EL PROBLEMA DE LA CARACTERIZACION
Y DE LA UNICIDAD

Juan Jacobo Simón Pinero

Departamento de Matemáticas
Universidad de Murcia
1992

EL PROBLEMA DE LA CARACTERIZACION Y DE LA UNICIDAD

por

Juan Jacobo Simón Pinero

Memoria realizada en el Departamento de Matemáticas de la Facultad de Matemáticas de la Universidad de Murcia, bajo la dirección del profesor D. José Luis García Hernández, Catedrático de Algebra de la Universidad de Murcia, para la obtención del grado de doctor en Matemáticas por la Universidad de Murcia.

V°B° El Director	El aspirante al grado de doctor
Fdo: J. L. García Hernández	Fdo: J. J. Simón Pinero

Indice

I N T R O D U C C I O N

Los problemas de la caracterización y de la unicidad tienen una larga historia, que recorreremos a grandes rasgos en esta introducción. Estos problemas se pueden plantear, en una primera aproximación, del modo siguiente (que tomamos esencialmente de [16]): Sea $\mathfrak{R}$ una clase de anillos (asociativos y con identidad) y $\mathfrak{M}$ una clase de módulos (por ejemplo, por la izquierda) sobre los anillos de la clase $\mathfrak{R}$.

1. El problema de la caracterización. Encontrar condiciones necesarias y suficientes sobre un anillo arbitrario E, dadas en términos de propiedades de estructura de anillos, para que E sea isomorfo al anillo de endomorfismos de algún módulo de la clase $\mathfrak{M}$.

2. El problema de la unicidad. Sea ${}_RM$ un módulo de la clase $\mathfrak{M}$, $R \in \mathfrak{R}$, $E = \mathrm{End}({}_RM)$. ¿Determina el anillo E unívocamente al módulo ${}_RM$ y al anillo R? De modo más general, ¿qué clase de pares (S,N) con $S \in \mathfrak{R}$, $N \in \mathfrak{M}$, son los que verifican $\mathrm{End}({}_SN) \approx E$?

Hay una abundante literatura sobre esos problemas; usualmente, se ha conseguido darles respuesta considerando clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$ bastante restringidas. Con el objeto de presentar de forma muy esquemática la historia de los resultados en torno a estos problemas, vamos a considerarlos por separado, aunque las conexiones entre los dos aparecerán de modo inevitable en la discusión.

El problema de la caracterización

Probablemente, el resultado más antiguo sobre el problema de la caracterización sea el teorema de Wedderburn: si $\mathfrak{M}$ es la clase de los espacios vectoriales (por la izquierda) de dimensión finita sobre anillos de división, entonces un anillo E es isomorfo al anillo de endomorfismos de un módulo en $\mathfrak{M}$ si y sólo si E es un anillo artiniano simple. No sólo es este teorema un prototipo elegante de teorema de caracterización; además, las demostraciones habituales del teorema (véase, por ejemplo, la de [41]) emplean el primer método conocido de atacar un problema de caracterización, lo que podríamos llamar "el método directo".

Describiremos de forma muy aproximada este método básico: dadas las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$, búsquense condiciones que debe tener necesariamente cualquier anillo de endomorfismos $\mathrm{End}({}_RM)$ con $R \in \mathfrak{R}$, $M \in \mathfrak{M}$. Si se escogen adecuadamente tales condiciones necesarias, podemos llegar a acumularlas de tal manera que sean también condiciones suficientes para que cualquier anillo E que las posea sea isomorfo al anillo de endomorfismos de un módulo de la clase $\mathfrak{M}$. En el caso del teorema de Wedderburn, este esquema funciona: se demuestra primero que todo anillo de endomorfismos de un espacio vectorial de dimensión finita es artiniano simple. Que esta condición necesaria es también suficiente es consecuencia del lema de Schur y ello permite obtener el teorema.

Como acabamos de ver, el "método directo" descompone el problema de la caracterización (para las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$) en dos partes, de las cuales la primera consiste en encontrar "propiedades abstractas de la teoría de anillos" que debe verificar el anillo de endomorfismos de cualquier módulo en la clase $\mathfrak{M}$. En este punto preciso, se fueron introduciendo a lo largo de los años algunas mejoras en el método. Señalaremos las dos técnicas que tienen mayor importancia en este sentido.

(a) El empleo de las "conexiones de Galois". En efecto, dado $M \in \mathfrak{M}$ y $E = \mathrm{End}({}_RM)$ existe una doble conexión de Galois entre el retículo de los submódulos de ${}_RM$ y el de los ideales de E: la primera de ellas está dada por:

$${}_RM \supseteq L \longmapsto \{ f \in E \mid \mathrm{Im}\, f \leq L \} \leq_E E; \quad I \leq_E E \longmapsto \sum_{f \in I} \mathrm{Im}\, f$$

mientras que la segunda está definida a través de anuladores:

$${}_RM \supseteq L \longmapsto \{ f \in E \mid f(L) = 0 \} \leq E_E; \quad I \leq E_E \longmapsto \bigcap_{f \in I} \text{Núc}\, f$$

Esta doble conexión de Galois permite trasladar propiedades del retículo de submódulos de ${}_RM$ a los retículos de ideales por la izquierda y por la derecha del anillo de endomorfismos: en 1953, Wolfson obtuvo una primera solución del problema de la caracterización para la clase $\mathfrak{M}$ de todos los espacios vectoriales (no necesariamente de dimensión finita) sobre anillos de división. Las propiedades del anillo de endomorfismos E que aparecen en el resultado [88, Theorem 7.5] están formuladas en términos de los ideales de E, como consecuencia del empleo de la técnica de la "doble conexión de Galois" en la búsqueda de las adecuadas "condiciones necesarias". Concretamente, Wolfson mostró que E es isomorfo al anillo de endomorfismos de un espacio vectorial por la izquierda si y sólo si (i) Si S es el zócalo por la derecha de E, entonces $S^2 \neq 0$ y todo ideal no nulo de E contiene a S; (ii) Si J es un ideal por la izquierda con anulador por la derecha $r_E(J) = 0$, entonces $S \leq J$; y (iii) la suma de dos anuladores por la derecha (o por la izquierda) es un anulador por la derecha (respectivamente, por la izquierda).

Haremos aquí la observación marginal de que las técnicas basadas en la doble conexión de Galois han permitido recientemente obtener resultados que relacionan las propiedades de un módulo ${}_RM$ con las de su anillo de endomorfismos: véanse los trabajos [49, 50, 51] de S. M. Khuri. Sin embargo, en estos trabajos no se intenta obtener teoremas de caracterización. Frutos más recientes de la misma técnica son los trabajos [92, 93] sobre anillos de endomorfismos de módulos libres o localmente libres.

(b) El empleo de nociones topológicas. Dados, como antes,

${}_R M \in \mathfrak{M}$ y $E = \mathrm{End}({}_R M)$, es posible definir una topología sobre E que lo convierta en un anillo topológico con una topología lineal. Concretamente, la <u>topología finita</u> de E es, por definición, la dada por la base de vecindades de cero que está determinada por aquellos ideales por la derecha, I de E, tales que I es el anulador de un subconjunto finito de elementos de ${}_R M$, $I = r_E(x_1,\dots, x_n)$ para $x_1,\dots, x_n \in M$. Resulta que, con respecto a esta topología lineal, E es un espacio de Hausdorff y completo. Estas son, pues, condiciones necesarias sobre E -aunque no pueden ser consideradas estrictamente como propiedades algebraicas de la teoría de anillos por su carácter topológico. Sin embargo, no son "condiciones abstractas" ya que la definición de la topología finita envuelve la representación de E como anillo de endomorfismos de ${}_R M$.

A principios de los años setenta, Liebert encontró una manera de emplear provechosamente estas condiciones topológicas. Dicha manera debe consistir, necesariamente, en definir la topología finita sobre $E = \mathrm{End}({}_R M)$ por medio de nociones que hagan referencia solamente a propiedades abstractas "internas" del anillo E. Liebert consigue esto en algunos casos particulares, usando la noción de idempotente primitivo. Concretamente, sea $\mathfrak{K}$ la clase de los dominios (no conmutativos) de ideales principales (DIP) y sea $\mathfrak{M}$ la clase de los módulos libres. Si $R \in \mathfrak{K}$ y ${}_R M \in \mathfrak{M}$, la topología finita del anillo $E = \mathrm{End}({}_R M)$ tiene como base de vecindades de cero a los anuladores por la derecha de idempotentes finitos -esto es, de idempotentes que son suma ortogonal de idempotentes primitivos. Esta descripción le permite obtener, por ejemplo, el siguiente teorema de caracterización para las clases $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ dichas:

Un anillo E es isomorfo al anillo de endomorfismos $\mathrm{End}({}_R M)$ para un módulo libre ${}_R M$ sobre un DIP R, si y sólo si E verifica las condiciones siguientes:

(1) E contiene un conjunto ortogonal $\{ e_i \mid i \in I \}$ de idempotentes finitos de modo que $\oplus_I Ee_i$ coincide con el ideal por la derecha de E generado por todos los idempotentes finitos.

(2) Si $\mathcal{L}$ es la topología lineal de E que admite como base de vecindades de cero al conjunto de todos los anuladores por la derecha de idempotentes finitos de E, entonces E es de Hausdorff y completo con respecto a $\mathcal{L}$.

(3) Si e y f son idempotentes primitivos de E, entonces $eE \cong fE$.

(4) Si e es un idempotente primitivo de E, entonces eEe es un dominio de ideales principales.

Esta técnica se aplicó con frutos en las décadas de los setenta y ochenta. Así, no sólo Liebert [59] sino también, por ejemplo, Goldsmith [33] en 1978, y Franzsen y Schultz [16] en 1982 resuelven problemas de caracterización usando nociones topológicas. En particular, se da en [16] una caracterización de los anillos de endomorfismos de módulos localmente libres sobre anillos LIF (esto es, anillos que verifican la propiedad de que todo sumando directo indescomponible de un módulo localmente libre es isomorfo al anillo). Naturalmente, la técnica topológica tiene sus limitaciones: tal como fue concebida por Liebert, es preciso considerar clases $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ con la propiedad de que el anillo de endomorfismos E tenga "bastantes idempotentes finitos" para poder definir la topología $\mathcal{L}$ y hacerla coincidir con la topología finita.

Lo que precede es una aproximación a las técnicas que se han usado para resolver el problema de la caracterización basándose en lo que hemos llamado más arriba el "método directo". Existe una manera bastante diferente de abordar el problema, manera que se remonta al teorema de Morita sobre equivalencias [67], de 1958. Desde luego, para poder interpretar el teorema de Morita como un teorema de caracterización es preciso forzar un tanto el significado del "problema de la caracterización" indicado al principio: si uno considera una clase cualquiera $\mathfrak{K}$ de anillos, y $\mathfrak{M}$ es la clase de los progeneradores sobre los anillos de la clase $\mathfrak{K}$, entonces el teorema de Morita nos dice que los anillos de endomorfismos de los módulos de la clase $\mathfrak{M}$ forman la menor clase de anillos que contiene a $\mathfrak{K}$ y es cerrada frente a equivalencias. En consecuencia, el teorema de Morita proporciona teoremas de caracterización para las clases $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ dichas, siempre que sea posible identificar a los anillos de la clase que cierra a la clase $\mathfrak{K}$ bajo equivalencias, por medio de propiedades abstractas de la teoría de anillos. En este sentido, el teorema de Wedderburn resulta de aplicar el de Morita a la clase $\mathfrak{K}$ de los anillos de división, junto con la observación de que la menor clase de anillos que es invariante de Morita y contiene a $\mathfrak{K}$ es la de los artinianos simples.

Las ideas que se emplean en la presente memoria para estudiar problemas de caracterización son herederas directas de la que acabamos de esbozar, basada en el teorema de Morita. Para fijar las ideas básicas, supongamos que $\mathfrak{K}$ es una clase arbitraria de anillos y $\mathfrak{M}$ es la clase de todos los módulos generadores sobre los anillos de la clase $\mathfrak{K}$. Una extensión del teorema de Morita, el teorema de Gabriel y Popescu de 1964 [80], indica que si $E = \mathrm{End}({}_RM)$ es el anillo de endomorfismos de un módulo ${}_RM$ en la clase $\mathfrak{M}$, entonces existe una equivalencia de categorías entre R-mód y una categoría cociente de E-mód, a saber: la categoría $(E,\mathcal{F})$-mód, donde $\mathcal{F}$ es el filtro de los ideales por la izquierda de E que contiene a $E_0 = \mathrm{fEnd}({}_RM) = \{ \alpha \in E \mid \alpha$ se factoriza a través de algún módulo proyectivo de tipo finito $\}$ (véase [26, Theorem 2.5]). Llamemos a E_0 "el anillo de los endomorfismos finitos de ${}_RM$".

Existen por lo menos tres maneras alternativas de considerar y estudiar la equivalencia planteada en este teorema: en primer lugar, el anillo de los endomorfismos finitos $E_0 = \mathrm{fEnd}({}_RM)$ es un anillo idempotente; en general, no tiene elemento identidad (de hecho, E_0 tiene identidad justamente cuando ${}_RM$ es un módulo proyectivo de tipo finito; esto es, justamente cuando ${}_RM$ es un progenerador; pero entonces el contenido del teorema anterior está incluido en el de Morita). Podemos pues considerar una "categoría de E_0-módulos por la izquierda" de forma natural, categoría que se denotará por E_0-mód. Entonces, la categoría cociente $(E,\mathcal{F})$-mód que se ha señalado más arriba es equivalente a E_0-mód, por lo que el teorema anterior indica la existencia de una equivalencia entre R-mód y E_0-mód en el caso considerado (es decir, siendo ${}_RM$ un generador). Esta relación plantea el problema general de estudiar equivalencias entre categorías de módulos sobre anillos sin uno, extendiendo la teoría de Morita a este caso; y eso es lo que hacemos fundamentalmente en el Capítulo 2 de la presente memoria.

En segundo lugar, la equivalencia entre R-mód y $(E,\mathcal{F})$-mód puede obtenerse también por un teorema de [69] a partir de la existencia de un contexto de Morita, el contexto de Morita derivado del generador ${}_RM$, $(R,E,M,\mathrm{Hom}_R(M,R))$, cuyas trazas son precisamente R y E_0. La relación general entre equivalencias y contextos para anillos sin uno se aborda también en el Capítulo 2. Por otro lado, el empleo de los contextos de Morita por sí mismos se ha revelado también muy útil para analizar el problema de la unicidad, por lo que volverá a ser considerado en los Capítulos 3 y 4.

Por último, la tercera manera de considerar la relación entre los anillos R y $\mathrm{End}({}_RM)$, con ${}_RM$ generador, es la indicada al principio; esto es, existe una equivalencia de categorías -dada por el funtor $\mathrm{Hom}_R(M,\_)$- entre R-mód y la categoría cociente citada $(E,\mathcal{F})$-mód. En esta forma, el resultado precedente desempeña dentro del método que usamos en la memoria para estudiar el problema de la caracterización, un papel análogo al que, como se ha descrito anteriormente, desempeña el teorema de Morita con relación al de Wedderburn. De este modo, la primera aproximación a un resultado general sobre caracterización será (para una clase cualquiera de anillos $\mathfrak{K}$ y una clase $\mathfrak{M}$ de módulos que esté incluida en la de los generadores): un anillo arbitrario E es isomorfo a $\mathrm{End}({}_RM)$ para ${}_RM \in \mathfrak{M}$ si y sólo si el anillo R es Morita equivalente al anillo E_0 de los endomorfismos finitos de ${}_RM$.

Naturalmente, debe tenerse algo más para convertir este enunciado en un teorema de caracterización. Concretamente, serán precisas dos condiciones: 1) identificar a E_0 dentro de E "de manera abstracta", sin hacer referencia al módulo ${}_RM$; veremos que este problema es el mismo al que se enfrenta Liebert: el de identificar a la topología finita por "condiciones abstractas"; 2) expresar el hecho de que R y E_0 son equivalentes mediante "propiedades abstractas" de R y de E_0; éste es justamente el paso que permite, por ejemplo, convertir al teorema de Morita en el de Wedderburn, como antes señalábamos.

Nuestro plan, pues, es determinar clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$, como se ha indicado antes, de manera que las condiciones (1) y (2) de arriba se verifiquen para dichas clases. Adicionalmente, nótese que si E y E_0 tienen el sentido ya señalado, E es la clausura de su ideal E_0 con respecto a la teoría de torsión asociada al filtro de Gabriel $\mathcal{F}$ de los ideales por la izquierda que contienen a E_0. De este modo, la forma general de un teorema de caracterización obtenido por estos medios es: $E \approx End({}_R M)$ para algún $M \in \mathfrak{M}$ si y sólo si E contiene un ideal bilátero E_0 tal que: (a) E_0 está definido por ciertas "propiedades abstractas", que pueden variar según las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$ consideradas; (b) E_0 es un anillo equivalente a un anillo $R \in \mathfrak{R}$ -lo que también deberá darse por alguna propiedad de teoría de anillos-; (c) E es la clausura de E_0 con respecto a la teoría de torsión asociada a $\mathcal{F}$; (d) E_0 (que es $fEnd({}_R M)$) verifica alguna propiedad adicional que asegura que ${}_R M$ está en la clase $\mathfrak{M}$.

Hagamos la observación de que los resultados de caracterización sobre los que nos hemos detenido hasta ahora encajan perfectamente en este marco: 1.- Si $\mathfrak{M}$ es la clase de los progeneradores, entonces E_0 se identifica con E y la única condición que aparece en el teorema de caracterización es la (b); 2.- Si $\mathfrak{M}$ es la clase de los espacios vectoriales de dimensión finita sobre anillos de división, E_0 es el zócalo -por la derecha- de E y las condiciones (b) y (c) aparecerán como condiciones en términos del zócalo, como en el mencionado teorema de Wolfson; 3.- Si $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$ son las clases que aparecen en el teorema de Liebert, E_0 es el ideal por la izquierda de E generado por los idempotentes primitivos; entonces (b) corresponde a la condición (4) del teorema, mientras (c) equivale precisamente a la

(2): existe una relación directa en este caso entre la $\mathcal{L}$-topología de E y el filtro de Gabriel $\mathcal{F}$; véase a este respecto el Teorema 3.6.1.

Nuestro método permite englobar, por tanto, en un cuadro unitario los resultados conocidos ya mencionados; pero además, también proporciona teoremas de caracterización para clases $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ más amplias, como se verá en el Capítulo 3 de la memoria. Volveremos sobre los contenidos de este capítulo más adelante.

El problema de la unicidad

Sea $E = \mathrm{End}({}_RM)$ para ${}_RM$ en la clase $\mathfrak{M}$ de módulos. La versión más antigua del problema de la unicidad formula la siguiente pregunta: ¿es cierto que todo isomorfismo de anillos $\mathrm{End}({}_SN) \approx \mathrm{End}({}_RM)$, para $S \in \mathfrak{K}$ y $N \in \mathfrak{M}$, debe estar inducido por un isomorfismo de anillos $\sigma:R \longrightarrow S$ y un isomorfismo σ-semilineal $\varphi:M \longrightarrow N$? Existe una abundante literatura recogiendo clases $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$ para las que la respuesta a esta cuestión es afirmativa. Quizá el más antiguo resultado en esta dirección es el de Baer [8, Theorem 1, p.183]. En 1953, Wolfson [88, Theorem 8.1] daba también respuesta afirmativa para la clase de los espacios vectoriales sobre anillos de división y más tarde, también para la clase de módulos localmente libres sobre dominios de ideales por la izquierda principales [93]. Un resultado general, englobando estos, es el obtenido por Franzsen y Schultz [16] en 1983: llamando LIF a un anillo R tal que todo sumando directo de un módulo localmente libre es indescomponible si y sólo si es isomorfo a ${}_RR$, obtiene la unicidad para la clase $\mathfrak{M}$ de los módulos localmente libres sobre los anillos LIF.

Si el enfoque anterior, que pregunta por la validez de la unicidad en el sentido "fuerte" indicado, es el más clásico, hay sin embargo otro planteamiento del problema, que resulta muy natural a la vista de los teoremas de Morita; éste es el formulado mediante la pregunta: ¿es cierto que todo isomorfismo de anillos $End({}_RM) \approx End({}_SN)$ para $R, S \in \mathfrak{K}$ y ${}_RM$, ${}_SN \in \mathfrak{M}$ está inducido por una equivalencia de categorías F:R-mód $\longrightarrow$ S-mód y por un isomorfismo $F({}_RM) \cong {}_SN$? En 1967, Stephenson conjeturó un resultado demostrado por Camillo en 1984 [13], a saber: que dos anillos R y S son Morita equivalentes si y sólo si $End({}_RR^{(\mathbb{N})}) \approx End({}_SS^{(\mathbb{N})})$; en el mismo año 1984, Bolla [11] hace la observación de que la respuesta a la pregunta anterior es afirmativa para la clase $\mathfrak{M}$ de los progeneradores, la cual por tanto tiene unicidad en este sentido "débil".

Volviendo al caso de la unicidad en el sentido "fuerte", escogemos el teorema antes mencionado de Franzsen y Schultz sobre anillos LIF para ilustrar los hechos que permiten obtener un resultado de unicidad. Así, sean R y S anillos LIF, ${}_RM$, ${}_SN$ localmente libres y $E = End({}_RM) \approx End({}_SN) = E'$. Sea $\delta:E \longrightarrow E'$ el isomorfismo y sea $\delta(e) = f$ para $e \in E$, la proyección de ${}_RM$ sobre un sumando directo suyo isomorfo a ${}_RR$. El hecho clave, obtenido aquí a través de la hipótesis de ser S un anillo LIF, es que $Nf \cong {}_SS$; como se tiene $Me \cong {}_RR$, resultará que $eEe \approx R$, $fE'f \approx S$ y δ se restringe a un isomorfismo $R \approx eEe \approx fE'f \approx S$. Entonces, R y S son, efectivamente, isomorfos. Así, el hecho fundamental aquí es que el isomorfismo δ "conserva" los idempotentes "de rango uno"; esto es, los idempotentes $e \in E$ tales que $Me \cong {}_RR$. Es importante notar que, también en situaciones más generales que la anterior, la obtención de un resultado positivo de unicidad está asociado, como veremos, a la "conservación" de ciertos elementos por medio del isomorfismo δ. Por ejemplo, en el resultado de Camillo [13] antes citado, ${}_RM$ y ${}_SN$ son módulos libres numerablemente generados y si δ es aquí el isomorfismo $\delta:End({}_RM) = E \longrightarrow E' = End({}_SN)$, la propiedad de conservación clave aquí es que si e es un idempotente con $Me \cong {}_RR$, entonces $\delta(e)$ es de tipo finito -es decir, $N\delta(e)$ es de tipo finito, y, de hecho, un progenerador. En este caso, la conclusión es la existencia, no de un isomorfismo semilineal, sino de una equivalencia de Morita entre los anillos R y S.

El fundamento de nuestra propia manera de aproximarnos al problema de la unicidad es la consideración de "propiedades de conservación" de un carácter más global. Recordemos que, como se indicó anteriormente, si $\mathfrak{M}$ es la clase de los generadores, $R \in \mathfrak{R}$, ${}_RM \in \mathfrak{M}$ y $E = \mathrm{End}({}_RM)$, $E_0 = f\mathrm{End}({}_RM)$ denota el "anillo sin uno" de los endomorfismos finitos de ${}_RM$, entonces E_0 y R son anillos equivalentes. Supongamos ahora que las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$ son tales que es factible obtener para ellas un teorema de caracterización en el sentido que más arriba hemos considerado, por los métodos de este trabajo: en particular, el tener un teorema de caracterización implicará el tener una descripción de E_0 como "subanillo" de E mediante propiedades "abstractas" de teoría de anillos. Si éste es el caso y $\delta:\mathrm{End}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SN)$ es un isomorfismo de anillos para $R, S \in \mathfrak{R}$, M, $N \in \mathfrak{M}$, entonces las propiedades de la descripción de E_0, al ser "abstractas" serán invariantes por isomorfismos, de modo que $\delta(E_0) = f\mathrm{End}({}_SN) = E'_0$. Como E_0-mód es equivalente a R-mód y E'_0-mód es equivalente a S-mód, esta relación implicará la equivalencia entre los anillos R y S. A partir de aquí se puede obtener un resultado de unicidad en sentido "débil" para las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$.

Esta aproximación al problema de obtener teoremas de unicidad en sentido "débil" (de que los isomorfismos entre anillos de endomorfismos estén inducidos por equivalencias de Morita) nos es también útil para abordar el caso más antiguo en el que se persigue obtener teoremas de unicidad en el sentido "fuerte" (es decir, que los isomorfismos entre anillos de endomorfismos estén inducidos por isomorfismos semilineales). En efecto, habrá unicidad para las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$ en sentido "fuerte" si la hay también en sentido "débil" y además una equivalencia de Morita entre anillos de la clase $\mathfrak{R}$ está inducida siempre por un isomorfismo. Éste será, por ejemplo, el caso antes mencionado en que $\mathfrak{R}$ es la clase de los anillos LIF: si F es una equivalencia entre R y S, $F(R)$ ha de ser un progenerador indescomponible, luego $F(R) \cong {}_SS$.

Desde luego, no para todas las clases $\mathfrak{R}$ y $\mathfrak{M}$ se puede obtener un teorema de unicidad: el esquema que acabamos de indicar muestra solamente que tal será el caso siempre que tengamos un teorema de caracterización para dichas clases. En su ausencia, la relación entre los anillos R y S a que da lugar un isomorfismo de anillos $\delta:\mathrm{End}({}_R M) \longrightarrow \mathrm{End}({}_S N)$ es, en principio, más general que la de una equivalencia de Morita. Sin embargo, si $\mathfrak{M}$ es una clase contenida en la de los generadores, podemos entonces tomar ${}_R M' = M \otimes_E \mathrm{Hom}_S(N,S)$, ${}_S N' = N \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,R)$ y el isomorfismo $\delta:\mathrm{End}({}_R M) = E \longrightarrow E' = \mathrm{End}({}_S N)$ da lugar a un "contexto de Morita normalizado" (en el sentido de [69]) (R,S,M',N'); como todo contexto de Morita, éste induce una equivalencia, proporcionada por los funtores $F = \mathrm{Hom}_R(M',\_)$ y $G = \mathrm{Hom}_S(N',\_)$, entre las adecuadas subcategorías plenas de R-mód y S-mód, determinadas por el contexto. Además, $F(M) \cong {}_S N$ y δ está inducido por **F**, de modo que, en este sentido, todo isomorfismo entre anillos de endomorfismos de generadores está inducido por una equivalencia de subcategorías. Dicho de una manera poco rigurosa pero sugerente, estas subcategorías equivalentes no son más que la "intersección de las categorías R-mód y S-mód cuando vemos ambas como subcategorías plenas de E-mód". Ésta es la herramienta que se ha usado fundamentalmente para los resultados del Capítulo 4.

La presente memoria está dividida en cuatro capítulos. El primero contiene una recopilación de aquellas notaciones y resultados ya conocidos que serán necesarios para desarrollar los contenidos centrales de nuestro trabajo. El segundo se dedica a estudiar la equivalencia de Morita para anillos sin uno; el tercero trata el problema de la caracterización y el cuarto, el de la unicidad.

Como ha quedado apuntado en los comentarios que preceden, nuestra aproximación a los problemas centrales planteados en esta memoria necesita de un estudio detallado acerca de las equivalencias entre categorías de módulos, incluyendo el caso de las categorías de módulos sobre anillos sin uno. Así, al recoger en el Capítulo 1 los resultados y notaciones preliminares a la exposición de nuestros propios desarrollos, hemos prestado atención a las categorías de

Grothendieck -pues todas las categorías que aparecerán más adelante serán de esta clase-, y considerado algunas notaciones y conceptos especiales en categorías de módulos. También las propiedades de los contextos de Morita y las nociones de las topologías lineales sobre anillos ocupan parte del Capítulo 1.

El Capítulo 2 está dedicado enteramente al estudio de las equivalencias de Morita para anillos sin uno. Como es natural, el modelo que uno trata de seguir en este estudio es el de la teoría de Morita clásica -para anillos con identidad-; el hecho es que, pese a las diferencias entre uno y otro caso, que dan lugar a formulaciones bastante distintas de los resultados, lo esencial de la teoría de Morita se preserva al considerar anillos I que son solamente idempotentes -es decir, $I^2 = I$-, siempre que uno escoja la generalización adecuada de la categoría de módulos. Dicha generalización es la categoría (que denotamos por I-mód) de todos los I-módulos ${}_IM$ por la izquierda que son unitarios (es decir, IM = M) y libres de torsión (en el sentido de que Ix = 0 implica x = 0 para x ∈ M). De este modo, puede demostrarse que la relación de ser I y J Morita equivalentes es independiente del lado derecha-izquierda que se tome para la categoría de módulos; y que las equivalencias entre I y J provienen, como en el caso clásico, de contextos de Morita para I y J en que los morfismos de la definición del contexto son epimorfismos. Una consecuencia interesante es que, si se impone a los anillos I y J una limitación muy natural -que ellos mismos sean libres de torsión en el sentido anterior-, la equivalencia implica el isomorfismo en el caso conmutativo.

Los problemas de la caracterización y de la unicidad para anillos de endomorfismos, que constituyen el objetivo más importante de la memoria, se plantearán, en los Capítulos 3 y 4, para tres pares de clases $(\mathfrak{K},\mathfrak{M})$ generales; en los tres casos $\mathfrak{K}$ es una clase arbitraria de anillos, mientras que $\mathfrak{M}$ consiste en: (1) la clase de los generadores no finitamente generados; (2) la clase de los módulos localmente libres no finitamente generados; (3) la clase de los módulos proyectivos con un elemento unimodular no finitamente generados -hacemos notar aquí que el estudio de la clase de los generadores proyectivos no finitamente generados daría resultados equivalentes, dado que cualquier generador proyectivo no finitamente generado P da un proyectivo con elemento unimodular al tomar una suma directa finita P^n; pero hemos preferido simplificar la presentación usando la hipótesis del elemento unimodular; y también hacemos notar que en adelante nos referiremos a estos objetos sin mencionar su condición de no finitamente generados, dándolo por asumido. Para cada una de estas tres clases generales es posible dar "teoremas de caracterización generales". Pero es limitando la clase de anillos $\mathfrak{R}$ como se consiguen teoremas que caracterizan por propiedades abstractas a los anillos de endomorfismos de los módulos de alguna de esas clases $\mathfrak{M}$: en ese sentido, damos teoremas de caracterización, por ejemplo, para la clase de los módulos localmente libres sobre anillos: (1) noetherianos por la izquierda; (2) perfectos por la izquierda; (3) de Kasch por la izquierda; así como para algunas clases de anillos semihereditarios por la izquierda o semiperfectos; véanse las Proposiciones 3.5.1, 3.5.2, 3.5.4 y 3.5.8.

Estos teoremas de caracterización se incluyen en el Capítulo 3, que comienza con la necesaria descripción de los "teoremas de caracterización generales" antes aludidos. Procedemos aquí, aproximadamente, en orden de mayor a menor generalidad: primero se considera la situación del teorema de Gabriel-Popescu, en la que, dado un generador G de una categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$, se muestra una equivalencia entre $\mathfrak{C}$ y una categoría cociente $(E,\mathcal{F})$-mód de los módulos sobre E, donde $E = \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(G)$. Procuramos entonces identificar al filtro $\mathcal{F}$, imponiendo alguna restricción a la categoría $\mathfrak{C}$, hasta llegar al caso en que $\mathfrak{C}$ es una categoría de módulos. Esto permite obtener el "teorema general" de caracterización para la clase $\mathfrak{M}$ de los generadores; en el caso de los módulos localmente libres y de los proyectivos con elemento unimodular, la descripción del filtro -y, en consecuencia, del teorema correspondiente- puede enunciarse en términos de elementos idempotentes del anillo de endomorfismos E, lo que nos aproxima a los casos considerados clásicamente. En relación con estos "casos clásicos" mostramos al terminar el capítulo la relación existente entre las topologías lineales (manejadas por Liebert y otros autores, y citadas anteriormente) y los filtros de Gabriel que usamos en la presente memoria.

El Capítulo 4 se dedica al problema de la unicidad. De nuevo, procedemos aquí de lo general a lo particular. Comenzamos por considerar un (iso)morfismo entre los anillos de endomorfismos de dos objetos cualesquiera en dos categorías de Grothendieck y construimos, en tal caso, un funtor entre las categorías que induce el morfismo considerado. En el caso de un isomorfismo, vemos que dicho funtor induce, a su vez, una equivalencia entre ciertas subcategorías de las categorías dadas; en este sentido, todo isomorfismo está inducido por una equivalencia -de subcategorías.

Consideramos a continuación el caso en que $\mathfrak{M}$ es la clase de los generadores sobre los anillos de una clase arbitraria $\mathfrak{K}$. En este caso, el isomorfismo está inducido por una equivalencia maximal entre subcategorías de las de módulos; con otra terminología, las equivalencias que se obtienen son, precisamente, las asociadas a contextos de Morita normalizados (en el sentido de [69]) entre los anillos base. El carácter maximal de estas equivalencias tiene una consecuencia notable: si un isomorfismo entre anillos de endomorfismos de generadores está inducido de este modo por una equivalencia entre subcategorías propias de las de módulos, entonces no puede estar inducido por una equivalencia de Morita -y naturalmente, tampoco por un isomorfismo semilineal. Como tal situación es efectivamente posible, resulta natural preguntarse por condiciones sobre la clase de anillos $\mathfrak{K}$ que aseguren, en cambio, que todo isomorfismo entre anillos de endomorfismos de generadores sobre anillos de la clase $\mathfrak{K}$ está inducido por una equivalencia de Morita. Encontramos condiciones de este tipo en la Proposición 4.2.9.

Pasamos luego a considerar el caso en que $\mathfrak{M}$ es la clase de los módulos localmente libres. Recuérdese que para la clase de los módulos libres numerablemente generados existe unicidad (en el sentido de equivalencias de Morita) por el resultado de Camillo [13]. Ello hace interesante el dar ejemplos de isomorfismos entre anillos de endomorfismos de módulos localmente libres no finitamente generados, como consideraremos siempre, que no estén inducidos por equivalencia de categorías. No sólo es posible construir dichos ejemplos (véase la Observación 4.3.1), sino que si uno toma $\mathfrak{M}$ como la clase de los módulos localmente libres y proyectivos con un conjunto numerable de generadores -la clase más próxima a la de los libres no finitamente generados en que parece posible pensar-, la respuesta al problema de la unicidad sigue siendo negativa: Ejemplo 4.4.4. Más aún, es posible tomar módulos en dicha clase con anillos de endomorfismos isomorfos, tales que los respectivos anillos base sean isomorfos; incluso así, el isomorfismo entre los anillos de endomorfismos puede no estar inducido por una equivalencia de Morita.

Tanto en el caso de los módulos localmente libres como en el de los proyectivos, investigamos también qué restricciones en la elección de la clase $\mathfrak{R}$ de anillos son adecuadas para obtener en cada caso un teorema de unicidad. Terminamos la memoria revisando, a la luz de estos resultados, qué clases $\mathfrak{R}$ de anillos y $\mathfrak{M}$ de módulos proyectivos con elemento unimodular permiten obtener un teorema de unicidad en sentido "fuerte", es decir, que los isomorfismos de anillos de endomorfismos provienen de isomorfismos semilineales entre los módulos.

Se ha incluido al final una Bibliografía. Lejos de la pretensión de ser exhaustiva, hemos recogido en ella los títulos que han influido en la elaboración de esta memoria, bien por abordar problemas relacionados directamente con los aquí tratados, bien por suministrar técnicas básicas para la obtención de nuestros propios resultados.

Mi estancia en la Universidad de Murcia fue posible, durante el primer año y parte del segundo, gracias a los profesores José Luis Gómez Pardo y Francisco Balibrea Gallego. Parte del segundo año y el tercero recibí una ayuda complementaria por parte de la SEP-México.

Finalmente, deseo agradecer la orientación y ayuda en la realización de la presente memoria, al profesor José Luis García Hernández, así como a todos los profesores del Area de Algebra del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

CAPITULO 1

PRELIMINARES

1.1. Categorías de Grothendieck y localización

Se conocen como categorías de Grothendieck a aquellas categorías abelianas que son cocompletas, con límites directos exactos y que poseen un generador. A aquellas categorías de Grothendieck que poseen un conjunto generador formado por objetos finitamente generados se les llama localmente finitamente generadas [83, Capítulos IV y V].

Una teoría de torsión en una categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$ es una pareja $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ de subclases de objetos de $\mathfrak{C}$ (denotamos a la clase de los objetos de $\mathfrak{C}$ con $Ob(\mathfrak{C})$; sin embargo si $M \in Ob(\mathfrak{C})$ simplemente escribiremos $M \in \mathfrak{C}$, por sencillez) tales que:

(i) $Hom_{\mathfrak{C}}(T,L) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$ y $L \in \mathcal{L}$.

(ii) Si $Hom_{\mathfrak{C}}(C,L) = 0$ para todo $L \in \mathcal{L}$ entonces $C \in \mathcal{T}$.

(iii) Si $Hom_{\mathfrak{C}}(T,C) = 0$ para todo $T \in \mathcal{T}$ entonces $C \in \mathcal{L}$.

A $\mathcal{T}$ se le conoce como clase de torsión y a sus objetos se les llama objetos de torsión, mientras que a $\mathcal{L}$ se le conoce como clase libre de torsión y a sus objetos se les llama objetos libres de torsión. La clase $\mathcal{T}$ es cerrada bajo cocientes, sumas directas (o coproductos) y extensiones, mientras que $\mathcal{L}$ es cerrada bajo subobjetos, productos (directos) y extensiones. Cuando, además, $\mathcal{T}$ sea cerrada bajo subobjetos diremos que $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ es una teoría de torsión hereditaria; esto es equivalente a que $\mathcal{L}$ sea cerrada bajo envolturas inyectivas (para todas estas definiciones, véase [83, Capítulo VI]).

Toda teoría de torsión (no necesariamente hereditaria) en $\mathfrak{C}$ tiene asociado un radical de $\mathfrak{C}$; es decir, un subfuntor del funtor identidad, que denotamos con $\mathbf{t}$, tal que es idempotente y $\mathbf{t}(C/\mathbf{t}(C)) = 0$

para todo $C \in \mathfrak{C}$.

Sea $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ una teoría de torsión en la categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$. Se conoce como objeto $\mathcal{T}$-inyectivo a aquel $X \in \mathfrak{C}$ que verifica que para toda sucesión exacta corta en la categoría $\mathfrak{C}$, $0 \longrightarrow K \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$, tal que $N \in \mathcal{T}$, el homomorfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(u,X):\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,X) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(K,X)$ es epimorfismo; y como objeto $\mathcal{T}$-codivisible a aquel $X \in \mathfrak{C}$ tal que para toda sucesión exacta $0 \longrightarrow K \xrightarrow{u} M \xrightarrow{p} N \longrightarrow 0$ en $\mathfrak{C}$, con $K \in \mathcal{L}$, el homomorfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,p):\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,N)$ es epimorfismo.

