Sí, 1,87 son casi 2 minutos...
P5.- No llega.

Actividad 3

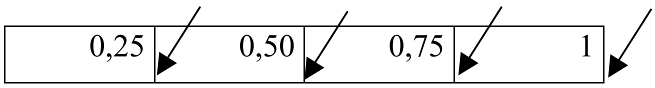
Esta forma de calcular es un rasgo característico de la "matemática de la vida real". En la conversación vemos más casos de ello. La persona 5, por ejemplo, dice que el 0,87 corresponde a "*unos diez segundos o algo así*" (que hay que sumar a los tres cuartos de minuto). El cálculo lo hace por aproximación (aunque no lo explica).

El proceso que sigue para dar esa respuesta es parecido a éste:

Una hora la divide en 4 partes (cada uno de los cuatro cuartos):



Entonces, lo que hace es asignar a cada cuarto su valor decimal:



Por lo tanto, el 0,87 tiene que estar entre el 0,75 y el 1. Y si entre esas dos marcas hay 15 segundos, entonces el 0,87 (que parece que está un poco más allá de la mitad de la distancia que separa el 0,75 y el 1), valdrá aproximadamente 10 segundos.

P6.- Unos 10 segundos o algo así será...
P1.- A ver, si multiplicamos 0,75 por 60, que salía antes... teníamos 3,75, ¿no? Y habéis dicho que esto eran 45 segundos, ¿no?... pues multiplicad 0,75 por 60, a ver cuánto sale...

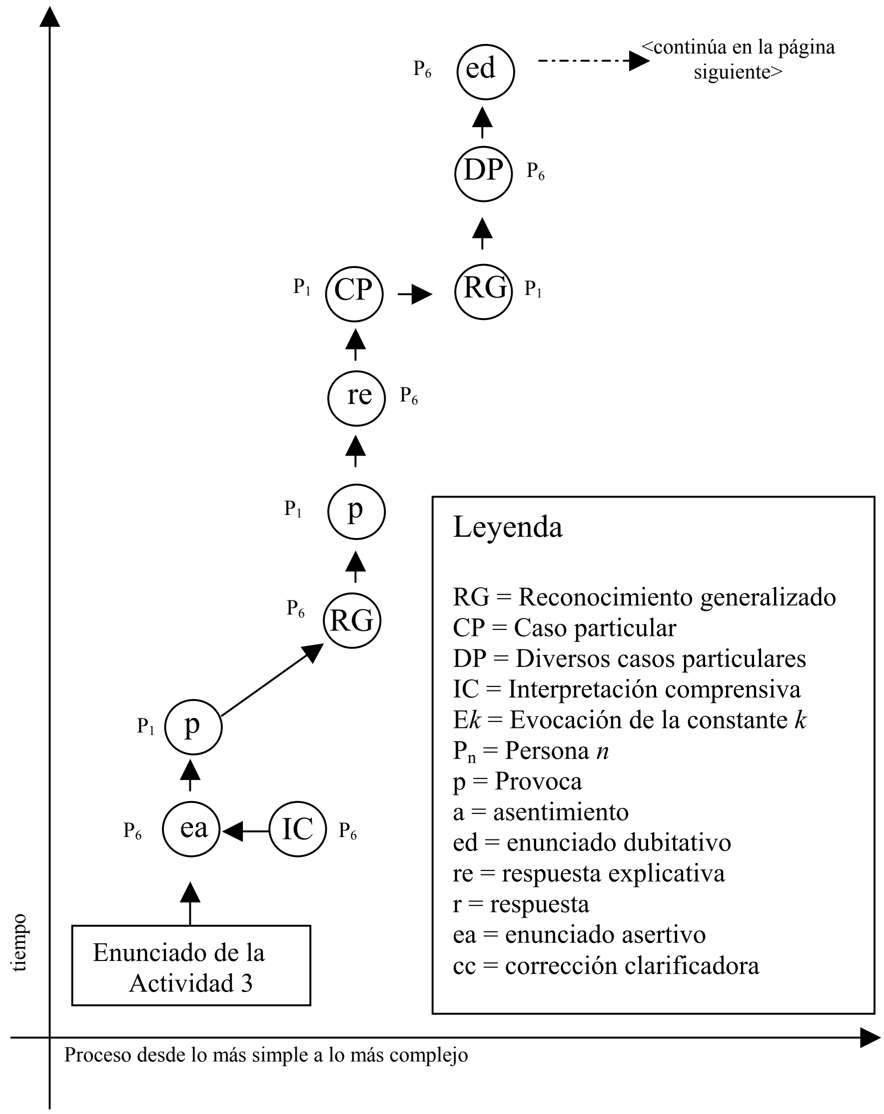
Actividad 3

Es la profesora la que introduce la forma académica de resolver este tipo de operaciones, cuando dice que tienen que multiplicar la parte decimal del número por 60 segundos que tiene un minuto, para ver cuántos segundos le corresponden. La idea de fondo es la misma que en el caso anterior (en el del procedimiento de las "matemáticas de la vida real"). La profesora, en realidad, lo que está haciendo es situar el punto que corresponde a 0,87 sobre una recta, que en vez de estar dividida en 4 partes (cuartos) lo está en 60 partes (segundos). Con este procedimiento se gana en precisión, pero no comporta un conocimiento conceptual de naturaleza diferente. Lo que cambia es que trabajar con la idea de "cuartos" es más cómodo (más intuitivo) que trabajar con los segundos, porque el orden de la agrupación es diferente (mientras que en un caso exige trabajar en base sexagesimal, en el otro se opera simplemente con cuatro particiones del minuto).

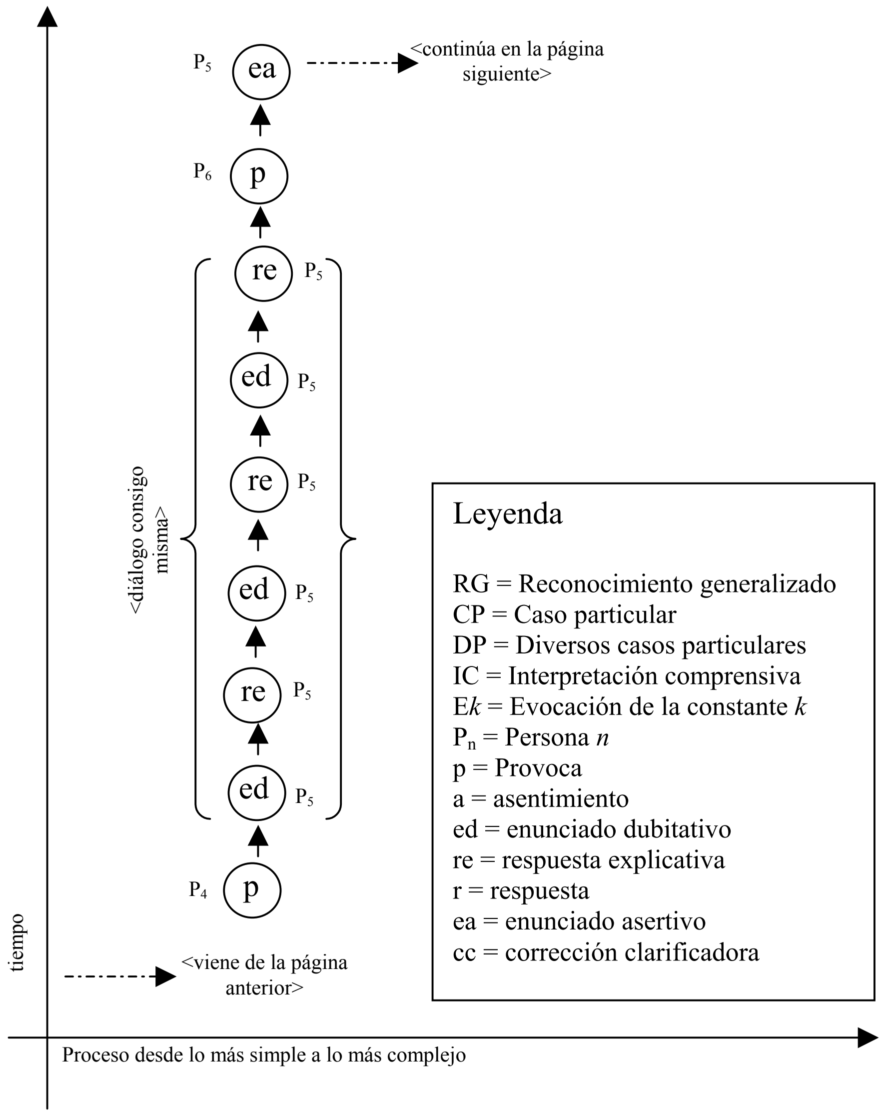
Como vemos en el análisis de los diálogos que se han producido mientras las personas participantes resolvían esta actividad, existe una diferencia clara entre la forma que tiene la profesora de resolver las diferentes operaciones y las que utilizan ellas. La diferencia está en que la profesora aplica métodos aritméticos alternativos a distintas situaciones, que son muy precisos, mientras que las personas participantes actúan más por aproximaciones basadas en estimaciones (que de todas maneras, parten de la misma idea conceptual que el procedimiento utilizado por la profesora) y como les funcionan en una situación, intentan aplicarlo a todas las semejantes.

Por lo general, las resistencias aparecen en este punto: el paso de un método al otro. Para las personas adultas resultan más habituales los procedimientos de las "matemáticas de la vida real" que forman parte de su experiencia previa y les da resultados satisfactorios. Por este motivo, las personas participantes prefieren resolver las operaciones utilizando ese tipo de procedimientos. De hecho, como se ve en la trayectoria cognitiva de aprendizaje que reproducimos a continuación (en toda su extensión), los únicos momentos en que aparecen "reconocimientos generalizados" corresponden a intervenciones que hacen la profesora o la persona 6, que, como hemos visto, es la que tiene más claras las ideas matemáticas.

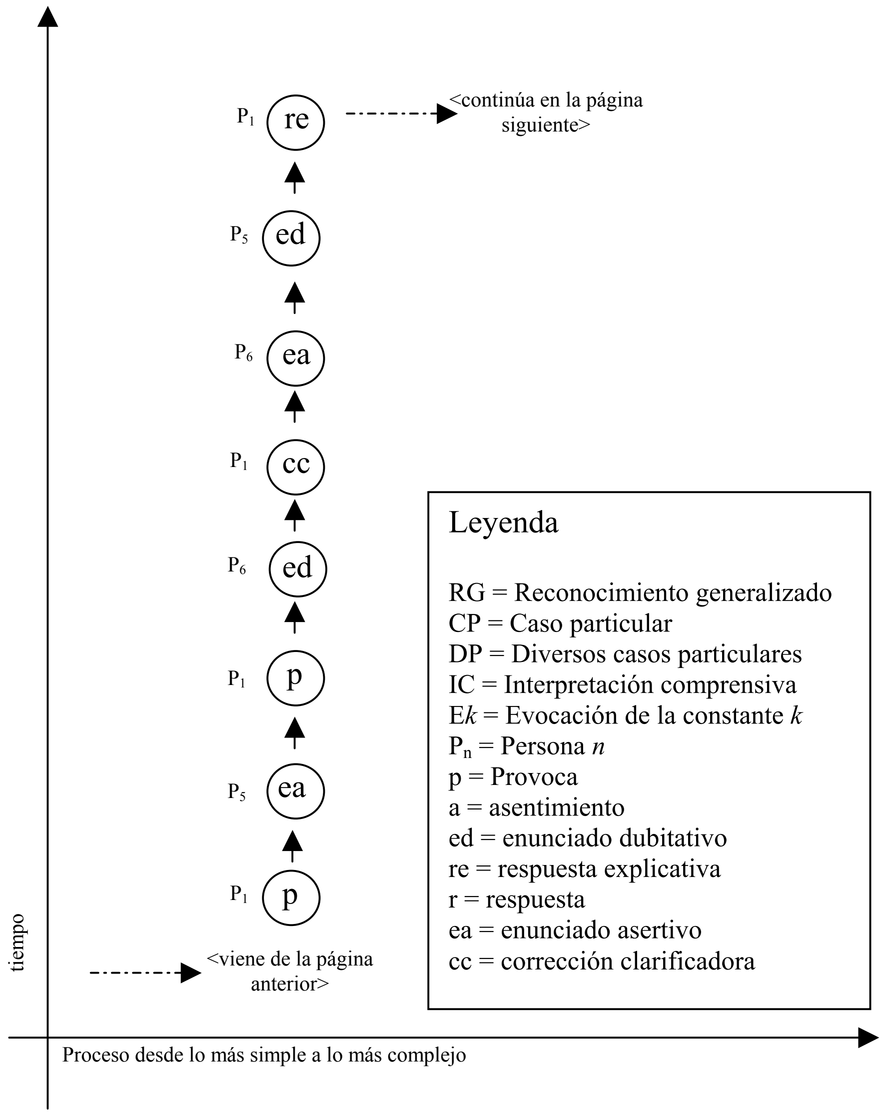
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 3 (a)



