

ADVERTIMENT. La consulta d'aquesta tesi queda condicionada a l'acceptació de les següents condicions d'ús: La difusió d'aquesta tesi per mitjà del servei TDX (www.tesisenxarxa.net) ha estat autoritzada pels titulars dels drets de propietat intel·lectual únicament per a usos privats emmarcats en activitats d'investigació i docència. No s'autoritza la seva reproducció amb finalitats de lucre ni la seva difusió i posada a disposició des d'un lloc aliè al servei TDX. No s'autoritza la presentació del seu contingut en una finestra o marc aliè a TDX (framing). Aquesta reserva de drets afecta tant al resum de presentació de la tesi com als seus continguts. En la utilització o cita de parts de la tesi és obligat indicar el nom de la persona autora.

ADVERTENCIA. La consulta de esta tesis queda condicionada a la aceptación de las siguientes condiciones de uso: La difusión de esta tesis por medio del servicio TDR (www.tesisenred.net) ha sido autorizada por los titulares de los derechos de propiedad intelectual únicamente para usos privados enmarcados en actividades de investigación y docencia. No se autoriza su reproducción con finalidades de lucro ni su difusión y puesta a disposición desde un sitio ajeno al servicio TDR. No se autoriza la presentación de su contenido en una ventana o marco ajeno a TDR (framing). Esta reserva de derechos afecta tanto al resumen de presentación de la tesis como a sus contenidos. En la utilización o cita de partes de la tesis es obligado indicar el nombre de la persona autora.

WARNING. On having consulted this thesis you're accepting the following use conditions: Spreading this thesis by the TDX (www.tesisenxarxa.net) service has been authorized by the titular of the intellectual property rights only for private uses placed in investigation and teaching activities. Reproduction with lucrative aims is not authorized neither its spreading and availability from a site foreign to the TDX service. Introducing its content in a window or frame foreign to the TDX service is not authorized (framing). This rights affect to the presentation summary of the thesis as well as to its contents. In the using or citation of parts of the thesis it's obliged to indicate the name of the author

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament de Física Aplicada

Convección térmica en un anillo cilíndrico en rotación

Memoria presentada por M^a Aránzazu Alonso Maleta
para optar al grado de Doctora en Ciencias.

Directora: Marta Net Marcé

Barcelona, Febrero de 1999



Contenido

1	Introducción	1
1.1	Convección térmica en sistemas en rotación	1
1.2	Presentación del trabajo. Objetivos	7
2	Ecuaciones de convección y su tratamiento analítico	11
2.1	Inestabilidad térmica	11
2.2	Formulación de las ecuaciones y condiciones de contorno	13
2.3	Estado conductivo. Adimensionalización	16
2.4	Simetrías de las ecuaciones	19
2.5	Teorema de Taylor–Proudman	21
2.6	Tratamiento de las ecuaciones: potenciales de la velocidad	22
2.6.1	Ecuaciones de los potenciales en función de las componentes de la velocidad y la vorticidad	25
2.6.2	Condiciones de contorno en función de las componentes de la velocidad y la vorticidad	29
2.6.3	Expresión de las ecuaciones en función de los potenciales	30
2.6.4	Expresión de las condiciones de contorno en función de los potenciales. Elección del <i>gauge</i>	31
3	Estabilidad del estado conductivo: condiciones de contorno libres	33
3.1	Ecuaciones de convección linealizadas	34
3.2	Tratamiento numérico de las ecuaciones	35
3.2.1	Problema axisimétrico	38
3.2.2	Problema no axisimétrico	41

3.3	Bifurcación primaria en sistemas con simetría $O(2)$ y $SO(2)$	49
3.4	Resultados	52
3.4.1	Convección columnar	52
3.4.2	Celdas de convección tridimensionales	57
3.4.3	Transición de celdas tridimensionales a columnas	59
3.5	Discusión	66
4	Estabilidad del estado conductivo: condiciones de contorno de adherencia	69
4.1	Ecuaciones de convección linealizadas	71
4.2	Tratamiento numérico de las ecuaciones	72
4.2.1	Problema axisimétrico	72
4.2.2	Problema no axisimétrico	80
4.3	Resultados	86
4.3.1	Rotaciones bajas	87
4.3.2	Rotaciones altas	91
4.3.3	Condiciones de contorno de Robin	100
4.4	Discusión	102
5	Cálculo de las columnas no lineales mediante técnicas de continuación	105
5.1	Formulación en potenciales de las ecuaciones no lineales	107
5.2	Discretización de las ecuaciones	110
5.3	Método de continuación	112
5.4	Bifurcación secundaria en sistemas con simetría $O(2)$	115
5.5	Continuación respecto al número de Rayleigh: $\sigma = 0.025$	116
5.5.1	Convección columnar no lineal y bifurcación secundaria	116
5.5.2	Bifurcaciones estacionarias para $\eta = 0.3$	124
5.6	Discusión	131
6	Integración temporal de las ecuaciones	135
6.1	Método de integración temporal en variables primitivas	135
6.1.1	Formulación	136

6.1.2	Discretización temporal	137
6.1.3	Tratamiento de la presión: método de paso fraccionario	139
6.1.4	Discretización espacial	141
6.2	Número de Nusselt	146
6.3	Resultados: $\sigma = 0.025$	148
6.3.1	Bifurcación secundaria	148
6.3.2	Transición a un régimen caótico	152
6.4	Discusión	158
7	Conclusiones	161
A	Funciones de Harris y Reid	165
B	Derivación de funciones desarrolladas en polinomios de Chebyshev	167
B.1	Matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$	167
B.2	Valor de una función en el contorno que satisface condiciones de Neumann	169

Capítulo 1

Introducción

1.1 Convección térmica en sistemas en rotación

Una de las motivaciones de la investigación en convección térmica en sistemas en rotación es su aplicación en los campos de la Astrofísica y la Geofísica. En las atmósferas de planetas mayores como Júpiter, Saturno y Urano, y en estrellas como el Sol, se producen movimientos de fluidos a gran escala originados por diferencias de temperatura y dominados por la profunda influencia de la rotación en el sistema convectivo. También en el interior de la Tierra, en su núcleo líquido formado principalmente por hierro, tiene lugar una circulación convectiva importante. Estos flujos tienen en común, por una parte, la geometría esférica y por otra, el papel determinante jugado por la fuerza de Coriolis, que hace que la dinámica en sistemas en rotación difiera sorprendentemente de la observada en sistemas sin rotación.

El estudio global de este tipo de fenómenos, utilizando modelos que reproduzcan de forma realista las condiciones del sistema físico, resulta inabordable. La geometría esférica supone una de las principales dificultades, debido a que el ángulo formado por la gravedad radial y el vector de rotación cambia con la latitud. Esto hace que las simulaciones numéricas tridimensionales en capas esféricas sean extremadamente costosas y dificulta la obtención de soluciones analíticas lineales y débilmente no lineales. Los trabajos teóricos existentes, entre los que destacan los realizados por Zhang, Busse y colaboradores (e.g. Zhang & Busse, 1987; Zhang, 1992; Zhang & Gubbins,

1993), estudian solamente algunos aspectos puntuales de la convección en geometría esférica. A las dificultades teóricas hay que añadir la imposibilidad de reproducir en el laboratorio un sistema esférico en el que la gravedad sea radial, pues la gravedad local siempre estará presente. De hecho, la única forma de conseguir una gravedad radial utilizando esta geometría consiste en realizar el experimento en el espacio, en condiciones de ingravidez. Por ejemplo, Hart *et al.* (1986) realizaron experimentos en el entorno de microgravedad del *Spacelab3*, que viajó en la lanzadera *Challenger* en 1985. Utilizaron una celda semiesférica en rotación en la que impusieron gradientes de temperatura radiales y latitudinales. La gravedad radial se modeló estableciendo un campo eléctrico fuerte entre la superficie interior y exterior de la celda que producía una fuerza de polarización radial dependiente de la temperatura. El orden de magnitud de la gravedad electrostática que se puede conseguir de esta forma es pequeño (típicamente, una décima parte de la gravedad terrestre), por lo que el experimento se ha de llevar a cabo en condiciones de microgravedad para que no sea contaminado por la gravedad real. Los resultados experimentales obtenidos muestran una gran variedad de estructuras convectivas, observadas al variar los gradientes de temperatura radial y latitudinal, la rotación y la intensidad de la gravedad electrostática. De todas formas, se puede considerar que la investigación en capas esféricas está aún en sus comienzos. Por este motivo, resulta útil considerar modelos simplificados, en los que se utilicen geometrías alternativas, que permitan estudiar la influencia de un conjunto determinado de procesos físicos de forma aislada y que a su vez permitan profundizar en el conocimiento de la naturaleza de las transiciones que se producen en los sistemas con rotación.

La dinámica en los sistemas convectivos en rotación está básicamente influenciada por la orientación relativa de los vectores gradiente de temperatura, rotación y gravedad. Entre las geometrías más estudiadas en el caso de que los tres vectores tengan la misma dirección, destacan los trabajos realizados en capa plana y en cilindros verticales, ambos con calentamiento inferior. Los sistemas resultantes modelan la convección en latitudes altas de sistemas esféricos.

El problema clásico de Rayleigh-Bénard, en el que se generan estructuras convectivas imponiendo un gradiente de temperatura vertical, ha proporcionado la base de muchos estudios de convección con rotación. En la mayoría de los estudios teóricos se considera el sistema ilimitado en el plano horizontal (Chandrasekhar, 1961), lo que facilita la resolución del problema lineal. Cuando la diferencia de temperaturas, habitualmente medida con el número adimensional de Rayleigh, sobrepasa un cierto valor crítico se inicia la convección en el sistema. En ausencia de rotación este valor crítico es independiente de las propiedades del fluido (número de Prandtl, σ), y sólo depen-

de de las condiciones de contorno. La inestabilidad dominante es estacionaria, y da lugar a una estructura de rollos cuando las condiciones de contorno en las superficies horizontales son idénticas y la convección es Boussinesq. El estudio de la estabilidad lineal de la solución primaria frente a perturbaciones bidimensionales y tridimensionales muestra que los rollos son inestables frente a distintos tipos de inestabilidades secundarias, que son o no dominantes dependiendo del valor de los parámetros, y cuyos límites de estabilidad están recogidos en un diagrama que se conoce como *Busse's balloon* (Busse & Clever, 1979; Clever & Busse, 1974).

Si se añade una rotación uniforme alrededor de un eje vertical, el sistema resultante se ha utilizado como modelo de la convección en las regiones polares de capas esféricas. En este caso, el número de Rayleigh crítico es función de la rotación y del número de Prandtl. Uno de los estudios teóricos pioneros en este sistema fue el análisis lineal de estabilidad realizado por Chandrasekhar con diferentes condiciones de contorno (Chandrasekhar, 1953, 1961). La teoría lineal predice que para valores del número de Prandtl superiores a un valor crítico ($\sigma > 0.68$), la inestabilidad es estacionaria. Sin embargo, si el número de Prandtl es inferior, la inestabilidad puede dar lugar a movimientos estacionarios u oscilatorios, dependiendo del valor del número de Prandtl y de la rotación. La convección oscilatoria es dominante si la rotación es lo suficientemente elevada.

Veronis (1959, 1968) y Somerville (1971) iniciaron los estudios teóricos de la convección para flujos de amplitud finita considerando movimientos bidimensionales débilmente no lineales, con condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos y de adherencia, respectivamente. La teoría lineal parece no ser suficiente para describir el comportamiento del sistema para valores pequeños del número de Prandtl. Veronis (1968), considerando un fluido de $\sigma = 0.2$, mostró que existe convección estacionaria subcrítica para valores intermedios de la rotación. También cuando las condiciones de contorno son de adherencia, se obtienen soluciones estacionarias para valores del número de Rayleigh inferiores al número de Rayleigh crítico correspondiente a la inestabilidad oscilatoria siempre que $\sigma < 1$ (Clever & Busse, 1979). Este fenómeno tiende a desaparecer para valores elevados de la rotación.

Küppers & Lortz (1969); Küppers (1970) usaron ecuaciones de amplitud para estudiar la estabilidad de los rollos convectivos no lineales a medida que la rotación aumenta. Inicialmente, consideraron el caso $\sigma = \infty$ y esfuerzos cortantes nulos en las superficies horizontales (Küppers & Lortz, 1969). Cuando la rotación es baja, encontraron que para valores ligeramente supercríticos del número de Rayleigh únicamente es estable la solución bidimensional en forma de rollos. A medida que la rotación au-

menta, los rollos seleccionados en el inicio de la convección pierden estabilidad frente a un segundo conjunto de rollos girados aproximadamente 58° respecto a la estructura inicial en la dirección de la rotación, que a su vez resultan ser inestables frente a otro conjunto girado otros 58° . Por tanto, para rotaciones suficientemente elevadas no hay rollos convectivos estables cerca del inicio de la convección y se produce directamente una transición del estado conductivo a un estado convectivo con dependencia temporal. Este mecanismo de inestabilidad se conoce como inestabilidad de Küppers y Lortz. Esencialmente, se obtienen los mismos resultados cuando se generaliza a valores finitos del número de Prandtl y superficies adherentes. Este análisis se extendió a un régimen más alejado de la transición en los trabajos de Clever & Busse (1979) y Busse & Heikes (1980), que confirman los resultados obtenidos por Küppers & Lortz para amplitudes pequeñas.

Respecto a los trabajos experimentales en este sistema son, en general, menos abundantes que los teóricos y en ellos se utiliza un cilindro o una caja rectangular de parámetro de forma grande como aproximación al caso indefinido. En la década de los 50, se confirmaron experimentalmente de forma cualitativa los resultados de la teoría lineal. Por ejemplo, en los experimentos de Fultz *et al.* (1955); Nakagawa & Frenzen (1955) realizados con agua y considerando la superficie superior libre, se observaron las inestabilidades estacionaria y oscilatoria del flujo conductivo, aunque los valores críticos del número de Rayleigh obtenidos para la inestabilidad oscilatoria eran superiores a los teóricos. Posteriormente, se realizaron estudios detallados para determinar el inicio de la convección con las dos superficies rígidas, configuración que resulta más adecuada para comparar con los resultados teóricos. Rossby (1969) hizo un estudio exhaustivo para el caso del agua ($\sigma = 6.7$) y del mercurio ($\sigma = 0.025$) y Krishnamurti (1971) utilizó agua y aceite de silicona ($\sigma = 100$). Estos trabajos, que están entre los trabajos experimentales más relevantes en sistemas en rotación, muestran que se produce una transición de un flujo estacionario a uno con dependencia temporal a medida que se incrementa la rotación, siendo los valores críticos de la rotación del mismo orden que los predichos por Küppers (1970). Este sistema ha continuado recibiendo atención experimental y, entre alguno de los experimentos realizados más recientemente, cabe mencionar los trabajos de Lucas *et al.* (1983) y Pfothenauer *et al.* (1984) con ${}^4\text{He}$ ($0.49 < \sigma < 0.76$).

En el caso de un recipiente cilíndrico, en el que la invarianza por rotación se mantiene, la solución en el inicio de la convección continúa siendo estacionaria si no hay rotación, aunque su forma puede diferir bastante de la estructura en rollos paralelos característica del caso indefinido, pues es una solución tridimensional que debe ajustarse al contorno (Jones & Moore, 1979; Buell & Catton, 1983; Marqués *et al.*, 1993).

Goldstein y colaboradores estudiaron teóricamente la convección en un cilindro en rotación motivados por los resultados experimentales de Zhong *et al.* (1991, 1993) con agua, que mostraban que el estado conductivo pierde estabilidad frente a un estado no axisimétrico espiral que precesiona en sentido contrario a la rotación. Los resultados del análisis de estabilidad lineal de Goldstein *et al.* (1993, 1994) pusieron de manifiesto la existencia de dos tipos distintos de modos de inestabilidad. Por una parte, los modos de precesión lenta o *body modes*, que pertenecen al tipo de soluciones convectivas presentes en el cilindro sin rotación y se caracterizan por tener una amplitud grande en el interior del dominio. Estas soluciones, si rompen la axisimetría, viajan en la dirección azimutal, aunque su precesión es lenta. El segundo tipo de modos, los modos de precesión rápida o *wall modes*, están confinados a la vecindad de las paredes laterales, son siempre no axisimétricos, y su precesión es mucho mayor. Para valores moderados o grandes del número de Prandtl, el sistema selecciona los modos lentos de convección para rotaciones suficientemente bajas y parámetros de forma (relación entre anchura y altura del cilindro) grandes. Al aumentar la rotación, pasan a ser dominantes los modos rápidos. Los modos de precesión lenta proporcionan la conexión entre los resultados para capa finita e indefinida, pues al hacer tender el parámetro de forma a infinito se recupera el valor del número de Rayleigh crítico obtenido por Chandrasekhar (1961) y la frecuencia tiende a cero. Para valores pequeños del número de Prandtl, el número de modos relevantes es mucho mayor y el análisis es más complicado. Básicamente, el tipo de modos es el mismo, pero el rango de parámetros en que domina uno u otro está peor delimitado, debido a la interacción complicada entre modos marginalmente estables.

Entre los sistemas convectivos en los que los vectores gradiente de temperatura, rotación y gravedad no tienen la misma dirección, ha recibido una gran atención la convección térmica originada por un calentamiento radial en un anillo cilíndrico en rotación uniforme alrededor de su eje. Los trabajos en los que se estudian diferentes aspectos de la dinámica generada por un gradiente de temperatura desestabilizador perpendicular a la rotación son numerosos, y se pueden agrupar atendiendo a la dirección del vector gravedad. Si la gravedad actúa en dirección ortogonal al gradiente de temperatura (antiparalela al vector de rotación), el sistema admite un estado básico axisimétrico denominado *viento térmico*, mientras que si la gravedad es paralela al gradiente de temperatura, la dinámica que se observa se origina por inestabilidades de un *estado conductivo*, en el que el fluido está en reposo y el calor se transporta exclusivamente por conducción térmica. Estas dos situaciones se conocen como *baroclínica* y *barotrópica*, respectivamente.

El problema *baroclínico* ha permitido entender la dinámica de las ondas baroclínicas que se producen en las atmósferas para latitudes medias. Estas perturbaciones se encuentran entre las componentes más energéticas de la circulación atmosférica, por lo que es necesario conocerlas detalladamente para predecir el comportamiento atmosférico. Aunque los primeros intentos de modelar en el laboratorio la influencia de la rotación en la convección utilizando un gradiente de temperatura horizontal se remontan al siglo pasado, el inicio de estudios experimentales regulares en este tipo de sistemas se debe a Hide. Estos estudios fueron continuados en numerosos trabajos por Hide y sus discípulos y por Fultz y colaboradores (Hide, 1953; Fultz, 1961; Hide, 1958; Hide & Mason, 1975). Un anillo cilíndrico calentado horizontalmente y con gravedad vertical exhibe una gran variedad de regímenes convectivos, que se pueden agrupar en axisimétricos y no axisimétricos. Los flujos axisimétricos consisten básicamente en movimientos laminares estacionarios, en los que se produce una circulación concentrada en las capas límite. Respecto a los flujos no axisimétricos, pueden ser regulares espacialmente –ondas estacionarias, regímenes en los que se producen vacilaciones espaciales, en la amplitud,...– o irregulares. Los estudios experimentales de Hide & Mason (1975), con la superficie superior libre, o de Fein & Pfeffer (1976) y Read *et al.* (1992), con superficies adherentes, se concentran en regímenes altamente no lineales o caóticos y en ellos se describen distintos tipos de flujos convectivos.

La mayoría de los trabajos teóricos, que intentan reproducir la variada dinámica observada en el anillo en rotación (e.g. Hignett *et al.*, 1985), se concentran en modelos matemáticos lineales y débilmente no lineales basados en la teoría cuasigeostrófica. Los análisis de estabilidad lineal determinan las condiciones bajo las que es seleccionado un régimen axisimétrico y muestran que aparecen ondas baroclínicas tras una inestabilidad de este estado axisimétrico. La teoría débilmente no lineal se centra en situaciones ligeramente supercríticas, cercanas al inicio de la inestabilidad, en las que uno o dos modos son linealmente inestables. En distintos estudios se ha considerado la saturación de las ondas baroclínicas inestables para dar lugar a estados estacionarios o a estados vacilantes periódicamente (Hart, 1979). Algunos análisis posteriores muestran que estados con una estructura espacial muy sencilla pueden sufrir transiciones a regímenes caóticos (Gibbon & McGuinness, 1980; Pedlosky & Frenzen, 1980; Brindley & Moroz, 1980).

1.2 Presentación del trabajo. Objetivos

En el presente trabajo se pretende estudiar la dinámica de un fluido Boussinesq confinado en un anillo cilíndrico, en rotación alrededor de su eje de simetría, calentado por su pared interior y sometido a la acción de un campo gravitatorio radial dirigido hacia el eje del cilindro, mediante simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes. Para inducir una inestabilidad térmica en el sistema es necesario mantener el cilindro interior a una temperatura superior a la del cilindro exterior, puesto que la fuerza gravitatoria está dirigida hacia el eje del anillo. El sistema resultante, que es un ejemplo de problema *barotrópico*, pues no existe componente de la gravedad perpendicular al gradiente de temperatura, constituye un modelo simple de la convección en regiones ecuatoriales de atmósferas planetarias y estelares.

El problema *barotrópico* ha sido mucho menos estudiado desde el punto de vista experimental que el caso *baroclínico*. Entre los estudios en este tipo de sistemas, cabe destacar el trabajo teórico y experimental realizado por Busse y colaboradores en un anillo cilíndrico en rotación con calentamiento radial. Busse (1970, 1986) estudió el inicio de la convección en un anillo en el que la fuerza centrífuga emula la gravedad radial, considerando el límite de rotaciones altas y utilizando la aproximación de entrehierro del anillo estrecho. Esta aproximación permite desprestigiar los efectos de la curvatura y utilizar coordenadas cartesianas. En estas condiciones, cuando las tapas del anillo son planas y se considera que en ellas los esfuerzos cortantes son nulos, la convección tiene lugar en forma de *columnas de Taylor* estacionarias paralelas al eje de rotación. En estas soluciones se produce un balance geostrofico básico en el que el término de Coriolis es compensado por un gradiente de presiones adecuado. Cuando se consideran las tapas del anillo inclinadas, estas columnas bidimensionales viajan en la dirección azimutal con una velocidad angular constante respecto a las paredes laterales. En Busse (1986) estos modos convectivos se denominan *ondas térmicas de Rossby* porque en el límite en el que la relación de radios del anillo tiende a uno y el número de Prandtl tiende a cero, se recupera para ellos la relación de dispersión de las ondas de Rossby. En trabajos posteriores se estudian diferentes aspectos de la dinámica de estas soluciones (Or & Busse, 1987; Schnaubelt & Busse, 1992; Herrmann & Busse, 1997).

Por otra parte, el problema de la convección en un anillo cilíndrico se puede abordar desde el punto de vista más general de la teoría de bifurcaciones en sistemas en rotación. Basándose en las simetrías del sistema, Knobloch (1994, 1996) estudió el tipo de bifurcaciones que se pueden producir en sistemas en rotación, comparándolas

con las bifurcaciones que se encuentran en sistemas sin rotación. En ese trabajo, se hace hincapié en los comportamientos genéricos que se observan en estos sistemas, determinados en gran medida por sus simetrías, que afectan tanto a la estabilidad lineal, como a la evolución no lineal de las inestabilidades, y no se consideran los mecanismos físicos específicos que dan lugar a estas inestabilidades. Cuando se introduce la rotación en un sistema, se modifican sus simetrías. Así, una esfera, un cilindro o un anillo cilíndrico en rotación con las mismas condiciones de contorno son invariantes bajo rotaciones alrededor del eje de rotación (simetría $SO(2)$) y bajo reflexiones respecto al plano ecuatorial (simetría Z_2), pero un cilindro o un anillo cilíndrico en reposo tienen una simetría adicional, la de reflexión respecto a planos verticales que contienen al eje, por lo que su grupo de simetría es $O(2)$, y una esfera en reposo tiene dos simetrías de reflexión adicionales (simetría $O(3)$). Knobloch (1994) muestra que siempre que en un modelo con simetría $SO(2)$ aparece una estructura que rompe la simetría de rotación, esta estructura viaja en la dirección azimutal. Es decir, la presencia de estructuras con precesión (ondas viajeras), tan abundantes en sistemas en rotación, se asocia a sistemas con simetría $SO(2)$. Además, se advierte que utilizar modelos simplificados de sistemas en rotación, basados en aproximaciones válidas localmente, que no compartan las simetrías del problema original puede dar lugar a comportamientos cualitativamente diferentes en ambos sistemas. Desde este punto de vista, la suposición de entrehierro estrecho frecuentemente utilizada para aproximar la convección en un anillo, introduce simetrías adicionales en el problema (simetría de reflexión respecto al plano medio de la capa), lo que podría impedir la existencia de algún otro tipo de solución que sí estuviera presente en el problema general.

Con la resolución del problema de la convección térmica en un anillo cilíndrico en rotación se pretende contribuir al estudio del origen de las estructuras con precesión en los sistemas en rotación. Para ello, se parte de una formulación general del problema en la que se introducen elementos que no se habían considerado en trabajos anteriores. En primer lugar, se trabaja con coordenadas cilíndricas, lo que permite tener en cuenta la curvatura de la capa. La rotación no se restringe a valores elevados, con el objetivo de analizar su influencia en el tipo de estructuras seleccionadas por el sistema. Además, se consideran diferentes condiciones de contorno para la velocidad en las tapas del anillo, para estudiar la influencia de las condiciones de contorno en el tipo de inestabilidad primaria.

La memoria se ha estructurado en siete capítulos. Tras este primer capítulo introductorio, en el capítulo 2, se describe el sistema que se ha estudiado a lo largo de todo el trabajo, se formula el problema, escribiendo las ecuaciones de Navier-Stokes y especificando las condiciones de contorno que se verifican, y se introduce la formu-

lación alternativa de las ecuaciones mediante potenciales de la velocidad que se ha utilizado en la mayor parte del análisis numérico realizado.

Los capítulos 3 y 4 están dedicados a analizar la estabilidad lineal del estado conductivo cuando se consideran esfuerzos cortantes nulos y adherencia en las tapas del anillo. En el primer caso, además de las columnas de Taylor, se identifica un nuevo tipo de modo convectivo, celdas tridimensionales con precesión, y se estudia cuál es el modo seleccionado en el inicio de la convección en función del valor de los distintos parámetros del sistema. Las soluciones que se obtienen en el segundo caso, al cambiar las condiciones de contorno, son totalmente diferentes y se han agrupado en las que corresponden a rotaciones altas y a bajas. Se han incluido también los resultados obtenidos cuando se generalizan las condiciones de contorno para la velocidad.

En los capítulos 5 y 6 se analiza la estabilidad lineal del flujo primario que resulta ser dominante para rotaciones altas, las columnas de Taylor, considerando perturbaciones independientes de la coordenada axial. En el primero de ellos, se utilizan técnicas de continuación que permiten seguir ramas de soluciones estacionarias y detectar las bifurcaciones que se producen con elevada precisión. En el segundo, se integran temporalmente las ecuaciones de evolución, se obtienen soluciones estables con dependencia temporal y se analiza la secuencia de bifurcaciones que se produce hasta que se alcanza un régimen caótico. Finalmente, en el capítulo 7 se resume el trabajo realizado y se exponen las conclusiones generales.

Capítulo 2

Ecuaciones de convección y su tratamiento analítico

2.1 Inestabilidad térmica

El objetivo del presente trabajo es estudiar la dinámica de un fluido Boussinesq confinado en un anillo cilíndrico, en rotación alrededor de su eje de simetría, calentado por su pared interior y sometido a la acción de un campo gravitatorio radial dirigido hacia el eje del cilindro (figura 2.1). Se definen dos números adimensionales, η y β , para caracterizar la geometría del anillo. $\eta = r_1/r_2$ es la relación entre el radio interior, r_1 , y el exterior, r_2 , del anillo o *relación de radios (radius ratio)* y $\beta = L/d$ es la relación entre la altura, L , y la anchura, $d = r_2 - r_1$, del anillo o *parámetro de forma (inverse aspect ratio)*. Para inducir una inestabilidad térmica en el sistema es necesario mantener el cilindro interior a una temperatura superior a la del cilindro exterior, pues la fuerza gravitatoria está dirigida hacia el eje del anillo, $\mathbf{F} = -\rho g \hat{\mathbf{e}}_r$. El gradiente de temperatura originado por esta diferencia de temperaturas entre las paredes del anillo causa una estratificación en el fluido, que es potencialmente inestable en presencia del campo gravitatorio.

El empuje de Arquímedes es la fuerza que origina la convección en el sistema. Su magnitud viene determinada por la diferencia de temperaturas entre los cilindros. Cuando esta diferencia es pequeña, al igual que en el problema de Rayleigh-Bénard

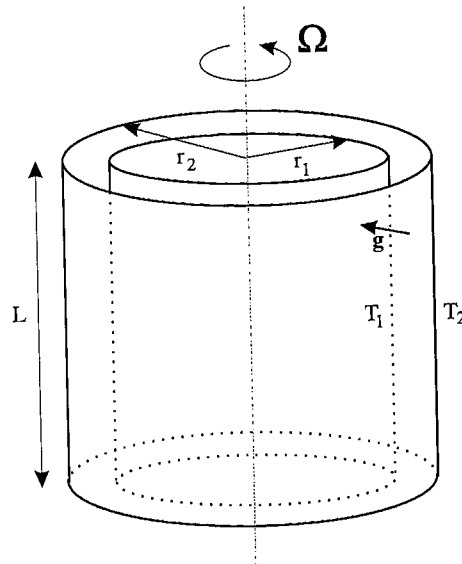


Figura 2.1: Representación del sistema. El cilindro interior se mantiene a una temperatura superior al exterior, $T_1 > T_2$. $\beta = L/d$ (parámetro de forma) y $\eta = r_1/r_2$ (relación de radios) son los números adimensionales que caracterizan el anillo.

plano, el fluido permanece en un estado estable en el que el calor introducido en el sistema a través del cilindro interior se transporta radialmente por conducción térmica sin que haya movimientos macroscópicos del fluido. Este estado conductivo se desestabiliza a un estado convectivo a partir de un valor crítico del gradiente de temperatura. El origen de la inestabilidad se puede entender fácilmente si se considera una fluctuación en la temperatura del estado conductivo. Debido a la expansión térmica del fluido, la diferencia de temperaturas origina una estratificación en la que el fluido más caliente y de menor densidad está situado en la parte interna del anillo. Si por cualquier perturbación interna un elemento de fluido se desplaza ligeramente hacia el exterior del anillo, su temperatura pasa a ser mayor que la del entorno, por lo que experimenta una fuerza en sentido opuesto al campo gravitatorio debida al empuje de Arquímedes. El elemento de fluido se desplaza hacia zonas de menor temperatura, en las que la densidad del fluido a su alrededor es todavía mayor, por lo que el desplazamiento inicial se ve amplificado por el gradiente de densidades. Sin embargo, la fricción debida a la viscosidad del fluido, que se opone al movimiento del fluido, y la difusión calorífica molecular, que tiende a anular las diferencias de temperatura,

son dos procesos disipativos que tienden a mantener el fluido en su estado inicial de reposo. La inestabilidad sólo tiene lugar si el elemento de fluido es acelerado lo suficiente para superar estos mecanismos estabilizadores. Al introducir la rotación en el anillo, un nuevo mecanismo que, en principio, tiene también un efecto estabilizador es la fuerza de Coriolis, pues tiende a desviar el movimiento del elemento de fluido en la dirección perpendicular, debilitando el empuje de Arquímedes. En resumen, la diferencia de temperaturas es el parámetro de control natural de la inestabilidad térmica y debe superar un valor crítico para que se inicie la convección en el sistema.

2.2 Formulación de las ecuaciones y condiciones de contorno

A partir de las leyes de la mecánica y la termodinámica se obtienen las ecuaciones que rigen el comportamiento de un fluido en movimiento. Así, la segunda ley de Newton para un fluido newtoniano (el tensor de tensiones es proporcional al tensor velocidad de deformación, lo que equivale a suponer una viscosidad independiente de la velocidad), en el que tanto la conductividad térmica, k , como la viscosidad dinámica, μ , son constantes (independientes del punto), y en el que se considera nula la viscosidad de volumen, da lugar a la ecuación de Navier-Stokes. Imponiendo la conservación de la masa se obtiene la ecuación de continuidad y la ecuación de propagación del calor procede de la conservación de la energía. Estas ecuaciones se escriben

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (2.1a)$$

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.1b)$$

$$\frac{dT}{dt} = \frac{T\alpha}{\rho c_p} \frac{dp}{dt} + \frac{1}{\rho c_p} [\tau : e + k \nabla^2 T], \quad (2.1c)$$

donde \mathbf{u} es el campo de velocidades, ρ la densidad a temperatura T , p la presión, \mathbf{F} incluye todas las fuerzas de volumen no inerciales que actúan sobre el fluido, que en este caso se reducen a la gravitatoria, $\mathbf{F} = -\rho g \hat{\mathbf{e}}_r$, c_p , que también se ha tomado constante, es el calor específico por unidad de masa a presión constante, α el coeficiente de expansión térmica del fluido y $\tau_{ij} = 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})$, siendo $e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ el tensor velocidad de deformación. La doble contracción de los tensores τ y e , indicada por $\tau : e \equiv \sum_{i,j} \tau_{ij} e_{ij}$, vale $\tau : e = 2\mu[e : e - \frac{1}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})^2]$. El operador $\frac{d}{dt}$ es la derivada

material de la magnitud sobre la que actúa y se define

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla).$$

Cuando se hace girar el recipiente que contiene el fluido con velocidad angular constante Ω , las ecuaciones que describen el movimiento observado desde el sistema en rotación han de incluir los términos de la aceleración centrífuga y de Coriolis, asociados al uso de un sistema de referencia no inercial. La ecuación de Navier-Stokes modificada queda

$$\rho (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \rho g \hat{\mathbf{e}}_r - \rho \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) - \rho 2\Omega \times \mathbf{u}. \quad (2.2a)$$

La densidad se supondrá independiente de la temperatura salvo en los términos de la fuerza gravitatoria y de la fuerza centrífuga, en los que se considera lineal con la temperatura

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)) = \rho_0 + \Delta\rho,$$

siendo ρ_0 la densidad a la temperatura de referencia T_0 . Es decir, se trabajará con las ecuaciones escritas en la aproximación de Boussinesq. Esta aproximación se basa en el hecho de que el coeficiente de expansión térmica α es, para la mayoría de gases y líquidos, muy pequeño ($\alpha \approx 10^{-3}, 10^{-4}$), por lo que se cumple $\Delta\rho \ll \rho_0$. Con esta suposición, por un lado la ecuación de continuidad se reduce a imponer divergencia del campo de velocidades nula, y por otro lado, en la ecuación de la temperatura se pueden despreciar los términos $\frac{T\alpha}{\rho c_p} \frac{dp}{dt}$ y $2\mu e : e$ frente al término advectivo $\mathbf{u} \cdot \nabla T$.

Como es habitual, la presión hidrostática se puede incluir dentro del término del gradiente de presiones. Tan sólo es importante para la dinámica la fuerza gravitatoria asociada a variaciones de la densidad del fluido. De manera análoga, la parte de la fuerza centrífuga independiente de la temperatura no juega un papel relevante en este problema, pues se puede escribir en forma de un gradiente, $-\rho_0 \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r}) = \nabla(1/2\rho_0(\Omega \times \mathbf{r})^2)$, e incluir en el término de la presión. Esta componente de la fuerza centrífuga es compensada por un gradiente de presiones radial, que estará siempre presente en cualquier régimen del fluido, pero que no influye en la dinámica del sistema. El término de las fuerzas de volumen asociadas a variaciones de la fuerza centrífuga con la densidad, $\rho_0 \alpha(T - T_0) \Omega \times (\Omega \times \mathbf{r})$, sí está presente, pues al depender de T no se puede incluir en el gradiente de presiones, pudiendo ser importante. Sin embargo, si el coeficiente de expansión térmica del fluido es pequeño, el término de la fuerza de Coriolis asociado a variaciones de la densidad con la temperatura, $\rho_0 \alpha(T -$

$T_0)2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$, es despreciable frente al término de la fuerza de Coriolis independiente de la temperatura, $-\rho_0 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}$. A diferencia de la fuerza centrífuga, este último término no se puede escribir en forma de un gradiente, por lo que siempre figura explícitamente en las ecuaciones.

Por tanto, las ecuaciones (2.1) que se verifican en el recinto $\Omega = \{r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq z \leq L\}$ escritas en la aproximación de Boussinesq, respecto a un sistema de referencia en rotación, se expresan

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} - \alpha \Delta T \mathbf{g}_e - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.3a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.3b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T, \quad (2.3c)$$

donde $\nu = \mu/\rho$ es la viscosidad cinemática, $\kappa = k/\rho c_p$ es la difusividad térmica y $\Delta T = T - T_0$. $\mathbf{g}_e = \mathbf{g} - \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})$ es una gravedad efectiva radial que incluye la parte de la fuerza centrífuga debida a variaciones de la densidad con la temperatura, que se opone al empuje de Arquímedes por lo que tiene un efecto estabilizador sobre el sistema. Puesto que con el modelo considerado en este trabajo se pretenden estudiar las inestabilidades térmicas producidas por el calentamiento interno del anillo para rotaciones moderadas, se han despreciado las variaciones de la fuerza centrífuga con la posición. Para ello, se ha considerado una fuerza centrífuga promediada en la dirección radial, $\mathbf{g}_e \approx -g_e \hat{\mathbf{e}}_r$, siendo $g_e = g - \langle |\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})| \rangle$ constante, por lo que se supone $|g| \gg |\boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r})|$.

Para tener en cuenta la curvatura del anillo se ha trabajado con coordenadas cilíndricas y se ha utilizado la notación u , v y w para las componentes radial, azimutal y vertical del campo de velocidades, $\mathbf{u} = (u, v, w)$.

El problema se completa especificando las condiciones de contorno que verifican la velocidad y la temperatura en la superficie lateral y en las fronteras superior e inferior del anillo. Se ha usado la notación $\partial\Omega_r = \{r = r_1, r_2; 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq z \leq L\}$ y $\partial\Omega_z = \{r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \theta < 2\pi; z = 0, L\}$ para designar el contorno lateral y las superficies horizontales. En el contorno lateral se han considerado condiciones de adherencia para la velocidad, es decir, flujo nulo a través del contorno, $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \Rightarrow u = 0$, y velocidad tangencial relativa entre el contorno y el fluido en contacto con las paredes nula, $\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{e}}_r = 0 \Rightarrow v = w = 0$, además de considerar la temperatura

constante (paredes perfectamente conductoras)

$$\begin{aligned} u = v = w &= 0 \\ T(r_1) &= T_1 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \\ T(r_2) &= T_2 \end{aligned} \quad (2.4)$$

Las tapas del anillo se han supuesto adiabáticas (flujo de calor nulo) y para la velocidad, se han considerado tanto condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos, (2.5), como de adherencia, (2.6), que también se denominarán a lo largo del trabajo condiciones de contorno *libres* (*stress-free*) y *rígidas* (*no-slip*), respectivamente,

$$\partial_z u = \partial_z v = w = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.5)$$

$$u = v = w = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (2.6)$$

Para obtener las condiciones de contorno libres, (2.5), se ha de imponer que el flujo a través del contorno sea nulo, $\mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{e}}_z = 0 \Rightarrow w = 0$, y que no haya esfuerzos cortantes en el contorno. El tensor de tensiones vale $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \tau_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\mu(e_{ij} - \frac{1}{3}e_{ii}\delta_{ij})$, donde los elementos de la diagonal son los esfuerzos normales y los restantes son los tangenciales. En coordenadas cilíndricas el tensor velocidad de deformación e_{ij} vale

$$\begin{aligned} e_{r\theta} = e_{\theta r} &= \frac{r}{2}\partial_r\left(\frac{v}{r}\right) + \frac{1}{2r}\partial_\theta u, \\ e_{\theta z} = e_{z\theta} &= \frac{1}{2r}\partial_\theta w + \frac{1}{2}\partial_z v, \\ e_{zr} = e_{rz} &= \frac{1}{2}\partial_z u + \frac{1}{2}\partial_r w. \end{aligned}$$

Los esfuerzos cortantes en las tapas del anillo vienen dados por e_{zr} y $e_{z\theta}$. Como $w = 0$ en ellas, para que sean nulos se debe cumplir $\partial_z u = 0$ y $\partial_z v = 0$, por lo que se obtiene (2.5). Por otro lado, las condiciones de contorno (2.6) para la velocidad son las mismas que las usadas en el contorno lateral.

2.3 Estado conductivo. Adimensionalización

Las ecuaciones (2.3) admiten una solución básica estacionaria en la que el calor se transporta radialmente por conducción térmica y no hay movimiento relativo del fluido respecto al sistema de referencia en rotación. Esta solución básica es el estado conductivo, en el que la temperatura, solución de la ecuación $\nabla^2 T = 0$, y el campo

de velocidades vienen dados por

$$\mathbf{u}_c = 0, \quad (2.7a)$$

$$T_c(r) = T_1 + (T_1 - T_2) \frac{\ln r/r_1}{\ln \eta}. \quad (2.7b)$$

Este estado es estable si la diferencia de temperatura entre las paredes es pequeña y se inestabiliza a una estructura convectiva a partir de un cierto valor de la diferencia de temperatura. Para estudiar la estabilidad del estado conductivo, se reescribirán las ecuaciones (2.3) considerando la temperatura y la velocidad como una desviación del perfil conductivo, $T(r, \theta, z, t) = T_c(r) + T'(r, \theta, z, t)$ y $\mathbf{u}(r, \theta, z, t) = \mathbf{u}'(r, \theta, z, t)$. Procediendo de esta forma, se obtiene un sistema de ecuaciones en el que aparecen como variables las fluctuaciones del estado conductivo, T' y \mathbf{u}' , en lugar de la temperatura total, T , y de \mathbf{u} , aunque en el caso de velocidad los dos campos coinciden. En la ecuación de Navier-Stokes, (2.8a), la temperatura correspondiente al estado conductivo en el término de la fuerza gravitatoria menos la temperatura de referencia T_0 se ha escrito en forma de un gradiente,

$$\alpha \Delta T g_e \hat{\mathbf{e}}_r = \alpha g_e (T_c + T' - T_0) \hat{\mathbf{e}}_r = \alpha T' g_e \hat{\mathbf{e}}_r + \alpha g_e \nabla A,$$

siendo A una función de r , y se ha incluido en el término del gradiente de presiones. Las ecuaciones (2.3) se expresan

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \alpha T g_e \hat{\mathbf{e}}_r - 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}, \quad (2.8a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.8b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T - u \frac{(T_1 - T_2)}{r \ln \eta}, \quad (2.8c)$$

donde se ha usado $T \equiv T'$ y $\mathbf{u} \equiv \mathbf{u}'$ para representar la fluctuación de la temperatura y la velocidad respecto al estado conductivo.

Para adimensionalizar las ecuaciones se ha usado como unidad de longitud la separación entre el cilindro interior y exterior, $d = r_2 - r_1$, como unidad de tiempo d^2/κ (escala de tiempo térmica) y como escala de temperatura la diferencia de temperatura entre las dos paredes, $T_1 - T_2$. Con esta adimensionalización las ecuaciones (2.8) se escriben

$$\sigma^{-1} (\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Ra} T \hat{\mathbf{e}}_r - \text{Ta}^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}, \quad (2.9a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.9b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = -\frac{u}{r \ln \eta} + \nabla^2 T. \quad (2.9c)$$

En estas ecuaciones aparecen los números adimensionales de Rayleigh, Ra , que es una medida de la diferencia de temperatura entre las paredes del anillo, pues relaciona la intensidad del mecanismo que impulsa la convección con los procesos disipativos que tienen lugar en el sistema, de Prandtl, σ , que depende de las propiedades moleculares del fluido y relaciona las escalas de tiempo de los dos procesos difusivos que intervienen en convección, difusión de calor y de momento, y de Taylor, Ta , que especifica la rotación del cilindro, definidos como

$$\begin{aligned} Ra &= \frac{\alpha(T_1 - T_2)g_e d^3}{\kappa\nu}, \\ \sigma &= \frac{\nu}{\kappa}, \\ Ta &= 4\Omega_\nu^2, \end{aligned}$$

donde $\Omega_\nu = \frac{\Omega}{\nu/d^2}$ es la rotación viscosa. Puesto que los resultados que se presentarán a lo largo del trabajo se han expresado en función del número de Taylor o en función de la rotación viscosa, para simplificar la notación, a partir de ahora $\Omega \equiv \Omega_\nu$ representará la rotación viscosa en lugar de la rotación física (sin adimensionalizar). Las condiciones de contorno en la frontera lateral, (2.4), y en la frontera horizontal, (2.5) y (2.6), se siguen expresando del mismo modo

$$u = v = w = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (2.10)$$

$$\partial_z u = \partial_z v = w = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.11)$$

$$u = v = w = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.12)$$

pero ahora el dominio se especifica en coordenadas adimensionales,

$$\begin{aligned} \partial\Omega_r &= \left\{ r = \frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta}; 0 \leq \theta < 2\pi; 0 \leq z \leq \beta \right\}, \\ \partial\Omega_z &= \left\{ \frac{\eta}{1-\eta} \leq r \leq \frac{1}{1-\eta}; 0 \leq \theta < 2\pi; z = 0, \beta \right\}. \end{aligned}$$

Los números de Rayleigh, Ra , Prandtl, σ , y Taylor, Ta , junto con los números adimensionales que caracterizan el anillo cilíndrico, el parámetro de forma, β , y la relación de radios, η , constituyen el conjunto de parámetros adimensionales que rigen la dinámica del sistema. La estabilidad lineal del estado conductivo vendrá determinada por las ecuaciones (2.9) una vez linealizadas.

2.4 Simetrías de las ecuaciones

El estudio de las bifurcaciones que tienen lugar en un sistema se puede abordar de un modo general teniendo en cuenta sus simetrías, sin estudiar específicamente los mecanismos físicos que dan lugar a las inestabilidades. Las simetrías de un sistema afectan tanto a la naturaleza del problema lineal como a las inestabilidades posteriores, y se espera que el comportamiento dinámico de sistemas que comparten las mismas simetrías sea cualitativamente similar. El carácter de las bifurcaciones primaria y secundaria, condicionado por las simetrías del problema, se analizará más adelante en las secciones 3.3 y 5.4, respectivamente.

Dependiendo de si el sistema físico está en rotación o en reposo, sus simetrías, ésto es, el conjunto de transformaciones por las cuales el sistema de ecuaciones que describen el movimiento del fluido es invariante, cambian. En el caso de que el anillo esté en rotación, y con las condiciones de contorno que se están considerando, el sistema tiene una simetría de rotación y otra de reflexión.

i) Simetría de rotación alrededor del eje del anillo.

$$R_{\theta_0} : (r, \theta, z) \rightarrow (r, \theta + \theta_0, z) \quad (u, v, w, T, p) \rightarrow (u, v, w, T, p)$$

Se dice que el sistema tiene la simetría R_{θ_0} , o que es invariante respecto a rotaciones alrededor del eje, cuando se cumple que si $(u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z), T(r, \theta, z), p(r, \theta, z))$ es solución de las ecuaciones también lo es $(u(r, \theta + \theta_0, z), v(r, \theta + \theta_0, z), w(r, \theta + \theta_0, z), T(r, \theta + \theta_0, z), p(r, \theta + \theta_0, z))$.

ii) Simetría de reflexión respecto al plano ecuatorial.

$$R_3 : (r, \theta, z) \rightarrow (r, \theta, -z) \quad (u, v, w, T, p) \rightarrow (u, v, -w, T, p)$$

El sistema de ecuaciones (2.9)–(2.12) es invariante respecto a R_3 si se cumple que si $(u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z), T(r, \theta, z), p(r, \theta, z))$ es solución de las ecuaciones también lo es $(u(r, \theta, -z), v(r, \theta, -z), -w(r, \theta, -z), T(r, \theta, -z), p(r, \theta, -z))$.

Cuando el anillo no tiene rotación, además de estas dos simetrías el sistema tiene una simetría de reflexión adicional.

iii) Reflexión respecto a planos verticales que pasan por el eje del cilindro.

$$R_1 : (r, \theta, z) \rightarrow (r, -\theta, z) \quad (u, v, w, T, p) \rightarrow (u, -v, w, T, p)$$

El sistema de ecuaciones es invariante respecto a R_1 si se cumple que si $(u(r, \theta, z), v(r, \theta, z), w(r, \theta, z), T(r, \theta, z), p(r, \theta, z))$ es solución de las ecuaciones también lo es $(u(r, -\theta, z), -v(r, -\theta, z), w(r, -\theta, z), T(r, -\theta, z), p(r, -\theta, z))$. El término de Coriolis rompe esta simetría de reflexión en el caso del anillo en rotación.

Las simetrías se clasifican en función de los grupos de simetría que generan. El grupo de simetría formado por todas las rotaciones de la forma R_{θ_0} se denomina $SO(2)$, $SO(2) = \{I, R_{\theta_0}\}$. La reflexión respecto al plano ecuatorial, R_3 , genera el grupo de simetría Z_2 , $Z_2 = \{I, R_3\}$. Por tanto, el grupo de simetría de un anillo cilíndrico en rotación es $SO(2) \times Z_2$. El grupo de simetría generado por las rotaciones alrededor del eje del anillo, R_{θ_0} , y las reflexiones respecto a planos verticales que contengan al eje, R_1 , recibe el nombre de $O(2)$, $O(2) = \{I, R_{\theta_0}, R_1\}$. El grupo de simetría del anillo cilíndrico en reposo es, por tanto, $O(2) \times Z_2$.

Además de las simetrías del sistema de ecuaciones se pueden analizar las simetrías de las soluciones de este sistema. Una solución tiene una determinada simetría cuando es invariante respecto a la correspondiente transformación. Así, se dice que una cierta solución de las ecuaciones tiene la simetría de rotación R_{θ_0} si se cumple

$$\mathbf{u}(r, \theta + \theta_0, z) = \mathbf{u}(r, \theta, z), \quad T(r, \theta + \theta_0, z) = T(r, \theta, z), \quad p(r, \theta + \theta_0, z) = p(r, \theta, z).$$

Las soluciones de un sistema que tiene una determinada simetría no deben necesariamente compartir dicha simetría. Las inestabilidades que dan lugar a soluciones que rompen la simetría de un sistema reciben el nombre de *inestabilidades con rotura de simetría* y están asociadas a la formación de estructuras. Un estado de equilibrio del sistema que comparta todas las simetrías del sistema se dice que es una *solución trivial*. En convección térmica el estado conductivo es una solución trivial en este sentido. Así, la solución (2.7) es invariante respecto a rotaciones, reflexiones respecto a planos verticales y reflexiones respecto al plano ecuatorial. A medida que se varía un parámetro de control, por ejemplo el número de Rayleigh, el estado trivial puede desestabilizarse a un estado que mantenga las simetrías del sistema o bien a un estado de menor simetría. Cuando la bifurcación da lugar a un estado de menor simetría, se pueden usar los elementos del grupo de simetría para generar soluciones distintas pero equivalentes y las bifurcaciones se producen por valores propios múltiples.

2.5 Teorema de Taylor–Proudman

Los fluidos en rotación exhiben una gran variedad de fenómenos que no se observan cuando están en reposo. La causa de las diferencias entre la dinámica de fluidos en rotación y en reposo es, en muchas ocasiones, la fuerza de Coriolis. Resulta útil examinar lo que sucede en el caso extremo en el que la fuerza de Coriolis domine completamente el movimiento del fluido. Cuando se desprecian los efectos del término advectivo y de la fricción debida a la viscosidad y se consideran movimientos estacionarios en un fluido en ausencia de fuerzas externas, se obtiene el teorema de Taylor–Proudman. Las sorprendentes predicciones que de él se desprenden fueron observadas experimentalmente por el propio G.I. Taylor, cuyos experimentos en los años 20 (Taylor, 1921, 1923) demostraron la validez del teorema, que ya había sido enunciado independientemente, aunque de una forma menos explícita, por Proudman (Proudman, 1916). A continuación, se enunciará brevemente este teorema y se comentará alguna de las características de los flujos dominados por la fuerza de Coriolis, pues es de esperar que la rigidez vertical que manifiestan estos flujos se observe también en las estructuras convectivas que aparezcan en el problema del anillo cilíndrico cuando las velocidades de rotación sean altas. Se pueden encontrar análisis más detallados en la literatura (Chandrasekhar, 1961; Tritton, 1988; Pedlosky, 1987, entre otros).

Considerando que la acción tanto de la advección como de la viscosidad es pequeña frente al efecto de la fuerza de Coriolis, se cumple

$$\begin{aligned} |\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}| &\ll |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}|, \\ |\nu \nabla^2 \mathbf{u}| &\ll |\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}|. \end{aligned}$$

Los números adimensionales de Rossby y Ekman indican la importancia relativa de estas dos fuerzas frente a la de Coriolis. Se definen introduciendo escalas de longitud, L , y velocidad, U , del movimiento y deben ser pequeños en este régimen

$$\text{Ro} = \frac{U}{\Omega L} \ll 1, \quad \text{E} = \frac{\nu}{\Omega L^2} \ll 1.$$

En este caso, la ecuación del movimiento se puede aproximar por

$$2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p. \quad (2.13)$$

Los flujos en los que se produce este balance entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presiones se conocen como *geostrofos*. De esta ecuación se extrae una propiedad

importante de este tipo de flujos. Al ser la fuerza de Coriolis perpendicular a la dirección del flujo también lo es el gradiente de presiones. Es decir, las partículas no se mueven de zonas de altas a bajas presiones, como sucede en sistemas sin rotación, sino que se mueven a lo largo de trayectorias en las que la presión se mantiene constante.

Tomando el rotacional de la ecuación (2.13) se obtiene

$$\nabla \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}) = 0,$$

que se puede expresar

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{u} \cdot \nabla \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{u}(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) - \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{u}) = 0.$$

Como la rotación es independiente de la posición, $\nabla \boldsymbol{\Omega} = 0$ y $\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = 0$, y puesto que sigue siendo válida la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$, que no se ve alterada por la rotación, la expresión anterior se reduce a

$$\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0.$$

Si se escoge la rotación en la dirección del eje z ,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0 \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (2.14)$$

Es decir, no se produce variación del campo de velocidades en la dirección paralela al eje de rotación. Este resultado se conoce como teorema de Taylor–Proudman. El campo de velocidades horizontal tiene esfuerzos nulos en la dirección vertical, de manera que todas las partículas situadas sobre la misma vertical se mueven igual. Como consecuencia de (2.14), si se trabaja en un sistema en el que se verifique $w = 0$ para algún valor de z , w se debe anular en todo el dominio, por lo que el flujo será enteramente bidimensional.

Lógicamente, el teorema de Taylor–Proudman sólo es una aproximación a lo que sucede en el límite de rotaciones altas, en el que son despreciables los demás efectos, pero proporciona una indicación del tipo de flujos que se espera encontrar cerca de este límite.