Se llama una localización de $X \in \mathfrak{C}$ (respecto de una teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{L})$) a un morfismo $f:X \longrightarrow E$ donde $E \in \mathfrak{C}$ es $\mathcal{T}$-inyectivo y libre de torsión y donde el núcleo y el conúcleo de f (Núc f y Conúc f) son objetos de $\mathcal{T}$-torsión, mientras que una colocalización será un morfismo $f:P \longrightarrow X$ donde P es un objeto $\mathcal{T}$-codivisible y de torsión y Núc f y Conúc f son objetos $\mathcal{T}$-libres de torsión.

Cuando una subcategoría plena de la categoría $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ sea cerrada bajo subobjetos, imágenes, extensiones y sumas directas, la llamaremos subcategoría localizante [21]. Para una teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T},\mathcal{L})$, $\mathcal{T}$ determina una subcategoría localizante y en consecuencia existe una categoría cociente asociada, $\mathfrak{C}/\mathcal{T}$, la cual, a su vez, es una categoría de Grothendieck, junto con un funtor, canónico $a:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}/\mathcal{T}$ exacto y que tiene adjunto por la derecha $i:\mathfrak{C}/\mathcal{T} \longrightarrow \mathfrak{C}$. i es fiel y pleno, así que $\mathfrak{C}/\mathcal{T}$ se puede identificar con una subcategoría plena de $\mathfrak{C}$ constituida por todos los objetos de $\mathfrak{C}$ que son $\mathcal{T}$-inyectivos y libres de torsión (a éstos los llamaremos $\mathcal{T}$-cerrados). Bajo dicha identificación **i** es el funtor inclusión, mientras que **a** lleva cada objeto $X \in \mathfrak{C}$ a un E tal que $f:X \longrightarrow E$ es una localización [83 y 21].

A una clase de objetos $\mathcal{T}$ de $\mathfrak{C}$ se le llama clase TTF si es a un tiempo una clase de torsión y una clase libre de torsión -para dos teorías de torsión de $\mathfrak{C}$. Para una teoría de torsión hereditaria $(\mathcal{T},\mathcal{L})$, $\mathcal{T}$ es TTF si y sólo si es cerrada bajo productos directos [83, Proposition VI.8.1]. En este caso, se tiene una correspondiente teoría de torsión $(\mathcal{D},\mathcal{T})$ (una gran parte de la literatura sobre el tema considera la terna $(\mathcal{D},\mathcal{T},\mathcal{L})$ donde $(\mathcal{D},\mathcal{T})$ y $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ son teorías de torsión no necesariamente hereditarias y le llama "teoría de torsión TTF"; véase por ejemplo [29, 43, 74, 75, 84]). La teoría de torsión (no necesariamente hereditaria, pero cohereditaria; es decir tal que la clase libre de torsión es cerrada bajo objetos cociente) $(\mathcal{D},\mathcal{T})$ tiene entonces asociado un radical d, el cual conserva epimorfismos [74, Lemma 1.8]. En este caso [29, Theorem 1.9] $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ y $\mathfrak{C}/\mathcal{T}$ son categorías equivalentes a través de las correspondencias $X \longmapsto a(X)$ y $Z \longmapsto d(Z)$.

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría de Grothendieck, y denotemos, como usualmente se hace, para cada $M \in \mathfrak{C}$, con M^I y $M^{(I)}$ al producto directo y a la suma directa de I copias de M, donde I es un conjunto arbitrario. Se conoce como objeto cuasiproyectivo [82] a aquel $X \in \mathfrak{C}$ que verifica que para todo $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ y todo epimorfismo $p:X^n \longrightarrow Y$ de $\mathfrak{C}$, el morfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,p):\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,X^n) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y)$ es epimorfismo; y se conoce como $\sum$-cuasiproyectivo a aquel X tal que para todo conjunto I y todo epimorfismo $p:X^{(I)} \longrightarrow Y$ en $\mathfrak{C}$, el morfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,p)$ es epimorfismo. Se conoce como objeto CQF-3 [75, p.171] a aquel X que verifica que para todo epimorfismo $p:Y \longrightarrow Z$ de $\mathfrak{C}$, el morfismo inducido $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,p):\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Y) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Z)$ es cero si y sólo si $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(X,Z) = 0$.

Sea M un objeto de una categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$. Se conoce como objeto M-generado a todo objeto X de $\mathfrak{C}$ que es imagen bajo un epimorfismo de una suma directa $M^{(I)}$ de copias de M; y X se dice un objeto finitamente M-generado cuando I es un conjunto finito. Para cada $X \in \mathrm{Ob}(\mathfrak{C})$, existe un mayor subobjeto con la propiedad de ser M-generado, (el cual es la suma de todos aquellos subobjetos de X que son M-generados) que denotaremos con X_M. Se conoce con el nombre de M-distinguido [26] a todo objeto X, de $\mathfrak{C}$, tal que para cualquier morfismo no cero $f:Y \longrightarrow X$ existe un morfismo $g:M \longrightarrow Y$ tal que

$f \circ g \neq 0$. La Proposición 1.2 de [26] nos dice que para una categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$, y un objeto M, de $\mathfrak{C}$, la clase $\mathcal{L}$ de los objetos M-distinguidos es una clase libre de torsión en $\mathfrak{C}$. La clase de torsión correspondiente es la menor clase de torsión $\mathcal{T}$ (hereditaria) de $\mathfrak{C}$ que contiene a todos los objetos de la forma X/X_M con X objeto de $\mathfrak{C}$. Además, si $\mathfrak{C}$ posee un generador U, entonces $\mathcal{T}$ es la menor clase de torsión que contiene a U/U_M. Tenemos entonces una teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ que llamamos la teoría de torsión asociada a M, cuyo radical asociado llamaremos t. Denotamos con $\hat{X} = X/t(X)$. Siguiendo a [26] denotaremos con $\mathfrak{C}_M$ a la categoría cociente $\mathfrak{C}/\mathcal{T}$. Tenemos entonces el funtor canónico $\mathbf{a}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C}_M$, mencionado anteriormente, junto con su adjunto por la derecha **i** el cual, como dijimos, se puede identificar con el funtor inclusión. El Lema 1.3 de [26] nos dice que **a**(M) es un generador de la nueva categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}_M$.

Finalmente, respecto de los morfismos entre objetos vamos a convenir, en vista de que trabajaremos con módulos por la izquierda, y de que vamos a escribir usualmente a los morfismos actuando por el lado opuesto al de los escalares, en que $\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M) = [\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,M)]^{op}$. Nótese que $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,X)$ es un $\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$-módulo por la izquierda para cada $X \in \mathfrak{C}$; y $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,M)$ es isomorfo a $\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$.

1.2. La categoría de módulos

A lo largo de este trabajo, entenderemos por anillo con uno (o simplemente anillo si no causa confusión), digamos R, a un anillo asociativo que posee elemento identidad. La categoría de los R-módulos por la izquierda será denotada con R-mód. Algunas veces escribiremos ${}_RM$ para el objeto $M \in$ R-mód. Reservamos $R \approx S$ para los isomorfismos de anillos (con o sin uno). Sea $\sigma:R \longrightarrow S$ un isomorfismo de anillos, $M \in$ R-mód y $N \in$ S-mód. Se conoce como isomorfismo σ-semilineal entre M y N, a un isomorfismo de grupos abelianos $f:M \longrightarrow N$ tal que verifica que para todo $x \in R$, y $m \in M$, $f(xm) = \sigma(x)f(m)$ (en notación multiplicativa $(xm)f = (x\sigma)(mf)$).

Sea R un anillo con uno, $M \in$ mód-R o $M \in$ R-mód y X un subconjunto de M. Denotamos (cuando corresponda) con $r_R(X)$ al anulador por la derecha de X; es decir, al conjunto $\{ r \in R \mid X \cdot r = 0 \}$; y con $\ell_R(X)$ al anulador por la izquierda de X (cuando tenga sentido). El símbolo $\sum_l$ lo usaremos siempre para denotar sumas finitas de elementos. Se conoce como R-módulo subgenerado por M (o M-subgenerado) a todo R-módulo N que es submódulo de algún R-módulo K, generado por M; es decir, existe un conjunto I junto con un epimorfismo $M^{(I)} \longrightarrow K$ y un monomorfismo $N \longrightarrow K$. Para cada par de R-módulos ${}_RM$ y ${}_RN$, definimos la traza de M en N y la denotamos

$$Tr_N({}_RM) = \{ \sum Im\ f \mid f \in Hom_R(M,N) \}$$

(cuando se trate de categorías donde los objetos no sean módulos identificaremos la traza con el objeto N_M, definido en la página 22; definimos el rechazo de M en N como

$$Rech_N({}_RM) = \bigcap \{ Núc\ f \mid f \in Hom_R(M,N) \}.$$

En [98, Lemma 1.3(a)] se establece que para $M,N \in$ R-mód, el morfismo $M \otimes_{End({}_RM)} Hom_R(M,N) \longrightarrow Tr_N({}_RM)$ es isomorfismo si M genera a todos los núcleos de los homomorfismos de M^n en N, para todo $n \in \mathbb{N}-\{0\}$. Se conoce como un autogenerador, a un R-módulo M que es generador de todos sus submódulos; es decir, tal que $Tr_K({}_RM) = K$ para todo R-submódulo K, de M; y como $\sum$-autogenerador a aquel M que verifica $Tr_N({}_RM) = N$ para todo R-submódulo N de M^n, para todo $n \in \mathbb{N}-\{0\}$. A los módulos $M \in$ R-mód que verifican $Rech_R(M) = 0$ se les llama módulos sin torsión y a los que verifican que $Tr_R(M) \cdot M = M$ se les conoce como módulos traza-accesibles. Para cada $M \in$ R-mód, definimos el zócalo de M, Zóc(M), como la suma de las trazas de cada uno de los R-módulos por la izquierda simples.

1.3. Topologías lineales y localización

Se conoce con el nombre de grupo topológico a un grupo G junto con una topología τ de tal manera que $+:G \times G \longrightarrow G$ dada por $(a,b) \longmapsto a+b$, considerando a $G \times G$ con la topología producto; y $-:G \longrightarrow G$ tal que $a \longmapsto -a$ son funciones continuas. Obsérvese que:

(i) Si $a \in G$ está fijo entonces la correspondencia $x \longmapsto a+x$ es un homeomorfismo; por lo tanto

(ii) U es vecindad de a si y sólo si U-a es vecindad del cero; y

(iii) la topología τ para G está completamente determinada por el conjunto $\mathcal{F}$ de vecindades del cero, que verifica:

(a) Si $U \in \mathcal{F}$ y $U \subseteq V$ entonces $V \in \mathcal{F}$.

(b) Si $U, V \in \mathcal{F}$ entonces $U \cap V \in \mathcal{F}$ (es decir, $\mathcal{F}$ es un filtro).

(c) Para todo $U \in \mathcal{F}$, existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V + V \subset U$.

(d) $U \in \mathcal{F}$ implica $-U \in \mathcal{F}$ [83].

Recíprocamente, si G es un grupo abeliano y $\mathcal{F}$ un filtro de subconjuntos tales que todos poseen al cero y que verifican (a), (b), (c) y (d) entonces existe una única topología de tal manera que G es un grupo topológico y $\mathcal{F}$ es el sistema de vecindades del cero. Véase [79] para esta definición en grupos no necesariamente abelianos. Nosotros hemos tomado la definición de [83].

Sea R un anillo con uno. A R se le llama anillo topológico cuando (R,+) es grupo topológico y la correspondencia $(a,b) \longmapsto ab$ es una función continua del espacio producto $R \times R$ en R. El filtro $\mathcal{F}$ verificará, además de (a), (b), (c) y (d),

(c') Para todo $x \in R$ y $U \in \mathcal{F}$ existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $xV \subset U$ y $Vx \subset U$.

(d') Para todo $U \in \mathcal{F}$ existe $V \in \mathcal{F}$ tal que $V \cdot V \subset U$.

Recíprocamente, si $\mathcal{F}$ es un filtro de subconjuntos de R que contienen a 0 y $\mathcal{F}$ verifica las condiciones (c), (d), (c') y (d'), entonces existe una única topología que hace de R un anillo topológico con $\mathcal{F}$ como el conjunto de vecindades del cero.

Por otro lado, se dice que la topología τ de un anillo topológico R es lineal por la izquierda si el filtro de vecindades del cero admite una base constituida por ideales por la izquierda. De hecho, si $\mathcal{F}$ es un filtro de ideales por la izquierda de R tal que verifica

(c'') Si $I \in \mathcal{F}$, $x \in R$, $x+I \in R/I$, entonces $\ell_R(x+I) \in \mathcal{F}$, entonces $\mathcal{F}$ es base del conjunto de vecindades del cero para una topología (lineal) por la izquierda sobre el anillo R.

En este caso, el filtro $\mathcal{F}$ se dice un filtro (también, por extensión, una topología) de Gabriel por la izquierda si verifica, además,

(d'') Si I es ideal por la izquierda de R y existe $J \in \mathcal{F}$ tal que para todo $b \in J$, con $b+I \in R/I$, se tiene $\ell_R(b+I) \in \mathcal{F}$, entonces $I \in \mathcal{F}$ [83].

Sea R un anillo. Existe una correspondencia biyectiva entre [83, Theorem VI.5.1]:

(1) Las topologías de Gabriel por la izquierda de R.

(2) Las teorías de torsión hereditarias en R-mód.

(3) Los radicales exactos por la izquierda en R-mód.

En vista de (2), toda topología de Gabriel determina una localización como ha sido descrito en la sección anterior. En este caso, la categoría cociente se denota $(R,\mathcal{F})$-mód, donde $\mathcal{F}$ es la topología de Gabriel por la izquierda de R que determina la teoría de torsión. Cuando $\mathcal{F}$ posee un ideal minimal (el cual deberá de ser idempotente) I entonces a $\mathcal{F}$ la llamaremos la topología de Gabriel a la izquierda generada por I y ésta corresponde con una teoría de torsión TTF. Escribiremos entonces (R,I)-mód en lugar de $(R,\mathcal{F})$-mód y a sus objetos los llamaremos I-cerrados, en lugar de $\mathcal{F}$-cerrados.

La noción de grupo topológico se inscribe en un contexto más amplio de la topología general que recibe el nombre de espacios uniformes; tema que aborda el problema de considerar propiedades de los espacios métricos, las cuales no son topológicas y sin embargo están estrechamente relacionadas con propiedades topológicas [48]. Uno de los ejemplos clásicos son las sucesiones de Cauchy, las cuales no son invariantes topológicos e involucran una noción de cercanía al cero. Un grupo topológico se puede entonces definir a partir de una uniformidad; sin embargo, esto excede los alcances de este trabajo por lo cual nos limitamos sólo a mencionarlo. En cuanto a las redes de Cauchy, éstas las abordamos a continuación.

Sea $(D,\leq)$ un conjunto dirigido y $E \subseteq D$, con el preorden inducido. $(E,\leq)$ se llama subconjunto residual de $(D,\leq)$ si existe $d_0 \in D$ tal que si $d \geq d_0$ entonces $d \in E$, y se llama subconjunto cofinal de $(D,\leq)$ si para todo $d \in D$, existe $e \in E$ tal que $d \leq e$. Obsérvese que la intersección finita de residuales es residual y que todo residual es cofinal, pero no recíprocamente; por ejemplo, $(D,\leq) = (\mathbb{N},\leq)$ y $(E = \mathbb{N}\cdot 7)$. $(E,\leq)$ es cofinal pero no residual. Para X un conjunto no vacío se define una red en X como una función $\varphi:(D,\leq) \longrightarrow X$ donde $(D,\leq)$ es un conjunto dirigido. Si $Y \subseteq X$ y $\varphi(D) \subseteq Y$, se dice que la red φ está en Y. Si E es un subconjunto residual (respectivamente cofinal) de D y $\varphi(E) \subseteq Y$ se dice que φ está residualmente (respectivamente cofinalmente) en Y. Si se tiene (X,τ) un espacio topológico arbitrario y $\varphi:(D,\leq) \longrightarrow (X,\tau)$ es una red, decimos que φ converge a $x \in X$ (o que x es límite de φ) si para toda vecindad U, de x, se tiene que φ está residualmente en U; y decimos que $x \in X$ es punto de acumulación de φ si para toda vecindad U, de x, φ está cofinalmente en U.

Sea R un anillo y supóngase que se tiene un filtro $\mathcal{F}$ que determina una topología lineal por la izquierda (o análogamente por la derecha) para R. Indicamos los ideales del filtro $\mathcal{F}$ con un conjunto D y definimos el preorden: para $d, d' \in D$, $d \geq d'$ si y sólo si $I_d \subseteq I_{d'}$. Una red de Cauchy en R es una red, siempre sobre D, tal que para todo ideal I_d, existe un conjunto residual $D' \subseteq D$ tal que para cualesquiera

$d_1,d_2 \in D'$, $\varphi(d_1)-\varphi(d_2) \in I_d$. Nótese que para definir redes de Cauchy siempre se usa un conjunto que indique a los ideales y que tenga el preorden definido anteriormente. Diremos que R es completo respecto a $\mathcal{F}$, si es Hausdorff respecto de la topología determinada por $\mathcal{F}$ y además, toda red de Cauchy respecto de $\mathcal{F}$, converge

Cerramos este parágrafo con la definición de una topología muy útil y común en anillos de endomorfismos. Sea R un anillo con uno, $M \in$ R-mód y $E = \mathrm{End}({}_R M)$. Entonces, la topología finita sobre E se define tomando como base de vecindades del cero el conjunto de ideales por la derecha $U_x = \{ \alpha \in E \mid x \cdot \alpha = 0 \}$ para $x \in M$.

1.4. La categoría de módulos sobre anillos sin uno

La mayoría de los resultados principales de este trabajo involucra la existencia de equivalencias entre ciertas subcategorías de categorías de módulos sobre anillos con uno. En muchas ocasiones, estas subcategorías pueden ser descritas en términos de cierta subcategoría de módulos sobre anillos sin uno. En este parágrafo vamos a describir dicha categoría de módulos sobre un anillo, I, sin uno (es decir, no necesariamente con uno), del cual sólo supondremos que es idempotente.

Si uno quiere extender la teoría de Morita para estos anillos más generales, queda de manifiesto que la generalización apropiada de la categoría de módulos es la categoría de Grothendieck (que denotamos con I-mód) de todos los I-módulos que son unitarios y libres de torsión, en el sentido de que M es libre de torsión si y sólo si $Ix = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in M$. Esta categoría ha sido estudiada, por ejemplo, en [53, 70, 78]. Para su descripción y posterior estudio nosotros usaremos técnicas de localización no conmutativa.

Vamos, pues, a ver algunas convenciones y resultados preliminares para posteriormente abordar la teoría de Morita. A un anillo I, sin uno que verifica $I = I^2$ se le conoce como anillo idempotente, y como no degenerado [81, p.88] por la izquierda cuando cumple que $Ix = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in I$. Decimos que un anillo I es s-unitario por la izquierda si $x \in Ix$ para todo $x \in I$. Un anillo I tiene unidades locales [87] cuando para todo conjunto finito $\{x_1,\ldots,x_n\}$ de elementos de I existe un idempotente $e \in I$ tal que $ex_i = x_i = x_ie$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Es claro que los anillos con unidades locales y los anillos s-unitarios por la izquierda o por la derecha son idempotentes y no degenerados, por el lado correspondiente.

Si I es un anillo idempotente y M es un I-módulo por la izquierda denotamos con $t_I(M)$ al submódulo de torsión $t_I(M) = \{ x \in M \mid Ix = 0 \}$ y $M' = M/t_I(M)$. Así, t_I es un radical idempotente en el sentido de [83] de la categoría I-MOD de todos los I-módulos por la izquierda. Si I y J son anillos y M es un I-J-bimódulo, entonces $\mathbb{T}(M)$ denotará el sub-bimódulo $\mathbb{T}(M) = \{ x \in M \mid I\cdot x\cdot J = 0 \}$ y usaremos $\hat{M} = M/\mathbb{T}(M)$. Un I-módulo por la izquierda o un bimódulo se va a llamar libre de torsión en caso de que $t_I(M) = 0$ o $\mathbb{T}(M) = 0$, respectivamente. Decimos que ${}_IM$ es unitario si M verifica $I\cdot M = M$. La subcategoría de I-MOD cuyos objetos son todos los I-módulos por la izquierda libres de torsión y unitarios la denotaremos con I-mód. Esta categoría, como veremos, es una categoría de Grothendieck localmente finitamente generada y si el anillo I tiene unidades locales o es s-unitario por la derecha entonces I-mód coincide con la categoría de los I-módulos unitarios, la cual ha sido estudiada en [1, 7 y 87]. Obsérvese que si I fuese un anillo con identidad entonces I-mód sería justo la categoría usual de módulos sobre anillos con uno.

Sea I un anillo idempotente y considérese la categoría I-MOD de todos los I-módulos por la izquierda. Sea $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ la teoría de torsión asociada a I (véanse las páginas 22-23 de esta memoria); es decir, $\mathcal{T}$ es la menor clase de torsión en I-MOD que contiene a todos los módulos de la forma X/X_I. Tenemos

Lema 1.4.1: Sea I un anillo idempotente y considérese la categoría I-MOD. Si $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ es la teoría de torsión asociada a I entonces $\mathcal{T}$ está compuesta por todos los I-módulos por la izquierda X tales que $IX = 0$. Por otra parte, un I-módulo por la izquierda X es un objeto de $\mathcal{L}$ si y sólo si $Ix = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in X$.

Demostración: Si $IX = 0$ entonces, como I es idempotente $X_I = 0$ y por lo tanto X es objeto de $\mathcal{T}$-torsión. Ahora, sea $x \in X$ y considérese el morfismo $a \longmapsto ax$. Entonces, $Ix \subseteq X_I$ y en consecuencia, si denotamos con η la proyección canónica de X sobre X/X_I tenemos que $I\eta(X) = 0$. Finalmente, esta nueva descripción de $\mathcal{T}$ nos da la última parte de inmediato.

Lema 1.4.2: I es CQF-3.

Demostración: Como I es idempotente entonces, por lo anterior, se tiene que $Hom_I(I,M) = 0$ si y sólo si $IM = 0$. Así, el lema se desprende de inmediato de [26, p. 196].

Sea $\mathcal{D}$ la clase de los I-módulos por la izquierda I-generados. Entonces [29] $\mathcal{D} \cap \mathcal{L}$ = I-mód y $(\mathcal{D},\mathcal{T})$, $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ son teorías de torsión en I-MOD. A lo largo de todo el siguiente capítulo y en el resto de esta memoria, siempre y cuando no cause confusión, la noción de I-módulo de torsión (o de libre de torsión) sin hacer referencia a la clase de torsión, la reservaremos para denotar la torsión relativa a la teoría de torsión asociada a I, $(\mathcal{T},\mathcal{L})$; e I-módulo codivisible, para $\mathcal{D}$-codivisible.

Tenemos, por lo que vimos en las páginas 21-22 o [26, Proposition 2.1], que existen equivalencias inversas de categorías entre I-mód e I-MOD/$\mathcal{T}$ dadas por las correspondencias $X \longmapsto a(X)$ y

$Y \longmapsto IY$. Sea $I' = I/n_I(I)$. Obsérvese que $I' \subseteq a(I)$, $I' \in I$-mód y $a(I) = a(I')$. Sea $R = \mathrm{End}(_I I') \approx \mathrm{End}(_I a(I))$ y $\mathcal{F}$ el filtro de Gabriel por la izquierda correspondiente a la teoría de torsión sobre R-mód en la cual $_R X$ es un módulo de torsión si y sólo si $I(ia(I) \otimes_R X) = 0$. Entonces, $_R X$ es un R-módulo de torsión respecto a dicha teoría de torsión si y sólo si $I' \otimes_R X = 0$ y esto ocurre si y sólo si $I'X = 0$ porque I' es idempotente. Entonces, $\mathcal{F} = \{ J \subseteq {_R R} \mid J \subseteq RI' \}$.

Por [26, Proposition 1.4] el funtor $\mathrm{Hom}_I(ia(I),\_)$ induce una equivalencia de categorías entre I-MOD/$\mathcal{T}$ y $(R,\mathcal{F})$-mód. Es decir, tenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large, row sep=large]
 & \text{I-MOD} \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(ia(I),_)"'] \arrow[d, shift right, "a"'] & \text{R-mód} \arrow[d, shift right, "a'"'] \\
\text{I-mód} \arrow[r, shift left, "a", "\simeq"'] & \text{I-MOD}/\mathcal{T} \arrow[l, shift left, "(I\cdot)"] \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[r, shift left, "a'(\mathrm{Hom}_I(ia(I),_))", "\simeq"'] & (R,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[l, shift left, "a(I'\otimes_R _)"] \arrow[u, shift right, "i'"']
\end{tikzcd}$$

Entonces, componiendo las equivalencias, tenemos una entre I-mód y $(R,\mathcal{F})$-mód, dada por $X \longmapsto a(X) \longmapsto \mathrm{Hom}_I(ia(I),ia(X)) \cong$ $\cong a'(\mathrm{Hom}_I(ia(I),ia(X))) \cong \mathrm{Hom}_I(I',X)$, con inversa $Y \longmapsto Ia(I' \otimes_R Y) =$ $= IY$. Nótese también que de acuerdo con [84, Theorem 1.8] todo I-módulo X tiene una colocalización con respecto a la teoría de torsión $(\mathcal{D},\mathcal{T})$.

Finalmente, toda la notación que se use en estas categorías estará tomada en la medida de lo posible de la que se haya definido para anillos con uno y en caso contrario de la usada en el parágrafo correspondiente a categorías de Grothendieck.

1.5. Equivalencias y contextos de Morita

A lo largo de nuestra investigación, nos encontramos con distintas situaciones que involucran equivalencias de categorías y de subcategorías de módulos sobre anillos con uno, sean R y S. Las subcategorías involucradas siempre serán categorías cociente respecto de un filtro de Gabriel (o si se prefiere, una teoría de torsión hereditaria), conocidas como subcategorías de Giraud [83, Capítulo X].

Las situaciones siempre tienen que ver con el funtor Hom definido de tal manera que establece una correspondencia entre R-mód y S-mód y viceversa, y que al restringirlo a dichas subcategorías se tiene la equivalencia. Permítasenos mencionar las situaciones:

(1) La equivalencia entre las categorías R-mód y S-mód.

(2) La equivalencia entre la categoría R-mód y una subcategoría de Giraud de S-mód; es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} & S\text{-mód} \arrow[d, shift left, "i"] \\ R\text{-mód} \arrow[r, leftrightarrow, "\simeq"] & (S,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift left, "a"] \end{tikzcd}$$

(donde $\mathcal{F}$ es un filtro de Gabriel)

(3) La equivalencia entre dos subcategorías de Giraud

$$\begin{tikzcd} R\text{-mód} \arrow[d, shift right, "a"'] & & S\text{-mód} \arrow[d, shift right, "a'"'] \\ (R,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[rr, leftrightarrow, "\simeq"] & & (S,\mathcal{G})\text{-mód} \arrow[u, shift right, "i'"'] \end{tikzcd}$$

(donde $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son filtros de Gabriel)

(4) Cuando, en el caso anterior, las topologías están generadas por ideales idempotentes, digamos ${}_RI$ y ${}_SJ$, veremos que las

subcategorías de Giraud son equivalentes a I-mód y J-mód, respectivamente, lo cual nos dará el diagrama

$$\begin{tikzcd}
R\text{-mód} \arrow[d, shift right] & & S\text{-mód} \arrow[d, shift right] \\
(R,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right] \arrow[rr, leftrightarrow, "\simeq"] \arrow[d, shift right, "\simeq"'] & & (S,\mathcal{G})\text{-mód} \arrow[u, shift right] \arrow[d, shift right, "\simeq"'] \\
I\text{-mód} \arrow[u, shift right] \arrow[rr, leftrightarrow, "\simeq"] & & J\text{-mód} \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

Para estudiar estas situaciones y utilizarlas en el desarrollo de nuestros resultados en los Capítulos 3 y 4, primero mencionaremos en esta sección algunos de los resultados -unos más antiguos y otros más recientes, pero todos (o casi todos) ya clásicos- sobre equivalencias y contextos de Morita en anillos con uno, y en el capítulo siguiente desarrollaremos una teoría de Morita para el caso de los anillos idempotentes [27]. Finalmente, queremos hacer notar que en la situación (2) en cuanto a nuestro trabajo, siempre se tendrá que S es un objeto cerrado respecto del filtro $\mathcal{F}$, el cual, a su vez, siempre estará generado por un ideal idempotente (es decir, la teoría de torsión será TTF); sin embargo, mencionaremos aquí de paso que existe un interesante estudio de esta situación [97] sin las hipótesis antes mencionadas.

En general, para dos categorías arbitrarias $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$, decimos que $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son categorías isomorfas si existen funtores $F:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y $G:\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ de tal manera que $G \circ F = 1_{\mathfrak{C}}$ y $F \circ G = 1_{\mathfrak{D}}$ donde $1_{\mathfrak{C}}$, $1_{\mathfrak{D}}$ denotan al funtor identidad [83]. Se conoce como una equivalencia a un funtor $F:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ tal que existe otro funtor $G:\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ y transformaciones naturales $G \circ F \longrightarrow 1_{\mathfrak{C}}$ y $F \circ G \longrightarrow 1_{\mathfrak{D}}$ que son isomorfismos naturales [83]. Esta definición queda caracterizada con la propiedad sobre F de ser fiel y pleno y que todo objeto de $\mathfrak{D}$ sea isomorfo a un objeto de la forma $F(C)$ con $C \in \mathfrak{C}$ [83].

Dados dos anillos R y S, decimos que son equivalentes o Morita equivalentes, siguiendo a [6], si existe una equivalencia de categorías entre R-mód y S-mód. Si F:R-mód $\longrightarrow$ S-mód es una equivalencia entonces se tiene el siguiente isomorfismo de grupos abelianos:

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\ F\ } \mathrm{Hom}_S(F(M),F(N));$$

en particular, si $M \in$ R-mód y $M \neq 0$, se tiene un isomorfismo de anillos $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SF(M))$. Esto se obtiene de inmediato a partir del hecho, mencionado arriba, de que F es fiel y pleno -y aditivo. En el estudio de las equivalencias entre categorías de módulos sobre anillos con uno, los progeneradores desempeñan una función crucial, como se puede observar en el siguiente resultado:

Teorema de Morita [6, Theorem 22.1]: Sean R y S anillos con uno tales que son equivalentes a través de F:R-mód $\longrightarrow$ S-mód y G:S-mód $\longrightarrow$ R-mód. Hacemos $Q = F(R)$ y $P = G(S)$.

Entonces P y Q son bimódulos de un modo natural ${}_RP_S$, ${}_SQ_R$ tales que:

(i) $\mathrm{End}({}_RP) \approx S$, $\mathrm{End}(P_S) \approx R$, $\mathrm{End}({}_SQ) \approx R$ y $\mathrm{End}(Q_R) \approx S$.

(ii) ${}_RP$, P_S, ${}_SQ$ y Q_R son todos progeneradores.

(iii) ${}_RP_S \cong \mathrm{Hom}_S(Q,S) \cong \mathrm{Hom}_R(Q,R)$; ${}_SQ_R \cong \mathrm{Hom}_R(P,R) \cong \mathrm{Hom}_S(P,S)$.

(iv) $F \cong \mathrm{Hom}_R(P,\_)$ y $G \cong \mathrm{Hom}_S(Q,\_)$ (de forma natural).

(v) $F \cong Q \otimes_R \_$ y $G \cong P \otimes_S \_$ (de forma natural).

Demostración: [6, Theorem 22.1].

Las caracterizaciones de Morita para los anillos equivalentes ponen todavía más de manifiesto la función de los progeneradores. Así, si se tienen funtores F:R-mód $\longrightarrow$ S-mód y G:S-mód $\longrightarrow$ R-mód, una condición necesaria y suficiente para que F y G sean equivalencias inversas es la existencia de un bimódulo ${}_RP_S$ tal que ${}_RP$ y P_S sean progeneradores, que $End({}_RP) \approx S$ y $End(P_S) \approx R$ y que se tengan isomorfismos naturales $F \cong Hom_R(P,\_)$ y $G \cong P \otimes_S\_$. Aún más, la existencia de un tal ${}_RP_S$ implica que $Hom_R(P,R)$ es un S-R-bimódulo tal que ${}_S(Hom_R(P,R))$ y $(Hom_R(P,R))_R$ son, a su vez, progeneradores y además $F \cong Hom_R(P,R) \otimes_R\_$ y $G \cong Hom_S(Hom_R(P,R),\_)$ [6].

De aquí se desprende que si R-mód y S-mód son equivalentes entonces mód-R y mód-S también lo son y es justo por esto por lo que podemos hablar de anillos equivalentes. La propia consideración de un progenerador nos permite construir categorías equivalentes haciendo $End({}_RP) = S$ con ${}_RP$ progenerador. (Por [6, Theorem 22.4] sabemos que R y S son anillos Morita equivalentes.) Más adelante, cuando abordemos el estudio de categorías más generales que R-mód, será preciso buscar módulos que sustituyan a los progeneradores.

Un contexto de Morita está formado por un par de anillos R y S y un par de bimódulos ${}_RM_S$ y ${}_SN_R$ junto con homomorfismos de bimódulos $\langle\_,\_\rangle: M \otimes_S N \longrightarrow R$ y $[\_,\_]: N \otimes_R M \longrightarrow S$ de tal manera que verifican las siguientes condiciones de asociatividad: para cualesquiera $m,m' \in M$ y $n,n' \in N$, $n\cdot\langle m,n'\rangle = [n,m]\cdot n'$ y $m\cdot[n,m'] = \langle m,n\rangle\cdot m'$. Denotaremos a los contextos de Morita con (R,S,M,N). A las imágenes $Im\ \langle\_,\_\rangle$ e $Im\ [\_,\_]$ se les conoce con el nombre de ideales traza del contexto. Los contextos de Morita tienen muchas aplicaciones; nosotros, tal y como lo mencionamos anteriormente, los usaremos para establecer equivalencias de subcategorías. Existe una generalización de este concepto [97] conocida como contexto parcial, en la que no entraremos aquí.

Diremos que dos contextos de Morita (R,S,M,N) y (R',S',P,Q) son isomorfos si existen isomorfismos de anillos $\rho: R \longrightarrow R'$ y $\sigma: S \longrightarrow S'$ junto con isomorfismos semilineales $f: {}_RM \longrightarrow {}_{R'}P$, $g: {}_SN \longrightarrow {}_{S'}Q$ de tal manera que sean compatibles con los homomorfismos de los contextos.

El ejemplo más común de contextos de Morita es el contexto derivado de un módulo; esto es, para un anillo R y un R-módulo por la izquierda M, hacemos $S = \mathrm{End}({}_RM)$ y $N = \mathrm{Hom}_R(M,R)$, junto con $\langle\_,\_\rangle : M \otimes_S N \longrightarrow R$ tal que $\langle m,f\rangle = f(m)$ y $[\_,\_] : N \otimes_R M \longrightarrow S$ tal que $[f,m](m') = f(m')\cdot m$. En este caso, obsérvese que los ideales traza son justo la traza de M en R y la de N en S.

Entre otras propiedades de las trazas en los contextos derivados tenemos [98] que $Tr_R(M)M = M$ (es decir, ${}_RM$ es traza-accesible) si y sólo si $MTr_S(N) = M$ si y sólo si $Tr_K(M) = Tr_R(M)K$ para todo $K \in R$-mód; $Tr_R(M)$ y $Tr_S(N)$ son ideales idempotentes, y además, $Tr_S(N) = Tr_S(M)$. Es claro que si $M \in R$-mód es un generador entonces su contexto derivado será (R,S,M,N) donde $S = \mathrm{End}({}_RM)$, $N = \mathrm{Hom}_R(M,R)$ y N es proyectivo y finitamente generado.

En general, dados un anillo (con uno) R y un ideal (bilátero) $I \leq R$, la clase $\{ K \in R\text{-mód} \mid \ell_I(K) = 0 \}$ es una clase libre de torsión y cerrada bajo envolturas inyectivas [69]. En consecuencia, determinará una teoría de torsión hereditaria de R-mód cuyo filtro de Gabriel consiste en los ideales ${}_RJ$ tales que $\ell_I(K) = 0$ implica $\ell_J(K) = 0$ y cuyos objetos cerrados, K se caracterizan por la propiedad de que el homomorfismo natural $K \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I,K)$ es isomorfismo [69, Proposition 1]. Cuando I es idempotente, la teoría de torsión determinada por I en el sentido anterior es TTF [69, Corollary 2]. Ahora bien, dado un contexto de Morita (R,S,M,N) sus ideales traza determinarán mediante la construcción anterior una teoría de torsión para R-mód y otra para S-mód cuyas correspondientes categorías cociente, que llamaremos ${}_R\mathcal{U}$ y ${}_S\mathcal{U}$, son equivalentes a través de las equivalencias inversas $\mathrm{Hom}_R(M,\_) : {}_R\mathcal{U} \longrightarrow {}_S\mathcal{U}$ y $\mathrm{Hom}_S(N,\_) : {}_S\mathcal{U} \longrightarrow {}_R\mathcal{U}$ [69, Theorem 3]. Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son los respectivos filtros de Gabriel, tenemos la situación:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=large]
R\text{-mód} \arrow[d, shift right, "a"'] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Hom}_S(N,\_)"'] & S\text{-mód} \arrow[l, shift right, "\mathrm{Hom}_R(M,\_)"'] \arrow[d, shift right, "a'"'] \\
(R,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right, "i"'] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,\_)"] \arrow[r, phantom, "\simeq"] & (S,\mathcal{G})\text{-mód} \arrow[u, shift right, "i'"'] \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_S(N,\_)"]
\end{tikzcd}
$$

A un contexto (R,S,M,N) se le llama no degenerado [69] si verifica que los morfismos naturales asociados con el contexto

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(N,S) \text{ tal que } m \longmapsto [\_,m]$$

$$M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,R) \text{ tal que } m \longmapsto \langle m,\_\rangle$$

$$R \longrightarrow \mathrm{End}({}_SN) \text{ tal que } r \longmapsto (n \longmapsto n\cdot r)$$

$$S \longrightarrow \mathrm{End}(N_R) \text{ tal que } s \longmapsto (n \longmapsto s\cdot n)$$

y análogamente $N \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,R)$, $S \longrightarrow \mathrm{End}({}_RM)$, $N \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(M,S)$ y $R \longrightarrow \mathrm{End}(M_S)$ son inyectivos. Algunas condiciones equivalentes son: (R,S,M,N) es no degenerado si y sólo si ${}_RM$, M_S, ${}_SN$ y N_R son fieles y además, para todo $m \in M$, $n \in N$, cualquiera de las condiciones $\langle M,n\rangle = 0$ o $[m,M] = 0$ implica $m = 0$, etc. Un contexto derivado será entonces no degenerado si y sólo si ${}_RM$ es sin torsión y fiel y $r_R(\mathrm{Tr}_R(M)) = 0$ [69, p.398]. A través de los contextos no degenerados se puede definir una relación de equivalencia entre anillos construyendo una "composición" adecuada [69, p.399].