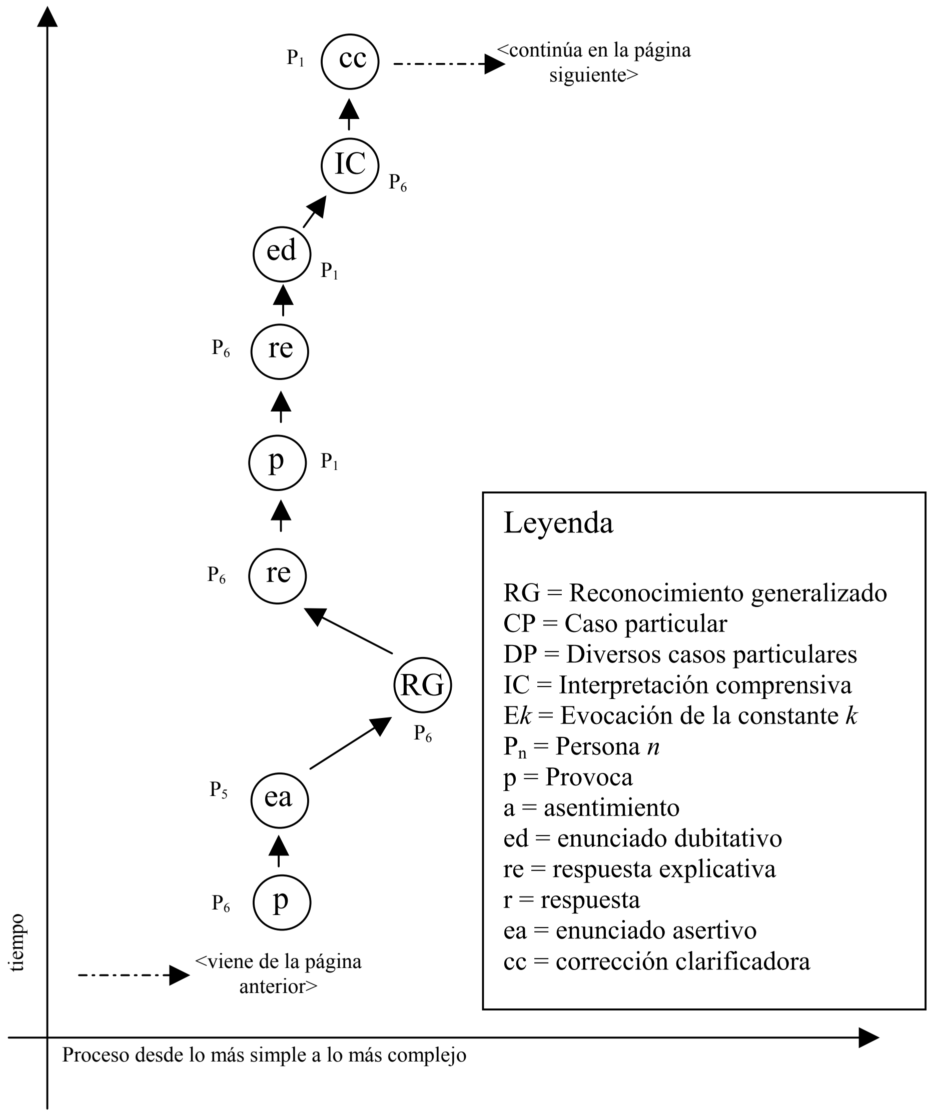
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 3 (b)



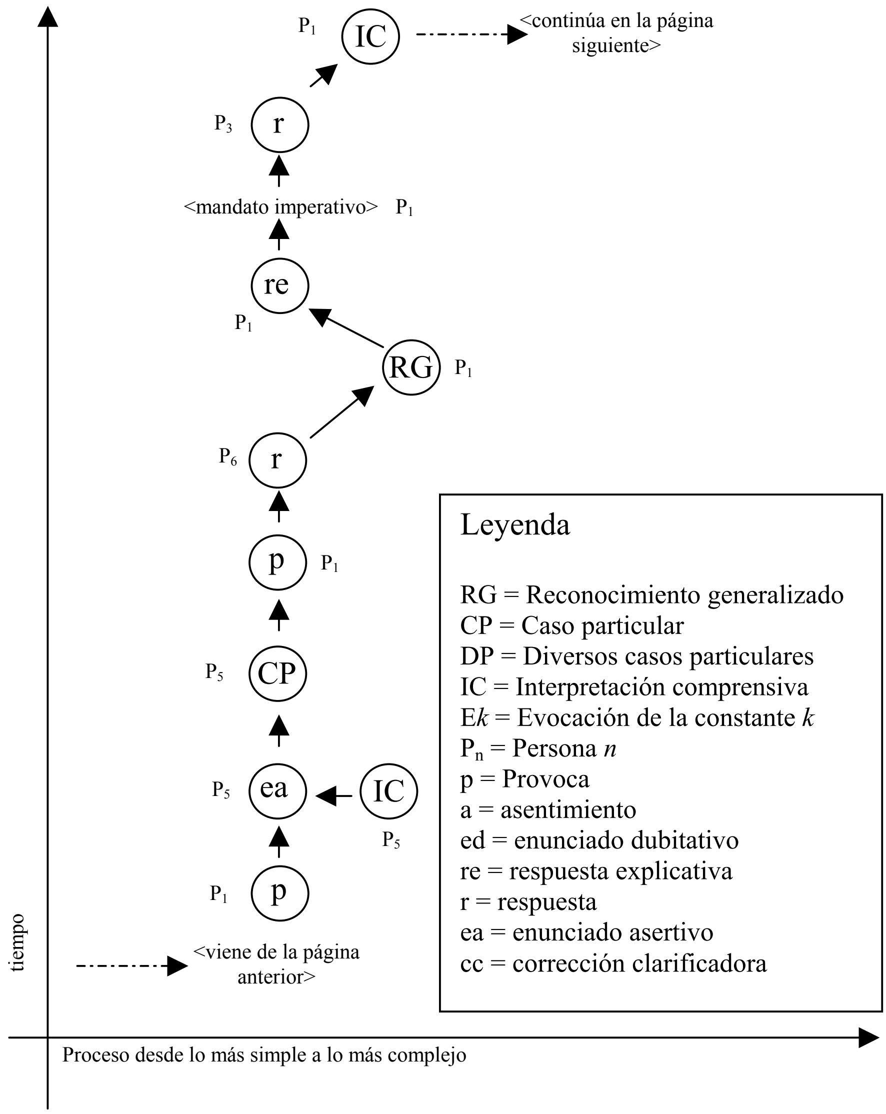
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 3 (c)



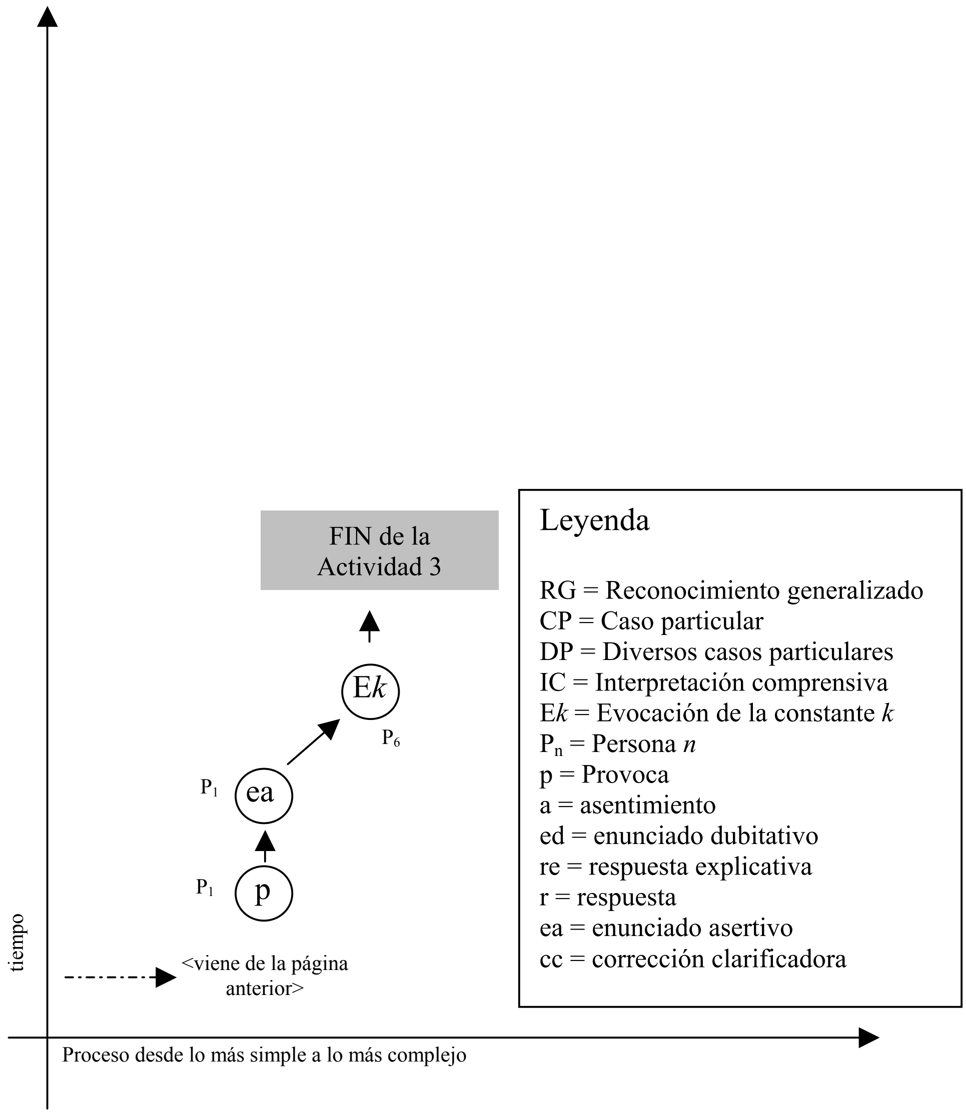
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 3 (d)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 3 (e)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 3 (f)



4) De lenguados va la cosa (IV)

P1.- Claro, antes tenemos que pensar si a más kilos pagamos más, antes de empezar a hacer nada, no sea que nos liemos y resulta que estamos ante una pregunta de ésas de a más personas, más o menos tiempo. ¿Entendéis? Siempre hay que hacer esa pregunta. A no ser que nos hagan ofertas, a más kilos, más tenemos que pagar. Pues entonces ya sabemos que tenemos que multiplicar.

Actividad 4

Descripción esquemática de la TCA$_4$. Esta actividad tiene una trayectoria mucho más sencilla que la anterior. En este caso nos encontramos ante una línea que va desarrollándose en vertical hasta casi el final, momento en el que se curva hacia el polo de la abstracción. La dinámica de la conversación es responder primero al ejercicio planteado y luego se comenta un concepto teórico que aparece: la magnitud.

Con esta actividad volvemos al concepto de proporcionalidad directa. Se trata de una actividad para reforzar los conocimientos que se han aprendido a lo largo de la sesión. Los conceptos matemáticos que aparecen en este caso son los mismos que los de las actividades 1 y 2.

La primera de las aportaciones de la conversación que se genera en este caso la hace la profesora. Se trata de uno de esos conocidos "trucos matemáticos" que a veces utilizamos para resolver situaciones problemáticas y que nos remiten más a una idea de "recetas de la abuela" válidas para resolver operaciones que a los criterios de la matemática formal.

P1.- Vale, cuando veis que son directamente proporcionales, al aumentar la una, aumenta también la otra. Al comprar más kilos de lenguado, más pagamos. Al disminuir una, disminuye también la otra en la misma proporción.

Actividad 4

Al haber hecho problemas de proporcionalidad directa e inversa, ahora la profesora se ve ante la "necesidad" de encontrar alguna forma para distinguir ambos tipos de problemas, a fin de elegir el método adecuado para resolverlos. Por eso, partiendo de una idea cualitativa de la proporcionalidad,[280] la profesora asocia la idea de "aumentar" con el algoritmo de la multiplicación, mientras que a la idea de "decrecer" le asocia la división. De esa manera, da una "regla" para identificar el tipo de proporcionalidad que aparece en el problema. La cita adjunta es un ejemplo de esto que estamos diciendo.

En este caso la profesora actúa con una intencionalidad claramente perlocucionaria: quiere ofrecer a las personas adultas una herramienta

[280] Ver las diferentes dimensiones del concepto de proporcionalidad que se explican en la parte de metodología.

que les permita discernir entre el tipo de actividades, para poder resolverlas. No obstante, como vemos en la trayectoria cognitiva, el diálogo que se produce está dirigido por la profesora y, de hecho, todos los "reconocimientos generalizados" le corresponden a ella. Además, todos esos "reconocimientos generalizados" corresponden a la idea cualitativa de "crecimiento / decremento" que comentábamos antes.[281]

Lo que creemos importante resaltar es que a lo largo de esta actividad la profesora parte de la idea más elemental de la proporcionalidad (la cualitativa) y, a partir de ahí, da orientaciones para que sean las personas adultas las que incorporen al concepto el resto de dimensiones (la cuantitativa y la teórica).