2.6 Tratamiento de las ecuaciones: potenciales de la velocidad

Para resolver el problema de estabilidad lineal del estado conductivo, en lugar de trabajar con las ecuaciones escritas en variables primitivas (\mathbf{u}, p, T) , se ha usado una

formulación basada en potenciales de la velocidad desarrollada por Marqués (Marqués, 1990), que consiste en eliminar el término de la presión, para la cual no existe condición de contorno explícita, de forma que se satisfaga $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$. Como contrapartida, se produce un aumento en el orden de las ecuaciones y un incremento y complicación de las condiciones de contorno, al acoplar diferentes variables. Si se escribe el campo de velocidades de la forma

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\Psi' \hat{\mathbf{e}}_z) + \nabla \times \nabla \times (\Phi' \hat{\mathbf{e}}_z),$$

donde Φ' y Ψ' son dos potenciales escalares de la velocidad, queda garantizada la condición de incompresibilidad de un fluido y se elimina la presión de las ecuaciones. La ecuación de Navier-Stokes se sustituye por las componentes z de su rotacional y doble rotacional. Las condiciones para la existencia de los potenciales Ψ' y Φ' , junto con la equivalencia entre la formulación de la ecuación de Navier-Stokes en variables primitivas y en función de los potenciales escalares, que puede requerir condiciones de contorno adicionales para el campo de velocidades además de las físicas, están demostradas en los trabajos de Marqués (1990) y Sánchez (1994). Si el dominio no es simplemente conexo, como es el caso del anillo cilíndrico, la equivalencia entre las dos formulaciones requiere tres condiciones de contorno adicionales, dos de las cuales son integrales. Estas condiciones integrales se reducen a anular el promedio azimutal de las componentes θ de la ecuación de Navier-Stokes y de su rotacional (Sánchez, 1994), es decir, si Ψ' y Φ' se desarrollan en serie de Fourier en la dirección periódica del anillo, equivalen a escribir las ecuaciones que han de cumplir el modo cero de la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes y el modo cero de su rotacional. Ello equivale a tomar un campo de velocidades

$$\mathbf{u} = f \hat{\mathbf{e}}_\theta + \nabla \times (g \hat{\mathbf{e}}_\theta + \Psi \hat{\mathbf{e}}_z) + \nabla \times \nabla \times (\Phi \hat{\mathbf{e}}_z), \quad (2.15)$$

en el que $\Phi(r, \theta, z, t)$ y $\Psi(r, \theta, z, t)$ son los potenciales de la velocidad tras haber extraído sus modos independientes de θ , mientras que $g(r, z, t)$ y $f(r, z, t)$ están relacionados con sus modos cero correspondientes. En concreto, si se define el operador de proyección P_θ ,

$$P_\theta F = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(r, \theta, z, t) d\theta, \quad (2.16)$$

que promedia la función F en dirección azimutal (extrae el modo cero de un desarrollo en serie de Fourier), los potenciales satisfacen

$$\begin{aligned}\Phi &= (1 - P_\theta)\Phi', \\ \Psi &= (1 - P_\theta)\Psi', \\ f &= -\partial_r P_\theta \Psi', \\ g &= -\partial_r P_\theta \Phi' .\end{aligned}$$

Una vez introducidos los potenciales escalares, la ecuación de Navier-Stokes, escrita de forma abreviada $\mathbf{N} = -\nabla p$, donde \mathbf{N} incluye todos los términos excepto el de la presión, equivale a considerar las cuatro ecuaciones siguientes para los potenciales en el dominio Ω ,

$$P_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \mathbf{N} = 0, \quad (2.17)$$

$$P_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0, \quad (2.18)$$

$$(1 - P_\theta) \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0, \quad (2.19)$$

$$(1 - P_\theta) \hat{\mathbf{e}}_z \cdot (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{N})) = 0, \quad (2.20)$$

junto con la condición de contorno adicional restante $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0$ en el contorno lateral, $\partial\Omega_r$, (Sánchez, 1994). De este modo se dispone de dos ecuaciones, (2.17) y (2.18), de orden 2 en la dirección vertical y 4 en la radial para g y f y otras dos ecuaciones, (2.19) y (2.20), de orden 4 en la dirección vertical y 6 en la radial para Φ y Ψ . Como la ecuación (2.20) es de orden 6 y sólo se dispone de 5 condiciones de contorno, hay un grado de libertad o *gauge* que hay que escoger para determinar completamente los potenciales.

Esta formulación de la ecuación de Navier-Stokes en términos de los potenciales de la velocidad se ha usado anteriormente, con notable éxito, en la resolución de diversos problemas de dinámica de fluidos en geometría cilíndrica. Por ejemplo, en el trabajo de Sánchez (1994) se aborda numéricamente el estudio de distintos aspectos del problema de Taylor–Couette. Dentro de la convección térmica, Net (1991) resuelve el problema de un cilindro calentado por su parte inferior, usando una formulación en potenciales de la velocidad similar a la de este trabajo.

2.6.1 Ecuaciones de los potenciales en función de las componentes de la velocidad y la vorticidad

Para obtener las ecuaciones que satisfacen los potenciales escalares f , g , Φ y Ψ se escribirán, en primer lugar, las ecuaciones (2.17)–(2.20) en función de las componentes de la velocidad, \mathbf{u} , y la vorticidad, $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$, en coordenadas cilíndricas. Se usarán, para ello, las siguientes identidades vectoriales

$$\nabla \times (\nabla a) = 0, \quad (\text{I})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) = 0, \quad (\text{II})$$

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = (\nabla \times \mathbf{v}) \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\nabla v^2, \quad (\text{III})$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{v}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{v}) - \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (\text{IV})$$

donde \mathbf{v} es una magnitud vectorial y a una escalar. Puesto que se han de desarrollar las ecuaciones (2.17)–(2.20) resulta útil escribir los diferentes operadores que intervienen en coordenadas cilíndricas,

$$\begin{aligned} \nabla a &= \partial_r a \hat{\mathbf{e}}_r + r^{-1} \partial_\theta a \hat{\mathbf{e}}_\theta + \partial_z a \hat{\mathbf{e}}_z, \\ \nabla^2 a &= r^{-1} \partial_r (r \partial_r a) + r^{-2} \partial_\theta^2 a + \partial_z^2 a, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} &= r^{-1} \partial_r (r v_r) + r^{-1} \partial_\theta v_\theta + \partial_z v_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{v}]_r &= r^{-1} \partial_\theta v_z - \partial_z v_\theta, & [\nabla^2 \mathbf{v}]_r &= \nabla^2 v_r - 2r^{-2} \partial_\theta v_\theta - r^{-2} v_r, \\ [\nabla \times \mathbf{v}]_\theta &= \partial_z v_r - \partial_r v_z, & [\nabla^2 \mathbf{v}]_\theta &= \nabla^2 v_\theta + 2r^{-2} \partial_\theta v_r - r^{-2} v_\theta, \\ [\nabla \times \mathbf{v}]_z &= r^{-1} \partial_r (r v_\theta) - r^{-1} \partial_\theta v_r, & [\nabla^2 \mathbf{v}]_z &= \nabla^2 v_z. \end{aligned}$$

La definición (2.15) permite expresar las componentes de la velocidad, \mathbf{u} , y la vorticidad, $\boldsymbol{\omega}$, en función de los potenciales escalares

$$\begin{cases} u = -\partial_z g + \partial_{rz}^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi \\ v = f + \frac{1}{r} \partial_{\theta z}^2 \Phi - \partial_r \Psi \\ w = D_+ g - \nabla_h^2 \Phi \end{cases} \quad \begin{cases} \omega_r = -\partial_z f + \partial_{rz}^2 \Psi - \frac{1}{r} \partial_\theta \nabla^2 \Phi \\ \omega_\theta = -\nabla_-^2 g + \frac{1}{r} \partial_{\theta z}^2 \Psi + \partial_r \nabla^2 \Phi \\ \omega_z = D_+ f - \nabla_h^2 \Psi \end{cases} \quad (2.21)$$

donde ∇_h^2 es el operador laplaciana horizontal, $\nabla_h^2 = \nabla^2 - \partial_{zz}^2$, y D_+ y ∇_-^2 son los operadores diferenciales definidos como $D_+ = \frac{1}{r} \partial_r (r \)$ y $\nabla_-^2 = \nabla^2 - 1/r^2$, con $\partial_\theta = 0$.

• Rotacional de la ecuación de Navier-Stokes, $\nabla \times \mathbf{N} = 0$

En primer lugar, se calculará el rotacional de la ecuación de Navier-Stokes, (2.9a). Teniendo en cuenta la identidad (I), el término de la presión desaparece, por lo que queda

$$\sigma^{-1}(\partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})) = \nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) + \nabla \times (\text{Ra} T \hat{\mathbf{e}}_r) - \nabla \times (\text{Ta}^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}). \quad (2.22)$$

Usando la relación (III), el término advectivo se puede escribir como

$$\nabla \times ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) + \nabla \times \nabla(1/2u^2),$$

donde el último término se anula por (I). Para simplificar el término de la fuerza viscosa se aplica la identidad vectorial (IV) dos veces. Se cumple

$$\nabla^2 \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}),$$

que, debido al carácter solenoidal del campo de velocidades, se reduce a

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \boldsymbol{\omega}. \quad (2.23)$$

Aplicando de nuevo (IV) se obtiene

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = -\nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) = -\nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + \nabla^2 \boldsymbol{\omega},$$

donde $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} = 0$ por (II), por lo que queda

$$\nabla \times (\nabla^2 \mathbf{u}) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega}. \quad (2.24)$$

Finalmente, evaluando los términos del gradiente de temperatura y de la fuerza de Coriolis la ecuación (2.22) se expresa

$$\sigma^{-1}(\partial_t \boldsymbol{\omega} + \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})) = \nabla^2 \boldsymbol{\omega} + \text{Ra}(\partial_z T \hat{\mathbf{e}}_\theta - \frac{1}{r} \partial_\theta T \hat{\mathbf{e}}_z) + \text{Ta}^{1/2} \partial_z \mathbf{u}. \quad (2.25)$$

En la formulación del problema intervienen el promedio azimutal de la componente θ de esta ecuación y su componente z tras sustraer el modo independiente de θ . Así, el promedio de la proyección del rotacional de la ecuación de Navier-Stokes en la dirección azimutal queda

$$\sigma^{-1} \partial_t P_\theta \omega_\theta = \nabla_-^2 P_\theta \omega_\theta + \text{Ra} \partial_z P_\theta T + \text{Ta}^{1/2} \partial_z P_\theta v - \sigma^{-1} P_\theta [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_\theta, \quad (2.26)$$

donde, el término de la viscosidad se ha obtenido promediando azimutalmente la expresión para la componente θ de $\nabla^2 \omega$ y teniendo en cuenta que $P_\theta[\nabla_-^2 \omega_\theta] = \nabla_-^2(P_\theta \omega_\theta)$:

$$P_\theta [\nabla^2 \omega]_\theta = P_\theta (\nabla_-^2 \omega_\theta + 2r^{-2} \partial_\theta \omega_r) = \nabla_-^2 P_\theta \omega_\theta.$$

La proyección en la dirección vertical de la ecuación (2.25) extrayendo el modo cero azimutal da lugar a

$$\sigma^{-1} \partial_t (1 - P_\theta) \omega_z = (1 - P_\theta) \left(\nabla^2 \omega_z - \text{Ra} \frac{1}{r} \partial_\theta T + \text{Ta}^{1/2} \partial_z w - \sigma^{-1} [\nabla \times (\omega \times \mathbf{u})]_z \right). \quad (2.27)$$

• **Doble rotacional de la ecuación de Navier-Stokes, $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{N}) = 0$**

En segundo lugar, se calculará el doble rotacional de la ecuación de Navier-Stokes (rotacional de la ecuación (2.25)). El rotacional de la vorticidad, teniendo en cuenta (2.23), se expresa

$$\nabla \times \omega = -\nabla^2 \mathbf{u},$$

y utilizando (2.24), el término de la fuerza viscosa queda

$$\nabla \times (\nabla^2 \omega) = -\nabla^2 (\nabla^2 \mathbf{u}).$$

Evaluando el término del gradiente de temperatura se llega a

$$\begin{aligned} -\sigma^{-1} \partial_t \nabla^2 \mathbf{u} = & -\nabla^2 \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Ra} \left\{ -(\partial_{zz}^2 T + \frac{1}{r^2} \partial_{\theta\theta}^2 T) \hat{\mathbf{e}}_r + \partial_\theta \left[\partial_r \left(\frac{1}{r} T \right) \right] \hat{\mathbf{e}}_\theta + \right. \\ & \left. + \partial_z D_+ T \hat{\mathbf{e}}_z \right\} + \text{Ta}^{1/2} \partial_z \omega - \sigma^{-1} [\nabla \times \nabla \times (\omega \times \mathbf{u})]. \quad (2.28) \end{aligned}$$

En el problema interviene la proyección de esta ecuación en la dirección vertical, que escrita para los modos no axisimétricos queda

$$\begin{aligned} \sigma^{-1} \partial_t \nabla^2 (1 - P_\theta) w = & (1 - P_\theta) \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \text{Ra} \partial_z D_+ T - \text{Ta}^{1/2} \partial_z \omega_z + \right. \\ & \left. + \sigma^{-1} [\nabla \times \nabla \times (\omega \times \mathbf{u})]_z \right). \quad (2.29) \end{aligned}$$

Por tanto, ya se pueden escribir las ecuaciones que sustituyen a la ecuación de Navier-Stokes en la formulación con potenciales escalares. En el problema de la estabilidad lineal del estado conductivo, los promedios azimutales de la componente θ de la ecuación de Navier-Stokes y de su rotacional proporcionan las dos ecuaciones del problema axisimétrico, mientras que las proyecciones en la dirección z de las ecuaciones del rotacional y doble rotacional de Navier-Stokes sin el modo cero constituyen las ecuaciones del problema no axisimétrico,

$$(i) P_\theta \mathbf{N}_\theta = 0 \iff$$

$$\sigma^{-1} \partial_t P_\theta v = -\partial_z P_\theta \omega_r + \partial_r P_\theta \omega_z - \text{Ta}^{1/2} P_\theta u - \sigma^{-1} P_\theta [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}]_\theta, \quad (2.30)$$

$$(ii) P_\theta (\nabla \times \mathbf{N})_\theta = 0 \iff$$

$$\sigma^{-1} \partial_t P_\theta \omega_\theta = \nabla^2 P_\theta \omega_\theta + \text{Ra} \partial_z P_\theta T + \text{Ta}^{1/2} \partial_z P_\theta v - \sigma^{-1} P_\theta [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_\theta, \quad (2.31)$$

$$(iii) (1 - P_\theta) (\nabla \times \mathbf{N})_z = 0 \iff$$

$$\sigma^{-1} \partial_t (1 - P_\theta) \omega_z = (1 - P_\theta) \left(\nabla^2 \omega_z - \text{Ra} \frac{1}{r} \partial_\theta T + \text{Ta}^{1/2} \partial_z w - \sigma^{-1} [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z \right), \quad (2.32)$$

$$(iv) (1 - P_\theta) (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{N}))_z = 0 \iff$$

$$\sigma^{-1} \partial_t \nabla^2 (1 - P_\theta) w = (1 - P_\theta) \left(\nabla^2 \nabla^2 w - \text{Ra} \partial_z D_+ T - \text{Ta}^{1/2} \partial_z \omega_z + \sigma^{-1} [\nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z \right). \quad (2.33)$$

Para obtener la primera ecuación se ha aplicado de nuevo la relación (III) en el término advectivo

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_\theta = [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}]_\theta + [\nabla(1/2u^2)]_\theta,$$

donde se cumple $[\nabla(1/2u^2)]_\theta = \frac{1}{r} \partial_\theta(1/2u^2) = 0$ en el problema axisimétrico. En el término de la fuerza viscosa se ha usado la relación (2.23).

2.6.2 Condiciones de contorno en función de las componentes de la velocidad y la vorticidad

Al igual que se ha hecho con las ecuaciones (2.17)–(2.20), hay que expresar las condiciones de contorno en función de las componentes de \mathbf{u} y $\boldsymbol{\omega}$. Las condiciones de contorno físicas, (2.10), (2.11) y (2.12), están ya escritas en función de las componentes de la velocidad, pero falta evaluar la condición de contorno adicional que hay que añadir en la superficie lateral,

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\nabla \times \mathbf{N}) = 0. \quad (2.34)$$

Para ello, se han escrito las componentes de la vorticidad en coordenadas cilíndricas

$$\boldsymbol{\omega} = \left(\frac{1}{r}\partial_\theta w - \partial_z v\right)\hat{\mathbf{e}}_r + (\partial_z u - \partial_r w)\hat{\mathbf{e}}_\theta + \left(\frac{1}{r}\partial_r(rv) - \frac{1}{r}\partial_\theta u\right)\hat{\mathbf{e}}_z.$$

Esta expresión se simplifica en el contorno lateral, al tener en cuenta las condiciones de contorno, (2.10), que se han impuesto. Se cumple $u = v = w = 0$, por lo que la componente radial de la vorticidad se anula y la vorticidad en las paredes laterales se reduce a

$$\boldsymbol{\omega} = -\partial_r w \hat{\mathbf{e}}_\theta + \frac{1}{r}\partial_r(rv)\hat{\mathbf{e}}_z \quad \text{en } \partial\Omega_r.$$

La ecuación (2.25) es el punto de partida. Todos los términos a excepción de $[\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]_r$ se anulan. El primer término, $[\sigma^{-1}\partial_t \boldsymbol{\omega}]_r$, es nulo por ser cero ω_r . Del mismo modo $[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_r = 0$, pues

$$[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_r = \frac{1}{r}\partial_\theta(\omega_r v - \omega_\theta u) + \partial_z(\omega_r w - \omega_z u)$$

se anula en el contorno lateral, por ser nulo el campo de velocidades sobre esta superficie,

$$[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_r = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r.$$

Por el mismo motivo se anula el siguiente término, $[\text{Ta}^{1/2}\partial_z \mathbf{u}]_r = 0$. El término $[\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]_r$, usando la expresión para la componente r de $\nabla^2 \boldsymbol{\omega}$ y teniendo en cuenta que $D_+ \partial_r = \partial_r D_+ + r^{-2}$ se reduce a

$$\begin{aligned} [\nabla^2 \boldsymbol{\omega}]_r &= D_+ \partial_r \omega_r + r^{-2} \partial_{\theta\theta}^2 \omega_r + \partial_{zz}^2 \omega_r - 2r^{-2} \partial_\theta \omega_\theta - r^{-2} \omega_r = \\ &= \partial_r D_+ \omega_r + r^{-2} \partial_{\theta\theta}^2 \omega_r + \partial_{zz}^2 \omega_r - 2r^{-2} \partial_\theta \omega_\theta, \end{aligned}$$

y considerando que ω_r se anula en el contorno lateral se llega a

$$[\nabla^2 \omega]_r = \partial_r D_+ \omega_r - 2r^{-2} \partial_\theta \omega_\theta.$$

Por tanto, las condiciones de contorno en las tapas y en el contorno lateral quedan

$$\partial_z u = \partial_z v = w = \partial_z T = 0 \quad (\text{libres}) \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.35)$$

$$u = v = w = \partial_z T = 0 \quad (\text{rígidas}) \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.36)$$

$$u = v = w = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (2.37)$$

$$2r^{-2} \partial_\theta \omega_\theta - \partial_r D_+ \omega_r = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r. \quad (2.38)$$

2.6.3 Expresión de las ecuaciones en función de los potenciales

Una vez se han escrito las ecuaciones, (2.30)–(2.33), y las condiciones de contorno, (2.35)–(2.38), en función de las componentes de la velocidad y la vorticidad, ya se pueden expresar, junto con la ecuación de la temperatura (2.9c), en función de los potenciales.

Sustituyendo la expresión de la velocidad y la vorticidad en función de los potenciales, (2.21), en las ecuaciones (2.30) y (2.31) y en la ecuación de la temperatura (2.9c) promediada azimutalmente se obtiene

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla_-^2) f = \text{Ta}^{1/2} \partial_z g - \sigma^{-1} \Upsilon, \quad (2.39a)$$

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla_-^2) \nabla_-^2 g = -\text{Ra} \partial_z P_\theta T - \text{Ta}^{1/2} \partial_z f + \sigma^{-1} \Lambda, \quad (2.39b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2) P_\theta T = \frac{1}{r \ln \eta} \partial_z g - \Theta_0. \quad (2.39c)$$

en función de los términos no lineales Υ , Λ y Θ_0 :

$$\Upsilon = P_\theta [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}]_\theta,$$

$$\Lambda = P_\theta [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_\theta,$$

$$\Theta_0 = P_\theta [\mathbf{u} \cdot \nabla T].$$

Procediendo de la misma forma, si se sustituye (2.21) en las ecuaciones (2.32) y (2.33) y en la ecuación de la temperatura (2.9c) tras haber extraído el modo cero se

obtiene

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2)\nabla_h^2\Psi = \frac{\text{Ra}}{r}\partial_\theta(1 - P_\theta)T + \text{Ta}^{1/2}\partial_z\nabla_h^2\Phi + \sigma^{-1}\Gamma, \quad (2.40a)$$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2)\nabla^2\nabla_h^2\Phi = \text{Ra}\partial_z D_+(1 - P_\theta)T - \text{Ta}^{1/2}\partial_z\nabla_h^2\Psi - \sigma^{-1}\Pi, \quad (2.40b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2)(1 - P_\theta)T = -\frac{1}{r\ln\eta}(\partial_{rz}^2\Phi + \frac{1}{r}\partial_\theta\Psi) - \Theta, \quad (2.40c)$$

donde $\nabla_h^2 = \nabla^2 - \partial_{zz}^2$ es el operador laplaciana horizontal y Γ , Π y Θ son los términos no lineales correspondientes

$$\begin{aligned} \Gamma &= (1 - P_\theta)[\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z, \\ \Pi &= (1 - P_\theta)[\nabla \times \nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z, \\ \Theta &= (1 - P_\theta)[\mathbf{u} \cdot \nabla T]. \end{aligned}$$

2.6.4 Expresión de las condiciones de contorno en función de los potenciales. Elección del *gauge*

Finalmente, se formularán las condiciones de contorno necesarias para la determinación completa de Φ , Ψ , f y g . En el trabajo de Marqués (1990) se demuestra que en el caso general, el potencial Φ queda determinado excepto por una función armónica horizontal, y conocido Φ , el potencial Ψ está determinado excepto en una función de z . Hay por tanto un grado de libertad, o *gauge*, en el sistema. La elección del *gauge* constituye la sexta condición de contorno, necesaria para integrar las ecuaciones de convección en función de los potenciales.

El *gauge* escogido en este trabajo es $\Phi = 0$ en las paredes laterales. Como se detalla en el trabajo de Net (1991), con esta elección las condiciones de contorno laterales, (2.37), y en las tapas, (2.35) y (2.36), en función de los potenciales escalares se escriben

$$\partial_{rz}^2\Phi + \frac{1}{r}\partial_\theta\Psi = \partial_r\Psi = \nabla_h^2\Phi = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (2.41)$$

$$\Phi = \partial_{zz}^2\Phi = \partial_z\Psi = \partial_z T = 0 \quad (\text{libres}) \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.42)$$

$$\partial_z\Phi = \Psi = \nabla_h^2\Phi = \partial_z T = 0 \quad (\text{rígidas}) \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.43)$$

a las que hay que añadir el *gauge* $\Phi = 0$ y la condición de contorno adicional, (2.38), en $\partial\Omega_r$. Como se puede ver, la primera ecuación acopla las variables Φ y Ψ . Con

esta elección del *gauge* la condición de contorno $\nabla_h^2 \Phi = 0$ en $\partial\Omega_z$ se puede integrar y sustituir por $\Phi = 0$.

Sustituyendo la expresión de ω_θ y ω_r en función de los potenciales, teniendo en cuenta el resto de condiciones de contorno y agrupando términos, la condición de contorno adicional (2.38) en el problema no axisimétrico se escribe

$$r\partial_{rz}^2 \nabla_h^2 \Psi - \partial_\theta \nabla_h^2 \nabla^2 \Phi = 0. \quad (2.44)$$

Así pues, también esta ecuación acopla las variables Φ y Ψ en el contorno.

Las condiciones de contorno correspondientes a f y g quedan

$$g = \partial_r g = f = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (2.45)$$

$$g = \partial_{zz}^2 g = \partial_z f = \partial_z T = 0 \quad (\text{libres}) \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (2.46)$$

$$g = \partial_z g = f = \partial_z T = 0 \quad (\text{rígidas}) \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (2.47)$$

En la expresión de estas condiciones de contorno, se ha escogido $g = 0$ en el contorno lateral, pues se ha sustituido la condición original obtenida de (2.21), $\partial_z g = 0$ en $\partial\Omega_r$, $\Rightarrow g = cte$ en $\partial\Omega_r$, por $g = 0$. Esta elección implica que $g = 0$ en las tapas del anillo en el problema rígido, pues $D_+ g = 0$ en $\partial\Omega_z \Rightarrow g = cte$ en $\partial\Omega_z$, pero como $g = 0$ en $\partial\Omega_r$, g se debe anular también en $\partial\Omega_z$.

Capítulo 3

Estabilidad del estado conductivo: condiciones de contorno libres

Las condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos en las tapas del anillo admiten como solución una estructura estacionaria en forma de columnas bidimensionales paralelas al eje de rotación. La existencia de este modo bidimensional permite que, cuando la rotación es elevada, se satisfaga de forma exacta el teorema de Taylor–Proudman. Cuando esto sucede, el término de Coriolis es compensado por un gradiente de presión adecuado y el modo geostrófico resultante recibe el nombre de *columnas de Taylor*. Como se ha comentado en la introducción, este es el único modo convectivo que se había identificado en el anillo en rotación, en estudios previos en los que se consideraba el límite de rotaciones altas y se utilizaba la aproximación de capa plana (Busse, 1970, 1986). Sin embargo, una característica de los sistemas con simetría $SO(2)$, es la presencia de ondas viajeras en la dirección azimutal siempre que la solución bifurcada rompa la simetría de rotación (Knobloch, 1994, 1996). En este capítulo, se pretende investigar la naturaleza de los modos convectivos seleccionados en el inicio de la convección. Para ello, se analiza la estabilidad lineal del estado conductivo haciendo especial énfasis en los casos de rotaciones del sistema no muy elevadas, para evitar que el inicio de la convección sea en forma de columnas de Taylor, y relación entre radios moderada, para tener en cuenta los efectos de curvatura del anillo.

Se empezará describiendo el método espectral que se ha usado para la discretización de las ecuaciones. Las condiciones de contorno libres facilitan la resolución del problema, pues permiten desarrollar las variables en funciones trigonométricas que verifican las condiciones de contorno en la dirección vertical. Al ser posible aplicar un método de Galerkin usando como base las funciones trigonométricas, el problema se desacopla en la dirección vertical y se reduce a un problema de valores propios unidimensional en la dirección radial. Tras la descripción del método numérico, se tendrán en cuenta las simetrías del anillo para analizar el tipo de bifurcación primaria que puede tener lugar en el sistema. Finalmente, se hará un análisis detallado de las curvas de estabilidad marginal, es decir, del valor del número de Rayleigh para el que se inicia la convección en el sistema, y de la estructura convectiva seleccionada en función de los distintos parámetros que intervienen en la dinámica, el parámetro de forma, β , y la relación de radios, η , del anillo, el número de Prandtl y la rotación.

3.1 Ecuaciones de convección linealizadas

Para determinar la estabilidad lineal del estado conductivo, que como se ha visto es potencialmente inestable por estar sometido a la acción de un gradiente de temperatura en presencia de un campo gravitatorio (sección 2.1), hay que estudiar cuál es la reacción del sistema frente a las pequeñas fluctuaciones a las que cualquier sistema físico está sometido. Para ello, se supone que la perturbación de cada cantidad se puede descomponer en modos cuya dependencia temporal viene dada por $e^{\lambda t}$, siendo λ una constante en general compleja. Los valores de λ para cada modo se calculan a partir de las ecuaciones linealizadas. Si la parte real de λ es positiva para alguno de los modos, el flujo es inestable, pues una pequeña perturbación arbitraria del sistema crecería exponencialmente con el tiempo. Si todos los modos son amortiguados, el estado básico es estable. Los valores de los parámetros que separan los estados estables de los inestables definen la curva de *estabilidad marginal* del sistema.

Tal y como se ha dicho en el capítulo anterior, se ha trabajado con las ecuaciones linealizadas escritas en función de los potenciales escalares de la velocidad (2.15). Como el flujo básico es nulo, en el problema lineal no aparecen los términos no lineales, por lo que las ecuaciones (2.39)–(2.46) se desacoplan y se puede estudiar por separado el caso axisimétrico del no axisimétrico. Las ecuaciones (2.39) junto con las condiciones de contorno (2.45) y (2.46) constituyen el problema axisimétrico, mientras que las ecuaciones (2.40) con sus condiciones de contorno correspondientes, (2.41), (2.42) y (2.44), constituyen el caso general. Por tanto, para analizar la estabilidad del es-

tado conductivo hay que resolver estos dos sistemas de ecuaciones, de orden 4 y 6 respectivamente para la coordenada radial. Se expresan

a) AXISIMÉTRICO

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)f = \text{Ta}^{1/2}\partial_z g, \quad (3.1a)$$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)\nabla_-^2 g = -\text{Ra}\partial_z T - \text{Ta}^{1/2}\partial_z f, \quad (3.1b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2)T = \frac{1}{r \ln \eta} \partial_z g, \quad (3.1c)$$

$$g = \partial_r g = f = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (3.2)$$

$$g = \partial_{zz}^2 g = \partial_z f = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (3.3)$$

b) NO AXISIMÉTRICO

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2)\nabla_h^2 \Psi = \frac{\text{Ra}}{r} \partial_\theta T + \text{Ta}^{1/2} \partial_z \nabla_h^2 \Phi, \quad (3.4a)$$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2)\nabla^2 \nabla_h^2 \Phi = \text{Ra}\partial_z D_+ T - \text{Ta}^{1/2} \partial_z \nabla_h^2 \Psi, \quad (3.4b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2)T = -\frac{1}{r \ln \eta} \left(\partial_{rz}^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi \right), \quad (3.4c)$$

$$\partial_{rz}^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi = \partial_r \Psi = \Phi = \nabla_h^2 \Phi = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (3.5)$$

$$r \partial_{rz}^2 \nabla_h^2 \Psi - \partial_\theta \nabla_h^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (3.6)$$

$$\Phi = \partial_{zz}^2 \Phi = \partial_z \Psi = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (3.7)$$

La temperatura, T , en el problema axisimétrico sólo contiene el modo independiente de θ , mientras que en el problema no axisimétrico se ha extraído de T el modo cero.

3.2 Tratamiento numérico de las ecuaciones

Para resolver los sistemas de ecuaciones anteriores se han usado técnicas espectrales. En los métodos espectrales se utilizan unas funciones prueba como base para desarrollar la solución en serie truncada, y unas funciones test para minimizar el residuo respecto a una norma adecuada. Por residuo se entiende el error producido en

la ecuación diferencial cuando se utiliza un desarrollo en serie truncada en lugar de la solución exacta. La elección de las funciones test da lugar a tres de los esquemas espectrales más habituales, Galerkin, colocación y Tau. En el esquema de *Galerkin* las funciones test son las mismas que las funciones prueba, y estas funciones se caracterizan porque satisfacen las condiciones de contorno. La ecuación diferencial se fuerza imponiendo que la integral del residuo para cada función test sea cero. La aproximación de *Tau* es parecida a la de Galerkin, pero en este caso las funciones test no han de cumplir las condiciones de contorno. Al igual que en el método de Galerkin, para minimizar el residuo se impone que cumpla una condición de ortogonalidad respecto a cada una de las funciones test. En los métodos de *colocación* se requiere que la ecuación diferencial se cumpla exactamente en un malla de puntos, que se denominan *puntos de colocación*. En Gottlieb & Orszag (1977) se describen de forma detallada los distintos métodos espectrales y se analizan sus propiedades de convergencia y en Canuto *et al.* (1988) se estudia la aplicación de estos métodos a la dinámica de fluidos.

En los dos sistemas de ecuaciones anteriores, (3.1)–(3.3) y (3.4)–(3.7), es adecuado un método de Galerkin para el tratamiento de las ecuaciones en la dirección vertical, pues las funciones trigonométricas satisfacen directamente las condiciones de contorno en esta dirección. Al usar funciones trigonométricas como funciones prueba para desarrollar las perturbaciones y efectuar la proyección ortogonal del residuo, las ecuaciones se desacoplan para cada modo vertical, lo que facilita la resolución del problema. En el caso no axisimétrico, la dirección periódica se ha tratado introduciendo desarrollos en serie de Fourier para la dependencia azimutal de las perturbaciones. Por tanto, también la dirección azimutal queda desacoplada al proyectar las ecuaciones. Para la dirección radial, se ha escogido un método pseudoespectral de colocación en el que se usan polinomios de Chebyshev para desarrollar las perturbaciones. Cuando se trabaja con estos polinomios,

$$\mathcal{T}_l(x) = \cos(l \arccos(x)) \quad \text{con } x \in (-1, 1),$$

es conveniente trabajar con los puntos de colocación de Gauss-Lobatto

$$x_i = \cos \frac{\pi i}{L} \quad i = 0, \dots, L, \quad (3.8)$$

pues en estos puntos los polinomios de Chebyshev se reducen a $\mathcal{T}_l(x_i) = \cos \frac{l\pi i}{L}$, y por tanto la función prueba discretizada se expresa como una serie de cosenos, lo que permite utilizar métodos de transformada rápida. Ahora, es necesario imponer condiciones de contorno en los extremos del intervalo, $x = \pm 1$. Una forma eficiente de hacerlo, si se trabaja con las amplitudes del desarrollo en serie (como será en

este caso), es calcular previamente el valor de cada polinomio y sus derivadas en los extremos del intervalo (Gottlieb & Orszag, 1977),

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_l(\pm 1) &= (\pm 1)^l, \\ \partial_x \mathcal{T}_l(\pm 1) &= (\pm 1)^{(l+1)} l^2, \\ &\vdots \\ \partial_x^p \mathcal{T}_l(\pm 1) &= (\pm 1)^{l+p} \prod_{k=0}^{p-1} \frac{l^2 - k^2}{2k + 1}, \end{aligned} \quad (3.9)$$

con lo cual es fácil obtener una base de funciones, combinación de polinomios de Chebyshev, que cumpla las condiciones de contorno.

Como los polinomios de Chebyshev están definidos entre $x = -1$ y $x = +1$ es necesario un cambio de variables en la coordenada radial para que esté definida entre estos dos valores. Con $x = 2r - \delta$, donde $\delta = \frac{1+\eta}{1-\eta}$, $r \in (\frac{\eta}{1-\eta}, \frac{1}{1-\eta})$ pasa a ser $x \in (-1, 1)$. Los operadores diferenciales se escriben

$$\left. \begin{array}{l} \partial_r \rightarrow 2\partial_x \\ \partial_{rr}^2 \rightarrow 4\partial_{xx}^2 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \nabla_h^2 &= 4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \partial_x + \frac{1}{(x+\delta)^2} \partial_{\theta\theta}^2 \right] \\ \nabla^2 &= \nabla_h^2 + \partial_{zz}^2 \\ \nabla_{-h}^2 &= 4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \partial_x + \frac{1}{(x+\delta)^2} (\partial_{\theta\theta}^2 - 1) \right] \\ \nabla_-^2 &= \nabla_{-h}^2 + \partial_{zz}^2 \\ D_+ &= 2 \left[\partial_x + \frac{1}{(x+\delta)} \right] \end{aligned}$$

Como ya se ha dicho, para el tratamiento de las condiciones de contorno en la dirección radial se han desarrollado las perturbaciones en una base perteneciente al subespacio de funciones que verifican el contorno, en lugar de usar directamente polinomios de Chebyshev que no lo satisfacen. Los elementos de esta base son combinación lineal de polinomios de Chebyshev y se encuentran resolviendo el sistema de ecuaciones formado por las condiciones de contorno. Mientras que en el problema axisimétrico esta base de funciones se podrá obtener de forma analítica, la complicación de las condiciones de contorno en el problema general, que acopla diferentes variables, impide encontrar una expresión analítica para la base, por lo que ésta se deberá calcular numéricamente.

3.2.1 Problema axisimétrico

• Desarrollo de las perturbaciones

En el problema axisimétrico se estudia la estabilidad del estado conductivo frente a perturbaciones que mantienen la independencia de la coordenada θ . Como se ha mencionado, se ha usado un esquema de Galerkin para la dirección vertical y uno pseudoespectral de colocación para la dirección radial. Como en las tapas del anillo se anula la variable g y su derivada segunda, y las variables f y T satisfacen derivada primera nula, (3.3), se usará la base de funciones trigonométricas $\{\sin(m\pi z/\beta)\}_{m=0 \div M}$ para desarrollar g y $\{\cos(m\pi z/\beta)\}_{m=0 \div M}$ para desarrollar f y T . En la dirección radial hay que imponer que las siguientes combinaciones lineales de polinomios de Chebyshev

$$g(x) = \sum_{l=0}^L g_l \mathcal{T}_l(x), \quad f(x) = \sum_{l=0}^L f_l \mathcal{T}_l(x) \quad \text{y} \quad T(x) = \sum_{l=0}^L T_l \mathcal{T}_l(x), \quad (3.10)$$

cumplan las condiciones de contorno respectivas. Para el potencial $g(x)$ hay que imponer función y derivada primera nulas en los extremos del intervalo. Puesto que se discretiza en los puntos de Gauss-Lobatto, usando las relaciones (3.9) las condiciones de contorno se escriben

$$g(\pm 1) = \sum_{l=0}^L g_l (\pm 1)^l = 0,$$

$$\partial_x g(\pm 1) = \sum_{l=0}^L g_l l^2 (\pm 1)^{l+1} = 0.$$

Este sistema de cuatro ecuaciones permite escribir cuatro de los coeficientes del desarrollo, por ejemplo los primeros, g_0 , g_1 , g_2 y g_3 , en función de los restantes. Se puede encontrar una base de funciones de $(L-3)$ elementos que verifique el contorno, $\{g^k(x)\}_{k=4 \div L}$, imponiendo que el coeficiente del polinomio de Chebyshev de orden k valga 1 y los demás se anulen, $g_l^k = \delta_{l,k}$ $l, k = 4 \div L$. De esta forma se obtiene

$$g^k(x) = \begin{cases} (\frac{k^2}{4} - 1) \mathcal{T}_0(x) - \frac{k^2}{4} \mathcal{T}_2(x) + \mathcal{T}_k(x) & k = \dot{2} \\ \frac{1}{8}(k^2 - 9) \mathcal{T}_1(x) - \frac{1}{8}(k^2 - 1) \mathcal{T}_3(x) + \mathcal{T}_k(x) & k \neq \dot{2} \end{cases} \quad (3.11)$$

Procediendo de la misma forma se obtiene la base de funciones para desarrollar $f(x)$ y $T(x)$. Las condiciones de contorno proporcionan dos ecuaciones que permiten escribir

los dos primeros coeficientes del desarrollo en función de los demás. La base de funciones $\{f^j(x)\}_{j=2 \div L}$ y $\{T^j(x)\}_{j=2 \div L}$ tiene ahora $(L-1)$ elementos,

$$f^j(x) = T^j(x) = \begin{cases} -\mathcal{T}_0(x) + \mathcal{T}_j(x) & j = \dot{2} \\ -\mathcal{T}_1(x) + \mathcal{T}_j(x) & j \neq \dot{2} \end{cases} \quad (3.12)$$

Una vez se dispone de las funciones base adecuadas ya se puede desarrollar las perturbaciones. Se consideran desarrollos de la forma

$$\begin{aligned} f(x, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M f_m(x) \cos(m\pi z/\beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M \sum_{l=2}^L \hat{f}_{l,m} f^l(x) \cos(m\pi z/\beta), \\ g(x, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M g_m(x) \sin(m\pi z/\beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M \sum_{l=4}^L \hat{g}_{l,m} g^l(x) \sin(m\pi z/\beta), \\ T(x, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M T_m(x) \cos(m\pi z/\beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M \sum_{l=2}^L \hat{T}_{l,m} T^l(x) \cos(m\pi z/\beta). \end{aligned} \quad (3.13)$$

• Discretización de las ecuaciones

Los desarrollos (3.13) se han sustituido en las ecuaciones (3.1) y se ha tomado como funciones test $\{\sin(k\pi z/\beta)\}_{k=0 \div M}$ para la ecuación (3.1b) y $\{\cos(k\pi z/\beta)\}_{k=0 \div M}$ para las ecuaciones (3.1a) y (3.1c). El residuo se minimiza proyectando las ecuaciones sobre el subespacio generado por las funciones respectivas. El problema se desacopla para cada modo vertical, m , que satisface el siguiente problema de valores propios

$$\lambda f_m(x) = \sigma \nabla_-^2 f_m(x) + \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} g_m(x), \quad (3.14a)$$

$$\lambda \nabla_-^2 g_m(x) = \sigma \nabla_-^4 g_m(x) + \sigma \text{Ra} \frac{m\pi}{\beta} T_m(x) + \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} f_m(x), \quad (3.14b)$$

$$\lambda T_m(x) = \nabla_-^2 T_m(x) + \frac{2}{\ln \eta(x+\delta)} \frac{m\pi}{\beta} g_m(x), \quad (3.14c)$$

donde los operadores diferenciales se escriben

$$\nabla_h^2 = 4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \partial_x \right],$$

$$\nabla^2 = \nabla_h^2 - \left(\frac{m\pi}{\beta} \right)^2,$$

$$\nabla_-^2 = 4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \left(\partial_x - \frac{1}{(x+\delta)} \right) - \left(\frac{m\pi}{\beta} \right)^2 \right].$$

Las ecuaciones de las cuales hay que estudiar su estabilidad se obtienen discretizando en la dirección radial el problema de valores propios anterior. Para ello, se ha de imponer que las ecuaciones se cumplan en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto. Al considerar como incógnitas los coeficientes de los desarrollos, $\hat{f}_{l,m}$, $\hat{g}_{l,m}$ y $\hat{T}_{l,m}$, el número de incógnitas por cada modo m es de $(L-1) + (L-3) + (L-1)$. Por tanto, sólo es necesario imponer las ecuaciones de f y T en $(L-1)$ puntos de colocación y la de g en $(L-3)$ puntos. Se obtiene un problema de valores propios unidimensional de la forma

$$A_m X_m = \lambda B_m X_m,$$

donde A_m y B_m son matrices reales de dimensión $(3L-5) \times (3L-5)$ y X_m es el vector de incógnitas

$$X_m = (\hat{f}_l, \hat{g}_l, \hat{T}_l)_m = (\hat{f}_{2,m}, \dots, \hat{f}_{L,m}, \hat{g}_{4,m}, \dots, \hat{g}_{L,m}, \hat{T}_{2,m}, \dots, \hat{T}_{L,m}). \quad (3.15)$$

Este problema de valores propios se puede escribir en forma matricial por bloques,

$$\begin{pmatrix} A11_{i,l} & A12_{i,l} & 0 \\ A21_{i,l} & A22_{i,l} & A23_{i,l} \\ 0 & A32_{i,l} & A33_{i,l} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \hat{f}_l \\ \hat{g}_l \\ \hat{T}_l \end{pmatrix}_m = \lambda \begin{pmatrix} B11_{i,l} & 0 & 0 \\ 0 & B22_{i,l} & 0 \\ 0 & 0 & B33_{i,l} \end{pmatrix}_m \begin{pmatrix} \hat{f}_l \\ \hat{g}_l \\ \hat{T}_l \end{pmatrix}_m,$$

siendo el valor de estas matrices

$$\begin{aligned} A11_{i,l} &\equiv \sigma \nabla_-^2 f^l(x_i) & i=1 \div L-1 & \quad l=2 \div L \\ A12_{i,l} &\equiv \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} g^l(x_i) & i=1 \div L-1 & \quad l=4 \div L \\ A21_{i,l} &\equiv \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} f^l(x_i) & i=2 \div L-2 & \quad l=2 \div L \\ A22_{i,l} &\equiv \sigma \nabla_-^4 g^l(x_i) & i=2 \div L-2 & \quad l=4 \div L \\ A23_{i,l} &\equiv \sigma \text{Ra} \frac{m\pi}{\beta} T^l(x_i) & i=2 \div L-2 & \quad l=2 \div L \\ A32_{i,l} &\equiv \frac{2}{\ln \eta(x_i + \delta)} \frac{m\pi}{\beta} g^l(x_i) & i=1 \div L-1 & \quad l=4 \div L \\ A33_{i,l} &\equiv \nabla^2 T^l(x_i) & i=1 \div L-1 & \quad l=2 \div L \\ B11_{i,l} &\equiv f^l(x_i) & i=1 \div L-1 & \quad l=2 \div L \\ B22_{i,l} &\equiv \nabla_-^2 g^l(x_i) & i=2 \div L-2 & \quad l=4 \div L \\ B33_{i,l} &\equiv T^l(x_i) & i=1 \div L-1 & \quad l=2 \div L \end{aligned}$$

donde el índice i indica las filas (puntos de colocación) y el l las columnas (amplitudes), y $f^l(x_i)$, $g^l(x_i)$ y $T^l(x_i)$ representa el valor del elemento de orden l de cada una de las bases evaluado en el punto de colocación, $x_i = \cos(\frac{\pi i}{L})$. Los operadores lineales que actúan sobre estos elementos se han calculado directamente mediante métodos de transformada rápida. En concreto, se han utilizado las subrutinas de Canuto *et al.* (1988), que permiten realizar transformadas múltiples de Fourier y Chebyshev. Dada una función en los puntos de colocación, retornan los valores de las derivadas en dichos puntos. El cálculo de los valores y vectores propios correspondientes a la matriz $B^{-1}A$ se ha hecho utilizando subrutinas de las librerías NAG y LAPACK.

3.2.2 Problema no axisimétrico

- Desarrollo de las perturbaciones

Al igual que en el caso axisimétrico, se han desarrollado las perturbaciones en el problema general mediante funciones trigonométricas que cumplen las condiciones de contorno en la dirección vertical y mediante una base de funciones combinación lineal de polinomios de Chebyshev que satisface el contorno en la dirección radial. A diferencia del caso anterior, la complicación de las condiciones de contorno, que acoplan las variables Φ y Ψ , impide encontrar esta base de funciones de forma analítica. Para obtenerla, se debe resolver numéricamente el sistema de ecuaciones al que dan lugar las condiciones de contorno (3.5) y (3.6). Además, al existir dependencia con la coordenada θ , se ha introducido un desarrollo en serie de Fourier en esta dirección. Por tanto, con respecto a la dependencia con la coordenada z , al anularse en las tapas del anillo Φ y su derivada segunda, y las derivadas primeras de Ψ y T , las perturbaciones se desarrollarán en la base de funciones $\{\sin(m\pi z/\beta)\}_{m=0 \div M}$ y $\{\cos(m\pi z/\beta)\}_{m=0 \div M}$ respectivamente, mientras que para la dependencia azimutal se usará la base de funciones $\{e^{in\theta}\}_{n=-N \div N, n \neq 0}$. Como la condición que verifica la temperatura en el contorno lateral es la misma que en el problema axisimétrico, función nula en el contorno, se usará también la base (3.12) para desarrollar su dependencia radial. Las

perturbaciones consideradas son de la forma

$$\begin{aligned}\Psi(x, \theta, z, t) &= ie^{\lambda t} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \sum_{m=0}^M e^{in\theta} \cos(m\pi z/\beta) \Psi_{m,n}(x), \\ \Phi(x, \theta, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \sum_{m=0}^M e^{in\theta} \sin(m\pi z/\beta) \Phi_{m,n}(x), \\ T(x, \theta, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N \sum_{m=0}^M \sum_{l=2}^L \hat{T}_{l,m,n} e^{in\theta} \cos(m\pi z/\beta) T^l(x),\end{aligned}\quad (3.16)$$

donde la unidad imaginaria en el desarrollo de Ψ se introduce para que las ecuaciones procedentes de las condiciones de contorno sean reales.

Para encontrar la base de funciones, combinación lineal de polinomios de Chebyshev, que cumpla las condiciones de contorno en las paredes laterales hay que escribir el sistema de ecuaciones formado por las condiciones de contorno. Para ello, en un primer paso, hay que evaluar las dos condiciones de contorno que acoplan las variables Φ y Ψ , sustituyendo en ellas los desarrollos anteriores y efectuando las derivadas de las funciones trigonométricas respecto a z y las derivadas de las exponenciales respecto a θ . Después, se ha de imponer que todas las condiciones se cumplan en $x = \pm 1$. Procediendo de esta forma, las condiciones de contorno (3.5) y (3.6) se expresan como

$$\partial_x \Psi_{m,n}(x) = 0, \quad (3.17)$$

$$\frac{m\pi}{\beta} \partial_x \Phi_{m,n}(x) - \frac{n}{(x+\delta)} \Psi_{m,n}(x) = 0, \quad (3.18)$$

$$\Phi_{m,n}(x) = 0, \quad (3.19)$$

$$\nabla_h^2 \Phi_{m,n}(x) = 0, \quad (3.20)$$

$$(x+\delta) \frac{m\pi}{\beta} \partial_x \nabla_h^2 \Psi_{m,n}(x) + n \nabla_h^2 \Phi_{m,n}(x) = 0. \quad (3.21)$$

Ahora se ha de imponer que las siguientes combinaciones de polinomios de Chebyshev

$$\Psi_{m,n}(x) = \sum_{l=0}^L \Psi_{l,m,n} \mathcal{T}_l(x), \quad (3.22)$$

$$\Phi_{m,n}(x) = \sum_{l=0}^L \Phi_{l,m,n} \mathcal{T}_l(x), \quad (3.23)$$

satisfagan las ecuaciones anteriores en $x = \pm 1$. Usando las relaciones (3.9), se obtiene el siguiente sistema de diez ecuaciones

$$\begin{pmatrix} a_{1,0} & \dots & a_{1,L} & b_{1,0} & \dots & b_{1,L} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{10,0} & \dots & a_{10,L} & b_{10,0} & \dots & b_{10,L} \end{pmatrix}_{m,n} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \vdots \\ \Psi_L \\ \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_L \end{pmatrix}_{m,n} = 0$$

donde

$$\begin{aligned} a_{1,l}, a_{2,l} &\equiv l^2(\pm 1)^{l+1}, & b_{1,l}, b_{2,l} &\equiv 0, \\ a_{3,l}, a_{4,l} &\equiv \frac{-n}{(\pm 1 + \delta)}(\pm 1)^l, & b_{3,l}, b_{4,l} &\equiv \frac{m\pi}{\beta}l^2(\pm 1)^{l+1}, \\ a_{5,l}, a_{6,l} &\equiv 0, & b_{5,l}, b_{6,l} &\equiv (\pm 1)^l, \\ a_{7,l}, a_{8,l} &\equiv 0, & b_{7,l}, b_{8,l} &\equiv \frac{1}{3}(\pm 1)^{l+2}l^2(l^2 - 1) + \frac{1}{(\pm 1 + \delta)}l^2(\pm 1)^{l+1} - \\ & & & - \frac{n^2}{(\pm 1 + \delta)^2}(\pm 1)^l, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{9,l}, a_{10,l} &\equiv 4\frac{m\pi}{\beta} \left\{ (\pm 1 + \delta) \frac{1}{15}(\pm 1)^{l+3}l^2(l^2 - 1)(l^2 - 4) + \frac{1}{3}(\pm 1)^{l+2}l^2(l^2 - 1) - \right. \\ & \left. - \frac{(1 + n^2)}{(\pm 1 + \delta)}(\pm 1)^{l+1}l^2 + \frac{2n^2}{(\pm 1 + \delta)^2}(\pm 1)^l \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{9,l}, b_{10,l} &\equiv n \left\{ \frac{16}{105}(\pm 1)^{l+4}l^2(l^2 - 1)(l^2 - 4)(l^2 - 9) + \right. \\ & + \frac{32}{15} \frac{1}{(\pm 1 + \delta)}(\pm 1)^{l+3}l^2(l^2 - 1)(l^2 - 4) - \\ & - \frac{4}{3} \left[\frac{4(1 + 2n^2)}{(\pm 1 + \delta)^2} + \frac{m^2\pi^2}{\beta^2} \right] (\pm 1)^{l+2}l^2(l^2 - 1) + \\ & + \frac{4}{(\pm 1 + \delta)} \left[\frac{4(1 + 2n^2)}{(\pm 1 + \delta)^2} - \frac{m^2\pi^2}{\beta^2} \right] (\pm 1)^{l+1}l^2 + \\ & \left. + \frac{4n^2}{(\pm 1 + \delta)^2}(\pm 1)^l \left[\frac{4n^2 - 16}{(\pm 1 + \delta)^2} + \frac{m^2\pi^2}{\beta^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Por tanto, se dispone de diez ecuaciones que permiten escribir diez de los coeficientes en función de los restantes. Se ha escogido expresar en función de los demás los cuatro primeros coeficientes de Ψ y los seis primeros de Φ , por lo que el sistema lineal que se ha de resolver es

$$\begin{pmatrix} a_{1,0} & \dots & a_{1,3} & b_{1,0} & \dots & b_{1,5} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{10,0} & \dots & a_{10,3} & b_{10,0} & \dots & b_{10,5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_0 \\ \vdots \\ \Psi_3 \\ \Phi_0 \\ \vdots \\ \Phi_5 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} a_{1,4} & \dots & a_{1,L} & b_{1,6} & \dots & b_{1,L} \\ \vdots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ a_{10,4} & \dots & a_{10,L} & b_{10,6} & \dots & b_{10,L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_4 \\ \vdots \\ \Psi_L \\ \Phi_6 \\ \vdots \\ \Phi_L \end{pmatrix}.$$

Como consecuencia de que las condiciones de contorno acoplan las variables Φ y Ψ , las bases no serán independientes entre sí. Procediendo de la misma forma que en el problema axisimétrico, al imponer que el coeficiente del polinomio de Chebyshev de orden j en el desarrollo de Ψ valga 1 y se anulen los restantes, $\Psi_l^j = \delta_{l,j}$, $j, l = 4 \div L$, y resolver numéricamente el sistema resultante se obtienen los coeficientes

$$(\Psi_0, \dots, \Psi_3, \Phi_0, \dots, \Phi_5)_{m,n}^j.$$

Con estos coeficientes se construyen los $(L-3)$ primeros elementos de la base de Ψ y de Φ :

$$\left\{ (\Psi_{m,n}^j(x), \tilde{\Phi}_{m,n}^j(x)) \right\}_{j=4 \div L},$$

siendo

$$\begin{cases} \Psi_{m,n}^j(x) = \sum_{l=0}^3 (\Psi_l)_{m,n}^j \mathcal{T}_l(x) + \mathcal{T}_j(x), \\ \tilde{\Phi}_{m,n}^j(x) = \sum_{l=0}^5 (\Phi_l)_{m,n}^j \mathcal{T}_l(x). \end{cases}$$

Análogamente, resolviendo el sistema que se obtiene imponiendo que valga 1 el coeficiente del polinomio de Chebyshev de orden k del desarrollo de Φ y que sean cero los demás, $\Phi_l^k = \delta_{l,k}$, $k, l = 6 \div L$, se obtienen los coeficientes

$$(\Psi_0, \dots, \Psi_3, \Phi_0, \dots, \Phi_5)_{m,n}^k,$$

que permiten construir los $(L - 5)$ elementos restantes de la base de Ψ y de Φ :

$$\left\{ (\tilde{\Psi}_{m,n}^k(x), \Phi_{m,n}^k(x)) \right\}_{k=6 \div L},$$

con

$$\begin{cases} \tilde{\Psi}_{m,n}^k(x) = \sum_{l=0}^3 (\Psi_l)_{m,n}^k \mathcal{T}_l(x), \\ \Phi_{m,n}^k(x) = \sum_{l=0}^5 (\Phi_l)_{m,n}^k \mathcal{T}_l(x) + \mathcal{T}_k(x). \end{cases}$$

Se obtiene así una base de $(L - 3) + (L - 5)$ elementos. Utilizando estas bases la dependencia radial se desarrolla como

$$\begin{pmatrix} \Psi_{m,n}(x) \\ \Phi_{m,n}(x) \end{pmatrix} = \sum_{l=4}^L \begin{pmatrix} \Psi_{m,n}^l \\ \tilde{\Phi}_{m,n}^l \end{pmatrix} \hat{\Psi}_{l,m,n} + \sum_{l=6}^L \begin{pmatrix} \tilde{\Psi}_{m,n}^l \\ \Phi_{m,n}^l \end{pmatrix} \hat{\Phi}_{l,m,n},$$

donde $\hat{\Psi}_{l,m,n}$ y $\hat{\Phi}_{l,m,n}$ son los coeficientes del desarrollo, que junto con $\hat{T}_{l,m,n}$ formarán el conjunto de incógnitas. Puesto que Ψ , Φ y T son funciones reales, se ha de satisfacer $\hat{\Psi}_{l,m,n} = \hat{\Psi}_{l,m,-n}^*$, $\hat{\Phi}_{l,m,n} = \hat{\Phi}_{l,m,-n}^*$ y $\hat{T}_{l,m,n} = \hat{T}_{l,m,-n}^*$, donde * significa conjugado, por lo que se podrá trabajar con la mitad de coeficientes en los desarrollos, $n = 1 \div N$.