De lo anterior podemos inferir que, en general, el contexto derivado de un generador no necesariamente es no degenerado; sin embargo, sí se verifica otra propiedad que además es la que aparece comúnmente a lo largo de esta memoria. Un contexto de Morita (R,S,M,N) se conoce como normalizado por la izquierda si los cuatro morfismos naturales $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(N,S)$, $N \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(M,R)$, $R \longrightarrow \mathrm{End}({}_SN)$ y $S \longrightarrow \mathrm{End}({}_RM)$ son isomorfismos [69]. Obsérvese que si (R,S,M,N) es un contexto normalizado por la izquierda entonces es isomorfo al contexto derivado de ${}_RM$ y también al de ${}_SN$. El contexto derivado de ${}_RM$ es normalizado por la izquierda si y sólo si los morfismos naturales $R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tr}_R(M),R)$ y $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tr}_R(M),M)$ son biyectivos; esto es, si R y M son cerrados bajo la topología $\mathcal{F}$ asociada con el contexto [69]. En consecuencia, S y N también serán cerrados para la topología correspondiente $\mathcal{G}$.

Toda equivalencia aditiva de categorías entre subcategorías plenas de R-mód y S-mód tales que contengan a ${}_RR$ y ${}_SS$ tiene una extensión maximal. El dominio y rango de estas equivalencias maximales son categorías cociente determinadas por ideales. Aún más, existe una correspondencia uno a uno entre:

(i) Las clases de isomorfismos naturales de las equivalencias maximales de categorías entre subcategorías plenas de R-mód y S-mód tales que contienen a ${}_RR$ y ${}_SS$ respectivamente,

(ii) la clase de isomorfismos de los contextos de Morita normalizados por la izquierda entre R y S, y

(iii) la clase de isomorfismos de los bimódulos ${}_RM_S$ para los que los morfismos naturales $S \longrightarrow \mathrm{End}({}_RM)$, $R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tr}_R(M),R)$, $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tr}_R(M),M)$ son biyectivos [69, Theorem 7].

Cuando un contexto de Morita es normalizado por la izquierda y sus ideales traza son idempotentes (caso muy frecuente en nuestro trabajo) tenemos entonces que, si ${}_RI$, ${}_SJ$ son los ideales traza se verifica $\mathrm{End}({}_II) \approx \mathrm{End}({}_RI) \approx R$ y $\mathrm{End}({}_JJ) \approx \mathrm{End}({}_SJ) \approx S$; además, las categorías I-mód y J-mód son equivalentes. Es decir, hemos llegado a la situación de equivalencias de categorías para anillos sin uno, idempotentes, que estudiaremos en el capítulo siguiente.

Para terminar, indicaremos que existe una noción relacionada con la de contexto de Morita, la de Γ-anillo, debida a Nobusawa [70] que exponemos a continuación (tomando la presentación dada en [76]):

Un Γ-anillo A, está dado por un par de grupos abelianos A, Γ

junto con una aplicación $f:A \times \Gamma \times A \longrightarrow A$ cuya acción denotamos por $f(x,\alpha,y) = x\alpha y$ de tal manera que:

(i) f es aditivo en cada variable.

(ii) $(x\alpha y)\beta z = x\alpha(y\beta z)$ para todo x, y, $z \in A$ y α, $\beta \in \Gamma$. Dados $\alpha \in \Gamma$, $x \in A$, se definen los morfismos $[\alpha,x]:A \longrightarrow A$ y $[x,\alpha]:A \longrightarrow A$ dados por $[\alpha,x](y) = y\alpha x$ y $[x,\alpha](y) = x\alpha y$. Nótese que tanto $[\alpha,x]$ como $[x,\alpha]$ pertenecen a $\mathrm{End}({}_{\mathbb{Z}}A)$ para cada $x \in A$ y $\alpha \in \Gamma$. Ahora definimos $\eta:\Gamma \times A \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\mathbb{Z}}A)$ y $\nu:A \times \Gamma \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\mathbb{Z}}A)$ tales que $\eta(\alpha,x) = [\alpha,x]$ y $\nu(x,\alpha) = [x,\alpha]$. Es fácil ver que tanto η como ν son aplicaciones bilineales y en consecuencia existen morfismos $\bar{\eta}:\Gamma \otimes_{\mathbb{Z}} A \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\mathbb{Z}}A)$ y $\bar{\nu}:A \otimes_{\mathbb{Z}} \Gamma \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\mathbb{Z}}A)$ con las correspondencias $\sum_i \alpha_i \otimes x_i \longmapsto \sum_i [\alpha_i,x_i]$ y $\sum_i x_i \otimes \alpha_i \longmapsto \sum_i [x_i,\alpha_i]$. Sea $R(A,\Gamma) = \mathrm{Im}\ \bar{\eta}$ y $L(A,\Gamma) = \mathrm{Im}\ \bar{\nu}$. Obsérvese que $R(A,\Gamma)$ y $L(A,\Gamma)$ son anillos (no necesariamente con uno) con las respectivas operaciones

$$\sum_i [\alpha_i,x_i] \cdot \sum_j [\beta_j,y_j] = \sum_{ij} [\alpha_i,x_i\beta_j y_j]$$

y

$$\sum_i [x_i,\alpha_i] \cdot \sum_j [y_j,\beta_j] = \sum_{ij} [x_i\alpha_i y_j,\beta_j]$$

y que A es un $L(A,\Gamma)$-$R(A,\Gamma)$-bimódulo fiel a los dos lados. A $L(A,\Gamma)$ y $R(A,\Gamma)$ se les conoce respectivamente como anillos de operadores por la izquierda y por la derecha de A [77]. A los Γ-anillos A, tales que verifican que para todo $x \in A$, no cero, $[x,\Gamma]$ y $[\Gamma,x]$ son distintos de cero y que $A\Gamma A = A$ se les conoce como débilmente semiprimos. Obsérvese que si A es un Γ-anillo débilmente semiprimo entonces haciendo $I = L(A,\Gamma)$ y $J = R(A,\Gamma)$, I y J son no degenerados a los dos lados e idempotentes.

Sean I y J los anillos de operadores por la izquierda y por la derecha de un Γ-anillo M, débilmente semiprimo y sea $N = {}= J\mathrm{Hom}_I(M,I)$. Entonces, se tienen epimorfismos de bimódulos $\langle\_,\_\rangle:M \otimes_J N \longrightarrow I$ y $[\_,\_]:N \otimes_I M \longrightarrow J$. Siguiendo a [70], para A, un I-módulo por la izquierda y B, un J-módulo por la izquierda, decimos que (A,B) es un (M,N)-módulo en caso de tener morfismos $\varphi_{AB}:N \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(A,B)$ y $\varphi_{BA}:M \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(B,A)$ de tal manera que $(\varphi_{BA}(m)\circ\varphi_{AB}(n))(a) = \langle m,n\rangle a$, $(\varphi_{AB}(n)\circ\varphi_{BA}(m))(b) = [n,m]b$, y además

$$\varphi_{AB}(n\langle m,n'\rangle)(a) = (\varphi_{AB}(n)\circ\varphi_{BA}(m)\circ\varphi_{AB}(n'))(a), \text{ y}$$

$$\varphi_{BA}(m[n,m'])(b) = (\varphi_{BA}(m)\circ\varphi_{AB}(n)\circ\varphi_{BA}(m'))(b).$$

Por ejemplo, (I,N) es un (M,N)-módulo a través de los morfismos $\varphi_{IN}(n) = (n\cdot)$ (la multiplicación por n) y $\varphi_{NI}(m) = \langle m,\_\rangle$.

En [70, Proposition 1] se establece que para todo I-módulo A tal que IA = A, existe un J-módulo B de tal manera que (A,B) es un (M,N)-módulo, y en [71, Theorem 1] se establece que si I y J son idempotentes entonces la correspondencia $A \longmapsto (A,B)$ define una equivalencia entre las subcategorías I-mód y J-mód. Esta correspondencia se puede obtener haciendo $A \longmapsto N \otimes_J A$; seguido del paso al cociente $N \otimes_J A \longmapsto N \otimes_J A/t_J(N \otimes_J A)$ [70, Proposition 1 y 71, Proposition 2 y 3].

C A P I T U L O   2

EQUIVALENCIAS DE MORITA PARA ANILLOS IDEMPOTENTES

2.1. Introducción

Nos proponemos en este capítulo describir, dados dos anillos idempotentes pero, en general, sin uno, I, J, condiciones necesarias y suficientes para que los anillos sean "equivalentes", en el sentido análogo al clásico de Morita. La teoría de Morita para anillos sin uno pero con unidades locales fue considerada en [1] o [7]; mientras que el caso de los anillos s-unitarios fue tratado por Komatsu [52]. Al considerar anillos más generales, como los anillos idempotentes que nos ocuparán aquí, no es muy conveniente tener en cuenta la categoría (que, para un anillo I denotamos por I-MOD) de <u>todos</u> los I-módulos por la izquierda: ella incluiría, por ejemplo, a todos los grupos abelianos, definiendo una multiplicación trivial. La generalización adecuada de la categoría de módulos usual es la categoría (que denotamos por I-mód para el anillo idempotente I) de los I-módulos por la izquierda ${}_IM$ que son <u>unitarios</u> (esto es, $IM = M$) y libres de torsión (es decir, si $Ix = 0$ para $x \in M$, entonces $x = 0$). Esta categoría I-mód es de Grothendieck y nos proponemos, pues, caracterizar la equivalencia entre las categorías I-mód y J-mód para anillos I, J, idempotentes.

La principal diferencia entre las técnicas que emplearemos aquí y las de [1] o [7] es el uso por nuestra parte de la localización no conmutativa para estudiar la categoría I-mód. Así, llegaremos a probar en las secciones 2.2 y 2.3 que los resultados clásicos de la teoría de Morita se pueden obtener para anillos idempotentes con algunas ligeras modificaciones; véase, por ejemplo, el Teorema 2.2.5.

En la teoría de Morita clásica se prueba que dos anillos (con uno) R y S son equivalentes si y sólo si existe un contexto de Morita entre R y S con aplicaciones suprayectivas. El empleo de los contextos de Morita para estudiar la teoría de Morita en el caso de anillos sin uno aparece en una serie de trabajos como [52, 53, 54, 70, 71, 72, 73, 77, 78] que incluyen el estudio de los contextos de Morita por medio de la noción, relacionada con ellos, de un Γ-anillo (véanse las páginas 38-40). En dichos trabajos, se obtienen diversas consecuencias a partir de la existencia de un contexto de Morita para anillos I y J, con aplicaciones suprayectivas. En particular, se prueba que si I y J, son idempotentes y admiten un contexto con aplicaciones suprayectivas, entonces I-mód y J-mód son categorías equivalentes [53]. En [52] y en [78] se demuestra que el recíproco es también válido en el caso de que I y J sean s-unitarios [53] o idempotentes y no degenerados [78]. en lo que sigue, se mostrará que, de hecho, dicho recíproco se verifica en el caso más general de los anillos I, J idempotentes. La diferencia principal entre el caso en que I y J son no degenerados y aquel en que se suponen solamente idempotentes, reside en que, en la primera situación, I y J son, respectivamente, objetos de las categorías I-mód y J-mód, lo que permite expresar a los funtores F, G, que definen la equivalencia supuesta entre I-mód y J-mód mediante los funtores Hom y $\otimes$; en concreto, si los funtores $F:I\text{-mód} \longrightarrow J\text{-mód}$ y $G:J\text{-mód} \longrightarrow I\text{-mód}$ son equivalencias inversas con I, J idempotentes y no degenerados, entonces $F \cong J\cdot\mathrm{Hom}_I(G(J),\_)$ y $G \cong I\cdot\mathrm{Hom}_J(F(I),\_)$. En el caso general que nosotros tratamos, I y J no pertenecen necesariamente a las categorías I-mód y J-mód; es cierto que $M = I/\mathcal{r}_I(I)$ y $N = J/\mathcal{r}_J(J)$ sí pertenecen a dichas cetegorías. Pero construir un contexto de Morita con aplicaciones suprayectivas a partir de la equivalencia supuesta tiene la dificultad de que la elección natural (I,J,M,N) no puede tener aplicaciones suprayectivas, ya que, por ejemplo, $\mathrm{Hom}_I(M,\mathcal{r}_I(I)) = 0$. La solución a esta dificultad pasa por considerar ciertas teorías de torsión de I-MOD y J-MOD, que proporcionan colocalizaciones de los objetos de estas categorías.

2.2. Equivalencias y contextos de Morita para anillos idempotentes

Empezamos por recordar la noción de contexto de Morita que, para anillos sin uno, es esencialmente la misma que en el caso clásico; es decir, un contexto de Morita [42] está compuesto por dos anillos I, J y dos bimódulos ${}_IM_J$, ${}_JN_I$ junto con homomorfismos de bimódulos $\langle\_,\_\rangle: M \otimes_J N \longrightarrow I$ y $[\_,\_]: N \otimes_I M \longrightarrow J$ de tal manera que se verifica la siguiente condición de asociatividad; para m, m' $\in$ M y n, n' $\in$ N, $m'[n,m] = \langle m',n\rangle m$ y $n'\langle m,n\rangle = [n',m]n$. La noción de contexto no degenerado es también análoga a la que se tiene para anillos con uno. Para dar algún ejemplo de estos contextos, se puede hacer una construcción análoga a la de un contexto derivado, de la siguiente manera. Sea I un anillo sin uno y M un I-módulo por la izquierda. Sea $S = \mathrm{End}({}_IM)$ y considérese $\mathrm{Hom}_I(M,I) \in$ S-mód. Tenemos entonces los siguientes homomorfismos: $M \otimes_S \mathrm{Hom}_I(M,I) \xrightarrow{\langle\_,\_\rangle} I$ y $\mathrm{Hom}_I(M,I) \otimes_I M \xrightarrow{[\_,\_]} S$. Un "contexto derivado" podría estar entonces dado por un subanillo de S (no necesariamente con uno) J de tal manera que $\mathrm{Im}\,[\_,\_] \subseteq J$ y $MJ = M$. Así, $(I,J,M,J\cdot\mathrm{Hom}_I(M,I))$ es un contexto de Morita.

Recordemos de la Sección 1.4 que I es un objeto CQF-3 en la categoría I-MOD y en consecuencia determina una teoría de torsión TTF respecto de la cual consideraremos la colocalización.

Proposición 2.2.1: Sean I y J anillos idempotentes y los funtores **F**:I-mód $\longrightarrow$ J-mód y **G**:J-mód $\longrightarrow$ I-mód equivalencias inversas. Sean ${}_IM = G(J/\mathcal{t}_J(J))$ y ${}_JN = F(I/\mathcal{t}_I(I))$, ${}_IP$ la colocalización de ${}_IM$ y ${}_JQ$ la de ${}_JN$. Entonces se tienen las siguientes propiedades:

(i) ${}_IM_J$ y ${}_JN_I$ son bimódulos tales que ${}_IM$ y ${}_JN$ son generadores.

(ii) Los funtores **F** y **G** están dados, salvo isomorfismos naturales, por $\mathbf{F} \cong J\cdot\mathrm{Hom}_I(M,\_)$ y $\mathbf{G} \cong I\cdot\mathrm{Hom}_J(N,\_)$.

(iii) M_J es J-generado y N_I es I-generado.

(iv) ${}_IP_J$ y ${}_JQ_I$ son bimódulos unitarios e inducen un contexto de Morita (I,J,P,Q) de tal manera que, en la notación usual, $\langle \_,\_ \rangle$ y $[\_,\_]$ son epimorfismos de bimódulos. Además, F y G también son naturalmente isomorfos a $J\cdot Hom_I(P,\_)$ e $I\cdot Hom_J(Q,\_)$ respectivamente.

Demostración: Nótese primero que $I' = I/r_I(I)$ y $J' = J/r_J(J)$ son generadores para I-mód y J-mód respectivamente ya que si $X \in$ I-mód y $f \in Hom_I(I,X)$, si $a \in r_I(I)$ entonces $I\cdot f(a) = 0$ y como $X \in$ I-mód entonces $f(a) = 0$. Además, si $Ia \subseteq r_I(I)$ entonces $I(Ia) = 0$; como I es idempotente $0 = I(Ia) = Ia$ por lo tanto $a \in r_I(I)$. Así, $I/r_I(I) \in$ $\in$ I-mód y $J/r_J(J) \in$ J-mód y son generadores para esas categorías; en consecuencia, ${}_IM \in$ I-mód y ${}_JN \in$ J-mód son, a su vez, generadores.

Sean $R = End({}_II')$ y $S = End({}_JJ')$. Entonces, la multiplicación por la derecha por elementos de I' nos da un monomorfismo $I' \longrightarrow End({}_II')$ cuya imagen, isomorfa a I', nos permite ver a I' como un ideal por la derecha de $End({}_II')$. Un argumento análogo nos permite ver a J' como ideal por la derecha de $End({}_JJ')$. Como F:I-mód $\longrightarrow$ J-mód y G:J-mód $\longrightarrow$ I-mód son equivalencias, tenemos los isomorfismos de anillos $End({}_IM) \approx S$ y $End({}_JN) \approx R$ y en consecuencia ${}_IM_S$ y ${}_JN_R$ son bimódulos; así, ${}_IM_{J'}$, ${}_IM_J$, ${}_JN_{I'}$, ${}_JN_I$ son bimódulos. Nótese que esto todavía no significa que MJ = M ni NI = N, esto lo veremos en (iii). Por lo pronto, con esto se establece (i).

Sea $\mathcal{F} = \{ X \subseteq {}_RR \mid RI' \subseteq X \}$ y $\mathcal{G} = \{ Y \subseteq {}_SS \mid SJ' \subseteq Y \}$. Por lo que vimos en los párrafos siguientes al Lema 1.4.2, los funtores $Hom_I(I',\_)$:I-mód $\longrightarrow$ $(R,\mathcal{F})$-mód y $Hom_J(J',\_)$:J-mód $\longrightarrow$ $(S,\mathcal{G})$-mód son equivalencias de categorías, con inversas $X \longmapsto I'X = IX$ y $Y \longmapsto J'Y = JY$ respectivamente.

Si componemos la equivalencia F:I-mód $\longrightarrow$ J-mód con la equivalencia $Hom_J(J',\_)$:J-mód $\longrightarrow$ $(S,\mathcal{G})$-mód obtenemos entonces una nueva equivalencia de categorías H:I-mód $\longrightarrow$ $(S,\mathcal{G})$-mód, donde S es un objeto $\mathcal{G}$-cerrado con $H({}_IM) \cong S$. Es decir, tenemos un anillo S e I-MOD una categoría de Grothendieck con generador proyectivo. Sea $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ la teoría de torsión asociada con I (y con M, en consecuencia) descrita en la página 29. Recordemos que $\mathcal{T}$ es cerrada bajo productos directos y que I-mód es equivalente a I-MOD/$\mathcal{T}$ (véase el diagrama de la página 31). Entonces, I-MOD/$\mathcal{T}$ es equivalente a $(S,\mathcal{G})$-mód, digamos bajo H', y otra vez $H'({}_IM) \cong S$. En consecuencia, se reúnen todas las hipótesis de [26, Theorem 1.19] y tenemos que H' es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_I(M,_):$I-mód $\longrightarrow$ $(S,\mathcal{G})$-mód y $\mathcal{G} = \{\ Y \leq {}_SS \mid MY = M\ \}$. Como se vio, la equivalencia entre las subcategorías $(S,\mathcal{G})$-mód y J-mód está dada en un sentido por la multiplicación por la izquierda por J, $(J\cdot)$; así, el funtor F:I-mód $\longrightarrow$ J-mód es naturalmente isomorfo al funtor $J\cdot\mathrm{Hom}_I(M,\_)$:I-mód $\longrightarrow$ J-mód. De manera similar, tenemos que $\mathcal{F} = \{\ X \leq {}_RR \mid NX = N\ \}$ y que G es naturalmente isomorfo al funtor $I\cdot\mathrm{Hom}_J(N,\_)$:J-mód $\longrightarrow$ I-mód. Esto prueba (ii).

Para demostrar (iii), considérense las descripciones de las topologías $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Tenemos, para M, que $M(SJ') = M$ y en consecuencia $M = M(SJ') = (MS)J' = MJ' = MJ$. Análogamente, $N = NI' = NI$.

Finalmente, vamos a probar (iv). Por (ii) tenemos isomorfismos ${}_JN \cong J\cdot\mathrm{Hom}_I(M,I')$ e ${}_IM \cong I\cdot\mathrm{Hom}_J(N,J)$; en consecuencia, a través de dichos isomorfismos podemos definir, para $x \in M$, $y \in N \leq \mathrm{Hom}_I(M,I')$, $\langle x,y\rangle = xy \in I'$ y $[y,x] \in S = \mathrm{End}({}_IM)$, dado por $u[y,x] = (uy)x$, para cada $u \in M$. Considerando a M y N como I'-J' y J'-I' bimódulos respectivamente, se tienen homomorfismos inducidos $\varphi: M \otimes_{J'} N \longrightarrow I'$ y $\psi: N \otimes_{I'} M \longrightarrow S$ de tal manera que $\varphi(x\otimes y) = \langle x,y\rangle$ y $\psi(y\otimes x) = [y,x]$; de esta forma, φ y ψ son homomorfismos de bimódulos y por lo tanto obtenemos que $\mathrm{Im}\,\psi \leq J'$ ya que $N \otimes_{I'} M = J'(N \otimes_{I'} M)J'$. Por la construcción que hemos hecho quedan claramente establecidas las condiciones de asociatividad; así, junto con φ y ψ, tenemos un contexto de Morita (I',J',M,N). Vamos a probar que φ y ψ son epimorfismos. Para esto, sea $a \in I'$. Como ${}_IM$ genera a ${}_II'$ entonces existen elementos $u_1,\ldots,u_n \in M$ y $\alpha_1,\ldots,\alpha_n \in \mathrm{Hom}_I(M,I')$ tales que $\sum_i u_i\alpha_i = a$. Además, $M = MJ'$ y en consecuencia, cada u_i tiene una expresión $u_i = \sum_j x_{ji}b_{ji}$ para algunos $x_{ji} \in M$ y $b_{ji} \in J'$. Por lo tanto, $\varphi(\sum_{ij} x_{ji}\otimes b_{ji}\alpha_i) = \sum_{ij}\langle x_{ji},b_{ji}\alpha_i\rangle = \sum_{ij}(x_{ji}b_{ji})\alpha_i = \sum_i u_i\alpha_i = a$. Con esto hemos probado que φ es epimorfismo.

Para probar que ψ es epimorfismo, sea $x \in M$. Como $M = I'M$, tenemos que $x = \sum_i a_i x_i$ para algunas $a_i \in I'$ y $x_i \in M$. Como φ es epimorfismo tenemos también que cada a_i tiene una expresión $a_i = \sum_{ji} \langle u_{ji}, y_{ji} \rangle$ para algunas $u_{ji} \in M$ y $y_{ji} \in N$. En consecuencia, $x = \sum_{ij} \langle u_{ji}, y_{ji} \rangle x_i$ y entonces $x = \sum_{ij} u_{ji} [y_{ji}, x_i]$ así que $x \in M \cdot \mathrm{Im}\, \psi$ y por lo tanto tenemos que $M = M \cdot \mathrm{Im}\, \psi$. A partir de la descripción de la topología $\mathcal{G}$ dada en el principio de esta demostración, sabemos que SJ' es un ideal minimal de S con respecto a la propiedad $M(SJ') = M$ y así tenemos que $M(S \cdot \mathrm{Im}\, \psi) = M$ y por lo tanto $S \cdot \mathrm{Im}\, \psi = SJ'$. Como J' es idempotente entonces $J'\mathrm{Im}\, \psi = \mathrm{Im}\, \psi$ ya que $J'(N \otimes_{I'} M) = N \otimes_{I'} M$ y en consecuencia $J' = J'SJ' = J'S\mathrm{Im}\, \psi = J'\mathrm{Im}\, \psi = \mathrm{Im}\, \psi$, a partir de lo cual, vemos que ψ es epimorfismo.

Hasta este momento hemos probado que si I-mód y J-mód son categorías equivalentes entonces existe un contexto de Morita (I', J', M, N) con morfismos suprayectivos. Lo que se hará en adelante es construir un nuevo contexto (I, J, P, Q) que también tenga morfismos suprayectivos.

Sea ${}_IP$ la colocalización de ${}_IM$ respecto de la teoría de torsión $(\mathcal{D}, \mathcal{T})$; es decir, existe $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \xrightarrow{\rho} M \longrightarrow 0$, sucesión exacta corta en I-MOD donde P es I-generado y $\mathcal{D}$-codivisible y K pertenece a $\mathcal{T}$. Aún más, si L es un I-módulo por la izquierda I-generado y $\alpha : M \longrightarrow L/t_I(L)$ es un I-homomorfismo entonces existe un único $\alpha' : P \longrightarrow L$ de tal manera que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r, "\rho"] \arrow[d, "\alpha'"'] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"] & 0 \\
L \arrow[r, "\pi"] & L/t_I(L) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

De aquí se sigue que $\mathrm{End}({}_IM) \approx S \approx \mathrm{End}({}_IP)$ y $\mathrm{Hom}_I(M, I') \cong$

$\cong \mathrm{Hom}_I(P,I)$. El primero de estos isomorfismos nos permite dotar a P con una estructura de J'-módulo por la derecha heredada de la estructura de J'-módulo de M. Como tal, ρ es un homomorfismo de bimódulos.

Ahora vamos a ver que ${}_IP_{J'}$ y ${}_{J'}N_I$ nos dan un contexto de Morita (I,J',P,N) con morfismos suprayectivos.

Para cada $y \in N$, existe un I-homomorfismo $\alpha_y : M \longrightarrow I' = I/\eta_I(I)$ el cual lleva $x \in M$ a $\varphi(x \otimes y)$. Por lo que acabamos de indicar acerca de P, sabemos que existe un único I-homomorfismo $P \longrightarrow I$ de tal manera que se verifica que el siguiente diagrama es conmutativo

$$\begin{tikzcd}
P \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & I \arrow[d, "\varepsilon"] \\
M \arrow[r, "\alpha_y"] \arrow[d] & I/\eta_I(I) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

en consecuencia, se tiene un homomorfismo $\varphi' : P \otimes_{J'} N \longrightarrow I$ tal que este otro diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
P \otimes_{J'} N \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & I \arrow[d] \\
M \otimes_{J'} N \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & I/\eta_I(I) \arrow[d] \\
0 & 0
\end{tikzcd}$$

y φ' es única respecto a esta condición. Ahora bien, hagamos $X = \operatorname{Im}\varphi'$; así, $X + r_I(I) = I$. Como $IP = P$ podemos deducir que $IX + Ir_I(I) = IX = I$ y en consecuencia $\operatorname{Im}\varphi' = I$.

Por otro lado, como $N \otimes_{I'} M = N \otimes_I M$ podemos componer el morfismo $N \otimes_I P \longrightarrow N \otimes_I M$ con ψ y entonces obtener $\psi':N \otimes_I P \longrightarrow J'$ el cual es evidentemente un epimorfismo. Entonces (I,J',P,N) será el contexto de Morita que buscamos si logramos probar que para todo $x,u \in P$ y $y,v \in N$ tenemos que $\varphi'(x\otimes y)u = x\psi'(y\otimes u)$ y que $\psi'(y\otimes u)v = y\varphi'(u\otimes v)$. Tómese, pues,

$$(\varphi'(x\otimes y)u)\rho = \varphi'(x\otimes y)(u\rho) = \varepsilon(\varphi'(x\otimes y))(u\rho) = \varphi(x\rho\otimes y)(u\rho) =$$

$$= \langle x\rho,y\rangle(u\rho) = x\rho[y,u\rho] = x\rho\psi(y\otimes u\rho) = (x\rho)\psi'(y\otimes u) = (x\psi'(y\otimes u))\rho.$$

Entonces, el elemento $\varphi'(x\otimes y)u-x\psi'(y\otimes u)$ pertenece a $t_I(P)$. Si consideramos un $u \in P$ fijo, esto da un morfismo $P \otimes_J N \longrightarrow P$ tal que su imagen está contenida en $t_I(P)$. Pero como $P = IP$ sólo cabe la posibilidad de que este morfismo sea cero, en consecuencia $\varphi'(x\otimes y)u = x\psi'(y\otimes u)$. La otra ecuación se tiene directamente: $\psi'(y\otimes u)v = \psi(y\otimes u\rho)v = y\varphi(u\rho\otimes v) = y\varphi'(u\otimes v)$.

De modo similar, podemos ahora tomar la colocalización, ${}_JQ$ de ${}_JN$, y entonces ${}_JQ_I$ es un bimódulo, y como tal, (I,J,P,Q) es un contexto de Morita con morfismos suprayectivos. Esto prueba (iv).

Finalmente, sea $X \in I$-mód. Recordemos que tenemos una sucesión exacta $0 \longrightarrow K \longrightarrow P \longrightarrow M \longrightarrow 0$ con K objeto de $\mathcal{T}$. Apliquemos el funtor $\operatorname{Hom}_I(\_,X)$. Entonces obtenemos la siguiente sucesión exacta: $0 \longrightarrow \operatorname{Hom}_I(M,X) \longrightarrow \operatorname{Hom}_I(P,X) \longrightarrow 0$ puesto que $\operatorname{Hom}_I(K,X) = 0$. Por lo tanto $\operatorname{Hom}_I(M,\_)$ es naturalmente isomorfo a $\operatorname{Hom}_I(P,\_)$ sobre I-mód. Esto concluye la demostración.

Siguiendo la definición dada para anillos con uno, un contexto de Morita (I,J,M,N) se llamará no degenerado cuando los cuatro módulos ${}_IM$, M_J, ${}_JN$, N_I y los cuatro pares dados por $[\_,\_]$ y $\langle\_,\_\rangle$ son fieles (en el sentido de que $[w,M] = 0$ implica $w = 0$, por ejemplo).

Proposición 2.2.2: Sean I, J anillos idempotentes y supóngase que existe un contexto de Morita (I,J,P,Q) con epimorfismos

$$\langle\_,\_\rangle = \varphi : P \otimes_J Q \longrightarrow I \text{ y } [\_,\_] = \psi : Q \otimes_I P \longrightarrow J$$

y tal que ${}_IP$, P_J, ${}_JQ$, Q_I son módulos unitarios. Entonces:

(i) ${}_IP$, P_J, ${}_JQ$, Q_I generan a ${}_II$, J_J, ${}_JJ$, I_I respectivamente.

(ii) Núc φ y Núc ψ son módulos de torsión por ambos lados.

(iii) Hay isomorfismos de bimódulos inducidos,

$$P/t_I(P) \cong I \cdot \mathrm{Hom}_J(Q,J),\ P/t_J(P) \cong \mathrm{Hom}_I(Q,\Lambda) \cdot J,$$
$$Q/t_J(Q) \cong J \cdot \mathrm{Hom}_I(P,I),\ Q/t_I(Q) \cong \mathrm{Hom}_J(P,J) \cdot I$$

Además, el contexto es no degenerado si y sólo si los ocho modulos ${}_II$, ${}_JJ$, J_J, I_I, ${}_IM$, M_J ${}_JN$, N_I son libres de torsión en las correspondientes teorías de torsión.

Demostración: (i) Vamos a demostrar, por ejemplo, que ${}_IP$ genera ${}_II$. Para cada $y \in Q$ definimos $\alpha_y : {}_IP \longrightarrow {}_II$ como $u \cdot \alpha_y = \langle u,y\rangle$. Entonces tenemos que $\alpha_y \in \mathrm{Hom}_I(P,I)$ y $\sum_{y\in Q} \mathrm{Im}\ \alpha_y = I$.

(ii) Usaremos un argumento típico y similar a [98, Lemma 1.3]. Sea $\sum_i x_i \otimes y_i \in$ Núc φ, con $x_i \in P$, $y_i \in Q$. Entonces $\sum_i \langle x_i, y_i\rangle = 0$ y para cada $u \in P$, $w \in Q$ tenemos:

$$\langle u,w\rangle \cdot \textstyle\sum_i x_i \otimes y_i = \sum_i u \otimes [w,x_i] y_i = u \otimes (w \cdot \sum_i \langle x_i, y_i\rangle) = 0,$$

así que $I \cdot \sum_i x_i \otimes y_i = 0$. Se puede ver similarmente que $(\sum_i x_i \otimes y_i) \cdot I = 0$ y asimismo, Núc ψ es un bimódulo de torsión.

(iii) Vamos a probar el tercero de los isomorfismos, en vista de que los otros tres casos son similares. Tomemos α_y para $y \in Q$ como en (i). Luego defínase $\theta : Q \longrightarrow \mathrm{Hom}_I(P,I)$ con $\theta(y) = \alpha_y$. Claramente, θ es un J-homomorfismo. Como $J \cdot Q = Q$, vemos que Im $\theta \subseteq J \cdot \mathrm{Hom}_I(P,I)$ e $y \in$ Núc θ si y sólo si $\langle x,y\rangle = 0$ para todo $x \in P$; pero esta condición implica que para cada $w \in Q$, $u \in P$, $[w,u]y = w\langle u,y\rangle = 0$ así que $J \cdot y = 0$ e $y \in t_J(Q)$. El recíproco es obvio, por lo tanto Núc θ = $= t_J(Q)$. Sólo nos resta probar que Im $\theta = J \cdot \mathrm{Hom}_I(P,I)$; pero para $b \in J$, $b = [w,u]$, $\varphi \in \mathrm{Hom}_I(P,I)$; es suficiente considerar el elemento

$w\cdot(u\varphi) \in Q$.

La afirmación final se ve directamente. Específicamente, el hecho de que los anillos I y J sean no degenerados es equivalente a que los módulos ${}_IP$, P_J, ${}_JQ$, Q_I sean fieles. En consecuencia, el hecho de que el contexto sea no degenerado corresponde con el de que los cuatro módulos sean libres de torsión.

Si I y J son anillos con uno y se tiene un contexto de Morita (I,J,P,Q) con epimorfismos φ y ψ, entonces es conocido que ${}_IP$ es un generador proyectivo finitamente generado, y también lo es ${}_JQ$, Q_I, y P_J. En dicho caso hay isomorfismos naturales $\mathrm{Hom}_I(P,U) \otimes_J L \cong \mathrm{Hom}_I(P,U \otimes_J L)$, y $P \otimes_J \mathrm{Hom}_I(U,K) \cong \mathrm{Hom}_I(\mathrm{Hom}_J(P,U),K)$ para cualesquier ${}_IU_J$, ${}_JL$, ${}_IK$. Cuando I y J no necesariamente tienen identidad, tenemos la siguiente generalización:

Proposición 2.2.3: Sean I, J anillos idempotentes y (I,J,P,Q) un contexto de Morita, donde ${}_IP$, ${}_JQ$, P_J y Q_I son módulos unitarios con homomorfismos suprayectivos $\langle\_,\_\rangle$, $[\_,\_]$. Sean ${}_IU_J$, ${}_IK$, ${}_JL$ módulos unitarios. Entonces:

(i) El homomorfismo canónico de I-módulos por la izquierda

$$\ell: P \otimes_J J\cdot\mathrm{Hom}_I(U,K) \longrightarrow I\cdot\mathrm{Hom}_I(I\cdot\mathrm{Hom}_J(P,U)\cdot I,K)$$

es un epimorfismo con núcleo de torsión.

(ii) El homomorfismo canónico de J-módulos por la izquierda

$$q: J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,U)\cdot J \otimes_J L \longrightarrow J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,U\otimes_J L)$$

es un epimorfismo con núcleo de torsión.

Demostración: En vista de que los argumentos de esta demostración son bastante típicos, sólo vamos a dar un esquema de los mismos.

(i) Definimos ℓ de la siguiente manera: Si $x \in P$, $\alpha \in J\cdot\mathrm{Hom}_I(U,K)$ y $\beta \in I\cdot\mathrm{Hom}_J(P,U)\cdot I$, hacemos $\beta((x\otimes\alpha)\ell) = \beta(x)\alpha$. De este modo es fácil ver que ℓ es un I-homomorfismo.

Ahora vamos a probar que Núc ℓ es un módulo de torsión; es decir, para $x_i \in P$, $\alpha_i \in J\cdot\mathrm{Hom}_I(U,K)$, $(\sum_i x_i\otimes\alpha_i)\ell = 0$ implica que $I\cdot(\sum_i x_i\otimes\alpha_i) =$

$= 0$.

La hipótesis $(\sum_i x_i \otimes \alpha_i)\ell = 0$ implica que para todo $x \in P$, $y \in Q$, $\beta \in I \cdot Hom_J(P,U)$ tenemos que $\sum_i \beta(\langle x,y\rangle x_i) \cdot \alpha_i = 0$ y esto nos da $\beta(x) \cdot \sum_i [y,x_i]\alpha_i = 0$. El hecho de que P_J genere a J y que U sea I–unitario nos permite deducir, a partir de la igualdad anterior, que $\sum_i [y,x_i]\alpha_i = 0$ para todo $y \in Q$. Ahora, para cualquier $x' \in P$, $y' \in Q$ tenemos $\langle x',y'\rangle \cdot \sum_i x_i \otimes \alpha_i = 0$ y como el morfismo $\langle\_,\_\rangle$ es suprayectivo tenemos que $I \cdot \sum_i x_i \otimes \alpha_i = 0$.

A continuación vamos a probar que ℓ es epimorfismo. Consideremos cualquier $\gamma \in Hom_I(I \cdot Hom_J(P,U) \cdot I, K)$, $x \in P$, $y \in Q$, $a = \langle x,y\rangle \in I$. Para cada $u \in U$ denotemos con $«\_,\_»: P_J \longrightarrow U_J$ el homomorfismo dado por $«u,y»(x') = u[y,x']$ para cada $x' \in P$. Definimos $\alpha: {}_IU \longrightarrow {}_IK$ de la siguiente manera: $u\alpha = «u,y» \cdot \gamma$. Se puede demostrar sin dificultad que α está bien definida y es un homomorfismo. De hecho, como $Q = J \cdot Q$ tenemos que $\alpha \in J \cdot Hom_I(U,K)$. Finalmente, $(x \otimes \alpha)\ell$ nos da, para cada $\beta \in I \cdot Hom_J(P,U) \cdot I$,

$$\beta((x \otimes \alpha)\ell) = \beta(x)\alpha = «\beta(x),y»\gamma = (\beta(x)[y,\_])\gamma = \beta(x[y,\_])\gamma =$$
$$= \beta(\langle x,y\rangle \cdot \_)\gamma = ((\beta\langle x,y\rangle)(\_))\gamma = \beta(\langle x,y\rangle\gamma),$$

lo cual muestra que $\langle x,y\rangle\gamma$ pertenece a Im ℓ. La hipótesis de que $\langle\_,\_\rangle$ es suprayectiva establece que ℓ es suprayectiva.