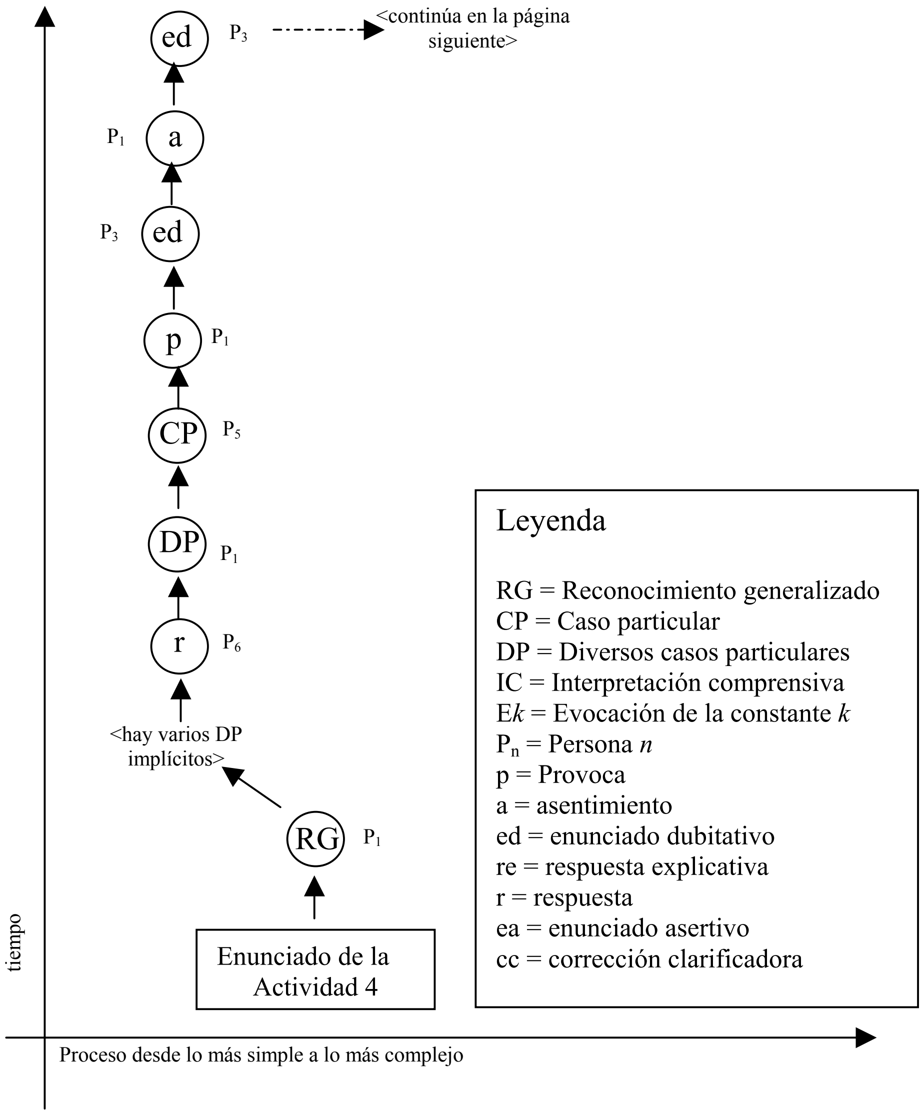
Durante la conversación vemos que las mujeres del grupo dan los resultados del problema (de nuevo es la persona 6 quien habla, este hecho nos indica que se trata de una persona que al saberse con conocimiento sobre el tema, se siente más confiada).[282] No obstante, tampoco aparece una reflexión conjunta del por qué de esos resultados, de manera que el nivel teórico del contenido matemático se sigue sin tocar en la clase.

Finalmente, la otra de las aportaciones de la actividad es la noción de magnitud.

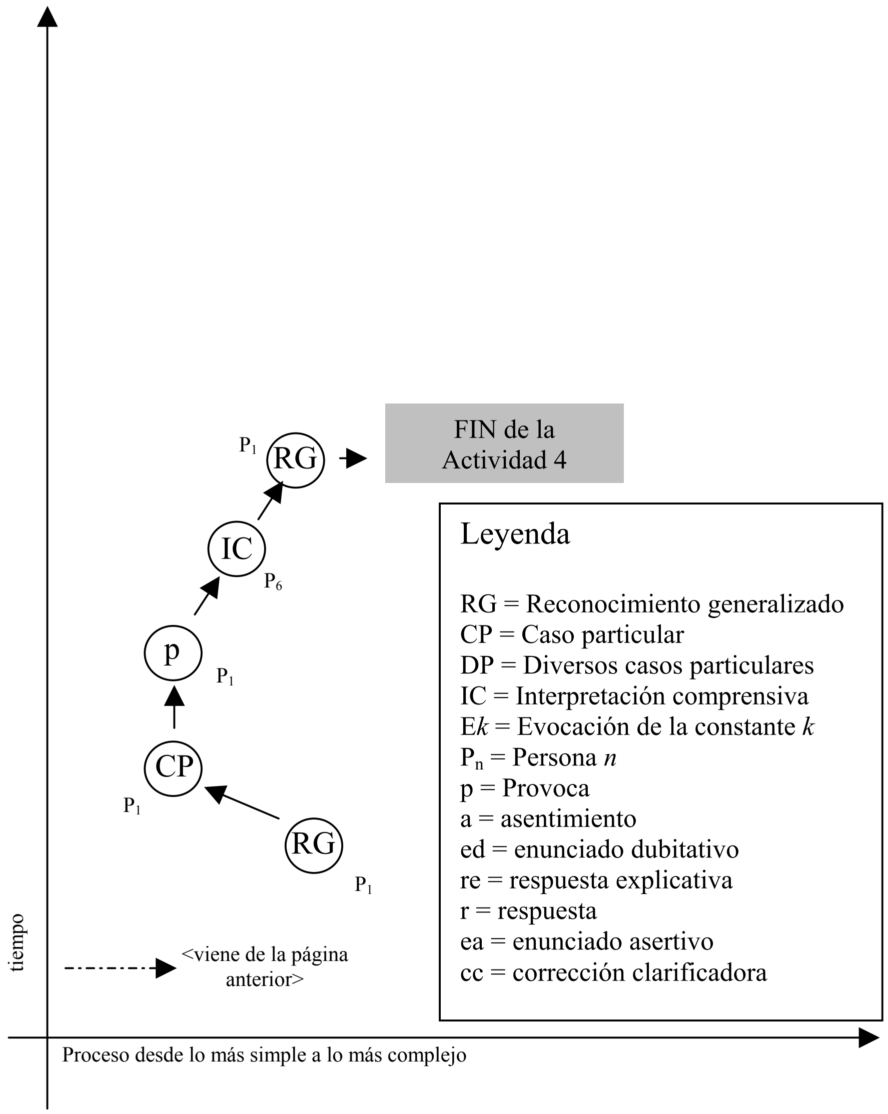
[281] Pensamos que esta intencionalidad se debe a que se trata de una actividad de refuerzo y entonces no se genera tanto diálogo como en las anteriores, donde al aparecer los conceptos por primera vez dan lugar a más comentarios.

[282] Esto nos remite a la importancia de los componentes afectivos en el aprendizaje. Por ejemplo, la persona 3, que apenas si participa en toda la sesión, cuando lo hace dice "es que yo no soy muy buena". Eso explica claramente su resistencia a participar de manera igualitaria al resto de sus compañeras y es un elemento de autoexclusión. Se trata de un caso bastante habitual en la educación de personas adultas. Por eso es tan importante partir siempre del diálogo igualitario, reconocer la forma que tienen esas personas de resolver los problemas en sus vidas y aplicarlas a la clase, porque a menudo resultan ser fórmulas válidas o que contienen un principio de validez muy importante.

Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 4 (a)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 4 (b)



5) El mercado cierra sus puertas (V)

Descripción esquemática de la TCA$_5$. La trayectoria que se dibuja en esta actividad es una línea sinuosa, que avanza en *zig-zag* desde el principio hasta el final. Se trata de una trayectoria corta, dado que las personas participantes no se detuvieron demasiado en esta actividad.[283]

Igual que en el caso anterior, ésta es una actividad de repaso. Ahora lo que se vuelve a trabajar es la idea de la proporcionalidad inversa. El contexto es el tiempo que se tarda en despachar a unas personas que están en el puesto, antes de cerrar. La idea es: a más dependientes menos tiempo van a tardar en despacharlas, tal y como dice la persona 3.

> P3.- Cuanto más dependientes, menos... es decir, cuanta más gente, menos tardan...
> P6.- Un dependiente lo hace en 24 minutos.
> P3.- Dos, en menos, en la mitad.
>
> **Actividad 5**

De nuevo vuelve a aparecer la idea del binomio "doble / mitad". Se trata de un concepto resistente, que varias de las personas participantes relacionan con la proporcionalidad (antes era el caso de la persona 5, ahora es la persona 3 quien hace la referencia a ello). De todas maneras, aquí la persona 3 utiliza correctamente la idea de "doble y mitad", tal y como se aprecia en la cita adjunta. Dice sencillamente que dos dependientes tardarán la mitad de tiempo en atender a toda la gente que si sólo estuviese uno de ellos. En este caso no se incurre en ningún error formal.

> P1.- Suponiendo siempre en matemáticas, las cosas son siempre casi experiencias de laboratorio, que todo el mundo hace el mismo trabajo y, bueno, pero eso no es así en la realidad.
>
> **Actividad 5**

A continuación, la profesora hace un comentario importante, porque hace explícito el rasgo que tienen las matemáticas para modelizar la realidad. Las matemáticas, como instrumento heurístico, sirven para confeccionar modelos ideales (que no tienen por qué corresponderse con la realidad, pero que sirven mucho para entender su funcionamiento). Como vemos en la cita adjunta, aclara que los cálculos que están haciendo parten de la base de que todos los dependientes de un puesto en un mercado trabajan lo mismo: sólo así

[283] Creemos que el motivo fue por el imperativo de la hora, porque tenían todavía que hacer las actividades del ordenador, el tiempo iba pasando, y no daba para invertir mucho tiempo por actividad.

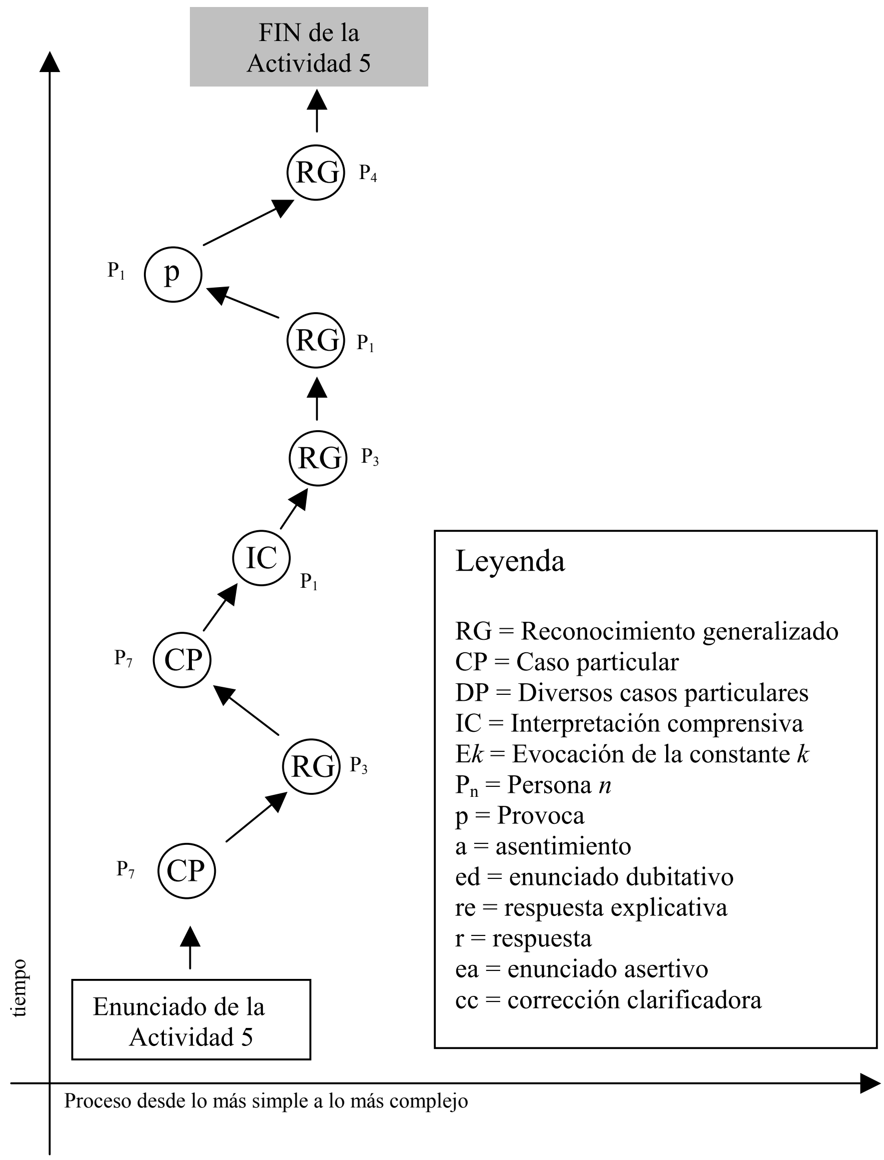
podemos resolver la actividad planteada. De todas maneras, las mujeres del grupo de matemáticas dialógicas tampoco es que hagan demasiado caso a este comentario, porque no les aporta nada nuevo y lo que les interesa es resolver el ejercicio.[284]

La aportación de esta actividad reside en que tanto la profesora, como las mujeres del grupo de matemáticas dialógicas, utilizan de manera cualitativa el concepto funcional de proporción. Cuando la persona 3 y la profesora afirman que "*si una aumenta, la otra disminuye*", aquí aparece la idea de dos variables vinculadas entre ellas mediante una relación funcional inversamente proporcional, aunque no se explicite en qué razón o proporción lo hace.

Esta reflexión se hace desde el punto de vista cualitativo y, responde a la idea intuitiva que todas las personas del grupo de matemáticas dialógicas tienen de este tipo de relaciones, de acuerdo con la experiencia que han ido adquiriendo. Sin embargo, las personas adultas no entran en esta reflexión. De hecho, si miramos la trayectoria cognitiva que se adjunta a continuación, la mayor parte de los comentarios "abstractos" los realiza la profesora. No obstante, esto no significa que no los entiendan: la persona 3 también dice exactamente lo mismo que la profesora (y antes que ella).

[284] Pensamos que esto ocurre porque el comentario de la profesora corresponde a la dimensión "teórica" de las matemáticas y esa dimensión carece de conexiones con la aplicabilidad concreta de las matemáticas en la vida cotidiana. Como las personas adultas están interesadas más por este segundo aspecto, no hacen caso del comentario de la profesora.

Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la actividad 5



6) Midiendo una puerta (VI)

Descripción esquemática de la TCA_6. Se trata de una trayectoria en la que podemos distinguir cuatro momentos bien diferenciados: a) al principio sigue una línea vertical recta; b) después encontramos dos diagonales, en medio de las cuales aparece una zona de transición vertical; c) a continuación vuelve la misma tendencia rectilinea; y d) finalmente, se produce una curva hacia el polo de lo abstracto. La aparición de zonas "verticales" indica los momentos del debate en que las personas participantes buscan respuestas a través de los ejemplos concretos. Esto es debido a que esta actividad es "diferente" de las anteriores. Es una actividad en la que el planteamiento del problema no está claro. La persona participante tiene que "encontrar" la respuesta correcta, pero puede haber múltiples respuestas correctas. Por eso, en términos no académicos, estos (y los que siguen hasta el final) son problemas "de pensar".[285]

Con esta actividad entramos en los ejercicios que se hicieron utilizando el soporte del ordenador. En esta actividad se plantea una reflexión sobre un ejemplo de aplicación de la relación proporcional inversa. A diferencia del caso anterior, la propuesta aquí se hace desde el punto de vista de un fenómeno físico, como es la perspectiva entre varios cuerpos situados a distancias distintas, uno de los cuales se va moviendo desde el segundo plano hasta el primero.

Como podemos apreciar a través de la trayectoria cognitiva de aprendizaje, las mujeres del grupo de matemáticas lo primero que hicieron fue buscar una manera concreta de resolver el problema. En ese sentido, a una de ellas se le ocurre preguntar si se tiene que guiar por el dibujo que aparece en la página web,[286] y otra se pone en la situación y dice que depende de dónde se coloque, si al lado de la puerta o delante justo de la persona que mira para hacer la medición. Entonces es cuando se genera una conversación en la que todas proponen ideas para encontrar la solución. La profesora se pone justo

P1.- ¿Qué pensáis de esto?
P4.- Si me tengo que guiar por el dibujo, la puerta.
P5.- Pero si miras muy lejos, pues quizás sí, si tú te pones en la puerta y yo me voy muy lejos...
P1.- ¿Qué, qué pensáis? Lo podemos comprobar si quiréis...
P4.- Si uno se pone en la puerta, si tú te pones muy lejos...
P1.- Si queréis, me pongo en el pasillo, y lo comprobamos, ¿qué pensáis?

Actividad 6

[285] Ver la parte de metodología.
[286] Cosa que indica la importancia de que todo tipo de imágenes que salgan en unos materiales didácticos estén pensadas para el aprendizaje y no como adornos o desde un punto de vista estético.

debajo del quicio de la puerta para comprobarlo, y avanza o retrocede por la clase para jugar con el efecto de la perspectiva. Algunas de las mujeres del grupo se ponen de pie e invitan a la profesora a ponerse más lejos o más cerca, para comprobar si en algún momento sus respectivas alturas llegan a igualarse.

P6.- Si se pone delante de la puerta, de lejos se ve más grande.
P5.- Si te'n vas més lluny, sí ho veus igual o...
P4.- Yo creo que no, que seguirá siendo más pequeña...

Actividad 6

Aquí aparece una idea nueva que no había aparecido hasta el momento: la conjetura. Las personas participantes hacen conjeturas de cómo puede solucionarse el problema y las contrastan con la realidad (las ponen a prueba), para ver si dan resultados satisfactorios. El hecho de que las personas adultas hayan utilizado un procedimiento propio del método científico con tanta soltura y de una manera tan natural es un elemento muy importante. Comentarios como "*yo creo que se seguirá viendo más pequeña*" indican el uso de hipótesis por parte de las personas adultas.

A través del diálogo igualitario, y con las tareas adecuadas, las mujeres del grupo de matemáticas presentan sus creencias (que en realidad es una hipótesis que ellas hacen de cómo funcionará el modelo con la realidad), después van a la realidad y miran a ver si funcionan o no.

Desde el punto de vista del contenido matemático, aparecen tres modelos de "interpretación comprensiva" de la situación planteada.

El caso es que hay que descubrir si la relación proporcional que se establece entre las alturas de una puerta y de una persona acaba por ser en algún momento igual a cero (es decir, si las alturas llegan a coincidir a "nuestra vista").

El primer modelo conjeturado por algunas de las mujeres del grupo parte de la idea de que ellas están en un punto fijo desde donde miran y quien se mueve por el espacio que las separa a ellas de la puerta es la profesora. La persona será "igual" de alta que la puerta en el momento que "tape" todo el ángulo de visión de la persona que observa, tal y como se ve en la figura adjunta (en este caso, la solución es la posición "2" en la que aparece la profesora).

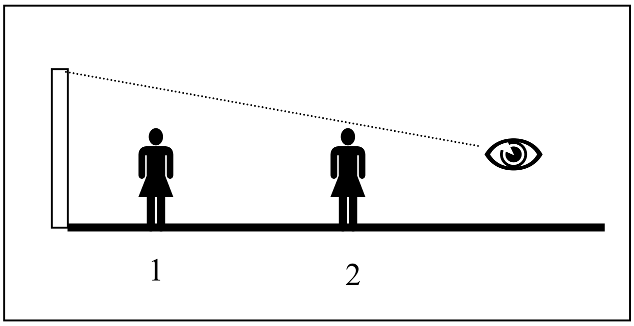


Figura 16.1. Esquema del primer modelo elaborado por las personas participantes. Fuente. Elaboración propia.

P6.- ... Pero es que aquí no dice eso. Dice que la compañera y la puerta tienen que estar quietos y somos nosotros los que tenemos que acercarnos o alejarnos, y entonces yo lo que digo es que todo aumenta o se reduce en proporción.

Actividad 6

En el segundo modelo planteado por las personas participantes, quien se mueve no es la profesora, sino la propia persona participante. Entonces lo que ocurre es que "todo aumenta o disminuye en la misma proporción", como dice la persona 6. En la figura siguiente se esquematiza este segundo modelo.

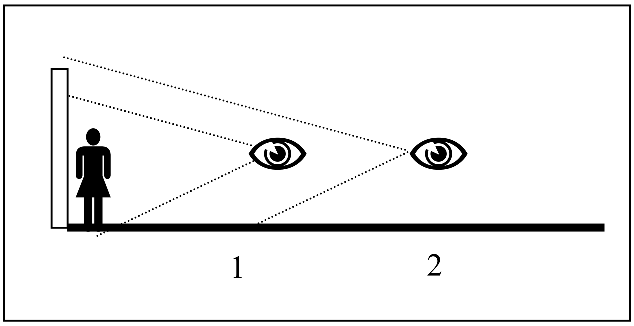


Figura 16.2. Esquema del segundo modelo elaborado por las personas participantes. Fuente. Elaboración propia.

Finalmente, hay una tercera persona que dice entender el problema como "real" (y utiliza concretamente esta palabra). La persona 3 comenta lo siguiente: "*yo lo entiendo como real, no como proporción,* *yo la entiendo como real. Como yo sé que una puerta mide 2,20 m, más o menos, y mi compañero pues 1,60, pues, en perspectiva, vale, pero siempre en perspectiva, la persona sigue siendo más pequeña que la puerta.*" En otras palabras, para ella la puerta siempre mide 2,20 m y la persona 1,60 m, de manera que por mucho que avance o retroceda (ella o la profesora), las medidas continuarán siendo las mismas, y no cambian.

Estos tres modelos sugieren varias cosas. Por un lado, que todas las personas del grupo recurren a procedimientos no formales (desde el punto de vista de la "matemática académica") para contrastar sus hipótesis. Esta forma de actuar nos lleva, de nuevo, a pensar que una de las características de la "matemática de la vida real" es precisamente su utilidad y pragmatismo. Normalmente, en la elección del instrumental matemático formal[287] se declina la precisión que ofrecen los cálculos aritméticos y se prefiere utilizar otras técnicas de estimación más aproximativas. Estas técnicas son más habituales en la vida cotidiana de las personas adultas, ya que tienen más sentido para ellas (sobre todo si les sirven para resolver las situaciones problemáticas). Esto es un ejemplo de la importancia que tiene la experiencia previa en la educación de personas adultas.

Por otro lado, todos los modelos (salvo quizás el último) tienen un contenido matemático muy importante. Esto es un ejemplo de que todas las personas somos capaces de utilizar las matemáticas para resolver situaciones problemáticas. Lo que ocurre es que la diferencia está en el tipo de procedimientos que usamos (unos corresponden con una dimensión más cualitativa de los contenidos matemáticos, como en el caso de estos tres modelos, mientras que otros son más cuantitativos, [288] e incluso los encontramos teóricos del todo).

[287] Esto es una referencia a la dimensión normativa de las matemáticas.

[288] Los ejemplos que estamos mostrando se situarían en el caso de la aplicación del Teorema de Pitágoras para solucionar el problema.

Pasando a consideraciones más concretas (desde el punto de vista del contenido matemático), se puede apreciar una clara diferencia entre los modelos 1 y 2. En el primero, las mujeres que lo proponen tienen claro que el concepto de proporción es un concepto que se utiliza para referirse a situaciones de la vida real en las que existe una relación de dependencia funcional entre dos variables (en este caso, el cociente entre el tamaño de la profesora y la puerta).[289] En cambio, la persona 6 no "ve" que exista una relación de dependencia funcional entre puerta y profesora, porque para ella la diferencia entre el tamaño de la puerta y la altura de la profesora es siempre la misma. Lo que sí ocurre es que se ven más o menos grandes dependiendo de la distancia a la que se encuentre la persona que observa. En este caso, la relación funcional se sitúa entre ella (que observa) y el conjunto de puerta y profesora. En cambio, la idea matemática que hay implícita a la relación entre altura de la puerta y altura de la profesora es una idea de relación estática completamente.

En el tercer modelo este concepto estático de la proporción es todavía más marcado, porque la persona 3 ni siquiera comenta en ningún momento que tal relación exista. En cambio, ella sí que ve muy claramente la relación estática que existe entre dos magnitudes.[290]

Todas estas concepciones aparecen a lo largo de la conversación. El diálogo sirve para reflexionar sobre ellas e ir construyendo poco a poco la idea matemática de proporción a través de la reflexión crítica (y práctica) sobre modelos. La participación igualitaria de todas las personas del grupo en la dinámica de la clase permite que aflore una gran riqueza conceptual y es la forma de que todas las personas puedan utilizar lo que ya saben previamente y revertir sus conocimientos en el resto de la clase, para construir conjuntamente el

[289] Según la profesora se acerca o se aleja a la persona participante, el resultado del cociente entre la altura de ella y la de la puerta crece o decrece, hasta que llega un momento en que se iguala a cero. En ese momento es cuando puerta y profesora "son" aparentemente "iguales".
[290] Ver el capítulo en el que se define la proporcionalidad. Esta idea de proporción ha sido muy trabajada por Behr y Giménez, 1989.

conocimiento. De hecho, esta situación es un ejemplo de cómo el conocimiento se construye socialmente (con la suma de esfuerzos de todas las personas).

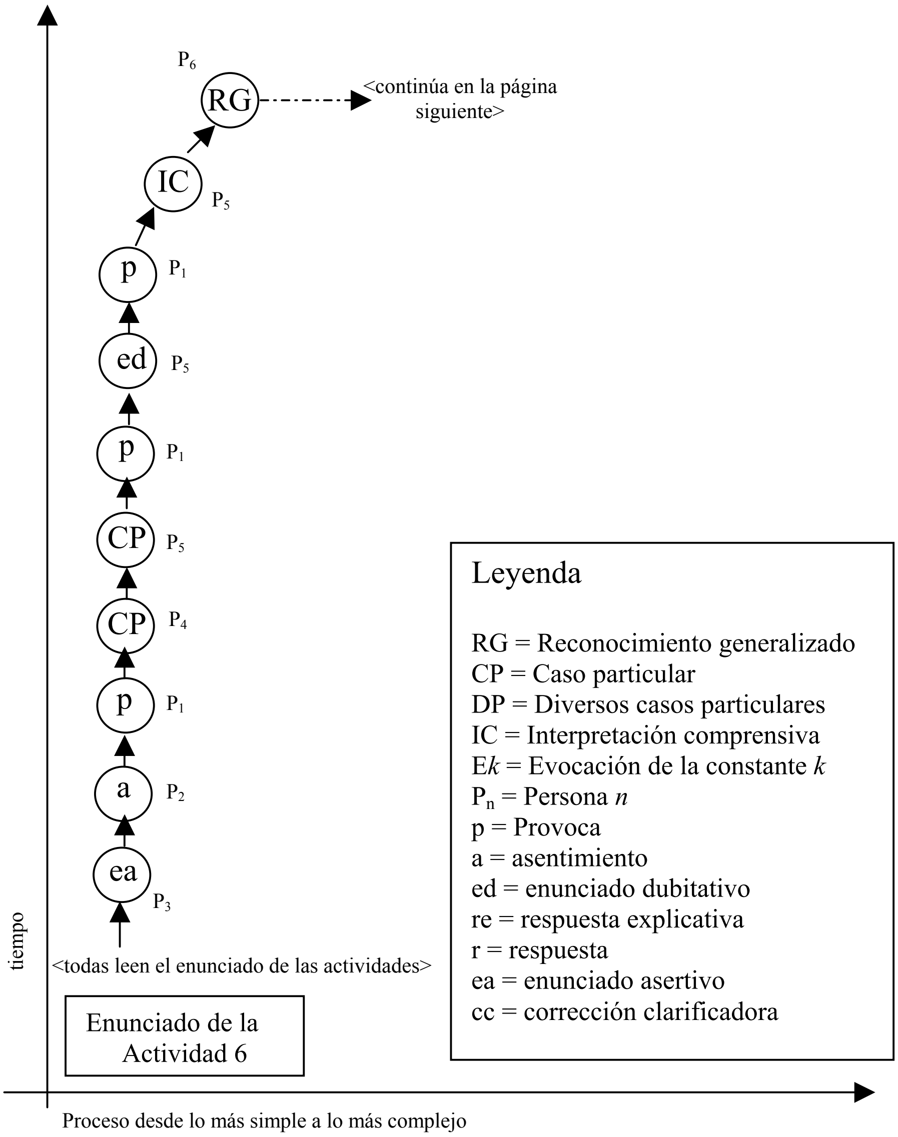
Si pensamos de qué tipo son las intervenciones que se suelen hacer, llegamos a la conclusión de que en casi todas las ocasiones todas las personas de la clase (mujeres del grupo y profesora también) utilizan el lenguaje en un sentido ilocucionario, es decir, para buscar la solución del problema y no para cambiar el comportamiento de los demás. En ese sentido, la dinámica que se ha generado aquí es muy diferente de las dos actividades precedentes.