• Discretización de las ecuaciones

Sustituyendo los desarrollos de las perturbaciones (3.16) en las ecuaciones (3.4), efectuando las derivadas respecto a z y θ y proyectando las ecuaciones de Ψ y T sobre el subespacio generado por las funciones $\{\cos(k\pi z/\beta)\}_{k=0 \div M}$ y la de Φ sobre el subespacio generado por $\{\sin(k\pi z/\beta)\}_{k=0 \div M}$ se obtiene un sistema de ecuaciones que sólo depende de la coordenada radial. Es un problema de valores propios complejo unidimensional para cada modo axial, m , y azimutal, n ,

$$\lambda \nabla_h^2 \Psi_{m,n}(x) = \sigma \nabla^2 \nabla_h^2 \Psi_{m,n}(x) + \frac{2\sigma n \text{Ra}}{(x + \delta)} T_{m,n}(x) - i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} \nabla_h^2 \Phi_{m,n}(x), \quad (3.24a)$$

$$\begin{aligned} \lambda \nabla^2 \nabla_h^2 \Phi_{m,n}(x) = \sigma \nabla^2 \nabla^2 \nabla_h^2 \Phi_{m,n}(x) - \frac{2\sigma \text{Ra} m \pi}{\beta} \left[\frac{1}{(x + \delta)} + \partial_x \right] T_{m,n}(x) + \\ + i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} \nabla_h^2 \Psi_{m,n}(x), \end{aligned} \quad (3.24b)$$

$$\lambda T_{m,n}(x) = \nabla^2 T_{m,n}(x) - \frac{4}{\ln \eta(x + \delta)} \left(\frac{m\pi}{\beta} \partial_x \Phi_{m,n}(x) - \frac{n}{(x + \delta)} \Psi_{m,n}(x) \right), \quad (3.24c)$$

donde los operadores se expresan

$$\nabla_h^2 = 4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \partial_x - \frac{n^2}{(x+\delta)^2} \right],$$

$$\nabla^2 = \nabla_h^2 - \left(\frac{m\pi}{\beta} \right)^2.$$

De nuevo, las ecuaciones de las cuales hay que estudiar su estabilidad se obtienen discretizando en la dirección radial el problema de valores propios anterior. Hay que imponer que las ecuaciones se verifiquen en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto. Al igual que en la resolución del caso axisimétrico, se consideran como incógnitas los coeficientes de los desarrollos, $\hat{\Psi}_{l,m,n}$, $\hat{\Phi}_{l,m,n}$ y $\hat{T}_{l,m,n}$, por lo que el número de incógnitas es de $(L-3) + (L-5) + (L-1)$. Para tener igual número de ecuaciones, hay que imponer que la ecuación de Ψ se cumpla en $(L-3)$ puntos de colocación, la de Φ en $(L-5)$ y la de T en $(L-1)$ puntos. Se obtiene un problema de valores propios complejo de la forma

$$A_{m,n} X_{m,n} = \lambda B_{m,n} X_{m,n},$$

donde $A_{m,n}$ es una matriz compleja de dimensión $(3L-9) \cdot (3L-9)$ y $B_{m,n}$ es una matriz real de igual dimensión. $X_{m,n}$ es el vector de incógnitas

$$X_{m,n} = (\hat{\Psi}_l, \hat{\Phi}_l, \hat{T}_l)_{m,n} = (\hat{\Psi}_{4,m,n}, \dots, \hat{\Psi}_{L,m,n}, \hat{\Phi}_{6,m,n}, \dots, \hat{\Phi}_{L,m,n}, \hat{T}_{2,m,n}, \dots, \hat{T}_{L,m,n})$$

El problema se puede expresar en forma matricial por bloques

$$\begin{pmatrix} A11_{i,l} & A12_{i,l} & A13_{i,l} \\ A21_{i,l} & A22_{i,l} & A23_{i,l} \\ A31_{i,l} & A32_{i,l} & A33_{i,l} \end{pmatrix}_{m,n} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_l \\ \hat{\Phi}_l \\ \hat{T}_l \end{pmatrix}_{m,n} = \lambda \begin{pmatrix} B11_{i,l} & B12_{i,l} & 0 \\ B21_{i,l} & B22_{i,l} & 0 \\ 0 & 0 & B33_{i,l} \end{pmatrix}_{m,n} \begin{pmatrix} \hat{\Psi}_l \\ \hat{\Phi}_l \\ \hat{T}_l \end{pmatrix}_{m,n} \quad (3.25)$$

El valor de cada submatriz es

$$\begin{aligned}
A11_{i,l} &\equiv \sigma \nabla^2 \nabla_h^2 \Psi_{m,n}^l(x_i) - i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} \nabla_h^2 \tilde{\Phi}_{m,n}^l(x_i) & i=2\div L-2 \quad l=4\div L \\
A12_{i,l} &\equiv -i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} \nabla_h^2 \Phi_{m,n}^l(x_i) + \sigma \nabla^2 \nabla_h^2 \tilde{\Psi}_{m,n}^l(x_i) & i=2\div L-2 \quad l=6\div L \\
A13_{i,l} &\equiv \frac{2\sigma \text{Ra}n}{(x_i + \delta)} T_{m,n}^l(x_i) & i=2\div L-2 \quad l=2\div L \\
A21_{i,l} &\equiv i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} \nabla_h^2 \Psi_{m,n}^l(x_i) + \sigma \nabla^2 \nabla_h^2 \nabla_h^2 \tilde{\Phi}_{m,n}^l(x_i) & i=3\div L-3 \quad l=4\div L \\
A22_{i,l} &\equiv \sigma \nabla^2 \nabla_h^2 \nabla_h^2 \Phi_{m,n}^l(x_i) + i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{m\pi}{\beta} \nabla_h^2 \tilde{\Psi}_{m,n}^l(x_i) & i=3\div L-3 \quad l=6\div L \\
A23_{i,l} &\equiv -2\sigma \text{Ra} \frac{m\pi}{\beta} \left[\frac{1}{(x_i + \delta)} + \partial_x \right] T_{m,n}^l(x_i) & i=3\div L-3 \quad l=2\div L \\
A31_{i,l} &\equiv \frac{4n}{\ln \eta(x_i + \delta)^2} \Psi_{m,n}^l(x_i) - \frac{4}{\ln \eta(x_i + \delta)} \frac{m\pi}{\beta} \partial_x \tilde{\Phi}_{m,n}^l(x_i) & i=1\div L-1 \quad l=4\div L \\
A32_{i,l} &\equiv \frac{-4}{\ln \eta(x_i + \delta)} \frac{m\pi}{\beta} \partial_x \Phi_{m,n}^l(x_i) + \frac{4n}{\ln \eta(x_i + \delta)^2} \tilde{\Psi}_{m,n}^l(x_i) & i=1\div L-1 \quad l=6\div L \\
A33_{i,l} &\equiv \nabla^2 T_{m,n}^l(x_i) & i=1\div L-1 \quad l=2\div L \\
B11_{i,l} &\equiv \nabla_h^2 \Psi_{m,n}^l(x_i) & i=2\div L-2 \quad l=4\div L \\
B12_{i,l} &\equiv \nabla_h^2 \tilde{\Psi}_{m,n}^l(x_i) & i=2\div L-2 \quad l=6\div L \\
B21_{i,l} &\equiv \nabla^2 \nabla_h^2 \tilde{\Phi}_{m,n}^l(x_i) & i=3\div L-3 \quad l=4\div L \\
B22_{i,l} &\equiv \nabla^2 \nabla_h^2 \Phi_{m,n}^l(x_i) & i=3\div L-3 \quad l=6\div L \\
B33_{i,l} &\equiv T_{m,n}^l(x_i) & i=1\div L-1 \quad l=2\div L
\end{aligned}$$

donde el índice i indica las filas y el l las columnas. Como en el problema axisimétrico, estas matrices se construyen mediante transformada rápida. La matriz B se ha invertido mediante subrutinas de las librerías NAG y LAPACK, de manera que se obtiene un problema de valores propios de la forma $AX = \lambda X$, siendo A una matriz compleja, y se han calculado los valores y vectores propios correspondientes.

• Resolución radial necesaria

Finalmente, como paso previo al análisis de los resultados que se han obtenido, se estudiará el número de puntos de colocación necesario para determinar las curvas de estabilidad del estado conductivo. Para ello, se ha seguido la evolución del número de Rayleigh para el cual el estado conductivo es inestable frente a una determinada perturbación al aumentar el número de modos en la dirección radial. Dada una perturbación (caracterizada por los números de onda axial, m , y azimutal, n), la parte real del valor propio asociado determina si el estado conductivo es estable o inestable frente a esa perturbación. Cuando $\lambda_R < 0$, la exponencial en los desarrollos (3.13) y (3.16) es decreciente con el tiempo y la fluctuación decae, mientras que si $\lambda_R > 0$, la perturbación se amplifica. Por tanto, el valor crítico del número de Rayleigh asociado al modo (m, n) se encuentra imponiendo $\lambda_R = 0$. El valor de la parte imaginaria del valor propio caracteriza el tipo de transición de estabilidad a inestabilidad que tiene lugar, pues si $\lambda_I = 0$ la nueva estructura es estacionaria, mientras que si $\lambda_I \neq 0$ la estructura oscila al inicio de la convección con una frecuencia λ_I .

Para realizar los cálculos de las curvas de estabilidad se ha considerado crítico el valor de un número de Rayleigh cuando la parte real del valor propio que cruza el eje es $|\lambda_R| \leq 10^{-8}$. En la tabla 3.1 se muestra el valor del número de Rayleigh crítico y la parte imaginaria del valor propio en unidades de tiempo viscosas correspondientes a la perturbación de números de onda axial y azimutal $(m, n) = (1, 4)$ cambiando el

L	Ra _c	λ_I^c
8	1688.49406	0.835626
12	1721.23504	0.888031
16	1722.40800	0.891841
24	1722.42701	0.891900
32	1722.42701	0.891900
48	1722.42762	0.891896
64	1722.42850	0.891907

Tabla 3.1: Número de Rayleigh a partir del cual el estado conductivo se inestabiliza a un modo $(m, n) = (1, 4)$ y frecuencia de precesión de la estructura convectiva en función del número de puntos de colocación, L . Los valores de los parámetros son $\beta = 2.5$, $\eta = 0.5$, $\sigma = 0.025$ y $\Omega = 5$

número de puntos de colocación. Como se puede ver, la convergencia es rápida, pues el error disminuye muy rápidamente al aumentar el número de puntos. La resolución radial con la que se ha trabajado a lo largo de este capítulo es de $L = 32$.

Cuando se fija el valor de los parámetros que caracterizan el sistema, β , η , σ y Ω , la transición del estado conductivo al convectivo se produce para los números de onda (m, n) que minimizan el número de Rayleigh.

3.3 Bifurcación primaria en sistemas con simetría $O(2)$ y $SO(2)$

Las simetrías de un sistema condicionan la naturaleza de la bifurcación primaria por la cual el estado básico se inestabiliza. En el trabajo de Knobloch (Knobloch, 1994, 1996) se pone de manifiesto que la presencia de estructuras con precesión, muy abundantes en sistemas en rotación, está ligada a sistemas con simetría $SO(2)$. En estos sistemas, se demuestra que cuando el estado básico se inestabiliza a una solución que rompe la simetría de rotación R_{θ} , se produce una bifurcación de Hopf, es decir, la nueva estructura que aparece tras la bifurcación precesiona respecto al sistema de referencia en rotación. Sin embargo, en sistemas con simetría $O(2)$, la bifurcación primaria puede ser estacionaria. Por este motivo, se advierte que simplificar el problema original haciendo aproximaciones que son válidas localmente altera, en la mayoría de las ocasiones, las simetrías del problema y da lugar a resultados erróneos. En Knobloch (1994) se exponen diversos ejemplos en los que el uso de coordenadas cartesianas para aproximar un sistema con curvatura hace que los modelos no reproduzcan el comportamiento observado en el sistema original.

Teniendo en cuenta argumentos de simetría sencillos (Knobloch, 1994), es posible analizar el tipo de bifurcación primaria por la cual el estado conductivo pierde estabilidad y da lugar a un modo convectivo, tanto en el caso del anillo cilíndrico sin rotación (sistema con simetría $O(2)$) como en el caso de que tenga rotación (sistema con simetría $SO(2)$). En ambos casos se pueden escribir las ecuaciones que satisfacen la amplitud del modo convectivo que se inestabiliza, ligeramente por encima del punto de bifurcación.

Se define μ , el parámetro de control del sistema, de forma que cuando $\mu = 0$ se produzca la inestabilidad. Por ejemplo, si la inestabilidad está gobernada por el

número de Rayleigh, $\mu = \frac{Ra - Ra_c}{Ra_c}$, siendo Ra_c el valor crítico del Rayleigh para el cual es inestable el modo considerado. Debido a la periodicidad en la dirección azimutal, el modo marginalmente estable en el inicio de la convección se caracteriza por un número de onda azimutal n , de manera que la función propia cuando $\mu = 0$ es de la forma

$$T(r, \theta, z, t) = R \{ a_n(t) e^{in\theta} f_n(r, z) \}, \quad (3.26)$$

donde

$$\dot{a}_n = 0. \quad (3.27)$$

Aquí, $f_n(r, z)$ es la función propia del modo n y $a_n(t)$ su correspondiente amplitud compleja. Para obtener una ecuación para la amplitud a_n que describa el comportamiento de la inestabilidad para valores de μ ligeramente supercríticos, se debe añadir a la ecuación (3.27), además de los términos responsables del crecimiento de la inestabilidad, los términos no lineales que la saturan. La estructura de estos dos tipos de términos está limitada por las simetrías del sistema. Si la inestabilidad tiene lugar en un sistema invariante bajo rotaciones y reflexiones, dada una solución de las ecuaciones, cuando se somete a una rotación o reflexión se obtiene otra solución de las ecuaciones. Esta solución puede ser la misma que la original, si la inestabilidad da lugar a una estructura que mantiene la simetría, o puede ser diferente, si la nueva estructura rompe la simetría del sistema.

Se puede analizar, en primer lugar, el caso del anillo sin rotación como ejemplo de sistemas con simetría $O(2)$. El estado conductivo comparte todas las simetrías del sistema, por tanto, es invariante respecto a rotaciones R_{θ_0} y reflexiones respecto a planos verticales R_1 . En el caso de que el estado conductivo se inestabilice a una solución no axisimétrica, $n \neq 0$, la nueva estructura (3.26) rompe la simetría de rotación y mantiene la de reflexión. La simetría R_{θ_0} requiere que la ecuación que satisface la amplitud no cambie bajo la operación

$$\theta \rightarrow \theta + \theta_0 : \quad a_n \rightarrow a_n e^{in\theta_0}, \quad (3.28)$$

mientras que la simetría de reflexión del sistema requiere que la ecuación sea invariante respecto

$$\theta \rightarrow -\theta : \quad a_n \rightarrow a_n^*. \quad (3.29)$$

La ecuación más general posible para la amplitud a_n que es invariante bajo las operaciones anteriores es

$$\dot{a}_n = g_n(\mu, |a_n|^2) a_n, \quad (3.30)$$

donde g_n ha de ser real por (3.29). Como μ y a_n son pequeños, se puede desarrollar g_n en serie de Taylor y se obtiene

$$\dot{a}_n = \mu a_n + \alpha_n |a_n|^2 a_n + \dots \quad (3.31)$$

siendo α_n un coeficiente real independiente de μ . Esta ecuación, que gobierna la evolución de cualquier inestabilidad no axisimétrica, escrita en función de una amplitud real A_n y una fase Φ_n , definidas $a_n = A_n e^{i\Phi_n}$ queda

$$\begin{cases} \dot{A}_n = \mu A_n + \alpha_n A_n^3 + \dots \\ \dot{\Phi}_n = 0 \end{cases} \quad (3.32)$$

La bifurcación es una *pitchfork* de revolución, que da lugar a una estructura estacionaria.

En el caso del anillo cilíndrico con rotación, el sistema tiene simetría $SO(2)$, pues se rompe la simetría de reflexión (3.29) respecto a planos verticales que pasen por el eje. En este caso la función g_n tiene una parte imaginaria y la ecuación (3.30) se escribe

$$\dot{a}_n = (\mu + i\Omega\delta_n)a_n + (\alpha_n + i\Omega\beta_n)|a_n|^2 a_n + \dots \quad (3.33)$$

donde δ_n , α_n y β_n son funciones de Ω^2 porque el anillo puede girar en cualquier sentido. En función de A_m y Φ_m se obtiene

$$\begin{cases} \dot{A}_n = \mu A_n + \alpha_n A_n^3 + \dots \\ \dot{\Phi}_n = \Omega(\delta_n + \beta_n A_n^2 + \dots) \end{cases} \quad (3.34)$$

Es decir, la ausencia de la simetría de reflexión R_1 convierte la bifurcación estacionaria en una bifurcación de Hopf, en la que la frecuencia de precesión ω_n de la estructura viene dada por la rapidez con la que cambia la fase, $\dot{\Phi}_n$, de forma que la bifurcación da lugar a una onda azimutal

$$\text{R} \{ A_n e^{i(n\theta + \omega_n t)} f_n(r, z) \} + \dots \quad (3.35)$$

Por tanto, según la teoría de bifurcaciones de sistemas en rotación, cuando en un sistema con simetría $SO(2)$ se produce una bifurcación que da lugar a una estructura que rompe la simetría de rotación del sistema, genéricamente tendrá precesión respecto al sistema de referencia en rotación.

3.4 Resultados

3.4.1 Convección columnar

Cuando se consideran condiciones de contorno libres en las tapas del anillo, las ecuaciones (2.9) admiten como solución exacta una solución bidimensional estacionaria. Es un tipo especial de solución de las ecuaciones, pues es independiente de la coordenada axial z , no tiene velocidad vertical, y forma columnas convectivas paralelas al eje de rotación del anillo. Esta solución corresponde al modo con número de onda axial $m = 0$ en las perturbaciones del estado conductivo consideradas en la sección 3.2.2. Es, por ello, una estructura no axisimétrica en la que el número de onda azimutal n caracteriza el número de columnas de la solución. La figura 3.1 muestra un corte transversal del anillo en el que se representan las curvas de nivel de la temperatura y de las velocidades radial y azimutal correspondientes a una columna con $n = 5$ y $\eta = 0.5$. Cualitativamente, el aspecto de estas curvas de nivel no cambia al variar la rotación.

Aparentemente, este tipo de modo convectivo no sigue el comportamiento genérico de los sistemas con simetría $SO(2)$ (Knobloch, 1994), pues no precesiona a pesar de ser una solución que rompe la simetría R_{θ_0} del sistema. Esto es debido a que este tipo de solución bidimensional permite introducir una función de corriente que reduce la ecuación de Navier-Stokes a la que se obtiene en el problema de Rayleigh-Bénard

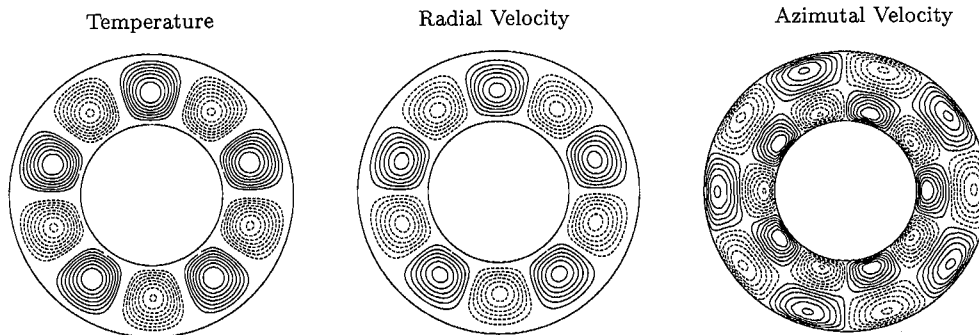


Figura 3.1: Curvas de nivel correspondientes a una solución columnar de número de onda azimutal $n = 5$ y relación de radios $\eta = 0.5$. Este tipo de modo convectivo es independiente de la coordenada z .

bidimensional. El término de Coriolis se puede escribir en forma de un gradiente e introducirlo en el gradiente de presiones. Por tanto, desaparece la dependencia de las ecuaciones con la rotación, por lo que recuperan la simetría $O(2)$. Como se puede ver en la figura 3.1, la bifurcación a columnas bidimensionales se produce rompiendo la simetría R_{θ_0} del estado conductivo básico, pero se mantiene la simetría de reflexión R_1 respecto a planos verticales que pasan por el eje de rotación.

Sustituyendo en las ecuaciones una solución de la forma $u = u(r, \theta, t)$, $v = v(r, \theta, t)$, $w = 0$ y $p = p(r, \theta, t)$ se puede comprobar que, efectivamente, estas columnas son solución de las ecuaciones y que se recupera el problema de Rayleigh-Bénard. La ecuación de Navier-Stokes linealizada escrita en componentes queda

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\partial_t u &= -\partial_r p + [\nabla^2 \mathbf{u}]_r + \text{Ra}T + 2\Omega v, \\ \sigma^{-1}\partial_t v &= -\frac{1}{r}\partial_\theta p + [\nabla^2 \mathbf{u}]_\theta - 2\Omega u.\end{aligned}$$

Introduciendo la función de corriente Ψ , la condición $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ implica

$$u = \frac{1}{r}\partial_\theta \Psi, \quad v = -\partial_r \Psi.$$

Al escribir el término de Coriolis en forma de un gradiente e incluirlo en el término de presiones, las ecuaciones se reducen formalmente a las del problema de Rayleigh-Bénard bidimensional

$$\begin{aligned}\sigma^{-1}\partial_t u &= -\partial_r P + [\nabla^2 \mathbf{u}]_r + \text{Ra}T, \\ \sigma^{-1}\partial_t v &= -\frac{1}{r}\partial_\theta P + [\nabla^2 \mathbf{u}]_\theta,\end{aligned}$$

siendo $P = p + 2\Omega\Psi$. La convección, por tanto, tendrá las mismas características que en una capa calentada por debajo, exceptuando la influencia que la geometría cilíndrica pueda tener. La fuerza de Coriolis es compensada por un gradiente de presiones y, al desaparecer el término que rompe la simetría R_1 de reflexión respecto a planos verticales que pasan por el eje del anillo, las ecuaciones recuperan la simetría $O(2)$ y la transición a columnas se produce vía una bifurcación estacionaria supercrítica que rompe la simetría R_{θ_0} del estado básico.

El hecho de que las condiciones de contorno libres permitan esta forma de convección estrictamente bidimensional permite que en este caso el teorema de Taylor-Proudman se pueda satisfacer de forma exacta. Como se ha visto, este teorema es válido cuando las rotaciones son altas, ya que se desprecia el término viscoso frente al de Coriolis, que es compensado por un gradiente de presiones adecuado. Cuando esto sucede se produce un balance geostrófico y el movimiento del fluido se hace

bidimensional. Las columnas que aparecen se conocen como *columns de Taylor*. Este régimen se caracteriza porque el campo de velocidades es tangente a las líneas de presión constante. En la figura 3.2 se muestra el gradiente de presiones asociado al campo de velocidades de la figura 3.1 cuando la rotación del anillo es elevada, $Ta = 10^7$, y el gradiente de presiones asociado al mismo campo de velocidades cuando no hay rotación (parte superior e inferior de la figura, respectivamente). Se puede ver que efectivamente el balance geostrófico sólo se produce cuando la rotación es alta, pues el gradiente de presiones, $(\partial_r p, \frac{1}{r} \partial_\theta p)$, es perpendicular al campo de velocidades, $(u, v) \propto (-\frac{1}{r} \partial_\theta p, \partial_r p)$. Sin embargo, para rotaciones bajas aunque la convección también es en forma de columnas bidimensionales el campo de velocidades no es tangente a las líneas de presión constante. Aunque el término de columnas de Taylor normalmente se utiliza para designar el régimen geostrófico, se usará de forma más

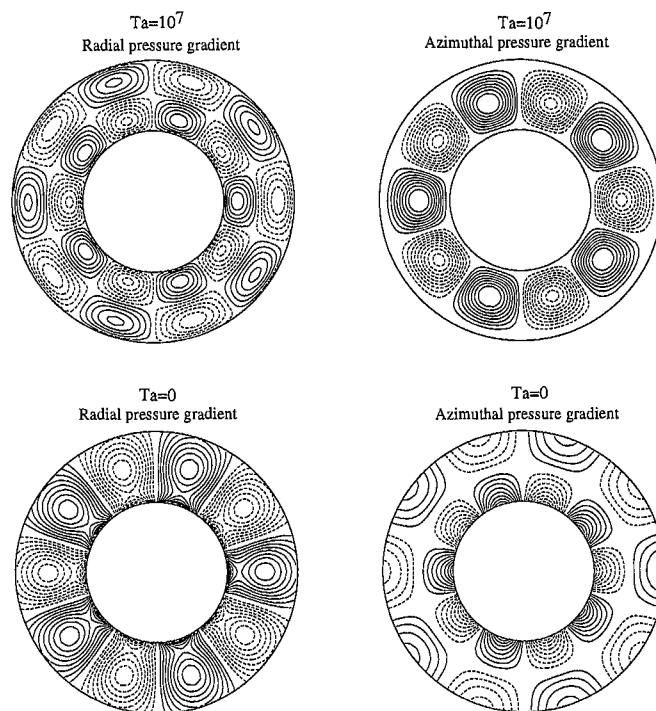


Figura 3.2: Curvas de nivel que muestran las componentes radial y azimuthal del gradiente de presiones correspondiente a un modo columnar de número de onda azimuthal $n = 5$ para rotaciones altas, $Ta = 10^7$ (parte superior), y sin rotación, $Ta = 0$ (parte inferior).

general a lo largo de este trabajo para hacer referencia a las columnas convectivas bidimensionales, tanto para rotaciones altas como bajas.

Como puede verse en las ecuaciones anteriores, al ser la bifurcación estacionaria, la dependencia con el número de Prandtl también desaparece. Por tanto, la bifurcación a columnas es independiente de σ . Además, como las columnas satisfacen las condiciones de contorno en las tapas del anillo, el problema no depende del parámetro de forma del anillo, β . Tan sólo el cociente de radios del anillo, η , influye en el valor del Rayleigh a partir del cual el estado conductivo es inestable frente a perturbaciones independientes de z .

Una vez fijado el valor la relación de radios del anillo, η , para determinar el valor crítico del número de Rayleigh a partir del cual el estado conductivo se desestabiliza a una columna de Taylor, hay que resolver el problema de valores propios (3.25) considerando diferentes n . El número de onda azimutal seleccionado será aquel que minimice el número Rayleigh. En la figura 3.3 se muestran las curvas de estabilidad marginal de las columnas de Taylor en función de η para diferentes números de onda azimutal, n . Para valores del número de Rayleigh por encima de estas curvas, el estado conductivo es inestable frente a las columnas de Taylor. La línea en negrita muestra, para cada valor de η , el número de Rayleigh crítico para el cual se produce la transición a las columnas. El número de onda correspondiente determina el número de parejas de rollos de la solución. Como se aprecia en la gráfica, el número de onda n seleccionado va aumentando a medida que el cociente entre radios crece, mientras que el valor del número de Rayleigh crítico a partir del cual se inicia la convección disminuye, tendiendo al valor crítico del problema de Rayleigh-Bénard.

Finalmente, en la tabla 3.2 se recoge el número de onda azimutal que se selecciona y el número de Rayleigh crítico correspondiente para diferentes valores de la relación entre radios. En el límite $\eta \rightarrow 1$, desaparece la curvatura del anillo y se recupera el problema de Rayleigh-Bénard plano. Para $\eta = 0.98$ el modo seleccionado es el $n = 154$, aunque hay varios modos muy próximos entre sí, y el número de Rayleigh crítico es $Ra = 1707.786$, valor ya muy cercano al que se obtiene en la convección Rayleigh-Bénard, $Ra = 1707.762$.

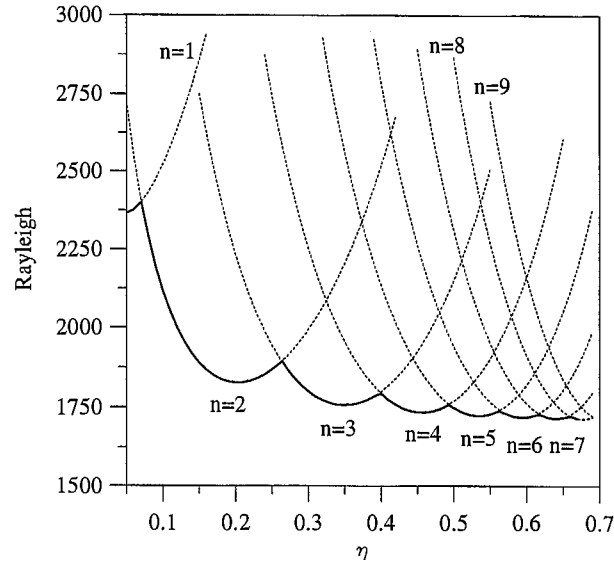


Figura 3.3: Curvas de estabilidad marginal del estado conductivo. Número de Rayleigh en función de la relación de radios. Las curvas etiquetadas con n (líneas discontinuas) son las curvas de estabilidad marginal de n parejas de columnas alineadas con el eje del anillo. La línea en negrita es la envolvente de las curvas de estabilidad.

η	n	Ra_c
0.05	1	2366.436
0.1	2	2116.556
0.2	2	1827.091
0.3	3	1799.856
0.4	4	1793.938
0.5	5	1750.303
0.6	6	1720.597
0.7	9	1714.943
0.8	14	1709.928
0.98	154	1707.786

Tabla 3.2: Número de onda azimutal seleccionado, n , y número de Rayleigh crítico correspondiente para diferentes valores de la relación entre radios, η .

3.4.2 Celdas de convección tridimensionales

Aparte de las columnas convectivas, se ha encontrado que existe un tipo diferente de modo convectivo, tridimensional, que resulta ser dominante para rotaciones bajas. Debido a que los estudios precedentes se restringían al límite de rotaciones altas, en el que el inicio de la convección es en forma de columnas de Taylor, esta solución no se había obtenido anteriormente. Estas celdas convectivas se caracterizan por ser una estructura tridimensional con precesión. Es decir, aparecen vía una bifurcación de Hopf y dan lugar a una onda que viaja en la dirección azimutal. Son consistentes con la teoría de bifurcaciones en sistemas en rotación expuesta en Knobloch (1994, 1996).

En las figuras 3.4 y 3.5 se ha representado la sección transversal y vertical de una solución tridimensional, correspondiente al modo $(m, n) = (1, 4)$ y valores de los parámetros $\beta = 2.5$, $\eta = 0.5$ y dos valores distintos de la rotación viscosa, $\Omega = 0$ y $\Omega = 5$. Como se verá en la próxima sección, en la que se mostrarán las curvas de estabilidad marginal en función de los distintos parámetros, éste es precisamente el modo seleccionado para estos valores de los parámetros que caracterizan al anillo siempre que la rotación sea lo suficientemente baja. Al igual que las columnas de Taylor, las celdas de convección tienen estructura azimutal, por lo que también rompen la simetría R_{θ_0} del sistema. Sin embargo, tal y como se puede apreciar en la parte derecha de la figura 3.4, si $\Omega \neq 0$, a diferencia de las columnas o de las celdas con $\Omega = 0$, las soluciones tienen rota la simetría R_1 de reflexión respecto a planos verticales que pasan por el eje del anillo, pues el sistema ya no posee esta simetría.

En el caso del anillo sin rotación, el término de Coriolis es nulo y la bifurcación es estacionaria, por lo que la rotación y el número de Prandtl no aparecen en las ecuaciones. Sin embargo, cuando el sistema está en rotación, queda gobernado por cuatro parámetros además del número de Rayleigh: la rotación, el número de Prandtl, el parámetro de forma, β , y la relación de radios del anillo, η . Por tanto, las celdas de convección tridimensionales dependen de todos estos parámetros, mientras que las columnas de Taylor dependen únicamente de η . Además, las celdas aparecen tras una bifurcación de Hopf, pues la parte imaginaria del valor propio que cruza el eje y que corresponde a la frecuencia de precesión de la onda al inicio de la convección es ahora diferente de cero.

Si se representa el número de Rayleigh crítico a partir del cual el estado conductivo se desestabiliza a una solución tridimensional en función de la rotación, figura 3.6, se observa como aumenta rápidamente al aumentar Ω , siendo comparable al número de

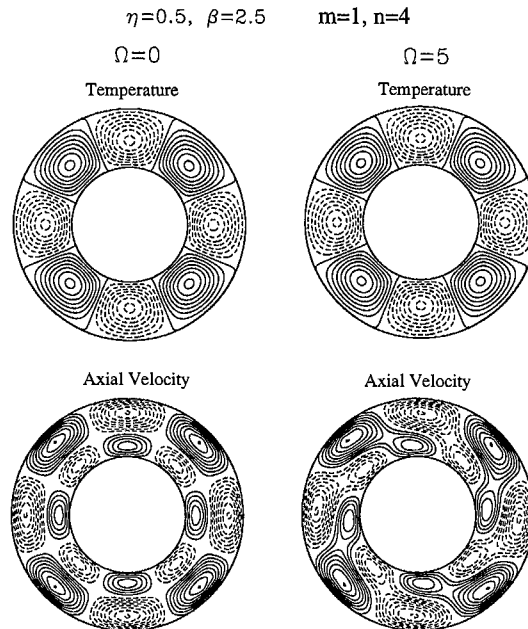


Figura 3.4: Sección transversal que muestra la temperatura en $z = 0$ y la velocidad axial en $z = \beta/2$ para el modo $(m, n) = (1, 4)$ sin rotación (izquierda) y con rotación $\Omega = 5$ (derecha).

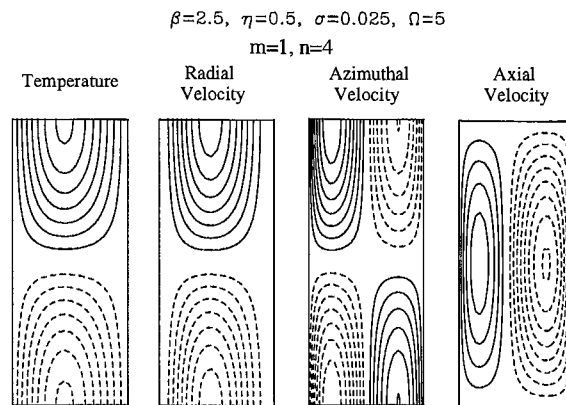


Figura 3.5: Sección vertical que muestra la solución tridimensional correspondiente al modo $(m, n) = (1, 4)$ para valores de los parámetros $\beta = 2.5$, $\eta = 0.5$, $\sigma = 0.025$ y $\Omega = 5$.

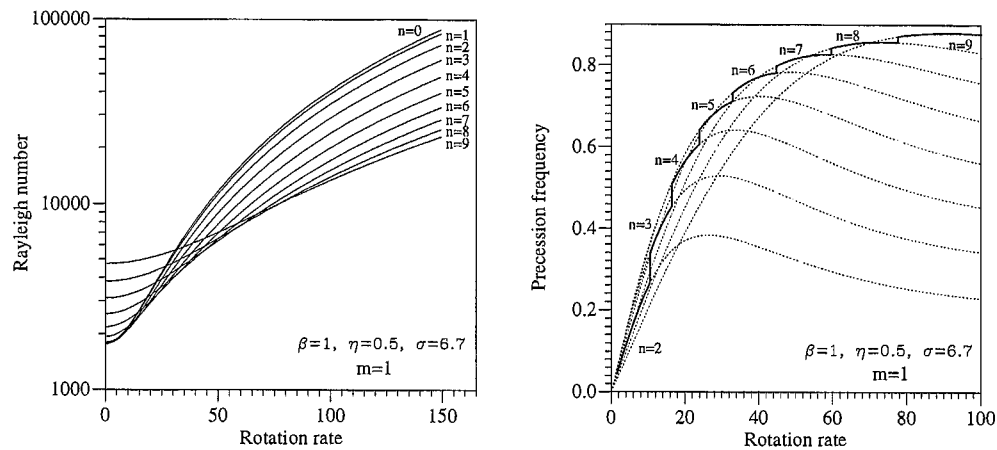


Figura 3.6: Número de Rayleigh y frecuencia de precesión en unidades de tiempo viscoso en función de la rotación correspondientes a un número de onda axial $m = 1$ y diferentes valores del número de onda azimutal, n . Los valores de los parámetros restantes son $\beta = 1$, $\eta = 0.5$ y $\sigma = 6.7$. La línea en negrita en la gráfica de la frecuencia muestra el modo dominante en función de la rotación.

Rayleigh crítico asociado a las columnas de Taylor sólo cuando la rotación es baja. Asimismo, el número de onda azimutal seleccionado es cada vez mayor. Por tanto, tan sólo para rotaciones bajas podría ser posible encontrar una región del espacio de parámetros en la que la convección se inicie en forma de celdas tridimensionales.

3.4.3 Transición de celdas tridimensionales a columnas

En la sección anterior se ha mostrado, para unos valores particulares de los parámetros $\beta = 1$ y $\eta = 0.5$, que el valor del número de Rayleigh para el cual el estado conductivo se desestabiliza a un modo tridimensional es comparable al valor del número de Rayleigh para el cual aparecen columnas de Taylor cuando la rotación del sistema es baja. En esta sección, el estudio se centrará en este régimen en el que las rotaciones del anillo son pequeñas, con el objetivo de determinar, a partir de las distintas curvas de estabilidad marginal, si hay alguna región del espacio de parámetros en la que las celdas tridimensionales son dominantes. Las celdas tridimensionales dependen de todos los parámetros que caracterizan el problema, η ,

β , σ y Ω . Tras un laborioso estudio, debido al gran número de combinaciones de valores de estos parámetros, se verá que, efectivamente, las celdas tridimensionales pueden ser el modo convectivo seleccionado en el inicio de la convección aunque las condiciones de contorno libres en las tapas admitan como solución columnas de Taylor bidimensionales (Alonso *et al.*, 1995).

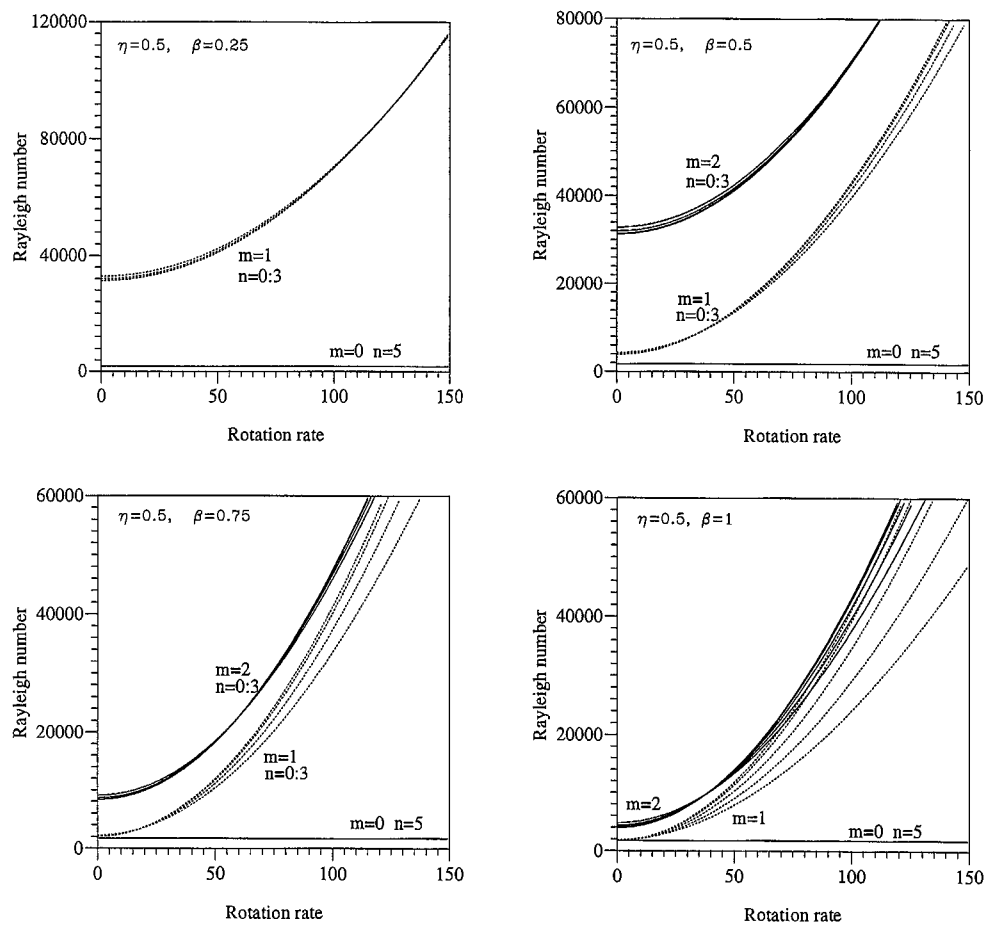


Figura 3.7: Número de Rayleigh, $Ra_c^{(m,n)}$, en función de la rotación para $\sigma = 6.7$, $\eta = 0.5$ y diferentes valores del parámetro de forma, $\beta = 0.25, 0.5, 0.75, 1$.

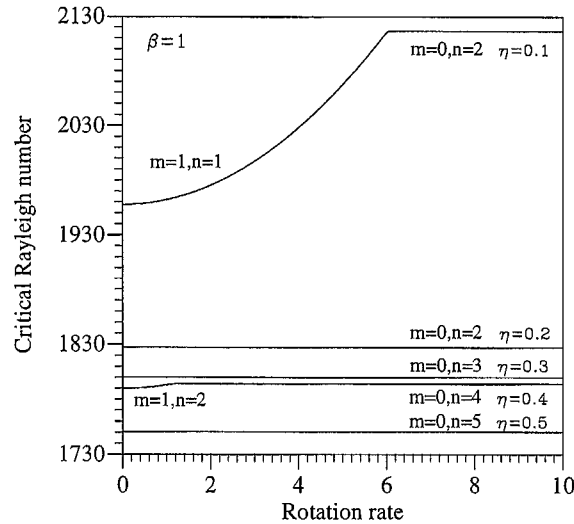


Figura 3.8: Número de Rayleigh crítico, R_{ac} , en función de la rotación para $\sigma = 6.7$, $\beta = 1$ y diferentes valores de la relación entre radios, $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

Para estudiar la influencia del valor del parámetro de forma del anillo en las curvas de estabilidad marginal en función de la rotación, un resultado preliminar a tener en cuenta es el obtenido en el caso de la convección en una caja rectangular. En este problema, los rollos convectivos tienden a alinearse a lo largo de la longitud más corta del contenedor. Haciendo una analogía con el problema de la convección en un anillo cilíndrico que se está analizando, se espera que valores pequeños del parámetro de forma del anillo favorezcan la selección de columnas de Taylor, mientras que para valores grandes se espera una tendencia a la convección axisimétrica. Por tanto, resulta más probable, a priori, que los modos tridimensionales sean dominantes para valores grandes de β . Los resultados obtenidos confirman esta tendencia. La figura 3.7 muestra las curvas de estabilidad del número de Rayleigh en función de la rotación para varios valores del parámetro de forma, $\beta = 0.25, 0.5, 0.75, 1$, cuando la relación entre radios es de $\eta = 0.5$ y el número de Prandtl vale $\sigma = 6.7$. Para valores pequeños de β , por ejemplo $\beta = 0.25$, las curvas correspondientes a los modos tridimensionales, $m \neq 0$, están muy por encima de las que corresponden a las columnas de Taylor, que tal como se vió son independientes de β . Sin embargo, a medida que β aumenta, estas curvas se van acercando cada vez más a la de las columnas, hasta que resultan comparables cuando la rotación es baja.

Cuando $\beta = 1$ la situación es más complicada. En la figura 3.8 se representa el valor del número de Rayleigh crítico en función de la rotación, para diferentes valores de la relación entre radios, $\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$. En la gráfica se puede ver que hay algunos valores de η , por ejemplo, $\eta = 0.2, 0.3, 0.5$, para los cuales el modo seleccionado es siempre una columna de Taylor. Las correspondientes curvas de estabilidad son pues independientes de la rotación. En cambio, para otros valores de η , $\eta = 0.1, 0.4$, hay un intervalo de la rotación en el que se selecciona un modo tridimensional $m \neq 0$. Por ejemplo, para $\eta = 0.1$, si la rotación en unidades de tiempo viscoso es $\Omega < 6$, el estado conductivo es inestable, en primer lugar, frente a perturbaciones con números de onda axial y azimutal $(m, n) = (1, 1)$. Para rotaciones $\Omega > 6$, la perturbación que minimiza el número de Rayleigh corresponde a una columna de Taylor con número de onda azimutal $n = 2$. Por tanto, se produce una transición de celdas tridimensionales a columnas de Taylor a medida que la rotación aumenta.

Para explorar el origen de este comportamiento, en la figura 3.9 se ha representado el número de Rayleigh para diferentes modos, $Ra_c^{(m,n)}$, en función del cociente entre radios, η , para $\beta = 1$ y $\Omega = 0$. La línea gruesa corresponde a la transición entre el estado conductivo y las columnas de Taylor, con el número de onda azimutal n que

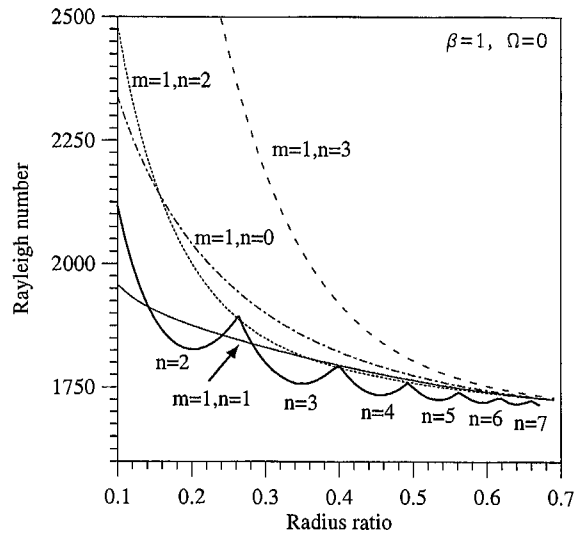


Figura 3.9: Número de Rayleigh, $Ra_c^{(m,n)}$, en función del cociente entre radios η para $\sigma = 6.7$, $\beta = 1$ y $\Omega = 0$.

minimiza el valor del Rayleigh. Esta línea oscila en función de η de manera similar a como lo hace en el problema de Rayleigh-Bénard. Las curvas restantes corresponden a modos tridimensionales con número de onda axial $m = 1$ y diferentes números de onda azimutales, $n = 0, 1, 2, 3$. Para ciertos intervalos de η la curva de estabilidad marginal de las columnas se cruza con la de los modos $m = 1$, tanto con $n = 1$ como con $n = 2$. Las celdas tridimensionales son pues dominantes en estos intervalos.

La tendencia a una transición a celdas tridimensionales para valores bajos de la rotación continúa, y se vuelve más acusada, a medida que aumenta el valor del parámetro de forma, β . Este hecho se puede apreciar en la figura 3.10, en la que se representa el número de Rayleigh crítico en función de la rotación para $\eta = 0.5$ y valores más elevados de β , $\beta = 1.25, 1.5, 2.5, 3$. Para todos estos valores de β se produce un comportamiento similar. Cuando la rotación es suficientemente baja, el $Ra_c^{(m,n)}$ correspondiente a los estados con $m \neq 0$ es menor que el correspondiente a las columnas de Taylor, pero a partir de una cierta rotación crítica, que aumenta al aumentar β , los estados $m \neq 0$ dejan de ser dominantes. Se puede ver también que para los valores $\beta = 2.5$ y $\beta = 3$, hay dos modos tridimensionales diferentes que son dominantes, según el valor de la rotación, antes de que la curva correspondiente a la columna de Taylor minimice el número de Rayleigh. Por ejemplo, para $\beta = 3$, domina el modo $(m, n) = (2, 3)$ entre $0 < \Omega < 3$, pasa a dominar el modo $(m, n) =$

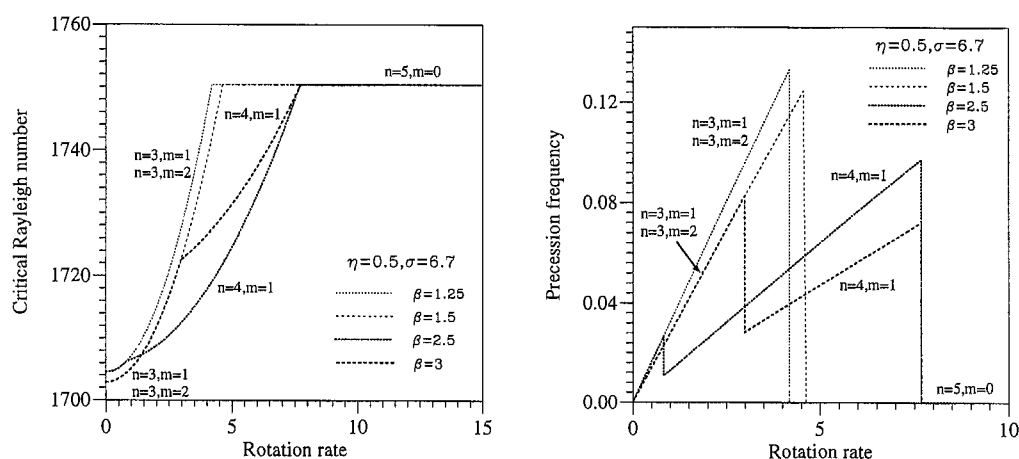


Figura 3.10: Número de Rayleigh crítico, Ra_c , y frecuencia de precesión en unidades de tiempo viscoso en función de la rotación para $\sigma = 6.7$, $\eta = 0.5$ y diferentes valores del parámetro de forma, $\beta = 1.25, 1.5, 2.5, 3$.

(1, 4) entre $3 < \Omega < 7.5$ y finalmente domina la columna de Taylor $(m, n) = (0, 5)$ cuando $\Omega > 7.5$. Cabe destacar que, como se puede apreciar en la gráfica, la curva de estabilidad correspondiente al modo $(m, n) = (2, 3)$ cuando $\beta = 3$ es la misma que la correspondiente al modo $(m, n) = (1, 3)$ cuando $\beta = 1.5$. Sucede lo mismo con los modos $(m, n) = (2, 3)$ cuando $\beta = 2.5$ y $(m, n) = (1, 3)$ cuando $\beta = 1.25$. Esto es debido a que la dependencia con la coordenada z es en forma de funciones trigonométricas cuyo argumento es $(m\pi z/\beta)$, por lo que lo importante es la relación m/β . En la figura 3.10 se muestra también la frecuencia de precesión asociada a los modos tridimensionales. Como esta frecuencia es siempre positiva, la onda viaja en sentido horario.

Finalmente, en la figura 3.11 se representan las curvas de estabilidad marginal correspondientes a los diferentes modos convectivos (m, n) en función del parámetro de forma, β . El valor de la relación entre radios se ha fijado, $\eta = 0.5$. La gráfica superior corresponde a rotación nula, $\Omega = 0$, y la inferior a $\Omega = 5$. Cuando la rotación es distinta de cero, se muestra también la frecuencia de precesión asociada a los modos tridimensionales. Si la rotación es nula, se observa que los modos dominantes son tridimensionales prácticamente en todo el intervalo de β representado, es decir, a partir de $\beta \gtrsim 1$. El número de onda azimutal del modo seleccionado va oscilando entre $n = 2, 3, 4$, mientras que el axial va aumentando a medida que aumenta β , o lo que es lo mismo, la longitud del cilindro. Al considerar el cilindro en rotación, $\Omega = 5$, las curvas de estabilidad correspondientes a los modos $m \neq 0$ se desplazan hacia arriba. Se puede ver que ahora aumenta el intervalo de valores de β para el que se produce una bifurcación a columnas de Taylor. La columna $(m, n) = (0, 5)$ es dominante para $\beta < 1.6$. A partir de $\beta = 1.6$ dominan modos tridimensionales cuyo número de onda azimutal es siempre $n = 4$ y con número de onda axial aumentando con β . Si se aumenta la rotación, las curvas tridimensionales continúan desplazándose hacia arriba. Por tanto, para cada valor de β existe un valor de la rotación a partir del cual el inicio de la convección se produce en forma de columnas de Taylor.

Por último, señalar que las gráficas comentadas hasta el momento en esta sección corresponden al número de Prandtl del agua, $\sigma = 6.7$. Aunque los modos tridimensionales dependen del valor de σ , los resultados son cualitativamente similares si se cambia el número de Prandtl. En particular, si $\Omega = 0$ el problema es independiente de σ , por lo que los modos seleccionados al inicio de la convección coinciden. Para $\Omega \neq 0$, se producen ligeras diferencias en el modo seleccionado. En la figura 3.12 se representa el valor del número de Rayleigh en función de β para los mismos parámetros del caso anterior, $\eta = 0.5$ y $\Omega = 5$, pero para $\sigma = 0.025$, el número de Prandtl del mercurio. Se puede observar como ahora hay un pequeño intervalo de valores de β en el que domina el modo $(m, n) = (1, 3)$, que no dominaba nunca para esta rotación

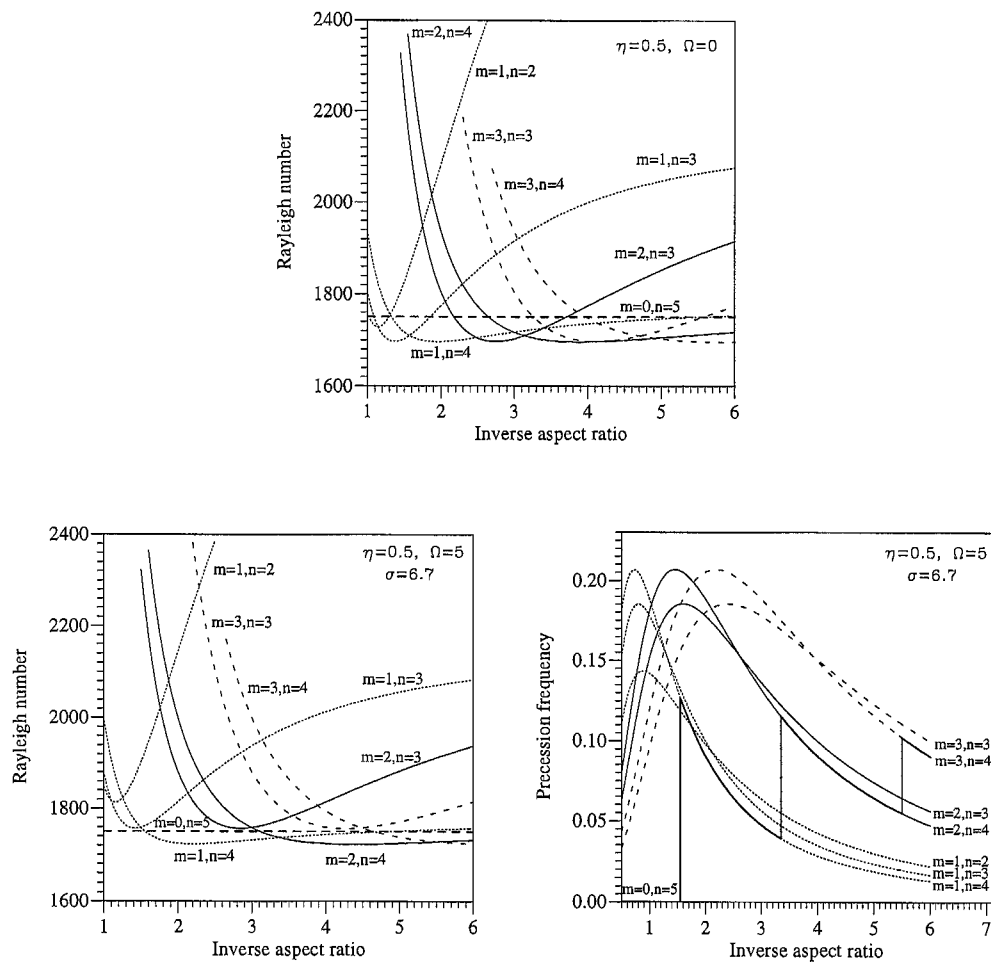


Figura 3.11: Número de Rayleigh, $Ra_c^{(m,n)}$, en función del parámetro de forma (*inverse aspect ratio*) para $\sigma = 6.7$, $\eta = 0.5$ y rotación viscosa $\Omega = 0$ (parte superior) y $\Omega = 5$ (parte inferior izquierda). En la parte inferior derecha, frecuencia de precesión cuando $\Omega = 5$.

cuando $\sigma = 6.7$. Sin embargo, la diferencia principal al cambiar el valor del número de Prandtl es la magnitud de la frecuencia de precesión, que aumenta al disminuir σ . Como se desprende de la gráfica, hay un orden de magnitud de diferencia entre las frecuencias de precesión, lo que indica que la menor pérdida de energía por disipación viscosa se invierte en aumentar la energía cinética de la onda.