(ii) Definimos $q: J \cdot Hom_I(P,U) \cdot J \otimes_J L \longrightarrow J \cdot Hom_I(P, U \otimes_J L)$ haciendo, para cada $x \in P$, $z \in L$, $\alpha \in J \cdot Hom_I(P,U) \cdot J$, $x((\alpha \otimes z)q) = (x\alpha) \otimes z$ y es fácil probar que, de hecho, Im $q \subseteq J \cdot Hom_I(P, U \otimes_J L)$ y q es un J–homomorfismo. A continuación, notemos que para cada X en I–MOD existe un epimorfismo de J–módulos por la izquierda con núcleo de torsión $\eta_X: J \cdot Hom_I(P,I) \otimes_I X \longrightarrow J \cdot Hom_I(P,X)$ dado por $u((y \otimes z)\eta_X) = (uy)z$, para $u \in P$, $y \in J \cdot Hom(P,I)$, $z \in X$. Si tomamos $X = U$ entonces $\eta_U: J \cdot Hom_I(P,I) \otimes_I U \longrightarrow J \cdot Hom_I(P,U) \cdot J$ es un epimorfismo con núcleo de torsión y en consecuencia obtenemos un diagrama conmutativo en J–MOD con renglones y columnas exactos

$$
\begin{tikzcd}
J\cdot \mathrm{Hom}_I(P,I)\otimes_I U\otimes_J L \arrow[r, "\eta_U\otimes 1_L"] \arrow[d] & J\cdot \mathrm{Hom}_I(P,U)\cdot J\otimes_J L \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
J\cdot \mathrm{Hom}_I(P,U\otimes_J L) \arrow[r, equal] \arrow[d] & J\cdot \mathrm{Hom}_I(P,U\otimes_J L) & \\
0 & &
\end{tikzcd}
$$

Por lo tanto, podemos ver que q es un epimorfismo con núcleo de torsión.

Proposición 2.2.4: Sean I y J anillos idempotentes y (I,J,P,Q) un contexto de Morita con homomorfismos suprayectivos $\langle\_,\_\rangle$, $[\_,\_]$ y módulos unitarios ${}_IP$, ${}_JQ$, P_J, Q_I. Entonces:

(i) Los morfismos canónicos $I \longrightarrow \mathrm{End}(P_J)$, $I \longrightarrow \mathrm{End}({}_JQ)$, $J \longrightarrow \mathrm{End}({}_IP)$, $J \longrightarrow \mathrm{End}(Q_I)$ inducen, respectivamente, los isomorfismos de anillos $I/r_I(I) \approx I\cdot\mathrm{End}({}_JQ)$, $I/\ell_I(I) \approx \mathrm{End}(P_J)\cdot I$, $J/\ell_J(J) \approx \mathrm{End}(Q_I)\cdot J$, y $J/r_J(J) \approx J\cdot\mathrm{End}({}_IP)$.

(ii) Los funtores

$(P\otimes_J\_)/t_I(P\otimes_J\_)$: J-mód $\longrightarrow$ I-mód y $J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,\_)$: I-mód $\longrightarrow$ J-mód

son equivalencias inversas de categorías.

(iii) Los funtores

$(P\otimes_J\_)/t_I(P\otimes_J\_)$: J-mód $\longrightarrow$ I-mód y $(Q\otimes_I\_)/t_J(Q\otimes_I\_)$: I-mód $\longrightarrow$ J-mód

son equivalencias inversas de categorías.

También hay equivalencias inversas de categorías entre mód-I y mód-J de una manera similar a (ii) y (iii).

Demostración: (i) Mostraremos, como ejemplo, que el núcleo del homomorfismo canónico de anillos $\theta: I \longrightarrow \mathrm{End}(P_J)$ es $\ell_I(I)$ y su imagen es $\mathrm{End}(P_J)\cdot I$. Nótese primero que $a \in$ Núc θ si y sólo si

$a\cdot P = 0$. Como $P = I\cdot P$ es claro que $a \in \ell_I(I)$ implica que $a\cdot P = 0$; recíprocamente, supongamos que $a\cdot P = 0$ y sea $a' \in I$, $a' = \langle u,w\rangle$, con $u \in P$, $w \in Q$. Entonces $aa' = a\langle u,w\rangle = 0$ y $a \in \ell_I(I)$. A continuación, sea $\varphi \in \mathrm{End}(P_J)$, $a \in I$. Como $\langle\_,\_\rangle$ es un epimorfismo, $a = \sum_i\langle x_i,y_i\rangle$ para algunos $x_i\in P$, $y_i\in Q$. Ahora, para cada $u \in P$ tenemos que

$$(\varphi a)(u) = \textstyle\sum_i\varphi(\langle x_i,y_i\rangle u) = \sum_i\varphi(x_i[y_i,u]) = (\sum_i\langle\varphi(x_i),y_i\rangle)u = a'u,$$

si hacemos $a' = \sum_i\langle\varphi(x_i),y_i\rangle \in I$. En consecuencia, $\varphi a \in \mathrm{Im}\,\theta \subseteq \mathrm{End}(P_J)$ y por lo tanto $\mathrm{Im}\,\theta = \mathrm{End}(P_J)\cdot I$. Los otros casos se siguen de un modo similar.

(ii) Nótese que si tenemos ${}_IK \in I\text{-mód}$ y ${}_JL \in J\text{-mód}$ entonces los módulos $I\cdot\mathrm{Hom}_I(I,K) \cong {}_IK$ y ${}_J(J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,P\otimes_J L))$ son libres de torsión. Aplicando la Proposición 2.2.3 con ${}_IU_J={}_IP_J$ obtenemos los isomorfismos canónicos

$$(P\otimes_J J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,K))/t_I(P\otimes_J J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,K)) \cong I\cdot\mathrm{Hom}_I(I/\ell_I(I),K) \cong$$
$$\cong I\cdot\mathrm{Hom}_I(I,K) \cong K$$

y

$$(J \otimes_J L)/t_J(J \otimes_J L) \cong (J/r_J(J) \otimes_J L)/t_J(J/r_J(J) \otimes_J L) \cong J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,P\otimes_J L).$$

Por otro lado, el epimorfismo natural $J \otimes_J L \longrightarrow L$ tiene núcleo de torsión, así que $(J \otimes_J L)/t_J(J \otimes_J L) \cong {}_JL$. Estos isomorfismos nos muestran que los funtores definidos en (ii) son, de hecho, equivalencias inversas.

(iii) Por (ii), será suficiente probar que los funtores $(Q \otimes_I\_)/t_J(Q \otimes_J\_)\colon I\text{-MOD} \longrightarrow J\text{-mod}$ y $J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,\_)\colon I\text{-mód} \longrightarrow J\text{-mód}$ son naturalmente isomorfos. En vista de la Proposición 2.2.2(iii) sabemos que existe la siguiente sucesión exacta corta en J-MOD: $0 \longrightarrow t_J(Q) \longrightarrow Q \longrightarrow J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I) \longrightarrow 0$ así que si $X \in I\text{-MOD}$, tenemos un epimorfismo en la categoría de todos los J-módulos por la izquierda J-MOD, $Q \otimes_I X \longrightarrow J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I) \otimes_I X$, con núcleo de torsión. Como establecimos en la demostración de la última parte de la Proposición 2.2.3, el homomorfismo natural

$$J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I) \otimes_I X \longrightarrow J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,X)$$

también es un epimorfismo con núcleo de torsión. Componiendo ambos epimorfismos tenemos un epimorfismo $Q \otimes_I X \longrightarrow J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,X)$ el cual tiene también núcleo de torsión. Como $J\cdot Hom_I(P,X)$ es libre de torsión podemos ver que $Q \otimes_I X/t_J(Q \otimes_I X) \cong J\cdot Hom_I(P,X)$ de este modo y así completamos la demostración.

Juntando todos los resutados anteriores podemos dar a continuación, una versión del teorema de Morita para anillos idempotentes.

Teorema 2.2.5: Sean I y J anillos idempotentes de tal manera que se tienen equivalencias inversas de categorías $F{:}I\text{-mód} \longrightarrow J\text{-mód}$ y $G{:}J\text{-mód} \longrightarrow I\text{-mód}$. Entonces, existen bimódulos ${}_IP_J$, ${}_JQ_I$ tales que:

(i) ${}_IP_J$, ${}_JQ_I$ son bimódulos unitarios y cada uno de estos cuatro módulos ${}_IP$, P_J, ${}_JQ$ y Q_I genera todos los objetos de las correspondientes categorías I-mód, mód-J, J-mód y mód-I. Además, ${}_IP$ y ${}_JQ$ son codivisibles y se tienen los isomorfismos canónicos:

$$I/\ell_I(I) \approx End(P_J)\cdot I,\ I/r_I(I) \approx I\cdot End({}_JQ),$$

$$J/\ell_J(J) \approx End(Q_I)\cdot J \text{ y } J/r_J(J) \approx J\cdot End({}_IP).$$

(ii) Existen isomorfismos de bimódulos

$$P/t_I(P) \cong I\cdot Hom_J(Q,J);\ P/t_J(P) \cong Hom_I(Q,I)\cdot J;$$

$$Q/t_J(Q) \cong J\cdot Hom_I(P,I);\ Q/t_I(Q) \cong Hom_J(P,J)\cdot J.$$

(iii) **F** es naturalmente isomorfo a $J\cdot Hom_I(P,\_)$, y

G es naturalmente isomorfo a $I\cdot Hom_J(Q,\_)$.

(iv) **F** es naturalmente isomorfo a $Q \otimes_I \_/t_J(Q \otimes_I \_)$, y

G es naturalmente isomorfo a $P \otimes_J \_/t_I(P \otimes_J \_)$.

(v) P y Q inducen un contexto de Morita (I,J,P,Q) con morfismos suprayectivos, y $P \otimes_J Q$ y $Q \otimes_I P$ son anillos y existen homomorfismos suprayectivos de anillos $P \otimes_J Q \longrightarrow I$ y $Q \otimes_I P \longrightarrow J$ de tal manera que los núcleos son de torsión a los dos lados.

Demostración: (i)-(iv) se sigue de las Proposiciones 2.2.1, 2.2.2, 2.2.4. Asimismo, de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2 se sigue que existe un contexto de Morita con morfismos suprayectivos $\langle\_,\_\rangle:P \otimes_J Q \longrightarrow I$ y $[\_,\_]:Q \otimes_I P \longrightarrow J$. Si definimos para x_1, $x_2 \in P$ e y_1, $y_2 \in Q$, la siguiente multiplicación: $(x_1 \otimes y_1)\cdot(x_2 \otimes y_2) = x_1 \otimes [y_1,x_2]y_2$ e $(y_1 \otimes x_1)\cdot(x_2 \otimes y_2) = y_1 \otimes \langle x_1,y_2\rangle x_2$ entonces se puede ver con facilidad que $P \otimes_J Q$ y $Q \otimes_I P$ son anillos y así tenemos (v).

Nótese que este teorema generaliza [7, Theorem 2.1; 52, Corollary 4.3, y 78, Lemma 2.4 y Theorem 2.5]. Una situación particular es que los anillos idempotentes sean al menos no degenerados por un lado; es decir, por ejemplo, que $\mathcal{r}_I(I) = 0$ y $\mathcal{r}_J(J) = 0$. En este caso, tenemos que $I \in$ I-mód y $J \in$ J-mód al menos, y para obtener un contexto de Morita no se tendría que considerar la colocalización de **F**(I) y **G**(J). Vamos a escribir cómo se ve una caracterización de equivalencias en este caso.

Corolario 2.2.6: Sean I y J anillos no degenerados (por la izquierda) e idempotentes tales que existen equivalencias inversas de categorías **F**:I-mód $\longrightarrow$ J-mód y **G**:J-mód $\longrightarrow$ I-mód con M = **G**(J) y N = **F**(I). Entonces, M y N son bimódulos tales que:

(i) ${}_IM$, M_J, ${}_JN$, N_I son generadores y $J = J\cdot End({}_IM) = End(N_I)\cdot J$; $I = End(M_J)\cdot I = I\cdot End({}_JN)$.

(ii) ${}_IM_J \cong Hom_I(N,I)\cdot J \cong I\cdot Hom_J(N,J)$;

${}_JN_I \cong J\cdot Hom_I(M,I) \cong Hom_J(M,J)\cdot I$.

(iii) **F** es naturalmente isomorfo a $J\cdot Hom_I(M,\_)$ y

G es naturalmente isomorfo a $I\cdot Hom_J(N,\_)$.

(iv) **F** es naturalmente isomorfo a $N \otimes_I \_/t_J(N \otimes_I \_)$, y

G es naturalmente isomorfo a $M \otimes_J \_/t_I(M \otimes_J \_)$.

(v) Identificando ${}_JN_I$ con $J\cdot Hom_I(M,I)$ y J con $J\cdot End({}_IM)$, sean, para cada $x \in M$, $y \in N$: $\langle x,y\rangle = xy \in I$ y $[y,x] = \langle\_,y\rangle x \in J$. Entonces $M \otimes_J N$ y $N \otimes_I M$ son anillos si se define $(u \otimes w)(x \otimes y) = u \otimes [w,x]y$ y $(w \otimes u)(y \otimes x) = w \otimes \langle u,y\rangle x$ y se tienen isomorfismos de anillos

$$M \otimes_J N/t_I(M \otimes_J N) \approx I \text{ y } N \otimes_I M/t_J(N \otimes_I M) \approx J$$

Un ejemplo de un funtor $P \otimes_{J}\_/t_I(P \otimes_{J}\_)$ donde $t_I(P \otimes_{J}\_)$ no es cero es el siguiente: Sea S un anillo que no sea noetheriano, R = = $\mathbb{RFM}(S)$, el anillo de las matrices de renglón finito con entradas en S e I = $\mathbb{FC}(S)$, el subanillo (sin uno) de R que consiste en las matrices que tienen sólo un número finito de columnas no nulas. I es un ideal bilátero y proyectivo (y en consecuencia idempotente) y como tal genera una teoría de torsión $(\mathbb{T},\mathbb{L})$ en R-mód tal que $_RX \in \mathbb{T}$ si y sólo si IX = 0. Se tiene entonces una equivalencia entre las subcategorías F:I-mód $\longrightarrow$ S-mód [26, Theorem 1.7] y R $\approx$ End($_I$I). Sea $P \in$ I-mód tal que $F(P) \cong S$; entonces, P es proyectivo y finitamente generado en I-mód y también lo es entonces en R-mód. Siguiendo a [25] denotamos con GF[P] a la subcategoría plena de R-mód que consiste en todos los R-módulos por la izquierda X tales que son P-generados y P-fieles; esto último significa que para todo submódulo Y de X se tiene $Y_P \neq 0$. Se puede probar de forma directa que $X \in$ GF[P] si y sólo si X es P-generado y $\mathrm{Hom}_R(P,Y) \neq 0$ para todo Y submódulo de X, o, lo que es equivalente, si y sólo si $X \in$ I-mód. Por lo tanto, GF[P] = I-mód.

Sea CD[P] = { $X \in$ R-mód | $\exists\ P^{(K)} \longrightarrow P^{(L)} \longrightarrow X \longrightarrow 0$ exacta con K, L conjuntos };

es decir, los R-módulos por la izquierda con dimensión P-codominante mayor o igual que 2. Por [25, Theorem 2.3] y como P es proyectivo y finitamente generado, existen equivalencias inversas de categorías dadas por las restricciones de $\mathrm{Hom}_R(P,\_)$:GF[P] = I-mód $\longrightarrow$ S-mód y $P \otimes_S\_/t_I(P \otimes_S\_)$:S-mód $\longrightarrow$ GF[P], y $\mathrm{Hom}_R(P,\_)$:CD[P] $\longrightarrow$ S-mód y $P \otimes_S\_$:S-mód $\longrightarrow$ CD[P]. Obsérvese que en este caso y por dicho teorema, GF[P] y CD[P] son categorías equivalentes y serán iguales si y sólo si $t_I(P \otimes_{J}\_) = 0$. Supongamos que $t_I(P \otimes_{J}\_) = 0$. Entonces, tenemos que CD[P] = GF[P] y por [25, Proposition 1.5] $_RP$ es autogenerador y en consecuencia también $_RI$ es autogenerador. Esto significa que para todo $a \in I$, $a \in Ia$ y esto a su vez implica [22, Proposition 6] que S es noetheriano, lo cual, por hipótesis, es imposible. Así, $t_I(P \otimes_J \_)$ no puede ser cero.

Finalmente, nótese que la condición de que P y Q sean generadores localmente proyectivos [7], no aparece en el inciso (i) del Teorema 2.2.5, porque I y J no se suponen localmente proyectivos. En lugar de ello, P y Q son codivisibles; es decir, verifican una condición de proyectividad relativa. De hecho, podemos dar una caracterización de la equivalencia de Morita en términos de un bimódulo ${}_IP_J$ que genera a todos los objetos de I-mód y mód-J.

Teorema 2.2.7: Sean I y J anillos idempotentes. Entonces, I-mód y J-mód son categorías equivalentes si y sólo si existe un bimódulo ${}_IP_J$ tal que:

(i) ${}_IP$ y P_J son módulos unitarios y generan a todos los módulos en I-mód y mód-J, respectivamente.

(ii) El homomorfismo de anillos canónico $J \longrightarrow End({}_IP)$ induce un isomorfismo $J/n_J(J) = J' \cong J\cdot End({}_IP)$.

Si dicho bimódulo ${}_IP_J$ existe, entonces los funtores

$J\cdot Hom_I(P,\_):I\text{-mód} \longrightarrow J\text{-mód}$ y $(P \otimes_J \_)/t_I(P \otimes_J \_):J\text{-mód} \longrightarrow I\text{-mód}$

son equivalencias inversas de categorías.

Demostración: Supongamos primero que tenemos equivalencias inversas $F:I\text{-mód} \longrightarrow J\text{-mód}$ $G:J\text{-mód} \longrightarrow I\text{-mód}$, y $M = G({}_JJ)$. Entonces la colocalización P, de M, satisface las condiciones anteriores en vista del Teorema 2.2.5. Recíprocamente, si suponemos que ${}_IP_J$ verifica (i) y (ii) entonces haciendo $N = J\cdot Hom_I(P,I) \subseteq$ $\subseteq Hom_I(P,I)$, ${}_JN$ es libre de torsión y así es un J'-módulo tal que $J\cdot N = N = J'\cdot N$. Del inciso (ii) se sigue que P también es I-J'-bimódulo. Podemos definir los morfismos $\langle \_,\_ \rangle:P \otimes_J N \longrightarrow I$ dado por $\langle x,\alpha \rangle = x\alpha$ y $[\_,\_]:N \otimes_I P \longrightarrow J' \subseteq End({}_IP)$ por $u[\alpha,x] = \langle u,\alpha \rangle x$. Éstos son homomorfismos de bimódulos que satisfacen las condiciones de asociatividad de la definición de contexto de Morita. Ahora, se puede ver que $\langle \_,\_ \rangle$ es un epimorfismo porque ${}_IP$ genera a I y $PJ = P$. También $[\_,\_]$ es un epimorfismo: si hacemos $A = Im\ [\_,\_]$ entonces es fácil ver que $PA = P$ así como $IP = P$ e $I = \mathrm{Im}\ \langle \_,\_ \rangle$. Ahora sea $b \in J'$; como P_J genera J, $b = \sum_i h_i(x_i)$ para algunas $x_i \in P$ y $h_i \in \mathrm{Hom}_J(P,J')$. Pero, del hecho de que $PA = P$, se sigue que $b = \sum_j g_j(y_j) \cdot r_j$, para $g_j \in \mathrm{Hom}_J(P,J')$, $y_j \in P$, $r_j \in A$. Así, $b \in J'A = A$ y $[\_,\_]$ es suprayectiva.

Por otra parte, si $b \in J'$, $f \in \mathrm{Hom}_I(P,I)$ entonces podemos suponer que $b = [\alpha,x]$ para algún $\alpha \in N$ y $x \in P$ y en consecuencia, para cualquier $u \in P$, $u(bf) = \langle u,\alpha \rangle (xf)$ y $bf = \langle \_,\alpha \rangle (xf) \in NI$, así que $N = NI$. Todo esto muestra que (I,J',P,N) es un contexto de Morita con homomorfismos de bimódulos suprayectivos y bimódulos unitarios.

Tomemos ahora ${}_JQ$, la colocalización de N como en la demostración de la Proposición 2.2.1 (iv). Así, como en dicha demostración, se puede ver que ${}_JQ_I$ es un bimódulo unitario, $\mathrm{Hom}_J(N,J') \cong \mathrm{Hom}_J(Q,J)$ y el epimorfismo $N \otimes_I P \longrightarrow J'$ se levanta a un epimorfismo $Q \otimes_I P \longrightarrow J$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q \otimes_I P & \longrightarrow & J \\ \downarrow & & \downarrow \\ N \otimes_I P & \longrightarrow & J' \end{array}$$

conmuta. Además, $QI = I$ porque $NI = N$ y en consecuencia, al igual que en la Proposición 2.2.1 (iv) tenemos que existe un contexto de Morita (I,J,P,Q) con ${}_IP_J$ y ${}_JQ_I$ módulos unitarios. A partir de la Proposición 2.2.4 (ii) se deduce el resultado.

Nótese que si I y J son anillos idempotentes y existe una equivalencia de categorías entre I-mód y J-mód entonces, por la Proposición 2.2.1, existe un contexto de Morita (I,J,P,Q) con morfismos suprayectivos, y de la Proposición 2.2.4 se sigue entonces que mod-I y mód-J también son categorías equivalentes. Así tenemos,

Corolario 2.2.8: Sean I y J anillos idempotentes. Entonces I-mód y J-mód son categorías equivalentes si y sólo si mód-I y mód-J son categorías equivalentes.

En consecuencia, diremos que I y J son anillos Morita equivalentes cuando I-mód y J-mód sean categorías equivalentes.

El teorema de Morita en el caso clásico establece que dos anillos R y S son Morita equivalentes si y sólo si S es isomorfo al anillo de endomorfismos de un progenerador de R-mód. Con objeto de dar una generalización de este resultado, consideremos ${}_IP$ un módulo unitario y $S = \mathrm{End}({}_IP)$. Denotemos con $\Delta = \{ \alpha \in S \mid u\alpha = \sum_i (u\varphi_i)x_i$, para alguna $\varphi_i \in \mathrm{Hom}_I(P,I)$, $x_i \in P$ y cualquier $u \in P \}$. Nótese que Δ es justo la imagen del homomorfismo canónico $\mathrm{Hom}_I(P,I) \otimes_I P \longrightarrow S$. Ahora sea T un subanillo de Δ. Decimos que T es un ideal q-denso por la derecha de Δ si $T\cdot\Delta = T$ y $\Delta\cdot T = \Delta$.

Teorema 2.2.9: Sean I y J anillos idempotentes. Entonces I y J son anillos Morita equivalentes si y sólo si $J' = J/\kappa_J(J)$ es isomorfo a un ideal q-denso por la derecha de Δ [23, Definition 2.1], para algún módulo ${}_IP$ codivisible unitario, tal que ${}_IP$ genera a todos los módulos de la categoría I-mód.

Demostración: Supongamos que I-mód y J-mód son categorías equivalentes y tomemos ${}_IP$ como en la Proposición 2.2.1. Entonces ${}_IP$ es codivisible y unitario y genera a todos los módulos de la categoría I-mód, en vista de las Proposiciones 2.2.1 y 2.2.2. Considérese el homomorfismo canónico $\mathrm{Hom}_I(P,I) \otimes_I P \longrightarrow S = \mathrm{End}({}_IP)$ cuya imagen es Δ. Entonces, como $P = PJ = PJ'$ (por la Proposición 2.2.1) tenemos la igualdad $\Delta J' = \Delta$. Por otro lado, si ${}_JN = J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I') \cong J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I)$, ya vimos en la demostración de la Proposición 2.2.1 (iv) que existe un contexto de Morita con morfismos suprayectivos (I,J',P,Q), así que el homomorfismo $J\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I) \otimes_I P \longrightarrow J' \subseteq S$, es suprayectivo. En consecuencia, $J'\Delta = J\Delta = J'$. Esto demuestra que J' es q-denso en Δ.

Recíprocamente, supóngase que ${}_IP$ verifica las condiciones de la proposición y que J' es q-denso en Δ. Entonces el homomorfismo canónico $J'\cdot\mathrm{Hom}_I(P,I) \otimes_I P \longrightarrow J'$ deberá ser un epimorfismo, ya que $J'\Delta = J'$; y esto implica que P_J genera J', y por lo tanto P_J genera a todos los módulos de la categoría mód-J. Además, P_J es unitario porque $\Delta J' = \Delta$. En consecuencia, ${}_IP_J$ verifica la condición (i) del Teorema 2.2.7. Para terminar la demostración, nótese que $J\cdot\mathrm{End}({}_IP) =$ $= J'\cdot\mathrm{End}({}_IP) = J'\Delta = J'$ porque J' es q-denso en Δ. Por el Teorema 2.2.7, lo anterior muestra que I y J son Morita equivalentes.

2.3. Algunas consecuencias de los teoremas de Morita

Es conocido que si R y S son anillos con identidad Morita equivalentes entonces sus centros son anillos isomorfos; así como también son isomorfos sus retículos de ideales biláteros. Sin embargo, estas propiedades pueden no verificarse en el caso en que dos anillos R y S no posean identidad. En lo que sigue, analizaremos estas dos situaciones.

Proposición 2.3.1: Sean I y J anillos idempotentes tales que son Morita equivalentes. Entonces existen isomorfismos de anillos

$$\mathrm{Cen}(\mathrm{End}({}_I I/\mathcal{r}_I(I))) \approx \mathrm{Cen}(\mathrm{End}({}_J J/\mathcal{r}_J(J))) \text{ y}$$

$$\mathrm{Cen}(\mathrm{End}({}_I I/\ell_I(I))) \approx \mathrm{Cen}(\mathrm{End}({}_J J/\ell_J(J))).$$

Demostración: Veremos sólo el primero de los isomorfismos; el otro es completamente análogo.

Vamos a mostrar primero que existe un isomorfismo de anillos entre $\mathrm{Cen}(\mathrm{End}({}_I I/\mathcal{r}_I(I)))$ y el anillo de todas las transformaciones naturales del funtor identidad de I-mód en sí mismo.

Se puede verificar en forma directa que dicho conjunto de transformaciones naturales, junto con la suma y la composición obvias es un anillo con uno.

Para ver que existe un isomorfismo de anillos con el anillo anterior, considérese, para cada $K \in$ I-mód, el monomorfismo de grupos abelianos $0 \longrightarrow K \longrightarrow Hom_I(I/n_I(I),K)$ dado por la correspondencia que asigna $k \longmapsto (I/n_I(I) \xrightarrow{\cdot k} I/n_I(I)\cdot k)$. Nótese que, bajo esta asignación K se sumerge en $Hom_I(I/n_I(I),K)$ como $End(_I I/n_I(I))$-módulo por la izquierda.

Ahora, sea $x \in Cen(End(_I I/n_I(I)))$, arbitrario. Consideremos η_K, la multiplicación por x, $Hom_I(I/n_I(I),K) \xrightarrow{x\cdot} Hom_I(I/n_I(I),K)$. Como x conmuta con los endomorfismos de $I/n_I(I)$ y $K = IK$ entonces es claro que η_K se restringe a $K \xrightarrow{(x\cdot)} x\cdot K \subset K$. Por lo tanto, la familia $\{\eta_K\}_{K \in \text{I-mód}}$ es una transformación natural del funtor identidad de I-mód en sí mismo.

Para definir la inversa, tómese una tal transformación natural, $\{\eta_K\}_{K \in \text{I-mód}}$. Como $I/n_I(I)$ es un objeto de I-mód entonces $\eta_{I/n_I(I)}$ está definido y fácilmente puede verse que es un elemento del anillo $Cen(End(_I I/n_I(I)))$.

Análogamente, se tiene un isomorfismo de anillos entre $Cen(End(_J J/n_J(J)))$ y las transformaciones naturales de la identidad en J-mód en sí mismo.

Finalmente, como I-mód y J-mód son categorías equivalentes entonces, justo la equivalencia que existe entre ellas determina un isomorfismo de anillos entre las transformaciones naturales del funtor identidad en I-mód es sí mismo y las transformaciones naturales del funtor identidad en J-mód en sí mismo. Componiendo los isomorfismos obtenemos el isomorfismo deseado.

Nótese que esto no significa que los centros de los anillos $I/n_I(I)$ y $J/n_J(J)$ sean isomorfos. Véase [7, p.14] para un ejemplo en el cual ocurre que Cen(I) no es isomorfo a Cen(J). Por otra parte, destaquemos que para cualquier anillo idempotente, I, los anillos I, $I/n_I(I)$, $I/\ell_I(I)$ e $I/\mathbb{T}(I)$ son todos Morita equivalentes.

Como consecuencia de esta proposición tenemos:

Proposición 2.3.2: Sean I y J anillos idempotentes, no degenerados y conmutativos. Entonces I y J son Morita equivalentes si y sólo si I y J son isomorfos.

Demostración: Primero veremos que si I es conmutativo entonces $End({}_I I)$ también es conmutativo. Sea $R = End({}_I I)$, y tomemos $r \in R$ y $a \in I$. Si identificamos a I con el ideal por la derecha de R que consiste en las multiplicaciones por la derecha por elementos de I, tenemos que $ra = ar$. De hecho, para cada $\lambda \in I$ se tiene que $\lambda(ra) = (\lambda r)a = a(\lambda r) = (a\lambda)r = (\lambda a)r = \lambda(ar)$. Por lo tanto, I es un ideal bilátero de R el cual está contenido en Cen(R). Finalmente, si $r,r' \in R$ y $a \in I$ entonces tenemos $a(rr') = (ar)r' = r'(ar) = r'(ra) = (rr')a = a(rr')$; en consecuencia $I(rr'-r'r) = 0$ y por lo tanto $rr' = r'r$. Es decir, R es un anillo conmutativo.

Supongamos ahora que I y J son anillos no degenerados, idempotentes y conmutativos tales que son Morita equivalentes, y sean $R = End({}_I I)$ y $S = End({}_J J)$. Por la proposición anterior y el argumento que acabamos de hacer, tenemos que R y S son anillos isomorfos. Aún más, con la notación del Teorema 2.2.5 el isomorfismo está dado a través de las relaciones $R \approx End({}_J N) = End({}_S N) = End(N_S) = End(N_I) \approx S$. Si llamamos $\varphi: R \longrightarrow S$ a este isomorfismo, tenemos que para cada $y \in N$, $r \in R$, $yr = \varphi(r)y$; como S es conmutativo, N puede ser visto también como S-módulo por la derecha y como tal, N_R está determinado por el cambio de anillos por medio de φ. Por lo tanto, la traza de N_S en S, $Tr_S(N_S)$ es exactamente la imagen por φ de $Tr_R(N_R)$. Pero sabemos que, por la Proposición 2.2.1 y el Teorema 2.2.5, $Tr_R(N_R) = J$. Por lo tanto φ se restringe a un isomorfismo entre I y J. Esto concluye la demostración.

Anteriormente, hemos visto que un contexto de Morita puede dar lugar a una equivalencia entre anillos idempotentes. Hemos visto también la noción de anillos (con uno) contexto equivalentes. Vamos a ver explícitamente la conexión entre esta relación de equivalencia entre anillos y esta versión de la teoría de Morita.

Proposición 2.3.3: Sean R y S anillos con identidad tales que existe un contexto no degenerado entre ellos, con trazas idempotentes, T, T'. Entonces T y T' son Morita equivalentes.

Recíprocamente, sean I y J anillos (sin uno) no degenerados e idempotentes tales que son Morita equivalentes y $R = \mathrm{End}({}_I I)$, $S = \mathrm{End}({}_J J)$. Entonces si R' y S' son anillos con uno tales que $I \subseteq R' \subseteq R$ y $J \subseteq S' \subseteq S$ entonces R' y S' son anillos contexto-equivalentes.

Demostración: La primera parte es inmediata por lo que vimos en las páginas 36-37, en vista de que, con la notación en dichas páginas ${}_R\mathcal{U}$ es equivalente a T-mód y ${}_S\mathcal{U}$ es equivalente a T'-mód.

Para el recíproco, considérese $I' = R \cdot I$. Entonces, es fácil ver que I' es un ideal bilátero de R tal que $\mathrm{End}({}_{I'}I') \approx R$, de una manera canónica. Además, I' es un anillo idempotente y no degenerado.

Existe un funtor de I'-mód en I-mód tal que envía cada X en IX y que se puede ver de forma directa que es una equivalencia, cuya inversa está dada por el funtor que envía cada Y a $I'\mathrm{Hom}_I(I,Y)$. Esto muestra que I y J pueden ser vistos como ideales biláteros de R y S respectivamente. Entonces, por el argumento de la Proposición 2.2.1 y el Teorema 2.2.5, tenemos un contexto de Morita con morfismos suprayectivos (I,J,M,N) el cual puede ser visto como un contexto de Morita no degenerado (Proposición 2.2.2) entre R y S o entre R' y S'.

Como vimos en las páginas 38-40 existe una conexión entre los Γ-anillos y estos resultados de teoría de Morita en el caso en que los anillos sean no degenerados, al menos uno a un lado y el otro al lado opuesto. Esto implica que se pueden aplicar muchos de los resultados de [69, 70, 71, 72, 73]. En particular, presentamos esta versión acerca del conocido hecho de que los retículos de ideales biláteros de anillos (con uno) Morita equivalentes son isomorfos. Para describir este resultado, supongamos que I y J son anillos equivalentes bajo $F{:}I\text{-mód} \longrightarrow J\text{-mód}$ y $G{:}J\text{-mód} \longrightarrow I\text{-mód}$ y denotemos el correspondiente contexto de Morita con (I,J,P,Q) con morfismos $\langle\_,\_\rangle$ y $[\_,\_]$. Hacemos, para $A \subseteq I$, $A^c = \{ x \in I \mid I\cdot x \subseteq A \}$.

Proposición 2.3.4: Sean I y J anillos idempotentes y Morita equivalentes, y denotemos con $\mathcal{L}_I$ el retículo

$$\{ A \subseteq I \mid A \text{ es un ideal de } I \text{ tal que } IAI = A \}$$

y análogamente definimos $\mathcal{L}_J$. Entonces existe un isomorfismo entre $\mathcal{L}_I$ y $\mathcal{L}_J$ el cual puede ser dado por las correspondencias $A \longmapsto [QA,P]$ y $B \longmapsto \langle PB,Q\rangle$; o equivalentemente por $A \longmapsto J\cdot\ell_J(F(I/A^c))\cdot J$ y $B \longmapsto I\cdot\ell_I(G(J/B^c))\cdot I$.

Demostración: La primera biyección es fácil de demostrar y de hecho está dada en [72, p.155] (también puede deducirse de [69, Proposition 6]). La segunda es análoga a [6, Proposition 21.11] y se obtiene con facilidad si se suponen a I y J no degenerados. En el caso general, se obtiene al probar que si $\bar{A} = (A + \mathbb{T}(I))/t_I(A + \mathbb{T}(I))$ entonces $I/A^c \cong \bar{I}/\bar{A}^c$ y por lo tanto $\ell_{\bar{J}}(F(\bar{I}/\bar{A}^c)) = \ell_J(F(I/A^c))/\mathbb{T}(J)$.

Nótese que muchas de las propiedades que son invariantes bajo equivalencias de Morita en el caso de anillos con uno, también lo son en el caso de los anillos sin uno. Por ejemplo, se puede ver de forma directa que si I es un anillo idempotente que es primo, semiprimo, primitivo por la izquierda, con radical de Jacobson cero, simple, o suma directa de submódulos por la izquierda irreducibles, entonces I es no degenerado. Así, se puede aplicar la Proposición 2.3.3 y los resultados de [69] o alternativamente, la Proposición 2.3.4 y los de [70, 71, 72, 73] para obtener que las siguientes propiedades son invariantes bajo equivalencia de Morita, en el caso en que los anillos I y J sean no degenerados.

Proposición 2.3.8: Sean I y J anillos idempotentes y no degenerados tales que son Morita equivalentes. Entonces:

(i) I es primo (respectivamente semiprimo, primitivo por la izquierda) si y sólo si J es primo (respectivamente semiprimo, primitivo por la izquierda).

(ii) I tiene radical de Jacobson cero si y sólo si J tiene radical de Jacobson cero.

(iii) I es un anillo simple (respectivamente, es suma directa de submódulos por la izquierda irreducibles) si y sólo si J también lo es.

Demostración: Las propiedades de primo y semiprimo se obtienen de las Proposiciones 2.3.3 y 2.3.4 junto con [71, p.155]. La de primitivo de [72, Proposition 2]. La afirmación acerca del radical de Jacobson se puede obtener de forma directa. Si el radical de Jacobson de I es cero entonces la intersección de todos los núcleos de los morfismos en I-mód de I a un I-módulo por la izquierda irreducible es cero y esta propiedad claramente se preserva bajo equivalencias. El último caso también es directo.

C A P I T U L O 3

EL PROBLEMA DE LA CARACTERIZACION

3.1. Introducción

En términos generales, el problema de la caracterización se puede plantear de la siguiente manera: Dada una clase de anillos $\mathfrak{R}$ y una clase de módulos $\mathfrak{M}$ sobre los anillos de la clase $\mathfrak{R}$, describir, en términos de las propiedades de la teoría de anillos, los anillos de endomorfismos $\mathrm{End}({}_RM)$ para todo anillo R de la clase $\mathfrak{R}$ y todo módulo M de la clase $\mathfrak{M}$ [16].

Como hemos apuntado, en nuestro trabajo consideramos tres clases $\mathfrak{M}$ de módulos; a saber, generadores, módulos localmente libres y módulos proyectivos con elemento unimodular, todos no finitamente generados.

Para tratar de encontrar resultados en este sentido, hemos partido de otros resultados conocidos en la literatura sobre equivalencias de categorías (y subcategorías) de Grothendieck que involucran propiedades de los anillos de endomorfismos, para irlas restringiendo hasta encontrar otras situaciones que resulten "satisfactorias" bajo el criterio, como se mencionó antes, de una descripción del anillo de endomorfismos en términos de la teoría de anillos. La base de nuestras descripciones está compuesta, al igual que en casi toda la literatura sobre el tema, por la existencia de una topología (que varía de uno a otro caso) y un ideal (que llamamos el de los "endomorfismos finitos"), al cual en algunos casos podemos describir en términos de elementos idempotentes o de otras propiedades algebraicas.