Finalmente, la solución a la que se llega es por consenso:

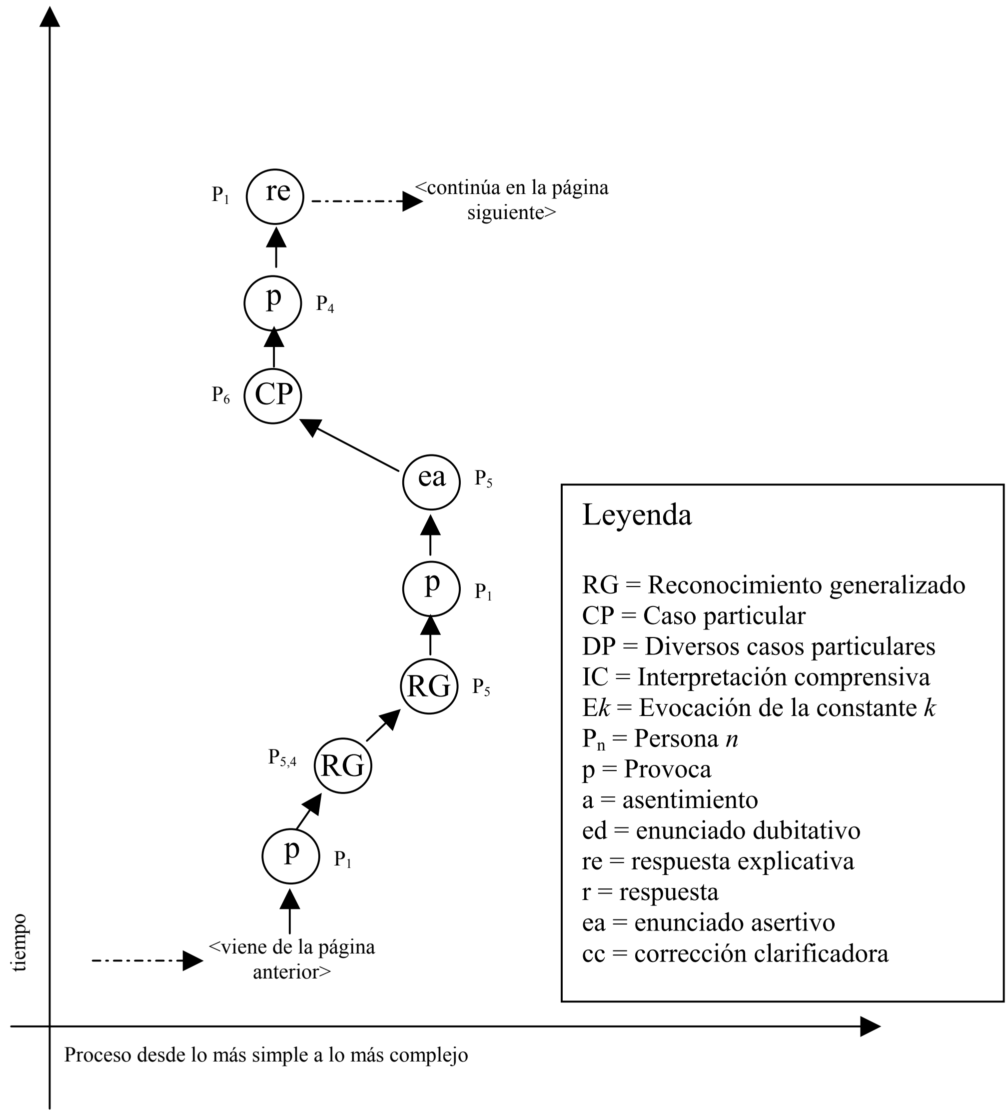
> "P4.- ... Y como era la R, ponemos metro sesenta...
> P3.- Yo he puesto, la puerta 2,20m, y R 1,60m, ¿no?
> P1.- ¡Uy! 1,60m, no sé yo. Pues la verdad es que no me acordaba.
> P5.- Sí, porque yo hago metro sesenta y somos más o menos iguales.
> P1.- ¿Ya está, no? Esta pregunta se ha acabado." (Fragmento de la trascripción. Actividad 6).

A continuación se incluyen las trayectorias cognitivas, que muestran todo el proceso de interacción.

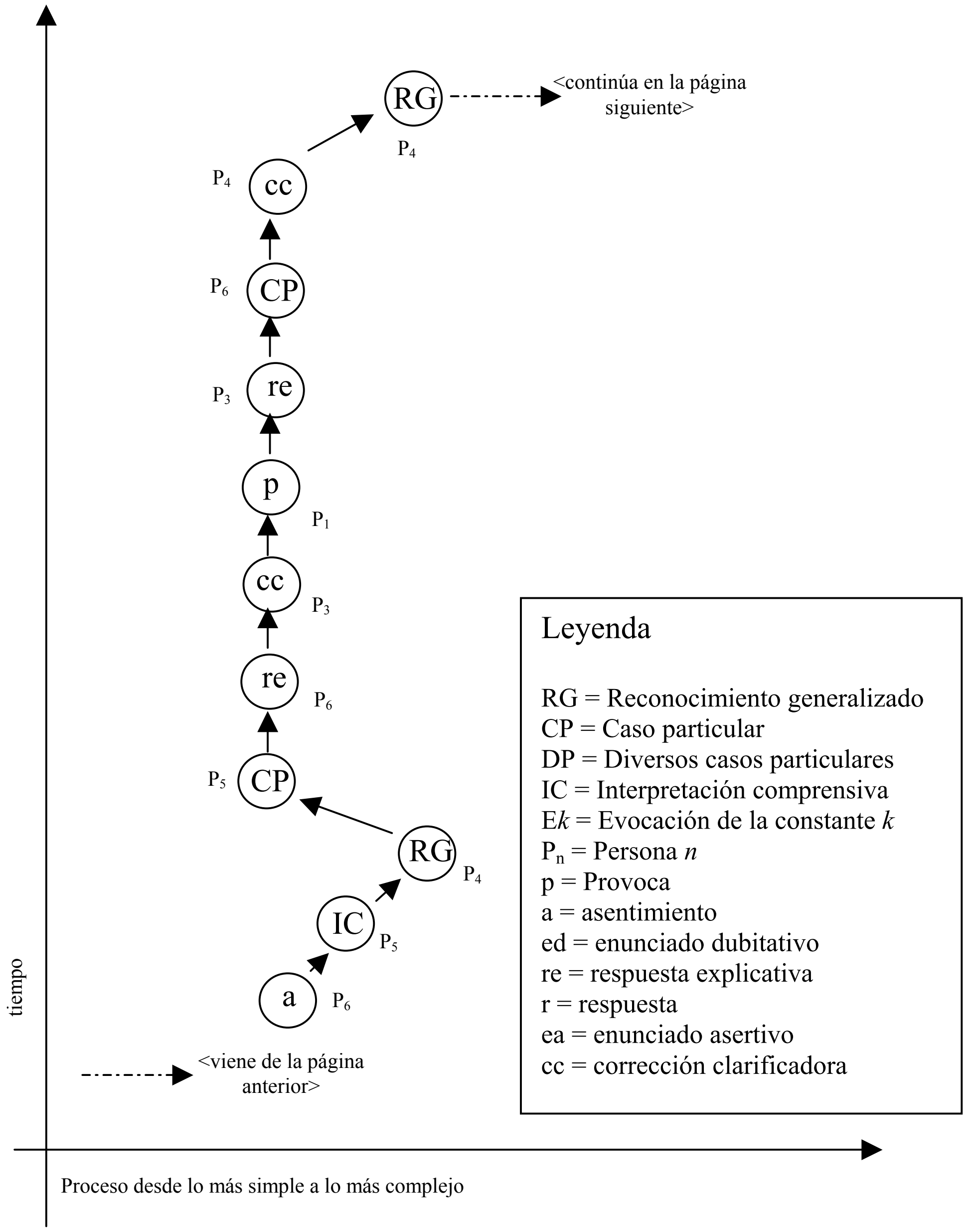
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 6 (a)



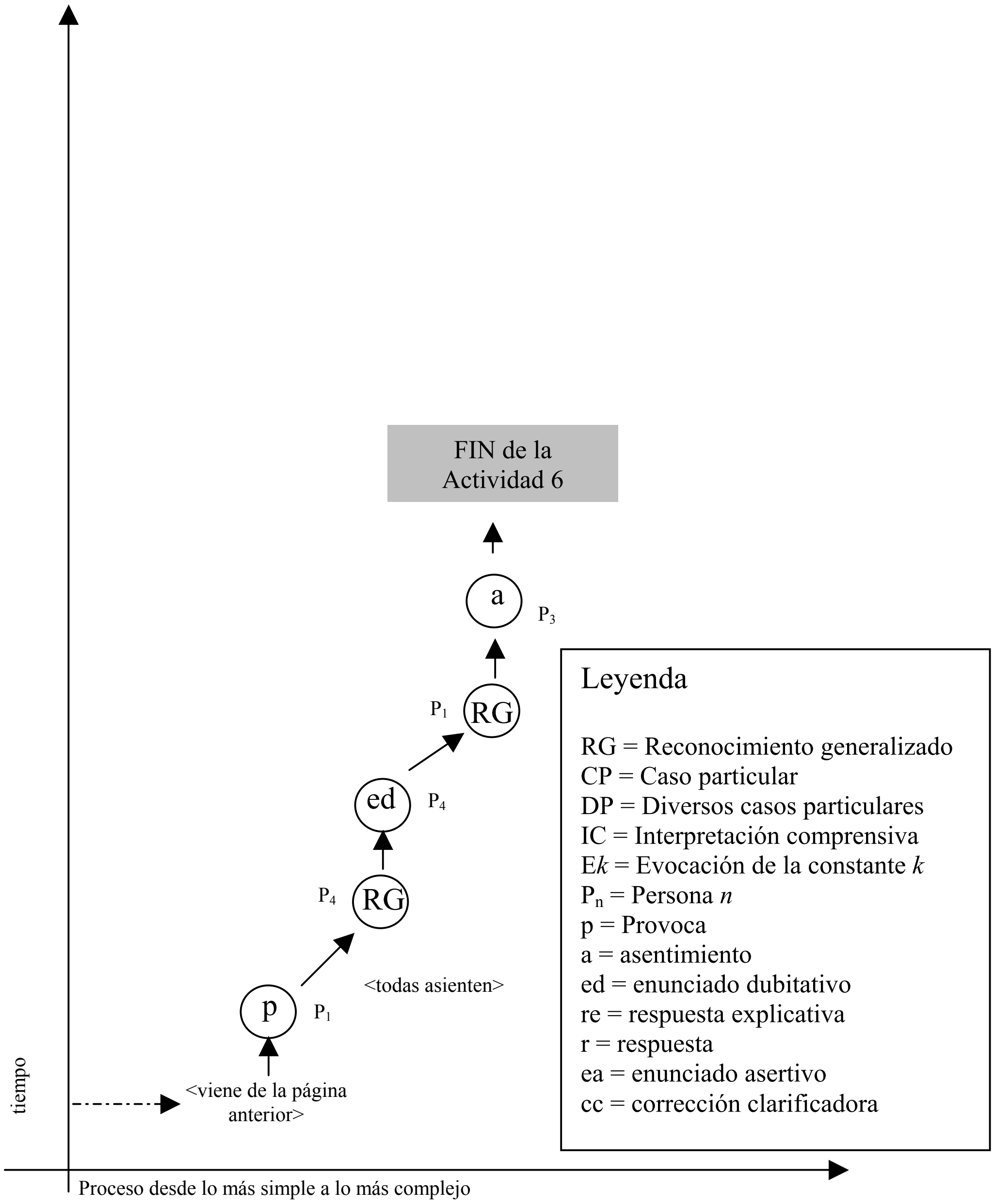
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 6 (b)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 6 (c)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 6 (d)



7) Los folios de papel (VII)

Descripción esquemática de la TCA$_7$. Nos encontramos ante una trayectoria que atraviesa tres momentos bien diferenciados: a) desde el inicio el diálogo sigue una trayectoria cognitiva sinuosa, de lo concreto a lo abstracto, marcada por las "interpretaciones comprensivas"; b) en un segundo momento, la trayectoria se vuelve rectilínea y vertical; y c) finalmente, nos encontramos con otro tramo en el que se produce un marcado *zig-zag*, porque se trata de una generalización en la que las personas 4 y 5 utilizan el ejemplo de un caso particular para dar mayor fuerza a sus argumentos.

En esta actividad el tema consiste en comparar dos hojas de papel (dos folios, uno entero y el otro cortado por la mitad) y decir si ambas hojas son proporcionales.

Igual que en el caso de la actividad anterior, el planteamiento del problema dista mucho de los ejercicios presentados en el libro. Se trata de un problema "abierto", que admite muchas maneras de enfocarlo y encontrar la solución (o soluciones) correcta. Las mujeres del grupo de matemáticas se encuentran ante un reto que las obliga a pensar para encontrar la solución. Lo que ocurre es que inmediatamente se genera un diálogo para tratar de "definir" el problema y entender lo que se pide.[291] No obstante, si vemos la trayectoria cognitiva, la profesora enseguida marca ese diálogo en una dirección. Como se puede apreciar en la cita adjunta, la profesora indica a las mujeres del grupo que tienen que dividir la altura y la anchura de cada uno de los folios y compararlos entre sí.