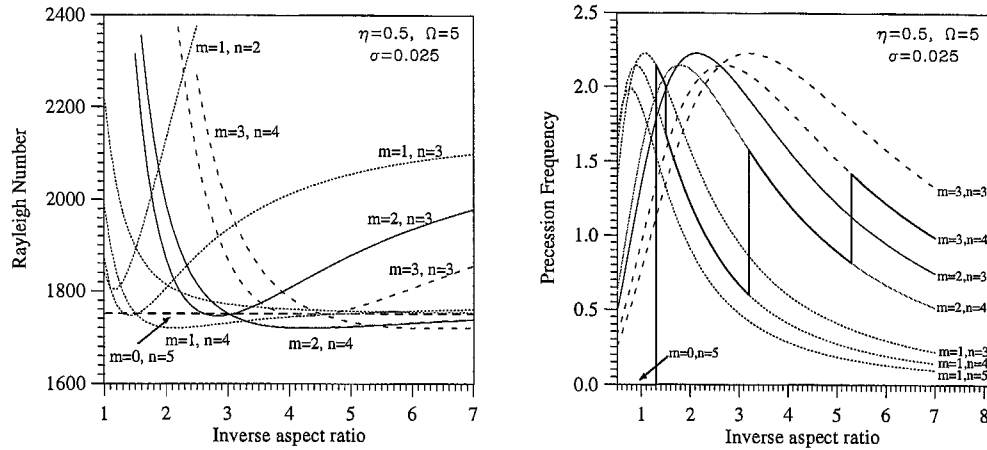


Figura 3.12: Número de Rayleigh, $Ra_c^{(m,n)}$, y frecuencia de precesión en función del parámetro de forma para $\sigma = 0.025$, $\eta = 0.5$ y rotación viscosa $\Omega = 5$.

3.5 Discusión

Se ha mostrado que en un anillo cilíndrico en rotación con tapas planas, gravedad radial y calentamiento lateral el modo dominante en el inicio de la convección puede ser una onda viajera en la dirección azimutal, aunque las condiciones de contorno libres en las tapas admitan una solución en forma de columnas estacionarias. Se ha establecido la dependencia de la transición entre estos dos tipos de modos con los distintos parámetros del sistema y se ha visto que depende del valor de la rotación del sistema, Ω , de la relación entre la altura y la anchura del anillo, β , y del cociente entre radios del anillo, η . Cuando la rotación del anillo es alta, el efecto estabilizador de la fuerza de Coriolis domina la dinámica del sistema, y el modo seleccionado es siempre una columna de Taylor estacionaria, exactamente bidimensional por permitirle las condiciones de contorno consideradas en las tapas. En este régimen se produce un balance geostrofico. El valor de la relación entre radios determina el número de onda azimutal de la columna seleccionada, que aumenta al aumentar η . Para rotaciones del anillo bajas, el sistema sigue seleccionando un modo columnar estrictamente bidimensional cuando $\beta \lesssim 1$. Sin embargo, para $\beta \gtrsim 1$ y determinados valores de η se produce una bifurcación de Hopf que da lugar a celdas convectivas tridimensionales que precesionan en la dirección azimutal.

Los resultados obtenidos se pueden comparar con el trabajo llevado a cabo por Greed y Zhang (Greed & Zhang, 1996) en el que también se analiza la convección en un anillo cilíndrico con gravedad radial, pero con calentamiento interno del fluido. En concreto, se considera un gradiente de temperatura lineal con la coordenada radial, originado por una distribución uniforme de fuentes de calor en el anillo (Chandrasekhar, 1961). Esta forma de calentamiento permite obtener una expresión analítica para las columnas de Taylor en términos de las funciones de Bessel de primera y segunda clase, J_n e Y_n , utilizando un método similar al propuesto por Jones & Moore (1979). De este modo, se obtiene el valor del Rayleigh crítico para el que se produce la transición a columnas de Taylor y el número de onda azimutal seleccionado, que coincide con los resultados presentados en este trabajo. Sin embargo, mientras que fijando la temperatura en las paredes laterales los modos axisimétricos $n = 0$ no dominan en el amplio rango de parámetros explorado, cuando el calentamiento es interno estos modos son seleccionados por el sistema para rotaciones bajas siempre que $\eta > 0.6$. La convección en un anillo cilíndrico con gravedad y calentamiento radiales es, pues, un fenómeno complejo en el que distintos tipos de modos convectivos pueden ser seleccionados en función de los parámetros que intervienen en la dinámica y de la forma de calentamiento considerada.

Desde el punto de vista de la teoría de bifurcaciones en sistemas en rotación, este problema ha resultado ser especial. Por una parte, la presencia de ondas viajeras en el anillo se ajusta plenamente a ella, confirmando una vez más que en sistemas con simetría $SO(2)$ las estructuras que rompen la simetría de rotación dan lugar a estructuras con precesión. Sin embargo, las columnas de Taylor estacionarias por ser bidimensionales permiten escribir el término de Coriolis en forma de un gradiente. En ese caso, las ecuaciones dejan de depender de la rotación y recuperan la simetría $O(2)$. Hay que resaltar la importancia de considerar condiciones de contorno libres en las tapas, pues la posibilidad de convección estrictamente bidimensional es compatible con estas condiciones de contorno, pero cualquier otro tipo de condición impediría que las columnas bidimensionales fueran solución de las ecuaciones.

Capítulo 4

Estabilidad del estado conductor: condiciones de contorno de adherencia

La elección de las condiciones de contorno para la velocidad en las tapas del anillo juega un papel fundamental en la dinámica del sistema. Las condiciones de contorno de adherencia, más realistas desde el punto de vista experimental, impiden que las columnas convectivas estrictamente bidimensionales sean solución de las ecuaciones y fuerzan que el movimiento dependa de la coordenada z . Este hecho tiene consecuencias que afectan sustancialmente a la convección, tanto para rotaciones altas del sistema como para rotaciones bajas, y que se ponen de manifiesto en el análisis de estabilidad lineal del estado conductor.

En el caso de rotaciones bajas, las estructuras convectivas que aparecen en el inicio de la convección son completamente diferentes a las obtenidas en el capítulo anterior cuando las condiciones de contorno en las tapas son libres. Mientras que con condiciones libres hay dos tipos de modos convectivos, columnas estrictamente bidimensionales y celdas tridimensionales, que pueden ser dominantes según el valor de los parámetros que intervienen en la dinámica, se verá a lo largo del capítulo que ahora las soluciones son siempre flujos tridimensionales con precesión.

En el límite de rotaciones altas, como consecuencia del teorema de Taylor-Proudman y dado que la forma de calentamiento lo permite, es de esperar que la convección sea prácticamente bidimensional en las zonas donde la disipación viscosa sea despreciable. Además, se deben formar capas límite de Ekman en las proximidades de las tapas del anillo, de un espesor cada vez menor a medida que la rotación aumenta, cuya presencia es necesaria para que se cumplan las condiciones de contorno en las tapas.

Estas columnas de Taylor fueron observadas en el laboratorio por Busse y Carrigan (Busse & Carrigan, 1974). En el dispositivo experimental utilizado la fuerza centrífuga emula la gravedad radial, por lo que para inducir una inestabilidad térmica el cilindro exterior se mantiene a una temperatura superior a la del interior. Por otra parte, se trabaja con rotaciones del anillo elevadas, con objeto de minimizar el efecto de la componente vertical de la gravedad. Esta componente, siempre presente en el laboratorio, tiene como único efecto si se mantiene bajo el valor del número de Ekman ($E = \nu/\Omega L^2$) modificar el estado básico conductivo, que pasa a tener una componente azimutal de la velocidad no nula axisimétrica (viento térmico). El valor del número de Rayleigh crítico para el que se inicia la inestabilidad térmica no se ve afectado (Busse, 1970). Los resultados que se presentan en el trabajo de Busse & Carrigan (1974) corresponden a tres situaciones diferentes, dependiendo de cuál es el mecanismo estabilizador dominante. En primer lugar, se consideran valores elevados del parámetro de forma, de forma que la disipación en el interior del anillo es dominante. Las tapas del anillo prácticamente no influyen en la convección y el sistema resultante equivale a considerar condiciones de contorno libres. Para $\beta = 47.6$ y $\eta = 0.92$ se muestran algunos valores críticos para los que se inicia la convección, que es en forma de columnas estacionarias. Por otra parte, se estudia también el inicio de la convección en el caso de que la disipación se produzca principalmente en las capas límite de Ekman. Para eso es necesario considerar valores pequeños de la altura del cilindro. Los casos analizados corresponden a $\beta = 0.98$ y $\beta = 0.46$, siendo el valor de la relación entre radios de $\eta = 0.63$. Las estructuras convectivas observadas son también columnas bidimensionales, siendo el efecto de las capas de Ekman retrasar el inicio de la convección. De todas formas, como se remarca en el propio artículo, los valores que se presentan son tan sólo aproximados, pues en este caso el error experimental es grande. Finalmente, se considera el caso de que las tapas del anillo estén inclinadas. Las rotaciones elevadas fuerzan que la convección continúe siendo bidimensional, pero ahora las estructuras viajan en la dirección azimutal en forma de ondas de Rossby. La inclinación de las tapas tiene un efecto estabilizador en el sistema y el número de onda azimutal seleccionado aumenta considerablemente. Experimentos realizados posteriormente en un anillo cilíndrico en rotación con tapas inclinadas (Azouni *et al.*,

1986) confirman la existencia de ondas de Rossby que viajan en la dirección azimutal.

En este capítulo se mostrará que es posible obtener columnas de Taylor con precesión en la dirección azimutal también en el problema con tapas planas, siempre y cuando se consideren condiciones de contorno de adherencia en las tapas. Sin embargo, estas soluciones no hay que confundirlas con ondas de Rossby, pues no han sido inducidas topográficamente y sus frecuencias de precesión correspondientes son considerablemente menores. Como las capas límite de Ekman que se forman son las responsables de la precesión de las columnas de Taylor, se espera que esta frecuencia tienda a cero en el límite de rotación infinita.

A continuación, se empezará el capítulo describiendo el método numérico usado para resolver las ecuaciones que determinan la estabilidad del estado conductivo. Al igual que en el caso anterior, se ha trabajado con la formulación alternativa de las ecuaciones escritas en potenciales de la velocidad. Las nuevas condiciones de contorno para la velocidad impiden separar el problema en la dirección z , por lo que el problema de valores propios que ahora se obtiene es bidimensional. Seguidamente, se presentarán los resultados correspondientes a la inestabilidad primaria en función de los parámetros del problema, distinguiendo los casos de rotaciones del anillo bajas y altas, y haciendo especial énfasis en las diferencias que se producen respecto al problema con condiciones de contorno libres. Se estudiará el efecto que las capas de Ekman tienen sobre todo el sistema convectivo. Para finalizar, se analizarán los resultados que se obtienen cuando el problema se generaliza utilizando condiciones de contorno mixtas en las tapas del anillo.

4.1 Ecuaciones de convección linealizadas

La estabilidad lineal del estado conductivo cuando se consideran condiciones de contorno de adherencia viene determinada por las mismas ecuaciones que en el caso libre. Al igual que antes, se trabaja con las ecuaciones escritas en función de los potenciales escalares de la velocidad, (2.15), y se analiza por separado el problema axisimétrico y el no axisimétrico. Las ecuaciones quedan de la misma forma, sustituyendo las condiciones de contorno (2.46) y (2.42) por las condiciones (2.47) y (2.43). De nuevo hay que resolver dos sistemas lineales de ecuaciones, de orden 4 y 6 en la dirección radial. Estos dos sistemas se expresan

a) **AXISIMÉTRICO**

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)f = \text{Ta}^{1/2}\partial_z g, \quad (4.1a)$$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)\nabla_-^2 g = -\text{Ra}\partial_z T - \text{Ta}^{1/2}\partial_z f, \quad (4.1b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2)T = \frac{1}{r \ln \eta} \partial_z g, \quad (4.1c)$$

$$g = \partial_r g = f = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.2)$$

$$g = \partial_z g = f = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (4.3)$$

b) **NO AXISIMÉTRICO**

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2)\nabla_h^2 \Psi = \frac{\text{Ra}}{r} \partial_\theta T + \text{Ta}^{1/2} \partial_z \nabla_h^2 \Phi, \quad (4.4a)$$

$$(\sigma^{-1}\partial_t - \nabla^2)\nabla^2 \nabla_h^2 \Phi = \text{Ra}\partial_z D_+ T - \text{Ta}^{1/2} \partial_z \nabla_h^2 \Psi, \quad (4.4b)$$

$$(\partial_t - \nabla^2)T = -\frac{1}{r \ln \eta} \left(\partial_{rz}^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi \right), \quad (4.4c)$$

$$\partial_{rz}^2 \Phi + \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi = \partial_r \Psi = \Phi = \nabla_h^2 \Phi = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.5)$$

$$r \partial_{rz}^2 \nabla_h^2 \Psi - \partial_\theta \nabla_h^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.6)$$

$$\partial_z \Phi = \Psi = \Phi = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (4.7)$$

4.2 Tratamiento numérico de las ecuaciones

4.2.1 Problema axisimétrico

- **Desarrollo de las perturbaciones y separación en subproblemas**

El problema de la estabilidad del estado conductivo respecto a perturbaciones que mantienen la axisimetría se ha resuelto utilizando un método de Galerkin en la dirección vertical y pseudoespectral de colocación en la dirección radial. El tratamiento de la dirección radial es análogo al del problema axisimétrico con condiciones de contorno libres en las tapas. Puesto que las condiciones que verifican las variables

en las paredes laterales no han cambiado, de nuevo se desarrollan las perturbaciones en las bases de funciones (3.11) y (3.12), formadas por combinaciones de polinomios de Chebychev que satisfacen las condiciones de contorno. Estas bases de funciones, $\{g^l(x)\}_{l=4 \div L}$, $\{f^l(x)\}_{l=2 \div L}$ y $\{T^l(x)\}_{l=2 \div L}$, se habían obtenido de forma analítica y se expresan

$$g^l(x) = \begin{cases} (\frac{l^2}{4} - 1)\mathcal{T}_0(x) - \frac{l^2}{4}\mathcal{T}_2(x) + \mathcal{T}_l(x) & l = \dot{2} \\ \frac{1}{8}(l^2 - 9)\mathcal{T}_1(x) - \frac{1}{8}(l^2 - 1)\mathcal{T}_3(x) + \mathcal{T}_l(x) & l \neq \dot{2} \end{cases}$$

$$f^l(x) = T^l(x) = \begin{cases} -\mathcal{T}_0(x) + \mathcal{T}_l(x) & l = \dot{2} \\ -\mathcal{T}_1(x) + \mathcal{T}_l(x) & l \neq \dot{2} \end{cases}$$

Para implementar un método de Galerkin en la dirección vertical, es necesario desarrollar las perturbaciones en una base de funciones que verifique las condiciones de contorno en las tapas del anillo. Para las variables f y T se pueden utilizar funciones trigonométricas, pues f se anula en las tapas y T cumple derivada primera nula en ellas. Sin embargo, g verifica función y derivada primera nulas en las tapas simultáneamente, por lo que las funciones trigonométricas no son una base adecuada para desarrollar g . Un conjunto de funciones linealmente independiente que satisface la doble condición $g = 0$ y $\partial_z g = 0$ en $z = \pm 1/2$ son las funciones de Harris y Reid (Chandrasekhar, 1961). Son de la forma

$$C_m(z) = \frac{\cosh \lambda_m z}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_m} - \frac{\cos \lambda_m z}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m},$$

$$S_m(z) = \frac{\sinh \mu_m z}{\sinh \frac{1}{2} \mu_m} - \frac{\sin \mu_m z}{\sin \frac{1}{2} \mu_m},$$

donde el valor de las constantes λ_m y μ_m se recoge en el Apéndice A, junto con algunas de las propiedades de estas funciones. El conjunto de funciones $\{C_m(z), S_m(z)\}_{m=1 \div M}$ constituyen la base usada para desarrollar la dependencia en z de la variable g .

A diferencia del problema de estabilidad lineal con condiciones libres, el problema de valores propios al que se llegará en el caso rígido es bidimensional. En el método de Galerkin se proyecta cada ecuación sobre el subespacio al cual pertenecen las funciones en las que se ha desarrollado la variable que aparece en las ecuaciones derivada respecto al tiempo. Como las funciones que cumplen las condiciones de contorno en la dirección vertical dependen de la variable de la que se trate, cada ecuación se proyecta sobre un conjunto de funciones diferente. En el caso tratado en el capítulo

anterior, todas las variables se desarrollaban en funciones trigonométricas que verificaban el contorno, lo que permitía, al proyectar las ecuaciones, desacoplar la dirección vertical. Sin embargo, en este caso, al tener que usar las funciones de Harris y Reid para desarrollar una de las variables, la proyección de las ecuaciones no desacoplará la dirección axial. Como consecuencia, el problema de valores propios resultante será bidimensional y la dimensión de las matrices involucradas se multiplicará por un factor del orden del número de modos usados en la dirección vertical con respecto a la dimensión de las matrices en el problema libre. Por este motivo, la memoria requerida por el código numérico aumentará considerablemente a medida que se exija una mayor resolución vertical. No obstante, en nuestro caso, si se separan los potenciales en la parte simétrica y la antisimétrica respecto al plano medio del anillo, el sistema (4.1)–(4.3) se puede desacoplar en dos subsistemas de ecuaciones que reducen a la mitad la envergadura del problema. Es decir, si

$$f = f_s + f_a, \quad g = g_s + g_a, \quad T = T_s + T_a,$$

llamaremos sistema simétrico al que corresponde a una temperatura simétrica

$$\text{SIMÉTRICO} \begin{cases} (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)f_s = \text{Ta}^{1/2}\partial_z g_a, \\ (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)\nabla_-^2 g_a = -\text{Ra}\partial_z T_s - \text{Ta}^{1/2}\partial_z f_s, \\ (\partial_t - \nabla^2)T_s = \frac{1}{r \ln \eta} \partial_z g_a, \end{cases} \quad (4.8)$$

y antisimétrico al de temperatura antisimétrica

$$\text{ANTISIMÉTRICO} \begin{cases} (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)f_a = \text{Ta}^{1/2}\partial_z g_s, \\ (\sigma^{-1}\partial_t - \nabla_-^2)\nabla_-^2 g_s = -\text{Ra}\partial_z T_a - \text{Ta}^{1/2}\partial_z f_a, \\ (\partial_t - \nabla^2)T_a = \frac{1}{r \ln \eta} \partial_z g_s. \end{cases} \quad (4.9)$$

Las condiciones de contorno que verifican los subsistemas son

$$\begin{cases} g_a = \partial_r g_a = f_s = T_s = 0 & \text{en } \partial\Omega_r, \\ g_a = \partial_z g_a = f_s = \partial_z T_s = 0 & \text{en } \partial\Omega_z, \end{cases} \quad \begin{cases} g_s = \partial_r g_s = f_a = T_a = 0 & \text{en } \partial\Omega_r, \\ g_s = \partial_z g_s = f_a = \partial_z T_a = 0 & \text{en } \partial\Omega_z. \end{cases}$$

De esta manera, se usan las funciones de Harris y Reid simétricas, C_m , para desarrollar la variable g_s y las antisimétricas, S_m , para desarrollar g_a . La dependencia en z de las variables f_s , T_s , f_a y T_a se introduce mediante funciones trigonométricas simétricas y antisimétricas que cumplan las correspondientes condiciones de contorno.

Los desarrollos considerados son de la forma

$$\left\{ \begin{array}{l} f_s(x, z, t) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M f_m^s(x) \cos(\alpha_m z / \beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M \sum_{l=2}^L \hat{f}_{l,m}^s f^l(x) \cos(\alpha_m z / \beta), \\ g_a(x, z, t) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M g_m^a(x) S_m(z / \beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M \sum_{l=4}^L \hat{g}_{l,m}^a g^l(x) S_m(z / \beta), \\ T_s(x, z, t) = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M T_m^s(x) \cos(\beta_m z / \beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=0}^M \sum_{l=2}^L \hat{T}_{l,m}^s T^l(x) \cos(\beta_m z / \beta), \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} f_a(x, z, t) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M f_m^a(x) \sin(\beta_m z / \beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M \sum_{l=2}^L \hat{f}_{l,m}^a f^l(x) \sin(\beta_m z / \beta), \\ g_s(x, z, t) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M g_m^s(x) C_m(z / \beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M \sum_{l=4}^L \hat{g}_{l,m}^s g^l(x) C_m(z / \beta), \\ T_a(x, z, t) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M T_m^a(x) \sin(\alpha_m z / \beta) = e^{\lambda t} \sum_{m=1}^M \sum_{l=2}^L \hat{T}_{l,m}^a T^l(x) \sin(\alpha_m z / \beta), \end{array} \right.$$

donde se ha usado la notación

$$\alpha_m \equiv (2m - 1)\pi, \quad \beta_m \equiv 2m\pi.$$

En la coordenada vertical, z , se ha hecho una traslación que no afecta a las ecuaciones. Originalmente, la variable z estaba definida entre 0 y β , pero como las funciones de Harris y Reid están definidas entre $-1/2$ y $1/2$, la coordenada z que se ha usado en los desarrollos cumple $z \in (-\beta/2, \beta/2)$ y se ha tomado como argumento de las funciones de Harris y Reid z/β .

• Discretización de las ecuaciones

Una vez se dispone de los desarrollos de las perturbaciones, hay que sustituirlos en las ecuaciones. Tras efectuar las derivadas respecto a z (las derivadas de las funciones de Harris y Reid están escritas en el Apéndice A), los dos sistemas de ecuaciones (4.8) y (4.9) se expresan

SIMÉTRICO

$$\lambda \sum_{m=1}^M f_m^s(x) \cos(\alpha_m z/\beta) = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_{-h}^2 - \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right)^2 \right) f_m^s(x) \cos(\alpha_m z/\beta) + \text{Ta}^{1/2} g_m^a(x) S_m'(z/\beta) \right], \quad (4.10a)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{m=1}^M \left[\nabla_{-h}^2 g_m^a(x) S_m(z/\beta) + g_m^a(x) S_m''(z/\beta) \right] = \\ = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left[\left(\nabla_{-h}^4 + \left(\frac{\mu_m}{\beta} \right)^4 \right) S_m(z/\beta) + 2 \nabla_{-h}^2 S_m''(z/\beta) \right] g_m^a(x) + \right. \\ \left. + \text{Ra} \frac{\beta_m}{\beta} T_m^s(x) \sin(\beta_m z/\beta) + \text{Ta}^{1/2} \frac{\alpha_m}{\beta} f_m^s(x) \sin(\alpha_m z/\beta) \right], \quad (4.10b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{m=0}^M T_m^s(x) \cos(\beta_m z/\beta) = \sum_{m=0}^M \left(\nabla_h^2 - \left(\frac{\beta_m}{\beta} \right)^2 \right) T_m^s(x) \cos(\beta_m z/\beta) + \\ + \frac{2}{(x+\delta) \ln \eta} \sum_{m=1}^M g_m^a(x) S_m'(z/\beta), \quad (4.10c) \end{aligned}$$

ANTISIMÉTRICO

$$\lambda \sum_{m=1}^M f_m^a(x) \sin(\beta_m z/\beta) = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_{-h}^2 - \left(\frac{\beta_m}{\beta} \right)^2 \right) f_m^a(x) \sin(\beta_m z/\beta) + \text{Ta}^{1/2} g_m^s(x) C_m'(z/\beta) \right], \quad (4.11a)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{m=1}^M \left[\nabla_{-h}^2 g_m^s(x) C_m(z/\beta) + g_m^s(x) C_m''(z/\beta) \right] = \\ = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left[\left(\nabla_{-h}^4 + \left(\frac{\lambda_m}{\beta} \right)^4 \right) C_m(z/\beta) + 2 \nabla_{-h}^2 C_m''(z/\beta) \right] g_m^s(x) - \right. \\ \left. - \text{Ra} \frac{\alpha_m}{\beta} T_m^a(x) \cos(\alpha_m z/\beta) - \text{Ta}^{1/2} \frac{\beta_m}{\beta} f_m^a(x) \cos(\beta_m z/\beta) \right], \quad (4.11b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{m=1}^M T_m^a(x) \sin(\alpha_m z/\beta) = \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_h^2 - \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right)^2 \right) T_m^a(x) \sin(\alpha_m z/\beta) + \right. \\ \left. + \frac{2}{(x+\delta) \ln \eta} g_m^s(x) C_m'(z/\beta) \right], \quad (4.11c) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}\nabla_h^2 &= 4\left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)}\partial_x\right], \\ \nabla_{-h}^2 &= 4\left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)}\partial_x - \frac{1}{(x+\delta)^2}\right].\end{aligned}$$

Cada una de las ecuaciones anteriores se ha de proyectar sobre el subespacio al que pertenecen las funciones de la variable que aparece en las ecuaciones derivada respecto al tiempo. De este modo, se proyectará la ecuación (4.10a) sobre las funciones $\{\cos(\alpha_k z/\beta)\}_{k=1\div M}$, la ecuación (4.10b) sobre $\{S_k(z/\beta)\}_{k=1\div M}$ y la (4.10c) sobre $\{\cos(\beta_k z/\beta)\}_{k=0\div M}$, donde el operador de proyección se define como

$$\langle p(z) | q(z) \rangle = \int_{-\beta/2}^{\beta/2} p(z)q(z)dz.$$

El sistema de ecuaciones simétrico, tras efectuar la proyección de las ecuaciones, da lugar a

$$\lambda \sum_{m=1}^M f_m^s(x) \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_{-h}^2 - \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right)^2 \right) f_m^s(x) \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} + \text{Ta}^{1/2} g_m^a(x) A_{k,m}^s \right], \quad (4.12a)$$

$$\begin{aligned}\lambda \sum_{m=1}^M \left[\nabla_{-h}^2 g_m^a(x) \beta \delta_{k,m} + g_m^a(x) B_{k,m}^s \right] &= \\ &= \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_{-h}^4 + \left(\frac{\mu_m}{\beta} \right)^4 \right) g_m^a(x) \beta \delta_{k,m} + 2 \nabla_{-h}^2 g_m^a(x) B_{k,m}^s + \right. \\ &\quad \left. + \text{Ra} \frac{\beta_m}{\beta} T_m^s(x) C_{k,m}^s + \text{Ta}^{1/2} \frac{\alpha_m}{\beta} f_m^s(x) D_{k,m}^s \right], \quad (4.12b)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda \sum_{m=0}^M T_m^s(x) \beta c_m \delta_{k,m} &= \sum_{m=0}^M \left(\nabla_h^2 - \left(\frac{\beta_m}{\beta} \right)^2 \right) T_m^s(x) c_m \beta \delta_{k,m} + \\ &\quad + \frac{2}{(x+\delta) \ln \eta} \sum_{m=1}^M g_m^a(x) E_{k,m}^s, \quad (4.12c)\end{aligned}$$

donde $c_m = 1$ si $m = 0$ y $c_m = 1/2$ si $m \neq 0$, y $A_{k,m}^s$, $B_{k,m}^s$, $C_{k,m}^s$, $D_{k,m}^s$ y $E_{k,m}^s$ se definen más adelante. Respecto al sistema de ecuaciones antisimétrico, se usa la base de funciones $\{\sin(\beta_k z/\beta)\}_{k=1\div M}$ para proyectar la ecuación (4.11a), $\{C_k(z/\beta)\}_{k=1\div M}$

para proyectar (4.11b) y $\{\sin(\alpha_k z/\beta)\}_{k=1 \div M}$ para la ecuación (4.11c). El sistema resultante se expresa

$$\lambda \sum_{m=1}^M f_m^a(x) \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_{-h}^2 - \left(\frac{\beta_m}{\beta} \right)^2 \right) f_m^a(x) \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} + \text{Ta}^{1/2} g_m^s(x) A_{k,m}^a \right], \quad (4.13a)$$

$$\begin{aligned} \lambda \sum_{m=1}^M \left[\nabla_{-h}^2 g_m^s(x) \beta \delta_{k,m} + g_m^s(x) B_{k,m}^a \right] = \\ = \sigma \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_{-h}^4 + \left(\frac{\lambda_m}{\beta} \right)^4 \right) g_m^s(x) \beta \delta_{k,m} + 2 \nabla_{-h}^2 g_m^s(x) B_{k,m}^a - \right. \\ \left. - \text{Ra} \frac{\alpha_m}{\beta} T_m^a(x) C_{k,m}^a - \text{Ta}^{1/2} \frac{\beta_m}{\beta} f_m^a(x) D_{k,m}^a \right], \quad (4.13b) \end{aligned}$$

$$\lambda \sum_{m=1}^M T_m^a(x) \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} = \sum_{m=1}^M \left[\left(\nabla_h^2 - \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right)^2 \right) T_m^a(x) \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} + \frac{2}{(x+\delta) \ln \eta} g_m^s(x) E_{k,m}^a \right]. \quad (4.13c)$$

En estos dos sistemas de ecuaciones se han definido los coeficientes

$$\begin{aligned} A_{k,m}^s &\equiv \langle \cos(\alpha_k z/\beta) | S_m'(z/\beta) \rangle, & A_{k,m}^a &\equiv \langle \sin(\beta_k z/\beta) | C_m'(z/\beta) \rangle, \\ B_{k,m}^s &\equiv \langle S_k(z/\beta) | S_m''(z/\beta) \rangle, & B_{k,m}^a &\equiv \langle C_k(z/\beta) | C_m''(z/\beta) \rangle, \\ C_{k,m}^s &\equiv \langle S_k(z/\beta) | \sin(\beta_m z/\beta) \rangle, & C_{k,m}^a &\equiv \langle C_k(z/\beta) | \cos(\alpha_m z/\beta) \rangle, \\ D_{k,m}^s &\equiv \langle S_k(z/\beta) | \sin(\alpha_m z/\beta) \rangle, & D_{k,m}^a &\equiv \langle C_k(z/\beta) | \cos(\beta_m z/\beta) \rangle, \\ E_{k,m}^s &\equiv \langle \cos(\beta_k z/\beta) | S_m'(z/\beta) \rangle, & E_{k,m}^a &\equiv \langle \sin(\alpha_k z/\beta) | C_m'(z/\beta) \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente se ha de imponer que los dos sistemas se satisfagan en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto, $x_i = \cos \frac{\pi i}{L}$, $i = 0 \div L$. Por ejemplo, en el problema antisimétrico, se han considerado como incógnitas las amplitudes de los desarrollos, $\hat{f}_{l,m}^a$, $\hat{g}_{l,m}^s$ y $\hat{T}_{l,m}^a$, siendo el número de incógnitas $M((L-1) + (L-3) + (L-1))$. Por tanto, no es necesario imponer que las ecuaciones se verifiquen en todos los puntos de colocación (de $i = 0$ a $i = L$), y se impondrá, para cada valor de k , que las ecuaciones (4.13a) y (4.13c) se satisfagan en $(L-1)$ puntos de colocación y la ecuación (4.13b) en $(L-3)$ puntos. Se obtiene un problema de valores propios bidimensional de la forma

$$AX = \lambda BX$$

donde A y B son matrices reales de dimensión $M(3L-5)$ y X es el vector de incógnitas formado por las amplitudes de los desarrollos

$$X = (\hat{f}_{l,m}^a, \hat{g}_{l,m}^s, \hat{T}_{l,m}^a) = (\hat{f}_{2,1}^a, \dots, \hat{f}_{L,1}^a, \dots, \hat{f}_{2,M}^a, \dots, \hat{f}_{L,M}^a, \\ \hat{g}_{4,1}^s, \dots, \hat{g}_{L,1}^s, \dots, \hat{g}_{4,M}^s, \dots, \hat{g}_{L,M}^s, \\ \hat{T}_{2,1}^a, \dots, \hat{T}_{L,1}^a, \dots, \hat{T}_{2,M}^a, \dots, \hat{T}_{L,M}^a).$$

Este problema de valores propios se puede expresar en función de submatrices cuadradas, $A_{i,k}^{l,m}$ y $B_{i,k}^{l,m}$, en las que el valor de los subíndices i y k indica la fila y el valor de los superíndices l y m determina la columna

$$\begin{pmatrix} A11_{i,k}^{l,m} & A12_{i,k}^{l,m} & 0 \\ A21_{i,k}^{l,m} & A22_{i,k}^{l,m} & A23_{i,k}^{l,m} \\ 0 & A32_{i,k}^{l,m} & A33_{i,k}^{l,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_{l,m}^a \\ \hat{g}_{l,m}^s \\ \hat{T}_{l,m}^a \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} B11_{i,k}^{l,m} & 0 & 0 \\ 0 & B22_{i,k}^{l,m} & 0 \\ 0 & 0 & B33_{i,k}^{l,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{f}_{l,m}^a \\ \hat{g}_{l,m}^s \\ \hat{T}_{l,m}^a \end{pmatrix}.$$

El valor de las matrices en cada subproblema es

SIMÉTRICO

ANTISIMÉTRICO

$$\begin{aligned} A11_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} \left(\nabla_{-h}^2 - \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right)^2 \right) f^l(x_i), & A11_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} \left(\nabla_{-h}^2 - \left(\frac{\beta_m}{\beta} \right)^2 \right) f^l(x_i), \\ A12_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \text{Ta}^{1/2} A_{k,m}^s g^l(x_i), & A12_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \text{Ta}^{1/2} A_{k,m}^a g^l(x_i), \\ A21_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{\alpha_m}{\beta} D_{k,m}^s f^l(x_i), & A21_{i,k}^{l,m} &\equiv -\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{\beta_m}{\beta} D_{k,m}^a f^l(x_i), \\ A22_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \beta \delta_{k,m} \left(\nabla_{-h}^4 + \left(\frac{\mu_m}{\beta} \right)^4 \right) g^l(x_i) \\ &\quad + \sigma 2 B_{k,m}^s \nabla_{-h}^2 g^l(x_i), & A22_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \beta \delta_{k,m} \left(\nabla_{-h}^4 + \left(\frac{\lambda_m}{\beta} \right)^4 \right) g^l(x_i) \\ &\quad + \sigma 2 B_{k,m}^a \nabla_{-h}^2 g^l(x_i), \\ A23_{i,k}^{l,m} &\equiv \sigma \text{Ra} \frac{\beta_m}{\beta} C_{k,m}^s T^l(x_i), & A23_{i,k}^{l,m} &\equiv -\sigma \text{Ra} \frac{\alpha_m}{\beta} C_{k,m}^a T^l(x_i), \\ A32_{i,k}^{l,m} &\equiv \frac{2}{(x_i + \delta) \ln \eta} E_{k,m}^s g^l(x_i), & A32_{i,k}^{l,m} &\equiv \frac{2}{(x_i + \delta) \ln \eta} E_{k,m}^a g^l(x_i), \\ A33_{i,k}^{l,m} &\equiv \beta c_m \delta_{k,m} \left(\nabla_h^2 - \left(\frac{\beta_m}{\beta} \right)^2 \right) T^l(x_i), & A33_{i,k}^{l,m} &\equiv \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} \left(\nabla_h^2 - \left(\frac{\alpha_m}{\beta} \right)^2 \right) T^l(x_i), \\ B11_{i,k}^{l,m} &\equiv \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} f^l(x_i), & B11_{i,k}^{l,m} &\equiv \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} f^l(x_i), \\ B22_{i,k}^{l,m} &\equiv \beta \delta_{k,m} \nabla_{-h}^2 g^l(x_i) + B_{k,m}^s g^l(x_i), & B22_{i,k}^{l,m} &\equiv \beta \delta_{k,m} \nabla_{-h}^2 g^l(x_i) + B_{k,m}^a g^l(x_i), \\ B33_{i,k}^{l,m} &\equiv \beta c_m \delta_{k,m} T^l(x_i), & B33_{i,k}^{l,m} &\equiv \frac{\beta}{2} \delta_{k,m} T^l(x_i), \end{aligned}$$

donde en las matrices A1, A3, B1 y B3, como se obtienen de las ecuaciones de f y T , se cumple $i = 1 \div L - 1$, mientras que en las matrices A2 y B2, procedentes de la ecuación de g , $i = 2 \div L - 2$. En el problema antisimétrico $k, m = 1 \div M$ siempre, y en el simétrico $k, m = 1 \div M$ en las matrices A1, A2, B1 y B2, pero $k = 1 \div M$, $m = 0 \div M$ en la matriz A23 y $k, m = 0 \div M$ en A33 y B33.

4.2.2 Problema no axisimétrico

- **Desarrollo de las perturbaciones.**

Para la resolución numérica del problema no axisimétrico se ha seguido el método propuesto en Marqués *et al.* (1993), si bien aquí, de la misma forma que en el caso axisimétrico, se han buscado por separado las soluciones simétricas respecto al plano medio del anillo y las antisimétricas, con el objetivo de poder incrementar la resolución espacial. Tanto para la dirección radial como para la vertical se ha usado un método pseudoespectral de colocación, es decir, las perturbaciones se han desarrollado en polinomios de Chebyshev y se ha impuesto que las ecuaciones se verifiquen en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto.

En primer lugar, se consideran los siguientes desarrollos en serie de Fourier para las fluctuaciones del estado conductivo

$$\begin{aligned}\Psi(x, \theta, z, t) &= ie^{\lambda t} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N e^{in\theta} \Psi_n(x, z), \\ \Phi(x, \theta, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N e^{in\theta} \Phi_n(x, z), \\ T(x, \theta, z, t) &= e^{\lambda t} \sum_{\substack{n=-N \\ n \neq 0}}^N e^{in\theta} T_n(x, z),\end{aligned}\tag{4.14}$$

donde sólo será necesario trabajar con la mitad de los coeficientes, $n = 1 \div N$, pues se ha de cumplir $\Psi_n = \Psi_{-n}^*$, $\Phi_n = \Phi_{-n}^*$ y $T_n = T_{-n}^*$ por tener que ser Ψ , Φ y T funciones reales. Reescalando tanto el intervalo radial $x \rightarrow 2r - \delta$ como el vertical $z \rightarrow \frac{2}{\beta}z - 1$ para que las variables x y z estén comprendidas entre -1 y $+1$ y poder posteriormente desarrollar en polinomios de Chebyshev, se llega al siguiente problema

de valores propios para cada modo azimutal, n ,

$$\lambda \nabla_h^2 \Psi = \sigma \nabla^2 \nabla_h^2 \Psi + \sigma \text{Ra} \frac{2n}{(x+\delta)} T - i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{2}{\beta} \partial_z \nabla_h^2 \Phi, \quad (4.15a)$$

$$\lambda \nabla^2 \nabla_h^2 \Phi = \sigma \nabla^2 \nabla^2 \nabla_h^2 \Phi + \sigma \text{Ra} \frac{4}{\beta} \partial_z \left[\frac{1}{(x+\delta)} + \partial_x \right] T - i\sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{2}{\beta} \partial_z \nabla_h^2 \Psi, \quad (4.15b)$$

$$\lambda T = \nabla^2 T - \frac{4}{(x+\delta) \ln \eta} \left(\frac{2}{\beta} \partial_{xz}^2 \Phi - \frac{n}{(x+\delta)} \Psi \right), \quad (4.15c)$$

donde se ha suprimido el subíndice n en las funciones para simplificar la notación, y los operadores de Laplace vienen dados por

$$\begin{aligned} \nabla_h^2 &= 4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \partial_x - \frac{n^2}{(x+\delta)^2} \right], \\ \nabla^2 &= \nabla_h^2 + \frac{4}{\beta^2} \partial_{zz}^2. \end{aligned}$$

Las condiciones de contorno (4.5), (4.6) y (4.7) quedan

$$\frac{4}{\beta} \partial_{xz}^2 \Phi - \frac{2n}{(x+\delta)} \Psi = \partial_x \Psi = \Phi = \nabla_h^2 \Phi = T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.16)$$

$$\frac{2(x+\delta)}{\beta} \partial_{xz}^2 \nabla_h^2 \Psi - n \nabla_h^2 \nabla^2 \Phi = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.17)$$

$$\partial_z \Phi = \Psi = \Phi = \partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (4.18)$$

De la misma forma que en el trabajo de Net (1991), como paso preliminar en la resolución del problema lineal, para reducir el orden de las ecuaciones se han introducido los siguientes potenciales auxiliares para cada modo n

$$\begin{aligned} \Psi_1(x, z) &= \nabla_h^2 \Psi(x, z), \\ \Phi_1(x, z) &= \nabla_h^2 \Phi(x, z), \\ \Phi_2(x, z) &= \nabla^2 \Phi_1(x, z). \end{aligned} \quad (4.19)$$

De esta forma, se resuelven en primer lugar los siguientes sistemas de ecuaciones

$$S1 \left\{ \begin{array}{l} \nabla^2 \Phi_1 = \Phi_2 \\ CC : \Phi_1 = 0 \text{ en } \partial\Omega_r, \\ \Phi_1 = 0 \text{ en } \partial\Omega_z, \\ \partial_z \Phi_1 = 0 \text{ en } \partial\Omega_z, \end{array} \right.$$

$$S2 \left\{ \begin{array}{l} \nabla_h^2 \Phi = \Phi_1 \\ CC : \Phi = 0 \text{ en } \partial\Omega_r, \\ \Phi = 0 \text{ en } \partial\Omega_z, \end{array} \right.$$

$$S3 \left\{ \begin{array}{l} \nabla_h^2 \Psi = \Psi_1 \\ CC : \partial_x \Psi = 0 \text{ en } \partial\Omega_r, \\ \frac{4}{\beta} \partial_{xz}^2 \Phi - \frac{2n}{(x+\delta)} \Psi = 0 \text{ en } \partial\Omega_r, \\ \Psi = 0 \text{ en } \partial\Omega_z. \end{array} \right.$$

Una vez discretizados los sistemas, se pueden encontrar los potenciales Φ_1 , Φ y Ψ en función de una base del subespacio de las variables Φ_2 y Ψ_1 discretizadas. Esta base se puede obtener fácilmente imponiendo vectores unitarios para las componentes interiores y completandola *a posteriori* con las condiciones de contorno correspondientes para encontrar las componentes de los extremos. Esta base se completa con las condiciones de contorno que no se han impuesto anteriormente

$$\frac{2(x+\delta)}{\beta} \partial_{xz}^2 \Psi_1 - n \Phi_2 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.20)$$

$$T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \quad (4.21)$$

$$\partial_z T = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z, \quad (4.22)$$

$$\Psi_1 = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \quad (4.23)$$

Finalmente, se resuelve el problema de valores propios

$$\lambda \Psi_1 = \sigma \nabla^2 \Psi_1 + \sigma \text{Ra} \frac{2n}{(x+\delta)} T - i \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{2}{\beta} \partial_z \Phi_1, \quad (4.24a)$$

$$\lambda \Phi_2 = \sigma \nabla^2 \Phi_2 + \sigma \text{Ra} \frac{4}{\beta} \partial_z \left[\frac{1}{(x+\delta)} + \partial_x \right] T - i \sigma \text{Ta}^{1/2} \frac{2}{\beta} \partial_z \Psi_1, \quad (4.24b)$$

$$\lambda T = \nabla^2 T - \frac{4}{(x+\delta) \ln \eta} \left(\frac{2}{\beta} \partial_{xz}^2 \Phi - \frac{n}{(x+\delta)} \Psi \right). \quad (4.24c)$$

Las condiciones de contorno impuestas en los sistemas S1-S3 para Φ_1 , Φ y Ψ junto con las condiciones impuestas para Φ_2 , Ψ_1 y T , (4.20)-(4.23), han de ser equivalentes a las condiciones de contorno (4.16)-(4.18). En el contorno lateral la equivalencia es directa, pues se han impuesto las condiciones (4.16) y (4.17). En el contorno vertical, Ψ y T cumplen $\Psi = 0$ y $\partial_z T = 0$, condiciones que se han impuesto en el sistema S3 y en el problema de valores propios, respectivamente. La variable Ψ_1 se anula en la tapas, pues $\Psi = 0$ en $\partial\Omega_z \implies \Psi_1 = \nabla_h^2 \Psi = 0$ en $\partial\Omega_z$. Respecto a la variable Φ , ha de cumplir (4.18), es decir, $\Phi = \partial_z \Phi = 0$. Por tanto, las condiciones en las tapas del anillo que se deben imponer sobre Φ_1 en el sistema S1 son $\Phi = 0$ en $\partial\Omega_z \implies \Phi_1 = \nabla_h^2 \Phi = 0$ en $\partial\Omega_z$ y $\partial_z \Phi = 0$ en $\partial\Omega_z \implies \partial_z \Phi_1 = \nabla_h^2 \partial_z \Phi = 0$. Una vez se ha impuesto $\Phi_1 = \partial_z \Phi_1 = 0$ en el sistema S1, sólo se necesita imponer $\Phi = 0$ en las tapas en el sistema S2, pues $\partial_z \Phi_1 = 0$ en $\partial\Omega_z \implies \partial_z \Phi = cte$, pero como se cumple $\Phi = 0$ también en el contorno lateral $\partial\Omega_r$ esta constante ha de ser cero.

Para la dependencia radial y vertical de todas las variables se han considerado desarrollos en polinomios de Chebyshev,

$$X_n(x, z) = \sum_{m=0}^M \sum_{l=0}^L \hat{X}_{l,m,n} \mathcal{T}_m(z) \mathcal{T}_l(x), \quad (4.25)$$

siendo $X = \{\Phi, \Phi_1, \Phi_2, \Psi, \Psi_1, T\}$.

• Discretización de las ecuaciones y tratamiento del contorno

El problema de valores propios (4.24) se ha discretizado imponiendo que las ecuaciones se verifiquen en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto, tanto en la dirección radial como en la axial. A diferencia de los tres problemas que se han resuelto hasta el momento, en lugar de trabajar con el vector de incógnitas formado por los coeficientes de los desarrollos de las perturbaciones, se han tomado como incógnitas los valores de la función en los puntos de colocación,

$$\mathbf{X}_{i,j} = \{\Psi_{1,i,j}, \Phi_{2,i,j}, T_{i,j}\},$$

donde se ha introducido la notación $\Psi_{1,i,j} = \Psi_1(x_i, z_j)$, $\Phi_{2,i,j} = \Phi_2(x_i, z_j)$ y $T_{i,j} = T(x_i, z_j)$. El sistema S1 discretizado se expresa

$$S1 \left\{ \begin{array}{ll} \left[4\left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)}\partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2}\right) + \frac{4}{\beta^2}\partial_{zz}^2 \right] \Phi_{1,i,j} = \Phi_{2,i,j} & i=1 \div L-1; j=2 \div M-2, \\ \Phi_{1_{0,j}} = 0, \Phi_{1_{L,j}} = 0 & j=0 \div M, \\ \Phi_{1_{i,0}} = 0, \Phi_{1_{i,M}} = 0 & i=0 \div L, \\ \partial_z \Phi_1]_{i,0} = 0, \partial_z \Phi_1]_{i,M} = 0 & i=1 \div L-1. \end{array} \right.$$

El sistema S2 discretizado queda

$$S2 \left\{ \begin{array}{ll} 4\left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)}\partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2}\right) \Phi_{i,j} = \Phi_{1_{i,j}} & i=1 \div L-1; j=1 \div M-1, \\ \Phi_{0,j} = 0, \Phi_{L,j} = 0 & j=0 \div M, \\ \Phi_{i,0} = 0, \Phi_{i,M} = 0 & i=0 \div L. \end{array} \right.$$

De la misma forma, el sistema S3 es

$$S3 \left\{ \begin{array}{ll} 4\left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)}\partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2}\right) \Psi_{i,j} = \Psi_{1_{i,j}} & i=2 \div L-2; j=1 \div M-1, \\ \frac{4}{\beta}\partial_{xz}^2 \Phi_{0,j} - \frac{2n}{(1+\delta)}\Psi_{0,j} = 0 & j=1 \div M-1, \\ \frac{4}{\beta}\partial_{xz}^2 \Phi_{L,j} - \frac{2n}{(-1+\delta)}\Psi_{L,j} = 0 & j=1 \div M-1, \\ \partial_x \Psi]_{0,j} = 0, \partial_x \Psi]_{L,j} = 0 & j=1 \div M-1, \\ \Psi_{i,0} = 0, \Psi_{i,M} = 0 & i=0 \div L. \end{array} \right.$$

Finalmente, ya se puede obtener el problema de valores propios discretizado

$$\lambda \Psi_{1_{i,j}} = \sigma \left[4\left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)}\partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2}\right) + \frac{4}{\beta^2}\partial_{zz}^2 \right] \Psi_{1_{i,j}} + \sigma Ra \frac{2n}{(x_i + \delta)} T_{i,j} - i\sigma Ta^{1/2} \frac{2}{\beta} \partial_z \Phi_{1_{i,j}}, \quad (4.26a)$$

$$\lambda \Phi_{2_{i,j}} = \sigma \left[4\left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)}\partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2}\right) + \frac{4}{\beta^2}\partial_{zz}^2 \right] \Phi_{2_{i,j}} + \sigma Ra \frac{4}{\beta} \partial_z \left[\frac{1}{(x_i + \delta)} + \partial_x \right] T_{i,j} - i\sigma Ta^{1/2} \frac{2}{\beta} \partial_z \Psi_{1_{i,j}}, \quad (4.26b)$$

$$\lambda T_{i,j} = \left[4 \left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)} \partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2} \right) + \frac{4}{\beta^2} \partial_{zz}^2 \right] T_{i,j} - \frac{4}{(x_i + \delta) \ln \eta} \left(\frac{2}{\beta} \partial_{xz}^2 \Phi_{i,j} - \frac{n}{(x_i + \delta)} \Psi_{i,j} \right), \quad (4.26c)$$

e imponer que se satisfaga en el interior del dominio, es decir, en las tres ecuaciones $i = 1 \div L - 1$ y $j = 1 \div M - 1$. Para ello, hay que evaluar los operadores lineales sobre los vectores de la base. Para completar la base, se usarán las condiciones de contorno restantes

$$\frac{2(1 + \delta)}{\beta} \partial_{xz}^2 \Psi_{10,j} - n \Phi_{20,j} = 0 \quad j=0 \div M, \quad (4.27)$$

$$\frac{2(-1 + \delta)}{\beta} \partial_{xz}^2 \Psi_{1L,j} - n \Phi_{2L,j} = 0 \quad j=0 \div M, \quad (4.28)$$

$$T_{0,j} = 0, T_{L,j} = 0 \quad j=0 \div M, \quad (4.29)$$

$$\partial_z T \Big|_{i,0} = 0, \partial_z T \Big|_{i,M} = 0 \quad i=0 \div L. \quad (4.30)$$

En primer lugar obtendremos el valor de Ψ_1 en el contorno lateral a partir de su definición, $\Psi_1 = \nabla_h^2 \Psi$, y a continuación evaluaremos Φ_2 en el mismo contorno, $\Phi_{20,j}$ y $\Phi_{2L,j}$, y T en el contorno lateral, $T_{0,j}$ y $T_{L,j}$, y en las tapas, $T_{i,0}$ y $T_{i,M}$. Para encontrar el valor de Φ_2 en las tapas, como se cumple $\Phi = \partial_z \Phi = 0$ en $\partial \Omega_z$, se tiene que $\Phi_2 = \nabla^2 \nabla_h^2 \Phi = \nabla_h^2 \partial_{zz}^2 \Phi = \partial_{zz}^2 \Phi_1$.

Los distintos operadores lineales que intervienen en las ecuaciones y en las condiciones de contorno se han evaluado y expresado en función del valor de las variables en los puntos de colocación (vector de incógnitas) utilizando las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$. Estas matrices relacionan el valor de la derivada primera y la derivada segunda de una función en los puntos de colocación, $u_i^{(1)}$ y $u_i^{(2)}$, con el valor de la función en los puntos de colocación, u_i , (Canuto *et al.* (1988), Peyret (1986)),

$$u_i^{(1)} = \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(1)} u_j,$$

$$u_i^{(2)} = \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(2)} u_j.$$

Las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$ se encuentran desarrolladas en el apéndice B.

Como los sistemas de ecuaciones se han escrito tomando como incógnitas el valor de la función en el interior del dominio, hay que expresar el valor de los distintos

operadores lineales solamente en función del valor en los puntos interiores. Así por ejemplo, para evaluar la derivada respecto a z de una variable cualquiera, X , en función del valor de esta variable en el interior del dominio, se tiene

$$\partial_z X(x_i, z_j) = \sum_{m=0}^M d_{j m}^{(1)} X(x_i, z_m) = d_{j 0}^{(1)} X(x_i, z_0) + d_{j M}^{(1)} X(x_i, z_M) + \sum_{m=1}^{M-1} d_{j m}^{(1)} X(x_i, z_m),$$

donde previamente se dispone de los valores de $X(x_i, z_0)$ y $X(x_i, z_M)$.

De hecho, para optimizar la resolución, el sistema se ha desacoplado como en el problema axisimétrico, buscando por separado las soluciones simétricas respecto al plano medio del anillo y las antisimétricas. De esta forma los sumatorios sólo se extienden a la mitad del intervalo, y la resolución se puede incrementar.

4.3 Resultados

En esta sección se recogen los resultados correspondientes a la estabilidad lineal del estado conductivo con condiciones de contorno de adherencia en las tapas, analizando por separado los casos de rotaciones bajas y altas. La mayoría de los resultados corresponden a $\sigma = 0.025$, que es el número de Prandtl del mercurio. De todas formas, se verá que los resultados del problema lineal son cualitativamente similares a los obtenidos para otros fluidos con valores moderados del número de Prandtl. Con estas condiciones de contorno no es posible encontrar una curva de estabilidad para cada modo axial, m , de forma independiente, como sucedía en el caso libre, pues el problema de valores propios es bidimensional. Al haber desdoblado el problema según la paridad de las funciones, para cada número de onda azimutal, n , se obtienen dos curvas de estabilidad, según sea la paridad de las variables respecto al plano medio del anillo. Como ya se ha dicho, se llamarán *modos simétricos* a aquellos en los que temperatura, velocidad radial y velocidad azimutal sean funciones simétricas respecto al plano medio del anillo, siendo antisimétrica la velocidad vertical. Se usarán líneas discontinuas para su representación. Los *modos antisimétricos* serán aquellos en los que las variables tengan la paridad opuesta y se representarán mediante líneas continuas. La paridad del modo seleccionado al inicio de la convección será la de aquél con menor número de Rayleigh. Fijada la paridad, la estructura vertical que minimiza el número de Rayleigh se obtiene de forma automática.

4.3.1 Rotaciones bajas

Cuando la rotación es nula, al igual que en el caso de condiciones de contorno libres, la bifurcación primaria es estacionaria y desaparece la dependencia de las ecuaciones con el número de Prandtl. En la figura 4.1 se muestra la variación del número de Rayleigh para el que se inicia la convección en el sistema en función de la relación entre radios del anillo, η . La parte inferior de la figura corresponde al caso libre analizado en el capítulo anterior. Las líneas discontinuas, en ese caso, representan las curvas de estabilidad correspondientes a los modos convectivos columnares. Como se detalló en la sección 3.4, esos modos además de ser independientes del Prandtl lo son del parámetro de forma del anillo y aparecen siempre vía una bifurcación estacionaria, aunque la rotación no sea nula. La línea continua corresponde a un modo tridimensional con precesión, el modo $(m, n) = (1, 1)$, que es también dominante en algún intervalo de η . En la parte superior se muestran los resultados con condiciones de adherencia. Las curvas de estabilidad en ambos casos tienen un aspecto similar. Los cambios en la estructura azimutal tienen lugar prácticamente para los mismos valores de η , lo que indica una fuerte influencia de la geometría anular en la selección del número de rollos en el anillo. Sin embargo, existen importantes diferencias. En primer lugar, aunque la paridad del modo seleccionado es la misma que la de las columnas (modo simétrico), ahora las soluciones siempre tienen una cierta estructura vertical que depende del valor del parámetro de forma, β . Esta estructura se puede apreciar en la parte superior de la figura 4.2, en la que se ha dibujado el modo dominante cuando $\beta = 1$ y $\eta = 0.5$ en ambos casos. Las condiciones de contorno rígidas hacen que todos los modos críticos sean tridimensionales y que se produzca un ligero aumento en el valor del número de Rayleigh necesario para el inicio de la convección. Además, mientras que en el caso libre hay ciertos intervalos de η para los que domina un modo $(m, n) = (1, 1)$ antisimétrico, en el caso rígido la curva correspondiente al modo antisimétrico con número de onda azimutal $n = 1$, queda siempre por encima de la curva de estabilidad asociada a los modos simétricos. En la parte inferior de la figura 4.2 se ha dibujado el modo tridimensional que domina en el caso libre cuando $\beta = 1$ y $\eta = 0.25$. Es el modo $(m, n) = (1, 1)$. Sin embargo, el modo antisimétrico equivalente en el caso rígido que se ha dibujado, no se selecciona para ningún valor de η .