Uno de los resultados más clásicos en el estudio de las categorías es el Teorema de Gabriel y Popescu [80], que representa a las categorías de Grothendieck como ciertas subcategorías de categorías de módulos, valiéndose del anillo de endomorfismos de un generador. Es natural entonces que éste sea uno de nuestros puntos de partida.

El Teorema de Gabriel y Popescu establece que para una categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$ y un generador, digamos $M \in \mathfrak{C}$, si $E = [\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,M)]^{op} = \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$ y $T: \mathfrak{C} \longrightarrow E\text{-mód}$ es el funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\_)$ tal que $T(C) = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,C)$ entonces T es fiel y pleno y además induce una equivalencia de categorías entre $\mathfrak{C}$ y $(E,\mathcal{F})$-mód, donde $\mathcal{F}$ es la topología de Gabriel por la izquierda más fuerte (o fina) en E para la cual todos los módulos $T(C)$ son $\mathcal{F}$-cerrados [83, Chapter X].

A partir de este resultado, podemos enunciar un primer "Teorema de la caracterización", el cual incluye, para la descripción de E, una topología de Gabriel por la izquierda descrita en forma muy general y términos categóricos.

Teorema 3.1.1: Sea E un anillo y $\mathfrak{C}$ una categoría de Grothendieck. Son equivalentes:

(a) $E \approx \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$ para algún generador $M \in \mathfrak{C}$.

(b) E posee una topología de Gabriel $\mathcal{F}$ de tal manera que E es $\mathcal{F}$-cerrado y además, $\mathfrak{C}$ es equivalente a $(E,\mathcal{F})$-mód.

Demostración: (a⇒b) Es justo el Teorema de Gabriel y Popescu. (b⇒a) Sean $F: \mathfrak{C} \longrightarrow (E,\mathcal{F})$-mód y $G: (E,\mathcal{F})\text{-mód} \longrightarrow \mathfrak{C}$ las equivalencias inversas de categorías. Sea $M \in \mathfrak{C}$ tal que $M \cong G(E)$ y es claro que, como E es generador para $(E,\mathcal{F})$-mód entonces M es generador para $\mathfrak{C}$ y por la equivalencia que se tiene por hipótesis, junto con el hecho de que E es $\mathcal{F}$-cerrado, podemos concluir que $\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M) \approx E$.

Es decir, estamos en la situación:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] & E\text{-mód} \arrow[d, shift right, "a"'] \\ \mathfrak{C} \arrow[ur, "T = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\_)"] \arrow[r, "\simeq"] & (E,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right, "i"'] \end{tikzcd}$$

Y sabemos que el filtro $\mathcal{F}$ corresponde con cierta teoría de torsión, pero no tenemos una descripción para él.

Con vistas a obtener una descripción del filtro anterior, vamos a imponer a $\mathfrak{C}$ la restricción de tener un generador proyectivo. En [26, Theorem 1.19] se establece que cuando se tienen: una categoría de Grothendieck $\mathfrak{C}$ con un generador proyectivo; un anillo E; una teoría de torsión TTF en $\mathfrak{C}$, (T,L); un filtro de Gabriel por la izquierda en E, $\mathcal{F}$ tal que E es $\mathcal{F}$-cerrado, y existe una equivalencia de categorías $F:\mathfrak{C}/T \longrightarrow (E,\mathcal{F})$-mód entonces existe un objeto M en $\mathfrak{C}$ tal que (T,L) es la teoría de torsión $(\mathcal{T},\mathcal{L})$ en $\mathfrak{C}$ asociada con M (páginas 22 y 23), $E \approx \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(\hat{M})$, F es naturalmente equivalente a la restricción a la subcategoría $\mathfrak{C}/T$ del funtor $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\hat{M},\_):\mathfrak{C} \longrightarrow (S,\mathcal{F})$-mód y $\mathcal{F}$ = $= \{ {}_E I \leq {}_E E \mid \hat{M}I = \hat{M} \}$. Así, pues, tenemos una primera descripción para $\mathcal{F}$. Este teorema, en principio, lo que nos dice es que, bajo las hipótesis descritas, una equivalencia entre las subcategorías se puede levantar a un funtor Hom entre las categorías; es decir, la situación es:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge] \mathfrak{C} \arrow[r, dashed, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(\tilde{M},\_)"] \arrow[d, shift right] & E\text{-mód} \arrow[d, shift right] \\ \mathfrak{C}/T \arrow[r, "\simeq"', "F"] \arrow[u, shift right] & (E,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

Para nuestro propósito, este resultado nos sirve, tal vez menos por lo que demuestra que por la descripción de $\mathcal{F}$ (que hace a E

$\mathcal{F}$-cerrado) y porque $E \approx \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(\hat{M})$. Si hacemos a M un generador, entonces tendremos que $T = \{0\}$, $L = \mathfrak{C}$ y $\hat{M} = M$; así, tendremos la situación:

$$\begin{tikzcd}
 & & E\text{-mód} \arrow[d, shift right] \\
\mathfrak{C} \arrow[urr, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,_)"] \arrow[rr, "\simeq", "F"'] & & (E,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

donde, al tener $\mathfrak{C}$ un generador proyectivo, $E \approx \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$ y el filtro es $\mathcal{F} = \{ {}_E I \leq E \mid MI = M \}$.

Si imponemos ahora a $\mathfrak{C}$ la condición de ser localmente finitamente generada con generador proyectivo, P, y además suponemos que M es generador para $\mathfrak{C}$ entonces la Proposición 2.5 de [26] nos da la misma situación del diagrama anterior, pero ahora el filtro $\mathcal{F}$ posee un ideal mínimo, idempotente, que llamaremos E_0 y que se puede describir como los elementos $x \in E$ tales que $x = f \cdot g$ con $f{:}M \longrightarrow P^n$ y $g{:}P^n \longrightarrow M$, donde Im f está contenido en un sub-objeto de P^n finitamente generado (página 22). Nótese que $d(M) = M$ porque M es generador.

Aunque todavía prevalece la necesidad de considerar una equivalencia de categorías en la descripción, la forma del filtro $\mathcal{F}$ es bastante tangible, pues se obtiene con un solo ideal.

Podemos pasar ahora al caso en el que $\mathfrak{C}$ sea una categoría de módulos; sea, pues, $\mathfrak{C}$ = R-mód, para algún anillo R.

Si reproducimos la situación anterior considerando $P = R$ entonces, como R es un generador proyectivo finitamente generado, al tomar una $x \in E_0$, $x = f \cdot g$ como antes, la condición de que Im f esté contenida en un sub-objeto de P^n finitamente generado se tiene siempre, así que puede suprimirse. Además, como M es generador, sigue verificando $M = d(M)$. Estamos entonces en la situación:

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] & & E\text{-mód} \arrow[d, shift right] \\ R\text{-mód} \arrow[urr, "\mathrm{Hom}_R(M,\_)"] \arrow[rr, "\approx"] & & (E,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[u, shift right] \end{tikzcd}$$

donde $E \approx \mathrm{End}({}_RM)$ y $\mathcal{F} = \{{}_EI \leq E \mid MI = M\}$ está generado por un ideal bilátero e idempotente, E_0, igual al conjunto de los elementos $x \in E$ tales que $x = f \cdot g$ con $f:M \longrightarrow R^n$ y $g:R^n \longrightarrow M$. Debido a esta descripción, a E_0 se le conoce como el anillo de los "endomorfismos finitos" de M y se le denota $f\mathrm{End}({}_RM)$. Aún más, como E_0 es ideal idempotente (de hecho, $E_0 \in E_0$-mód) entonces, tal y como vimos en la Sección 1.4 tenemos también que R-mód y E_0-mód son categorías equivalentes y en dicha equivalencia, M corresponde con E_0. Si aplicamos la Proposición 2.2.1 tenemos entonces las equivalencias inversas de categorías dadas por $E_0\mathrm{Hom}_R(M,\_)$:R-mód $\longrightarrow$ E_0-mód y $M \otimes_{E_0} \_$:E_0-mód $\longrightarrow$ R-mód.

Obsérvese que si $x \in E_0$ entonces Im x está contenido en un submódulo de M finitamente generado, pero puede ocurrir que un endomorfismo de M tenga la propiedad de que su imagen esté contenida en un submódulo de M finitamente generado y que sin embargo no pertenezca a E_0. Es decir, los endomorfismos finitos no necesariamente son todos aquellos cuya imagen está contenida en un submódulo de M finitamente generado y tampoco son únicamente aquellos cuya imagen es un submódulo finitamente generado. Para un ejemplo del primer caso, tómese un anillo R de tal manera que exista un $N \in$ R-mód con $\mathrm{Hom}_R(N,R) = 0$, y hágase $M = N \oplus R$; para el otro caso puede usarse cualquier módulo libre si el anillo no tiene condiciones de cadena.

Hay otra manera de llegar a la situación anterior. Consideremos ahora dos anillos R y E, y un contexto de Morita (R,E,M,N) con ideales traza I y J. Por lo visto en la Sección 1.4 o [69, Theorem 3] sabemos que existe una equivalencia entre las subcategorías determinadas por los ideales traza del contexto; es decir, si $\mathcal{G}$ y $\mathcal{F}$ son respectivamente las topologías de Gabriel por la izquierda determinadas por I y J, tenemos la situación:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] R\text{-mód} \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,\_)"] \arrow[d, shift right] & E\text{-mód} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_E(N,\_)"] \arrow[d, shift left] \\ (R,\mathcal{G})\text{-mód} \arrow[u, shift right] \arrow[r, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,\_)", "\approx"'] & (E,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[l, shift left, "\mathrm{Hom}_E(N,\_)", "\approx"'] \arrow[u, shift left] \end{tikzcd}$$

Cuando M es generador y el contexto es el derivado de M, entonces $\mathcal{G} = \{ R \}$ y $J = \mathrm{Im}\ [\_,\_]$ (véase la Sección 1.4) es un ideal bilátero e idempotente [98, Lemma 2.3]. Se puede ver fácilmente que $M\cdot \mathrm{Im}\ [\_,\_] = M$ y aún más, $J = \mathrm{Tr}_E(\mathrm{Hom}_R(M,R))$. Considérese ahora un elemento $x \in \mathrm{Im}\ [\_,\_]$. Entonces x tiene una expresión $x = \sum_i [\alpha_i, m_i]$ donde $\alpha_i \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$ y $m_i \in M$ para todo $i = 1,\dots,n$. Así, tenemos que el elemento x se factoriza como $x = f\cdot g$ con $f = \oplus_i \alpha_i : M \longrightarrow R^n$ y $g = \sum_i m_i : R^n \longrightarrow M$, con lo cual obtenemos otra vez la descripción anterior de $\mathcal{F}$. Además, por [69, Theorem 3] se tienen equivalencias inversas de categorías dadas por $\mathrm{Hom}_R(M,\_) : R\text{-mód} \longrightarrow (E,\mathcal{F})\text{-mód}$ y $\mathrm{Hom}_E(\mathrm{Hom}_R(M,R),\_) : (E,\mathcal{F})\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$, este último, naturalmente equivalente a $M \otimes_E \_ : (E,\mathcal{F})\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$ [6, Exercise 20.7].

3.2. El problema de la caracterización para generadores

Teorema 3.2.1: Sean E, R anillos con 1. Son equivalentes:

(a) Existe un R-módulo por la izquierda M, generador de R-mód, tal que $E \approx \mathrm{End}({}_R M)$.

(b) Existen $n \in \mathbb{N}$ y $e \in \mathbb{M}_n(E)$ idempotente, de tal manera que:

(i) $\mathrm{Tr}_E(E^n e)$ genera una topología de Gabriel por la izquierda, $\mathcal{F}$ para la cual E es $\mathcal{F}$-cerrado.

(ii) $e\mathbb{M}_n(E)e \approx R$.

Aún más, en este caso, $Tr_E(E^ne) = E_0 \approx fEnd({}_RM)$ y los funtores $E_0Hom_R(M,\_):R\text{-mód} \longrightarrow E_0\text{-mód}$ y $M \otimes_{E}\_:E_0\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$ son equivalencias inversas de categorías; además, $Hom_E(Hom_R(M,R),\_)$ y $M \otimes_E\_$ en sus restricciones a (E,E_0)-mód son naturalmente isomorfos.

Demostración: [a⇒b] Por lo que vimos en el parágrafo anterior (página 72) o bien por [26, Proposition 2.5], tenemos que $fEnd({}_RM)$ es un ideal idempotente de $End({}_RM)$ tal que genera una topología de Gabriel por la izquierda, $\mathcal{F}' = \{ I \leq_{End({}_RM)} End({}_RM) \mid MI = M \}$ para la cual $End({}_RM)$ es $\mathcal{F}'$-cerrado.

Como M es generador para R-mód, existe un $n \in \mathbb{N}$ con el cual podemos formar una sucesión exacta escindida $M^n \longrightarrow R \longrightarrow 0$ la cual al aplicar el funtor $Hom_R(M,\_)$ induce la sucesión exacta escindida en E-mód, $E^n \longrightarrow Hom_R(M,R) \longrightarrow 0$. Por lo tanto, $Hom_R(M,R) \cong E^ne$ donde $e \in End({}_EE^n) \approx \mathbb{M}n(E)$. Como E es E_0-cerrado entonces, $Hom_R(M,R) \cong E^ne$ implica que $Hom_R(M,R)$ también es E_0-cerrado.

En este punto hacemos notar que tenemos una equivalencia de categorías $E_0Hom_R(M,\_):R\text{-mód} \longrightarrow E_0\text{-mód}$ en la cual R corresponde con $E_0Hom_R(M,R)$. Por lo tanto $E_0Hom_R(M,R)$ es un progenerador para E_0-mód, así que, en particular, genera a E_0 en E_0-mód y en consecuencia también en E-mód. Así, es claro que $Tr_E(E_0Hom_R(M,R)) = E_0$. Para probar (i) sólo resta ver que $E_0Hom(M,R) = Hom_R(M,R)$ en E-mód. Para ello, considérese el contexto derivado de ${}_RM$, con ideales traza $Im \langle\_,\_\rangle = R$ e $Im [\_,\_] = fEnd({}_RM)$. Como $Im \langle\_,\_\rangle = R$ entonces existen conjuntos $\{m_1,\ldots,m_k\} \subseteq M$ y $\{f_1,\ldots,f_k\} \subseteq Hom_R(M,R)$ de tal manera que $\sum_i\langle m_i,f_i\rangle = 1$. Considérese un $x \in Hom_R(M,R)$. Entonces tenemos que $x = x\cdot 1 = x\cdot\sum_i\langle m_i,f_i\rangle = \sum_i x\langle m_i,f_i\rangle = \sum_i [x,m_i]\cdot f_i \in fEnd({}_RM)\cdot Hom_R(M,R)$. Por lo tanto, $E_0Hom_R(M,R) = Hom_R(M,R)$ y en consecuencia, tenemos $Tr_E(Hom_R(M,R)) = E_0 \approx fEnd({}_RM)$. Esto prueba (i).

El isomorfismo de anillos de (ii) se obtiene de inmediato a partir de la equivalencia de categorías entre R-mód y E_0-mód.

[b⇒a] Denotemos con E_0 a $Tr_E(E^ne)$. Como E^ne es proyectivo entonces E_0 es idempotente; además, E es E_0-cerrado, así que E_0 es no degenerado (de hecho $E_0x = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in E$). Nuevamente, como E^ne es proyectivo entonces es traza-accesible y además es libre de torsión; de hecho, es E_0-cerrado. Por lo tanto, E^ne es un objeto de E_0-mód.

Vamos a probar que E^ne es progenerador para E_0-mód. Primero, verificar que E^ne es proyectivo en E_0-mód es inmediato porque si recordamos que todo $K \in E_0$-mód verifica $E_0K = K$ nos quedará claro que todo E_0-homomorfismo $\varphi:K \longrightarrow E^ne$ es de hecho un E-homomorfismo. Luego E^ne, al ser proyectivo en E-mód y pertenecer a E_0-mód será también proyectivo en E_0-mód. Para ver que E^ne es finitamente generado en E_0-mód, observemos primero que es finitamente generado en E-mód. Sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ un conjunto de generadores para E^ne. Como $E^ne \in E_0$-mód entonces para $i = 1,\dots,n$, $x_i = \sum_j \alpha_{ij} y_{ij}$ donde $\alpha_{ij} \in E_0$ e $y_{ij} \in E^ne$. Considérese el conjunto $\{y_{ij}\}_{ij}$. Entonces claramente se ve que E^ne está generado por dicho conjunto. Por lo tanto, E^ne es proyectivo y finitamente generado en E_0-mód, y como $Tr_E(E^ne) = E_0$ entonces es de hecho un progenerador para E_0-mód. Además, por [20, Theorem 2.6] y como $End({}_EE^ne) \approx R$, tenemos que E_0-mód y R-mód son categorías equivalentes (véase también [23, Theorem 2.1]) y la equivalencia está dada por $Hom_E(E^ne,\_):E_0\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$.

Como E_0 es no degenerado e idempotente entonces $E_0 \in E_0$-mód, así que si $M \cong Hom_E(E^ne,E_0)$ tenemos que M es generador para R-mód. Del hecho de que E es E_0-cerrado y de [83, Corollary IX.2.9] tenemos los isomorfismos de anillos $End({}_RM) \approx End({}_{E}E_0) \approx E$.

Finalmente, hemos visto en la demostración de (i) que $Tr_E(E^ne) \approx$ $\approx fEnd({}_RM) \approx E_0$. Obsérvese que como M es generador, se tiene un isomorfismo canónico para todo $K \in$ R-mód, $M \otimes_E Hom_R(M,K) \longrightarrow K$ dado por $m\otimes f \longmapsto f(m)$. Así, $Hom_R(M,\_):R\text{-mód} \longrightarrow (E,E_0)\text{-mód}$ y $M \otimes_E \_:(E,E_0)\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$ son equivalencias inversas de categorías; además, como vimos en la Sección 3.1, $Hom_E(Hom_R(M,R),\_)$ y $M \otimes_E \_$ en su restricción a (E,E_0)-mód son funtores naturalmente equivalentes. Esto concluye la demostración.

El teorema anterior nos permite establecer una correspondencia en sentido categórico, como en [69, Theorem 7].

Proposición 3.2.2: Dado un anillo E, existe una correspondencia biyectiva entre:

(1) Las clases de equivalencia de las ternas (R,M,ϕ), donde R es un anillo con uno, ${}_RM$ es un generador y $\phi:E \longrightarrow \mathrm{End}({}_RM)$ es un isomorfismo de anillos; definidas bajo la siguiente relación: (R,M,ϕ) es equivalente a (S,N,ψ) si y sólo si $R \approx S$, y existe un isomorfismo semilineal $\varphi:M \longrightarrow N$, de tal manera que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\phi"'] \arrow[dr, "\psi"'] & \mathrm{End}({}_RM) \arrow[d, "\varphi'"] \\ & \mathrm{End}({}_SN) \end{tikzcd}$$

es conmutativo y donde φ' es el isomorfismo inducido por φ.

(2) Las clases de isomorfismo de E-módulos proyectivos finitamente generados ${}_EP$, donde E es $Tr_E(P)$-cerrado (es decir, E es un objeto cerrado respecto de la topología de Gabriel por la izquierda generada por $Tr_E(P)$).

(3) Las clases de equivalencia de las ternas (T,θ,R) donde T es un ideal idempotente de E, E es T-cerrado y $\theta:(E,T)\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$ es una equivalencia de categorías; con la siguiente relación de equivalencia: (T,θ,R) es equivalente a (T',θ',R') si y sólo si existe un isomorfismo de anillos $\varphi:R \longrightarrow R'$, $\varphi(T) = T'$, y si ψ es la equivalencia de categorías inducida por φ, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(E,T)\text{-mód} \arrow[r, "\theta"] \arrow[dr, "\theta'"'] & R\text{-mód} \arrow[d, "\psi\ \text{(isomorfismo)}"] \\
& R'\text{-mód}
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

(4) Las clases de isomorfismos de los contextos de Morita (R,E,P,Q), con E fijo, normalizados por la izquierda, donde el ideal traza sobre R es R; o equivalentemente, donde P es finitamente generado y proyectivo.

(5) Las clases de equivalencia de las ternas (E,n,e), donde $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, $e \in \mathbb{M}n(E)$ es idempotente y E es $Tr_E(E^n e)$-cerrado, con la relación: (E,n,e) es equivalente a (E,m,f) si y sólo si $E^n e \cong E^m f$.

Demostración: Comencemos con el isomorfismo entre (1) y (5). Considérese una terna (R,M,ϕ). Por el teorema anterior, existe $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $e \in \mathbb{M}n(E)$ tal que E es $Tr_E(E^n e)$-cerrado. Es claro que $E^n e$ es un E-módulo por la izquierda proyectivo y finitamente generado.

Ahora, sean (R,M,ϕ) y (S,N,ψ) equivalentes. Entonces existen $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $e \in \mathbb{M}n(E)$, y $m \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $f \in \mathbb{M}m(E)$ tales que $eE^n e \approx R \approx \approx S \approx fE^m f$ y hay un isomorfismo semilineal $eE^n \approx fE^m$, con el cual obtenemos $Hom_{eE^n e}(eE^n, eE^n e) \cong Hom_{eE^n e}(fE^m, eE^n e) \cong Hom_{fE^m f}(fE^m, fE^m f)$. Por lo tanto, $E^n e \cong E^m f$.

El isomorfismo entre (5) y (2) es trivial.

Para obtener el isomorfismo entre (2) y (4), nótese que si E, P son como en (2) entonces $R = End({}_E P)$ y $Q = Hom_R(P,E)$ son, por el teorema anterior, los objetos deseados. Los isomorfismos son inmediatos.

Para el isomorfismo entre (4) y (3), sea (R,E,P,Q) un contexto normalizado por la izquierda. Entonces, si $T = Tr_E(P)$, por la misma definición de contexto normalizado tenemos que E es T-cerrado y por

[69, Theorem 3] tenemos una equivalencia de categorías entre R-mód y (E,T)-mód. Finalmente, si (R,E,P,Q) y (R',E,P',Q') son contextos isomorfos entonces en particular ${}_EP \cong {}_EP'$.

Finalmente, para ver el isomorfismo entre (3) y (1), considérese (T,ϕ,R) una terna. Entonces tenemos una equivalencia de Morita entre (E,T)-mód y R-mód. Haciendo $M = \phi(T)$ y llamando ψ a la composición del isomorfismo de anillos de endomorfismos de M, T junto con el isomorfismo entre este último y E, tenemos la terna (E,M,ψ). Considérese ahora otra terna (T,φ,S). Es claro que el isomorfismo de categorías que se tiene por hipótesis induce un isomorfismo semilineal entre $\phi(T)$ y $\psi(T)$. Esto termina la demostración.

Observación 3.2.3: (a) En la demostración del isomorfismo entre (2) y (1) del teorema anterior, la condición de que E sea un objeto E_0-cerrado no es superflua. En [97] podemos encontrar anillos, R, E y topologías $\mathcal{F}$ de tal manera que R-mód sea equivalente a $(E,\mathcal{F})$-mód y sin embargo no se puede concluir que E sea anillo de endomorfismos de algún generador $M \in$ R-mód (véase también [44] y el Ejemplo 3.6.2). Asimismo, tampoco es condición suficiente [69].

(b) Es claro que el ideal E_0 desempeña, como se había anunciado, una función crucial para nuestro teorema de caracterización. Es justo quien sustituye, con la topología de Gabriel por la izquierda que genera, a las topologías de anuladores que normalmente aparecen en los teoremas de caracterización. Más adelante veremos que las dos topologías están estrechamente relacionadas.

Del teorema 3.2.1 podemos ver que si ${}_RM$ es generador, y $E = \mathrm{End}({}_RM)$, entonces E_0 es fiel como E-módulo por la derecha y que como E-módulo por la izquierda su anillo de endomorfismos es E. Si R es un cuerpo, V un R-espacio vectorial de dimensión infinita y $E \approx \mathrm{End}({}_RV)$ entonces E_0 también es fiel como E-módulo por la izquierda, pero $\mathrm{End}((E_0)_E)$ no es isomorfo a E. Nos preguntamos entonces cuándo, al menos, E_0 será fiel por la izquierda.

Corolario 3.2.4: Sea ${}_RM$ un generador, $E = End({}_RM)$, $E_0 = fEnd({}_RM)$. ${}_EE_0$ es fiel si y sólo si ${}_RM$ es sin torsión.

Demostración: ($\Rightarrow$) Sea $f \in Hom_R(M,Rech_M(R))$ entonces $f \in E$ y $f \cdot E_0 = 0$, por lo tanto $f = 0$. En consecuencia $Hom_R(M,Rech_M(R)) = 0$. Pero como M es generador, deberá ocurrir que $Rech_M(R) = 0$.

($\Leftarrow$) Supongamos que $fE_0 = 0$, con $f \in E$, y sea $g \in Hom_R(M,R)$ arbitrario. Entonces, $Mfg = 0$. En vista de que esto ocurre para todo $g \in Hom_R(M,R)$ tenemos que $Mf \subseteq Rech_M(R) = 0$. Por lo tanto $Mf = 0$ y así $f = 0$.

También nos preguntamos cuándo E_0 será s-unitario por alguno de los dos lados. En [22, Theorem 5] se establece que para un anillo R y un R-módulo por la izquierda libre F, infinitamente generado, $fEnd({}_RF)$ es s-unitario por la izquierda (es decir, $x \in fEnd({}_RF)\cdot x$ para todo $x \in fEnd({}_RF)$) si y sólo si R es noetheriano. Para generadores, E_0 no es necesariamente s-unitario; pero, como veremos un poco más adelante, si ${}_RM$ es un generador proyectivo en R-mód entonces $fEnd({}_RM)$ siempre es s-unitario por la derecha. Aún más, si juntamos resultados de [5] y [98], podemos caracterizar, en general, cuándo un generador verifica que $fEnd({}_RM)$ sea s-unitario por la derecha.

Proposición 3.2.5: Sea R un anillo con uno, M un R-módulo por la izquierda generador y E su anillo de endomorfismos. Son equivalentes:

(a) $Hom_R(M,R)$ es inyector perfecto.

(b) $\_\otimes_E Hom_R(M,R)$: mód-E $\longrightarrow$ mód-R preserva extensiones esenciales.

(c) M_E es coinyector perfecto.

(ch) $Hom_E(M,\_)$: mód-E $\longrightarrow$ mód-R preserva extensiones esenciales.

(d) M_E es $\sum$-autogenerador.

(e) M_E es autogenerador.

(f) Si $N' \in$ mód-E es submódulo simple esencial de $N \in$ mód-E entonces $\mathrm{Hom}_E(M,N') = 0$ implica $\mathrm{Hom}_E(M,N) = 0$.

(g) Los submódulos por la derecha de E-módulos E_0-generados son E_0-generados.

(h) $(E_0)_E$ es autogenerador.

(i) ${}_E(E/E_0)$ es plano.

(j) E_0 es s-unitario por la derecha.

Demostración: Es una aplicación inmediata como caso particular de [5, Theorem 2.4 y 98, Theorem 2.4] junto con [83, Proposition XI.3.13].

No podemos garantizar que cualquier generador verifique el lema anterior; en principio, si ${}_E E_0$ no es fiel ya no puede ser s-unitario por la derecha y además, también en general, las trazas de E-módulos por la izquierda proyectivos finitamente generados no necesariamente son ideales puros a ninguno de los dos lados (véase [44]). Como ejemplos de generadores que verifican el lema anterior, podemos mencionar a aquellos que sean módulos regulares en el sentido de Zelmanowitz [96], (véase [98, p. 12]) y aquellos generadores cuyo anillo de endomorfismos sea regular en el sentido de Von Neumann [98, p. 11].

3.3. El problema de la caracterización para módulos localmente libres

Comenzaremos recordando la definición de módulo localmente libre.

Definición 3.3.1: Sea R un anillo con 1. Un módulo $M \in$ R-mód, se llama localmente libre si cada conjunto finito de elementos de M está contenido en un sumando directo de M el cual es libre finitamente generado.

Para un anillo S, con 1, es sabido que la condición de que S sea isomorfo a un anillo de endomorfismos de algún módulo libre de rango $n \in \mathbb{N}-\{0\}$ es equivalente al hecho de que S tenga un conjunto de $n \times n$ unidades de matriz [81, Definition 1.1.2 y Proposition 1.1.3]. Una generalización al caso de anillos (sin uno) de la noción de unidades de matriz ha sido dada en [23, Definition 1.1]. Con la idea de tratar con anillos de endomorfismos de módulos localmente libres (en lugar de libres) vamos a extender más estas definiciones.

Definición 3.3.2: Sea I un anillo (no necesariamente con 1). Una familia de unidades locales de matriz de I consiste en:

(i) Un conjunto dirigido Λ.

(ii) Para cada $\alpha \in \Lambda$, un entero positivo $n(\alpha)$ y un conjunto $\{e^{\alpha}_{ij}\}$ de elementos de I, con $i,j \in \{1,\dots,n(\alpha)\}$.

(iii) Para cada pareja ordenada (α,β) de elementos de Λ, un elemento $f_{\alpha\beta}$ de I.

Los anteriores elementos deberán verificar las siguientes condiciones; haciendo $e^{\alpha}_{j} = e^{\alpha}_{jj}$, $e_{\alpha} = \sum_{j=1}^{n(\alpha)} e^{\alpha}_{j}$, $f_{\alpha} = f_{\alpha\alpha}$.

(a1) $e^{\alpha}_{ij}e^{\alpha}_{kh} = \delta_{jk}e^{\alpha}_{ih}$ (donde δ_{uv} es la delta de Kronecker).

(a2) $f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$; $f_{\alpha} = e^{\alpha}_{1}$.

(a3) Si $\alpha \leq \beta$ entonces $e^{\alpha}_{ij}e_{\beta} = e^{\alpha}_{ij}$, y

(a4) Para todo $x \in I$, existe $\alpha \in \Lambda$ tal que $x = xe_{\alpha}$.

Mientras que la anterior definición establece condiciones aritméticas para un anillo que posee una familia de unidades locales de matriz, el siguiente lema nos provee de una condición equivalente, en términos de la teoría de anillos, que puede resultar útil en muchos casos. Nótese la analogía con [40, Proposition 5 y p. 52].

Lema 3.3.3: Sea I un anillo (sin uno). Son equivalentes:

(a) I posee una familia de unidades locales de matriz.

(b) Existe un conjunto $\{u_\mu\}_{\mu \in \Delta}$ de elementos idempotentes de I que verifican:

(b1) $Iu_\mu \cong Iu_\nu$ para todo $\mu,\nu \in \Delta$.

(b2) Para todo conjunto finito $\{x_1,\dots,x_n\}$ de elementos de I, existe un subconjunto finito F de $\{u_\mu\}_{\mu \in \Delta}$ tal que sus elementos son idempotentes ortogonales dos a dos y tal que $x_i = \sum_F x_i u_\mu$ para cada $i \in \{1,\dots,n\}$.

Demostración: (a⇒b) Sea, pues, $\{e^\alpha_{ij}\}_{\alpha \in \Lambda}$ la familia de unidades locales de matriz (con la notación tomada de la definición). Definimos $\Delta = \Lambda \times (\bigcup_\alpha N(\alpha))$, donde $N(\alpha) = \{1,\dots,n(\alpha)\}$ para cada $\alpha \in \Lambda$, y $u_\mu = e^\alpha_{ii}$ donde $\mu = (\alpha,i)$. Así, $\{u_\mu\}_{\mu \in \Delta}$ es una familia de idempotentes, por (a1). En analogía con [40, Proposition 4 y p.51], definimos, para cada $\alpha \in \Lambda$, $\varphi_{(\alpha,i,j)}: Ie^\alpha_{ii} \longrightarrow Ie^\alpha_{jj}$ tal que $xe^\alpha_{ii} \longmapsto xe^\alpha_{ii}e^\alpha_{ij}$. Afirmamos que $\varphi_{(\alpha,i,j)}$ es un isomorfismo. Para esto, observemos primero que $xe^\alpha_{ii}e^\alpha_{ij} = xe^\alpha_{ij}$. De este modo, si $xe^\alpha_{ij} = 0$ entonces $0 = xe^\alpha_{ij}e^\alpha_{ji} = xe^\alpha_{ii}$. Por lo tanto, $\varphi_{(\alpha,i,j)}$ es monomorfismo. Ahora, sea $xe^\alpha_{jj} \in Ie^\alpha_{jj}$. Entonces, $xe^\alpha_{jj} = (xe^\alpha_{jj})e^\alpha_{ji}e^\alpha_{ij} = (xe^\alpha_{jj}e^\alpha_{ji}e^\alpha_{ii})e^\alpha_{ij}$ por lo tanto xe^α_{ji} es pre-imagen de xe^α_{jj} y en consecuencia $\varphi_{(\alpha,i,j)}$ es epimorfismo. Esto prueba que es isomorfismo y así establecemos la afirmación. Ahora definimos para cada pareja $\alpha,\beta \in \Lambda$, $\varphi_{(\alpha,\beta)}: Ie^\alpha_1 \longrightarrow Ie^\beta_1$ como $\varphi_{(\alpha,\beta)} = \cdot f_{\alpha\beta}$, la multiplicación por la derecha por $f_{\alpha\beta}$. Con un argumento similar al anterior se puede demostrar que $\varphi_{(\alpha,\beta)}$ también es isomorfismo para todo $\alpha,\beta \in \Lambda$. Componiendo los isomorfismos tenemos (b1).

Para probar (b2) tómese un conjunto $\{x_1,\dots,x_n\}$ en I. Por (a4), para cada x_i, existe e_{α_i}, con $\alpha_i \in \Lambda$ tal que $x_i e_{\alpha_i} = x_i$. Tómese β mayor que $\{\alpha_1,\dots,\alpha_n\}$ (esto es posible en vista de que Λ es un conjunto dirigido). Entonces, por (a3) $e_{\alpha_i} e_\beta = e_{\alpha_i}$ para todo α_i, $i = 1,\dots,n$, y en consecuencia $x_i e_\beta = x_i$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Sabemos que $e_\beta = \sum_{j=1}^{n(\beta)} e_{jj}^\beta$ y que $\{e_j\}_{j=1}^{n(\beta)}$ es un conjunto de elementos idempotentes ortogonales dos a dos. Haciendo $\mu_j = (\beta, j)$, tenemos que $\{u_{\mu_j}\}_{j=1}^{n(\beta)} = F$ es un conjunto finito de idempotentes ortogonales dos a dos tal que $x_i = \sum_F x_i u_{\mu_j}$ para cada $i = 1,\ldots,n$. Esto prueba (b2).

(b⇒a) Sea $L = \{\ F \subseteq \Delta \mid F$ es finito y $\{u_\mu\}_{\mu \in F}$ es un conjunto de elementos idempotentes ortogonales dos a dos $\}$.

Definimos la siguiente relación de equivalencia sobre L: sean $F, G \in L$. F es equivalente a G si y sólo si $\sum_{\mu \in F} Iu_\mu = \sum_{\rho \in G} Iu_\rho$. Sea Λ el conjunto de clases de equivalencia. Definimos ahora sobre Λ el siguiente orden parcial: $[F] \le [G]$ si y sólo si $\sum_{\mu \in F'} Iu_\mu \subseteq \sum_{\rho \in G'} Iu_\rho$ para algunas $F' \in [F]$ y $G' \in [G]$ (obsérvese que si vale para una, entonces vale para todas). Vamos a probar que Λ junto con "$\le$" es un conjunto dirigido. Sean $\alpha, \beta \in \Lambda$; consideremos dos representantes $F_\alpha \in \alpha$ y $F_\beta \in \beta$ y $\{u_\mu\}_{\mu \in F_\alpha}$ y $\{u_\rho\}_{\rho \in F_\beta}$ los conjuntos de elementos idempotentes ortogonales dos a dos. Como $\{u_\mu\}_{\mu \in F_\alpha} \cup \{u_\rho\}_{\rho \in F_\beta}$ es un conjunto finito entonces, por (b2), existe otro $F \subseteq \Delta$ finito tal que $\{u_\tau\}_{\tau \in F}$ es un conjunto de elementos idempotentes ortogonales dos a dos, y $u_\mu = u_\mu \sum_F u_\tau$ y $u_\rho = u_\rho \sum_F u_\tau$ para todo $\mu \in F_\alpha$ y $\rho \in F_\beta$. Sea $\gamma = [F]$. Como $\sum_{F_\alpha} Iu_\mu \subseteq \sum_F Iu_\tau$ y $\sum_{F_\beta} Iu_\rho \subseteq \sum_F Iu_\tau$ se tiene que $\alpha \le \gamma$ y $\beta \le \gamma$. Por lo tanto, Λ es un conjunto dirigido. Esto prueba (i).

Ahora, vamos a construir (ii) y (iii). Para cada $\alpha \in \Lambda$ elegimos arbitrariamente un representante, digamos F_α, y lo dejamos fijo (obsérvese que para cada elección se obtendrá una familia). Entonces tenemos conjuntos $\{u_\mu\}_{\mu \in F_\alpha}$ formados por elementos idempotentes ortogonales dos a dos. Para cada F_α, numeramos sus elementos arbitrariamente y dejando la numeración fija definimos $n(\alpha)$ = número de elementos de F_α. Consideremos cualquier $u \in \{u_\mu\}_{\mu \in \Delta}$ y la dejamos fija. Ahora, para todas y cada una de las $\mu_i \in \bigcup_\Lambda F_\alpha$ consideremos un isomorfismo –el cual existe por (b1)– $\sigma_{\mu_i} : Iu \longrightarrow Iu_{\mu_i}$ con la condición de que si $u = u_{\mu_1}$ para alguna $\mu_1 \in \bigcup_\Lambda F_\alpha$ entonces $\sigma_{\mu_1}: Iu \longrightarrow Iu$ es la identidad en Iu. Pongamos entonces $\varphi_{\mu_i\rho_j}: Iu_{\mu_i} \longrightarrow Iu_{\rho_j}$ tal que $\varphi_{\mu_i\rho_j} = \sigma_{\mu_i}^{-1}\sigma_{\rho_j}$ para todo μ_i, $\rho_j \in \bigcup_\Lambda F_\alpha$, el cual, siendo composición de isomorfismos es, a su vez, isomorfismo. Sean α, β elementos de Λ. Entonces siempre se tiene al menos algún $\mu_1 \in F_\alpha$ y $\rho_1 \in F_\beta$. Entonces hacemos $f_{\alpha\beta} = \varphi_{\mu_1\rho_1}(u_{\mu_1})$ y $e^\alpha_{ij} = \varphi_{\mu_i\mu_j}(u_{\mu_i})$, $i,j \in \{1,\ldots,n(\alpha)\}$. Con esto, tenemos definidas a las familias $\{e^\alpha_{ij}\}_{\alpha \in \Lambda}$ y $\{f_{\alpha\beta}\}_{\alpha,\beta \in \Lambda}$ que establecen (ii) y (iii).