> P1.- Lo hacemos de forma matemática, a ver, ¿no es cierto? Medid el largo y el ancho y a ver si es la misma proporción en los dos. Sí que es cierto, supongo que es la misma proporción en los dos casos, pero vamos a medirlo.
>
> **Actividad 7**

A pesar del efecto perlocucionario de la intervención de la profesora, eso no impide que otras personas del grupo piensen otra manera de resolver el ejercicio. De hecho, en la lectura de la trascripción vemos

[291] Esto nos recuerda al "diálogo-consigo mismo-en voz alta" del niño del experimento que hizo Vigotsky, 1979b con la tableta de chocolate. El niño, que no podía alcanzar el chocolate (que estaba sobre un armario), comenzó a hablar consigo mismo, verbalizando el problema para tratar de entenderlo y encontrar una solución. Finalmente descubre que moviendo la silla contra el armario y subiéndose a ella puede alcanzar el chocolate. Aquí ocurre lo mismo, pero a nivel social. Las personas se preguntan unas a otras para aclarar el problema y saber qué hacer.

<a la vez, otras señoras van diciendo las medidas de los folios>
P5.- ... quinze i quinze, i l'altre vint-i-u.
(...)
P4.- Quince por veintiuno.
P1.- ¿Dividido? Mirad bien el orden.
P5.- Igual a 0,71.

Actividad 7

dos procedimientos completamente distintos para resolver la actividad.[292]

Por un lado, está lo que la profesora llama "forma matemática". Se trata de una estrategia formal que recurre a la aritmética para resolver la situación. Así, según la teoría del concepto de proporción, sabemos que si se cumple que:

$$P(a/b) = P(a'/b')$$

entonces nos encontramos ante un caso de proporcionalidad.[293] En nuestro caso, *a* y *b* corresponderían simultáneamente a la altura y anchura del folio completo, y, *a'* y *b'* a la altura y anchura del folio doblado por la mitad. En el caso de que ambos cocientes sean iguales, significa que ambas hojas de papel son proporcionales. A través del diálogo vemos cómo las personas 4, 5 y 6 exploran este camino (aunque lo hacen por indicación de la profesora).[294]

P1.- Pues tiene que salir la misma proporción. Primero el grande.
P4.- 21 por... por 30, igual a 0,7.
P1.- 0,7. Y ahora tienes que hacer éste por éste.
P4.- 15 por 21, 15 dividido por 21, que da 0,71.
P1.- ¿Lo veis? Es correcto.

Actividad 7

Por el otro, encontramos un método más gráfico (o visual) que consiste en medir los lados de ambos folios, superponiéndolos, y que es lo que hacen la persona 2 y la persona 3.

Esta categorización nos recuerda la división que hace Skemp (1980) de los diferentes modos de imaginación. Él distingue entre la "imaginación visual" y la "imaginación verbal-algebraica".

<otra señora coge un folio y lo dobla por la mitad, luego coge uno entero y lo pone uno junto al otro>
P3.- A ver, esto es un rectángulo y esto es otro rectángulo, ¿va por ahí la cosa?

Actividad 7

La primera consiste en una forma de imaginación caracterizada por la abstracción de las propiedades espaciales (tales como la forma o la posición), y se trata de una forma de imaginación intuitiva que es difícil de comunicar. Efectivamente, la persona 3 tiene algunos

[292] Hay que decir que hay dos procedimientos diferentes, porque las personas se sentaron formando tres grupos diferentes, uno de ellos se fusionó, quedando al final efectivamente dos grupos interactivos.
[293] Fiol y Fortuny, 1990.
[294] Ver las citas adjuntas.

problemas para comunicar su idea y, finalmente, lo que hace es mostrar a la cámara cómo está comparando los lados de los folios, mientras pregunta: "*¿va por ahí la cosa?*".

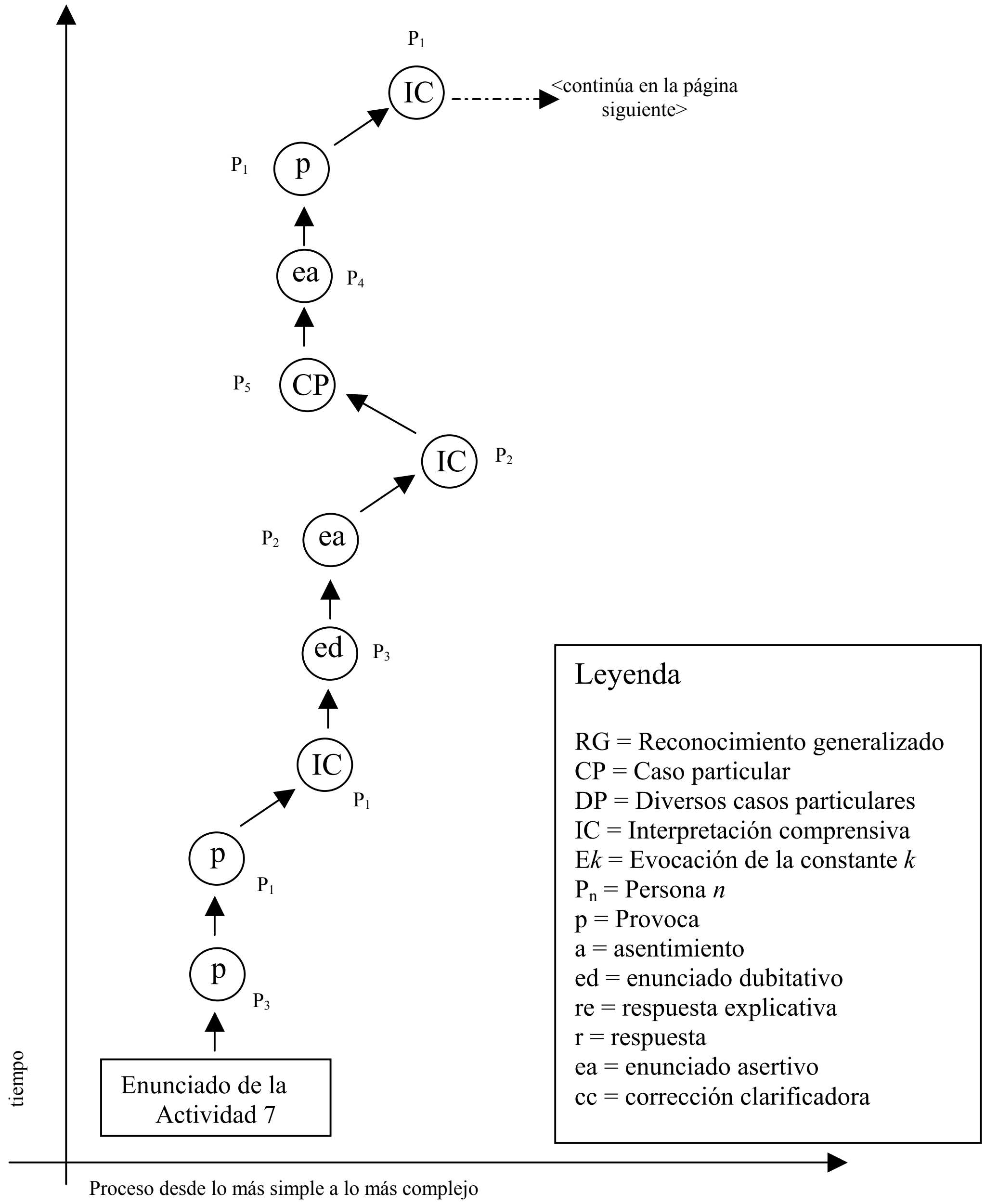
La segunda, en cambio, se caracteriza por abstraer propiedades que son independientes de la configuración espacial, tales como el número o la forma. Es un tipo de imaginación más lógico, que se estructura de manera secuencial y es más fácil de comunicar.

Como se puede apreciar por las citas situadas en la página anterior, los procedimientos utilizados por las personas participantes se pueden enmarcar perfectamente en el modelo propuesto por Skemp (1980). El diálogo en la clase permite que ambos puntos de vista salgan a la luz y se planteen.

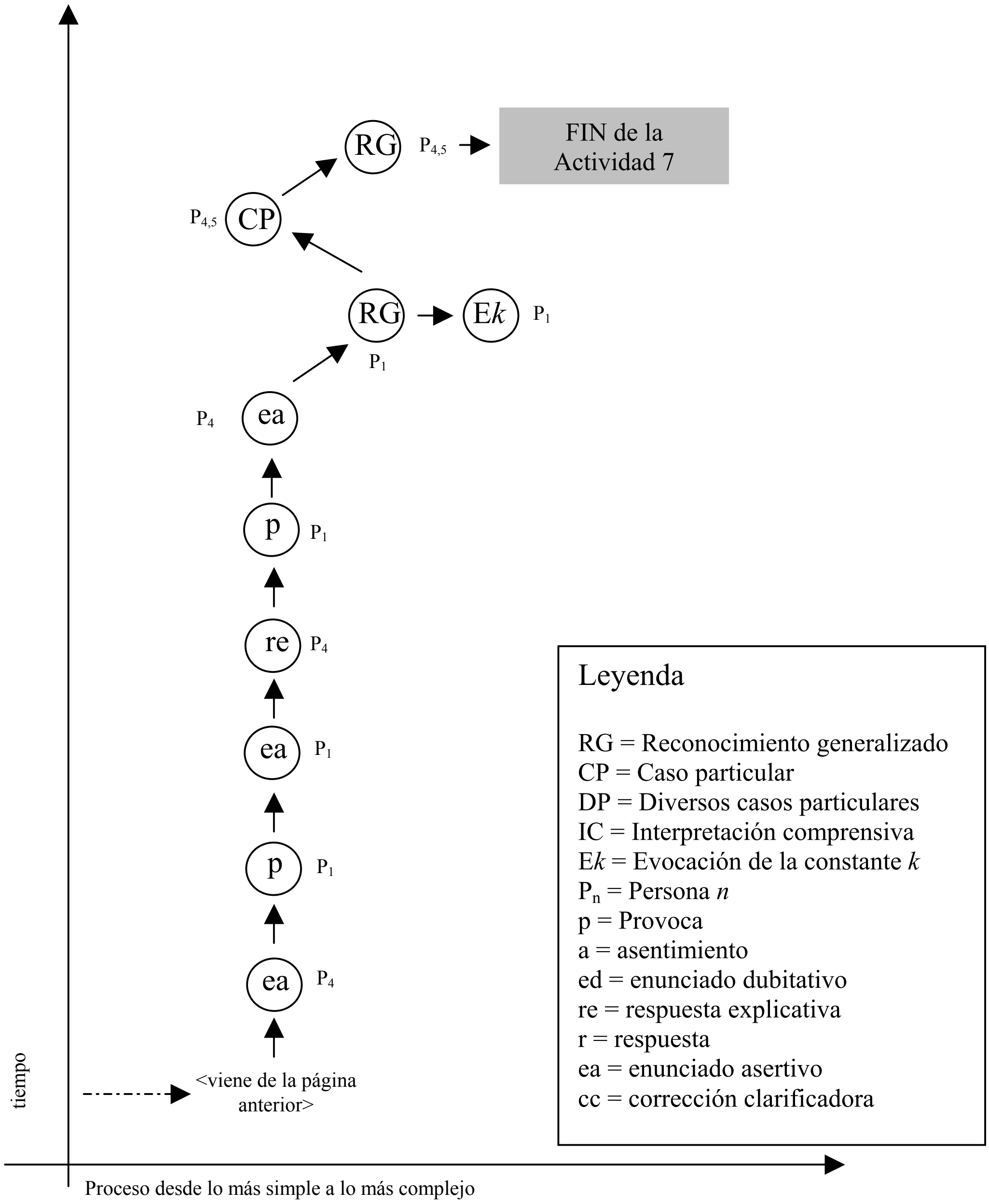
Desde el punto de vista del contenido matemático, está claro que el procedimiento que utilizan las personas 4, 5 y 6 es el "más elaborado", ya que pasa de una idea cualitativa de las matemáticas a utilizar métodos aritméticos para resolver el problema. En cambio, las personas 2 y 3 se limitan a comparar la forma de las hojas para ver si son proporcionales.[295] Aquí tiene un papel clave la actitud de la profesora, dado que las indicaciones que hace a las personas 4, 5 y 6 tienen un efecto completamente perlocucionario, puesto que lo que consigue finalmente es condicionar la respuesta que dan esas tres personas del grupo.

[295] Si hubiesen marcado las diagonales de ambas hojas y las hubiesen comparado para ver si coinciden, entonces podríamos decir que habrían hecho de manera cualitativa lo mismo que sus compañeras hicieron con números. Calcular los cocientes es lo mismo que trazar la diagonal de los lados.

Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 7 (a)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 7(b)



8, 9 y 10) El precio de la butifarra. Cambiar moneda. Hoy tenemos invitados a comer (VIII, IX, X)[296]

Descripción esquemática de las TCA$_{8,9\ y\ 10}$. La primera de las trayectorias consideradas sigue una línea casi vertical, en la que sólo aparece una generalización. La trayectoria de la actividad 9 es todavía más escueta y sencilla. En cambio, en la actividad 10 encontramos dos momentos diferenciados: a) al inicio la conversación sigue la misma tendencia que en los dos casos anteriores (es decir, que la trayectoria es vertical); y b) hacia el final de la conversación, la trayectoria se separa (porque los grupos interactivos trabajan por separado) y aparecen tres líneas diferentes en las que se combinan elementos tanto abstractos como concretos.