La dependencia con el parámetro de forma del anillo, β , para un valor moderado de la rotación, $Ta = 10^2$, siendo $\eta = 0.5$ y $\sigma = 0.025$, se estudia en la parte superior de la figura 4.3. Se muestra el valor del número de Rayleigh, Ra_c^n , para el cual el estado conductivo se inestabiliza a un modo simétrico (línea discontinua) y a uno

antisimétrico (línea continua) con diferentes valores del número de onda azimutal, $n = 3, 4, 5$. Como se puede ver en la gráfica de la frecuencia de precesión asociada a estos modos, la bifurcación primaria que tiene lugar es de Hopf. Por tanto, las diversas estructuras a las que dan lugar precesionan en la dirección azimutal con una frecuencia de magnitud comparable a la de las celdas tridimensionales en el caso libre (figura 3.11). Hasta $\beta \leq 1.8$ el modo dominante es simétrico y su número de onda azimutal es $n = 5$. A partir de ese valor hay un cambio en el número de onda del modo seleccionado, que pasa a ser $n = 4$. Conviene destacar que hay distintos tipos de modos $n = 4$. Se diferencian en su estructura vertical, pues el sistema va seleccionando un modo de menor longitud de onda vertical a medida que aumenta la relación entre la altura y la anchura del anillo. Se producen transiciones entre ellos alrededor de $\beta = 4.6$ y de $\beta = 5.6$. La primera transición involucra modos de

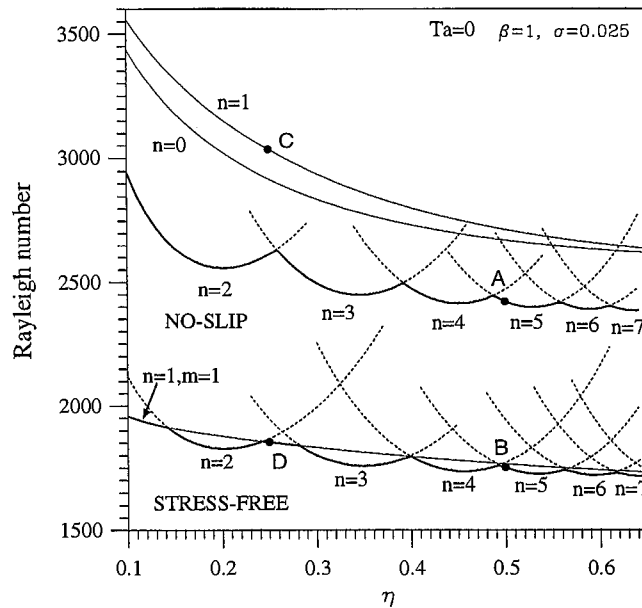
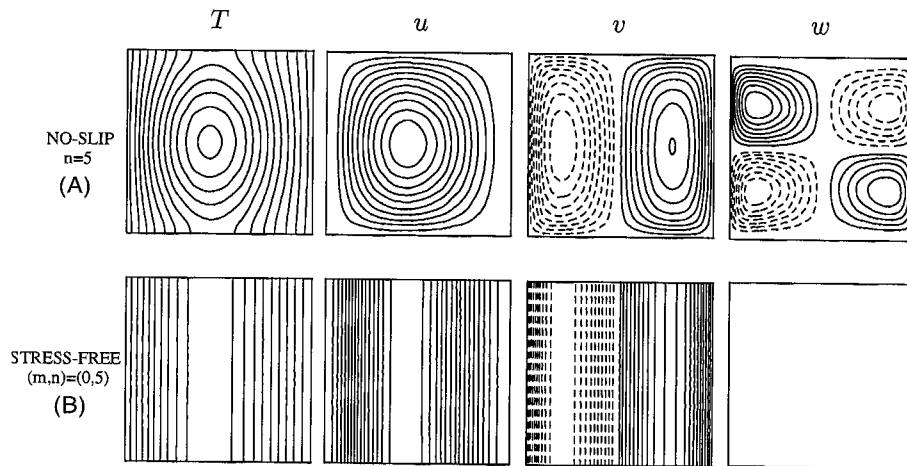


Figura 4.1: Número de Rayleigh en función de la relación entre radios, η , con condiciones de contorno rígidas (parte superior) y libres (parte inferior) en las tapas del anillo. La línea en negrita es la envolvente de los distintos modos dominantes en ambos casos. El valor de los parámetros restantes es $Ta = 0$, $\beta = 1$ y $\sigma = 0.025$. Las etiquetas A, B, C y D indican los puntos en los que se ha dibujado la función propia en la figura 4.2.

$$\beta = 1, \eta = 0.5, \sigma = 0.025 \quad \text{Ta} = 0$$

MODOS SIMÉTRICOS



MODOS ANTISIMÉTRICOS

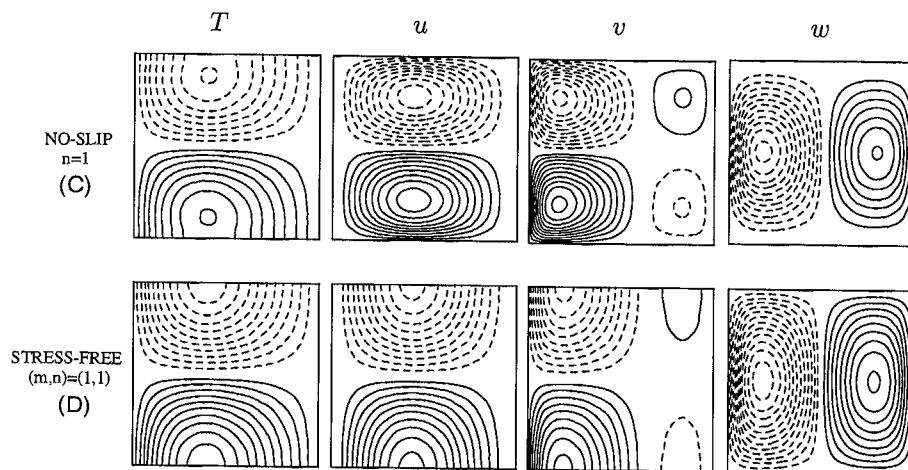


Figura 4.2: Estructura vertical de los modos simétricos y antisimétricos en el caso rígido (*no-slip*) y sus modos equivalentes cuando las condiciones de contorno son libres (*stress-free*). Excepto el modo antisimétrico en el caso rígido, cuyo número de Rayleigh asociado es mayor que el del modo simétrico, las otras tres soluciones son dominantes para los valores de los parámetros que se muestran.

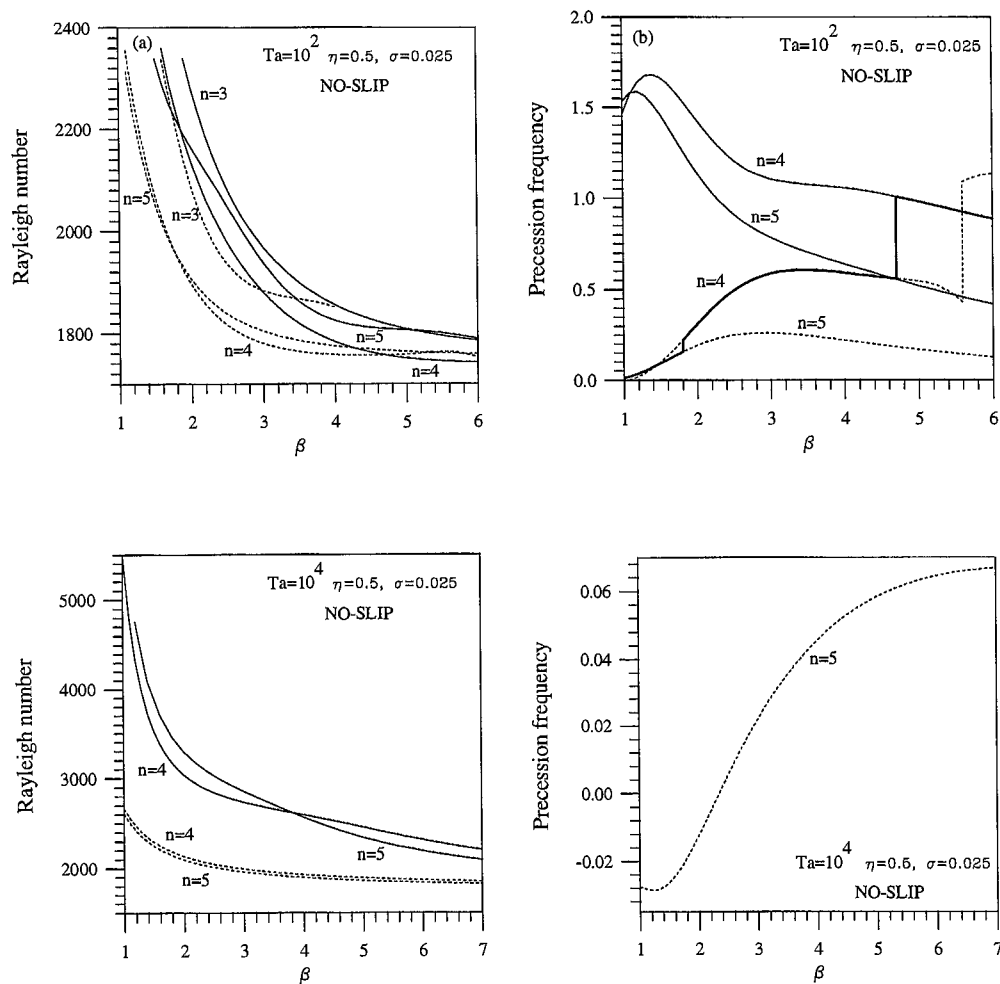


Figura 4.3: Número de Rayleigh y frecuencia de precesión en función del parámetro de forma con condiciones de contorno de adherencia en las tapas del anillo para $Ta = 10^2$ (parte superior) y para $Ta = 10^4$ (parte inferior). Las curvas de estabilidad dibujadas con trazo discontinuo corresponden a modos simétricos y las de trazo continuo corresponden a modos antisimétricos. El valor de los parámetros restantes es $\eta = 0.5$ y $\sigma = 0.025$.

distinta paridad, mientras que en la segunda, los dos modos $n = 4$ son simétricos. Esta segunda transición se aprecia más claramente en la gráfica de la frecuencia de precesión, pues hay una discontinuidad alrededor de $\beta = 5.6$. Estas transiciones que

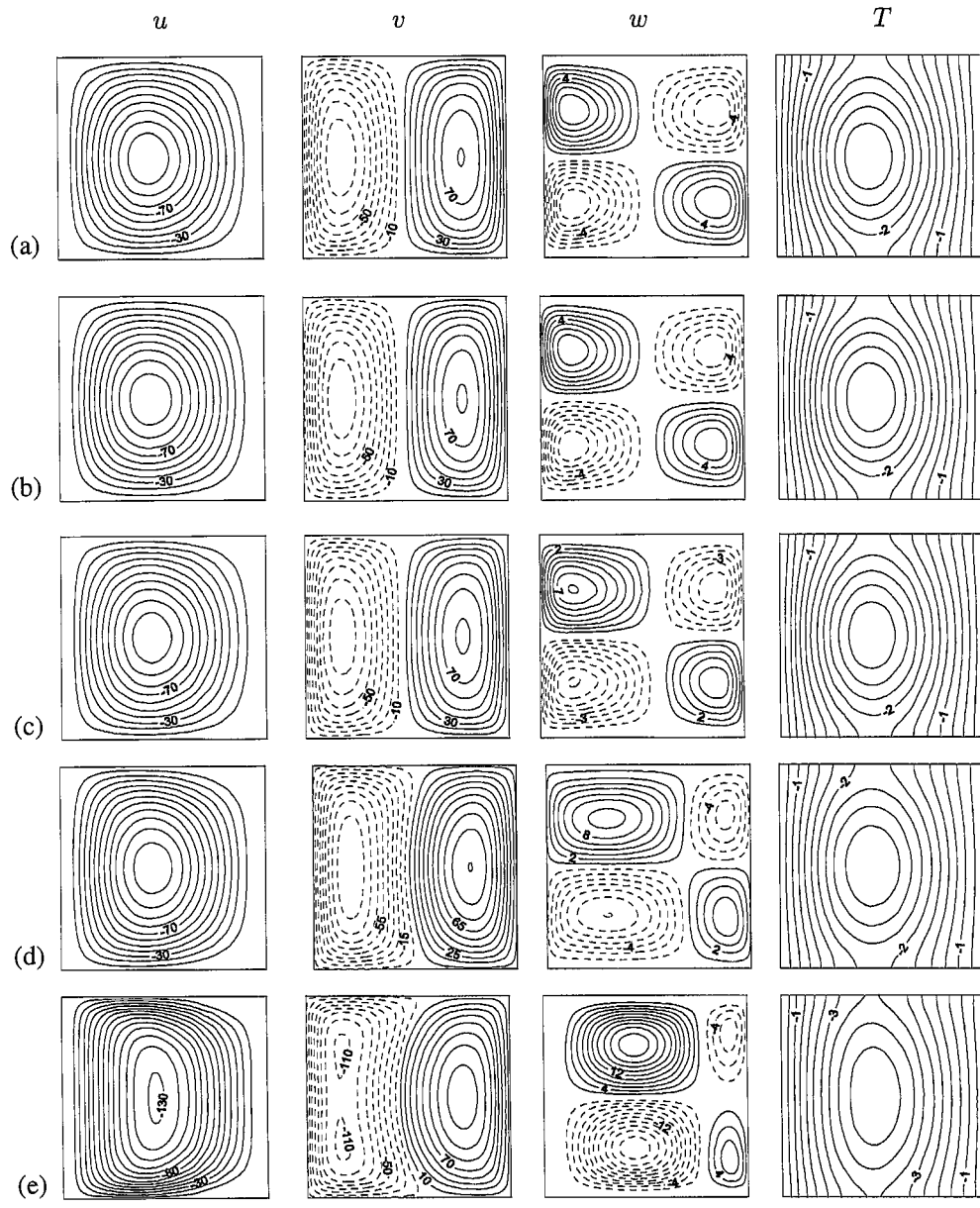
se observan, probablemente tienen lugar cuando la disipación en las paredes laterales excede a la que se produce en las proximidades de las tapas del anillo. Como se puede ver en la parte inferior de la figura 4.3, cuando la rotación es suficientemente grande, $Ta = 10^4$, el modo seleccionado es siempre un modo $n = 5$ simétrico y estos cambios en la estructura vertical ya no se producen. En la próxima sección se verá que al aumentar la rotación aumenta considerablemente la disipación en las tapas del anillo, pues se forman capas límite viscosas. Se observa también en la gráfica que el valor de la frecuencia de precesión asociada es ahora mucho menor que en el caso libre.

4.3.2 Rotaciones altas

Los resultados que se presentan en esta sección corresponden a números de Taylor altos. En el capítulo anterior se vió que en caso de considerar condiciones de contorno libres en las tapas del anillo siempre hay, para cualquier valor de η y β , una rotación moderada a partir de la cual la convección se inicia en forma de columnas de Taylor estacionarias cuya estructura azimutal depende del valor de η . Se estudiará ahora qué sucede al aumentar la rotación cuando se consideran condiciones de contorno de adherencia.

Como punto de partida del estudio, se muestra, de una manera gráfica y que evidencia de forma clara el efecto que la rotación tiene sobre las estructuras convectivas, la evolución de un modo convectivo al ir aumentando la rotación. Para ello, en la figura 4.4 se han representado las curvas de nivel de la temperatura y de las componentes radial, azimutal y vertical de la velocidad correspondientes al modo $n = 5$ simétrico en un plano (r, z) para diferentes números de Taylor. Este modo $n = 5$ es el modo seleccionado por el sistema para los valores de los parámetros que se han usado, $\beta = 1$, $\eta = 0.5$, $\sigma = 0.025$ y las distintas rotaciones. El plano (r, z) escogido para dibujar la función propia se ha señalado con una línea recta en la figura 4.5, en la que se muestra la sección transversal de este modo para una de las rotaciones, $Ta = 10^7$. Cuando la rotación del sistema es baja, la convección se inicia en forma de celdas tridimensionales. A medida que la rotación aumenta, el efecto de la fuerza de Coriolis se va haciendo cada vez más importante en la dinámica del sistema. Como consecuencia, las estructuras tridimensionales inicialmente presentes se van alargando poco a poco conforme aumenta la rotación y dan paso a estructuras prácticamente bidimensionales cuando la rotación es alta. En este límite se cumple de forma aproximada el teorema de Taylor-Proudman. Además, se observa como en las proximidades de las tapas del anillo se desarrollan capas límite de Ekman, necesarias para que se verifiquen las condiciones de contorno en ellas. Aunque el valor absoluto de las distintas magnitudes

no se conoce, pues la función propia que se obtiene del problema lineal está definida salvo en una constante arbitraria, se han mantenido las etiquetas en la figura 4.4



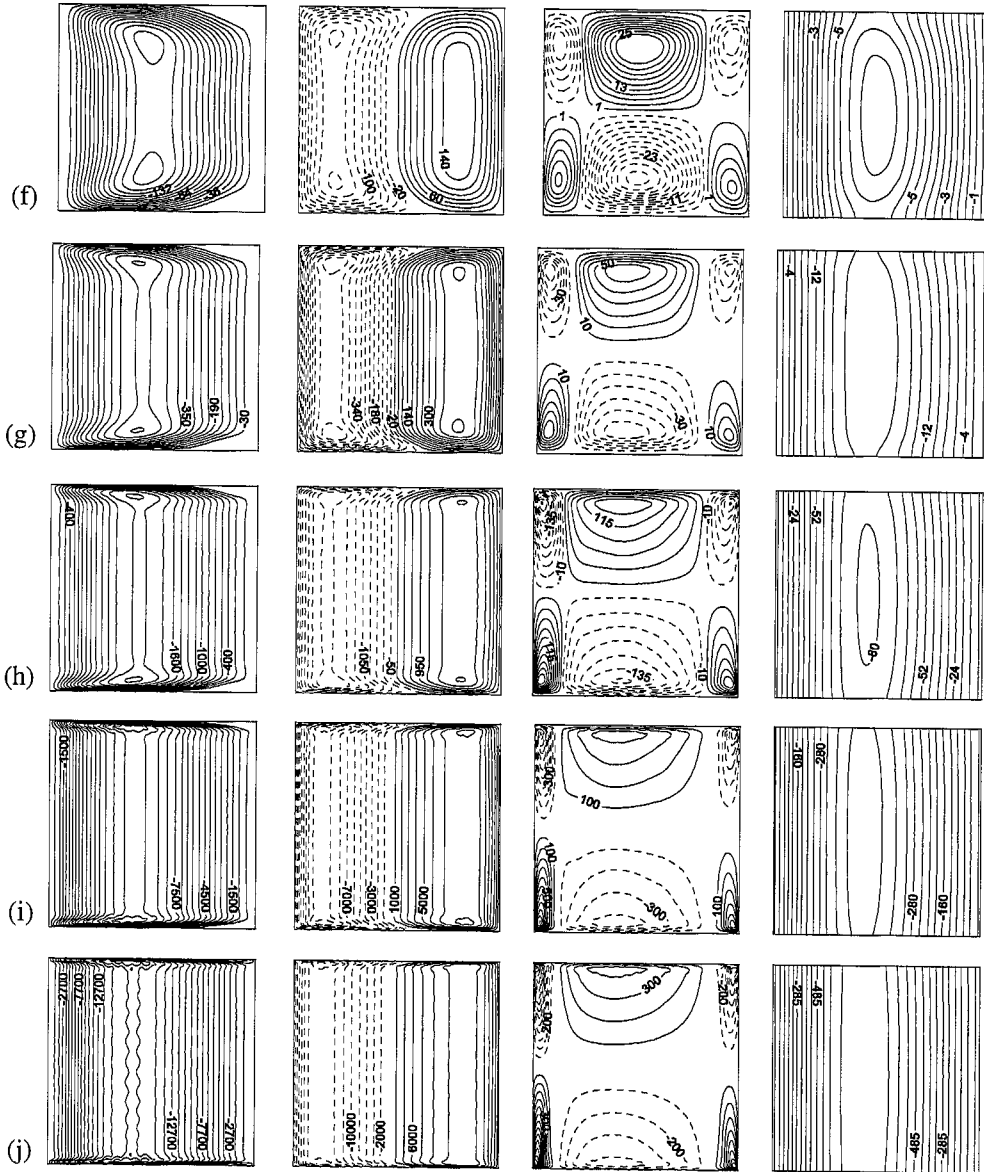


Figura 4.4: Curvas de nivel de las componentes de la velocidad y de la temperatura que muestran la evolución de la estructura vertical del modo $n = 5$ en el plano (r, z) (señalado en la figura 4.5) con la rotación. Los valores del número de Taylor son $Ta^{(a)} = 0$, $Ta^{(b)} = 10$, $Ta^{(c)} = 10^2$, $Ta^{(d)} = 10^3$, $Ta^{(e)} = 10^4$, $Ta^{(f)} = 10^5$, $Ta^{(g)} = 10^6$, $Ta^{(h)} = 10^7$, $Ta^{(i)} = 10^8$ y $Ta^{(j)} = 10^9$. Se puede apreciar la formación de capas límite de Ekman a medida que la rotación aumenta. Este modo convectivo es dominante para los valores de los parámetros utilizados, $\beta = 1$, $\eta = 0.5$ y $\sigma = 0.025$.

para indicar el orden de magnitud relativo de las distintas variables. Así, se observa que la componente vertical de la velocidad es cada vez menos importante frente a las componentes radial y azimutal. Por ejemplo, para $Ta = 10^9$, w es aproximadamente 30 veces menor que las otras dos componentes. Por tanto, los modos dominantes en el caso rígido cuando las rotaciones son altas son prácticamente independientes de la coordenada vertical excepto en zonas estrechas próximas a las tapas del anillo. Es de esperar que estas pequeñas regiones, en las que no se produce un balance entre la fuerza de Coriolis y el gradiente de presiones, controlen la dinámica del sistema

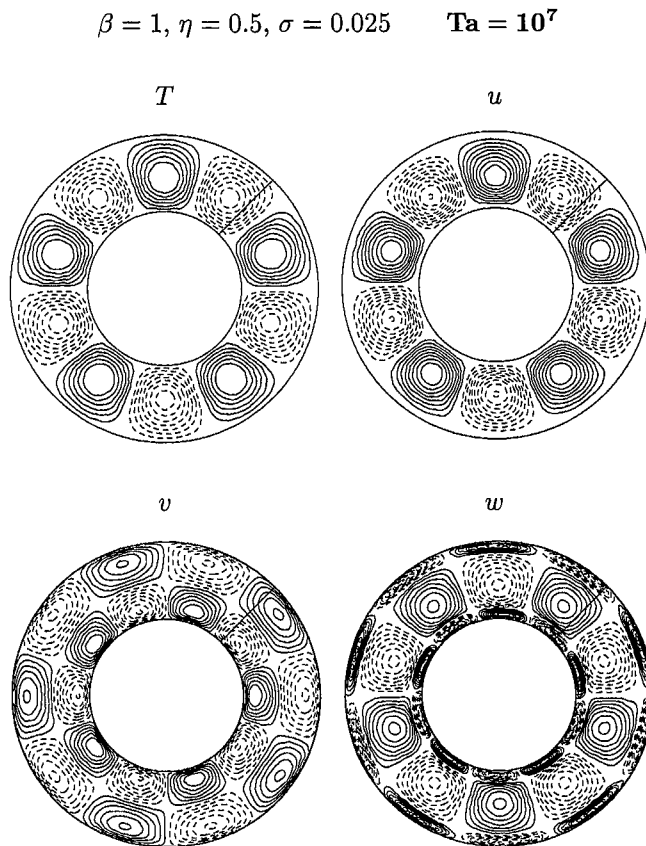


Figura 4.5: Sección transversal que muestra las componentes de la velocidad y la temperatura del modo convectivo $n = 5$ en el plano (r, θ) para $Ta = 10^7$. La línea recta indica el plano que se ha usado para dibujar la figura 4.4.

(Greenspan, 1968) y produzcan un aumento en el número de Rayleigh necesario para que se inicie la convección. La pequeña componente de la velocidad vertical en las proximidades de las paredes laterales cuando la rotación es alta, figura 4.4f-4.4j, debe estar presente, precisamente, para compensar el flujo de masa impulsado radialmente del centro del anillo hacia la pared lateral en las capas de Ekman.

Las capas de Ekman se desarrollan en el sistema para valores de la rotación comprendidos entre $Ta = 10^4$ y $Ta = 10^5$. A medida que se incrementa la rotación, el espesor de estas capas límite va disminuyendo. En la figura 4.6 se ha representado la dependencia de la componente radial de la velocidad con la coordenada z , fijando el valor de la coordenada radial en el punto medio del entrehierro del anillo, para distintas rotaciones. Para $Ta = 10^4$, la componente u se empieza a aplanar por la parte central del anillo y cuando $Ta = 10^5$ se puede considerar que la estructura en capas de Ekman ya se encuentra bien formada. A partir de esta gráfica y de la análoga para la componente azimutal de la velocidad, es posible estimar la dependencia del grosor de las capas de Ekman, δ , con la rotación. Se ha encontrado que $\delta \approx 3 \times Ta^{-0.24}$, reproduciéndose por tanto la relación esperada $\delta \propto \Omega^{-1/2}$ (Greenspan, 1968). Este acuerdo con los resultados teóricos sirve también como confirmación de la precisión de los cálculos numéricos incluso cuando las rotaciones son altas.

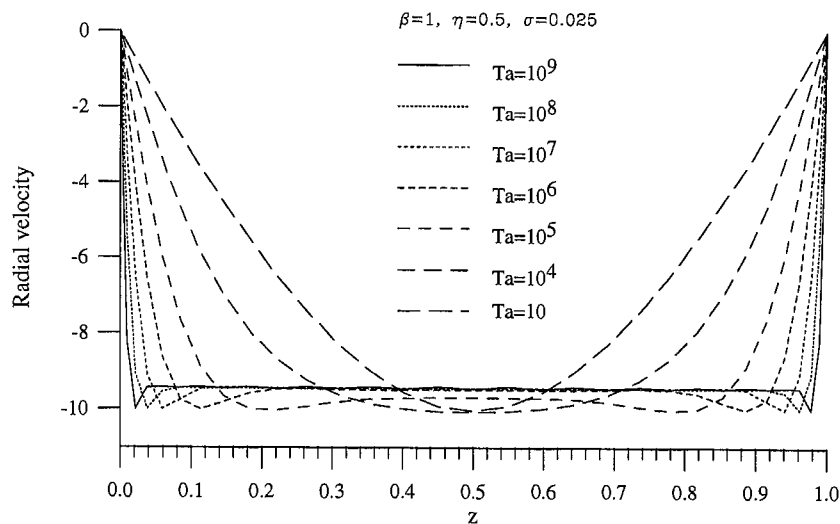


Figura 4.6: Evolución de las capas de Ekman al aumentar el número de Taylor para $\beta = 1$, $\eta = 0.5$ y $\sigma = 0.025$.

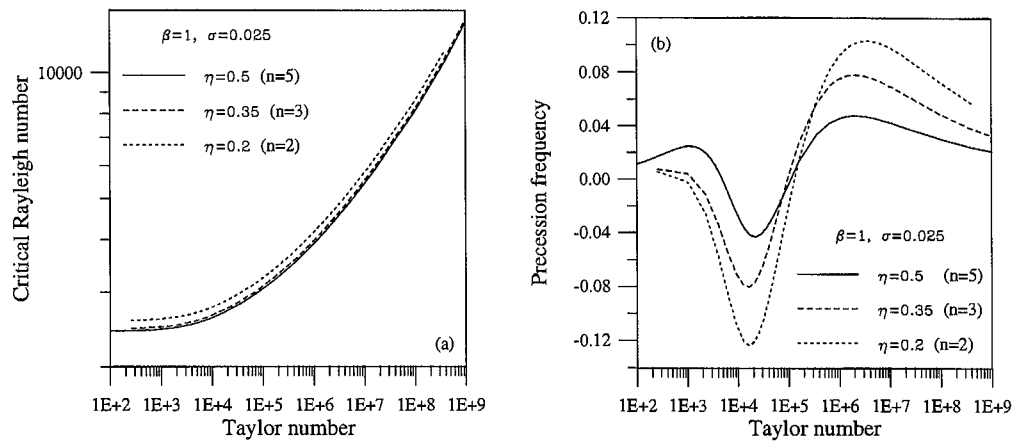


Figura 4.7: Número de Rayleigh crítico y frecuencia de precesión en función del número de Taylor, Ta , para distintos valores de la relación entre radios, $\eta = 0.5, 0.35, 0.2$. El valor de n indica el número de onda azimutal seleccionado para cada η .

La figura 4.7 muestra la curva de estabilidad marginal del modo dominante en función de la rotación para varios valores de la relación entre radios, $\eta = 0.5, 0.35, 0.2$, y su correspondiente frecuencia de precesión asociada. El valor de n indica el número de onda azimutal seleccionado para cada η . Se observa que el modo seleccionado no cambia con la rotación, aunque como se ha visto, su forma va evolucionando hacia una estructura bidimensional. El gran efecto estabilizador que las capas límite de Ekman tienen sobre todo el sistema se hace evidente en esta curva de estabilidad marginal. El número de Rayleigh necesario para que se inicie la convección aumenta considerablemente a medida que se incrementa la rotación. De acuerdo con la teoría general de bifurcaciones en sistemas con rotación (Knobloch, 1994), con condiciones de contorno rígidas en las tapas la bifurcación primaria es siempre de Hopf, por lo que existe una frecuencia de precesión diferente de cero. Sin embargo, el orden de magnitud de la frecuencia con que viajan las estructuras es pequeño, por lo que esta precesión es prácticamente inobservable en el laboratorio. Esto explica el hecho de que en el trabajo experimental de Busse & Carrigan (1974) no se mencione la precesión de las columnas de Taylor. Por tanto, el efecto que las capas de Ekman tienen sobre el sistema es retrasar considerablemente el inicio de la convección y evitar la precesión de la onda azimutal. Por otra parte, en la gráfica 4.7a, se aprecia un cambio gradual en la pendiente de la curva en el intervalo de valores de la rotación en el que se forman las capas de Ekman. Este cambio en la pendiente va acompañado de un cambio en

el sentido de precesión de la estructura. Empieza siendo retrógrado para números de Taylor bajos ($\lambda_I > 0$), pasa a ser en el sentido de la rotación ($\lambda_I < 0$) para valores del número de Taylor comprendidos entre $Ta = 10^3$ y $Ta = 10^4$ dependiendo del valor de η , y es de nuevo retrógrado para números de Taylor elevados. Obsérvese, además, que cuando $Ta \rightarrow \infty$, $\lambda_I \rightarrow 0$.

En la figura 4.8 se analiza la dependencia del número de Rayleigh crítico y de la frecuencia de precesión del modo dominante con la relación de radios cuando la rotación es elevada ($Ta = 10^7$) para $\beta = 1$ y $\sigma = 0.025$. La forma de la gráfica 4.8a es similar a la obtenida para rotaciones bajas (figura 3.9). Los cambios en el número de onda n seleccionado tienen lugar para valores parecidos de η , sugiriendo de nuevo la fuerte influencia de la curvatura de las paredes laterales en la selección del número de rollos de la estructura. El valor del número de Rayleigh para el que se inicia la convección ha aumentado respecto al caso del anillo en reposo. La frecuencia de precesión, para este valor de β y de la rotación, es siempre positiva, indicando que la precesión se produce en sentido contrario a la rotación.

En la figura 4.9 se muestra la dependencia del número de Rayleigh y de la frecuencia de precesión con el parámetro de forma del anillo, para un valor pequeño del número de Prandtl, $\sigma = 0.025$, y otro moderado, $\sigma = 0.7$. A diferencia de lo que sucede cuando la rotación es baja (figura 4.3), no se producen cambios en el modo seleccionado al variar la relación entre la altura y la anchura del anillo. El modo dominante es siempre $n = 3$ simétrico si $\eta = 0.35$ y $n = 5$ simétrico si $\eta = 0.5$, y su estructura vertical no se altera. El valor del número de Rayleigh crítico es independiente de β cuando las condiciones de contorno en las tapas son libres, pues se ha visto que la convección columnar es independiente de la coordenada axial. En cambio, con condiciones de contorno rígidas, el número de Rayleigh crítico disminuye a medida que β aumenta, alcanzando asintóticamente el resultado del problema libre. La influencia de las tapas sobre el sistema se va haciendo menos importante a medida que aumenta la relación entre la altura del anillo y su anchura. Cuando el anillo es suficientemente largo, considerar condiciones de contorno de adherencia en las tapas equivale a considerarlas sin esfuerzos cortantes, salvo en la pequeña zona cercana a las capas. Este hecho se puede observar también en la figura 4.9b, en la que se ve como la frecuencia de precesión tiende a cero a medida que $\beta \rightarrow \infty$ tras haber cruzado el eje de las β . Es decir, para valores grandes de β la precesión es en el sentido de la rotación ($\lambda_I < 0$). Por otra parte, es importante resaltar el efecto que el valor del número de Prandtl tiene sobre el sistema. Tan sólo la frecuencia, que es mayor para números de σ menores, depende del valor de σ . Sin embargo, el número de Rayleigh crítico no depende de forma significativa de σ , debido a que la frecuencia de precesión de estos modos es relativamente pequeña.

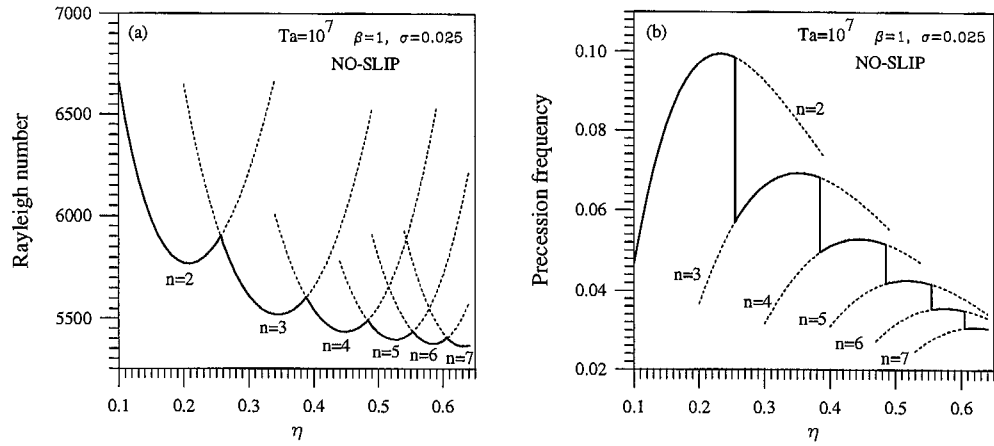


Figura 4.8: Número de Rayleigh crítico y frecuencia de precesión en función de la relación entre radios, η . El valor de los parámetros es $Ta = 10^7$, $\beta = 1$ y $\sigma = 0.025$.

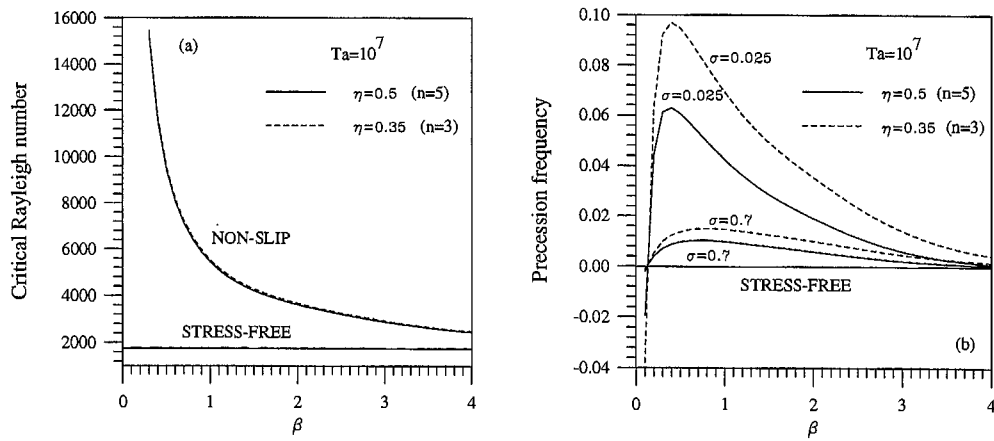


Figura 4.9: Número de Rayleigh crítico y frecuencia de precesión en función del parámetro de forma, β , con condiciones de contorno rígido y libre en las tapas del anillo. El valor de los parámetros es $Ta = 10^7$, $\eta = 0.35, 0.5$ y $\sigma = 0.025, 0.7$.

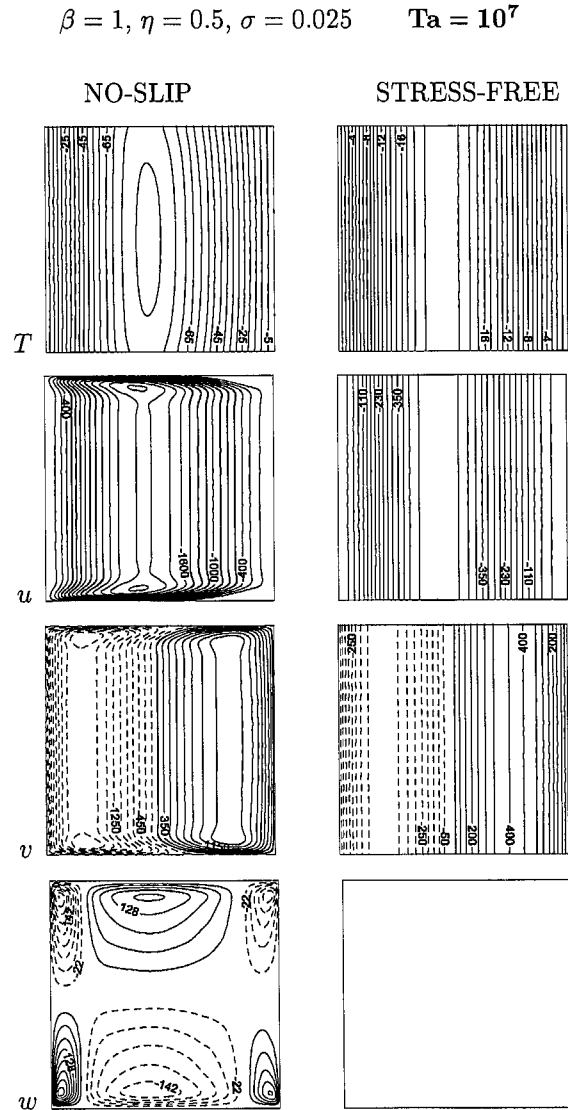


Figura 4.10: Comparación entre el modo convectivo azimutal $n = 5$ en el caso rígido (izquierda) y en el libre (derecha) para $\text{Ta} = 10^7$. En el primer caso, cuando la rotación es alta la convección es prácticamente bidimensional excepto en las capas límite de Ekman que se han formado en las proximidades de las tapas. En el segundo caso, la convección es estrictamente bidimensional.

Para finalizar, en la figura 4.10 se ha comparado la función propia correspondiente al modo dominante en el caso rígido y en el caso libre cuando la rotación es alta, $Ta = 10^7$. La similitud entre los dos modos resulta evidente. La convección es estrictamente bidimensional en el caso libre y es bidimensional en todo el dominio excepto en las capas límite de Ekman en el caso rígido. Sin embargo, el número de Rayleigh para el que se produce la bifurcación difiere sustancialmente, mientras que $Ra_c = 5429.9$ en el caso rígido, el valor en el caso libre es $Ra_c = 1750.3$.

4.3.3 Condiciones de contorno de Robin

Para completar el estudio, se ha analizado el grado de influencia del tipo de condiciones de contorno para la velocidad en las tapas del anillo imponiendo la condición de contorno general

$$(1 - \gamma)\partial_{zz}^2 w + \gamma\partial_z w = 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z,$$

que se conoce con el nombre de condición de contorno de Robin. Aquí γ es un parámetro que conecta de forma continua las condiciones de contorno libres ($\gamma = 0$) con las condiciones de contorno de adherencia ($\gamma = 1$). En la formulación en potenciales de la velocidad, en el caso no axisimétrico se consideran las siguientes condiciones generales para Ψ y Φ

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)\partial_{zz}^2 \Phi + \gamma\partial_z \Phi &= 0 \\ (1 - \gamma)\partial_z \Psi + \gamma\Psi &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \\ \Phi &= 0 \end{aligned}$$

En el caso axisimétrico, las condiciones de contorno generales para f y g se expresan

$$\begin{aligned} (1 - \gamma)\partial_{zz}^2 g + \gamma\partial_z g &= 0 \\ (1 - \gamma)\partial_z f + \gamma f &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_z. \\ g &= 0 \end{aligned}$$

Cuando $\gamma = 1$ se recuperan las condiciones de contorno (2.43) y (2.47), que corresponden al problema rígido, y si $\gamma = 0$ se recupera el caso libre, (2.42) y (2.46).

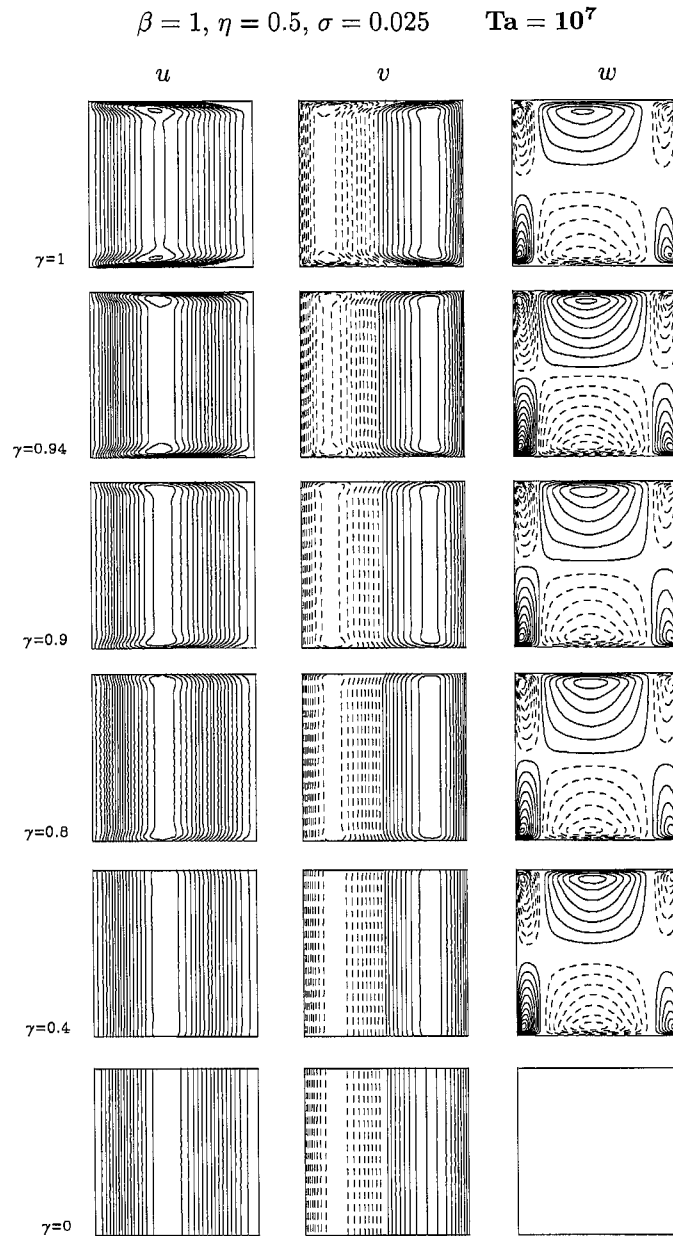


Figura 4.11: Representación gráfica de la función propia para $Ta = 10^7$ y distintos valores del parámetro de homotopía, γ . Cuando $\gamma = 1$ las condiciones de contorno en las tapas son de adherencia y cuando $\gamma = 0$ se recuperan las condiciones de contorno libres.

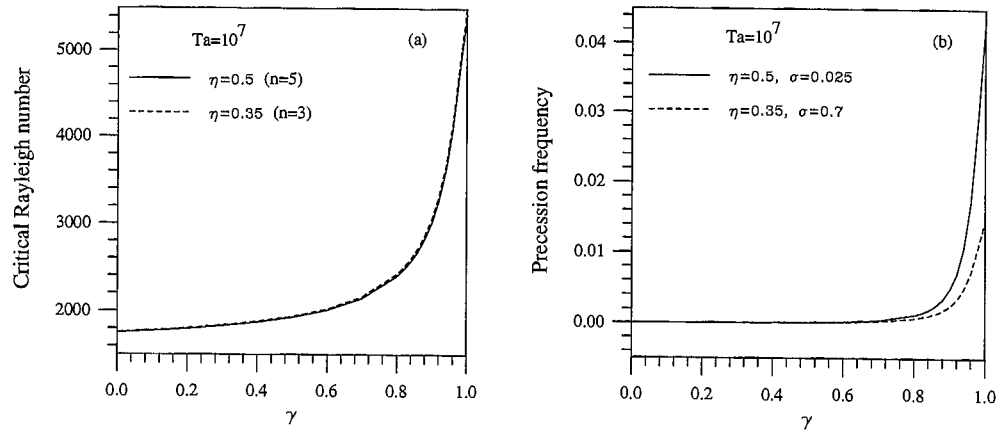


Figura 4.12: Número de Rayleigh crítico en función del parámetro γ y frecuencia de precesión en unidades de tiempo viscoso, para $Ta = 10^7$, $\eta = 0.5, 0.3$ y $\sigma = 0.025, 0.7$.

En la figura 4.11 se ha representado la función propia para una rotación elevada, $Ta = 10^7$, considerando distintos valores del parámetro γ . Para los parámetros que se han analizado, $\beta = 1$, $\eta = 0.5$ y $\sigma = 0.025$, y valores de $\gamma < 0.8$, las capas de Ekman no se forman. Esto también se observa en la curva de estabilidad en función de γ (figura 4.12). El valor crítico del número de Rayleigh y de la frecuencia de precesión se aproxima al encontrado en el caso rígido cuando $\gamma \geq 0.8$. De todas formas, aunque no se aprecie en la figura, la frecuencia de precesión es diferente de cero para todo $\gamma > 0$, es decir, siempre que las condiciones de contorno para u y v en las tapas no sean de Neumann.

4.4 Discusión

En este capítulo, se ha resuelto numéricamente la estabilidad lineal del estado conductivo cuando se consideran condiciones de contorno de adherencia en las tapas de un anillo cilíndrico en rotación con calentamiento lateral y se analizado de forma exhaustiva el tipo de solución que el sistema selecciona en el inicio de la convección en función de los distintos parámetros (Alonso *et al.*, 1999). La rotación del sistema es el parámetro que resulta determinante en la forma de la estructura convectiva. Los estados tridimensionales con precesión, presentes en el anillo para rotaciones bajas y

valores moderados del parámetro de forma, se van poco a poco alargando a medida que se incrementa el número de Taylor para dar lugar a columnas prácticamente bidimensionales. Mientras que estas columnas de Taylor son estacionarias en el problema libre, precesionan respecto al sistema de referencia en rotación cuando se consideran condiciones de contorno de adherencia, más realistas desde el punto de vista experimental. La dirección de esta precesión depende del parámetro de forma del anillo. Cuando el anillo es suficientemente alto la precesión se produce en el sentido de la rotación. Para anillos de longitud menor, la precesión es típicamente en el sentido de la rotación para valores intermedios del número de Taylor, pero se produce en sentido contrario a la rotación cuando el número de Taylor es elevado. Esta precesión se origina en las capas límite de Ekman que se forman en los extremos del anillo debido a las condiciones de contorno de adherencia. El teorema de Taylor–Proudman tan sólo se deja de satisfacer en una región muy pequeña de todo el fluido, las capas de Ekman, en las que la fuerza de Coriolis no puede ser compensada por un gradiente de presiones, pero este hecho tiene como consecuencia que se necesite un valor del número de Rayleigh extremadamente elevado para que se inicie la convección.

Los resultados que se obtienen para rotaciones altas coinciden cualitativamente con el desarrollo asintótico de Zhang & Greed (1999) para un fluido en un anillo con calentamiento interno uniforme. En ese trabajo se buscan soluciones analíticas en el inicio de la convección en el límite de números de Taylor elevados resolviendo un problema de capa límite. Las soluciones estrictamente bidimensionales en el interior del dominio se expresan en términos de funciones de Bessel y se encuentra el valor del número de Rayleigh crítico y de la frecuencia de precesión de los rollos convectivos empalmado las soluciones en el interior y en las capas límite. Se obtiene la siguiente ley asintótica

$$Ra_c = Ra_0 + C \frac{Ta^{1/4}}{\beta},$$

donde Ra_0 es el valor crítico del número de Rayleigh para el problema libre y C es una constante independiente del número de Prandtl. Ésta es aproximadamente la dependencia que se obtiene para valores elevados del número de Taylor en la figura 4.7. Respecto a la frecuencia de precesión, se anula para $Ta \rightarrow \infty$, pero no se determina su dependencia con los parámetros para valores finitos del número de Taylor.

Capítulo 5

Cálculo de las columnas no lineales mediante técnicas de continuación

Como se ha visto en los capítulos 3 y 4, el análisis de estabilidad lineal del estado conductivo muestra que, para un amplio rango de valores de los parámetros, el inicio de la convección en un anillo cilíndrico en rotación es en forma de columnas bidimensionales caracterizadas por un número de onda azimutal entero. Cuando se consideran condiciones de contorno libres para la velocidad en las tapas del anillo, independientemente de los parámetros de forma del anillo y del número de Prandtl del fluido, existe una rotación a partir de la cual se produce una bifurcación estacionaria que da lugar a rollos bidimensionales paralelos al eje de rotación. En el límite $\eta \rightarrow 1$ esta solución equivale a los rollos que se obtienen en el problema clásico de Rayleigh-Bénard plano sin rotación. A pesar de que las condiciones de contorno de adherencia en las tapas del anillo impiden que las columnas estrictamente bidimensionales sean solución de las ecuaciones y fuerzan que al inicio de la convección aparezca una estructura tridimensional, a medida que la rotación aumenta, se produce una evolución hacia soluciones prácticamente bidimensionales en todo el dominio excepto en las proximidades de las tapas del anillo, donde se forman capas límite de Ekman. Aunque estas soluciones no son estacionarias, poseen una frecuencia de precesión muy baja. Por tanto, para ambos tipos de condiciones de contorno, el efecto de la rotación es seleccionar como

estructura convectiva rollos bidimensionales estacionarios paralelos al eje de simetría del anillo.

Tanto el presente capítulo como el siguiente están dedicados al estudio de la evolución no lineal de la solución columnar. Este estudio es de interés para aplicaciones astrofísicas y geofísicas (convección estelar y planetaria), pues en estos sistemas la rotación juega un papel importante. Por ejemplo, en los planetas mayores se observan manchas convectivas que pueden corresponder a columnas de Taylor térmicas. Para modelar atmósferas planetarias y estelares es adecuado considerar valores moderados y pequeños del número de Prandtl. Por otra parte, los núcleos de los planetas, en los que se originan campos magnéticos, están formados por metales líquidos por lo que se caracterizan por un valor pequeño del número de Prandtl.

A diferencia del problema de Rayleigh-Bénard plano, en el que las perturbaciones tridimensionales dominan el comportamiento no lineal de los rollos convectivos, en el caso de convección en geometría anular en rotación hay evidencia experimental (Azouni *et al.*, 1986) de que el carácter bidimensional de las columnas se mantiene hasta números de Rayleigh elevados, prácticamente hasta regímenes turbulentos. Esta hipótesis se ha utilizado en los estudios numéricos de la convección en un anillo en rotación considerando sus tapas ligeramente inclinadas y despreciando los efectos de la curvatura llevados a cabo por Busse y colaboradores (Busse, 1986; Or & Busse, 1987; Schnaubelt & Busse, 1992; Herrmann & Busse, 1997, entre otros). La restricción impuesta por la rotación a un movimiento independiente de la coordenada en la dirección del eje de rotación, permite abordar el estudio no lineal, que se puede limitar al caso bidimensional manteniendo el interés físico del análisis.

Por tanto, para realizar el estudio numérico de la estabilidad de las columnas, se han considerado perturbaciones independientes de la coordenada axial. Se ha utilizado un código de continuación que permite encontrar soluciones no lineales estacionarias al variar cualquier parámetro de interés del problema y localizar con una elevada precisión las bifurcaciones secundarias que tienen lugar en el sistema. Utilizando esta técnica, se ha determinado la bifurcación secundaria que tiene lugar en el sistema cuando se consideran diferentes valores de la relación entre radios del anillo. Los resultados obtenidos se recogen en el presente capítulo. Además, se ha implementado un código de evolución temporal que permite obtener las soluciones con dependencia temporal. La descripción del método de integración temporal que se ha desarrollado, junto con el análisis de la secuencia de bifurcaciones de las columnas hasta alcanzar un régimen caótico para el caso $\eta = 0.3$, constituyen el capítulo 6. La dinámica no lineal depende fuertemente del número de Prandtl del fluido. A continuación se presentarán

los resultados correspondientes a números de Prandtl pequeños, en particular se ha estudiado el caso $\sigma = 0.025$.