Vamos a ver a continuación si estas familias verifican las reglas de multiplicar de la definición. Sean e^α_{ij} y e^α_{hk}, $\alpha \in \Lambda$. Afirmamos que $e^\alpha_{ij}e^\alpha_{hk} = \delta_{jh}e^\alpha_{ik}$. Consideremos las igualdades $e^\alpha_{ij}e^\alpha_{hk} = e^\alpha_{ij}\cdot\varphi_{\mu_h\mu_k}(u_{\mu_h}) =$
$= \varphi_{\mu_h\mu_k}(e^\alpha_{ij}\cdot u_{\mu_h}) = \varphi_{\mu_h\mu_k}(\varphi_{\mu_i\mu_j}(u_{\mu_i})\cdot u_{\mu_h}) = \varphi_{\mu_h\mu_k}(\varphi_{\mu_i\mu_j}(u_{\mu_i})\cdot u_{\mu_j}\cdot u_{\mu_h}) =$
$= \delta_{jh}\varphi_{\mu_h\mu_k}(\varphi_{\mu_i\mu_h}(u_{\mu_i})) = \delta_{jh}\varphi_{\mu_i\mu_k}(u_{\mu_i}) = \delta_{jh}e^\alpha_{ik}$. Análogamente se puede demostrar que $f_{\alpha\beta}f_{\beta\gamma} = f_{\alpha\gamma}$ para todo $\alpha,\beta,\gamma \in \Lambda$. Así obtenemos (a1) y (a2).

Para (a3), sean $\alpha,\beta \in \Lambda$, $\alpha \leq \beta$, entonces, por la manera como se definió el orden, se tiene que $\sum_{\mu \in F_\alpha} Iu_\mu \subseteq \sum_{\rho \in F_\beta} Iu_\rho$. Considérese un elemento e^α_{ij}. Entonces $e^\alpha_{ij} \in \sum_{\rho \in F_\beta} Iu_\rho$ y tenemos una expresión $e^\alpha_{ij} =$
$= \sum_{\rho \in F_\beta} \lambda_\rho u_\rho$, con $\lambda_\rho \in I$. Como $e_\beta = \sum_{\rho \in F_\beta} e^\beta_{\rho\rho} = \sum_{\rho \in F_\beta} \varphi_{\rho\rho}(u_\rho) =$
$= \sum_{\rho \in F_\beta} \sigma_\rho^{-1}\sigma_\rho(u_\rho) = \sum_{\rho \in F_\beta} u_\rho$ entonces $e^\alpha_{ij}e_\beta = \sum_{\rho \in F_\beta} \lambda_\rho u_\rho \sum_{\rho' \in F_\beta} u_{\rho'} =$
$= \sum_{\rho \in F_\beta} \lambda_\rho u_\rho = e^\alpha_{ij}$ y (a3) queda establecido.

Finalmente, por (b2) se tiene de inmediato (a4). Esto concluye la demostración.

Observación 3.3.4: Dado I con una familia de unidades locales de matriz $(\Lambda, \{e^\alpha_{ij}\}, \{f_{\alpha\beta}\})$, de la demostración del lema anterior se desprende de inmediato que todos los ideales Ie^α_{ij} son isomorfos y en consecuencia, salvo isomorfismos, el anillo $\mathrm{End}({}_I Ie^{\alpha}_{ij})$ no varía. Asimismo, $\mathrm{End}({}_I Ie^{\alpha}_{ij}) \approx \mathrm{End}({}_I Iu_{\mu})$ para cualquier $\mu \in \Delta$ porque $Iu_{\mu} \cong Iu_{\rho}$ para todo $\mu,\rho \in \Delta$. Así, independientemente de la construcción de la familia de unidades locales de matriz, se tiene, salvo isomorfismos, también un solo anillo. Esto nos permite dar la siguiente definición:

Definición 3.3.5: Dado un anillo (sin uno) I, junto con una familia de unidades locales de matriz $\mathfrak{F} = (\Lambda, \{e^{\alpha}_{ij}\}, \{f_{\alpha\beta}\})$ llamaremos a $\mathrm{End}({}_I Ie^{\alpha}_{11})$ el anillo asociado a la familia $\mathfrak{F}$.

Podemos ahora caracterizar a aquellos anillos E que son anillos de endomorfismos de módulos localmente libres sobre alguna clase de anillos.

Teorema 3.3.6: Sean E y R anillos con uno. Entonces, las siguientes condiciones son equivalentes.

(1) Existe un R-módulo por la izquierda localmente libre ${}_R M$ tal que $E \approx \mathrm{End}({}_R M)$.

(2) E contiene un ideal (bilátero) idempotente E_0 tal que:

(i) E_0 genera una topología de Gabriel por la izquierda en E de tal manera que E es un objeto E_0-cerrado.

(ii) E_0 posee una familia de unidades locales de matriz, con anillo asociado isomorfo a R.

Demostración: (1⇒2) La parte (i) se sigue del Teorema 3.2.1, con $E_0 \approx f\mathrm{End}({}_R M)$.

(ii) Vamos a suponer que $E = \mathrm{End}({}_R M)$. Consideremos entonces el conjunto Δ cuyos elementos son los pares $(K,\eta_{\delta}) = \delta$ tales que K es un sumando directo de M, $M = K \oplus K'$, η_{δ} es la proyección correspondiente, y existe un isomorfismo $\phi_{\delta}:K \longrightarrow R$. Para cada $\delta \in \Delta$, tomemos $u_{\delta} = \eta_{\delta}\iota_{\delta}$ donde $\iota_{\delta}:K \longrightarrow M$ es la inclusión canónica; así que $\{u_{\delta}\}_{\delta \in \Delta}$ es un conjunto de elementos idempotentes de E_0. Para cada pareja δ, μ de elementos de Δ, podemos definir $\nu_{\delta\mu} = \eta_{\delta}\phi_{\delta}\phi_{\mu}^{-1}\iota_{\mu}$; entonces $\nu_{\delta\mu}$ pertenece a E_0 y la multiplicación por la derecha por $\nu_{\delta\mu}$ implica la existencia de un isomorfismo $E_0u_\delta \cong E_0u_\mu$, ya que $u_\delta\nu_{\delta\mu} = \eta_\delta\iota_\delta\eta_\delta\phi_\delta\phi_\mu^{-1}\iota_\mu = \eta_\delta\phi_\delta\phi_\mu^{-1}\iota_\mu =$ $= \eta_\delta\phi_\delta\phi_\mu^{-1}\iota_\mu(\eta_\mu\iota_\mu) = \nu_{\delta\mu}\cdot u_\mu$. Esto prueba la condición (bl).

Vamos ahora a verificar que la condición b.2 ocurre. Si $x_1,\dots,x_n$ pertenecen a $E_0 = f\mathrm{End}({}_RM)$ entonces $\sum_i \mathrm{Im}\ x_i$ está contenida en un sumando directo libre finitamente generado, H, de M. Por lo tanto, H tiene una expresión de la forma $H = K_1\oplus\dots\oplus K_s$ donde cada $K_i \cong R$, y es un sumando directo de M. Si $\eta:M \longrightarrow H$ es la proyección sobre H entonces tomemos $\eta = \eta\varepsilon_i$ (donde $\varepsilon_i:H \longrightarrow K_i$ es la proyección canónica para la expresión dada de H). Esto nos da $\delta_i = (K_i,\eta_{\delta_i}) \in \Delta$ y $F = \{\delta_1,\dots,\delta_s\}$ consiste entonces de elementos idempotentes ortogonales dos a dos cuya suma es justo η. Así, tenemos (b2).

Finalmente, el anillo asociado con la familia de unidades locales de matriz de E_0 es $\mathrm{End}({}_{E_0}E_0u_\delta) \approx u_\delta E_0u_\delta \approx \mathrm{End}({}_RK) \approx R$ (éste último isomorfismo se obtiene al hacer corresponder $x \in E_0 = f\mathrm{End}({}_RM)$ con su restricción a K).

(2⇒1) Por (i), tenemos que $\mathrm{End}({}_EE_0) \approx E$ [83, Corollary IX.2.9]. Ahora bien, por el Lema 3.3.3 tenemos que existe un conjunto $\{u_\delta\}_{\delta\in\Delta}$ de elementos idempotentes de E_0 que verifican las condiciones bl y b2 de dicho lema, y tales que $u_\delta E_0u_\delta = u_\delta Eu_\delta \approx R$. Tómese $u = u_\delta$, para alguna $\delta \in \Delta$ arbitraria que ahora dejamos fija. Definimos $R_\delta = uEu_\delta$, $M = uE = uE_0$ y escribimos $R = uEu$. Como, por (bl), $Eu_\delta \cong Eu$ para todo $\delta \in \Delta$ tenemos entonces que $uEu_\delta \cong uEu$ (como uEu-módulos por la izquierda); es decir, que $R \cong R_\delta$ como R-módulos por la izquierda.

Como $Eu_\delta \cong Eu$ para todo $\delta \in \Delta$ tenemos que $E_0 \subseteq EuE$ y como $u \in E_0$ y E_0 es bilátero tenemos que $EuE \subseteq E_0$. Por lo tanto $E_0 = EuE$. Nótese que entonces se verifican las condiciones del Teorema 3.2.1 (b⇒a) y así tenemos que R-mód y (E,E_0)-mód son categorías equivalentes a través de las equivalencias inversas $\mathrm{Hom}_E(Eu,\_):(E,E_0)\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$ y $\mathrm{Hom}_R(M,\_):R\text{-mód} \longrightarrow (E,E_0)\text{-mód}$ y que Eu es un progenerador para (E,E_0)-mód (véase también, [20, Theorem 2.6]) (y también para la categoría equivalente E_0-mód). A través de dicha equivalencia tenemos que M corresponde con E y en consecuencia $\mathrm{End}({}_RM) \approx E$. Así, sólo nos resta probar que ${}_RM$ es un módulo localmente libre.

Para ello, sea $\{x_1,\dots,x_n\}$ un conjunto finito de elementos de M, $x_i = ua_i$, con $a_i \in E_0$. Por la condición (b2) tenemos que existe una familia finita F de idempotentes ortogonales dos a dos $\{u_\delta\}_{\delta \in F}$, $F \subseteq \Delta$ tales que $a_i = a_i \cdot \sum_{\delta \in F} u_\delta$. De aquí se sigue que cada x_i pertenece a $\sum_{\delta \in F} uE_0 u_\delta = \sum_{\delta \in F} Mu_\delta = \sum_{\delta \in F} R_\delta$. Como las u_δ y $\sum_{\delta \in F} u_\delta$ son elementos idempotentes, tenemos entonces que $\sum_{\delta \in F} R_\delta$ es una suma directa y que es un sumando directo libre de M, finitamente generado. Esto completa la demostración.

Observación 3.3.7: A partir de la demostración del teorema anterior se sigue que si la condición (2) ocurre entonces es posible elegir $M = uE$ de tal modo que si identificamos E y $\mathrm{End}({}_RM)$ entonces $E_0 = f\mathrm{End}({}_RM)$. Por otro lado, es claro que si suponemos (1) y tomamos $E_0 = f\mathrm{End}({}_RM)$ entonces todas las condiciones de (2) se verifican para E_0. También obsérvese que E_0 es un anillo (sin uno) s-unitario por la derecha, por la condición 2(ii) del teorema anterior y la Definición 3.3.2.

3.4. El problema de la caracterización para módulos proyectivos con elemento unimodular.

Empezaremos por considerar, de modo más general, los anillos de endomorfismos de generadores proyectivos para ver propiedades del ideal E_0 en ese caso. Como se notará a lo largo de este parágrafo, y en el capítulo referente a la unicidad, todos los resultados que se obtengan para módulos proyectivos con elemento unimodular también se verifican sin cambios esenciales en general para generadores proyectivos. Sin embargo, hemos restringido la clase a la de los proyectivos con elemento unimodular al final de esta sección, porque consideramos que se gana bastante en cuanto a la sencillez de la exposición [63].

Vamos a retomar entonces el Teorema 3.2.1 y ver algunas propiedades de E_0.

Proposición 3.4.1: En la situación del Teorema 3.2.1, se tiene: $M \in R$-mód es proyectivo si y sólo si E_0 es proyectivo en E-mód.

Demostración: [Cfr. 31, Proposition 16.2]. Como M es proyectivo en R-mód y esta categoría es equivalente a E_0-mód, donde, bajo la equivalencia, M corresponde con E_0, entonces E_0 es proyectivo en E_0-mód (recuérdese que $E_0 \in E_0$-mód puesto que ${}_RM$ es generador). Considérese ahora la sucesión exacta de E-mód $E^{(I)} \xrightarrow{\eta} E_0 \longrightarrow 0$ para I un conjunto adecuado. Entonces, como $E^{(I)}$ y E_0 son E_0-libres de torsión, podemos formar el siguiente diagrama conmutativo con renglones y columnas exactos.

$$\begin{tikzcd}
 & E^{(I)} \arrow[r, "\eta"] & E_0 \arrow[r] & 0 \\
E_0 \otimes E^{(I)} = & E_0^{(I)} \arrow[u, "\iota"] \arrow[r, shift left, "\eta'"] & E_0 \arrow[u, equal] \arrow[l, dashed, shift left, "\mu'"] \arrow[r] & 0 \\
 & 0 \arrow[u] & &
\end{tikzcd}$$

Como $E_0^{(I)}$ y E_0 pertenecen a la categoría E_0-mód entonces η' es un E_0-homomorfismo y por hipótesis, el renglón inferior se escinde, digamos con μ', como en el diagrama. Finalmente, obsérvese que si $\mu = \mu'\iota$ entonces $\mu\eta = (\mu'\iota)\eta = \mu'(\iota\eta) = \mu'\eta' = 1_{E_0}$. Por lo tanto, E_0 es proyectivo en E-mód, ya que μ' es un E-homomorfismo.

El recíproco es inmediato a partir de la equivalencia de categorías que existe entre E_0-mód y R-mód, donde E_0 se corresponde con M.

Proposición 3.4.2: En la situación del Teorema 3.2.1 con ${}_RM$ proyectivo, E_0 posee un conjunto de generadores $\{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ determinado por M, tal que para todo $x \in E_0$, $x \cdot x_\alpha = 0$ para casi todo $\alpha \in I$ y $x = \sum_\alpha x \cdot x_\alpha$. Además, toda base dual de E_0 es de la forma $\{a_\beta, y_\beta\}_{\beta \in J}$ donde $a_\beta \in E$; $y_\beta \in E_0$.

Demostración: Con la notación del Teorema 3.2.1 considérese el contexto derivado de M junto con los homomorfismos de bimódulos $\langle\_,\_\rangle: M \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,R) \longrightarrow R$ y $[\_,\_]: \mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R M \longrightarrow E$ (donde $E = \mathrm{End}({}_RM)$ y $E_0 = \mathrm{Im}\,[\_,\_]$). Sea $\{f_\alpha, m_\alpha\}_{\alpha \in I}$ una base dual para ${}_RM$. Entonces, si $x \in E_0$, x tiene una expresión $x = \sum_k [g_k, n_k]$, donde $g_k \in \mathrm{Hom}_R(M,R)$ y $n_k \in M$; pero, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene una expresión de n_k en términos de la base dual, $n_k = \sum_\alpha \langle n_k, f_\alpha\rangle m_\alpha = \sum_\alpha n_k [f_\alpha, m_\alpha]$. En consecuencia, cada $[g_k, n_k] = [g_k, \sum_\alpha n_k \cdot [f_\alpha, m_\alpha]] = \sum_\alpha [g_k, n_k] \cdot [f_\alpha, m_\alpha]$. Es decir, el conjunto $\{[f_\alpha, m_\alpha]\}$ verifica la propiedad deseada.

La última parte se deduce del isomorfismo $\mathrm{Hom}_E(E_0, E) \cong E$ que tenemos por ser E, E_0-cerrado.

Definición 3.4.3: Sea R un anillo con 1 y $P \in$ R-mód proyectivo. Se dice que P posee un elemento unimodular si existe un elemento p de P, de tal manera que $Rp \cong R$ y Rp es sumando directo de P.

Teorema 3.4.4: Sean E, R anillos con 1. Son equivalentes:

(a) Existe un módulo proyectivo con elemento unimodular $P \in$ R-mód tal que $\mathrm{End}({}_RP) \approx E$.

(b) E posee un elemento idempotente e, de tal manera que EeE es proyectivo, E es un objeto EeE-cerrado, y $R \approx eEe$.

Demostración: Se sigue del Teorema 3.2.1 y los resultados anteriores.

Nótese que, en este caso, $EeE \approx f\mathrm{End}({}_RP)$, y que el isomorfismo $R \approx eEe$ nos da isomorfismos semilineales $P \cong eE$ y $\mathrm{Hom}_R(P,R) \cong Ee$, que inducen el isomorfismo de anillos (esto lo veremos con más detalle en el Capítulo 4).

3.5. Algunas clases específicas de anillos.

En esta sección vamos a considerar algunas clases particulares de anillos $\mathfrak{K}$ mientras que $\mathfrak{M}$ será la clase de los módulos localmente libres o proyectivos (o la de los módulos proyectivos y localmente libres). Para cada par $(\mathfrak{K},\mathfrak{M})$, obtendremos, aplicando los resultados precedentes, una solución al problema de la caracterización.

Proposición 3.5.1: Sea E un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe un anillo semi-hereditario por la izquierda R tal que R es suma directa de ideales por la izquierda indescomponibles y el anillo E es isomorfo al anillo de endomorfismos de algún R-módulo por la izquierda M, localmente libre.

(b) Si T es el ideal por la izquierda de E generado por todos los idempotentes primitivos de E entonces,

(i) T es bilátero.

(ii) E es T-cerrado.

(iii) T posee una familia de idempotentes finitos $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $Eu_\alpha \cong Eu_\beta$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \Lambda$ y cada $x \in T$ tiene una expresión como $x = \sum_S xu_\alpha$ para algún subconjunto finito $S \subseteq \Lambda$, adecuado, donde los u_α son ortogonales dos a dos.

(iv) Todos los ideales finitamente generados de T son proyectivos como ideales por la izquierda de E.

Demostración: (a⇒b) Supongamos que $E = End({}_RM)$, ${}_RM$ localmente libre y $E_0 = fEnd({}_RM)$. Sea $e \in E$ un idempotente primitivo. Entonces Me es un sumando directo de M, indescomponible [6, Corollary 5.11] y por

[93, Proposition 1.5], Me es finitamente generado, lo cual implica que $e \in E_0$. Como R es suma de R-módulos por la izquierda indescomponibles entonces, al ser ${}_RM$ localmente libre, está generado por módulos indescomponibles y en consecuencia, por la equivalencia de categorías que se tiene entre R-mód y E_0-mód dada por $E_0\mathrm{Hom}_R(M,\_)$ (véase la demostración del Teorema 3.3.6), E_0 también está generado por los correspondientes elementos idempotentes de E, los cuales son primitivos. Si hacemos $T = E_0$, vemos que (i), (ii) y (iii) se verifican por el Teorema 3.3.6 y el Lema 3.3.3. Finalmente, como R es semi-hereditario por la izquierda entonces todos los submódulos de M finitamente generados son proyectivos (por ser M localmente libre). Esta propiedad se transfiere a la categoría T-mód en vista de la equivalencia que se mencionó anteriormente; así, tenemos que todos los ideales por la izquierda de T finitamente generados son proyectivos en T-mód. Ahora, sea $u = u_\alpha$ como en el Teorema 3.3.6. Como Eu = Tu porque $u \in T$ y Eu es progenerador para T-mód entonces, si K es uno de esos ideales tenemos una sucesión exacta escindida, $Tu^{(n)} \longrightarrow K \longrightarrow 0$ en T-mód; se obtiene así una sucesión escindida $Eu^{(n)} \longrightarrow K \longrightarrow 0$ en E-mód. En consecuencia, K es proyectivo y finitamente generado como ideal por la izquierda de E.

(b⇒a) Suponiendo (b), tenemos entonces que por el Teorema 3.3.6 E es isomorfo a $\mathrm{End}({}_RM)$ para un ${}_RM$ localmente libre y $R \approx uTu$ para algún idempotente finito $u \in T$. Aún más, como se vió en la demostración del Teorema 3.3.6 (2⇒1) existe una equivalencia de categorías entre T-mód y R-mód dada por el funtor $\mathrm{Hom}_E(Eu,\_)$, en la cual T corresponde con M y Tu con R. Ahora bien, la condición b(iv) nos dice que todo subobjeto de T finitamente generado en la categoría T-mód es proyectivo. En vista de la equivalencia anterior, tenemos que todos los submódulos de M finitamente generados son proyectivos y, en particular, al ser M localmente libre, también lo son todos los ideales de R finitamente generados. En consecuencia, R es semi-hereditario por la izquierda. Además, $Tu = Te_1\oplus\ldots\oplus Te_s$ para algunos idempotentes primitivos $e_1,\ldots,e_s$, ortogonales dos a dos; así que Tu es suma directa finita de módulos indescomponibles, pues $Te_1 = Ee_1$ el cual es indescomponible en E-mód. En consecuencia, como Tu corresponde, a través de la equivalencia, con R, entonces R posee la misma propiedad. Esto completa la demostración.

Un anillo R se conoce como anillo de Kasch por la izquierda cuando todo R-módulo por la izquierda simple es isomorfo a un ideal por la izquierda de R [83, p.235]. Tenemos el siguiente resultado para módulos localmente libres sobre anillos de Kasch. La definición de ideal denso la hemos tomado de [83, Example VI.6.3].

Proposición 3.5.2: Sea E un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe un anillo de Kasch por la izquierda R, y un R-módulo por la izquierda M, localmente libre tal que su anillo de endomorfismos $End(_RM)$ es isomorfo a E.

(b) Las siguientes condiciones se verifican:

(i) E contiene un menor ideal por la izquierda denso T, tal que T posee una familia $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de idempotentes con $Eu_\alpha \cong Eu_\beta$ para cualesquiera $\alpha,\beta \in \Lambda$ y cada $x \in T$ puede escribirse como $x = \sum_S xu_\alpha$ para algún subconjunto finito $S \subseteq \Lambda$ adecuado, con los u_α ortogonales dos a dos.

(ii) Si J es un ideal por la izquierda de E, maximal respecto de la propiedad de no ser denso, entonces $r_E(J) \neq 0$.

(iii) E es su propio anillo maximal de cocientes por la izquierda.

Demostración: (a⇒b) Sea $T = fEnd(_RM) = E_0$. Entonces, por el Teorema de la caracterización para módulos localmente libres T posee una familia $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de idempotentes que verifican las condiciones de (i). Falta ver que T es el menor ideal por la izquierda denso en E. Para esto, sea J un ideal por la izquierda de E tal que $r_E(J) = 0$; entonces, para cada u_α, $u_\alpha J u_\alpha$ es un ideal de $u_\alpha E u_\alpha$ (el anillo asociado). Como $u_\alpha Eu_\alpha$ es de Kasch, si $u_\alpha Ju_\alpha \subseteq u_\alpha Eu_\alpha$ entonces existe [83, Proposition XI.5.1] $0 \neq x \in u_\alpha Eu_\alpha$ tal que $u_\alpha Ju_\alpha x = 0$. Esto implica que $u_\alpha E(Ju_\alpha x) = 0$ y que $(Eu_\alpha E)(Ju_\alpha x) = 0$ y en consecuencia $Ju_\alpha x = 0$. Pero esto es imposible, pues $r_E(J) = 0$, y por lo tanto $u_\alpha Ju_\alpha = u_\alpha Eu_\alpha$, para todo u_α, con $\alpha \in \Lambda$. Como $u_\alpha Ju_\alpha = u_\alpha Eu_\alpha$ entonces $Eu_\alpha Ju_\alpha \subseteq Ju_\alpha$ pues J es ideal por la izquierda y $Eu_\alpha = Eu_\alpha Eu_\alpha =$ $= Eu_\alpha Ju_\alpha \subseteq Ju_\alpha$, por lo tanto $Ju_\alpha = Eu_\alpha$. Sea ahora I un ideal por la izquierda denso; entonces, para todo u_α, $J = (I:u_\alpha)$ es un ideal por la izquierda tal que $r_E(J) = 0$, y por lo anterior se tiene que $Ju_\alpha = Eu_\alpha$. Pero $Ju_\alpha \subseteq I$ para todo $\alpha \in \Lambda$, por lo tanto $\sum_\alpha Eu_\alpha \subseteq I$ y así $T \subseteq I$. Además, de inmediato se puede ver que T es denso. Esto prueba (i).

Sea ahora J un ideal maximal con la propiedad de no ser denso. Nótese que si $T \subseteq J$ entonces, para todo $K = (J:a)$ se tiene $T \subseteq K$ porque T es bilátero y en consecuencia $r_E(K) = 0$, porque E es T-cerrado. Por lo tanto $T \neq J$. Entonces $u_\alpha T \neq u_\alpha J$ ya que si $u_\alpha T = u_\alpha J$ entonces como $T \approx f\mathrm{End}({}_RM)$, se tendría que $\cdot T = Tu_\alpha T = Tu_\alpha J \subseteq J$ lo cual, por lo anterior, es imposible. Vamos a ver entonces que $J = \mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, u_\alpha J)$. La contención de izquierda a derecha es inmediata. Si J está contenido propiamente en $\mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, u_\alpha J)$ entonces $\mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, u_\alpha J)$ es denso, pues J es maximal con la propiedad de no serlo. Así, $T \subseteq \mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, u_\alpha J)$ lo cual implica que $u_\alpha T = u_\alpha \mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, u_\alpha J) = u_\alpha J$ pero esto, como vimos, es imposible. Por lo tanto, $J = \mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, u_\alpha J)$. Además, $u_\alpha J$ es un $u_\alpha Eu_\alpha$-submódulo maximal de $u_\alpha E$, pues si K es tal que $u_\alpha J \subset K \subseteq u_\alpha E$ entonces $J \subset$ $\subset \mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, K) \subseteq E$. Esto implica que $\mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E, K)$ es denso y por lo tanto $K = u_\alpha E$. Así, tenemos que, por ser $u_\alpha E$ localmente libre, $\mathrm{Hom}_{u_\alpha Eu_\alpha}(u_\alpha E/u_\alpha J, u_\alpha E) \neq 0$ y por lo tanto $r_E(J) \neq 0$.

(iii) Se desprende de que $T = E_0$ y es el menor denso [83, Proposition VI.6.4].

(b⇒a) Por (i), T es bilátero, T-libre de torsión e idempotente. Sea $\mathcal{F}$ la topología de Gabriel por la izquierda generada por $\mathcal{F}$.

Entonces, $End({}_T T)$ es isomorfo al anillo maximal de cocientes $E_{\mathcal{F}}$ de E [83, Proposition VI.6.4]. Sea $u = u_\alpha$. Por (i), tenemos que $T = EuE$ y por el Teorema de la caracterización para módulos localmente libres, uE es un uEu-módulo por la izquierda localmente libre tal que $End({}_{uEu}uE) \approx E$. Falta probar que uEu es un anillo de Kasch por la izquierda.

Sea uE/K un módulo simple y $L = Hom_{uEu}(uE,K)$. Si $L \subset J$ para algún ideal por la izquierda J de E entonces $uJ = uE$ y por tanto $T \subseteq J$, pero $T \subset L$ porque $uL = K \subset uE$. Por lo tanto, L es maximal con la propiedad de no ser denso, lo cual implica que $r_E(L) \neq 0$ y por lo tanto $Hom_{uEu}(uE/K,uE) \neq 0$. Y como uE es localmente libre, tenemos que uEu es de Kasch.

A continuación, vamos a estudiar el caso de los anillos noetherianos y módulos localmente libres.

Definición 3.5.3: Sea S un anillo con uno y $e \in S$ un elemento idempotente. Diremos que e es un idempotente cuasi noetheriano cuando para toda cadena ascendente $Se_1 \subseteq \ldots \subseteq Se_n \subseteq \ldots$ de sumandos directos de S, la cadena $Se_1 \cap Se \subseteq \ldots \subseteq Se_n \cap Se \subseteq \ldots$ se estacione.

Proposición 3.5.4: Sea E un anillo con uno. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe un anillo noetheriano por la izquierda y un R-módulo por la izquierda M, localmente libre tal que $End({}_R M) \approx E$.

(b) Si T es el ideal por la izquierda de E generado por todos los idempotentes primitivos cuasi noetherianos de E entonces:

(i) T es bilátero y E es T-cerrado.

(ii) T posee una familia $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de idempotentes finitos de tal manera que $Eu_\alpha \cong Eu_\beta$ para cualesquiera $\alpha,\beta \in \Lambda$, y cada $x \in T$ puede escribirse como $x = \sum_S xu_\alpha$ para algún subconjunto finito $S \subseteq \Lambda$, adecuado, con los u_α ortogonales dos a dos.

(iii) Para cada par e, e' de idempotentes primitivos cuasi noetherianos de E tenemos que eEe' es noetheriano como eEe-módulo por la izquierda.

Demostración: (a⇒b) Vamos a comenzar demostrando que si $E = \operatorname{End}({}_RM)$ para un anillo noetheriano por la izquierda R y un R-módulo por la izquierda M localmente libre, y $E_0 = f\operatorname{End}({}_RM)$ entonces cada idempotente $e \in E$ es cuasi noetheriano si y sólo si $e \in E_0$.

Supongamos primero que $e \in E_0$. Entonces $X = \operatorname{Im} e$ es un sumando directo de M finitamente generado y en consecuencia es un R-módulo por la izquierda noetheriano. Considérese la cadena $Ee_1 \subseteq \ldots \subseteq Ee_n \subseteq \ldots$ de sumandos directos de E. Entonces, obsérvese que $Ee_1 \cong \operatorname{Hom}_R(M, \operatorname{Im} e_1)$ y que $Ee_1 \cap Ee \cong \operatorname{Hom}_R(M, X \cap \operatorname{Im} e_1)$ ya que $E = \operatorname{End}({}_RM)$. Ahora bien, como ${}_RX$ es noetheriano entonces la cadena $Ee_1 \cap Ee \subseteq \ldots \subseteq Ee_n \cap Ee \subseteq \ldots$ deberá estacionarse. Recíprocamente, supongamos que $e^2 = e \in E$ y $e \notin E_0$. Entonces $X = \operatorname{Im} e$ no puede ser finitamente generado. Entonces podemos tomar $0 \neq x_1 \in X$ y un sumando directo de M, L_1, libre y finitamente generado tal que $x_1 \in L_1$. Como $L_1 \cap X \neq X$ porque X no es finitamente generado, podemos encontrar $0 \neq x_2 \in X - L_1$ y otro sumando directo libre finitamente generado L_2, de M de tal manera que $x_2 \in L_2$ y $L_1 \subset L_2$. Nuevamente, $L_2 \cap X \neq X$ por los mismos argumentos de antes e incluso $L_2 \cap X \neq L_1 \cap X$; en consecuencia, podemos escoger algún otro elemento x_3 y otro sumando directo L_3, etcétera. Por lo tanto, tenemos una cadena ascendente de sumandos directos de M, $L_1 \subseteq L_2 \subseteq \ldots \subseteq L_n \subseteq \ldots$ tal que la cadena $L_1 \cap X \subseteq L_2 \cap X \subseteq \ldots \subseteq L_n \cap X \subseteq \ldots$ no se estaciona. Si denotamos con e_1 a la proyección de M en L_1 entonces la cadena $Ee_1 \subseteq \subseteq Ee_2 \subseteq \ldots \subseteq Ee_n \subseteq \ldots$ es tal que esta otra $Ee_1 \cap Ee \subseteq Ee_2 \cap Ee \subseteq \ldots \subseteq \subseteq Ee_n \cap Ee \subseteq \ldots$ no se estaciona. En consecuencia e no es un elemento idempotente cuasi noetheriano.

Vamos ahora a considerar los casos de los anillos semiperfectos y de los perfectos por la izquierda, en donde los idempotentes primitivos siguen desempeñando un papel fundamental.

Proposición 3.5.5: Sea R un anillo semiperfecto y ${}_RM$ un R-módulo por la izquierda localmente libre y proyectivo; $E = End({}_RM)$, y $E_0 = fEnd({}_RM)$. Entonces E_0 está generado, como ideal por la izquierda, por todos los idempotentes primitivos de E.

Demostración: Nótese primero que el hecho de que R sea una suma directa de ideales por la izquierda indescomponibles implica que E_0 está generado por idempotentes primitivos, del mismo modo que ocurre en la demostración de la Proposición 3.5.1 sobre anillos semi-hereditarios que son suma directa de ideales indescomponibles. Ahora bien, si $e \in E$ es un idempotente primitivo entonces Me es un sumando directo indescomponible de M, el cual es proyectivo por hipótesis; en consecuencia, por [81, Proposition 2.9.2], Me es isomorfo a un ideal por la izquierda principal de R y por lo tanto, finitamente generado. Esto prueba que $e \in E_0$, como teníamos que ver.

Corolario 3.5.6: Sea ${}_RM$ un módulo por la izquierda localmente libre sobre un anillo perfecto por la izquierda R, $E = End({}_RM)$, $E_0 = fEnd({}_RM)$. Entonces, E_0 está generado, como ideal por la izquierda de E, por todos los idempotentes primitivos de E.

Demostración: Es inmediato de la proposición anterior, en vista de que si R es anillo perfecto por la izquierda entonces todos los R-módulos por la izquierda planos son proyectivos.

Ahora podemos establecer los correspondientes resultados sobre caracterización:

Proposición 3.5.7: Sea E un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe un anillo semiperfecto R y un R-módulo por la izquierda, M localmente libre y proyectivo tal que $E \approx End({}_RM)$.

(b) Si T es el ideal por la izquierda de E generado por todos los idempotentes primitivos entonces:

(i) T es un ideal bilátero y E es T-cerrado.

(ii) T contiene una familia de idempotentes finitos $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ tal que $Eu_\alpha \cong Eu_\beta$ para cualesquiera $\alpha,\beta \in \Lambda$ y cada $x \in T$ puede escribirse como $x = \sum_S xu_\alpha$ para algún subconjunto finito $S \subseteq \Lambda$ adecuado con todos los u_α ortogonales dos a dos.

(iii) T es proyectivo como ideal por la izquierda de E.

(iv) Para cada idempotente primitivo $e \in E$, el anillo eEe es un anillo local.

Demostración: (a⇒b) Sea $E = End(_RM)$. Por la Proposición 3.5.5, sabemos que, en este caso, $T = E_0 = fEnd(_RM)$. En consecuencia, las condiciones (i) y (ii) se desprenden del Teorema 3.3.6 y (iii) del Teorema 3.4.1. También se desprende la equivalencia de categorías que existe entre R-mód y T-mód (Teorema 3.2.1) en la cual T corresponde con $_RM$ y para cada idempotente primitivo, $e \in E$, $Te = Ee$, corresponde con el sumando directo indescomponible Me de M. De aquí, junto con [47, 11.4.1 Satz], se deduce que Ee tiene anillo de endomorfismos local. Así, (iv) también se verifica.

(b⇒a) Las condiciones (i) y (ii) de (b) implican, en vista del Teorema 3.3.6, que E es isomorfo al anillo de endomorfismos de un R-módulo por la izquierda localmente libre $_RM$ y que $R \approx u_\alpha Eu_\alpha$. Así que tenemos de nuevo la equivalencia entre R-mód y T-mód en la cual $_RM$ corresponde con T. Por la condición (iii), T es proyectivo en T-mód y en consecuencia $_RM$ es proyectivo en R-mód. Sólo nos resta probar que $R \approx uEu$ es semiperfecto. Ahora, como u es un idempotente finito, entonces tiene una expresión como suma ortogonal $u = e_1+\ldots+ e_n$ y por lo tanto $R = uEu = \oplus_{i=1}^n uEe_i$; donde cada uEe_i es un R-módulo por la izquierda proyectivo y $End(_RuEe_i) = e_iuEe_i = e_iEe_i$ el cual es local por hipótesis (iv). De [47, 11.4.1 Satz] se sigue que uEe_i es un R-módulo por la izquierda semiperfecto. Esto termina la demostración.

Proposición 3.5.8: Sea E un anillo. Las siguientes condiciones son equivalentes:

(a) Existe un anillo perfecto por la izquierda R, y un R-módulo por la izquierda ${}_RM$, localmente libre tal que $\mathrm{End}({}_RM) \approx E$.

(b) Si T es el ideal por la izquierda generado por todos los idempotentes primitivos entonces:

(i) T es bilátero y E es T-cerrado.

(ii) T posee una familia $\{u_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de idempotentes finitos de tal manera que $Eu_\alpha \cong Eu_\beta$ para cualesquiera $\alpha,\beta \in \Lambda$, y cada $x \in T$ se escribe como $x = \sum_S xu_\alpha$ para algún subconjunto finito $S \subseteq \Lambda$ adecuado con los u_α ortogonales dos a dos.

(iii) Para cada $e \in E$ idempotente primitivo, el anillo eEe es perfecto por la izquierda.

Demostración: Análoga a la anterior.

Proposión 3.5.9: Sea E un anillo. Son equivalentes:

1) $E \approx \mathrm{End}({}_RP)$ con R semiprimario y $P \in$ R-mod proyectivo con elemento unimodular.

2) Si J es el radical de Jacobson de E entonces:

(a) J es nilpotente.

(b) $E/J \approx \prod_{i=1}^{n} \mathrm{End}({}_{D_i}V_i)$ con D_i anillo de división.

(c) Si T es el ideal generado por todos los idempotentes primitivos entonces T es bilátero, proyectivo y E es T-cerrado.

Aún más, en este caso, $T/JT = \mathrm{Zóc}(E/J)$.

Demostración:(1⇒2) Como R es semiprimario entonces J(R) es nilpotente, supongamos que $J(R)^n = 0$. Entonces, por [6, Proposition 28.13 y Corollary 17.12] tenemos que $J(E) = J = \mathrm{Hom}_R(P,J(R)P)$ y $E/J \approx \mathrm{End}({}_R(P/J(R)P))$. En consecuencia, $J^n \subseteq \mathrm{Hom}_R(P,J(R)^nP) = 0$. Esto prueba (a). Por otra parte, P/J(R)P es un R/J(R)-módulo semisimple con sólo un número finito de componentes homogéneas. Esto, junto con el isomorfismo $E/J \approx \mathrm{End}({}_R(P/J(R)P))$ implica de inmediato (b).

Como semiprimario implica perfecto, tenemos que, por el Corolario

3.5.8, $T = E_0$ es el ideal generado por todos los idempotentes primitivos y el resto de (c) lo obtenemos de los teoremas de caracterización.

($2\Rightarrow 1$) Por (b) $E/J \approx E_1 \times \ldots \times E_k$ donde cada E_i es isomorfo a un $\mathrm{End}({}_{D_i}V_i)$, con D_i anillo de división. Para cada $i=1,\ldots,n$, recordemos que sólo se tiene una clase de isomorfismos de E_i-módulos por la izquierda indescomponibles (de hecho simples) proyectivos, los cuales son isomorfos a cualquier sumando directo simple de E_i, digamos $E_i\alpha_i$ -con α_i idempotente. Para cada i, elegimos un idempotente α_i con $E_i\alpha_i$ proyectivo indescomponible. Por [6, Proposition 17.4] el conjunto $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ puede levantarse a un conjunto de idempotentes ortogonales de E, $e_1,\ldots,e_n$. Nótese que cada e_i es primitivo, así que $e = e_1+\ldots+e_n \in T$.