En la actividad 8 se plantea una situación semejante a las que aparecen en el libro de matemáticas. La acción transcurre en un mercado. Las mujeres del grupo de matemáticas quieren comprar butifarra para comer. A partir de aquí, se hacen una serie de preguntas para relacionar la cantidad con el precio y estudiar el efecto de la proporcionalidad sobre dicha relación.

P5.-... pues me habré ahorrado... Es té que dividir per 3, 25 per 3. I després una part...
(...)
P5.- Pues te has ahorrado 1 kilo, que son... 5 euros, 5 euros te has ahorrado.

Actividad 8

Durante el diálogo se nota perfectamente la importancia de la experiencia previa. Ejemplo de ello es la respuesta que da la persona 5 a una de las actividades donde se pregunta: ¿cuánto ahorras en el caso de encontrar una oferta en la que te llevas 3 kilos de butifarra al precio de 2? La persona 5 enseguida dice que lo que hay que hacer es dividir para saber lo que cuesta un kilo (que es el que te ahorras).

Ésta es una muestra de aplicación de un concepto matemático en la vida cotidiana, como es el algoritmo de la división y el concepto de repartición.

Después de esto, las personas del grupo de matemáticas se pusieron a hacer la actividad 9. Esta actividad consistía en pasar una determinada cantidad de dinero de euros a pesetas. En el momento en que se

[296] Juntamos estas tres actividades porque debido al tiempo disponible para hacer la clase, las aportaciones y el debate fueron muy reducidos, de manera que el material recogido no justifica que hagamos la presentación por separado.

planteó era una actividad interesante, porque era el momento de cambio de moneda, de pesetas a euros. De todas maneras, como se deduce de la trayectoria que se adjunta, la actividad no provocó demasiado debate en clase. Creemos que eso fue debido a dos causas: a) por un lado, al poco tiempo que disponíamos ya de clase, y b) por otro, a que el paso de una moneda a otra es algo que ya lo tenían muy sabido, que hacían rápidamente y sin pensarlo demasiado.[297]

Finalmente, las mujeres del grupo hicieron la actividad 10. En esta actividad volvemos al caso de la butifarra. Las mujeres del grupo de matemáticas resulta que tienen una comida en casa con invitados. Ahora se trata de calcular lo que le toca a cada comensal. De nuevo, aplican el concepto de la "división" para saber cuántas personas podrán comer con la cantidad de butifarra que tienen en casa. Aquí podría haber aparecido una dificultad, que es el hecho de tener que hacer una división con un denominador menor que la unidad. Sin embargo, las personas participantes lo que hicieron fue recurrir a la calculadora y ayudarse de ella a fin de resolver la división.

P5.- ... Tenim 3 kilos de butifarra, i venen a dinar... cada persona come 0,25... 3 kilos, dividit per 0,25

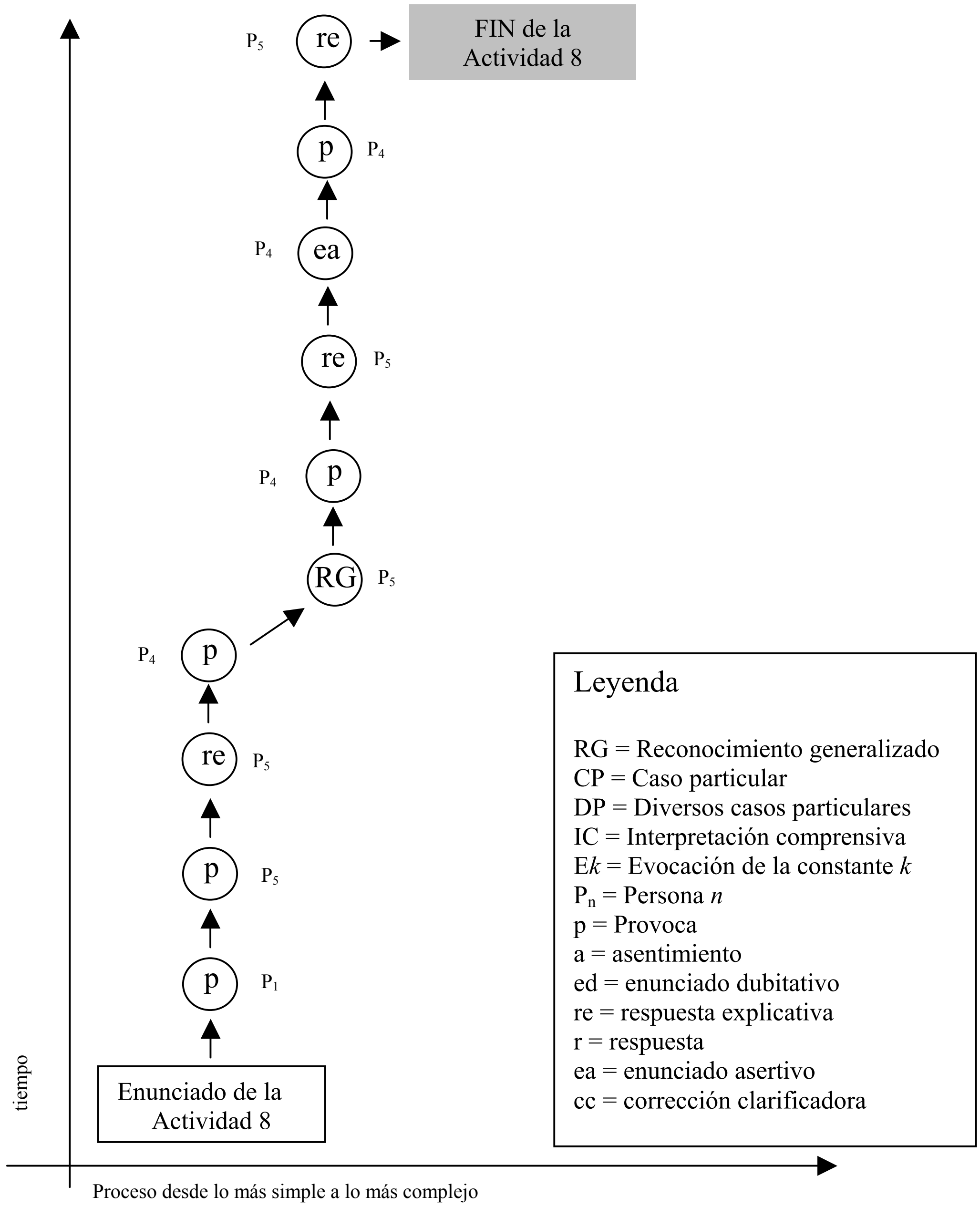
Actividad 10

Por otro lado y desde el punto de vista del contenido matemático, es importante resaltar que las mujeres del grupo no dudaron un momento en aplicar la división como método para llegar al resultado correcto. Se repite de nuevo la idea de que para resolver una proporcionalidad inversa se tiene que dividir la cantidad original por los diferentes valores que va tomando la variable. Sin embargo, no aparece en este procedimiento la constante de proporcionalidad (cuya aplicación ya no es intuitiva, puesto que implica resolver la operación mediante una multiplicación por un cociente menor que uno).[298] Lo que sugiere este hecho es la idea que tienen las personas del grupo de matemáticas sobre la proporcionalidad inversa es que se trata de una relación

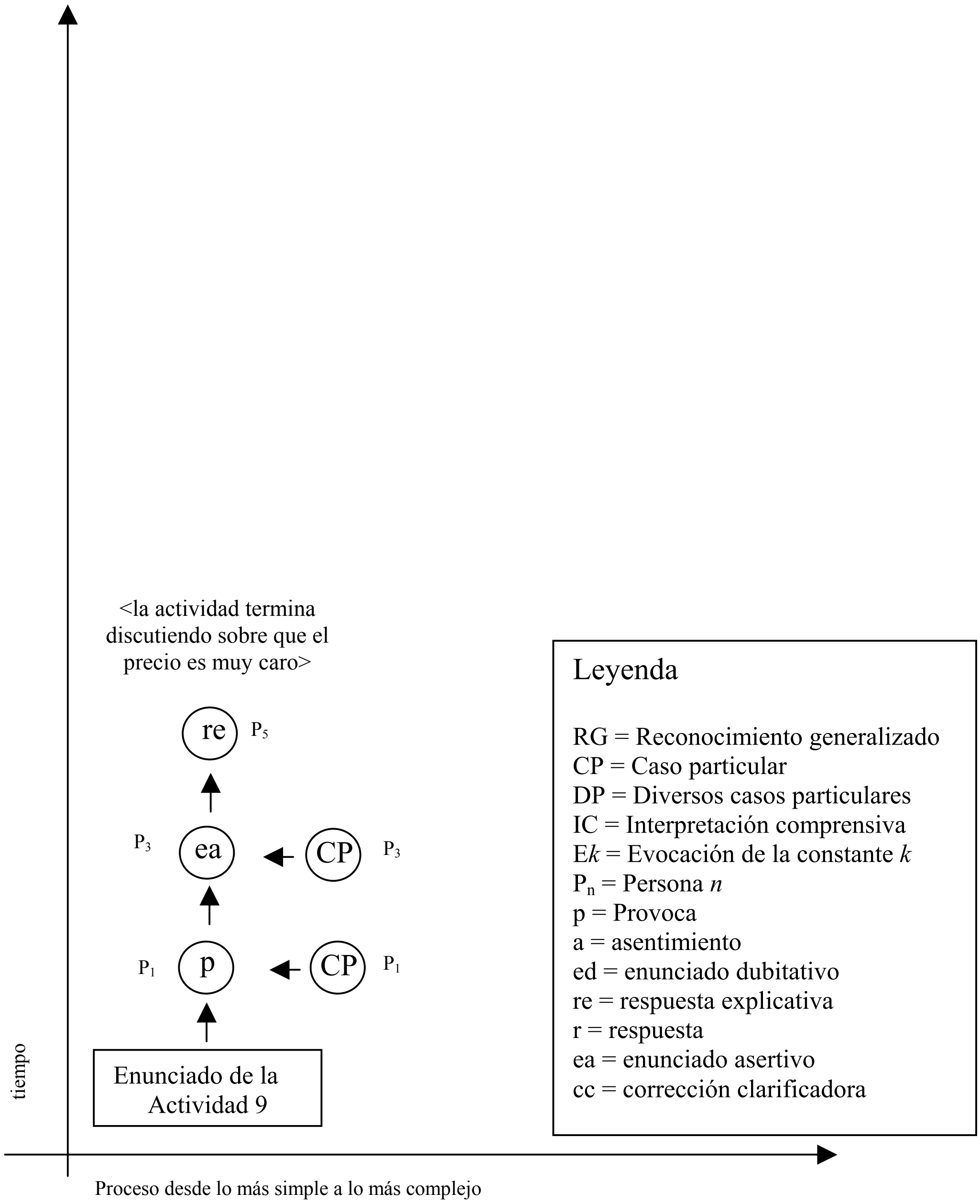
[297] De hecho, en la escuela de La Verneda – Sant Martí se hizo durante todo un año un taller específico para enseñar a las personas adultas a pasar de una moneda a la otra. Se trata de un tema muy trabajado a nivel del currículum que se ofrece en la escuela.
[298] Ver el comentario de la actividad 3.

decreciente entre dos variables, que se relacionan a través de la división.

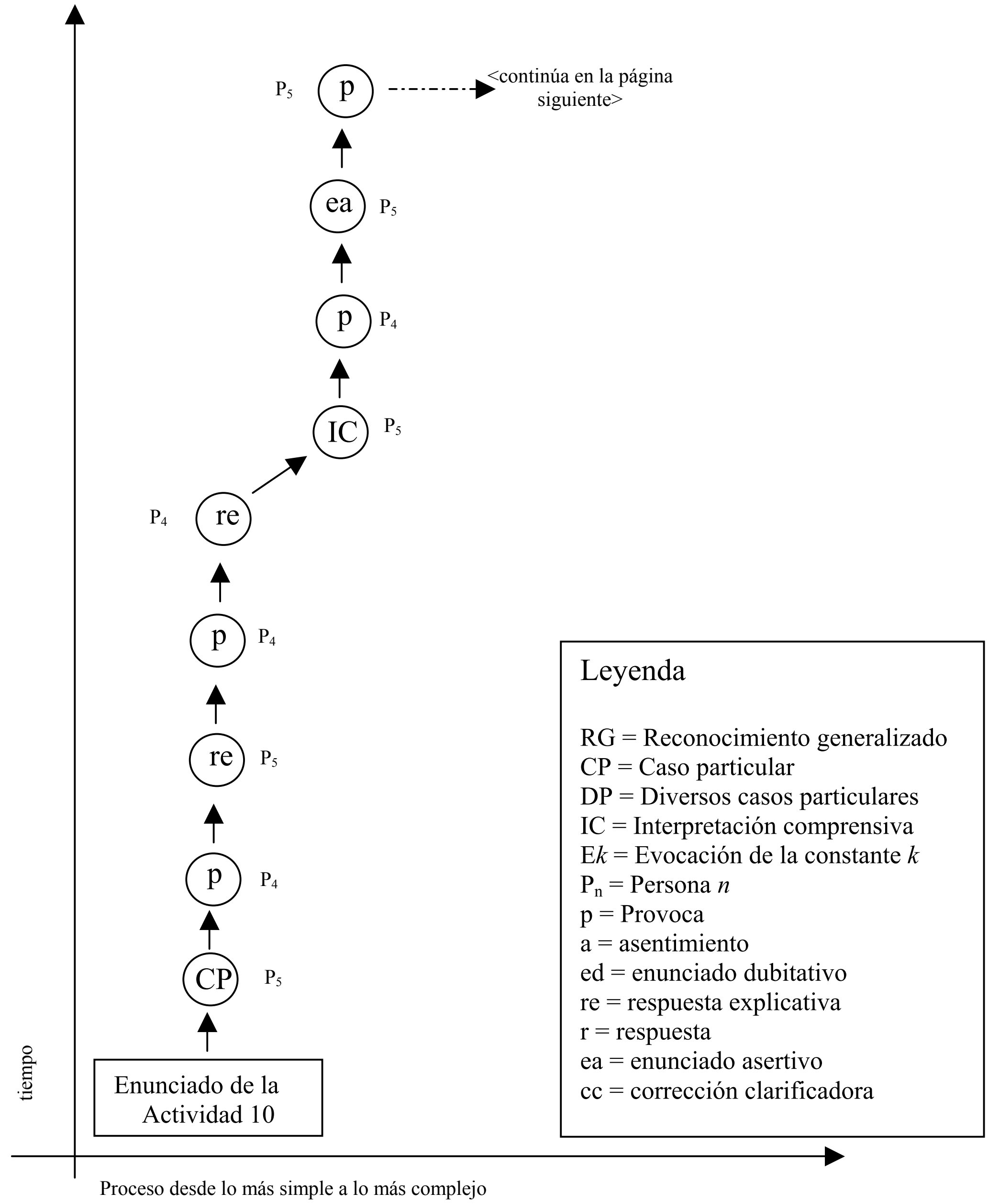
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 8