5.1 Formulación en potenciales de las ecuaciones no lineales

En el capítulo 2 se habían obtenido las ecuaciones adimensionales que gobiernan el comportamiento de un fluido Boussinesq contenido en un anillo cilíndrico en rotación alrededor de su eje de simetría. Estas ecuaciones, escritas para las fluctuaciones de la velocidad y la temperatura respecto a su valor en el estado conductivo, son de la forma

$$\sigma^{-1}(\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla^2 \mathbf{u} + \text{Ra} T \hat{\mathbf{e}}_r - \text{Ta}^{1/2} \hat{\mathbf{e}}_z \times \mathbf{u}, \quad (5.1a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.1b)$$

$$\partial_t T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = -\frac{u}{r \ln \eta} + \nabla^2 T. \quad (5.1c)$$

Una vez se dispone del análisis de estabilidad lineal del estado conductivo, se ha de abordar el estudio de la dinámica no lineal del sistema. De los diferentes tipos de solución que el sistema selecciona en el inicio de la convección, las columnas bidimensionales alineadas con el eje del anillo tienen un interés especial. Por una parte, se ha visto que son el modo convectivo dominante, independientemente de las condiciones de contorno, siempre que la rotación del anillo es elevada, que es el límite de interés para aplicaciones en geofísica y astrofísica. Además, cuando se sustituye la solución en forma de columnas en las ecuaciones, éstas recuperan la simetría $O(2)$ del anillo cilíndrico sin rotación, con lo cual se dispone de un sistema de ecuaciones con simetría $O(2)$ en el que analizar la ruta de transición al caos o a un régimen turbulento. Puesto que las columnas son una solución sin velocidad vertical, $w = 0$, independiente de la coordenada axial, $\partial_z = 0$, y que permite escribir el término de Coriolis en forma de un gradiente e introducirlo en el término del gradiente de presiones (sección 3.4.1), las ecuaciones de convección (5.1) que determinan su evolución no lineal, escritas en

componentes se reducen a

$$\partial_t u = -\partial_r p + \sigma [\nabla^2 \mathbf{u}]_r + \sigma \text{Ra} T - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_r, \quad (5.2a)$$

$$\partial_t v = -\frac{1}{r} \partial_\theta p + \sigma [\nabla^2 \mathbf{u}]_\theta - [(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]_\theta, \quad (5.2b)$$

$$\partial_t T = \nabla^2 T - \frac{u}{r \ln \eta} - \mathbf{u} \cdot \nabla T, \quad (5.2c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (5.2d)$$

con $\mathbf{u} = (u, v)$ y las condiciones en el contorno lateral

$$\mathbf{u} = T = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega_r. \quad (5.3)$$

Como el problema es bidimensional, para resolver las ecuaciones mediante técnicas de continuación, se ha trabajado con la formulación de la función de corriente, lo cual equivale a reducir el campo de velocidades (2.15) a

$$\mathbf{u} = f \hat{\mathbf{e}}_\theta + \nabla \times \Psi \hat{\mathbf{e}}_z, \quad (5.4)$$

y trabajar con las ecuaciones (2.39) y (2.40) eliminando los potenciales g y Φ

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla_-^2) f = -\sigma^{-1} P_\theta [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}]_\theta, \quad (5.5a)$$

$$(\sigma^{-1} \partial_t - \nabla_h^2) \nabla_h^2 \Psi = (1 - P_\theta) \frac{\text{Ra}}{r} \partial_\theta T + \sigma^{-1} (1 - P_\theta) [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z, \quad (5.5b)$$

$$(\partial_t - \nabla_h^2) T = -\frac{1}{r^2 \ln \eta} \partial_\theta \Psi - [\mathbf{u} \cdot \nabla T], \quad (5.5c)$$

donde P_θ es el operador de proyección (2.16), que extrae el modo independiente de la coordenada azimutal de un desarrollo en serie de Fourier. Ahora, tan sólo la componente vertical del vector vorticidad no es nula, por lo que la expresión en componentes de los vectores velocidad y vorticidad es

$$\begin{cases} u = \frac{1}{r} \partial_\theta \Psi, \\ v = f - \partial_r \Psi, \\ \omega_z = D_+ f - \nabla_h^2 \Psi, \end{cases} \quad (5.6)$$

donde $\Psi = \Psi(r, \theta, t)$ y $f = f(r, t)$. Para calcular los términos no lineales se ha de evaluar el producto vectorial de los vectores vorticidad y velocidad, y su rotacional. Se obtiene

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u} = -\omega_z v \hat{\mathbf{e}}_r + \omega_z u \hat{\mathbf{e}}_\theta, \quad (5.7)$$

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}) = \left(\frac{1}{r} \partial_r (r \omega_z u) + \frac{1}{r} \partial_\theta (\omega_z v) \right) \hat{\mathbf{e}}_z. \quad (5.8)$$

En las ecuaciones interviene el modo cero de la componente azimutal de (5.7) y la vertical de (5.8), que junto con el término no lineal de la ecuación de la temperatura, se escriben en función de f y Ψ de la forma

$$\begin{aligned} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}]_{\theta} &= D_+ f \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \Psi \right) - \nabla_h^2 \Psi \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \Psi \right), \\ [\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u})]_z &= \partial_r D_+ f \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \Psi \right) - f \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \nabla_h^2 \Psi \right) + J(\Psi, \nabla_h^2 \Psi), \\ [\mathbf{u} \cdot \nabla T] &= -J(\Psi, T) + f \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} T \right), \end{aligned}$$

con el jacobiano J definido de la siguiente manera

$$J(h, g) = \begin{vmatrix} \partial_r h & \frac{1}{r} \partial_{\theta} h \\ \partial_r g & \frac{1}{r} \partial_{\theta} g \end{vmatrix}.$$

Sustituyendo estas expresiones en (5.5) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales para f , Ψ y T ,

$$\partial_t f = \sigma \nabla_-^2 f + P_{\theta} \left[\nabla_h^2 \Psi \cdot \frac{1}{r} \partial_{\theta} \Psi \right], \quad (5.9a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla_h^2 \Psi &= \sigma \nabla_h^4 \Psi + (1 - P_{\theta}) \frac{\sigma \text{Ra}}{r} \partial_{\theta} T + (1 - P_{\theta}) J(\Psi, \nabla_h^2 \Psi) + \\ &\quad + \partial_r D_+ f \cdot \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \Psi \right) - f \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} \nabla_h^2 \Psi \right), \end{aligned} \quad (5.9b)$$

$$\partial_t T = \nabla_h^2 T - \frac{1}{r^2 \ln \eta} \partial_{\theta} \Psi + J(\Psi, T) - f \cdot \left(\frac{1}{r} \partial_{\theta} T \right), \quad (5.9c)$$

donde, en la primera ecuación, se ha tenido en cuenta que $P_{\theta} [D_+ f \cdot (\frac{1}{r} \partial_{\theta} \Psi)] = 0$.

A partir de la condición (5.3) que se verifica en el contorno lateral para la velocidad, $u = v = 0$, hay que obtener el valor de f y Ψ en $\partial\Omega_r$. De la condición $u = 0$ se obtiene $\Psi = 0$ en $\partial\Omega_r$, pues $u = 0 \Rightarrow \partial_{\theta} \Psi = 0 \Rightarrow \Psi = cte$ en $\partial\Omega_r$, pero esta constante debe ser cero porque la función Ψ no contiene el modo independiente de la coordenada azimutal, pues éste está relacionado con f . De la segunda condición, $v = 0$ en $\partial\Omega_r$, se obtiene $f = 0$ y $\partial_r \Psi = 0$ en $\partial\Omega_r$.

Es importante destacar que en este problema no lineal se introduce explícitamente la posibilidad de que exista un flujo neto de masa no nulo. Se llamará *flujo de masa* al promedio de la componente azimutal del campo de velocidades en la dirección radial

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} v dr = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} (f - \partial_r \Psi) dr = \\ &= \frac{1}{r_2 - r_1} \left[\int_{r_1}^{r_2} f dr - (\Psi(r_2, \theta, t) - \Psi(r_1, \theta, t)) \right] = \frac{1}{r_2 - r_1} \int_{r_1}^{r_2} f dr = \bar{f}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Por tanto, una formulación general del problema debe incluir la ecuación para f , el modo independiente de la coordenada azimutal, pues de lo contrario se elimina la posibilidad de que exista un flujo neto de masa en la dirección azimutal. Sin embargo, es frecuente en la literatura, cuando se formula el problema bidimensional mediante la función de corriente, Ψ , no escribir una ecuación independiente para el promedio azimutal de la Ψ y anularla en el contorno. Con esta elección, no puede existir un flujo neto de masa porque la integral (5.10) es nula.

5.2 Discretización de las ecuaciones

Para discretizar espacialmente las ecuaciones se ha utilizado un método pseudoespectral de colocación en la dirección radial y un desarrollo en serie de Fourier en la dirección azimutal. La base escogida para desarrollar la dependencia radial es una combinación de polinomios de Chebyshev que verifique las condiciones de contorno en el contorno lateral, ésto es, función nula para las variables f y T y función y derivada primera nulas para Ψ . Ya se dispone de una expresión analítica de estas bases, pues se han usado en la resolución del problema de estabilidad lineal del estado conductivo (capítulos 3 y 4). Así pues, los desarrollos considerados para f , Ψ y T son

$$\begin{aligned}
 f(x, t) &= \sum_{l=2}^L \hat{f}_l(t) f^l(x), \\
 \Psi(x, \theta, t) &= \sum_{\substack{n=-N/2 \\ n \neq 0}}^{N/2-1} e^{in\theta} \Psi_n(x, t) = \sum_{\substack{n=-N/2 \\ n \neq 0}}^{N/2-1} e^{in\theta} \sum_{l=4}^L \hat{\Psi}_{l,n}(t) \Psi^l(x), \\
 T(x, \theta, t) &= \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{in\theta} T_n(x, t) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{in\theta} \sum_{l=2}^L \hat{T}_{l,n}(t) T^l(x),
 \end{aligned} \tag{5.11}$$

donde, como Ψ y T son funciones reales, se cumple $\Psi_n = \Psi_{-n}^*$ y $T_n = T_{-n}^*$ y sólo es necesario trabajar con la mitad de coeficientes, $n = 0 \div, N/2 - 1$, y donde $f^l(x)$, $\Psi^l(x)$ y $T^l(x)$ son las bases de funciones, combinación lineal de polinomios de Chebyshev, que cumplen el contorno ((3.11) y (3.12)).

Los métodos pseudoespectrales son la forma más eficiente y sencilla de evaluar los términos no lineales (Net, 1991), pues se evita efectuar los productos de convolución de los términos cuadráticos en el espacio de amplitudes. Con el método pseudoespectral

de Fourier que se ha usado, los términos no lineales, que son términos cuadráticos de la forma $h(x, \theta) = p(x, \theta) \cdot q(x, \theta)$, se evalúan de forma sencilla mediante la transformada discreta de Fourier (TDF). Tras obtener el valor de las funciones $p(x, \theta)$ y $q(x, \theta)$ en los puntos de colocación en la dirección azimutal mediante TDF, se efectúan los productos directamente en el espacio físico, $h(x_i, \theta_j) = p(x_i, \theta_j) \cdot q(x_i, \theta_j)$, y usando de nuevo la TDF inversa se encuentran los coeficientes. Como puntos de colocación en los desarrollos en serie de Fourier se consideran $\theta_j = 2\pi j/N$.

Sin embargo, la infradiscretización de los términos no lineales puede ocasionar un problema de *aliasing* (Canuto *et al.*, 1988). La manera más rentable de evitarlo consiste en calcular los términos no lineales en $3N/2$ puntos, antitransformar, y quedarse con las N primeras amplitudes. Esta técnica se conoce como regla del 3/2. Al corregir el *aliasing* trabajando con más modos se puede considerar también el modo de Fourier $N/2$ en los desarrollos.

Tomando como incógnitas los coeficientes de los desarrollos, \hat{f}_l , $\hat{\Psi}_{l,n}$ y $\hat{T}_{l,n}$, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal del tipo

$$A\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}), \quad (5.12)$$

donde \mathbf{x} es el vector que contiene las partes reales e imaginarias de los coeficientes de los desarrollos y cuya dimensión, incluyendo el coeficiente de Fourier $N/2$ dado que los cálculos se han realizado corrigiendo el *aliasing*, es $(L-1) + (L-3)N/2 + (L-1)(N/2+1) + (L-3)N/2 + (L-1)N/2$. Este vector se ha ordenado de la forma

$$\mathbf{x} = (\hat{f}_2, \dots, \hat{f}_L, \hat{\Psi}_{4,1}^R, \dots, \hat{\Psi}_{L,1}^R, \dots, \hat{\Psi}_{L,N/2}^R, \hat{T}_{2,0}^R, \dots, \hat{T}_{L,0}^R, \dots, \hat{T}_{L,N/2}^R, \hat{\Psi}_{4,1}^I, \dots, \hat{\Psi}_{L,1}^I, \dots, \hat{\Psi}_{L,N/2}^I, \hat{T}_{2,1}^I, \dots, \hat{T}_{L,1}^I, \dots, \hat{T}_{L,N/2}^I).$$

Aunque se han tomado como incógnitas los coeficientes de los desarrollos, la función $f(\mathbf{x})$ se ha evaluado en el espacio físico en la dirección radial, para reducir el número de transformaciones entre este espacio y el espacio de amplitudes. Podemos expresar el sistema de ecuaciones (5.12) discretizado de la siguiente forma:

$$\begin{pmatrix} A1_i^l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A2_{i,m}^{l,n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A3_{i,m}^{l,n} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A2_{i,m}^{l,n} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & A3_{i,m}^{l,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\hat{f}}_l \\ \dot{\hat{\Psi}}_{l,n}^R \\ \dot{\hat{T}}_{l,n}^R \\ \dot{\hat{\Psi}}_{l,n}^I \\ \dot{\hat{T}}_{l,n}^I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f1_i \\ f2_{i,m}^R \\ f3_{i,m}^R \\ f2_{i,m}^I \\ f3_{i,m}^I \end{pmatrix}.$$

Las matrices A1, A2 y A3 vienen dadas por

$$\begin{aligned} A1_i^l &= f^l(x_i), \\ A2_{i,m}^{l,n} &= \nabla_h^2 \Psi^l(x_i), \\ A3_{i,m}^{l,n} &= T^l(x_i), \end{aligned}$$

donde, los índices i y m determinan las filas y l y n las columnas y valen $i = 1 \div L - 1$ y $l = 2 \div L$ en A1, $i = 2 \div L - 2$, $l = 4 \div L$ y $n = m = 1 \div N/2$ en A2 y en la matriz A3, $i = 1 \div L - 1$ y $l = 2 \div L$, pero $n = m = 0 \div N/2$ si actúa sobre la parte real de los coeficientes, mientras que $n = m = 1 \div N/2$ si actúa sobre la parte imaginaria, pues el modo cero de la temperatura no tiene parte imaginaria. Respecto a los vectores $f1$, $f2$ y $f3$ su valor es

$$\begin{aligned} f1_i &= \sigma \nabla_-^2 f(x_i) + P_\theta \left[(\nabla_h^2 \Psi) \cdot \left(\frac{2}{(x+\delta)} im \Psi \right) \right]_{x_i}, \\ f2_{i,m} &= \sigma \nabla_h^4 \Psi_m(x_i) + (1 - P_\theta) \left[\frac{2\sigma Ra}{(x_i + \delta)} im T_m(x_i) \right] + (1 - P_\theta) [J(\Psi, \nabla_h^2)]_{x_i} + \\ & 4 \left[\left(\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x+\delta)} \partial_x - \frac{1}{(x+\delta)^2} \right) f \cdot \left(\frac{2}{(x+\delta)} im \Psi \right) \right]_{x_i} - \left[f \cdot \left(\frac{2}{(x+\delta)} im \nabla_h^2 \Psi \right) \right]_{x_i}, \\ f3_{i,m} &= \nabla_h^2 T_m(x_i) - \frac{4}{(x_i + \delta)^2 \ln \eta} im \Psi_m(x_i) + [J(\Psi, T)]_{x_i} - \left[f \cdot \left(\frac{2}{(x+\delta)} im T \right) \right]_{x_i}, \end{aligned}$$

donde los términos no lineales se calculan de la manera explicada anteriormente.

5.3 Método de continuación

El código de continuación que se ha utilizado permite encontrar las soluciones estacionarias del sistema de ecuaciones (5.12) ($f(\mathbf{x}) = 0$) y detectar las bifurcaciones estacionarias que se producen. Ha sido desarrollado por J. Sánchez, que lo había aplicado al cálculo de los vórtices de Taylor en el problema de Taylor-Couette (Sánchez, 1994). Las ideas fundamentales en las que se basa la técnica se encuentran en los trabajos de Simó (1990) y Rabinowitz (1977), mientras que en Sánchez (1994) se detalla el algoritmo de continuación que se ha empleado. En Kuznetsov (1995) se describen las ideas básicas usadas en el análisis numérico de los sistemas dinámicos y, en particular, de las técnicas de continuación, que son una herramienta específica de gran utilidad en la elaboración de diagramas de bifurcaciones.

El objetivo de los métodos de continuación es, dada una función dependiente de un parámetro p ,

$$f(\mathbf{x}, p) : \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{R}^n,$$

estudiar la dependencia de las soluciones de la ecuación $f(\mathbf{x}, p) = 0$ con el parámetro p . Para ello, se han de ir resolviendo los sistemas de ecuaciones $f(\mathbf{x}, p_m)$ (se ha de encontrar una función $\mathbf{x} = \mathbf{x}(p_m)$ tal que $f(\mathbf{x}(p_m), p_m) = 0$) donde $p_m = p_0 + m\Delta p$, tomando como condición inicial la solución del problema anterior. El parámetro respecto al cual se hace la continuación se trata como una variable más del sistema. Cuando se quieren detectar bifurcaciones se ha de usar el parámetro arco de la curva, s , para avanzar la continuación, es decir, se resuelve $f(\mathbf{x}(s), p(s)) = 0$. En general se ha usado como parámetro, p , de continuación el número de Rayleigh, es decir, se ha seguido la evolución no lineal de las columnas a medida que aumenta la diferencia de temperatura entre las paredes del anillo.

Para inicializar el algoritmo de continuación se necesitan tres condiciones iniciales. Una manera de conseguirlas es, dado un punto inicial sobre la curva, encontrar la dirección tangente a ella en dicho punto, y utilizar un paso de un integrador de ecuaciones diferenciales ordinarias para encontrar una primera aproximación del siguiente punto sobre la curva (Simó, 1990). En el caso de las columnas, la solución de partida puede ser el estado conductivo, aunque a partir del problema de valores propios del análisis de estabilidad lineal del estado conductivo también se dispone de la función propia correspondiente a la columna en el punto de bifurcación. El procedimiento de continuación es el siguiente. Dados tres puntos consecutivos sobre la curva y dado un incremento del parámetro de continuación, se construye una primera aproximación del punto siguiente mediante extrapolación cuadrática de los puntos anteriores. Para refinar el punto, se usa un método de Newton modificado, de convergencia más lenta pero menos costoso, pues el jacobiano $Df(\mathbf{x}, p)$ y la descomposición LU de $D_{\mathbf{x}}f(\mathbf{x}, p)$ se evalúan sólo para el primer punto en lugar de hacerlo en cada paso. La detección de las bifurcaciones se lleva a cabo calculando el valor propio mínimo de la matriz $M = Df(\mathbf{x}, p) \cdot Df(\mathbf{x}, p)^T$, que es simétrica y definida positiva si tiene rango n por lo que su determinante no cambia de signo. Los valores propios de M son reales y positivos, y la bifurcación se produce si el valor propio vale exactamente cero (Sánchez, 1994).

Para poder seguir la rama de soluciones que bifurca del estado conductivo y que corresponde a las columnas estacionarias ha sido necesario fijar la fase de las columnas. Para ello, se ha sustituido una de las ecuaciones del sistema para imponer que la parte real o imaginaria de uno de los modos diferentes de cero sea nula. La necesidad de

introducir esta ecuación se debe a que, al tener el sistema de ecuaciones (5.2) simetría $O(2)$ (sección 3.4.1), en el caso de las columnas el sistema de ecuaciones $f(\mathbf{x}, p) = 0$ no define una curva, sino que define una superficie de revolución (paraboloide). La bifurcación del estado conductivo a convección columnar se produce por una rotura de la simetría R_{θ_0} del sistema, pues la solución deja de ser invariante respecto a rotaciones alrededor del eje del anillo. Siempre que se produce una bifurcación que da lugar a una solución de menor simetría que la del sistema, ésta tiene lugar por valores propios múltiples. En el caso de las columnas, dos valores propios cruzan simultáneamente el eje imaginario. Los vectores propios asociados definen el subespacio de dimensión 2 tangente al paraboloide en el punto de bifurcación. Al fijar la fase de las columnas, el subespacio tangente pasa a ser de dimensión 1, y se tienen dos ramas de soluciones bifurcadas que corresponden a girar la solución un ángulo π alrededor del eje del anillo.

Aunque con el algoritmo de continuación empleado sólo se pueden determinar las bifurcaciones estacionarias, también se pueden detectar las bifurcaciones no estacionarias analizando directamente la estabilidad lineal de las columnas mediante el jacobiano del sistema dinámico (5.12). Si \mathbf{x}_0 es un punto fijo estable del sistema $A\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x})$, los valores propios, λ , de la matriz $A^{-1}Df(\mathbf{x}_0)$ son todos de parte real negativa. Por tanto, con un estudio del espectro de valores propios de esta matriz se determina la estabilidad de la solución \mathbf{x}_0 , que perdería estabilidad frente a una solución con dependencia temporal si los valores propios cuya parte real se hace cero tienen parte imaginaria no nula. El jacobiano del sistema de ecuaciones se ha evaluado utilizando diferencias centradas para aproximar las derivadas. Como las ecuaciones de Navier-Stokes son cuadráticas, no hay error en la aproximación de la derivada, y el error se reduce al de redondeo.

Como consecuencia de la invarianza por rotación del sistema, el espectro de valores propios de la matriz $A^{-1}Df(\mathbf{x}_0)$ se caracteriza por tener siempre un valor propio nulo. La demostración matemática es sencilla. Sea \mathbf{x}_0 una columna no lineal, solución del sistema de ecuaciones (5.12), $f(\mathbf{x}_0, p) = 0$. Por ser las columnas una solución no axisimétrica, este tipo de solución rompe la simetría R_{θ_0} del sistema. Se puede obtener una nueva solución del sistema de ecuaciones, distinta de la inicial, girando un ángulo α la solución \mathbf{x}_0 . Por tanto, $\mathbf{y} = R(\mathbf{x}_0, \alpha)$ es también solución del sistema de ecuaciones (5.12) $\forall \alpha$:

$$f(R(\mathbf{x}_0, \alpha), p) = 0 \quad \forall \alpha \in [0, 2\pi].$$

Diferenciando esta expresión respecto a α se obtiene

$$Df_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, p) \cdot \partial_{\alpha}\mathbf{y} = 0.$$

Es decir, $\partial_{\alpha} \mathbf{y}$ es función propia de valor propio cero de la matriz $Df_{\mathbf{y}}(\mathbf{y}, p)$ (siempre que $\partial_{\alpha} \mathbf{y} \neq 0$).

5.4 Bifurcación secundaria en sistemas con simetría $O(2)$

En la sección 3.4.1 se vió que la convección columnar es una solución especial del problema del anillo cilíndrico en rotación, pues el término de Coriolis, que rompe la simetría de reflexión R_1 respecto a planos verticales que contienen al eje del anillo, se puede incluir dentro del gradiente de presiones con lo que el sistema recupera la simetría $O(2)$ del anillo sin rotación. La presencia de la simetría $O(2)$ es importante porque permite la existencia de soluciones estacionarias bifurcadas del estado básico. Si estas soluciones rompen la simetría R_{θ_0} del estado básico, como es el caso de las columnas, aparecen vía una bifurcación de *pitchfork* de revolución. Puesto que se pretende estudiar la evolución no lineal de las columnas y su estabilidad, es conveniente analizar el tipo de bifurcación secundaria que puede sufrir una solución que haya roto la simetría de rotación R_{θ_0} , en un sistema con simetría $O(2)$.

En el trabajo de Knobloch (1996) se muestra que hay cuatro tipos de bifurcación secundaria de codimensión 1 que pueden tener lugar en el sistema, según la bifurcación secundaria sea estacionaria o de Hopf, y según la solución bifurcada mantenga o no la simetría de reflexión del estado básico (simetría R_1 en el caso del presente trabajo). Si la bifurcación da lugar a un estado estacionario que mantiene la simetría de reflexión, genéricamente será un bifurcación silla-nodo (*saddle-node bifurcation*). En el caso de que la bifurcación tenga carácter estacionario, pero la solución rompa la simetría de reflexión, la bifurcación será de *pitchfork* y dará lugar a una estructura que precesionará lentamente. Justo en el punto de bifurcación la precesión de la estructura es nula (bifurcación estacionaria), pero esta velocidad de precesión irá aumentando a medida que el sistema se aleje del punto crítico, de forma proporcional a la raíz cuadrada del parámetro de la bifurcación. La tercera posibilidad es que la bifurcación sea de Hopf manteniéndose la simetría R_1 . En ese caso, se producirá una onda estacionaria con oscilaciones de amplitud, pero sin precesión. Cuando la bifurcación de Hopf rompa la simetría de reflexión, la estructura oscilará alternativamente de izquierda a derecha dando lugar a lo que se conoce en la literatura como una *Direction Reversing Travelling Wave* (Landsberg & Knobloch, 1991). Es decir, mientras que una bifurcación de Hopf que mantiene la simetría de reflexión produce

oscilaciones en la amplitud, si se rompe esta simetría, además de las oscilaciones de la amplitud, se producen oscilaciones en la fase de la solución.

5.5 Continuación respecto al número de Rayleigh: $\sigma = 0.025$

Todos los cálculos que se presentan a continuación se han realizado con $\sigma = 0.025$. La bifurcación secundaria se ha determinado para diferentes valores de la razón entre radios del anillo, η , y se ha analizado en más detalle el caso correspondiente a $\eta = 0.3$. Por tanto, se han tenido en cuenta los efectos de la curvatura de la capa. En todos los casos, la continuación de las ramas de soluciones se ha realizado cambiando el valor del número de Rayleigh.

5.5.1 Convección columnar no lineal y bifurcación secundaria

En primer lugar, se ha comprobado que el código de continuación reproduce la bifurcación primaria de *pitchfork* supercrítica que tiene lugar en el sistema. Partiendo de la solución correspondiente al estado conductivo y de un valor del número de Rayleigh en el que esta solución es estable, al ir aumentando el valor del parámetro de continuación se detecta una bifurcación para un valor crítico del número de Rayleigh que coincide con el obtenido en el análisis de estabilidad lineal. Cuando $\eta = 0.3$, independientemente del valor del número de Prandtl, el estado conductivo se inestabiliza a una solución columnar caracterizada por el número de onda azimutal $n = 3$. En este caso, la bifurcación se produce para $\text{Ra}_c^1 = 1799.8$. Tras reproducir la bifurcación primaria, incrementando sucesivamente el valor del número de Rayleigh por encima del crítico, se va obteniendo la solución de las ecuaciones a medida que el sistema se aleja del punto de bifurcación y los términos no lineales se hacen importantes.

Para representar el diagrama de la bifurcación que ha tenido lugar, se ha escogido uno de los coeficientes del desarrollo de la solución de modo azimutal no nulo y se ha representado en función del número de Rayleigh. Por ejemplo, para dibujar el diagrama que se muestra en la figura 5.1, se ha tomado la parte real del coeficiente de la temperatura correspondiente a $n = 3$ y $l = 2$, $\hat{T}_{2,3}^R$. Este coeficiente es nulo para el estado conductivo (rama horizontal, señalada con C) y es diferente de cero para la solución convectiva (rama $N3$), empezando a crecer a partir del punto de

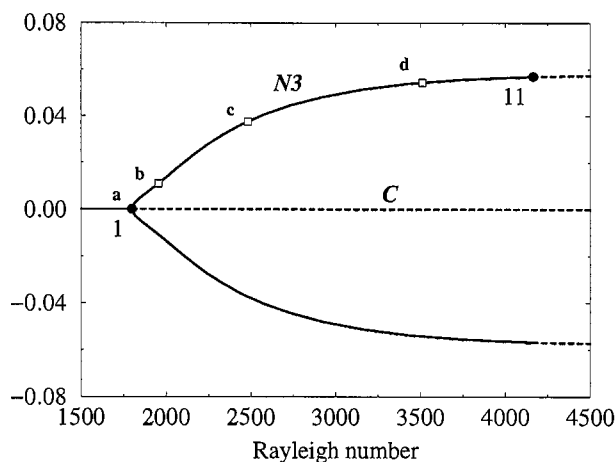


Figura 5.1: Diagrama de la bifurcación del estado conductivo a la solución columnar con número de onda azimutal $n = 3$. Los valores de los parámetros son $\eta = 0.3$ y $\sigma = 0.025$. Los valores críticos del número de Rayleigh para la bifurcación primaria y la secundaria son $Ra_c^1 = 1799.8$ y $Ra_c^{11} = 4114$. Las etiquetas a , b , c y d señalan las soluciones que se han dibujado en la figura 5.2.

bifurcación 1. Como es habitual en este tipo de diagramas, el trazo continuo de las líneas indica la solución que es estable para cada valor del número de Rayleigh. La rama que corresponde al estado conductivo es estable para valores del número de Rayleigh inferiores al crítico, pero pierde estabilidad frente a la solución convectiva a partir de la bifurcación (línea discontinua a partir del punto 1).

La bifurcación primaria de *pitchfork* es estacionaria, por lo que todas las soluciones sobre la rama $N3$ son independientes del tiempo. Para ver cómo se modifican las columnas a medida que se incrementa el número de Rayleigh, se han representado en la figura 5.2 las soluciones correspondientes a diferentes valores del número de Rayleigh. Las etiquetas a , b , c y d en la figura 5.1 indican la posición sobre la rama $N3$ de las soluciones dibujadas. Junto con las curvas de nivel de la temperatura, de las velocidades radial y azimutal, y de la función de corriente se ha añadido, para cada solución, un histograma que muestra el espectro espacial de la función de corriente, Ψ . Este espectro se ha calculado sumando, para cada modo azimutal n , los coeficientes del desarrollo al cuadrado, $\sum_l \hat{\Psi}_{l,n}^2$. De esta forma, se puede apreciar que justo tras la bifurcación (solución a) tan sólo es diferente de cero el modo $n = 3$, mientras que al alejarnos del punto de bifurcación, se empiezan a llenar los modos múltiples de

$n = 3$ por efecto de los términos no lineales (soluciones b , c y d). Sin embargo, el modo dominante $n = 3$ es siempre un orden de magnitud superior a los armónicos. Obsérvese que, en cualquier caso, estas soluciones mantienen la simetría de reflexión respecto a planos entre columnas. Como se ha mencionado en la sección 5.3, para detectar la bifurcación se ha fijado la fase de la columna, pues debido a la simetría de revolución del sistema, dada una solución de las ecuaciones, cualquier solución girada es también solución. Las soluciones sobre la rama simétrica a $N3$ que se ha dibujado en el diagrama de bifurcaciones, corresponden a girar en un ángulo π las soluciones sobre la rama $N3$ representadas en la figura 5.2.

Una vez se dispone de la rama estable de soluciones estacionarias que ha bifurcado del estado conductivo, se ha de determinar para qué valor del número de Rayleigh se produce la bifurcación secundaria y cuál es el carácter de esta bifurcación. Por una parte, el código de continuación detecta las bifurcaciones estacionarias, pero además, puesto que se dispone de la solución exacta de las ecuaciones no lineales, también se puede analizar su estabilidad lineal calculando los valores propios del jacobiano del sistema (5.12). Se pueden así identificar las posibles bifurcaciones con dependencia temporal que tengan lugar en el sistema. Se ha encontrado que en $Ra_c^{11} = 4114$ (punto 11 en el diagrama de bifurcaciones de la figura 5.1) tiene lugar una bifurcación de *Hopf*, siendo la parte imaginaria del valor propio que cruza el eje $\lambda_I = \pm 23.5$ (pareja de valores propios conjugados) (Alonso *et al.*, 1998). Así pues, las columnas no lineales estacionarias se desestabilizan y dan lugar a una estructura con dependencia temporal. De los dos tipos de soluciones con dependencia temporal predichos por la teoría de bifurcaciones, ondas estacionarias y *Direction Reversing Travelling Waves* (DRTW), es esta segunda posibilidad la seleccionada. La nueva solución mantiene el número de onda azimutal de la columna estacionaria, $n = 3$, y se caracteriza por la aparición de un flujo medio en la dirección azimutal que rompe la simetría de reflexión R_1 de las columnas de Taylor, pues se hace no nulo el modo de la componente azimutal de la velocidad independiente de la coordenada θ , f . Este nuevo modo, que aparece siempre que la inestabilidad rompa la simetría de reflexión, genera un esfuerzo tangencial neto en la dirección azimutal a lo largo de la capa.

En la figura 5.3 se muestra el cambio en la estructura de las columnas tras la bifurcación secundaria. Se han dibujado las líneas de corriente antes de la bifurcación (parte superior) y las correspondientes a la *Direction Reversing Travelling Wave* en cuatro instantes de tiempos distintos, $t = 0, T/4, T/2, 3T/2$ (parte inferior). Para dibujar las DRTW cerca de la bifurcación se ha superpuesto a la solución estacionaria el vector propio multiplicado por un coeficiente ε , que es la amplitud de la perturbación. Aunque la elección de ε es arbitraria, en nuestro caso también disponemos de la

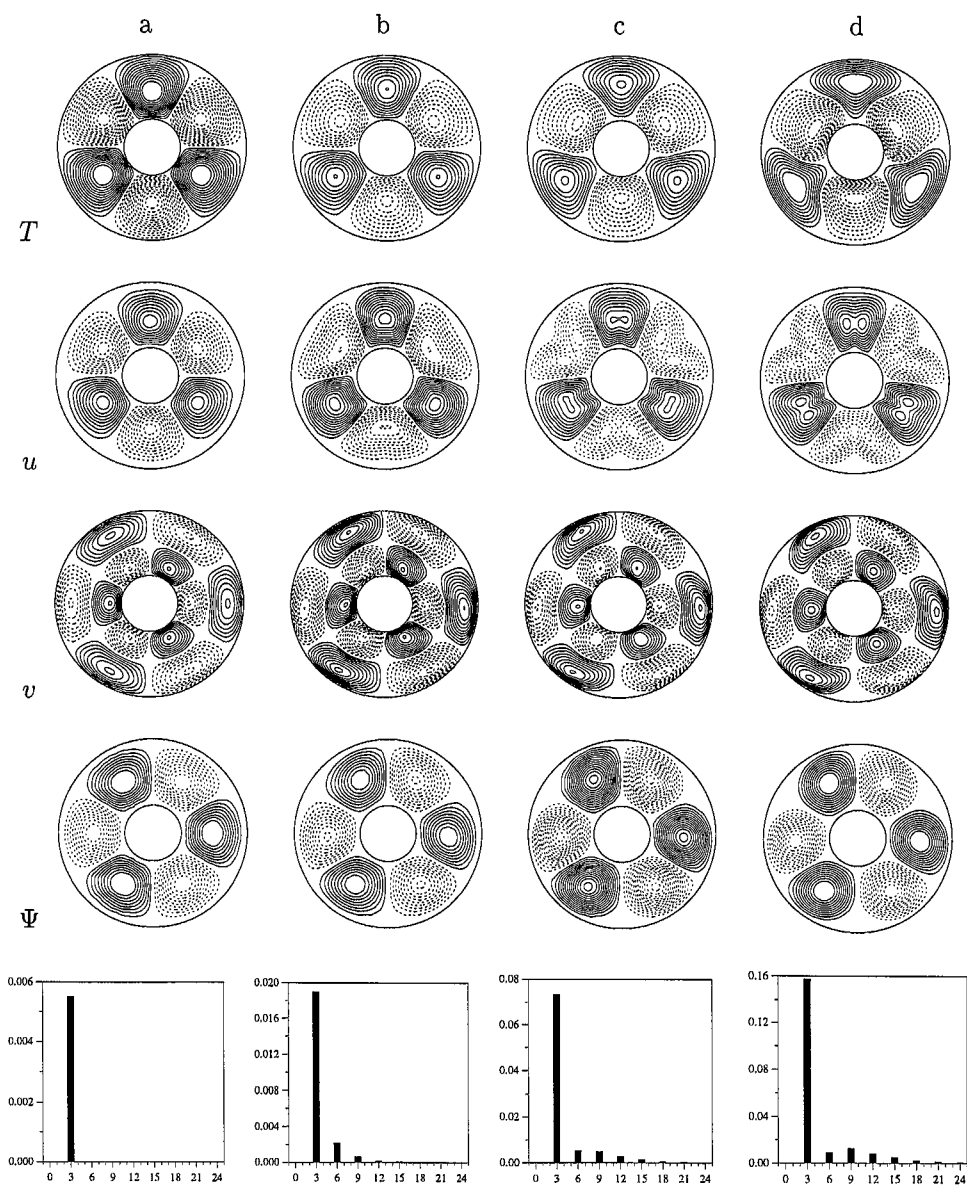


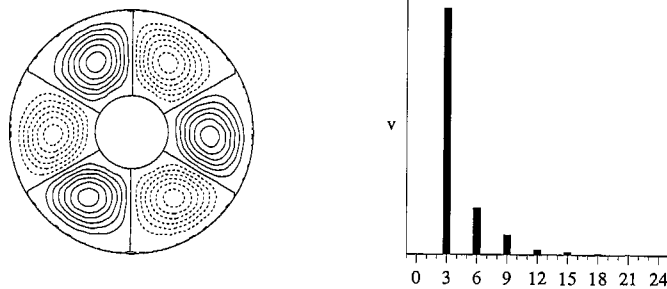
Figura 5.2: Evolución de las columnas sobre la rama estable ($N3$). De izquierda a derecha, corresponden a los puntos a ($Ra = 1800$), b ($Ra = 1950$), c ($Ra = 2535$) y d ($Ra = 3820$) de la figura 5.1. De arriba a abajo, curvas de nivel de la temperatura, la velocidad radial, u , y la velocidad azimuthal, v , líneas de corriente, Ψ , y espectro espacial de Fourier de la función de corriente.

solución no lineal oscilatoria obtenida mediante evolución temporal (capítulo 6), por lo que se ha elegido el valor de ε de forma que las curvas de nivel se correspondan. Tras la bifurcación, la estructura oscila hacia adelante y hacia atrás con un periodo dado, cerca de la bifurcación, por el valor de la parte imaginaria del valor propio cuya parte real se anula. Claramente, la DRTW no mantiene la simetría de reflexión de las columnas no lineales estacionarias respecto a planos verticales que contienen el eje del anillo. Los histogramas de ambas soluciones representan el espectro de Fourier azimutal de la componente azimutal de la velocidad, v . Tras la bifurcación, el modo de v independiente de θ , f , contribuye a la solución. Se muestra también la dependencia de f con la coordenada radial, x , en los instantes de tiempo anteriores. Puesto que en esta gráfica el área encerrada por cada curva representa el flujo neto de masa instantáneo, (5.10), se observa que hay un transporte de masa oscilatorio en la dirección azimutal. Es decir, el flujo neto de masa instantáneo es no nulo para esta solución, pero sí lo es promediado en un periodo.

Cuando se consideran diferentes valores de la relación entre radios del anillo, η , la bifurcación secundaria que tiene lugar es también de *Hopf* y da lugar a *Direction Reversing Travelling Waves*. En la figura 5.4, sobre la curva de estabilidad marginal del estado conductivo, que indica el número de Rayleigh a partir del cual este estado es inestable y se inicia la convección en el sistema, se ha señalado el valor del número de Rayleigh para el que se produce la bifurcación secundaria para varios valores de η ($\eta = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6$). Los valores del número de Rayleigh correspondientes a esta bifurcación, así como la parte imaginaria del valor propio que cruza el eje imaginario, se han resumido en la tabla 5.1.

Los cálculos del número de Rayleigh para el que se produce la bifurcación secundaria presentados hasta el momento, se han realizado con una resolución radial de $L = 24$ y una resolución azimutal de $N = 72$. Si n es el número de onda azimutal dominante de la solución básica, el número de modos azimutales no nulos de la solución de la que se calcula la estabilidad es de $N/2n$. En la tabla 5.2 se presenta un estudio de cómo se modifican los resultados al cambiar la resolución espacial tanto en la dirección radial como azimutal para $\eta = 0.3$. El número de modos de Fourier tiene una mayor influencia en el resultado que los coeficientes considerados en la dirección radial. Hay un error de aproximadamente un 10% cuando se considera $N = 48$, esto es, 8 modos de Fourier diferentes de cero ($n = 3, 6, \dots, 24$). Los resultados obtenidos con $N = 72$ y $N = 96$ prácticamente coinciden, pues se diferencian en tan sólo un 1%.

a) Columnas de Taylor térmicas



b) DRTW

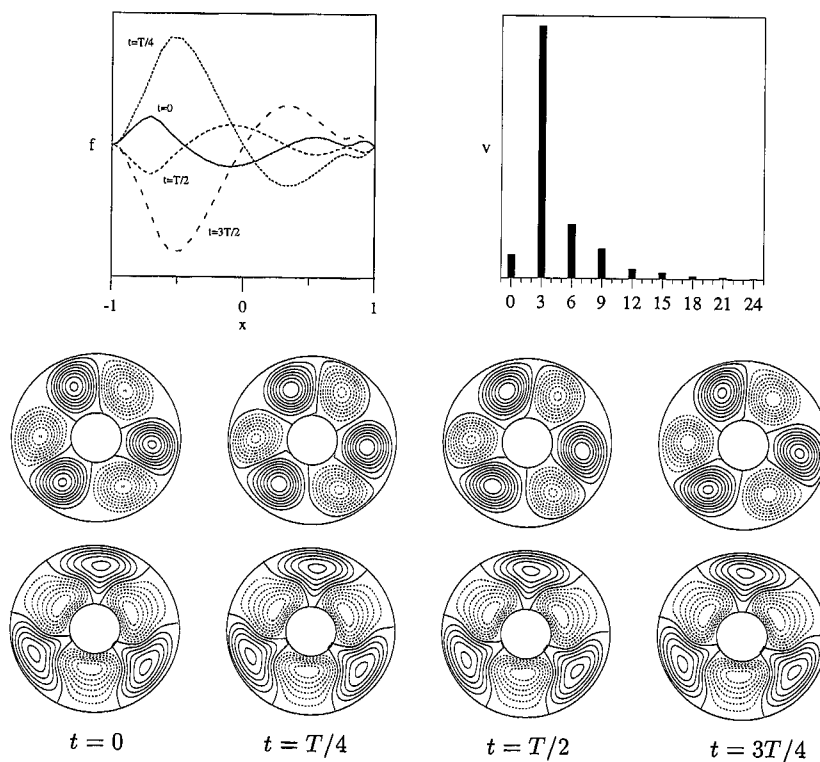


Figura 5.3: a) Líneas de corriente y espectro espacial de la velocidad azimutal, v , para las columnas no lineales estacionarias. b) Dependencia radial del modo cero de v en cuatro instantes de tiempo separados un cuarto de periodo e histograma de los modos azimutales en uno de los instantes de tiempo para las DRTW (parte media). Curvas de nivel de la función de corriente y la temperatura para la solución periódica representadas en cuatro instantes de tiempo (parte inferior).

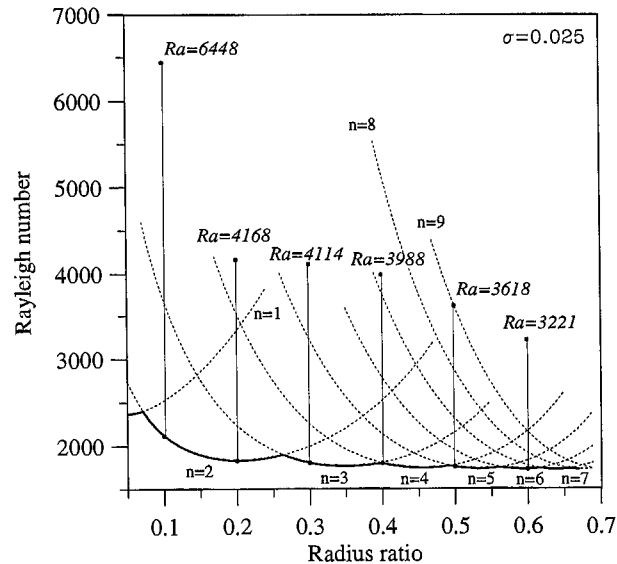


Figura 5.4: Número de Rayleigh en función de la relación entre radios del anillo, η . La línea en negrita es la curva de estabilidad marginal del estado conductivo, que se desestabiliza a columnas bidimensionales. Los números de Rayleigh indican la posición de la bifurcación secundaria, que da lugar a DRTW, para varios valores de η .

Es conveniente destacar que aumentar excesivamente la resolución espacial supone una pérdida de precisión en el cálculo de los valores propios y un considerable aumento de la memoria requerida por el código de continuación, debido a la mayor dimensión del sistema de ecuaciones. Cuando se conoce el tipo de bifurcación, una forma de poder aumentar el número de modos en el desarrollo y determinar el punto de bifurcación con mayor precisión, consiste en fijar el número de columnas de la solución, es decir, solamente considerar los modos de Fourier múltiplos del número de onda azimutal básico (por ejemplo, $n = 3$ en el caso de $\eta = 0.3$). Esta forma de proceder, que se ha utilizado para calcular los datos de la tabla 5.2, permite detectar las bifurcaciones que dan lugar a flujo medio azimutal, pero no las bifurcaciones subarmónicas, en las que modos de Fourier diferentes del básico contribuyen a la solución.

η	n	Ra_c^{prim}	λ_I^{prim}	Ra_c^{sec}	λ_I^{sec}
0.1	2	2116.56	0	6448	± 25.0
0.2	2	1827.09	0	4168	± 19.9
0.3	3	1799.86	0	4114	± 23.5
0.4	4	1793.94	0	3988	± 24.7
0.5	5	1750.30	0	3618	± 23.1
0.6	6	1720.60	0	3221	± 19.2
0.7	9	1714.94	0	3258	± 20.7
0.8	14	1709.93	0	3175	± 19.9
0.9	30	1708.79	0	3181	± 20.3

Tabla 5.1: Número de onda azimutal seleccionado, n , y valores del número de Rayleigh crítico y de la frecuencia de precesión correspondientes a la bifurcación primaria (convección columnar) y a la secundaria (DRTW) para diferentes valores de la relación entre radios.

N	L	Ra_c^{sec}	λ_I^{sec}
48	18	4507.0	± 26.49
	32	4785.9	± 28.46
72	16	4081.2	± 23.11
	18	4100.0	± 23.46
	24	4114.0	± 23.54
	32	4103.5	± 23.44
96	18	4111.6	± 23.39
	32	4152.4	± 23.67

Tabla 5.2: Número de Rayleigh crítico y parte imaginaria del valor propio que cruza el eje imaginario correspondientes a la bifurcación secundaria cambiando la resolución espacial. Los valores de los parámetros son $\eta = 0.3$ y $\sigma = 0.025$. L es la resolución radial y N la azimutal.

5.5.2 Bifurcaciones estacionarias para $\eta = 0.3$

Al haberse encontrado que las columnas estacionarias se desestabilizan a una solución con dependencia temporal para todos los valores de η analizados, no se puede usar el código de continuación para seguir las nuevas ramas y analizar su estabilidad conforme se incrementa el número de Rayleigh. Para eso es necesario integrar temporalmente el sistema de ecuaciones, lo que permite encontrar las soluciones estables. El método que se ha seguido para integrar las ecuaciones junto con el análisis de la secuencia de bifurcaciones que se producen hasta alcanzar un régimen caótico constituyen el siguiente capítulo. Ahora bien, para completar el estudio de las bifurcaciones secundarias de las columnas de Taylor, se han calculado las ramas de soluciones estacionarias inestables que bifurcan del estado conductivo cerca de la primera bifurcación y se ha analizado su estabilidad, en el caso de un anillo con $\eta = 0.3$.

En la figura 5.5, se muestra el diagrama de bifurcaciones de la figura 5.1 en el que se ha añadido a la rama estable de columnas convectivas con número de onda azimutal $n = 3$ (rama $N3$) las dos ramas de soluciones inestables correspondientes

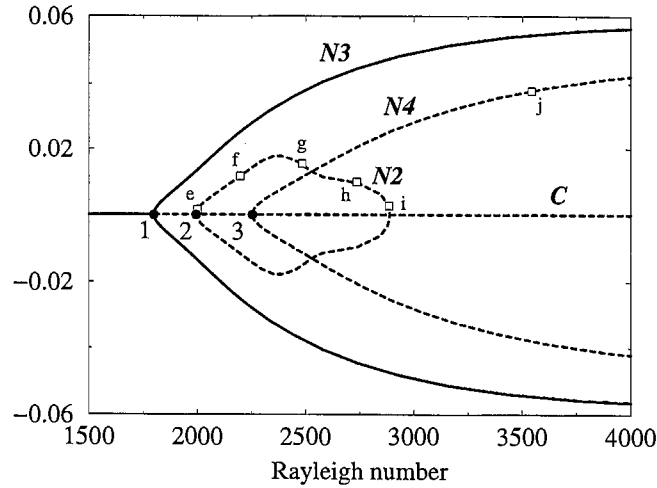


Figura 5.5: Diagrama de bifurcaciones estacionarias ($\eta = 0.3$, $\sigma = 0.025$). La rama $N3$ corresponde a soluciones con número de onda fundamental $n = 3$, la rama $N2$ a soluciones con $n = 2$ y la rama $N4$ con $n = 4$. Las bifurcaciones que dan lugar a estas ramas se producen en $Ra_c^1 = 1799$ (punto 1), $Ra_c^2 = 1995$ (punto 2) y $Ra_c^3 = 2254$ (punto 3).

a columnas con número de onda $n = 2$ (rama $N2$) y $n = 4$ (rama $N4$). Estas dos ramas bifurcan del estado conductivo para números de Rayleigh de $Ra_c^2 = 1995$ (punto de bifurcación señalado con 2) y $Ra_c^3 = 2254$ (punto 3), respectivamente. Se ha escogido para su representación la parte real del modo azimutal dominante de la temperatura, es decir, el modo $\hat{T}_{l,n}^R = \hat{T}_{2,2}^R$ en el caso de la rama $N2$ y el modo $\hat{T}_{2,4}^R$ para la rama $N4$. En ambos casos la bifurcación es múltiple, pues cruzan el eje imaginario dos valores propios cada vez. El comportamiento de las soluciones sobre la rama $N4$ es similar a lo que sucede sobre la rama principal $N3$. Inicialmente, sólo es diferente de cero el modo $n = 4$ y, a medida que aumenta el número de Rayleigh, la contribución de los términos no lineales hace que se llenen los modos múltiples de $n = 4$. Las columnas van cambiando ligeramente de forma al aumentar el número de Rayleigh, pero su estructura básica se mantiene (cuatro rollos alineados con el eje del anillo). En la figura 5.6 se muestra una solución sobre esta rama, que corresponde a $Ra = 3543$ (punto j sobre el diagrama de bifurcaciones 5.5). En contraste, sobre la rama $N2$ se produce una interacción espacial fuerte entre los modos $n = 2$ y $n = 4$. A medida que se incrementa el número de Rayleigh, se va produciendo un cambio en la estructura de las soluciones. Para visualizar la evolución de las soluciones sobre esta rama, en la figura 5.7 se han dibujado las curvas de nivel de la temperatura y el histograma que muestra los modos de Fourier que contribuyen a la solución en los puntos e ($Ra = 2000$), f ($Ra = 2198$), g ($Ra = 2500$), h ($Ra = 2711$) e i ($Ra = 2875$) de la rama. Como se puede ver, cerca del punto de bifurcación 2, la solución e está formada por dos parejas de columnas y prácticamente sólo hay contribución del modo $n = 2$. Sin embargo, a medida que se avanza sobre la rama, se va haciendo cada vez más importante la contribución del modo $n = 4$, que ya supera a la del modo $n = 2$ en la solución h . A su vez, el modo $n = 2$ va disminuyendo, hasta anularse. Se produce una evolución continua de la solución, que pasa de estar formada por dos parejas de rollos a estar formada por cuatro parejas rollos, tras producirse la rotura de una de ellas. Por el tipo de representación empleado, cuando esta rama pasa a ser una rama de soluciones puras $n = 4$ (punto 8 de la figura 5.8) desaparece de la figura.

Se han detectado varias bifurcaciones sobre la rama de soluciones $N2$, que se han recogido en el diagrama 5.8. En primer lugar, en $Ra_c^4 = 2362$ (punto 4 en el diagrama de bifurcaciones) tiene lugar una bifurcación estacionaria subarmónica. Las soluciones estacionarias sobre la nueva rama (rama $N21a$) se caracterizan por tener llenos también los modos $n = 1$. Es decir, todos los modos de Fourier azimutales, excepto el modo $n = 0$, contribuyen a la solución, si bien el modo $n = 2$ continúa siendo dominante. En la figura 5.9 (izquierda) se muestra el aspecto de las soluciones sobre esta nueva rama. La solución corresponde a $Ra = 3308$ (punto señalado con k en el diagrama). Un análisis de los espectros de valores propios muestra que tras

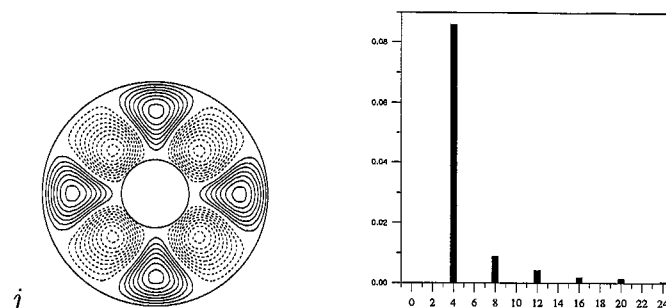


Figura 5.6: Curvas de nivel de la temperatura y espectro espacial de la función de corriente para una solución sobre la rama $N4$ (punto j de la figura 5.5). El valor del número de Rayleigh es $Ra = 3543$.

esta bifurcación se estabiliza una de las direcciones inestables sobre la rama principal (rama $N2$), pues disminuye el número de valores propios con parte real positiva (se pasa de dos a uno). El punto de bifurcación señalado con 5 sobre el diagrama corresponde a una inestabilidad en la que el número de onda azimutal $n = 2$ de la rama principal se mantiene y se llena el modo $n = 0$. Sin embargo, esta bifurcación sólo se ha podido identificar inspeccionando los espectros de valores propios de las soluciones sobre la rama $N2$, pero no se ha conseguido detectar mediante el código de continuación. Por este motivo no se dispone de la rama de soluciones. La bifurcación tiene lugar en $Ra_c^5 = 2478$. Según la teoría de bifurcaciones (Knobloch, 1996), una bifurcación estacionaria que rompa la simetría de reflexión de la solución da lugar a una onda viajera (*Travelling Wave*) cuya frecuencia de precesión es cero en el punto de bifurcación y va aumentando a medida que el sistema se aleja del punto crítico. Por tanto, posiblemente en este punto de bifurcación nace una rama de soluciones con dependencia temporal, aunque tanto las ondas viajeras como las soluciones sobre la rama principal se mantienen inestables, al menos inicialmente. En $Ra_c^6 = 2509$ (punto 6) y $Ra_c^7 = 2712$ (punto 7) se detectan dos nuevas bifurcaciones subarmónicas sobre la rama principal. Las soluciones sobre las nuevas ramas (ramas $N21b$ y $N21c$, respectivamente) se han dibujado en la figura 5.9. Corresponden a $Ra = 2649$ (punto l) y $Ra = 3040$ (punto m). Los histogramas muestran que, al igual que en las soluciones sobre la rama $N21a$, todos los modos azimutales son no nulos a excepción de $n = 0$. Tras la bifurcación en el punto 6 aumenta el número de direcciones inestables sobre la rama $N2$ (hay un valor propio más de parte real positiva), mientras que en la bifurcación en el punto 7 de nuevo se estabiliza una dirección. Por tanto, tras las sucesivas bifurcaciones, el espectro de valores propios de una solución sobre la rama

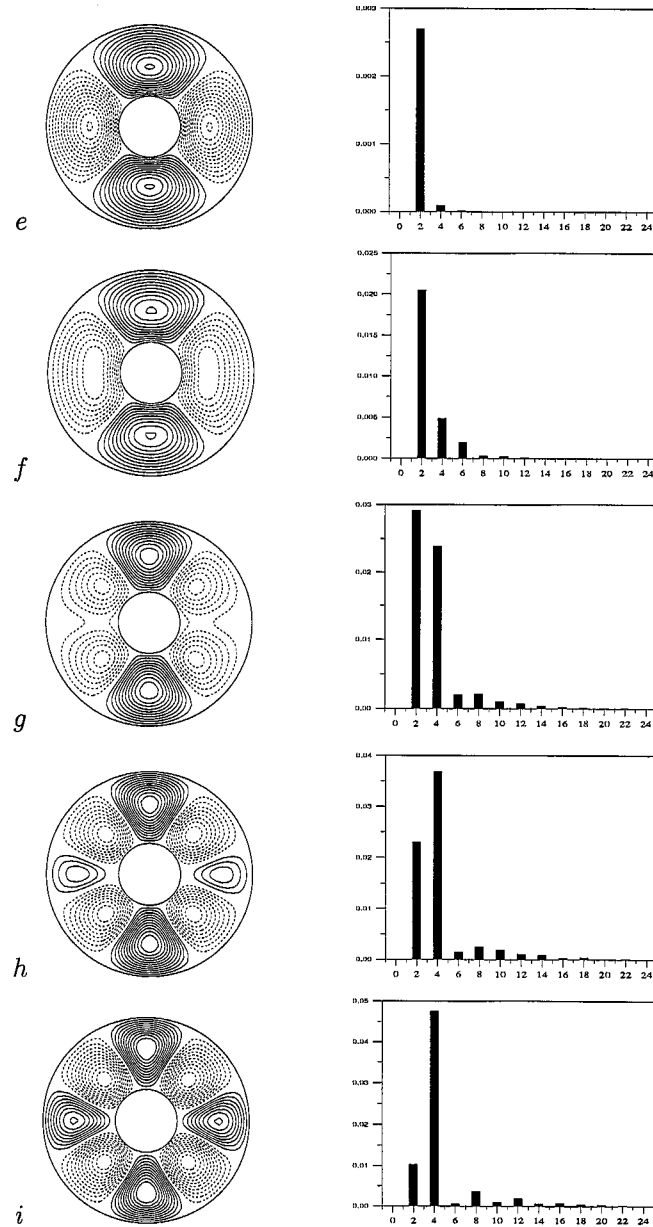


Figura 5.7: Evolución de las columnas sobre la rama N_2 . Curvas de nivel de la temperatura y espectro azimutal de la función de corriente correspondientes a los puntos e ($Ra = 2000$), f ($Ra = 2198$), g ($Ra = 2500$), h ($Ra = 2711$) y i ($Ra = 2875$) señalados en la figura 5.5.