Sea $u \in E$ un idempotente primitivo. Entonces, si $\eta: E \longrightarrow E/J$ denota la proyeción canónica y $\eta(u) = \beta$, por [6, Lemma 17.2] tenemos que β es un idempotente primitivo de E/J. Esto implica que existe $i \in \{1,\ldots n\}$ tal que $\beta \in E_i$ y por tanto $E_i\beta \cong E_i\alpha_i$. Esto significa que $(E/J)\beta \cong (E/J)\alpha_i$ y por [6, Proposition 17.18] $Eu \cong Ee_i$. De este último isomorfismo se desprende que $u \in Ee_iE \subseteq EeE = TeT$. Esto muestra que $T = TeT = EeE$.

Por el Teorema 3.4.4 sabemos que E es isomorfo al anillo de endomorfismos de un módulo proyectivo con elemento unimodular ${}_RP$ con $R \approx eEe$, $P \cong eE$. Vamos a probar que R es semiprimario. Primero, nótese que $eEe \approx \mathrm{End}({}_EEe)$ y por [6, Corollary 17.12] tenemos que $J(eEe)^n \cong \mathrm{Hom}_E(Ee,Je)^n \subseteq \mathrm{Hom}_E(Ee,J^ne)$. Por lo tanto, al ser J nilpotente por hipótesis, J(eEe) es también nilpotente. Por [6, Corollary 17.12], $eEe/J(eEe) \approx \mathrm{End}({}_E(Ee/Je)) \approx \mathrm{End}({}_{E/J}(Ee/Je))$. Pero $Ee/Je \cong \oplus_{i=1}^n Ee_i/Je_i$ es una suma directa de E/J-módulos por la izquierda simples. Por lo tanto eEe/J(eEe) es semisimple y eEe es semiprimario.

3.6. Conexión entre topologías de Gabriel por la izquierda y topologías lineales de anuladores por la derecha.

En el Teorema de la caracterización de Wolfson [88] podemos observar que los "endomorfismos finitos" son precisamente el zócalo del anillo. En los teoremas de Liebert [56, 58, 59], no se tienen este tipo de descripciones y se introducen técnicas topológicas (que en principio no parecen hacer posible obtener el teorema de Wolfson como caso particular) que han dependido de cada caso considerado.

Como se ha descrito en la Introducción, las técnicas topológicas utilizadas por Liebert han permitido obtener teoremas de caracterización para clases $\mathfrak{K}$ y $\mathfrak{M}$, en las que una condición necesaria para que E sea isomorfo al anillo de endomorfismos $End(_R M)$ para algún $R \in \mathfrak{K}$, $M \in \mathfrak{M}$ es la de que E sea Hausdorff y completo con respecto a una cierta topología lineal por la derecha que tiene como base de vecindades de cero a los anuladores por la dercha de colecciones finitas de un cierto conjunto (que depende del par $(\mathfrak{K},\mathfrak{M})$ considerado en cada caso) $\mathcal{S}$ de idempotentes del anillo E. Mediante el empleo de métodos de localización usados en esta memoria, hemos podido observar que, en los casos más significativos, el ideal por la izquierda generado por los idempotentes del conjunto $\mathcal{S}$ es precisamente el ideal E_0 de los "endomorfismos finitos".

Este hecho sugiere que debe de haber una conexión más general entre la topología lineal por la derecha sobre un anillo E definida por los anuladores por la derecha de ciertas familias $\mathcal{S}$ de idempotentes y la topología de Gabriel por la izquierda $\mathcal{F}$ generada por un ideal asociado a dicha familia $\mathcal{S}$. Efectivamente, mostramos en esta sección la existencia y el carácter preciso de dicha conexión. Haremos notar, por otro lado, que la existencia de esta conexión nos ha permitido, a lo largo del capítulo sobre caracterización, omitir las referencias a las topologías lineales semejantes a las que aparecen en los citados trabajos de Liebert, sustituyéndolas por el empleo de las topologías de Gabriel y las técnicas de localización correspondientes.

Teorema 3.6.1: Sea E un anillo con uno, T un ideal bilátero e idempotente de E. Considérese la topología lineal por la derecha (véase la Sección 1.4) Γ de E, la cual tiene como base de vecindades del cero al filtro generado por los ideales por la derecha de la forma $r_E(x_1,\dots,x_n)$, para $x_1,\dots,x_n \in$ T. Entonces:

(i) E es T-libre de torsión si y sólo si E es de Hausdorff respecto a Γ.

(ii) Si E es T-cerrado entonces E es de Hausdorff y completo respecto a Γ.

(iii) Si además, T es s-unitario por la derecha entonces el recíproco de (ii) también se verifica.

Demostración: (i) Por [83, Example VI.4.1] E es de Hausdorff si y sólo si $\bigcap_\Gamma r_E(x_1,\dots,x_n) = 0$ si y sólo si no existe $a \neq 0$, $a \in E$ tal que $x_1a = 0$ para todo $x_1\in T$ y esto si y sólo si $Ta = 0$ implica $a = 0$ y esto último si y sólo si E es T-libre de torsión.

(ii) Supóngase que E es T-cerrado. Sea $\mathcal{D}$ el filtro de los ideales por la derecha abiertos de E, e identifiquemos a cada uno de ellos con un índice $d \in \mathcal{D}$ junto con el orden parcial $d_1\leq d_2$ si y sólo si $U_{d_1} \supseteq U_{d_2}$.

Sea $\varphi:(\mathcal{D},\leq) \longrightarrow E$ una red de Cauchy (páginas 27-28) dada. Tenemos que probar que φ converge en E; es decir que existe un $a \in E$ de tal manera que, para toda vecindad U de a, se tiene que φ está residualmente en U (páginas 27-28).

Para ello, sea x un elemento arbitrario en T. Considérese $U_d = r_E(x) \in \mathcal{D}$. Como tenemos una red de Cauchy entonces para esta U_d existe un conjunto residual (página 27) $\mathcal{K}$ en $\mathcal{D}$ de tal manera que para todo $f,g \in \mathcal{K}$ se tiene que $\varphi(f)-\varphi(g) \in U_d$; es decir, que $x\varphi(f) = x\varphi(g)$. Entonces podemos hacer $\alpha(x) = x\varphi(f)$, y esto para cada $x \in T$.

Afirmamos que $\alpha:T \longrightarrow E$ es un E-homomorfismo. Primero, es fácil ver que no depende del conjunto residual que se haya elegido, pues si se tiene otro $\mathcal{K}'$ residual, como $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ es nuevamente residual (página 27) entonces $\mathcal{K} \cap \mathcal{K}' \neq \emptyset$, y de este modo, existe un $h \in \mathcal{K} \cap \mathcal{K}'$ tal que, si $f \in \mathcal{K}$ y $g \in \mathcal{K}'$, $x\varphi(f) = x\varphi(h) = x\varphi(g)$. Por lo tanto, α es función.

Ahora, sean $x,y \in T$. Queremos ver si $\alpha(x+y) = \alpha(x)+\alpha(y)$. Para esto, sabemos que, para x, existe $\mathcal{K}_x$ tal que $\alpha(x) = x\varphi(f)$ para todo $f \in \mathcal{K}_x$ y para y, existe $\mathcal{K}_y$ tal que $\alpha(y) = y\varphi(g)$ para todo $g \in \mathcal{K}_y$, y para $x+y$, existe $\mathcal{K}_{x+y}$ tal que $\alpha(x+y) = (x+y)\varphi(h)$ para todo $h \in \mathcal{K}_{x+y}$. Si hacemos $\mathcal{K} = \mathcal{K}_x \cap \mathcal{K}_y \cap \mathcal{K}_{x+y}$ entonces $\mathcal{K}$ es residual y para todo $f \in \mathcal{K}$, $\alpha(x+y) = (x+y)\varphi(f) = x\varphi(f)+y\varphi(f) = \alpha(x)+\alpha(y)$ pues $f \in \mathcal{K}_x$ y $f \in \mathcal{K}_y$.

Ahora, sea $x \in T$ y $b \in E$. Entonces, como antes, podemos encontrar conjuntos residuales $\mathcal{K}_x$ y $\mathcal{K}_y$. Volvemos a tomar la intersección y obtenemos que $\alpha(bx) = b\alpha(x)$. Por lo tanto, α es un E-homomorfismo.

Este E-homomorfismo α, por hipótesis, se extiende a un E-homomorfismo $\bar{\alpha}:E \longrightarrow E$ y en consecuencia, existe $a \in E$ tal que, para todo $x \in T$, $\bar{\alpha}(x) = xa$.

Afirmamos ahora que a es justo el punto donde converge la red. Para probarlo, consideremos una $d \in \mathcal{D}$, arbitraria. Entonces, d corresponde con algún abierto $U_d \supseteq \mathcal{n}_E(x_1,\ldots,x_n)$, con $x_1,\ldots,x_n \in T$. (Por lo visto en las páginas 25-26 tenemos que esto da una vecindad U_d+a, arbitraria, de a). Queremos ver si $\varphi(f)-a \in U_d$ para todo $f \in \mathcal{K}$, conjunto residual. Para ello, nótese que será suficiente si se muestra que $x_i a = x_i\varphi(f)$, para $i = 1,\ldots,n$ y para todo $f \in \mathcal{K}$. Para encontrar $\mathcal{K}$, consideremos cada $\mathcal{K}_{x_i}$ construida, como siempre, a partir de $\mathcal{n}_E(x_i) \in \mathcal{D}$. Luego tomamos la intersección $\bigcap_{i=1}^n \mathcal{K}_{x_i} = \mathcal{K}$. Entonces, como para cada $\mathcal{K}_{x_i}$ se tiene que $x_i\varphi(f) = \alpha(x_i) = x_i a$, si $f \in \mathcal{K}$ tenemos $x_i\varphi(f) = x_i a$ para todo $i = 1,\ldots,n$. Por lo tanto $a-\varphi(f) \in U_d$ para todo $f \in \mathcal{K}$ y como $\mathcal{K}$ es residual tenemos que φ está residualmente en cualquier vecindad de a. Por lo tanto (página 27), φ converge al punto a. Esto prueba (ii).

(iii) Finalmente, supongamos que T es s-unitario por la derecha, y que E es de Hausdorff y completo respecto a la topología Γ. Tenemos que probar que E es T-cerrado. Por (i) tenemos que E es T-libre de torsión. Sea $\alpha:T \longrightarrow E$ un E-homomorfismo arbitrario. Debemos ver que α se extiende de manera única a un $\bar{\alpha}:E \longrightarrow E$.

Consideremos cada ideal por la derecha de la forma $r_E(x_1,\dots,x_n) = U_d$ como hemos convenido, con $d \in \mathcal{D}$. Entonces, como T es s-unitario por la derecha, el conjunto $S_d = \{s \in T \mid x_i = x_i s$ para $i = 1,\dots,n\}$ es no vacío y esto se tiene para cada U_d de la forma $r_E(x_1,\dots,x_n)$. Ahora, para cada S_d denotamos $a_d = \alpha(s)$ con $s \in S_d$ elegido fijo (por el axioma de elección).

Ahora bien, si U_t es cualquier otro ideal del filtro, definimos a_t como a_d para alguna $U_d = r_E(x_1,\dots,x_n)$, con $d \geq t$. Obsérvese que en vista de que estamos construyendo un conjunto fijo $\{a_d\}_{d \in \mathcal{D}}$, cualquier d de la forma anterior, nos sirve. Afirmamos que la correspondencia $d \longmapsto a_d$ es una función φ que es una red de Cauchy.

Tenemos entonces que ver que para todo U_d, $d \in \mathcal{D}$, arbitraria, existe un conjunto residual $\mathcal{K}$ de manera que, para cualesquiera $d,d' \in \mathcal{K}$, se tiene que $\varphi(d)-\varphi(d') \in U_d$ (páginas 27-28).

Sea, pues, $d \in \mathcal{D}$ y tomemos una $r_E(x_1,\dots,x_n) \subseteq U_d$ cualquiera. (Nótese que será suficiente si probamos que $x_i\varphi(k) = x_i\varphi(k')$ para $i = 1,\dots,n$). Sea $r_E(x_1,\dots,x_n) = U_{d_0}$. Entonces tenemos elegido un elemento s_{d_0} tal que $x_i = x_i s_{d_0}$ para $i = 1,\dots,n$, con $a_{d_0} = \alpha(s_{d_0})$ y en consecuencia $x_i a_{d_0} = x_i\alpha(s_{d_0}) = \alpha(x_i s_{d_0}) = \alpha(x_i)$ para todo $i = 1,\dots,n$. Sea $\mathcal{K} = \{ k \in \mathcal{D} \mid k \geq d_0\}$. Es claro que $\mathcal{K}$ es un conjunto residual en $\mathcal{D}$. Sea $k \in \mathcal{K}$. Para U_k sabemos que existe un $r_E(y_1,\dots,y_n) \subseteq U_k$ tal que $y_j s_k = y_j$ para todo $i = 1,\dots,m$. Entonces $(1-s_k) \in U_k$ y como $U_k \subseteq U_{d_0}$ tenemos que $(1-s_k) \in U_{d_0}$. Entonces, $x_i s_k = x_i$ y en consecuencia $x_i a_k = x_i\alpha(s_k) = \alpha(x_i s_k) = \alpha(x_i) = x_i a_{d_0}$. Por lo tanto $x_i a_k = x_i a_{d_0}$; es decir, $x_i\varphi(k) = x_i\varphi(d_0)$ para todo $k \in \mathcal{K}$. Esto implica de forma directa que si $k,k' \in \mathcal{K}$, $x_i\varphi(k) = x_i\varphi(k')$ entonces $\varphi(k)-\varphi(k') \in U_{d_0} \subseteq U_d$. Por lo tanto, existe un conjunto residual, $\mathcal{K}$ de tal manera que para cualesquiera $k,k' \in \mathcal{K}$, $\varphi(k)-\varphi(k') \in U_d$. Esto prueba que $\varphi:(\mathcal{D},\leq) \longrightarrow E$

es una red de Cauchy.

Por hipótesis, sabemos que φ converge a un único punto en E, digamos $a \in E$ [48, Theorem 3, p.67]. Entonces, para cada $d \in \mathcal{D}$, con $U_d = r_E(x_1,\ldots,x_n)$ φ está residualmente en U_d; es decir, existe un subconjunto residual $\mathcal{K}_d$ de $\mathcal{D}$ tal que $\varphi(k)-a \in U_d$. En particular, para todo $x \in T$, si $U_d = r_E(x)$ entonces existe $\mathcal{K}_x$ residual, tal que $xa = x\varphi(k)$ para todo $k \in \mathcal{K}_x$. Recuérdese además, que en la construcción vimos que $xs_t = x$ para todo $t \geq d$. Como $\mathcal{K}_x$ es residual, sabemos que existe un elemento d_0 en $\mathcal{K}_x$ tal que si $k \geq d, d_0$ tenemos que $xs_k = x$ y además, $xa = x\varphi(k)$. Por lo tanto, $xa = x\varphi(k) = x\alpha(s_k) = \alpha(xs_k) = \alpha(x)$.

Así, α corresponde con la multiplicación por la derecha por a en T y en consecuencia, podemos exhibir una $\bar{\alpha}$ que corresponde, a su vez, con la multiplicación por la derecha sobre todo E, extendiendo a α de manera única. Por lo tanto, E es T-cerrado. Esto concluye la demostración.

En este teorema, la condición sobre T de ser s-unitario por la derecha para poder probar el recíproco de (ii) no es superflua, como se ve en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 3.6.2: Existe un anillo E y un ideal T, bilátero e idempotente, pero no s-unitario, de tal manera que E es Hausdorff y completo respecto de Γ pero no es T-cerrado.

Efectivamente, sea K un anillo de división, $E = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$ y $T = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es claro que T es bilátero e idempotente, así que podemos definir la topología Γ. Obsérvese ahora que $r_E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$, que $r_E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y entonces $r_E\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cap r_E\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$, por lo tanto Γ es, en este caso, la topología discreta y por el Teorema 3.6.1 tenemos que E es de Hausdorff. Además, E es completo, pues toda red de Cauchy contiene una subred de Cauchy constante. Nótese que tanto T como E, son de Hausdorff y completos. Sin embargo, el E-homomorfismo $\alpha:T \longrightarrow T$ definido a través de la correspondencia $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ es justo la multiplicación por la derecha por $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ el cual no pertenece a E, y en consecuencia, es evidente que no puede extenderse a E, quedando así establecido que E no es T-cerrado.

Observación 3.6.3: Además de lo anterior, si hacemos $e = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ entonces tenemos un anillo E y un idempotente $e \in E$ de tal manera que EeE es bilátero e idempotente, genera una topología de Gabriel por la izquierda y existe una equivalencia de categorías entre eEe-mód y EeE-mód. E es de Hausdorff y completo respecto de Γ y sin embargo, como $eEe \approx K$, es fácil ver que no existe ningún objeto M en K-mód el cual verifique $End(_K M) \approx E$. Así, notamos entonces que un anillo E puede verificar todas las hipótesis habituales en los resultados de caracterización, que incluyen la topología Γ, y sin embargo, al no ser cerrado, no pueda ser anillo de endomorfismos de ningún objeto de la categoría eEe-mód. Es decir, hemos establecido que, en general, el uso de las dos topologías no es indistinto.

C A P I T U L O 4

EL PROBLEMA DE LA UNICIDAD

4.1. Introducción

El problema de la unicidad se puede plantear en los siguientes términos: Dada una clase de anillos $\mathfrak{K}$ y una clase de módulos $\mathfrak{M}$ sobre los anillos de la clase $\mathfrak{K}$, si ${}_RM$, ${}_SN \in \mathfrak{M}$ tienen anillos de endomorfismos isomorfos, describir en términos de la teoría de anillos una relación entre ${}_RM$ y ${}_SN$ de tal manera que a partir de ella se pueda construir el isomorfismo.

De manera más concreta, un primer problema de unicidad puede ser planteado de alguna de las dos formas que siguen [16]: Si $\phi:\mathrm{End}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SN)$ para $R, S \in \mathfrak{K}$, ${}_RM$, ${}_SN \in \mathfrak{M}$, ver si es o no cierto que:

(1) Existe un isomorfismo de anillos $\sigma:R \longrightarrow S$ y un isomorfismo σ-semilineal $\varphi:M \longrightarrow N$, de modo que el isomorfismo dado, ϕ, está inducido (de modo natural) por el isomorfismo φ.

(2) Existe algún isomorfismo de anillos $\sigma:R \longrightarrow S$ y un isomorfismo σ-semilineal $\varphi:M \longrightarrow N$.

Solamente para clases $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{M}$ bastante restringidas se ha encontrado una respuesta afirmativa a este problema de la unicidad; véanse, entre otros, [11, 12, 16, 37, 45, 59, 63, 66]. Sin embargo, hay otra formulación muy natural del problema, para la que Camillo [13] demostró que la respuesta es sí en una clase $\mathfrak{K}$ de anillos totalmente arbitraria -aunque la clase $\mathfrak{M}$ de módulos es la de los módulos libres numerablemente generados-; las correspondientes preguntas serían:

(1) ¿Existe una equivalencia de categorías, digamos $F:R\text{-mód} \longrightarrow S\text{-mód}$ tal que $F({}_RM) \cong {}_SN$ y F induce -en sentido obvio- el isomorfismo ϕ?

(2) ¿Existe una equivalencia de categorías, digamos

$F:R\text{-mód} \longrightarrow S\text{-mód}$ tal que $F({}_RM) \cong {}_SN$?

Veremos en este capítulo que si mantenemos la elección arbitraria de la clase $\mathfrak{K}$ -por ejemplo, $\mathfrak{K}$ podría incluir a todos los anillos- y $\mathfrak{M}$ es una de las tres clases que consideramos en el capítulo anterior: módulos localmente libres, generadores o módulos proyectivos con elemento unimodular, como siempre, todos infinitamente generados, entonces la respuesta es negativa -en oposición al caso de los módulos libres. En consecuencia, hemos tratado de encontrar la relación que deben tener las categorías R-mód y S-mód (lo más "cercana" posible a la equivalencia) para que se tenga una respuesta afirmativa a las correspondientes variantes de las preguntas (1) y (2) que preceden. Por otro lado, en las secciones siguientes hemos buscado clases $\mathfrak{K}$ más restringidas para las que la respuesta a (1) y (2) sea directamente "sí".

Vamos a comenzar entonces con una situación general mostrando cómo un isomorfismo entre los anillos de endomorfismos de dos objetos arbitrarios que pertenezcan cada uno a una categoría de Grothendieck está "inducido" por algún funtor entre dichas categorías. El proceso para obtener nuestro funtor está sugerido por el caso particular considerado en [11].

Sea $\mathfrak{C}$ una categoría de Grothendieck y $M \in \mathfrak{C}$ un objeto arbitrario. Hacemos, como se definió, $R = \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M) = [\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,M)]^{op}$. Sea $F = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\_)$. Entonces [65, Theorem IV.3.1] tenemos los siguientes hechos:

(1) Para todo $K \in \mathfrak{C}$, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,K)$ tiene estructura de R-módulo por la izquierda.

(2) Los grupos abelianos $F(M)$ y R son iguales y ${}_RF(M) \cong {}_RR$.

(3) Existe un adjunto por la izquierda G, para F, de tal manera que las transformaciones naturales $1_{R\text{-mód}} \xrightarrow{\psi} F\circ G$ y $G\circ F \xrightarrow{\phi} 1_{\mathfrak{C}}$ verifican que $\psi_R:R \longrightarrow FG(R)$ y $\phi_M:GF(M) \longrightarrow M$ son isomorfismos.

Así, podemos identificar dos subcategorías plenas (que por (3) incluyen respectivamente a M y R), una de $\mathfrak{C}$, $[M] = \{K \in \mathfrak{C} \mid \phi_K$ es isomorfismo} y la otra de R-mód $[R,M] = \{X \in \text{R-mód} \mid \psi_X$ es isomorfismo}.

Afirmamos que las restricciones de **F** y **G** a $F:[M] \longrightarrow [R,M]$ y $G:[R,M] \longrightarrow [M]$ (permítasenos denotarlos igual) son equivalencias inversas de categorías. Para demostrar esto, lo primero que tenemos que ver es si efectivamente $F([M]) \subseteq [R,M]$ y $G([R,M]) \subseteq [M]$.

Sea $K \in [M]$. Entonces $\phi_K:GF(K) \longrightarrow K$ es isomorfismo. Consideremos a $\phi_K^{-1}:K \longrightarrow GF(K)$ y apliquemos las propiedades del isomorfismo de la adjunción $\eta_{\_,\_}: \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(G(\_),\_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\_,F(\_))$, a F(K). Tenemos entonces el diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(GF(K),K) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(GF(K),\phi_K^{-1})"] \arrow[d, "\eta_{F(K),K}"] & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(GF(K),GF(K)) \arrow[d, "\eta_{F(K),GF(K)}"] \\
\mathrm{Hom}_R(F(K),F(K)) \arrow[r, "\mathrm{Hom}_R(F(K),F(\phi_K^{-1}))"] & \mathrm{Hom}_R(F(K),FGF(K))
\end{tikzcd}$$

Ahora tomemos a $\phi_K \in \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(GF(K),K)$. Vamos a hacer a ϕ_K recorrer el cuadrado. Primero tenemos:

$$\eta_{F(K),GF(K)}(\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(GF(K),\phi_K^{-1})(\phi_K)) = \eta_{F(K),GF(K)}(1_{GF(K)}) = \psi_{F(K)}, \text{ y}$$

$$\mathrm{Hom}_R(F(K),F(\phi_K^{-1}))(\eta_{F(K),K}(\phi_K)) = \mathrm{Hom}_R(F(K),F(\phi_K^{-1}))(1_{F(K)}) = F(\phi_K^{-1}).$$

Por lo tanto, $\psi_{F(K)} = F(\phi_K^{-1})$, el cual es un isomorfismo y en consecuencia $F(K) \in [R,M]$.

Recíprocamente, si $X \in [R,M]$ entonces $\psi_X:X \longrightarrow FG(X)$ es isomorfismo y análogamente, al seguir a $1_{G(X)}$ en el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(G(X),G(X)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(G(\psi_X^{-1}),G(X))} & \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(GFG(X),G(X)) \\
\Big\downarrow \eta_{X,G(X)} & & \Big\downarrow \eta_{FG(X),G(X)} \\
\mathrm{Hom}_R(X,FG(X)) & \xrightarrow{\mathrm{Hom}_R(\psi_X^{-1},FG(X))} & \mathrm{Hom}_R(FG(X),FG(X))
\end{array}$$

nos muestra que $\phi_{G(X)} = G(\psi_X^{-1})$.

Tenemos entonces el diagrama de categorías

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{G} & \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} & R\text{-mód} \\
\Big\uparrow i & & \Big\uparrow i \\
[M] & \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \; \simeq & [R,M]
\end{array}$$

En general, no hemos encontrado un adjunto por la izquierda para **i**, con vistas a determinar si [M] o [R,M] son subcategorías reflexivas. Sólo sabemos que son cerradas bajo epimorfismos.

Cuando M es generador para $\mathfrak{C}$ entonces tenemos el Teorema de Gabriel y Popescu, es decir, **i** posee adjunto por la izquierda **a**, $[M] = \mathfrak{C}$ y [R,M] es subcategoría de Giraud de R-mód [83, § X.1]. Explícitamente, **a** es la localización respecto de la teoría de torsión de [83, Theorem X.4.1] y los funtores $F \circ G$ e $i \circ a$ son naturalmente isomorfos.

Obsérvese ahora que si tenemos $\alpha: M \longrightarrow M$ entonces $F(\alpha): F(M) \longrightarrow F(M)$ como endomorfismo de ${}_RR$, es la multiplicación por la derecha por α, escribimos $F(\alpha) = \cdot\alpha$. Tenemos además, que si $x \in \mathrm{End}({}_RR)$ entonces, si $x(1) = \beta \in R$ entonces $x = \cdot\beta$. Además, $\beta \in R$ y

$F(\beta) = \cdot\beta = x$. Haciendo $\phi_M = \phi$ obtenemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$\begin{tikzcd} G(R) \arrow[r, "G(\cdot\alpha)"] \arrow[d, "\phi"'] & G(R) \arrow[d, "\phi"] \\ M \arrow[r, "\alpha"] & M \end{tikzcd}$$

En consecuencia, $\alpha = \phi^{-1}G(\cdot\alpha)\phi$ y $G(\cdot\alpha) = \phi\alpha\phi^{-1}$ para todo $(\cdot\alpha) \in \mathrm{End}({}_R R)$.

Supongamos ahora que tenemos dos categorías de Grothendieck $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ y objetos $M \in \mathfrak{C}$ y $N \in \mathfrak{D}$ tales que $R = \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$ y $S = \mathrm{End}_{\mathfrak{D}}(N)$. Por lo que hemos visto anteriormente, sabemos que existen funtores $F_1 = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\_)$ y $F_2 = \mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(N,\_)$ y adjuntos por la izquierda G_1 y G_2, con las propiedades que describimos antes (indicaremos todos los morfismos y transformaciones anteriores con 1 y 2 según se refieran a $\mathfrak{C}$ o $\mathfrak{D}$, respectivamente).

Consideremqs ahora un morfismo de anillos $\sigma: R \longrightarrow S$ arbitrario. Sabemos que esto determina una estructura de R-R-bimódulo para S, con las operaciones $r\cdot s = \sigma(r)\cdot s$ y $s\cdot r = s\cdot\sigma(r)$ para todo $r \in R$ y $s \in S$. Esto, a su vez, nos permite tomar el funtor $S \otimes_R \_ : R\text{-mód} \longrightarrow S\text{-mód}$ y obsérvese que ${}_S(S \otimes_R R) \cong {}_S S$ bajo $\sum_i s_i \otimes r_i \overset{\mu_2}{\longmapsto} \sum_i s_i\sigma(r_i)$. Definimos el funtor $F = G_2 \circ S\otimes_R \circ F_1$. Entonces $F: \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ es tal que $F(M) \cong N$ bajo $G_2(\mu_2)\cdot\phi_2$. Sea $r \in \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M) = R$. Entonces, $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,r) = r$ (la multiplicación por la derecha por r) y tenemos, aplicando los funtores, el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G_2(S \otimes_R R) \arrow[r, "G_2(1\otimes r)"] \arrow[d, "G_2(\mu_2)"'] & G_2(S \otimes_R R) \arrow[d, "G_2(\mu_2)"] \\
G_2(S) \arrow[r, "G_2(\sigma(r))"] \arrow[d, "\phi_2"'] & G_2(S) \arrow[d, "\phi_2"] \\
N \arrow[r, "\sigma(r)"] & N
\end{tikzcd}$$

En consecuencia, $F(r) = G2(1\otimes r) = G_2(\mu_2)\phi_2\sigma(r)(G_2(\mu_2)\phi_2)^{-1}$. Es en este sentido que decimos que F "induce" (o que ϕ_2-induce) el morfismo σ.

Supongamos ahora que $\sigma:R \longrightarrow S$ es un isomorfismo de anillos. Entonces, tenemos los funtores $\mathbf{F} = G_2\circ S\otimes_R\circ F_1$ y $\mathbf{G} = G_1\circ R\otimes_S\circ F_2$. Nótese que la extensión de escalares y la restricción de escalares es lo mismo en este caso. En este punto, ya sabemos cómo **F** y **G** inducen el isomorfismo. Lo que queremos ver a continuación es la relación que existe entre las categorías. Para ello, vamos a simplificar la notación suponiendo R = E = S. Tenemos entonces los funtores $\mathbf{F} = G_2\circ F_1$ y $\mathbf{G} = G_1\circ F_2$, y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & E\text{-mód} \arrow[dll, shift left, "G_1"] \arrow[drr, shift left, "G_2"] & & \\
\mathfrak{C} \arrow[urr, shift left, "F_1"] & & & & \mathfrak{D} \arrow[ull, shift left, "F_2"] \\
 & {[E,M]} \arrow[uur, "i"] & & {[E,N]} \arrow[uul, "i"'] & \\
{[M]} \arrow[uu, "i"] \arrow[ur, leftrightarrow, "\simeq"'] & & & & {[N]} \arrow[uu, "i"'] \arrow[ul, leftrightarrow, "\simeq"]
\end{tikzcd}$$

A la vista del diagrama, intuimos que, si denotamos $[E,M\cap N] = [E,M] \cap [E,N]$ entonces esta nueva subcategoría en sus imágenes, sean $\langle M\rangle$ y $\langle N\rangle$, hará de las restricciones de **F** y **G** equivalencias inversas de categorías. Vamos a comprobar si esto es cierto.

Si $K \in [M]$ entonces se puede definir una transformación natural $\varphi_1 : K \xrightarrow{\phi^{-1}_{1\,K}} G_1F_1(K) \xrightarrow{G_2(\psi_{2\ F_1(K)})} G_1F_2G_2F_1(K)$; es decir $\varphi_1 : 1_{\mathfrak{C}} \longrightarrow G\circ F$. Vamos a hacer una restricción; sea $\langle M\rangle$ = $= \{ K \in [M] \mid \varphi_{1\ K}$ es isomorfismo $\}$. Lo primero que tenemos que ver es si $F(\langle M\rangle) \subseteq \langle N\rangle$. Es decir, si $\phi^{-1}_{1\,K}\circ G_1(\psi_{2F_1(K)})$ es isomorfismo implica que $\psi_{2F_1(K)}$ es isomorfismo (o sea una condición suficiente). Como $\phi^{-1}_{1\,K}$ es isomorfismo entonces $G_1(\psi_{2F_1(K)}) : G_1F_1(K) \longrightarrow G_1F_2F_1(K)$ es isomorfismo. Observemos el siguiente cuadrado conmutativo:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
F_2(K) \arrow[r, "\psi_{2\ F_1(K)}"] \arrow[d, "\psi_{1\ F_1(K)}"'] & F_1G_2F_1(K) \arrow[d, "\psi_{1\ F_2G_2F_1(K)}"] \\
F_1G_1F_1(K) \arrow[r, "F_1G_1\ (\psi_{2\ F_1(K)})"] & F_1G_1F_2G_2F_1(K)
\end{tikzcd}
$$

Nótese que, como $K \in [M]$ y como $G_1(\psi_{2F_1(K)})$ es isomorfismo entonces el triángulo inferior a la izquierda es una composición de isomorfismos. Esto quiere decir que $\psi_{2F_1(K)} : F_1(K) \longrightarrow F_2G_2F_1(K)$ es monomorfismo y que $\psi_{1F_2G_2F_1(K)} : F_2G_2F_1(K) \longrightarrow F_1F_2G_2F_1(K)$ es epimorfismo; es más, $\psi_{2F_1(K)}$ se escinde, pero no podemos garantizar que $\psi_{2F_2(K)}$ sea isomorfismo; es decir, no podemos garantizar que $F(\langle M\rangle) \subseteq \langle N\rangle$. Por lo que vimos anteriormente sabemos que si M y N son generadores entonces $\psi_{2F_1(K)}$ es monomorfismo esencial para todo $K \in (M)$; pero por lo pronto, tendremos que hacer "más pequeña" a nuestra clase.

Vamos a renombrar entonces las clases:

$$(M) = \{ K \in [M] \mid F_1(K) \in [E,N] \} =$$

$$= \{ K \in [M] \mid \psi_{2F_1(K)} \text{ es isomorfismo } \} \text{ y}$$

$$(N) = \{ L \in [N] \mid F_2(L) \in [E,M] \} =$$

$$= \{ L \in [N] \mid \psi_{1F_2(L)} \text{ es isomorfismo } \}.$$

Se tienen igual que antes los isomorfismos naturales φ_1 y φ_2 pero ahora tenemos que $\psi_{2F_1(K)}$ es también isomorfismo. De esta manera, forzamos a que $G_2F_1(K) \in [N]$ y así, las restricciones de **F** y **G** serán equivalencias inversas de categorías, como buscábamos.

Hasta aquí, hemos descrito una situación bastante más general que aquella de la que queremos ocuparnos. Con esto sólo pretendemos plantear la situación de la manera más clara posible según como la entendemos y abrir la posibilidad de estudiar casos más generales.

Vamos ahora a suponer que $M \in \mathfrak{C}$ y $N \in \mathfrak{D}$ son generadores y que $End_{\mathfrak{C}}(M) \approx End_{\mathfrak{D}}(N)$ con la notación simplificada. Por lo que hemos visto, $[M] = \mathfrak{C}$ y $[N] = \mathfrak{D}$ y existen filtros $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ en E, tales que $[E,M] = (E,\mathcal{F})$-mód y $[E,N] = (E,\mathcal{G})$-mód, donde, si a_1 y a_2 son las localizaciones asociadas con $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ e i_1 e i_2 sus respectivos adjuntos por la derecha tenemos $F_1 \circ G_1 \cong i_1a_1$ y $F_2 \circ G_2 \cong i_2a_2$ naturalmente.

Queremos ahora determinar si $[E,M \cap N]$ también es subcategoría de Giraud. Sea $\mathcal{H}$ el filtro que corresponde con la unión de $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$. Entonces, por [32, Proposition 10.6] tenemos que $(E,\mathcal{H})$-mód es igual a la intersección (identificadas como subcategorías) de $(E,\mathcal{F})$-mód y $(E,\mathcal{G})$-mód, y así, sabemos que $(E,\mathcal{H})$-mód $= [E,M \cap N]$.

Sabemos, además, que para $K \in [M]$, $F_1(K) \longrightarrow F_2G_2F_1(K)$ es monomorfismo en E-mód; es decir, $F_1(K) \longrightarrow i_2a_2F_1(K)$ es monomorfismo y por tanto es monomorfismo esencial en E-mód, y así, en este caso nos podemos quedar con la primera definición de (M) y (N).

Finalmente, vamos a describir la clase de torsión en $(E,\mathcal{F})$-mód asociada con $(E,\mathcal{H})$-mód. Sea a_3 la localización en $\mathcal{H}$, entonces $\mathcal{T} = \{ X \in (E,\mathcal{F})\text{-mód} \mid a_3 i_1(X) = 0 \}$ es una clase de torsión en $(E,\mathcal{F})$-mód y $(E,\mathcal{F})\text{-mód}/\mathcal{T}$ queda identificada con $(E,\mathcal{H})$-mód. A la vista de que los objetos de $(E,\mathcal{H})$-mód están caracterizados por la propiedad de que $a_1a_2(X) \cong X$, podemos inferir que $\mathcal{T}$ es la clase de torsión generada en $(E,\mathcal{F})$-mód por $\{ X \in (E,\mathcal{F})\text{-mód} \mid a_1a_2(X) = 0 \}$ o también la generada por $\{ X \in (E,\mathcal{F})\text{-mód} \mid a_2(X) = 0 \}$. Análogamente se tiene $\mathcal{T}'$ para $(E,\mathcal{G})$-mód. Esto significa que (M) y (N) también son subcategorías de Giraud, así que tendrán sus funtores asociados $a'_1 = G_1 \circ i_3 \circ a_3 \circ F_1$ y $a'_2 = G_2 \circ i_3 \circ a_3 \circ F_2$. Así, hemos demostrado que:

Teorema 4.1.1: Sean $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ categorías de Grothendieck con generadores M y N respectivamente. Si $\sigma:\mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M) \longrightarrow \mathrm{End}_{\mathfrak{D}}(N)$ es un isomorfismo de anillos entonces existen funtores $\mathbf{F}:\mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{D}$ y $\mathbf{G}:\mathfrak{D} \longrightarrow \mathfrak{C}$ tales que:

(a) **F** y **G** inducen el isomorfismo, en el sentido de que

$$(G_1(\mu_1)\phi_1)^{-1}G(S)(G_1(\mu_1)\phi_1) = \sigma^{-1}(s) \quad \text{y}$$
$$(G_2(\mu_2)\phi_2)^{-1}F(r)(G_2(\mu_2)\phi_2) = \sigma(r)$$

para cualesquiera $r \in \mathrm{End}_{\mathfrak{C}}(M)$, $s \in \mathrm{End}_{\mathfrak{D}}(N)$, donde $\mu_1:R \otimes_S S \longrightarrow R$, $\mu_2:S \otimes_R R \longrightarrow S$ son los isomorfismos dados por la multiplicación; $\phi_2:G_2(S) \longrightarrow N$, $\phi_1:G_1(R) \longrightarrow M$ son también isomorfismos, y $\mathbf{G}(N) \cong M$ y $\mathbf{F}(M) \cong N$ de forma natural, y donde $\mathbf{G}_1$ y $\mathbf{G}_2$ son los adjuntos por la izquierda de $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\_)$ y $\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(N,\_)$ respectivamente.