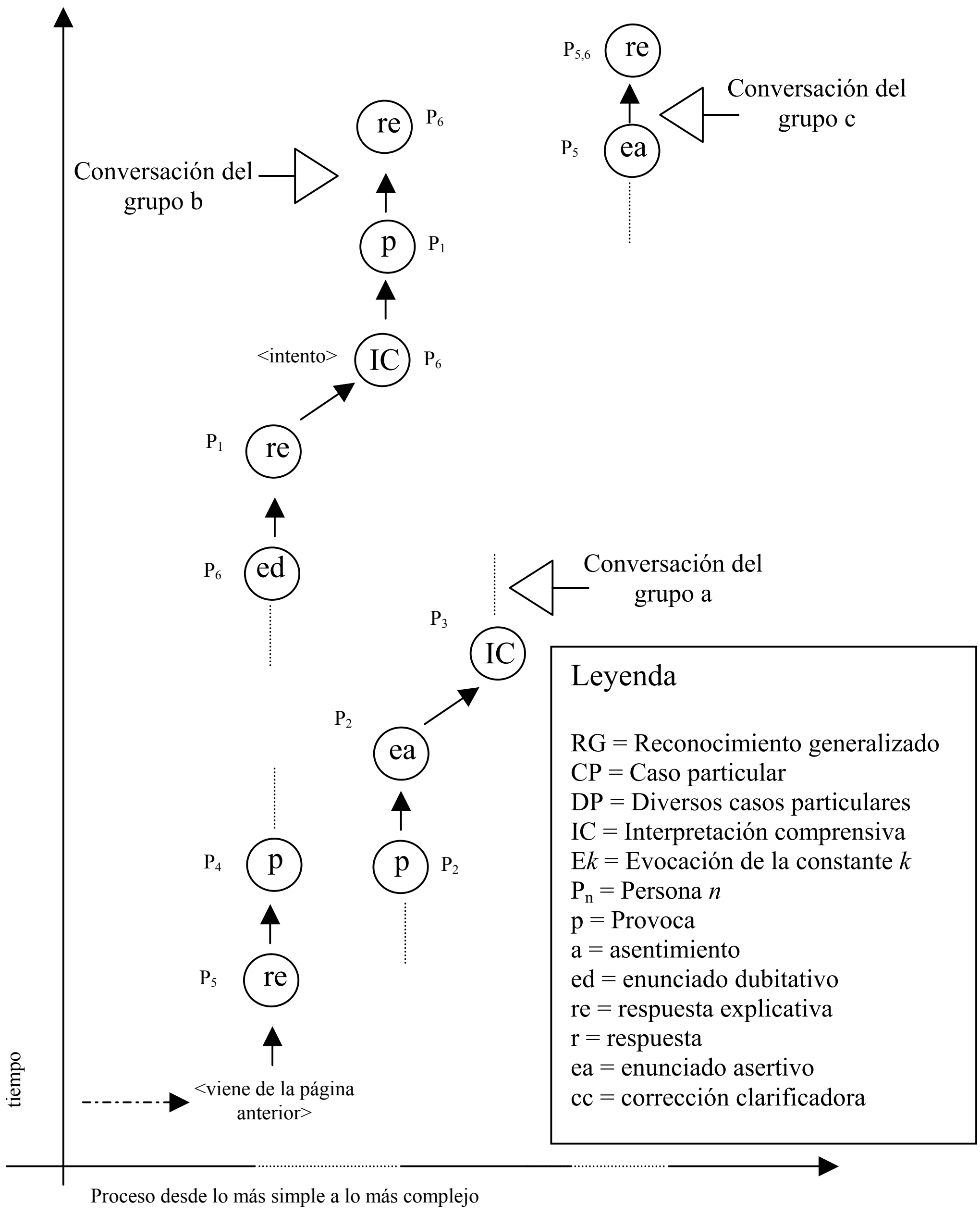
Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 9



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 10 (a)



Trayectoria cognitiva de aprendizaje de la tarea 10 (b)[299]



[299] En el esquema correspondiente a los diálogos que se produjeron durante la resolución de la actividad 10 se incluyen conversaciones paralelas simbolizadas con líneas en puntos suspensivos. Las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* se agruparon en dos-tres grupos: a) las personas 2 y 3; b) las personas 4 y 5; y c) la persona 6, que a veces se juntaba con el grupo b.

16.3. Aportaciones del capítulo

¿Qué nos aporta este capítulo al análisis? Varias cosas tanto a nivel social, como del contenido matemático y del medio.

Por un lado, a lo largo de las diferentes actividades vemos que el *diálogo es la herramienta* que utilizan las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas* para solucionar las diferentes situaciones problemáticas ante las que se encuentran. Por lo general, la dinámica siempre consiste en dar las respuestas concretas a las preguntas planteadas. En ese proceso es cuando las mujeres "reconocen" los conceptos matemáticos que hay detrás de cada actividad. De todas maneras, esto es así sólo para las actividades del libro, donde las preguntas aparecen claramente planteadas de forma explícita. En el caso de las actividades presentadas en formato *html*, las situaciones problemáticas se presentan de una forma mucho más abierta, de manera que las mujeres del grupo tienen que pensar primero en cómo responder a cada pregunta antes de resolverla. Por eso, en este caso lo que suele suceder es que primero se recurre a la abstracción y después se va a los ejemplos concretos para ver si lo que ellas pensaban funciona realmente.

Esto nos lleva a la segunda de las aportaciones de este capítulo: la *importancia que tienen las "interpretaciones comprensivas"* como guías que orientan la resolución del problema (y, por extensión, la construcción del conocimiento matemático subsiguiente). Las "interpretaciones comprensivas" son la forma que utilizan las personas del grupo de matemáticas para entender los conceptos matemáticos que están estudiando. Como vemos en varias de las actividades anteriores (por ejemplo, la 3, o la 6), la "interpretación comprensiva" es el paso previo para empezar a resolver el problema. Primero se entiende y después se busca la solución.

En tercer lugar, es importante resaltar la importancia de la dimensión afectiva en el aprendizaje. Durante la sesión en la que las mujeres resolvieron las diez actividades estudiadas, una de las personas, en un momento dado, dice que ella es una novata. La persona que hace esa afirmación es precisamente una de las personas que menos participa durante toda la sesión. Esto es una muestra del efecto perturbador que puede tener *la confianza en uno mismo* durante el aprendizaje de las matemáticas. La falta de autoconfianza es un elemento exclusor que dificulta claramente la participación igualitaria en el aula. Y uno de los requisitos *sine qua non* de la creación de sentido es precisamente la participación. Una persona sólo se hace suyo un concepto cuando lo interioriza. Para ello se tiene que sentir capaz de utilizarlo como el resto de las personas.

En cuarto lugar, otro de los aspectos que hemos podido ver es que cuando las mujeres del grupo están inseguras por algún motivo, lo que hacen *es recurrir a preguntas* (del tipo: ¿esto está bien?, ¿lo hago bien?, etc.) para superar esa inseguridad. Este tipo de preguntas suponen una estrategia que *transforma lo que sería una dificultad*, como es la inseguridad, *en una posibilidad de aprendizaje*.

En quinto lugar, la *dinámica de la clase es diferente a la de una clase tradicional.* Las personas participan de manera activa, como deja patente el análisis cuantitativo que se realizó al principio del capítulo. Además, la mayor parte de las veces se trata de una participación igualitaria, en la que cada persona aporta sus argumentos, lo que ella entiende o deja de entender sobre cada uno de los temas planteados. De ese modo, pocas veces encontramos dinámicas propias del modelo escolar definido por Medina (1994, 1996).[300] Lo que sí hemos podido constatar es que cuando aparece este tipo de dinámicas las trayectorias se vuelven verticales, no hay prácticamente oscilación entre el polo concreto y el polo abstracto y la mayor parte de las intervenciones

[300] En nuestro caso la actividad 7 es el ejemplo más claro de modelo escolar.

corresponden a la profesora, que adopta un papel perlocucionario en el aula. De alguna manera, lo que ocurre (como se puede apreciar en las trayectorias) es que la profesora va explicando cómo se resuelven los ejercicios, mientras que el resto de la clase escucha y toma nota de ello. En este caso la participación es mínima. En cambio, cuando todo el mundo está participando la dinámica de la clase es ilocucionaria (o perlocucionaria, pero basada en el diálogo igualitario). En este contexto es donde resulta más fácil que las personas creen sentido a todo lo que están aprendiendo.

En sexto lugar, desde el punto de vista del contenido matemático, lo que muestra el análisis es que las mujeres del *Grupo de matemáticas dialógicas conocen y saben* aplicar la idea matemática de proporcionalidad, pero aparece un conflicto de contenido. La proporcionalidad directa se asocia a la idea de "aumentar", mientras que la proporcionalidad inversa remite a la idea de "decrecer". Además de este –llamémosle– primer nivel de elaboración del concepto de proporción,[301] las mujeres del grupo de matemáticas también tienen muy claro que la proporcionalidad directa es multiplicar, mientras que la proporcionalidad inversa implica dividir, aspecto que implica una idea "teórica" de las matemáticas. En todo esto queda clara la idea de que ambos tipos de proporcionalidad son "opuestos". Así, aparece una simplificación estratégica, que es al mismo tiempo una barrera para el contenido matemático completo.

En efecto, la afirmación de aumentar y decrecer correspondería a la función de creciente y decreciente (no a lo proporcional) y además no se explicita el valor de la constante, ya que se dice multiplicar, pero no se habla de multiplicar siempre por la misma cantidad.

[301] Nos estamos refiriendo aquí a las cuatro dimensiones del concepto de proporción: cualitativa, doble / mitad, cuantitativa y teórica. Ver el capítulo sobre la teorización del concepto de proporción, en la parte de metodología.

En séptimo lugar, tenemos que resaltar la confusión en el significado de la letra "*k*", debido al desconocimiento del sistema de notación matemática y a la experiencia previa que tienen las mujeres del grupo. Para ellas la letra "k" significa "kilo" (además, aparece justo en un problema donde se habla de kilos) pero en lenguaje matemático la "*k*" corresponde a la constante de proporcionalidad. Este contenido polisémico es el que creó el conflicto a algunas de las personas adultas de la clase.

En octavo lugar, destaca un rasgo muy característico de las "matemáticas de la vida real", que es el hacer las cuentas "de cabeza". Operar de esta manera implica (además de una gran agilidad mental) el *uso de ciertas habilidades*, como simplificar las cantidades, por ejemplo. [302]

Esto nos lleva a la novena aportación: las *aproximaciones al resultado por estimación*. Las mujeres del grupo de matemáticas lo que hacen al operar con cantidades es coger la unidad y "partirla en trozos" más manejables al hacer el cálculo mental. Por ejemplo, en el caso de tener que calcular a cuántos minutos corresponde 0,87 (como ocurre en la actividad 3), lo que hacen es partir el minuto en 4 partes, de manera que tienen 4 partes de 25 minutos cada una y buscan el 87 en la última parte. De este modo, como el 87 se encuentra entre el 75% y el 100% de la hora (que va del 45 al 60), sabemos que el 0,87 corresponde, aproximadamente, a 52 minutos.

Esta forma de hacer los cálculos dista mucho de los procedimientos usuales en la matemática formal. Sin embargo, esto no significa que no sean válidos. El método de aproximación por estimación es la décima aportación. Este método sirve igual que las operaciones aritméticas formales para encontrar la solución a los problemas

[302] Por ejemplo, para sumar 12 y 25, se suma primero 10 y 20, que son 30, y luego 2 y 5, que son 7. Total: 37. Esto es muy diferente de escribir el 12 y el 25 sobre un papel, uno debajo del otro, y hacer el cálculo.

planteados. *La diferencia consiste en el nivel de precisión*: mientras que la aproximación no es un método preciso, el procedimiento académico (en este caso) sí que lo es.

La undécima aportación se refiere al uso del método de ensayo-error por las personas del grupo de matemáticas. Ante actividades donde el planteamiento deja bastante abierta la respuesta, las personas participantes lo que hacen es construir modelos posibles de respuesta y comprobar después (mediante la práctica) si sus conjeturas son acertadas o no.

Terminamos diciendo que a lo largo de estas páginas hemos podido comprobar cómo el diálogo y la participación en un entorno igualitario son dos elementos básicos en el proceso de aprendizaje. Las personas resolvemos los problemas hablando sobre ellos, reflexionando de manera crítica y compartiendo los diferentes puntos de vista, para llegar a la solución correcta. Por tanto, cualquier estudio que pretenda aportar algún aspecto a la mejora de la calidad del aprendizaje en nuestras aulas, tiene que partir con la inclusión de esta dimensión social en el análisis e, identificar cuáles son los elementos que intervienen en el proceso para poder actuar sobre ellos.