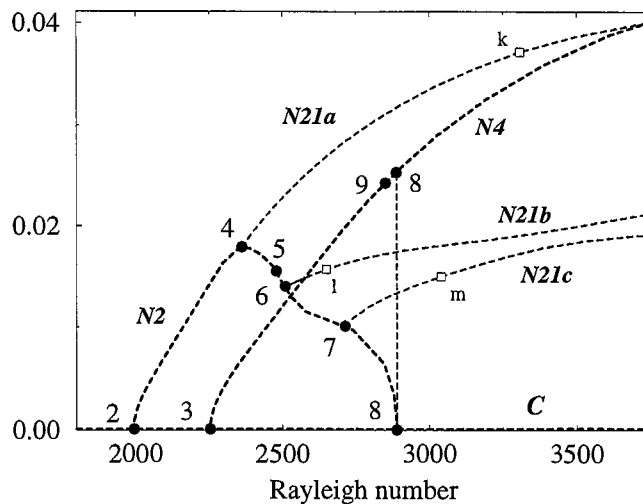


Figura 5.8: Detalle del diagrama de bifurcaciones estacionarias para las ramas $N2$ y $N4$ ($\eta = 0.3$, $\sigma = 0.025$). Se producen nuevas bifurcaciones sobre la rama $N2$ en $Ra_c^4 = 2362$ (punto 4), $Ra_c^5 = 2478$ (punto 5), $Ra_c^6 = 2509$ (punto 6), $Ra_c^7 = 2712$ (punto 7) y $Ra_c^8 = 2888$ (punto 8). Sobre la rama $N4$ se detectan bifurcaciones en $Ra_c^9 = 2851$ (punto 9) y $Ra_c^8 = 2888$ (punto 8).

$N2$ después del punto 7 tiene dos valores propios positivos. El punto 8 del diagrama corresponde a $Ra_c^8 = 2888$, que es el valor del número de Rayleigh para el cual la amplitud del modo $n = 2$ es nula, y es también un punto de bifurcación. La rama $N2$ va a parar a la rama $N4$, en la que las soluciones son modos puros múltiplos de $n = 4$, y la solución con número de onda azimutal $n = 2$ desaparece.

El punto de bifurcación 8 se ha confirmado detectándolo también sobre la rama $N4$. Previamente, para $Ra_c^9 = 2851$ (punto 9), sobre la rama $N4$ ha tenido lugar una bifurcación subarmónica múltiple (no se ha dibujado la nueva rama en el diagrama), en la que dos de los cuatro valores propios positivos que hay al inicio de la rama $N4$ cruzan el eje imaginario. En 8 un nuevo valor propio pasa a tener parte real negativa, estabilizándose otra dirección, por lo que el espectro de una solución sobre la rama $N4$ después de las bifurcaciones en 8 y 9 tiene un sólo valor propio con parte real positiva.

Finalmente, en la figura 5.10 se ha prolongado el diagrama de bifurcaciones hasta $Ra = 6000$ para estudiar lo que sucede sobre la rama $N4$, y se ha incluido la rama

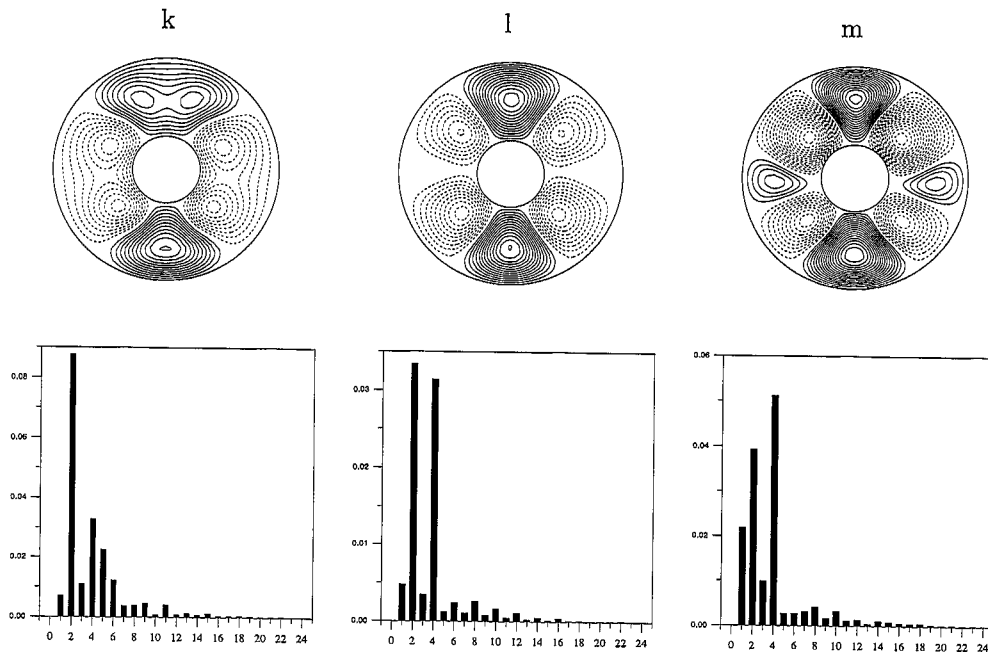


Figura 5.9: Curvas de nivel de la temperatura y espectro espacial de la función de corriente correspondientes a soluciones sobre las ramas $N21a$ ($Ra = 3308$, punto k), $N21b$ ($Ra = 2649$, punto l) y $N21c$ ($Ra = 3040$, punto m) de la figura 5.8.

$N2^*$, que es una nueva rama de soluciones con número de onda $n = 2$ distinta de la rama $N2$. Respecto a la rama $N4$, al aumentar el número de Rayleigh se produce una bifurcación en $Ra_c^{10} = 4779$ (punto 10) tras la cual se estabiliza la solución con número de onda fundamental $n = 4$ y aparece de nuevo una rama inestable de soluciones $n = 2$ (no se ha incluido esta nueva rama en el diagrama). Así pues, para valores del número de Rayleigh superiores a Ra_c^{10} coexisten al menos dos soluciones estables: columnas estacionarias con número de onda azimutal $n = 4$ y DRTW con número de onda $n = 3$. Además de las ramas de soluciones $N3$, $N2$ y $N4$, que nacen del estado conductor, se ha identificado la rama de soluciones $N2^*$, que parece no conectar directamente con ninguna de las ramas anteriores. Las soluciones sobre ella se caracterizan por tener un número de onda azimutal $n = 2$. Las pruebas realizadas hasta el momento no permiten concluir con seguridad cuál es el origen de esta rama. Se dispone de soluciones de este tipo a partir de $Ra \approx 2340$, pero en este punto el código de continuación no encuentra nuevas ramas estacionarias. Una posibilidad es

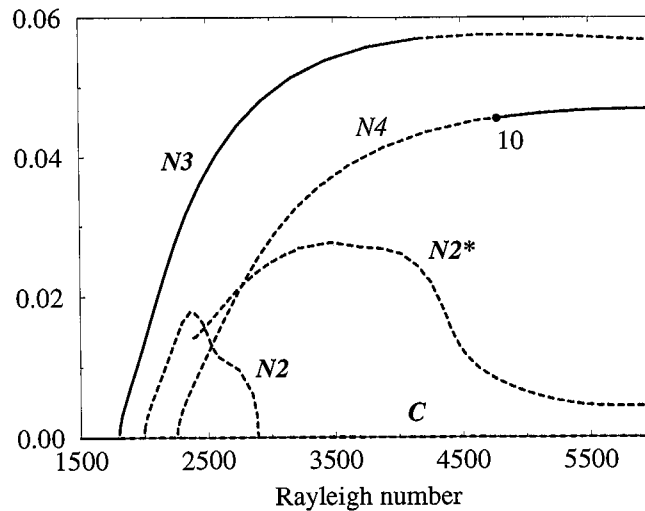


Figura 5.10: Prolongación del diagrama de bifurcaciones de la figura 5.8. Sobre la rama $N4$ se produce una bifurcación en $Ra_c^{10} = 4779$ (punto 10), tras la cual se estabilizan las soluciones con número de onda $n = 4$. La rama $N2^*$ es una nueva rama de soluciones estacionarias con $n = 2$, diferente de la rama $N2$, que podría nacer en una rama de soluciones con dependencia temporal.

que la rama $N2^*$ bifurque de una rama de soluciones con dependencia temporal. En particular, podría proceder de alguna de las ramas de soluciones que han bifurcado de la rama $N2$. Aunque no se han estudiado sistemáticamente las posibles bifurcaciones sobre esta nueva rama, sí se ha analizado el espectro de valores propios de alguna solución sobre ella, y todos ellos indican que las soluciones son inestables.

Todas las ramas de soluciones estacionarias que se han identificado fuera de la rama $N3$ a excepción de la solución $n = 4$ a partir de $Ra_c^{10} = 4779$, hasta los valores del número de Rayleigh que se han considerado, se mantienen inestables. No se ha analizado la estabilidad de las ramas de soluciones que bifurcan de la rama $N2$, por lo que otras ramas de nuevas soluciones podrían aparecer al incrementar el valor del número de Rayleigh, o bien se podrían producir cruces entre ellas.

5.6 Discusión

La interacción espacial entre los modos con número de onda azimutal $n = 2$ y $n = 4$ que se ha descrito en la sección 5.5.2 es un ejemplo de lo que se conoce como resonancia 1:2, en la que interaccionan no linealmente modos cuya relación de número de onda en la dirección periódica es 1:2 (Jones & Proctor, 1987; Proctor & Jones, 1988; Armbruster *et al.*, 1988). En la última década se ha prestado mucha atención al estudio de las resonancias, pues dan lugar a fenomenologías muy variadas, además de las soluciones puras aparecen soluciones híbridas, ondas viajeras,...(Knobloch & Guckenheimer, 1983; Mizushima & Fujimura, 1992; Prat *et al.*, 1998)), y afectan a la selección del número de onda de la solución que se obtiene. Aunque para los valores de los parámetros analizados en este capítulo la solución con número de onda $n = 2$ que bifurca del estado conductivo es inestable, pues el número de onda seleccionado al inicio de la convección es $n = 3$, se reproducen algunos aspectos de la dinámica predicha por la forma normal de la resonancia 1:2. Por ejemplo, una de las características de esta resonancia es que se pueden producir intervalos de valores del parámetro de control (número de Rayleigh en el presente trabajo) para los que desaparece el modo 1 (*wavenumber gaps*). Esto es precisamente lo que sucede en la región $2888 < Ra < 4779$, en la que deja de existir la solución $n = 2$ que había bifurcado del estado conductivo, para luego volver a aparecer una rama de soluciones $n = 2$ que estabiliza la solución $n = 4$. Aunque también es cierto, como se ha visto, que en el problema completo existe además otra rama de soluciones $n = 2$ que no bifurca directamente del estado conductivo.

En el trabajo de Cox (1996) se describe un comportamiento muy similar al obtenido sobre las ramas de soluciones $n = 2$ y $n = 4$. En ese artículo, se utiliza un modelo de longitud de onda larga para estudiar la convección térmica bidimensional en una capa de fluido calentada por debajo, simplificándose de esta forma las ecuaciones, que quedan unidimensionales. Esto permite realizar un estudio detallado de las resonancias dominantes en función del tipo de condiciones de contorno consideradas. Con condiciones de contorno diferentes en las superficies horizontales, la resonancia que domina es la 1:2. Bifurca en primer lugar el modo k , que es estable hasta que se desestabiliza, al aumentar el número de Rayleigh, a una onda viajera cuya velocidad de fase es nula en el punto de bifurcación. Esta bifurcación correspondería en nuestro caso al punto 5 en el diagrama de bifurcaciones de la figura 5.8. Posteriormente, estas soluciones dan lugar a una rama estable de ondas viajeras moduladas y a órbitas heteroclínicas estables, en acuerdo con las ecuaciones de amplitud de esta resonancia. En nuestro caso, ni con el código de continuación, ni mediante integración temporal,

es posible identificar este tipo de soluciones, pues dependen del tiempo y son, en principio, inestables. De la misma forma que en el diagrama 5.8, en el estudio de Cox (1996), se encuentra que la rama de soluciones inestables k conecta con la rama de soluciones, también inestables, $2k$. Al continuar aumentando el número de Rayleigh, se produce una bifurcación que estabiliza las soluciones $2k$, y de la que de nuevo nace una rama de soluciones k , que sería equivalente al punto de bifurcación 10 de la figura 5.10. Por tanto, la dinámica en ambos problemas presenta características comunes debido a que domina el mismo tipo de resonancia espacial. Otro ejemplo de ecuación unidimensional en la que se ha obtenido una dinámica dominada por los modos k y $2k$ similar a la descrita anteriormente es la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (Armbruster *et al.*, 1989; Holmes *et al.*, 1996).

Por otra parte, la solución columnar que se ha obtenido en el anillo se puede comparar con los rollos convectivos estacionarios que aparecen en el problema de Rayleigh-Bénard plano bidimensional sin rotación. En primer lugar hay que mencionar que, debido a la presencia de simetrías adicionales en el caso plano periódico, la variedad de bifurcaciones que se pueden producir es mayor. Así, cuando se consideran idénticas condiciones de contorno en las superficies horizontales y la convección es Boussinesq, el sistema posee también la simetría respecto al plano medio de la capa, por lo que los rollos estacionarios, además de la simetría de reflexión respecto a planos verticales, tienen la simetría puntual respecto a sus centros y el producto de ambas. Como consecuencia, una bifurcación que mantenga el número de onda puede ser de cuatro tipos distintos –la nueva solución puede mantener todas las simetrías, sólo la de reflexión, sólo la puntual o bien tan sólo la simetría producto–, cada una de las cuales puede dar lugar, a su vez, a una solución estacionaria o con dependencia temporal (Prat *et al.* (1995), Rucklidge & Matthews (1996)). Por tanto, en total hay ocho posibles soluciones en lugar de las cuatro posibilidades existentes en el anillo cilíndrico.

Como cabía esperar, cuando la curvatura del anillo tiende a cero, tanto el tipo de bifurcación secundaria como el valor del número de Rayleigh crítico para el que tiene lugar coinciden con el problema plano. Ahora bien, para obtener los resultados en el problema de Rayleigh-Bénard se ha de escoger un número de onda adecuado, que se puede estimar a partir del número de onda azimutal que se selecciona en el caso del anillo. Cuando $\sigma = 0.025$, se ha visto en este capítulo para varios valores de η que en el caso del anillo la bifurcación secundaria mantiene el número de onda fundamental y da lugar a una *Direction Reversing Travelling Wave* (DRTW). Considerando $\eta = 0.9$, el número de onda seleccionado al inicio de la convección es $n = 30$, y la bifurcación secundaria se produce en $Ra_c^{DRTW} = 3181$, siendo la frecuencia de precesión de la

estructura $\lambda_1^{DRTW} = 20.3$. Para igual valor del número de Prandtl, en el caso plano con condiciones de contorno de adherencia en las superficies horizontales, se obtiene que la simetría de reflexión de los rollos se rompe manteniendo su simetría puntual tras una bifurcación secundaria de Hopf, dando lugar a una estructura que oscila pero que no viaja. En el trabajo de Rucklidge & Matthews (1996) se denomina a este tipo de soluciones *Pulsating Waves* (PW) para distinguirlas de las DRTW, que son soluciones también oscilantes, pero que rompen la simetría puntual de los rollos y que viajan hacia adelante y hacia atrás. El flujo neto de masa instantáneo es nulo en las PW, pues el perfil del modo cero de la componente horizontal de la velocidad es antisimétrico. Aunque este flujo de masa es diferente de cero en el anillo, va tendiendo a este valor a medida que η se aproxima a la unidad, al tender el modo cero de v (representado en la figura 5.10 para $\eta = 0.3$) a una función antisimétrica. El valor del número de Rayleigh crítico para el que se detecta la bifurcación a PW para una longitud de onda $\lambda = 2$ es $Ra_c^{PW} = 3191$ y el valor de su frecuencia de oscilación es $\lambda_1^{PW} = 20.4$ (Prat & Mercader, 1999).

Capítulo 6

Integración temporal de las ecuaciones

6.1 Método de integración temporal en variables primitivas

La última parte de este trabajo se ha dedicado a implementar un método numérico que permita analizar de forma eficiente las soluciones estables que presenten una dependencia temporal más o menos complicada, es decir, desde soluciones periódicas a soluciones que dependan caóticamente del tiempo. Se ha buscado que el método sea flexible, con el objetivo de poderlo adaptar al estudio de flujos tridimensionales. Para la integración temporal de las ecuaciones no lineales se ha escogido un método semiimplícito de paso fraccionario. En concreto, se ha utilizado un esquema BDF (*Backward Differentiation Formula schemes*) implícito de segundo orden en el tiempo para los términos lineales, y un esquema de segundo orden explícito para los términos no lineales (Karniadakis *et al.*, 1991). El esquema BDF escogido pertenece a una familia de esquemas que son estables para sistemas *stiff* y que exhiben una región de estabilidad mucho mayor que la de los esquemas de Adams, que son los usados habitualmente. Los métodos de paso fraccionario no requieren una gran memoria de almacenaje, a diferencia, por ejemplo, de las técnicas basadas en matrices de influencia. Además tienen una ventaja adicional, mientras que en esquemas como el

de Uzawa es necesario un proceso iterativo para encontrar los flujos no estacionarios, los métodos de paso fraccionario son siempre no iterativos. El esquema se ha implementado en el marco de los métodos espectrales, pues la elevada resolución espacial que ofrecen permite que el error total se reduzca al que procede de la diferenciación temporal más el que procede del fraccionamiento de los operadores.

Aunque la formulación de las ecuaciones con la función de corriente es una buena opción para la simulación de flujos bidimensionales, se ha optado por resolver las ecuaciones formuladas en variables primitivas. El motivo de esta elección es que el método de paso fraccionario utilizado resulta fácilmente adaptable con garantía de éxito a flujos tridimensionales, al menos en geometría cilíndrica, donde en cualquier caso se puede desacoplar el problema para la dirección azimutal si se usan técnicas pseudoespectrales. Debido al orden elevado de las ecuaciones, el uso de potenciales de la velocidad limita de forma drástica el paso de tiempo de la integración temporal e imposibilita, en la práctica, la obtención de resultados.

Por otra parte, los métodos de paso fraccionario tienen como inconveniente que pueden dar lugar a capas límite numéricas erróneas, que tienen su origen en la forma de la condición de contorno considerada para la presión en la ecuación de Poisson. El tratamiento de la presión por el que se ha optado en este trabajo es el descrito en Karniadakis *et al.* (1991). Basándose en el método propuesto por Orszag *et al.* (1986), Karniadakis *et al.* consideran una condición de contorno mejorada para la presión, que minimiza el efecto de las capas límite erróneas. El punto clave del método es el tratamiento especial que se hace de la condición de contorno de Neumann para la presión. Se construye un esquema estable descomponiendo el operador de Laplace que aparece en la condición de contorno en una parte solenoidal, que se aproxima por un esquema explícito, y en otra parte irrotacional, para la que se usa un esquema implícito.

6.1.1 Formulación

Las ecuaciones de evolución (5.2) se pueden escribir de forma compacta

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\nabla p + \sigma \mathcal{L}(\mathbf{u}) + \mathcal{N}(\mathbf{u}) + \mathbf{F}, \quad (6.1a)$$

$$Q \equiv \nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (6.1b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \mathcal{L}(T) - \frac{u}{r \ln \eta} + \mathcal{N}(T), \quad (6.1c)$$

donde \mathcal{N} representa el operador no lineal, \mathcal{L} el operador lineal correspondiente al término de difusión, y \mathbf{F} es la fuerza de volumen asociada al empuje de Arquímedes. Por tanto, sus definiciones son

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\mathbf{u}) &\equiv \nabla^2 \mathbf{u}, \\ \mathcal{L}(T) &\equiv \nabla^2 T, \\ \mathcal{N}(\mathbf{u}) &\equiv -(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}, \\ \mathcal{N}(T) &\equiv -(\mathbf{u} \cdot \nabla) T, \\ \mathbf{F} &\equiv \sigma \text{Ra} T \hat{\mathbf{e}}_r.\end{aligned}$$

Aunque no se dispone de una condición de contorno natural para la presión que permita integrar esta ecuación, se puede obtener una condición de contorno de Neumann, consistente y que no de lugar a errores de *splitting*, proyectando radialmente la ecuación de Navier-Stokes

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \sigma [\mathcal{L}(\mathbf{u})]_r + [\mathcal{N}(\mathbf{u})]_r + \mathbf{F}_r \quad \text{en } \partial\Omega_r. \quad (6.2)$$

En esta condición de contorno el término de difusión se tratará de la manera propuesta por Karniadakis *et al.* (1991) para mejorar la estabilidad de la solución. Tal como se ha comentado, consiste en desacoplar la laplaciana en una parte solenoidal, ω_s , que se aproxima por un esquema explícito, y en una parte irrotacional que se trata de forma implícita

$$\mathcal{L}(\mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla Q - \omega_s. \quad (6.3)$$

6.1.2 Discretización temporal

El esquema temporal implementado para la integración de las ecuaciones es de segundo orden en el tiempo. En concreto, para aproximar la derivada temporal en las ecuaciones de evolución se ha utilizado un método estable para sistemas *stiff* basado en las fórmulas de diferenciación regresiva (BDF) (Karniadakis *et al.*, 1991; Gear, 1971). Así pues, la derivada temporal se ha aproximado por

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \implies \frac{1}{\Delta t} \left(\gamma_0 \mathbf{u}^{n+1} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{u}^{n-q} \right),$$

donde J_i indica el orden del esquema, Δt es el paso de tiempo y $\mathbf{u}^n = \mathbf{u}(t_n = n\Delta t)$. En particular, el valor de los coeficientes en el esquema de segundo orden es $\gamma_0 = 3/2$,

$\alpha_0 = 2$ y $\alpha_1 = -1/2$. Los términos no lineales se han aproximado con el siguiente esquema explícito,

$$\mathcal{N}(\mathbf{u}) \implies \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathcal{N}(\mathbf{u}^{n-q}),$$

donde los coeficientes en el esquema de segundo orden valen $\beta_0 = 2$ y $\beta_1 = -1$. Este mismo esquema se ha usado para aproximar el término $u/r \ln \eta$ en la ecuación de la temperatura. Para mantener el orden del esquema, el término del empuje de Arquímedes se ha evaluado como en Le Quere & Alziary de Roquefort (1985) después de avanzar la temperatura, haciendo el promedio

$$\mathbf{F} \implies \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{n+1} + \mathbf{F}^n).$$

Finalmente, los términos de difusión y el gradiente de presiones se han tratado implícitamente, aproximándolos por su valor en el instante t_{n+1} .

La combinación de los esquemas anteriores da lugar a la siguiente discretización temporal de las ecuaciones de evolución

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\gamma_0 \mathbf{u}^{n+1} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{u}^{n-q} \right) = -\nabla p^{n+1} + \sigma \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1} + \frac{1}{2}(\mathbf{F}^{n+1} + \mathbf{F}^n) + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathcal{N}(\mathbf{u}^{n-q}),$$

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\gamma_0 T^{n+1} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q T^{n-q} \right) = \nabla^2 T^{n+1} - \frac{1}{r \ln \eta} \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q u^{n-q} + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathcal{N}(T^{n-q}),$$

que, escritas por componentes y para el esquema de segundo orden se expresan

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} u^{n+1} - 2u^n + \frac{1}{2} u^{n-1} \right) &= -\partial_r p^{n+1} + \sigma \left[(\nabla^2 \mathbf{u})_r \right]^{n+1} + \frac{\sigma \text{Ra}}{2} (T^{n+1} + T^n) - \\ &- 2 \left[((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r \right]^n + \left[((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r \right]^{n-1}, \end{aligned} \quad (6.4a)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} v^{n+1} - 2v^n + \frac{1}{2} v^{n-1} \right) &= -\frac{1}{r} \partial_\theta p^{n+1} + \sigma \left[(\nabla^2 \mathbf{u})_\theta \right]^{n+1} - 2 \left[((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_\theta \right]^n + \\ &+ \left[((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_\theta \right]^{n-1}, \end{aligned} \quad (6.4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta t} \left(\frac{3}{2} T^{n+1} - 2T^n + \frac{1}{2} T^{n-1} \right) &= \nabla^2 T^{n+1} - \frac{1}{r \ln \eta} (2u^n - u^{n-1}) - 2 \left[\mathbf{u} \cdot \nabla T \right]^n + \\ &+ \left[\mathbf{u} \cdot \nabla T \right]^{n-1}. \end{aligned} \quad (6.4c)$$

6.1.3 Tratamiento de la presión: método de paso fraccionario

Una vez se dispone de las ecuaciones discretizadas temporalmente, hay que describir el ciclo computacional que se ha seguido para avanzar las ecuaciones (6.4) en el tiempo.

1. Avanzar la temperatura a un tiempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$

En primer lugar, se avanza la temperatura a un tiempo t_{n+1} , utilizando la ecuación (6.4c). La temperatura verifica una ecuación de Helmholtz en el dominio de integración Ω y se anula en el contorno lateral $\partial\Omega_r$,

$$\begin{cases} \left(\frac{3}{2} - \Delta t \nabla^2\right) T^{n+1} = S_T^{n,n-1} & \text{en } \Omega, \\ T^{n+1} = 0 & \text{en } \partial\Omega_r, \end{cases} \quad (6.5)$$

siendo

$$S_T^{n,n-1} = 2T^n - \frac{1}{2}T^{n-1} - \frac{\Delta t}{r \ln \eta} (2u^n - u^{n-1}) - \Delta t \left\{ 2[\mathbf{u} \cdot \nabla T]^n - [\mathbf{u} \cdot \nabla T]^{n-1} \right\}.$$

2. Avanzar la velocidad a un tiempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$

Seguidamente, se avanza la velocidad a un tiempo t_{n+1} . Para ello se evalúa la ecuación de Navier-Stokes en tres etapas, introduciendo las velocidades intermedias $\hat{\mathbf{u}}$ y \mathbf{u}^* ,

$$\frac{1}{\Delta t} \left(\hat{\mathbf{u}} - \sum_{q=0}^{J_i-1} \alpha_q \mathbf{u}^{n-q} \right) = \frac{1}{2} (\mathbf{F}^{n+1} + \mathbf{F}^n) + \sum_{q=0}^{J_e-1} \beta_q \mathcal{N}(\mathbf{u}^{n-q}), \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (\mathbf{u}^* - \hat{\mathbf{u}}) = -\nabla p^{n+1}, \quad (6.7)$$

$$\frac{1}{\Delta t} (\gamma_0 \mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^*) = \sigma \nabla^2 \mathbf{u}^{n+1}. \quad (6.8)$$

Los pasos seguidos para obtener \mathbf{u}^{n+1} se detallan a continuación.

a) Calcular $\hat{\mathbf{u}}$.

Se calcula $\hat{\mathbf{u}}$, que servirá para adelantar la presión pero que no satisface la ecuación de continuidad

$$\begin{cases} \hat{u} = S_{\hat{u}}^{n,n-1} & \text{en } \Omega, \\ \hat{v} = S_{\hat{v}}^{n,n-1} & \text{en } \Omega, \\ \hat{u} = \hat{v} = 0 & \text{en } \partial\Omega_r, \end{cases} \quad (6.9)$$

siendo

$$\begin{aligned} S_{\hat{u}}^{n,n-1} &= 2u^n - \frac{1}{2}u^{n-1} + \Delta t \frac{\sigma \text{Ra}}{2} (T^{n+1} + T^n) - \\ &\quad - \Delta t \left\{ 2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^n - [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^{n-1} \right\}, \\ S_{\hat{v}}^{n,n-1} &= 2v^n - \frac{1}{2}v^{n-1} - \Delta t \left\{ 2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_\theta]^n - [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_\theta]^{n-1} \right\}. \end{aligned}$$

b) Calcular p .

Se avanza la presión a un tiempo $t_{n+1} = (n+1)\Delta t$ introduciendo una \mathbf{u}^* que satisfaga la ecuación de continuidad, $\nabla \cdot \mathbf{u}^* = 0$. Calculando la divergencia de la ecuación (6.7) se obtiene una ecuación de Poisson para la presión, que se complementa con la condición de contorno de Neumann (6.2) discretizada y habiendo sustituido en ella $\nabla Q^{n+1} = 0$, pues se cumple $u^{n-1} = u^n = u^{n+1}$ en el contorno lateral. Por tanto, la presión satisface

$$\begin{cases} \nabla^2 p^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot \hat{\mathbf{u}} & \text{en } \Omega, \\ \partial_r p^{n+1} = S_p^{n,n-1} & \text{en } \partial\Omega_r, \end{cases} \quad (6.10)$$

siendo

$$\begin{aligned} S_p^{n,n-1} &= -\sigma (2\omega_s^n - \omega_s^{n-1})_r + \frac{\sigma \text{Ra}}{2} (T^{n+1} + T^n) - \\ &\quad - 2 [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^n + [((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r]^{n-1}. \end{aligned}$$

Como se verá, esta expresión se simplifica notablemente cuando se calcula en el contorno.

c) Calcular \mathbf{u}^* .

A partir de (6.7) se calcula \mathbf{u}^* ,

$$\begin{cases} u^* = \hat{u} - \Delta t \partial_r p^{n+1} & \text{en } \Omega, \\ v^* = \hat{v} - \frac{\Delta t}{r} \partial_\theta p^{n+1} & \text{en } \Omega. \end{cases} \quad (6.11)$$

d) Calcular \mathbf{u} .

Finalmente se avanza \mathbf{u} a $t_n = (n+1)\Delta t$,

$$\begin{cases} \frac{3}{2}u^{n+1} - \Delta t \sigma [(\nabla^2 \mathbf{u})_r]^{n+1} = u^* & \text{en } \Omega, \\ \frac{3}{2}v^{n+1} - \Delta t \sigma [(\nabla^2 \mathbf{u})_\theta]^{n+1} = v^* & \text{en } \Omega, \\ u^{n+1} = v^{n+1} = 0 & \text{en } \partial\Omega_r. \end{cases} \quad (6.12)$$

6.1.4 Discretización espacial

Se ha implementado un método pseudoespectral de colocación en el que la dependencia radial de las distintas variables se ha desarrollado mediante polinomios de Chebyshev hasta orden L , $\mathcal{T}_l(x)$ $l \leq L$, y la dependencia azimutal se ha introducido mediante desarrollos en serie de Fourier, $e^{in\theta}$ siendo $-N/2 \leq n \leq N/2$. Por tanto, las perturbaciones consideradas son de la forma

$$u(x, \theta) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=0}^L \hat{u}_{l,n} \mathcal{T}_l(x) e^{in\theta}, \quad (6.13)$$

$$v(x, \theta) = i \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=0}^L \hat{v}_{l,n} \mathcal{T}_l(x) e^{in\theta}, \quad (6.14)$$

$$T(x, \theta) = \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{l=0}^L \hat{T}_{l,n} \mathcal{T}_l(x) e^{in\theta}. \quad (6.15)$$

En los desarrollos de Fourier no es necesario operar con los valores negativos de n , pues al tener que ser las variables funciones reales, las correspondientes amplitudes

son las conjugadas de las amplitudes asociadas a los números de onda positivos. Los coeficientes de Fourier se toman desde $n = -N/2$ hasta $n = N/2 - 1$ para poder implementar las rutinas que calculan la transformada discreta de Fourier mediante el algoritmo de transformada rápida de Fourier (FFT). Por tanto, $n = 0 \div N/2 - 1$ y el coeficiente que queda desaparejado, $n = -N/2$, se tendría que imponer igual a cero si no se quitara el *aliasing* (sección 5.2). Las variables \hat{u} y u^* se desarrollan de la misma forma que u , mientras que los desarrollos de \hat{v} y v^* son análogos a los de v . Como siempre, se impondrá que las ecuaciones se verifiquen en los puntos de colocación de Gauss-Lobatto. El sistema de ecuaciones que se obtiene se ha resuelto directamente en el espacio físico en la dirección radial y en el espacio de amplitudes en la dirección periódica. Es decir, se ha considerado como incógnita el valor de cada coeficiente de Fourier en los puntos de colocación, $\{u_{i,n}, v_{i,n}, T_{i,n}\}$,

$$u_{i,n} = \sum_{l=0}^L \hat{u}_{l,n} \mathcal{T}_l(x_i), \quad (6.16)$$

$$v_{i,n} = \sum_{l=0}^L \hat{v}_{l,n} \mathcal{T}_l(x_i), \quad (6.17)$$

$$T_{i,n} = \sum_{l=0}^L \hat{T}_{l,n} \mathcal{T}_l(x_i), \quad (6.18)$$

con $n = 0 \div N/2 - 1$ e $i = 1 \div L - 1$. Las incógnitas son sólo el valor de los coeficientes en el interior del dominio, pues el valor de estos coeficientes en el contorno lateral se determina a partir de las correspondientes condiciones de contorno. Si las condiciones son de Dirichlet, no existe ningún problema. Si son de Neumann, como en el caso de la presión, se obtienen procediendo de la forma indicada en el Apéndice B. Para obtener el valor de los distintos operadores en los puntos de colocación expresados en función de las variables en los puntos de colocación, se han utilizado de nuevo las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$ usadas en el capítulo 4 y cuyo valor se detalla en el Apéndice B, que relacionan los valores de la derivada primera y segunda de una función en los puntos de colocación, $f_i^{(1)}$ y $f_i^{(2)}$, con el valor que toma esta función en los puntos de colocación, f_i ,

$$f_i^{(1)} = \sum_{j=0}^L d_{ij}^{(1)} f_j,$$

$$f_i^{(2)} = \sum_{j=0}^L d_{ij}^{(2)} f_j,$$

con f_0 y f_L calculados previamente.

Antes de sustituir los desarrollos en las ecuaciones es necesario evaluar los términos no lineales de la ecuación de la temperatura y la velocidad y el término ω_s que aparece en la condición de contorno de la presión. Tras operar y efectuar las derivadas respecto a θ se obtiene

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla T &= u \partial_r T + \frac{in}{r} v T, \\ ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r &= -(D_+ v) v + \frac{in}{r} u v, \\ ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_\theta &= (D_+ v) u - \frac{in}{r} u u, \\ ((\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u})_r &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega_r, \\ w_s &= \frac{in}{r} \partial_r v \quad \text{en } \partial\Omega_r, \end{aligned}$$

siendo $D_+ = \frac{1}{r} \partial_r (r \cdot)$.

Con los términos no lineales evaluados, y usando las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$ ya se pueden escribir los sistemas de ecuaciones (6.5)–(6.12) discretizados.

1. Ecuación de la temperatura

El sistema (6.5) discretizado se expresa

$$\left[\sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(2)} + \frac{1}{(x_i + \delta)} \sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(1)} - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2} - \frac{3}{8\Delta t} \right] T_{j,n}^{n+1} = -\frac{1}{4\Delta t} S_T^{n,n-1},$$

siendo

$$\begin{aligned} S_T^{n,n-1} &= 2T_{i,n}^n - 4\Delta t \left\{ \frac{1}{\ln \eta (x_i + \delta)} \frac{u_{i,n}^n}{(x_i + \delta)} + u_{i,n}^n \partial_x T_{i,n}^n - n \frac{T_{i,n}^n v_{i,n}^n}{(x_i + \delta)} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} T_{i,n}^{n-1} + 2\Delta t \left\{ \frac{1}{\ln \eta (x_i + \delta)} \frac{u_{i,n}^{n-1}}{(x_i + \delta)} + u_{i,n}^{n-1} \partial_x T_{i,n}^{n-1} - n \frac{T_{i,n}^{n-1} v_{i,n}^{n-1}}{(x_i + \delta)} \right\}. \end{aligned}$$

Sólo hay que imponer la ecuación en $i = 1 \div L - 1$ pues el valor de la temperatura en el contorno lateral es conocido, $T_{0,n}^{n+1} = T_{L,n}^{n+1} = 0 \quad \forall n$.

2.a) Ecuación de \hat{u}

El sistema (6.9) discretizado queda

$$\begin{aligned}\hat{u}_{i,n} &= S_{\hat{u}}^{n,n-1}, \\ i\hat{v}_{i,n} &= S_{\hat{v}}^{n,n-1},\end{aligned}$$

siendo

$$\begin{aligned}S_{\hat{u}}^{n,n-1} &= 2u_{i,n}^n - 4\Delta t \left\{ v_{i,n}^n \left[\partial_x + \frac{1}{(x_i + \delta)} \right] v_{i,n}^n - n \frac{u_{i,n}^n v_{i,n}^n}{(x_i + \delta)} \right\} + \\ &\quad + \Delta t \frac{\sigma \text{Ra}}{2} (T_{i,n}^{n+1} + T_{i,n}^n) - \frac{1}{2} u_{i,n}^{n-1} + \\ &\quad + 2\Delta t \left\{ v_{i,n}^{n-1} \left[\partial_x + \frac{1}{(x_i + \delta)} \right] v_{i,n}^{n-1} - n \frac{u_{i,n}^{n-1} v_{i,n}^{n-1}}{(x_i + \delta)} \right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_{\hat{v}}^{n,n-1} &= 2v_{i,n}^n - 4\Delta t \left\{ iu_{i,n}^n \left[\partial_x + \frac{1}{(x_i + \delta)} \right] v_{i,n}^n - in \frac{u_{i,n}^n v_{i,n}^n}{(x_i + \delta)} \right\} - \\ &\quad - \frac{1}{2} v_{i,n}^{n-1} + 2\Delta t \left\{ iu_{i,n}^{n-1} \left[\partial_x + \frac{1}{(x_i + \delta)} \right] v_{i,n}^{n-1} - in \frac{u_{i,n}^{n-1} v_{i,n}^{n-1}}{(x_i + \delta)} \right\}.\end{aligned}$$

En estas ecuaciones $i = 0 \div L$ y, por las condiciones de contorno, se cumple que $\hat{u}_{i,n}$ y $\hat{v}_{i,n}$ son nulas en él.

2.b) Ecuación de la presión

La ecuación de Poisson (6.10) que satisface la presión, una vez discretizada se expresa

$$4 \left[\partial_{xx}^2 + \frac{1}{(x_i + \delta)} \partial_x - \frac{n^2}{(x_i + \delta)^2} \right] p_{i,n}^{n+1} = \frac{2}{\Delta t} \left\{ \left[\partial_x + \frac{1}{(x_i + \delta)} \right] \hat{u}_{i,n} - \frac{n}{(x_i + \delta)} \hat{v}_{i,n} \right\}. \quad (6.19)$$

Esta ecuación sólo se ha de imponer en los puntos de colocación del interior del dominio, $i = 1 \div L - 1$, para que coincida el número de ecuaciones y de incógnitas, pues se dispone de dos condiciones de contorno de Neumann para la presión,

$$\begin{aligned}\partial_x p_{0,n}^{n+1} &= S_{p_0}^{n,n-1}, \\ \partial_x p_{L,n}^{n+1} &= S_{p_L}^{n,n-1},\end{aligned}$$

siendo

$$S_{p_0}^{n,n-1} = \frac{2\sigma n}{(1+\delta)} \left[2\partial_x v_{i,n}^n - \partial_x v_{i,n}^{n-1} \right]_0,$$

$$S_{p_L}^{n,n-1} = \frac{2\sigma n}{(-1+\delta)} \left[2\partial_x v_{i,n}^n - \partial_x v_{i,n}^{n-1} \right]_L.$$

Estas condiciones de contorno permiten obtener el valor de la presión en el contorno lateral, $p_{0,n}^{n+1}$ y $p_{L,n}^{n+1}$, expresado en función del valor de la presión en los puntos de colocación del interior, $p_{i,n}^{n+1}$, $i = 1 \div L - 1$. Como ya se ha indicado, en el Apéndice B se ha detallado la forma de calcular $p_{0,n}^{n+1}$ y $p_{L,n}^{n+1}$,

$$p_{L,n}^{n+1} = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{L-1} \left(\Gamma_i + \frac{2L^2+1}{3} \Delta_i \right) p_{i,n}^{n+1} - \frac{2L^2+1}{3A} S_{p_L}^{n,n-1} - \frac{1}{A} S_{p_0}^{n,n-1},$$

$$p_{0,n}^{n+1} = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^{L-1} \left(\Delta_i + \frac{2L^2+1}{3} \Gamma_i \right) p_{i,n}^{n+1} + \frac{2L^2+1}{3A} S_{p_0}^{n,n-1} + \frac{1}{A} S_{p_L}^{n,n-1},$$

así como el valor de A , Γ_i y Δ_i . Ahora, utilizando las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$ y el valor de $p_{0,n}^{n+1}$ y $p_{L,n}^{n+1}$, se puede ya escribir la ecuación (6.19) en función del valor de las variables en los puntos de colocación del interior del dominio

$$\sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(2)} p_{j,n}^{n+1} + d_{i0}^{(2)} p_{0,n}^{n+1} + d_{iL}^{(2)} p_{L,n}^{n+1} + \frac{1}{(x_i + \delta)} \sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(1)} p_{j,n}^{n+1} + d_{i0}^{(1)} \frac{p_{0,n}^{n+1}}{(x_i + \delta)} +$$

$$+ d_{iL}^{(1)} \frac{p_{L,n}^{n+1}}{(x_i + \delta)} - n^2 \frac{p_{i,n}^{n+1}}{(x_i + \delta)^2} = \frac{1}{2\Delta t} \left\{ \left[\partial_x + \frac{1}{(x_i + \delta)} \right] \hat{u}_{i,n} - \frac{n}{(x_i + \delta)} \hat{v}_{i,n} \right\},$$

con $i = 1 \div L - 1$.

2.c) Ecuación de u^*

Una vez se dispone del valor de la presión en el instante t_{n+1} se puede resolver el sistema (6.11), que discretizado espacialmente queda

$$u_{i,n}^* = \hat{u}_{i,n} - 2\Delta t \partial_x p_{i,n}^{n+1},$$

$$v_{i,n}^* = \hat{v}_{i,n} - 2 \frac{n\Delta t}{(x_i + \delta)} p_{i,n}^{n+1}.$$

2.d) Ecuación de u

Finalmente, para las componentes radial y azimutal de la velocidad, $u_{i,n}^{n+1}$ y $v_{i,n}^{n+1}$, se obtiene, a partir de (6.12), el siguiente sistema de ecuaciones acopladas

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(2)} u_{j,n}^{n+1} + \frac{1}{(x_i + \delta)} \sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(1)} u_{j,n}^{n+1} - \frac{(n^2 + 1)}{(x_i + \delta)^2} u_{i,n}^{n+1} - \frac{3}{8\sigma\Delta t} u_{i,n}^{n+1} + \\ + \frac{2n}{(x_i + \delta)^2} v_{i,n}^{n+1} = -\frac{u_i^*}{4\sigma\Delta t}, \\ \sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(2)} v_{j,n}^{n+1} + \frac{1}{(x_i + \delta)} \sum_{j=1}^{L-1} d_{ij}^{(1)} v_{j,n}^{n+1} - \frac{(n^2 + 1)}{(x_i + \delta)^2} v_{i,n}^{n+1} - \frac{3}{8\sigma\Delta t} v_{i,n}^{n+1} + \\ + \frac{2n}{(x_i + \delta)^2} u_{i,n}^{n+1} = -\frac{v_i^*}{4\sigma\Delta t}. \end{aligned}$$

Este sistema se puede desacoplar fácilmente definiendo unas velocidades complejas $\tilde{u} = u + iv$ y $\tilde{v} = u - iv$, y escribiendo el sistema en función de estas nuevas velocidades.

6.2 Número de Nusselt

Una magnitud que se usa frecuentemente en los problemas de convección térmica para medir la transferencia de calor a través de una superficie es el número adimensional de Nusselt, que se define como el cociente entre el flujo de calor total y el flujo de calor transportado únicamente por conducción térmica,

$$\text{Nu} = \frac{\mathbf{J}_t}{\mathbf{J}_c},$$

y que puede ser local o global según se considere el flujo de calor en un punto o promediado sobre una superficie. En el caso del anillo cilíndrico, al ser radial el gradiente conductivo, se considerará el flujo de calor a través de la superficie $r = \text{cte}$. Además, si la solución convectiva es bidimensional (solución columnar), se puede evaluar el flujo a través de una circunferencia y calcular el total multiplicando por la altura del anillo. La expresión para el flujo de calor se obtiene a partir de la ecuación

original de la temperatura, (2.3c). Utilizando las identidades vectoriales

$$\begin{aligned}\nabla^2 a &= \nabla \cdot \nabla a, \\ \nabla \cdot (a\mathbf{v}) &= a\nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \cdot \nabla a,\end{aligned}$$

la condición de flujo solenoidal y adimensionalizando, la ecuación (2.3c) se puede reescribir de la forma

$$\partial_t T = -\nabla \cdot \mathbf{J},$$

donde $\mathbf{J} = T\mathbf{u} - \nabla T$ es el *vector densidad de flujo de calor*.

Como en el estado conductivo $\mathbf{u} = 0$ (el fluido está en reposo) y no hay dependencia con θ

$$\mathbf{J}_c = -\nabla T_c = -\partial_r T_c \hat{\mathbf{e}}_r = J_c \hat{\mathbf{e}}_r,$$

que, utilizando la expresión del perfil de temperaturas en el estado conductivo 2.7b adimensionalizada, queda

$$J_c = -\frac{1}{r \ln \eta}.$$

Respecto al flujo de calor total, $\mathbf{J}_t = J_{t_r} \hat{\mathbf{e}}_r + J_{t_\theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta + J_{t_z} \hat{\mathbf{e}}_z$, sólo interesa su componente radial, $J_{t_r} = uT - \partial_r T$. El flujo de calor a través de la circunferencia se encuentra promediando en θ . Para calcular J_{t_r} se ha de fijar el radio, siendo lo más sencillo escoger el cilindro exterior para realizar la integral, $r = r_2$, pues en él $\mathbf{u} = 0$. Así,

$$\left[J_{t_r} \right]_{r_2} = -\left[\partial_r T \right]_{r_2} = \left[-\partial_r (T' + T_c) \right]_{r_2} = \left[-\partial_r T' \right]_{r_2} - \frac{1}{r_2 \ln \eta}.$$

La desviación del estado conductivo, T' , se desarrolla en serie de Fourier en la dirección azimutal, por lo que al integrar sobre la circunferencia sólo el modo cero del desarrollo (modo independiente de θ) tiene una contribución no nula

$$\langle J_{t_r} \rangle = \left[-\partial_r T'_0(r) \right]_{r_2} - \frac{1}{r_2 \ln \eta},$$

por lo que el número de Nusselt promediado queda

$$\text{Nu} = \frac{\langle J_{t_r} \rangle}{\langle J_c \rangle} = 1 + r_2 \ln \eta \left[\partial_r T'_0(r) \right]_{r_2}. \quad (6.20)$$

6.3 Resultados: $\sigma = 0.025$

Al igual que los resultados obtenidos mediante técnicas de continuación (capítulo 5), los resultados que a continuación se muestran corresponden a $\sigma = 0.025$. El valor de la relación de radios analizado es $\eta = 0.3$.

6.3.1 Bifurcación secundaria

En un primer paso, se ha comprobado que el código de integración temporal reproduce correctamente el valor del número de Rayleigh crítico para el cual se inicia la convección en el sistema, $Ra_c^{prim} = 1799$, y el número de onda azimutal de la estructura seleccionada, obtenidos ambos previamente mediante el problema de valores propios lineal. Partiendo de unos valores arbitrarios de las variables, la amplitud de la solución decae a cero para $Ra = 1798$ mientras que tiende a una solución estacionaria, correspondiente a una columna con $n = 3$, cuando $Ra = 1801$. Los cálculos necesarios para esta primera comprobación se han realizado con 32 modos en la dirección radial, $L = 32$, y 96 en la dirección azimutal, $N = 96$.

Por otra parte, tanto el tipo de bifurcación secundaria como el valor del número de Rayleigh para el que ésta se produce, $Ra_c^{sec} = 4114$, coinciden con los resultados obtenidos con el código de continuación. La integración temporal de las ecuaciones muestra que entre $Ra = 4100$ y $Ra = 4200$ las columnas no lineales estacionarias pierden estabilidad y dan lugar a una *Direction Reversing Travelling Wave*, tras una bifurcación de Hopf. No se ha considerado necesario precisar más la posición de la bifurcación secundaria, pues resulta más sencillo aproximarse al valor exacto utilizando el código de continuación. Hay que recordar que los regímenes transitorios se alargan considerablemente cuando el sistema está próximo a un punto de bifurcación, pues cuanto menor es la parte real del valor propio dominante, más lentamente decae la exponencial. Así pues, las soluciones estacionarias estables que se habían identificado en el capítulo anterior se obtienen también mediante integración temporal de las ecuaciones.

Con el código de evolución temporal se han calculado en primer lugar las *Direction Reversing Travelling Waves* no lineales a medida que se incrementa el número de Rayleigh. Para obtener la solución a números de Rayleigh superiores, se ha tomado como solución inicial la correspondiente al Rayleigh inmediatamente inferior. Como ejemplo de este tipo de soluciones, en la figura 6.1 se muestra la solución obtenida

para $Ra = 6500$. El mapa de grises representa la evolución de la temperatura con el tiempo (eje Y) y su dependencia con la coordenada θ (eje X) para un radio $x = 0$ fijo del anillo. El color blanco corresponde al valor máximo de la temperatura y el negro al mínimo. En este diagrama se observa claramente como la estructura oscila hacia adelante y hacia atrás en la dirección azimutal, pero no se tiene una onda viajera en esa dirección. Los histogramas representan el espectro de los coeficientes de Fourier de la temperatura, T , y de las componentes radial, u , y azimutal, v , de la velocidad. Como se comentó, tras la bifurcación secundaria el flujo medio (modo

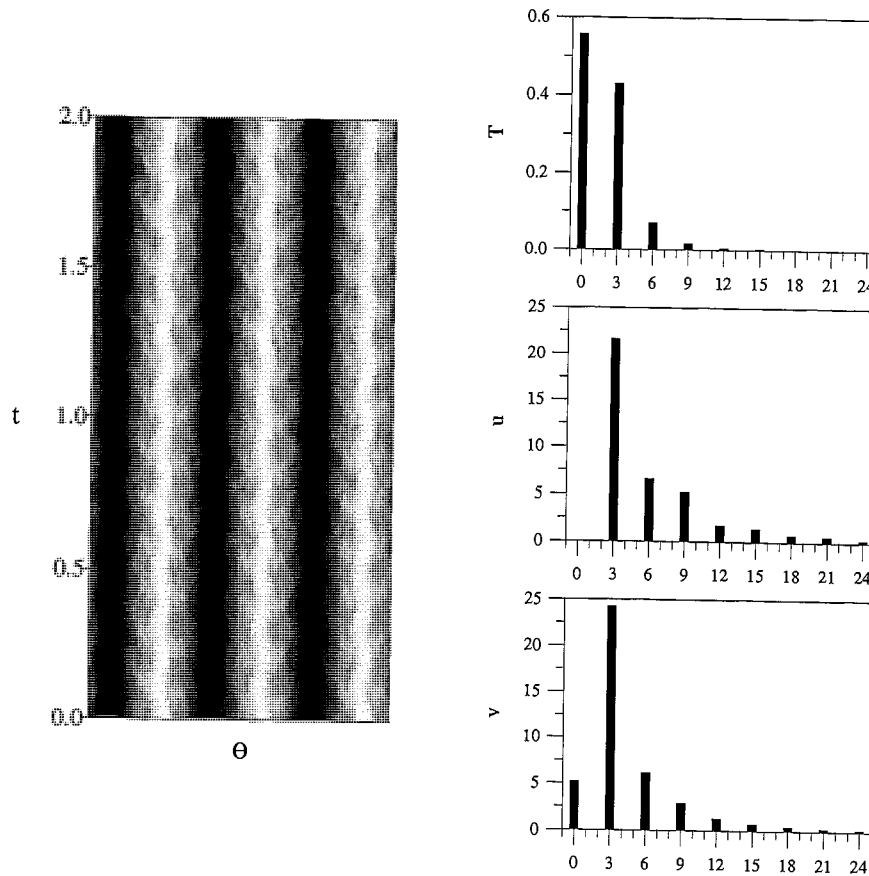


Figura 6.1: Diagrama espacio-temporal de la temperatura en $x = 0$ (izquierda) y espectros azimutales (derecha) de la temperatura, T , velocidad radial, u , y velocidad azimutal, v , para una solución tipo *Direction Reversing Travelling Wave* ($Ra = 6500$).

cero de v) pasa a ser no nulo y rompe la simetría de reflexión R_1 de las columnas no lineales estacionarias, pero como puede verse en la figura 6.1 nunca llega a ser lo suficientemente grande como para generar flujos netos de masa importantes o romper la estructura de las columnas. Puesto que sólo contribuyen a la solución los múltiplos del número de onda fundamental ($n = 3$), la periodicidad espacial de las columnas estacionarias se mantiene. El desplazamiento de las columnas hacia la derecha se debe al punto elegido para realizar el corte del anillo.

A partir del espectro de Fourier de las series temporales se puede calcular con precisión la frecuencia de oscilación de la solución periódica. En la figura 6.2, junto al mapa de fases de la órbita periódica, se ha representado la dependencia temporal del número de Nusselt y del modo $n = 3$ de la velocidad azimutal, v , en un punto de colocación del interior del anillo. Los espectros de Fourier asociados muestran que la solución es efectivamente periódica, siendo la frecuencia de $f = 5.15$ cuando $Ra = 6500$. En el espectro de la serie de v se observa que hay una contribución de los armónicos de la frecuencia fundamental, $2f$ y $3f$. La frecuencia de la serie correspondiente al número de Nusselt es doble como consecuencia de que la bifurcación de Hopf rompe la simetría de reflexión respecto a los planos verticales. Cuando esto sucede, evolucionar la nueva solución medio periodo equivale a la reflexión que se ha roto en la bifurcación, es decir, $T(r, -\theta, t) = T(r, \theta, t + \frac{T}{2})$, (Knobloch, 1996) y el promedio azimutal de una función de este tipo tiene periodo $\frac{T}{2}$.

La figura 6.3 muestra el diagrama de bifurcaciones del estado conductivo hasta $Ra = 7000$. Se ha representado el valor del Nusselt en función del número de Rayleigh. Tras la bifurcación secundaria ($Ra_c^{sec} = 4114$), se produce una disminución significativa en la pendiente de la curva. Disminuye, por tanto, la eficiencia en el transporte de calor en la dirección radial. Esto es debido a que aparece un flujo de masa oscilatorio en la dirección azimutal, consecuencia de la asimetría del modo cero de la componente azimutal de la velocidad, $v(n = 0)$, en la dirección radial (figura 5.3, capítulo 5). En la tabla 6.1 se recoge el valor del número de Nusselt para distintos valores del número de Rayleigh, correspondientes a las columnas estacionarias y a las *Direction Reversing Travelling Waves*. En el caso de las soluciones periódicas, cuya frecuencia aumenta a medida que se incrementa el valor del Rayleigh, el número de Nusselt se ha promediado temporalmente.

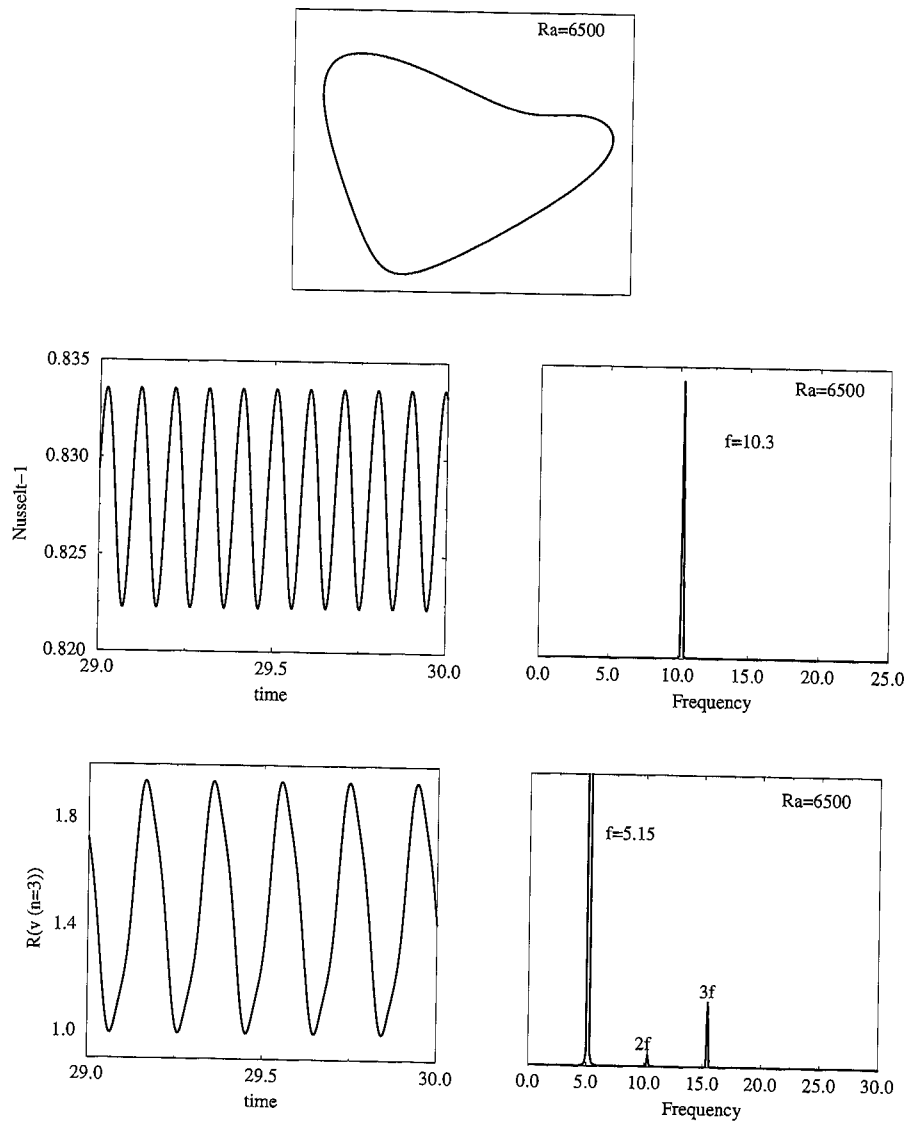


Figura 6.2: En la parte superior, proyección bidimensional de la órbita periódica. A la izquierda, dependencia temporal del número de Nusselt y de un modo de Fourier $n = 3$ de la componente azimutal de la velocidad ($v_{i,n}^R = v_{9,3}^R$). A la derecha, espectro de Fourier asociado a las dos series temporales anteriores. El valor del número de Rayleigh es de $Ra = 6500$.

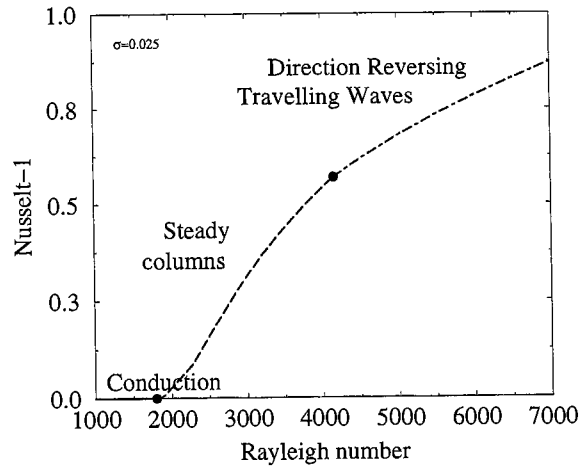


Figura 6.3: Número de Nusselt en función del número de Rayleigh.

Ra	Nu - 1	Ra	$\langle \text{Nu} \rangle - 1$
1801	4.11×10^{-5}	4500	0.617
1892	0.00506	5000	0.679
2510	0.163	5500	0.733
3268	0.383	6000	0.783
4013	0.544	6500	0.827
4106	0.562	7000	0.871

Tabla 6.1: Valor del número de Nusselt y de su promedio temporal para números de Rayleigh correspondientes a soluciones estacionarias y periódicas.

6.3.2 Transición a un régimen caótico

Al continuar aumentando el valor del número de Rayleigh, se detecta una nueva bifurcación entre $Ra = 6950$ y $Ra = 7000$. La órbita periódica pierde estabilidad frente a otra rama también periódica, que se caracteriza porque contribuyen a la solución coeficientes de Fourier diferentes del fundamental. En las figuras 6.4 y 6.5 se ha representado este tipo de solución para $Ra = 12300$. Los histogramas muestran

que, si bien el modo $n = 3$ y sus armónicos continúan siendo dominantes, ahora se han llenado todos los modos restantes. Como consecuencia, se rompe la periodicidad espacial de la solución. Este hecho se puede apreciar en el mapa de grises de la solución, en el que el rollo de la derecha es claramente diferente de los otros dos, pues oscila con una amplitud mayor. De nuevo, se ha representado la evolución de la temperatura con el tiempo en la circunferencia situada en la mitad del anillo, $x = 0$. Se han calculado los espectros de las series temporales y no se introduce ninguna nueva frecuencia en el sistema. La solución sigue siendo periódica.

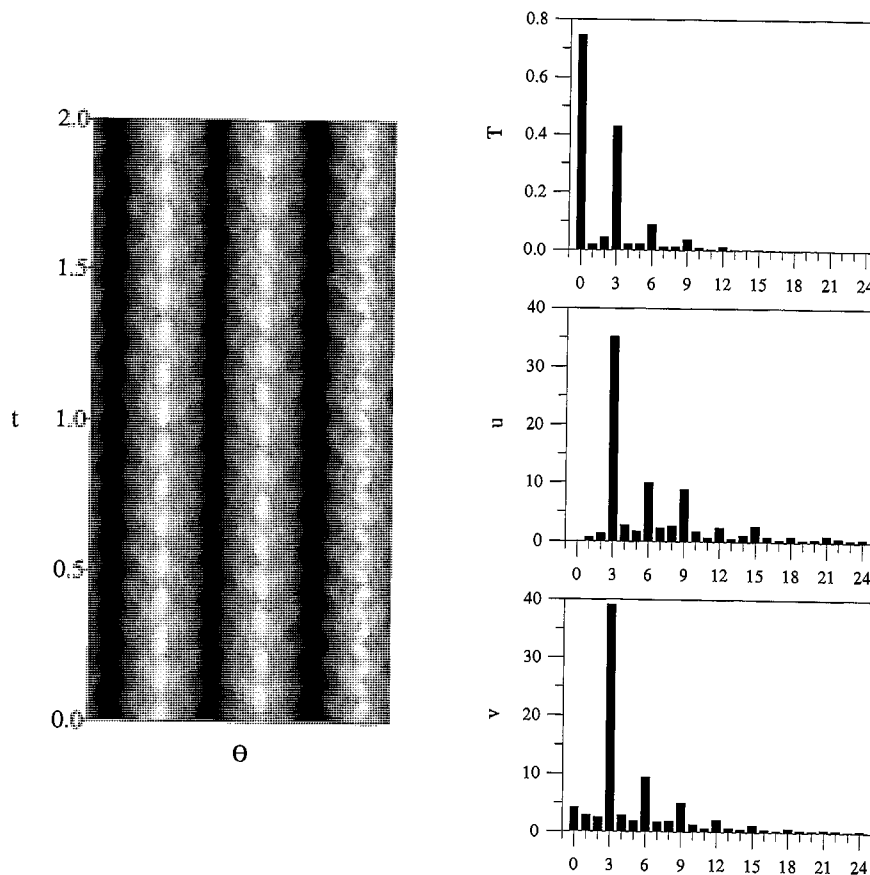


Figura 6.4: Diagrama espacio-temporal de la temperatura en $x = 0$ (izquierda) y espectros azimutales (derecha) de la temperatura, T , velocidad radial, u , y velocidad azimutal, v , para una solución correspondiente a un número de Rayleigh de $Ra = 12300$.

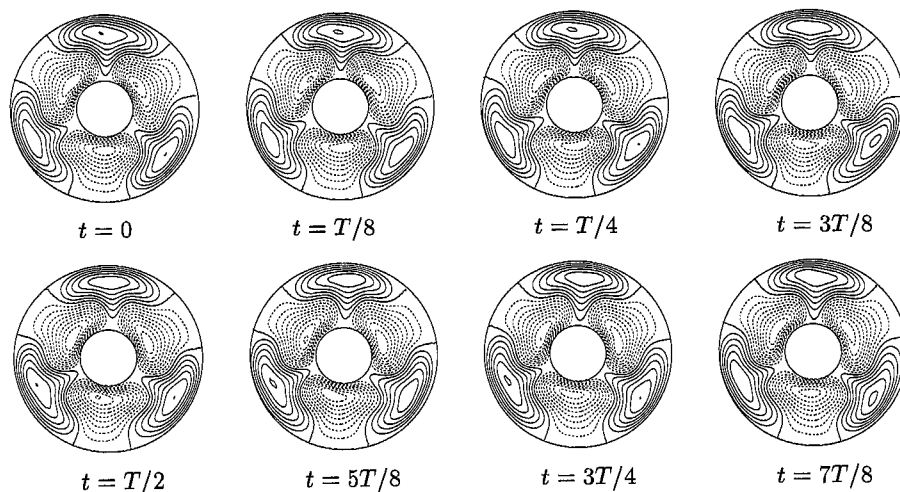


Figura 6.5: Curvas de nivel de la función de corriente en ocho instantes de tiempo separados $T/8$ para una solución correspondiente a un número de Rayleigh de $Ra = 12300$.

Cuando $Ra = 12330$, se produce en el sistema una cuarta bifurcación. La solución periódica se desestabiliza a una solución cuasiperiódica. Las series temporales del número de Nusselt y de la parte imaginaria del modo $n = 3$ de la componente azimutal de la velocidad en un punto de colocación, $v_{i,n}^I = v_{9,3}^I$, junto con los correspondientes espectros de Fourier, se han recogido en las figuras 6.6 y 6.7. En los dos espectros se detecta que hay una nueva frecuencia presente en el sistema, $f_2 = 0.8$, además de la básica, $f_1 = 15.8$, siendo estas dos frecuencias inconmensurables entre sí. La sección de Poincaré de la solución que se muestra confirma la presencia de la segunda frecuencia en el sistema.

Sin embargo, la solución cuasiperiódica resulta ser estable en un intervalo muy pequeño de valores del número de Rayleigh. Un ligero incremento del número de Rayleigh produce un gran cambio en la dinámica del sistema, que ya presenta un comportamiento caótico para $Ra = 12350$. En la figura 6.8 se ha representado la dependencia del número de Nusselt con el tiempo, el espectro de Fourier de la serie temporal, calculado tomando el trozo de serie comprendido entre $t = 140$ y $t = 220$, y la sección de Poincaré de la solución para este valor del número de Rayleigh. Como puede apreciarse en esta figura, básicamente a partir de la sección de Poincaré, cuando la solución cuasiperiódica pierde estabilidad, aparece un régimen que es caótico temporalmente. El espectro de Fourier de la secuencia temporal parece indicar que la

bifurcación que da lugar a este régimen introduce una tercera frecuencia en la dinámica (pico central del espectro), pero el valor de esta frecuencia se aproxima mucho a la mitad de la frecuencia básica, lo que no permite asegurar que las tres frecuencias sean incommensurables. Así pues, con las reservas mencionadas, el caos parece que se alcanza siguiendo la ruta de Ruelle-Takens. A partir de la representación espacio-temporal de esta solución (figura 6.9), se observa como la estructura espacial se mantiene, lo que confirma que el caos es temporal.

Los cálculos presentados en esta sección se han realizado con $N = 288$ modos de Fourier en la dirección azimutal (esto supone 48 modos múltiples del número de onda

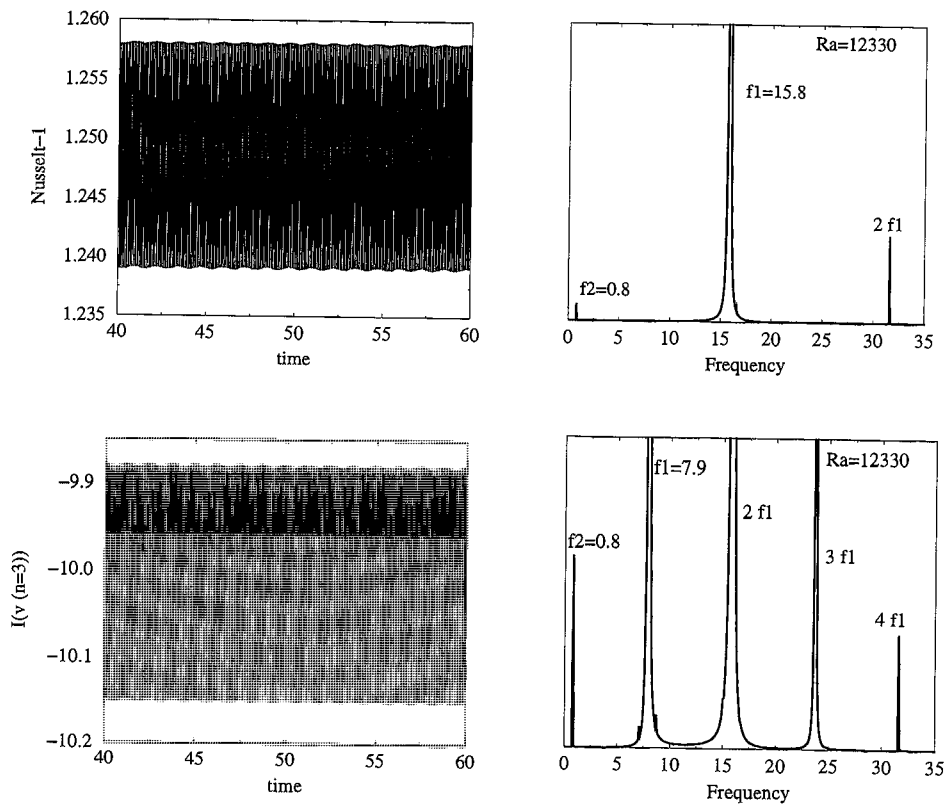


Figura 6.6: Dependencia temporal del número de Nusselt y de uno de los modos de Fourier de v con $n = 3$, $v_{i,n}^I = v_{9,3}^I$, (izquierda). A la derecha, espectro de Fourier asociado a las dos series temporales. El valor del número de Rayleigh es de $Ra = 12330$.

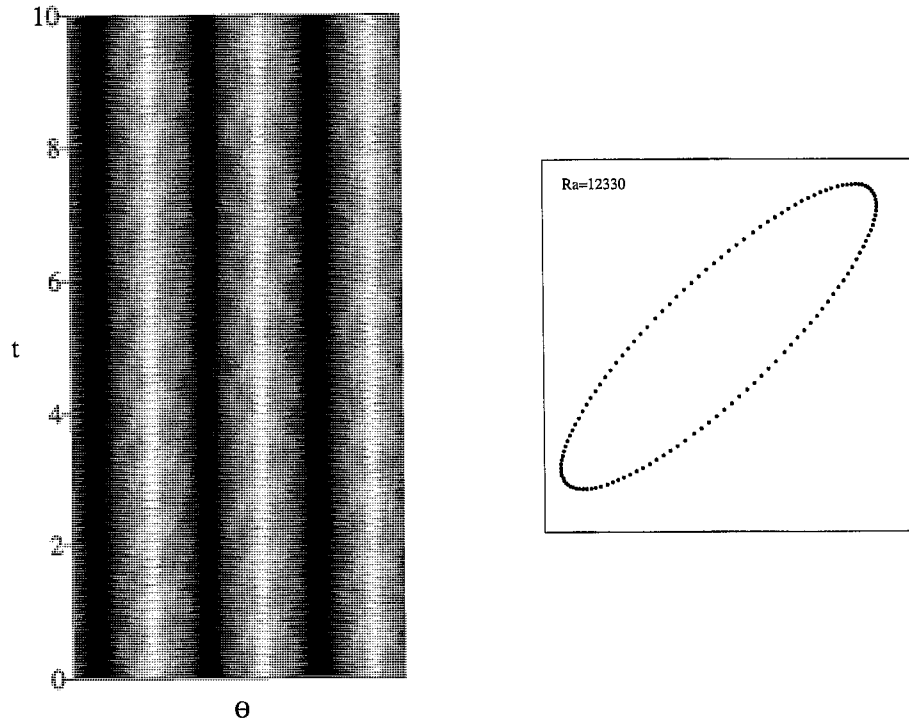


Figura 6.7: Diagrama espacio-temporal y sección de Poincaré de la órbita cuasiperiódica para un número de Rayleigh de $Ra = 12330$.

fundamental, $n = 3$) y $L = 32$ modos en la dirección radial. Respecto al paso de tiempo, la mayoría de los cálculos se han realizado con $\Delta t = 10^{-4}$, aunque se ha ido comprobando que la solución no se modifica al disminuir el paso de tiempo. Aunque para valores del número de Rayleigh pequeños, cercanos a la solución estacionaria, no es necesario trabajar con tantos coeficientes de Fourier y además se ha comprobado que cambiar el número de modos afecta sólo a la cuarta cifra significativa del número de Nusselt, se ha pasado de utilizar $N = 96$ a $N = 288$ debido a que los regímenes transitorios se reducen considerablemente, muy especialmente en las proximidades de los puntos de bifurcación.

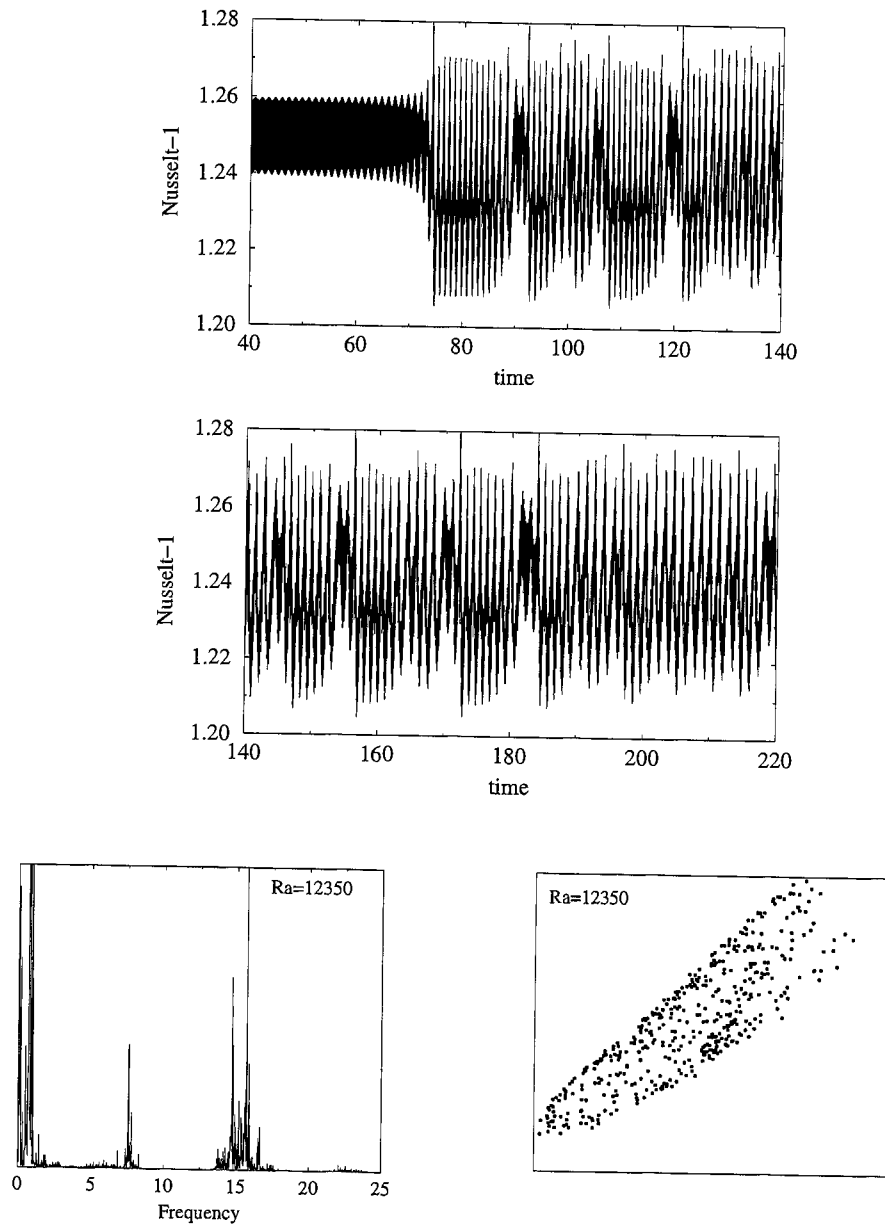


Figura 6.8: Dependencia temporal del número de Nusselt, espectro de Fourier de la serie temporal y sección de Poincaré de la solución para $Ra = 12350$.

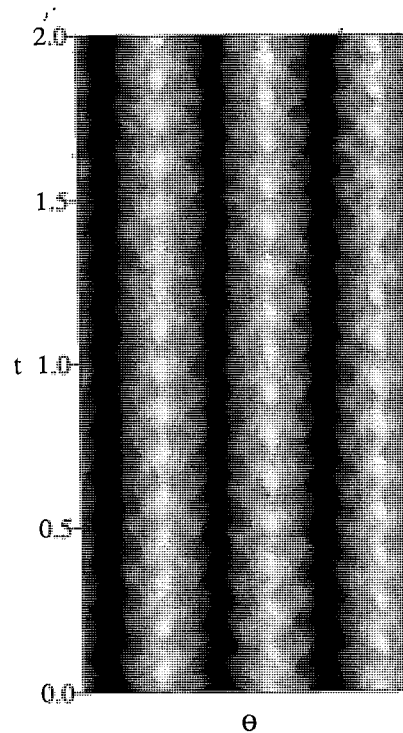


Figura 6.9: Diagrama espacio-temporal de la temperatura para la solución caótica correspondiente a $Ra = 12350$.

6.4 Discusión

En este capítulo se ha presentado un código de paso fraccionario pseudoespectral para integrar temporalmente las ecuaciones de Navier-Stokes. En calidad de test, se ha comprobado que reproduce correctamente tanto el valor crítico del número de Rayleigh correspondiente a la bifurcación primaria como los valores críticos de los parámetros para los que se inestabiliza el flujo primario (columnas de Taylor) dando lugar a *Direction Reversing Travelling Waves*, que se habían obtenido mediante técnicas de continuación (capítulo 5). Además, permite seguir sin problemas la evolución no lineal de las nuevas soluciones bifurcadas, incluso cuando se alcanzan regímenes con dependencia temporal complicada.

La secuencia de bifurcaciones que se ha obtenido depende fuertemente del número de Prandtl. Aunque el único caso que se ha analizado en detalle y que se ha presentado en este capítulo corresponde a $\sigma = 0.025$ (Alonso *et al.*, 1998), también se ha explorado de forma menos sistemática lo que sucede para valores elevados del número de Prandtl ($\sigma = 6.7$). Mientras que para $\sigma = 0.025$ se ha identificado una solución cuasiperiódica y el caos parece que se alcanza siguiendo la ruta de Ruelle-Takens, la bifurcación secundaria en el caso $\sigma = 6.7$ es subarmónica y estacionaria, por lo que la inestabilidad dominante cambia la periodicidad espacial de la solución. Además, la solución básica pierde estabilidad para valores del número de Rayleigh considerablemente más elevados, pues se ha encontrado que la bifurcación secundaria se produce para $Ra_c^{sec} \approx 50Ra_c^{prim}$. Esta dependencia con el número de Prandtl también se obtiene en el problema de Rayleigh-Bénard plano bidimensional.

La restricción impuesta por la rotación, que hace que el flujo se mantenga bidimensional, es el motivo por el que la inestabilidad secundaria en el anillo cilíndrico es bidimensional cuando la rotación es elevada, mientras que la inestabilidad dominante en el caso de Rayleigh-Bénard plano es siempre tridimensional. Si se quisiera analizar el régimen no lineal en el anillo para rotaciones bajas, se deberían tener en cuenta perturbaciones tridimensionales, pues serían probablemente las dominantes. Por ejemplo, en el trabajo de Auer *et al.* (1995), se estudia la estabilidad de la solución bidimensional en un anillo en rotación en el límite $\eta \rightarrow 1$. Los resultados, tanto del análisis débilmente no lineal basado en ecuaciones de amplitud, como de las simulaciones numéricas, muestran que los rollos bidimensionales se inestabilizan dando lugar a estructuras tridimensionales a través de una inestabilidad de rollo-cruzado (*cross-roll instability*) o bien a través de una inestabilidad varicosa subarmónica (*subharmonic varicose instability*).

Capítulo 7

Conclusiones

En el trabajo presentado se han estudiado algunos aspectos de la dinámica lineal y no lineal de un fluido Boussinesq contenido en un anillo cilíndrico en rotación y sometido a la acción de un gradiente de temperatura desestabilizador en la dirección radial, mediante simulación numérica directa de las ecuaciones de Navier-Stokes. En todo el estudio se han tenido en cuenta los efectos de la curvatura de la capa. A continuación se resumen los resultados más relevantes junto con las conclusiones a las que se ha llegado.

(1) Se ha analizado la estabilidad lineal del estado conductivo considerando condiciones de contorno de esfuerzos cortantes nulos en las tapas del anillo. Para ello, se ha resuelto un problema de valores propios unidimensional en la dirección radial para cada modo vertical y azimutal. De esta forma, se han determinado las curvas de estabilidad marginal y las estructuras que el sistema selecciona, en función de los parámetros adimensionales que intervienen en la dinámica: número de Prandtl, σ , parámetro de forma, β , relación de radios, η , y número de Taylor, Ta .

- Para rotaciones altas, se ha comprobado que la convección se inicia en forma de columnas de Taylor estacionarias, que son soluciones bidimensionales (independientes de la coordenada axial) formadas por estructuras alineadas con el eje del anillo. Por tanto, incluso cuando se incluyen los efectos de curvatura, se mantiene el carácter estacionario de las columnas de Taylor que se había obtenido utilizando la aproximación de capa plana (Busse, 1970). La existencia de este modo convectivo estrictamente bidimensional es posible por las condicio-

nes de contorno libres en las tapas del anillo. Este resultado está en aparente contradicción con la teoría de bifurcaciones en sistemas en rotación, según la cual se espera que en un sistema con simetría $SO(2)$, como es el caso del anillo cilíndrico en rotación, cualquier solución que rompa la simetría de rotación ha de tener precesión. Lo que sucede es que en este tipo de solución bidimensional el término de Coriolis se puede escribir en forma de un gradiente e introducirlo en el gradiente de presiones. De esta forma, desaparece la dependencia de la ecuación de Navier-Stokes con la rotación y se reduce formalmente a la ecuación del problema de Rayleigh-Bénard bidimensional, por lo que se recupera la simetría $O(2)$ del problema sin rotación. El número de onda azimutal de la solución seleccionada, que determina el número de columnas que se forman, viene fijado por el valor de la relación de radios y aumenta al aumentar η .

- Para rotaciones bajas, se ha mostrado que existen dos tipos diferentes de modos convectivos que el sistema puede seleccionar en el inicio de la convección: rollos convectivos bidimensionales estacionarios y celdas tridimensionales, con precesión si hay rotación y estacionarias si no la hay. El modo bidimensional es una solución equivalente a los rollos convectivos que se obtienen en el problema de Rayleigh-Bénard sin rotación. Sin embargo, a diferencia del problema plano, en el caso del anillo la convección también se puede iniciar en forma de una onda viajera en la dirección azimutal. Estos modos convectivos tridimensionales se ajustan a la teoría de bifurcaciones en sistemas en rotación (Knobloch, 1994) y no se pueden encontrar si no se tiene en cuenta la curvatura de la capa. El sistema selecciona una solución tridimensional, para ciertos valores de η , si se cumple que $\beta \gtrsim 1$ y, mientras que la solución columnar es independiente del número de Prandtl, σ , por ser la bifurcación estacionaria, los valores críticos asociados a los modos tridimensionales dependen de σ . Así pues, en el problema de capa plana se deja de obtener un tipo de soluciones que, como se ha visto en este trabajo, puede existir y ser dominante en el problema del anillo cilíndrico.

(2) Se ha analizado la estabilidad lineal del estado conductivo considerando condiciones de contorno de adherencia en las tapas del anillo. En este caso, el problema de valores propios que se ha resuelto es bidimensional, pues las condiciones de contorno no permiten separar la dirección radial y la vertical. Al igual que en el caso libre, se han determinado las curvas de estabilidad marginal y las estructuras que el sistema selecciona en función de los números adimensionales relevantes. La rotación resulta ser determinante en el tipo de estructura seleccionada.

- Cuando la rotación es baja, las condiciones de contorno de adherencia fuerzan que todos los modos críticos sean tridimensionales y se produce un aumento del número de Rayleigh necesario para que se inicie la convección. Las soluciones dominantes siempre tienen una precesión en la dirección azimutal y su estructura vertical va cambiando al aumentar el parámetro de forma del anillo. Por tanto, para rotaciones bajas, las estructuras que aparecen en el inicio de la convección son completamente diferentes a las obtenidas cuando las condiciones de contorno son libres.
- A medida que la rotación aumenta, las soluciones tridimensionales se van alargando progresivamente hasta que se forman columnas de Taylor prácticamente bidimensionales cuando el número de Taylor es elevado. En las proximidades de las tapas del anillo, a partir de valores de la rotación comprendidos entre $Ta = 10^4$ y $Ta = 10^5$, se forman capas límite de Ekman, necesarias para que se satisfagan las condiciones de contorno. En estas capas el teorema de Taylor-Proudman no se verifica y la fuerza de Coriolis no puede ser compensada por un gradiente de presiones. Su efecto sobre el sistema es retrasar considerablemente el inicio de la convección. Mientras que las columnas de Taylor son estacionarias en el caso libre, viajan respecto al sistema de referencia en rotación en el caso rígido. Por tanto, se ha mostrado que manteniendo las tapas del anillo planas, se puede obtener un modo convectivo columnar con precesión si se consideran condiciones de contorno de adherencia en ellas.

(3) Se ha estudiado la dinámica no lineal de la solución columnar analizando su estabilidad frente a perturbaciones bidimensionales, pues para rotaciones elevadas el carácter bidimensional de las soluciones se mantiene al aumentar el número de Rayleigh (Azouni *et al.*, 1986). Para ello, se han utilizado técnicas de continuación (Sánchez, 1994), que permiten seguir las ramas de soluciones no lineales estacionarias y detectar las posibles bifurcaciones, y se ha implementado un código de evolución temporal eficiente en variables primitivas, con el que se pueden encontrar las soluciones con dependencia temporal. El caso analizado en detalle corresponde a $\sigma = 0.025$.

- De entre las inestabilidades que pueden ser dominantes en un sistema con simetría $O(2)$ (Knobloch, 1996), para todos los valores de η considerados, se ha obtenido que las columnas no lineales estacionarias dan lugar a *Direction Reversing Travelling Waves*. Esta nueva solución, que mantiene la periodicidad de la columna estacionaria, tiene dependencia temporal y se caracteriza por la aparición de un flujo medio en la dirección azimutal que rompe la simetría de reflexión R_1 de la solución básica. La gráfica que recoge la dependencia del número de Nusselt con el número de Rayleigh muestra que la pendiente dismi-

nuye tras la bifurcación secundaria, lo que indica que flujo de masa oscilatorio en la dirección azimutal produce una disminución en la eficiencia del transporte de calor en la dirección radial.

- Se ha obtenido la secuencia de las bifurcaciones que se producen hasta que se alcanza un régimen caótico en el tiempo. La bifurcación terciaria que se ha identificado es subarmónica, pues pasan a contribuir a la solución números de onda azimutales diferentes del básico, rompiéndose la periodicidad espacial. Tras esta bifurcación, se detecta un régimen cuasiperiódico que es estable en un intervalo muy pequeño de valores del número de Rayleigh. Posteriormente se alcanza un régimen caótico. La ruta de transición al caos depende fuertemente del número de Prandtl. Así, mientras que para valores pequeños de σ la bifurcación secundaria es de Hopf y se produce para $Ra_c^{sec} \approx 2Ra_c^{prim}$, para valores elevados de σ la bifurcación secundaria es estacionaria, cambia el número de onda azimutal de la solución básica y se obtiene para valores del número de Rayleigh más elevados, $Ra_c^{sec} \approx 50Ra_c^{prim}$.
- Se ha estudiado la interacción espacial entre los modos $n = 2$ y $n = 4$. Se reproducen algunos aspectos de la dinámica predicha por la forma normal de la resonancia 1:2, como son la presencia de intervalos de valores del parámetro de control para los que desaparece el modo básico (*wavenumber gaps*) o la existencia de ondas viajeras que bifurcan de la rama de modos mixtos (rama $n = 2$). Aunque para los valores de los parámetros considerados, las soluciones $n = 2$ y $n = 4$ son inicialmente inestables, juegan un papel fundamental en la posterior estabilización de soluciones. Como consecuencia de esta resonancia, se ha detectado una rama estable de soluciones estacionarias $n = 2$ que a partir de un cierto valor del número de Rayleigh coexiste con la rama de soluciones $n = 3$ que había bifurcado del estado conductivo.

Apéndice A

Funciones de Harris y Reid

Las funciones de Harris y Reid, $C_m(z)$ y $S_m(z)$, son, respectivamente, los dos grupos de soluciones pares e impares en que se pueden separar las funciones propias $y_m(z)$ correspondientes al problema de valores propios

$$\frac{d^4 y}{dz^4} = \alpha^4 y,$$

con las condiciones de contorno

$$z = 0 \quad y \quad \frac{dy}{dz} = 0 \quad \text{en } z = \pm \frac{1}{2}.$$

La forma estandar de las funciones de Harris y Reid, tal y como se encuentra en la literatura (Chandrasekhar, 1961), es

$$C_m(z) = \frac{\cosh \lambda_m z}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_m} - \frac{\cos \lambda_m z}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m},$$
$$S_m(z) = \frac{\sinh \mu_m z}{\sinh \frac{1}{2} \mu_m} - \frac{\sin \mu_m z}{\sin \frac{1}{2} \mu_m}.$$

Definidas de esta forma, estas funciones se anulan en $z = \pm \frac{1}{2}$, pero para que se anulen también sus derivadas, λ_m y μ_m deben ser raíces de las ecuaciones características

$$\tanh \frac{1}{2} \lambda + \tan \frac{1}{2} \lambda = 0, \tag{A.1}$$

$$\coth \frac{1}{2} \mu + \cot \frac{1}{2} \mu = 0. \tag{A.2}$$

Las cuatro primeras raíces se muestran en la tabla (A.1)

m	λ_m	μ_m
1	4.73004074	7.85320462
2	10.99560784	14.13716549
3	17.27875966	20.42035225
4	23.56194490	26.70353756

Tabla A.1: Raíces de las ecuaciones características (A.1) y (A.2).

y cuando $m > 4$ vienen dadas, con una precisión de diez decimales, por las fórmulas asintóticas

$$\begin{aligned}\lambda_m &\longrightarrow (2m - 1/2)\pi, \\ \mu_m &\longrightarrow (2m + 1/2)\pi.\end{aligned}$$

Las derivadas de las funciones de Harris y Reid vienen dadas por

$$\begin{aligned}\partial_z C_m(z) &= \lambda_m \left[\frac{\sinh \lambda_m z}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_m} + \frac{\sin \lambda_m z}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m} \right], \\ \partial_z^2 C_m(z) &= \lambda_m^2 \left[\frac{\cosh \lambda_m z}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_m} + \frac{\cos \lambda_m z}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m} \right], \\ \partial_z^3 C_m(z) &= \lambda_m^3 \left[\frac{\sinh \lambda_m z}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_m} - \frac{\sin \lambda_m z}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m} \right], \\ \partial_z^4 C_m(z) &= \lambda_m^4 \left[\frac{\cosh \lambda_m z}{\cosh \frac{1}{2} \lambda_m} - \frac{\cos \lambda_m z}{\cos \frac{1}{2} \lambda_m} \right] = \lambda_m^4 C_m(z), \\ \partial_z S_m(z) &= \mu_m \left[\frac{\cosh \mu_m z}{\sinh \frac{1}{2} \mu_m} - \frac{\cos \mu_m z}{\sin \frac{1}{2} \mu_m} \right], \\ \partial_z^2 S_m(z) &= \mu_m^2 \left[\frac{\sinh \mu_m z}{\sinh \frac{1}{2} \mu_m} + \frac{\sin \mu_m z}{\sin \frac{1}{2} \mu_m} \right], \\ \partial_z^3 S_m(z) &= \mu_m^3 \left[\frac{\cosh \mu_m z}{\sinh \frac{1}{2} \mu_m} + \frac{\cos \mu_m z}{\sin \frac{1}{2} \mu_m} \right], \\ \partial_z^4 S_m(z) &= \mu_m^4 \left[\frac{\sinh \mu_m z}{\sinh \frac{1}{2} \mu_m} - \frac{\sin \mu_m z}{\sin \frac{1}{2} \mu_m} \right] = \mu_m^4 S_m(z).\end{aligned}$$

Apéndice B

Derivación de funciones desarrolladas en polinomios de Chebyshev

B.1 Matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$

Cuando se discretiza un problema espectralmente mediante polinomios de Chebyshev, para evaluar los distintos operadores lineales que intervienen en las ecuaciones y expresarlos en función del valor de las variables en los puntos de colocación resulta práctico utilizar las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$. Estas matrices relacionan los valores de la derivada primera y la derivada segunda de una función en los puntos de colocación, $f_i^{(1)} = [\partial_x f(x)]_{x_i}$ y $f_i^{(2)} = [\partial_{xx}^2 f(x)]_{x_i}$, con el valor de la función en los puntos de colocación, $f_i = f(x_i)$, (Canuto *et al.* (1988), Peyret (1986)),

$$f_i^{(1)} = \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(1)} f_j,$$
$$f_i^{(2)} = \sum_{j=0}^N d_{ij}^{(2)} f_j.$$

La expresión de la matriz de derivadas primeras es

$$d_{ij}^{(1)} = \begin{cases} \frac{\bar{c}_i (-1)^{i+j}}{\bar{c}_j (x_i - x_j)}, & 0 \leq i, j \leq N; j \neq i, \\ -\frac{x_j}{2(1-x_j^2)}, & 1 \leq i=j \leq N-1, \\ \frac{2N^2+1}{6}, & i=j=0, \\ -\frac{2N^2+1}{6}, & i=j=N, \end{cases}$$

y la de la matriz de derivadas segundas

$$d_{ij}^{(2)} = \begin{cases} \frac{(-1)^{i+j}(x_i^2 + x_i x_j - 2)}{\bar{c}_j (1-x_i^2)(x_i - x_j)^2}, & 1 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N; j \neq i, \\ -\frac{(N^2-1)(1-x_i^2)+3}{3(1-x_i^2)^2}, & 1 \leq i=j \leq N-1, \\ \frac{(-1)^j 2[(2N^2+1)(1-x_j)-6]}{3\bar{c}_j(1-x_j)^2}, & i=0, 1 \leq j \leq N, \\ \frac{(-1)^{N+j} 2[(2N^2+1)(1+x_j)-6]}{3\bar{c}_j(1+x_j)^2}, & i=N, 0 \leq j \leq N-1, \\ \frac{N^4-1}{15}, & i=j=0, N, \end{cases}$$

siendo

$$\bar{c}_i = \begin{cases} 1 & 1 \leq i \leq N-1 \\ 2 & i=0, N. \end{cases}$$

Tanto en el problema de valores propios no axisimétrico con condiciones de contorno de adherencia como en el problema no lineal de evolución temporal, se han utilizado las matrices $d_{ij}^{(1)}$ y $d_{ij}^{(2)}$, pues se han resuelto las ecuaciones directamente en el espacio físico.

B.2 Valor de una función en el contorno que satisface condiciones de Neumann

Sea una función $f(x)$ definida en el intervalo $x \in (-1, 1)$, que se desarrolla en polinomios de Chebyshev

$$f(x) = \sum_{l=0}^L \hat{f}_l T_l(x)$$

y que verifica condiciones de contorno de Neumann en los extremos, $f_0^{(1)} = g_1$ y $f_L^{(1)} = g_2$. Conocida la derivada primera en el contorno, g_1 y g_2 , se desea encontrar una expresión para el valor de la función $f(x)$ en el contorno. Utilizando las relaciones (3.9) se obtienen dos ecuaciones para los coeficientes del desarrollo

$$f_0^{(1)} = \sum_{l=0}^L l^2 \hat{f}_l = g_1,$$

$$f_L^{(1)} = \sum_{l=0}^L (-1)^{l+1} l^2 \hat{f}_l = g_2.$$

Sustituyendo en estas expresiones los coeficientes \hat{f}_l expresados en función del valor de la función en los puntos de colocación, f_i ,

$$\hat{f}_l = \frac{2}{L c_l} \sum_{i=0}^L \frac{f_i}{c_i} \cos \frac{l\pi i}{L},$$

se obtiene

$$f_0^{(1)} = \sum_{i=0}^L \Gamma_i \frac{f_i}{c_i} = g_1,$$

$$f_L^{(1)} = \sum_{i=0}^L \Delta_i \frac{f_i}{c_i} = g_2,$$

siendo

$$\Gamma_i = \frac{2}{L} \sum_{l=0}^L \frac{l^2}{c_l} \cos \frac{l\pi i}{L},$$

$$\Delta_i = -\frac{2}{L} \sum_{l=0}^L \frac{l^2}{c_l} (-1)^l \cos \frac{l\pi i}{L}.$$

Estas dos ecuaciones permiten despejar el valor de $f(x)$ en los extremos del intervalo, en función de los valores en los restantes puntos. Teniendo en cuenta que $\Gamma_0 = \frac{2L^2+1}{3}$, $\Gamma_L = 1$, $\Delta_0 = -1$ y $\Delta_L = -\frac{2L^2+1}{3}$, el valor de $f_0 = f(1)$ y $f_L = f(-1)$ en función de los puntos del interior es

$$f_L = \frac{1}{A} \sum_{i=1}^{L-1} \left(\Gamma_i + \frac{2L^2+1}{3} \Delta_i \right) f_i - \frac{2L^2+1}{3A} g_2 - \frac{1}{A} g_1, \quad (\text{B.1})$$

$$f_0 = -\frac{1}{A} \sum_{i=1}^{L-1} \left(\Delta_i + \frac{2L^2+1}{3} \Gamma_i \right) f_i + \frac{2L^2+1}{3A} g_1 + \frac{1}{A} g_2, \quad (\text{B.2})$$

donde

$$A = \left[\frac{(2L^2+1)^2}{18} - \frac{1}{2} \right].$$

Bibliografía

- ALONSO, A., NET, M. & KNOBLOCH, E. 1995 On the transition to columnar convection. *Phys. Fluids* **7** (5), 935–940.
- ALONSO, A., NET, M., MERCADER, I. & KNOBLOCH, E. 1999 Onset of convection in a rotating annulus with radial gravity and heating. *Fluid Dynamics Research* **24**, 133–145.
- ALONSO, A., SÁNCHEZ, J. & NET, M. 1998 Nonlinear convective solutions in a rotating annulus. In *Nonlinear Dynamics and Acoustics* (ed. A. Barjau), pp. 89–97.
- ARMBRUSTER, D., GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. 1988 Heteroclinic cycles and modulated travelling waves in systems with $O(2)$ -symmetry. *Physica D* **29**, 257–282.
- ARMBRUSTER, D., GUCKENHEIMER, J. & HOLMES, P. 1989 Kuramoto-Sivashinsky dynamics on the center unstable manifold. *SIAM J. Appl. Math.* **49**, 676–691.
- AUER, M., BUSSE, F. H. & CLEVER, R. M. 1995 Three-dimensional convection driven by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **301**, 371–382.
- AZOUNI, M. A., BOLTON, E. W. & BUSSE, F. H. 1986 Convection driven by centrifugal buoyancy in a rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **34**, 301–317.
- BRINDLEY, J. & MOROZ, I. M. 1980 Lorenz attractor behaviour in a continuously stratified baroclinic fluid. *Phys. Lett.* **77A** (6), 441–444.
- BUELL, J. C. & CATTON, I. 1983 Effect of rotation on the stability of a bounded cylindrical layer of fluid heated from below. *Phys. Fluids* **26** (4), 892–896.

- BUSSE, F. H. 1970 Thermal instabilities in rapidly rotating systems. *J. Fluid Mech.* **44**, 441–460.
- BUSSE, F. H. 1986 Asymptotic theory of convection in a rotating cylindrical annulus. *J. Fluid Mech.* **173**, 545–556.
- BUSSE, F. H. & CARRIGAN, C. R. 1974 Convection induced by centrifugal buoyancy. *J. Fluid Mech.* **62**, 579–592.
- BUSSE, F. H. & CLEVER, R. M. 1979 Instabilities of convection rolls in a fluid of moderate Prandtl number. *J. Fluid Mech.* **91**, 319–335.
- BUSSE, F. H. & HEIKES, K. E. 1980 Convection in a rotating layer: a simple case of turbulence. *Science* **208**, 173–175.
- CANUTO, C., HUSSAINI, M. Y., QUARTERONI, A. & ZANG, T. A. 1988 *Spectral Methods in Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- CHANDRASEKHAR, S. 1953 The instability of a layer of fluid heated from below and subject to Coriolis forces. *Proc. R. Soc. Lond. A* **217** (1130), 306–327.
- CHANDRASEKHAR, S. 1961 *Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability*. Oxford University Press.
- CLEVER, R. M. & BUSSE, F. H. 1974 Transition to time dependent convection. *J. Fluid Mech.* **65**, 625–645.
- CLEVER, R. M. & BUSSE, F. H. 1979 Nonlinear properties of convection rolls in a horizontal layer rotating about a vertical axis. *J. Fluid Mech.* **94**, 609–627.
- COX, S. M. 1996 Mode interactions in Rayleigh-Bénard convection. *Physica D* **95**, 50–61.
- FEIN, J. S. & PFEFFER, R. L. 1976 An experimental study of the effects of Prandtl number on thermal convection in a rotating, differentially heated cylindrical annulus of fluid. *J. Fluid Mech.* **75**, 81–112.
- FULTZ, D. 1961 Developments in controlled experiments on large scale geophysical problems. *Adv. Geophys.* **7**, 1–104.
- FULTZ, D., NAKAGAWA, Y. & FRENZEN, P. 1955 Experiments on overstable thermal convection in mercury. *Proc. R. Soc. Lond. A* **231**, 211–225.
- GEAR, C. W. 1971 *Numerical Initial Value Problems in Ordinary Differential Equations*. Prentice-Hall.

- GIBBON, J. D. & MCGUINNESS, M. J. 1980 A derivation of the Lorenz equations for some unstable dispersive physical systems. *Phys. Lett.* **77A** (5), 295–299.
- GOLDSTEIN, H. F., KNOBLOCH, E., MERCADER, I. & NET, M. 1993 Convection in a rotating cylinder. Part I. Linear theory for moderate Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **248**, 583–604.
- GOLDSTEIN, H. F., KNOBLOCH, E., MERCADER, I. & NET, M. 1994 Convection in a rotating cylinder. Part II. Linear theory for low Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **262**, 293–324.
- GOTTLIEB, D. & ORSZAG, S. A. 1977 *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- GREED, G. T. & ZHANG, K. 1996 Two and three dimensional linear convection in a rotating annulus. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **82**, 23–34.
- GREENSPAN, H. P. 1968 *The Theory of Rotating Fluids*. Cambridge University Press.
- HART, J. E. 1979 Finite amplitude baroclinic instability. *Ann. Rev. Fluid Mech.* **11**, 147–172.
- HART, J. E., GLATZMAIER, G. A. & TOOMRE, J. 1986 Space-laboratory and numerical simulations of thermal convection in a rotating hemispherical shell with radial gravity. *J. Fluid Mech.* **173**, 519–544.
- HERRMANN, J. & BUSSE, F. H. 1997 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 4. Modulations and transition to chaos at low Prandtl numbers. *J. Fluid Mech.* **350**, 209–229.
- HIDE, R. 1953 Some experiments on thermal convection in a rotating liquid. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **79**, 161.
- HIDE, R. 1958 An experimental study of thermal convection in a rotating liquid. *Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A* **250** (983), 441–478.
- HIDE, R. & MASON, P. J. 1975 Sloping convection in a rotating fluid. *Adv. Phys.* **24** (1), 47–100.
- HIGNETT, P., WHITE, A. A., CARTER, R. D., JACKSON, W. D. & SMALL, R. M. 1985 A comparison of laboratory measurements and numerical simulations of baroclinic wave flows in a rotating cylindrical annulus. *Quart. J. Roy. Met. Soc.* **111**, 131–154.

- HOLMES, P., LUMLEY, J. L. & BERKOOZ, G. 1996 *Turbulence, Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge University Press.
- JONES, C. A. & MOORE, D. R. 1979 The stability of axisymmetric convection. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **11**, 245–270.
- JONES, C. A. & PROCTOR, M. R. E. 1987 Strong spatial resonance and travelling waves in Bénard convection. *Phys. Lett. A* **121** (5), 224–228.
- KARNIADAKIS, G. E., ISRAELI, M. & ORSZAG, S. A. 1991 High-order splitting methods for the incompressible Navier–Stokes equation. *Journal of Computational Physics* **97**, 414–443.
- KNOBLOCH, E. 1994 Bifurcations in rotating systems. In *Lectures on Solar and Planetary Dynamos* (ed. M. R. E. Proctor & A. D. Gilbert), pp. 331–370. Cambridge University Press.
- KNOBLOCH, E. 1996 Symmetry and instability in rotating hydrodynamic and magnetohydrodynamic flows. *Phys. Fluids* **8** (6), 1446–1454.
- KNOBLOCH, E. & GUCKENHEIMER, J. 1983 Convective transitions induced by a varying aspect ratio. *Phys. Rev. A* **27**, 408–417.
- KRISHNAMURTI, R. 1971 On the transition to turbulent convection. *8th Symp. on Naval Hydrodyn.* (Rep. ARC-179), 289–310, Office of Naval Research.
- KÜPPERS, G. 1970 The stability of steady finite amplitude convection in a rotating fluid layer. *Phys. Lett.* **32A** (1), 7–8.
- KÜPPERS, G. & LORTZ, D. 1969 Transition from laminar convection to thermal turbulence in a rotating fluid layer. *J. Fluid Mech.* **35**, 609–620.
- KUZNETSOV, Y. A. 1995 *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer–Verlag.
- LANDSBERG, A. S. & KNOBLOCH, E. 1991 Direction-reversing traveling waves. *Phys. Lett. A* **159**, 17–20.
- LE QUERE, P. & ALZIARY DE ROQUEFORT, T. 1985 Computation of natural convection in two-dimensional cavities with Chebyshev polynomials. *Journal of Computational Physics* **57**, 210–228.
- LUCAS, P. G. J., PFOTENHAUER, J. M. & DONNELLY, R. J. 1983 Stability and heat transfer of rotating cryogenics. Part I. Influence of rotation on the onset of convection in liquid ^4He . *J. Fluid Mech.* **129**, 251–264.

- MARQUÉS, F. 1990 On boundary conditions for velocity potentials in confined flows. Application to Couette flow. *Phys. Fluids A* **2** (5), 729–737.
- MARQUÉS, F., NET, M., MASSAGUER, J. M. & MERCADER, I. 1993 Thermal convection in vertical cylinders. A method based on potentials of velocity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engrg.* **110**, 157–169.
- MIZUSHIMA, J. & FUJIMURA, K. 1992 Higher harmonic resonance of two-dimensional disturbances in Rayleigh-Bénard convection. *J. Fluid Mech.* **234**, 651–667.
- NAKAGAWA, Y. & FRENZEN, P. 1955 A theoretical and experimental study of cellular convection in rotating fluids. *Tellus* **7**, 1–21.
- NET, M. 1991 Convecció en geometria cilíndrica. PhD thesis, Universidad de Barcelona.
- OR, A. C. & BUSSE, F. H. 1987 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 2. Transitions to asymmetric and vacillating flow. *J. Fluid Mech.* **174**, 313–326.
- ORSZAG, S. A., ISRAELI, M. & DEVILLE, M. O. 1986 Boundary conditions for incompressible flows. *J. Sci. Comput.* **1**, 75–111.
- PEDLOSKY, J. 1987 *Geophysical Fluid Dynamics*. Springer-Verlag.
- PEDLOSKY, J. & FRENZEN, P. 1980 Chaotic and periodic behavior of finite amplitude baroclinic waves. *J. Atmos. Sci.* **37**, 1177–1196.
- PEYRET, R. 1986 *Introduction to Spectral Methods*. Von Karman Institute Lecture Series 1986–04 (Rhode-Saint Genese, Belgium).
- PFOTENHAUER, J. M., LUCAS, P. G. J. & DONNELLY, R. J. 1984 Stability and heat transfer of rotating cryogenics. Part II. Effects of rotation on heat-transfer properties of convection in liquid ^4He . *J. Fluid Mech.* **145**, 239–252.
- PRAT, J., MASSAGUER, J. M. & MERCADER, I. 1995 Large-scale flows and resonances in 2-D thermal convection. *Phys. Fluids* **7** (1), 121–134.
- PRAT, J. & MERCADER, I. 1999 Private communication.
- PRAT, J., MERCADER, I. & KNOBLOCH, E. 1998 Resonant mode interactions in Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. E* **58** (3), 3145–3156.
- PROCTOR, M. R. E. & JONES, C. A. 1988 The interaction of two spatially resonant patterns in thermal convection. Part 1. Exact 1:2 resonance. *J. Fluid Mech.* **188**, 301–335.

- PROUDMAN, J. 1916 On the motion of solids in liquids possessing vorticity. *Proc. R. Soc. Lond. A* **92**, 408–424.
- RABINOWITZ, P. H. 1977 *Applications of Bifurcation Theory*. Academic Press.
- READ, P. L., BELL, M. J., JOHNSON, D. W. & SMALL, R. M. 1992 Quasi-periodic and chaotic flow regimes in a thermally driven, rotating fluid annulus. *J. Fluid Mech.* **238**, 599–632.
- ROSSBY, H. T. 1969 A study of Bénard convection with and without rotation. *J. Fluid Mech.* **36**, 309–335.
- RUCKLIDGE, A. M. & MATTHEWS, P. C. 1996 Analysis of the shearing instability in nonlinear convection and magnetoconvection. *Nonlinearity* **9**, 311–351.
- SÁNCHEZ, J. 1994 Simulación numérica en flujos confinados: estructuras preturbulentas. PhD thesis, Universidad de Barcelona.
- SCHNAUBELT, M. & BUSSE, F. H. 1992 Convection in a rotating cylindrical annulus. Part 3. Vacillating and spatially modulated flows. *J. Fluid Mech.* **245**, 155–173.
- SIMÓ, C. 1990 *On the Analytical and Numerical Approximation of Invariant Manifolds, Modern Methods in Celestial Mechanics*. Editions Frontières.
- SOMERVILLE, R. C. J. 1971 Bénard convection in a rotating fluid. *Geophys. Fluid Dyn.* **2**, 247–262.
- TAYLOR, G. I. 1921 Experiments with rotating fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A* **100**, 114–121.
- TAYLOR, G. I. 1923 Experiments on the motion of solid bodies in rotating fluids. *Proc. R. Soc. Lond. A* **104**, 213–218.
- TRITTON, D. J. 1988 *Physical Fluid Dynamics*. Oxford University Press.
- VERONIS, G. 1959 Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **5**, 401–435.
- VERONIS, G. 1968 Large-amplitude Bénard convection in a rotating fluid. *J. Fluid Mech.* **31**, 113–140.
- ZHANG, K. 1992 Spiralling columnar convection in rapidly rotating spherical fluid shells. *J. Fluid Mech.* **236**, 535–556.

- ZHANG, K. & BUSSE, F. H. 1987 On the onset of convection in rotating spherical shells. *Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics* **39**, 119–147.
- ZHANG, K. & GREED, G. T. 1999 Convection rolls controlled by Ekman boundary layers. *Preprint* .
- ZHANG, K. & GUBBINS, D. 1993 Convection in rotating spherical fluid shell with an inhomogeneous temperature boundary condition at infinite Prandtl number. *J. Fluid. Mech.* **250**, 209–232.
- ZHONG, F., ECKE, R. E. & STEINBERG, V. 1991 Asymmetric modes and the transition to vortex structures in rotating Rayleigh-Bénard convection. *Phys. Rev. Lett.* **67** (18), 2473–2476.
- ZHONG, F., ECKE, R. E. & STEINBERG, V. 1993 Rotating Rayleigh-Bénard convection: asymmetric modes and vortex states. *J. Fluid Mech.* **249**, 135–159.