(b) Existen subcategorías $\mathfrak{C}'$ de $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}'$ de $\mathfrak{D}$, equivalentes bajo las equivalencias inversas **F** con la restricción a $\mathfrak{C}'$ y **G** con la restricción a $\mathfrak{D}'$. Estas subcategorías son maximales respecto de la propiedad de ser equivalentes bajo **F** y **G**, y además, $M \in \mathfrak{C}'$ y $N \in \mathfrak{D}'$.

(c) $\mathfrak{C}'$ y $\mathfrak{D}'$ se pueden identificar como categorías cociente de $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ respecto de las clases de torsión generadas por las siguientes clases $\{ X \in \mathfrak{C} \mid \mathbf{GF}(X) = 0 \}$ en $\mathfrak{C}$ y $\{ Y \in \mathfrak{D} \mid \mathbf{FG}(Y) = 0 \}$ en $\mathfrak{D}$.

Hemos construido entonces la situación:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E\text{-mód} \arrow[dll, shift left, "G_1"] \arrow[drr, shift right, "G_2"'] \arrow[dd, shift right, "a_3"'] \arrow[dl, phantom, "a_1 \quad i_1"] \arrow[dr, phantom, "i_2 \quad a_2"] & & \\
\mathfrak{C} \arrow[urr, shift left, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{C}}(M,\_)"] \arrow[r, shift left, "\simeq"] \arrow[d, shift right, "a'_1"'] & (E,\mathcal{F})\text{-mód} \arrow[l, shift left] & & (E,\mathcal{G})\text{-mód} \arrow[r, shift right] & \mathfrak{D} \arrow[ull, shift right, "\mathrm{Hom}_{\mathfrak{D}}(M,\_)"'] \arrow[l, shift right, "\simeq"'] \arrow[d, shift left, "i'_2"] \\
\mathfrak{C}' \arrow[u, shift right, "i'_1"'] \arrow[rr, leftrightarrow, "\simeq"] & & (E,\mathcal{H})\text{-mód} \arrow[uu, shift right, "i_3"'] \arrow[rr, leftrightarrow, "\simeq"] & & \mathfrak{D}' \arrow[u, shift left, "a'_2"]
\end{tikzcd}
$$

Si ahora suponemos que $\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{D}$ son categorías de módulos, digamos $\mathfrak{C}$ = R-mód y $\mathfrak{D}$ = S-mód tendremos que $G_1 \cong M \otimes_E \_$ y $G_2 \cong N \otimes_E \_$. Así, los funtores F y G serán, salvo isomorfismos naturales, $F = N \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,\_)$ y $G = M \otimes_E \mathrm{Hom}_S(N,\_)$. En los casos que analizaremos, las imágenes ${}_S F(R)$ y ${}_R G(S)$ nos permiten definir nuevos funtores

$$\mathrm{Hom}_R(G(S),\_) \cong \mathrm{Hom}_R(M \otimes_E \mathrm{Hom}_S(N,S),\_) \cong \mathrm{Hom}_E(\mathrm{Hom}_S(N,S),\mathrm{Hom}_R(M,\_)) \text{ y}$$

$$\mathrm{Hom}_S(F(R),\_) \cong \mathrm{Hom}_S(N \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,R),\_) \cong \mathrm{Hom}_E(\mathrm{Hom}_R(M,R),\mathrm{Hom}_S(N,\_)).$$

Estos objetos, y los funtores que determinan, desempeñan una función crucial en el desarrollo de nuestros resultados a continuación.

4.2. El problema de la unicidad para generadores.

En [13] se demuestra que un isomorfismo entre los anillos de endomorfismos de módulos libres numerablemente generados implica que las categorías de módulos sobre los anillos base correspondientes son equivalentes. En [12] se muestra que esta equivalencia está inducida por el funtor que hemos descrito de modo general en la introducción.

En el caso de generadores (con elemento unimodular) este mismo funtor aparece en [64, Definición 2.2]. Sin embargo, hay varias preguntas que surgen a partir de este último trabajo. La primera es que ahí se dan condiciones equivalentes para que dicho funtor sea una equivalencia de categorías pero no observamos un ejemplo que nos muestre si dicha equivalencia, en general, se verifica o no, aunque, en principio, sea difícil esperar que esto ocurra. En el párrafo relativo a módulos proyectivos con elemento unimodular mostraremos que en ese caso, que incluye a este, hay isomorfismos entre anillos de endomorfismos que no están inducidos por equivalencias de categorías. Aquí vamos a aprovechar que estamos en una situación general para mostrar formas de construcción de ejemplos.

Observación 4.2.1: Se pueden dar construcciones generales a partir de las cuales se pueden elegir anillos R y S y generadores infinitamente generados $M \in$ R-mód y $N \in$ S-mód de tal manera que $End(_RM) \approx End(_SN)$ y sin embargo R y S no sean anillos Morita equivalentes.

Efectivamente, comencemos con un anillo R y un generador no finitamente generado para R-mód, $_RM'$, y hagamos $S = End(_RM')$. Ahora, para cualquier conjunto infinito K, hacemos $N = S^K$ (el producto directo de K copias de S). Entonces, N es un generador infinitamente generado para S-mód. Por el Teorema 3.2.1, S es un objeto cerrado respecto de la topología de Gabriel por la izquierda generada por $fEnd(_RM) = S_0$.

Como $Hom_S(S_0 \otimes_S S_0, S^K) \cong S^K$ entonces [32, Proposition 26.10] $S^K = N$ también es un objeto S_0-cerrado. Además, todo homomorfismo $\alpha: S_0N \longrightarrow S_0N$ se extiende de manera única a uno $\bar{\alpha}: N \longrightarrow N$ porque S_0N es S_0-denso en N, y N, a su vez, es S_0-cerrado. Nuevamente, por el

Teorema 3.2.1 sabemos que R-mód y S_0-mód son categorías equivalentes bajo las equivalencias inversas $S_0\mathrm{Hom}_R(M',\_)$:R-mód $\longrightarrow$ S_0-mód y $M'\otimes_{S_0}\_$:S_0-mód $\longrightarrow$ R-mód y que $M' = M'S_0$ y $M'\otimes_{S_0} S_0N = M'\otimes_S N$. Hacemos $M = M'\otimes_S N$. Como R-mód y S-mód son categorías equivalentes y bajo la equivalencia S_0N corresponde con M, tenemos que $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_{S_0}S_0N) =$ $= \mathrm{End}({}_SN)$. Hemos construido entonces el diagrama:

$\mathrm{Hom}_R(M,\_)$

$$\begin{tikzcd}
 & \text{S-mód} \arrow[dl, "M'\otimes_S -"'] \arrow[d, shift right] \arrow[r, "\mathrm{Hom}_S(N,_)"] & \mathrm{End}({}_SN)\text{-mód} \\
\text{R-mód} \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_R(M',_)"] \arrow[r, shift left] \arrow[r, phantom, "\approx"] & S_0\text{-mód} \arrow[l, shift left] \arrow[u, shift right] \arrow[ur, "\mathrm{Hom}_{S_0}(S_0N,_)"'] &
\end{tikzcd}$$

Aun suponiendo que M' no es finitamente generado y que (en consecuencia) $\mathrm{Hom}_R(M',\_)$ no es una equivalencia de categorías entre R-mód y S-mód, podría ocurrir que R-mód y $\mathrm{End}({}_SN)$-mód fuesen categorías equivalentes (véase, [2]) así que, para asegurarnos de que no sea posible que R-mód y $\mathrm{End}({}_SN)$-mód sean categorías equivalentes podremos, por ejemplo, elegir propiedades de R que se preserven bajo equivalencias y generadores particulares M', de tal manera que $\mathrm{End}({}_RM')$ no verifique aquellas propiedades; por ejemplo, R hereditario y M' libre infinitamente generado [14] o R anillo con división y M' espacio vectorial sobre R de dimensión infinita, etcétera.

En vista de que los generadores arbitrarios son objetos más generales que los módulos libres, es natural esperar que, bajo la situación antes mencionada, obtengamos una relación más general que la de una equivalencia de categorías, como es un contexto de Morita.

Teorema 4.2.2: Sean R y S anillos con uno. Si $M \in$ R-mód y

$N \in S$-mód son generadores con anillos de endomorfismos isomorfos entonces haciendo $P = M \otimes_{End(_RM)} Hom_S(N,S)$ y $Q = N \otimes_{End(_SN)} Hom_R(M,R)$, tenemos que (R,S,P,Q) es un contexto de Morita normalizado por la izquierda. Recíprocamente, si (R,S,P,Q) es un contexto de Morita normalizado por la izquierda entonces $M = P \oplus R$ y $N = Q \oplus S$ son generadores tales que $End(_RM) \approx End(_SN)$.

Demostración: Supongamos primero que $M \in R$-mód y $N \in S$-mód son generadores con anillos de endomorfismos isomorfos. Sea $End(_RM) \approx E \approx \approx End(_SN)$. Denotemos $E_0 \approx fEnd(_RM)$, $E'_0 \approx fEnd(_SN)$; sean $\langle\_,\_\rangle$ y $[\_,\_]$ los morfismos del contexto derivado de $_RM$ y sean $\langle\_,\_\rangle'$ y $[\_,\_]'$ los que corresponden al contexto derivado de $_SN$. Ahora definimos $\varphi: P \otimes_S Q \longrightarrow R$ y $\psi: Q \otimes_R P \longrightarrow S$ tales que para $m \otimes f \in P$ y $n \otimes g \in Q$,

$$\varphi((m\otimes f)\otimes(n\otimes g)) = \langle m\cdot[f,n]',g\rangle = \langle m,[f,n]'g\rangle \text{ y}$$
$$\psi((n\otimes g)\otimes(m\otimes f)) = \langle n[g,m],f\rangle' = \langle n,[g,m]f\rangle'.$$

Mostrar que (R,S,P,Q) junto con φ y ψ es un contexto de Morita es cuestión simplemente de hacer las cuentas. Para ver que efectivamente es un contexto normalizado por la izquierda, primero obsérvese que, por el Teorema 3.2.1, E es E_0 y E'_0-cerrado y que $Hom_R(M,R)$ y $Hom_R(N,S)$ al ser ambos sumandos directos de sumas directas finitas de E, pertenecen, cada uno, a (E,E_0)-mód y (E,E'_0)-mód a la vez y en consecuencia, tenemos que $Hom_R(M,P) = Hom_R(M,M\otimes_E Hom_S(N,S)) \cong Hom_S(N,S)$ y $Hom_S(N,Q) = Hom_S(N,N\otimes_E Hom_R(M,R)) \cong Hom_R(M,R)$, puesto que, por el Teorema 3.2.1 R-mód y (E,E_0)-mód así como S-mód y (E,E_0)-mód son categorías equivalentes bajo $M \otimes_E \_$ y $Hom_R(M,\_)$, y $N \otimes_E \_$ y $Hom_S(N,\_)$ respectivamente.

Así, $End(_RP) \approx End(_E Hom_S(N,S)) \approx S$ y análogamente, $End(_SQ) \approx R$. Además, $Hom_R(P,R) = Hom_R(M\otimes_E Hom_S(N,S),R) \cong Hom_E(Hom_S(N,S),Hom_R(M,R)) \cong$ (por el Teorema 3.2.1) $\cong N \otimes_E Hom_R(M,R) = Q$, y análogamente $Hom_S(Q,S) \cong \cong P$. Por lo tanto [69] (R,S,P,Q) es un contexto normalizado por la izquierda.

Recíprocamente, supóngase que (R,S,P,Q) es un contexto de Morita normalizado por la izquierda y sean $_RI$ y $_SJ$ los ideales traza del contexto. Entonces [69] tenemos que $Hom_R(I,R) \cong R$, $Hom_R(I,P) \cong P$, $Hom_R(P,R) \cong Q$ y $End(_RP) \approx S$, y que $Hom_S(J,S) \cong S$, $Hom_S(J,Q) \cong Q$, $Hom_S(Q,S) \cong P$ y $End(_SQ) \approx R$. Entonces $End(_RP\oplus R) \approx \begin{pmatrix} End(_RP) & Hom_R(P,R) \\ P & Q \end{pmatrix} \approx$ $\cong \begin{pmatrix} S & Q \\ P & R \end{pmatrix}$ y $End(_SQ\oplus S) \approx \begin{pmatrix} End(_SQ) & Hom_S(Q,S) \\ Q & S \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} R & P \\ Q & S \end{pmatrix}$.

Finalmente, es fácil comprobar que la correspondencia $\begin{pmatrix} s & q \\ p & r \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} r & p \\ q & s \end{pmatrix}$ es isomorfismo de anillos. Esto concluye la demostración.

Observación 4.2.3: Se puede dar el caso en que, partiendo de dos generadores $_RM$, $_SN$ y obteniendo como en el Teorema $_RP$ y $_SQ$, al hacer el recíproco no recuperemos a $_RM$ y $_SN$. Es más, $_RP$ y $_SQ$ pueden ser finitamente generados e incluso progeneradores (véase [64, Lema 1.11 y Teoremas 2.3 y 2.7]) y entonces habrá equivalencia, aún habiendo elegido a $_RM$ y $_SN$ infinitamente generados.

En este punto, queremos insistir en que, por lo que hemos visto en la Introducción de este capítulo, dado el isomorfismo entre dos anillos de endomorfismos de generadores ya sabemos cuáles son los funtores que inducen el isomorfismo y de qué manera lo hacen. Lo que nos interesa es encontrar una descripción y una relación entre las subcategorías equivalentes pero, como veremos después, en caso de definir otro funtor habrá que mostrar de nuevo cómo induce el isomorfismo. Por lo pronto seguimos utilizando la notación simplificada. Así, el diagrama final de la Introducción de este capítulo junto con el teorema anterior, tiene ahora la siguiente forma:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & & E\text{-mód} \arrow[dlll, shift left, "M\otimes_E"] \arrow[drrr, shift left, "N\otimes_E"] \arrow[ddd, shift left] & & & \\
R\text{-mód} \arrow[urrr, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M,\_)"] \arrow[r, shift left, "\simeq"] \arrow[dddd, shift left] & E_0\text{-mód} \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] & & & & E'_0\text{-mód} \arrow[r, shift left, "\simeq"] \arrow[d, shift left] & S\text{-mód} \arrow[l, shift left] \arrow[ulll, shift left, "\mathrm{Hom}_S(N,\_)"] \arrow[dddd, shift left] \\
 & (E,E_0)\text{-mód} \arrow[u, shift left, "\cdot E_0"] \arrow[drr, shift left] & & & & (E,E_0)\text{-mód} \arrow[u, shift left, "\cdot E'_0"'] \arrow[dll, shift left] & \\
 & & & (E,\mathcal{H})\text{-mód} \arrow[ull, shift left] \arrow[urr, shift left] \arrow[uuu, shift left] \arrow[dlll, shift left, "\simeq"'] \arrow[drrr, shift left, "\simeq"] & & & \\
(M) = {}_R\mathcal{U} \arrow[uuuu, shift left] \arrow[urrr, shift left] \arrow[rrrrrr, shift left, "\mathrm{Hom}_R(M\otimes_E \mathrm{Hom}_S(N,S),\_)\ \cong\ N\otimes_E \mathrm{Hom}(M,\_)", "\simeq"'] & & & & & & {}_S\mathcal{U} = (N) \arrow[llllll, shift left, "\mathrm{Hom}_S(N\otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,R),\_)\ \cong\ M\otimes_E \mathrm{Hom}_S(N,\_)"] \arrow[uuuu, shift left] \arrow[ulll, shift left]
\end{tikzcd}
$$

El Teorema 7 de [69] y la construcción de los generadores en el recíproco del teorema anterior, nos permiten expresar dicho teorema en términos categóricos:

Corolario 4.2.4: Sean R y S anillos con uno. Si M ∈ R-mód y N ∈ S-mód son generadores con anillos de endomorfismos isomorfos entonces existen subcategorías equivalentes maximales de R-mód y S-mód que contienen a los anillos R y S.

Recíprocamente, si se tienen subcategorías equivalentes maximales de R-mód y S-mód que contienen a R y S entonces existen generadores de R-mód y S-mód con anillos de endomorfismos isomorfos.

Demostración: Sean, pues, M ∈ R-mód y N ∈ S-mód generadores con anillos de endomorfismos isomorfos. Entonces, por el Teorema 4.2.2, podemos construir un contexto de Morita normalizado por la izquierda. Por [69, Theorem 7] se tienen entonces las subcategorías deseadas.

Recíprocamente, [69, Theorem 7] establece asimismo que dadas tales subcategorías se puede construir un contexto de Morita normalizado por la izquierda y por el recíproco del Teorema 4.2.2 tenemos los generadores deseados. (Nótese que en la demostración del Teorema 7 de [69] los bimódulos con los cuales se construye el contexto son las imágenes de los anillos bajo las equivalencias). Esto concluye la demostración.

Corolario 4.2.5: Sean R y S anillos con uno. Si $M \in R$-mód y $N \in S$-mód son generadores con anillos de endomorfismos ismorfos entonces los centros de R y S son isomorfos.

Demostración: Inmediata del Teorema 4.2.2 y [69, Corollary 9].

Por el Corolario 4.2.4 vemos que existen categorías equivalentes maximales bajo las restricciones de $\mathrm{Hom}_R(P,\_)$ y $\mathrm{Hom}_S(Q,\_)$, y también bajo las restricciones de los funtores $N \otimes_{\mathrm{End}({}_RM)} \mathrm{Hom}_R(M,\_)$ y $\cdot M \otimes_{\mathrm{End}({}_SN)} \mathrm{Hom}_S(N,\_)$. Dichas categorías maximales son [69, Theorem 1 y Theorem 7] precisamente las categorías cociente del contexto (R,S,P,Q); además, la diferencia entre los funtores es la localización; es decir, que para $X \in R$-mód, $\mathrm{Hom}_R(P,X)$ es justo la localización de $N \otimes_{\mathrm{End}({}_RM)} \mathrm{Hom}_R(M,X)$ respecto de la teoría de torsión asociada al contexto en S-mód. Es por ello por lo que preferimos analizar la situación valiéndonos de los funtores $\mathrm{Hom}_R(P,\_)$ y $\mathrm{Hom}_S(Q,\_)$ y renombrarlos con **F** y **G**.

Solamente habría que verificar que **F** y **G** induzcan el isomorfismo de anillos, pero esto se obtiene de manera directa si observamos que la composición de estos homomorfismos canónicos: $\mathrm{Hom}_R(M \otimes_{\mathrm{End}({}_SN)} \mathrm{Hom}_S(N,S),M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}({}_SN)}(\mathrm{Hom}_S(N,S),\mathrm{End}({}_RM)) \longrightarrow$ $\longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{End}({}_SN)}(\mathrm{Hom}_S(N,S),\mathrm{End}({}_SN)) \longrightarrow N$ (llamémosle ν), hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} F(M) & \xrightarrow{F(r)} & F(M) \\ \nu \downarrow & & \downarrow \nu \\ N & \xrightarrow{\sigma(r)} & N \end{array}$$

para todo $r \in End({}_RM)$. Así, podemos reunir los resultados anteriores con nuestros nuevos funtores, en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.6: Sean R y S anillos arbitrarios, $M \in$ R-mód, $N \in$ S-mód generadores y $\sigma:End({}_RM) \longrightarrow End({}_SN)$ un isomorfismo de anillos. Entonces, los bimódulos ${}_RP_S = M \otimes_{End({}_RM)} Hom_S(N,S)$ y ${}_SQ_R = N \otimes_{End({}_SN)} Hom_R(M,R)$ determinan un contexto de Morita (R,S,P,Q) normalizado por la izquierda, con funtores asociados $F = Hom_R(P,\_)$ y $G = Hom_S(Q,\_)$. Estos funtores, en la restricción a las categorías cociente determinadas por los ideales traza del contexto [69] son equivalencias inversas de categorías, y dichas subcategorías son maximales respecto de la propiedad de ser equivalentes e incluir a los anillos R y S.

Aún más, se tienen los isomorfismos $F(R) \cong Q$, $F(P) \cong S$ y $\nu:F(M) \longrightarrow N$, y $G(S) \cong P$, $G(Q) \cong R$ y $\eta:G(N) \longrightarrow M$ y las igualdades $\sigma(r) = \nu^{-1}F(r)\nu$ y $\sigma^{-1}(s) = \eta^{-1}G(s)\eta$ para todo $r \in End({}_RM)$ y $s \in End({}_SN)$.

Recíprocamente, si F:R-mód $\longrightarrow$ S-mód y G:S-mód $\longrightarrow$ R-mód son funtores tales que (R,S,G(S),F(R)) es un contexto normalizado por la izquierda entonces $M = G(S) \oplus R$ y $N = F(R) \oplus S$ son generadores con anillos de endomorfismos isomorfos.

Demostración: La existencia del contexto y de los funtores es consecuencia directa del Teorema 4.2.2 y [69, Theorem 3]. La afirmación acerca de las subcategorías es [69, Theorem 3 y Theorem 7]. Las correspondencias vienen del Teorema 4.2.2 y el párrafo anterior a este teorema. El recíproco es el del Teorema 4.2.2.

Hemos visto entonces que un isomorfismo entre anillos de endomorfismos de generadores induce una equivalencia de subcategorías. Las manera como inducimos los funtores refleja la situación más general posible; es decir, un contexto de Morita normalizado. En el párrafo referente a módulos proyectivos con elemento unimodular, mostraremos que incluso cuando se tengan categorías equivalentes R-mód y S-mód puede haber objetos de la clase mencionada con anillos de endomorfismos isomorfos de tal manera que los funtores asociados no sean equivalencias de categorías. Igual que en la Observación 4.2.1 vamos a aprovechar que estamos en una situación más general para exhibir una forma de construir ejemplos de anillos isomorfos R y S y generadores ${}_RM$ y ${}_SN$ semilinealmente isomorfos de tal manera que, sin embargo, ciertos funtores inducidos no sean equivalencias de categorías.

Observación 4.2.7: Una forma de construcción de anillos isomorfos R y S y generadores $M \in$ R-mód y $N \in$ S-mód para los cuales se tenga un isomorfismo semilineal y sin embargo, exista un isomorfismo de anillos entre $\mathrm{End}({}_RM)$ y $\mathrm{End}({}_SN)$ de tal manera que los funtores inducidos del Teorema 4.2.6 no sean equivalencias inversas de categorías.

Efectivamente, sea A un anillo con uno y $M \in$ A-mód un generador no finitamente generado con elemento unimodular. Sea $K = \mathrm{End}({}_AM)$, $K_0 = f\mathrm{End}({}_AM)$ y $\alpha \in K_0$ el elemento idempotente (Teorema 3.2.1) tal que $K\alpha K = K_0$ y $\alpha K_0 \alpha = \alpha K \alpha \approx A$.

Sea $E = (K,K)$ (donde (K,K) denota $K\times K$, el anillo producto). $E_0 = (K_0,K)$, $E'_0 = (K,K_0)$, $e = (\alpha,1)$ y $f = (1,\alpha)$. Entonces, por el Teorema 3.2.1, $eEe = (A,K)$, $eE = (M,K)$, $fEf = (K,A)$ y $fE = (K,M)$. Y sabemos que $\mathrm{End}({}_{eEe}eE) \approx E$ y $\mathrm{End}({}_{fEf}fE) \approx E$. Entonces el contexto de

Morita del Teorema 4.2.2 es (eEe,fEf,eEf,fEe) y los ideales traza del contexto son eEfEe = $(A,K_0) \subset (A,K)$ y fEeEf = $(K_0,A) \subset (K,A)$. Por lo tanto, los funtores $\mathrm{Hom}_{eEe}(eEf,\_)$ y $\mathrm{Hom}_{fEf}(fEe,\_)$ no pueden ser equivalencias inversas de categorías entre (A,K)-mód y (K,A)-mód. Tomando R = eEe, M = eE, S = fEf, N = fE y $\sigma = 1_E$ tenemos la construcción deseada.

De todas formas, esto no debe interpretarse como un defecto en la elección de los funtores **F** y **G** o como indicio de un carácter "no canónico" de tal elección. Si observamos el diagrama de la página 121 nos daremos cuenta de que los funtores que obtenemos son equivalencias inversas si y sólo si los endomorfismos finitos se corresponden bajo el isomorfismo de los anillos. Entonces podemos asegurar que:

Observación 4.2.8: Sean R y S anillos con uno, M ∈ R-mód y N ∈ S-mód generadores y $\sigma:\mathrm{End}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SN)$ un isomorfismo de anillos. Entonces σ está inducido por alguna equivalencia de categorías **H**:R-mód $\longrightarrow$ S-mód tal que **H**(M) ≅ N si y sólo si $\sigma(f\mathrm{End}({}_RM)) = f\mathrm{End}({}_SN)$, o equivalentemente, los funtores inducidos **F** y **G** del Teorema 4.2.6 son equivalencias inversas de categorías.

En resumen, todo morfismo entre anillos de endomorfismos está inducido por un funtor y todo funtor induce un morfismo de anillos entre los anillos de endomorfismos de los objetos que se corresponden bajo dicho funtor. En el caso de los isomorfismos entre anillos de endomorfismos de generadores, toda equivalencia de categorías los induce, pero hay isomorfismos que no están inducidos por ninguna equivalencia de categorías, sino por contextos de Morita especiales, en el sentido de que son funtores asociados al contexto.

Además, esta situación nos permite, como veremos a continuación, determinar con relativa facilidad, condiciones para garantizar que dichos isomorfismos provengan siempre de equivalencias de categorías.

Clases de anillos que verifican unicidad.

Como mencionamos anteriormente, en [64] se pueden encontrar condiciones equivalentes a que dados dos anillos R y S y generadores $M \in R$-mód y $N \in S$-mód con anillos de endomorfismos isomorfos, dicho isomorfismo de anillos esté inducido por una equivalencia de categorías bajo dos criterios [64, Teorema 2.3 y Teorema 2.7].

Estos dos teoremas en [64] nos dan, en la situación y con la notación del Teorema 4.2.6, condiciones equivalentes a que, primero, una de las categorías esté sumergida en la otra; es decir, pongamos por caso, ${}_RP$ generador si y sólo si ${}_SQ$ es proyectivo y finitamente generado y otras, y también condiciones equivalentes a que ${}_RP$ y ${}_SQ$ sean ambos progeneradores. Estos dos teoremas pueden obtenerse de inmediato de nuestro Teorema 4.2.6; sólo es cuestión de desentrañar la notación.

Así, en esta sección vamos a proponer un criterio más, pues a nosotros nos interesa conocer condiciones sobre los anillos R y S (y sus categorías de módulos) para que la equivalencia de categorías ocurra siempre que se tenga un isomorfismo $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$ con ${}_RM$ y ${}_SN$ generadores.

Para ello, vamos a comenzar definiendo lo que entendemos por "endomorfismos finitos invariantes". Como vimos en la sección anterior, los funtores inducidos por el Teorema 4.2.6 son equivalencias inversas si y sólo si los endomorfismos finitos "coinciden" bajo el isomorfismo. Sea R un anillo y M un R-módulo por la izquierda. Decimos que M tiene "endomorfismos finitos invariantes" si para todo anillo S y todo S-módulo por la izquierda N, tal que $\mathrm{End}({}_RM)$ es isomorfo a $\mathrm{End}({}_SN)$, la imagen de los endomorfismos finitos de M está contenida en $\mathrm{fEnd}({}_SN)$; es decir, $\mathrm{fEnd}({}_RM)$ permanece invariante frente a isomorfismos de $\mathrm{End}({}_RM)$ con otro anillo de endomorfismos. Diremos que un anillo R tiene "endomorfismos finitos invariantes en generadores" (o algunos otros módulos que consideremos) si cada generador de R-mód posee la mencionada propiedad.

En los siguientes resultados, vamos a tratar de mostrar (además de algunas clases de anillos con la propiedad) en qué sentido resultan útiles nuestras técnicas cuando uno se pregunta acerca de alguna clase específica de anillos. También quedará establecido que cuando dos anillos R y S tienen "endomorfismos finitos invariantes en generadores" todo isomorfismo entre anillos de endomorfismos de generadores implica de hecho la equivalencia de las categorías R-mód y S-mód, o, en otras palabras, la existencia de un contexto normalizado entre R y S implica la equivalencia de categorías.

Proposición 4.2.9: Sea R un anillo hereditario y noetheriano por la izquierda, S un anillo arbitrario y $M \in$ R-mód, $N \in$ S-mód generadores con anillos de endomorfismos isomorfos. Entonces, usando la notación del Teorema 4.2.6, ${}_RP$ es un generador y $E_0 \subseteq E'_0$.

Demostración: Considérese, pues, la situación del Teorema 4.2.6 y llamemos I y J a los ideales traza, en R y S respectivamente, del contexto (R,S,P,Q). Cómo R es hereditario y noetheriano por la izquierda entonces ${}_RI$ es ideal finitamente generado y proyectivo. Entonces I es idempotente y por [69, Corollary 2] la clase de torsión asociada con I es TTF, y la topología de Gabriel con la que corresponde tiene a I como ideal mínimo; además, R es I-cerrado. Todo esto significa que I-mód es una categoría de Grothendieck localmente finitamente generada con un progenerador, que es I, y como $\mathrm{End}({}_II) \approx \mathrm{End}({}_RI) \approx R$ (porque R es I-cerrado) entonces [20, Theorem 1.1] I-mód y R-mód son categorías equivalentes. Ahora bien, por lo visto en las páginas 30-31 tenemos un filtro con ideal mínimo $\mathfrak{F} = \{ {}_RK \leq R \mid I \cdot K = I \}$. Claramente, $I \in \mathfrak{F}$ es el ideal mínimo porque I es idempotente, pero como R-mód e I-mód son equivalentes, este filtro deberá ser el filtro trivial, $\mathfrak{F} = \{ R \}$. Por lo tanto $I = R$. Esto muestra que ${}_RP$ es generador para R-mód (porque $I = R$ es su traza en R) y como (R,S,P,Q) es un contexto de Morita normalizado por la izquierda, tenemos [69] que R-mód y (S,J)-mód son entonces categorías equivalentes, bajo las equivalencias $\mathrm{Hom}_R(P,\_):R\text{-mód} \longrightarrow (S,J)\text{-mód}$ $\mathrm{Hom}_S(Q,\_):(S,J)\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$. Ahora, por el Teorema 3.2.1 tenemos que $J = f\mathrm{End}({}_RP)$, el cual es un ideal idempotente y por lo tanto R-mód y J-mód son categorías equivalentes. Obsérvese que, por el Teorema 4.2.6 N es J-cerrado y en consecuencia tenemos $\mathrm{End}(\mathrm{End}({}_SJN) \approx$ $\approx \mathrm{End}({}_S(\mathrm{Tr}_S(\mathrm{Tr}_S(JN) = J$. Afirmamos ahora que $f\mathrm{End}({}_SJN) \subseteq f\mathrm{End}({}_SN) =$ $= E'_0$. Sea $x \in f\mathrm{End}({}_SJN)$, entonces x se factoriza como $x = \alpha\cdot\beta$ con $\alpha:JN \longrightarrow S^n$ y $\beta:S^n \longrightarrow JN$. Primero vamos a tratar de completar conmutativamente el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
& & S^n \arrow[dddrr, "\beta"] & & \\
& & J\cdot S^n \arrow[u] \arrow[ddrr, dashed, "\beta'"] & & \\
& & 0 \arrow[u] & & \\
J\cdot N \arrow[uuurr, "\alpha"] \arrow[uurr, "\alpha"'] \arrow[rrrr, "x"] & & & & J\cdot N
\end{tikzcd}$$

Como $\mathrm{Im}\,\alpha \subseteq J\cdot S^n$, podemos considerar β', la restricción de β a $J\cdot S^n$. Así, $\alpha\beta' = \alpha\beta = x$. Ahora vamos a extender conmutativamente el diagrama

$$\begin{tikzcd}
N \arrow[r, dashed, "\bar{\alpha}"] & S^n \arrow[r, dashed, "\bar{\beta}'"] & N \\
& J\cdot S^n \arrow[u] \arrow[ddr, "\beta'"] & \\
& 0 \arrow[u] & \\
J\cdot N \arrow[uuu] \arrow[uur, "\alpha"] \arrow[rr, "x"] & & J\cdot N \arrow[uuu] \\
0 \arrow[u] & & 0 \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

$\beta':J\cdot S^n \longrightarrow J\cdot N$ se extiende de manera única a $\bar{\beta}':S^n \longrightarrow N$ porque S y N son J-cerrados, y α se extiende a $\bar{\alpha}:N \longrightarrow S$. Finalmente, como $\bar{\beta}'\circ\bar{\alpha} \in f\mathrm{End}({}_S N)$, se tiene que $f\mathrm{End}({}_S JN) \subseteq f\mathrm{End}({}_S N)$ (identificando $\mathrm{End}({}_S JN) = \mathrm{End}({}_S N)$) porque $\bar{\beta}'\circ\bar{\alpha}$ extiende a $\beta\circ\alpha$ de manera única. El hecho de que $f\mathrm{End}({}_S JN)$ es idempotente, viene de [98, Lemma 2.3] junto con la observación que se hizo de que $\mathrm{Tr}_S(JN) = J$. Así, nuestra afirmación queda establecida.

Sólo nos falta probar que $E_0 = f\mathrm{End}({}_S JN)$. Para ello, obsérvese que hemos establecido que las categorías E_0-mód, R-mód, J-mód y $(E, f\mathrm{End}({}_S JN))$-mód son equivalentes. Permítasenos entonces considerar a las categorías E_0-mód $\longrightarrow$ $(E, f\mathrm{End}({}_S JN))$-mód y aplicar lo visto en la página 71 y [26, Proposition 2.5] con $\mathfrak{C} = E_0$-mód. Entonces, $E_0 \subseteq$ $\subseteq f\mathrm{End}({}_S JN)$ y de manera similar, tomando ahora $\mathfrak{C} = f\mathrm{End}({}_S JN)$-mód, se tiene la inclusión inversa $f\mathrm{End}({}_S JN) \subseteq E_0$. Por lo tanto $f\mathrm{End}({}_S JN) = E_0$ y en consecuencia, $E_0 \subseteq E'_0$. Esto concluye la demostración.

Así, los anillos hereditarios noetherianos por la izquierda verifican la propiedad "endomorfismos finitos invariantes en generadores".

Corolario 4.2.10: Sean R y S anillos con "endomorfismos finitos invariantes en generadores" y M $\in$ R-mód y N $\in$ S-mód generadores con anillos de endomorfismos isomorfos. Entonces, R-mód y S-mód son categorías equivalentes y por lo tanto, en la notación del Teorema 4.2.2, ${}_RP$ y ${}_SQ$ son progeneradores. Además, $E_0 \approx E'_0$.

Demostración: Inmediata, a partir del Teorema 4.2.2 y la Proposición 4.2.9.

Isomorfismos semilineales

El que un isomorfismo, δ, entre anillos de endomorfismos de, dos módulos M $\in$ R-mód y N $\in$ S-mód esté inducido por un isomorfismo semilineal (Cf. [12, 63 y 64]), φ:M $\longrightarrow$ N significa que para cada x $\in$ End(${}_RM$), se tiene que $\delta(x) = \varphi^{-1}x\varphi$.

En [64] también se encuentran condiciones equivalentes a la de que un isomorfismo entre anillos de endomorfismos de generadores (con elemento unimodular y en términos de él) esté inducido por un isomorfismo semilineal; pero estas condiciones están dadas en términos de propiedades del propio anillo de endomorfismos. Nosotros seguimos en la misma línea de la sección anterior, tratando de determinar condiciones sobre los anillos de partida para que verifiquen la propiedad de que los isomorfismos de anillos de endomorfismos sean siempre inducidos por isomorfismos semilineales. Para ello, comenzaremos con algunas definiciones y propiedades básicas acerca del grupo de Picard.

Sean R, S anillos con uno y ${}_RM_S$ un bimódulo. Decimos que ${}_RM_S$ es invertible si M $\otimes_S$_:S-mód $\longrightarrow$ R-mód es una equivalencia de categorías o lo que es lo mismo si existe ${}_SN_R$ tal que M $\otimes_S$N $\longrightarrow$ R y N $\otimes_R$M $\longrightarrow$ S son isomorfismos de bimódulos.

En particular, cuando R = S, definimos el Grupo de Picard (multiplicativo) como las clases de isomorfismos de bimódulos (es decir, para ${}_RP_R$, se tiene $[P] = \{{}_RQ_R \mid {}_RP_R \cong {}_RQ_R\}$) invertibles, junto con la operación $[P]\cdot[Q] = [P \otimes_R Q]$. Nótese que el neutro del grupo es $[R]$.

Observación 4.2.11: Si F:R-mód $\longrightarrow$ R-mód y G:R-mód $\longrightarrow$ R-mód son autoequivalencias, con $P = F^{-1}(R)$ y $Q = G^{-1}(R)$ entonces ${}_RP_R \cong {}_RQ_R$ si y sólo si **F** y **G** son naturalmente isomorfos. La demostración es muy conocida [11, p.263].

Más en general, sean M, N $\in$ R-mód y $\varphi: {}_RM \longrightarrow {}_RN$ un isomorfismo. Entonces existe $\eta_\varphi: \mathrm{Hom}_R(M,\_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,\_)$ y un isomorfismo de anillos $\sigma: \mathrm{End}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{End}({}_RN)$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "x"] \arrow[d, shift left, "\varphi^{-1}"'] & M \arrow[d, shift right, "\varphi^{-1}"] \\ N \arrow[r, "\sigma(x)"] \arrow[u, shift left, "\varphi"] & N \arrow[u, shift right, "\varphi"'] \end{tikzcd}$$

es conmutativo, para todo $x \in \mathrm{End}({}_RM)$.

Así, φ es un R-isomorfismo a la izquierda y un isomorfismo σ-semilineal a la derecha. Aún más, si ${}_RK_S$ es un bimódulo arbitrario entonces $\eta_K: \mathrm{Hom}_R(M,K) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(N,K)$ es un isomorfismo σ-semilineal a la izquierda y S-isomorfismo a la derecha, dado por $\eta_K(xfs) = \sigma(x)(\varphi^{-1}\circ f)s$, donde $f \in \mathrm{Hom}_R(M,K)$, $x \in \mathrm{End}({}_RM)$ y $s \in S$.

Definición 4.2.12: Dos funtores F:R-mod $\longrightarrow$ S-mód y G:R-mód $\longrightarrow$ S'-mód con S y S' anillos, se llaman seminaturalmente isomorfos si existe un isomorfismo de anillos $\sigma: S \longrightarrow S'$ y una familia $\eta_K \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F(K),G(K))$ tal que todos los η_K son isomorfismos σ-semilineales por la izquierda y si $f \in \mathrm{Hom}_R(K,L)$ entonces el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} F(K) & \xrightarrow{\eta_K} & G(K) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(L) & \xrightarrow{\eta_L} & G(L) \end{array}$$

es conmutativo.

Esto nos permite enunciar:

Observación 4.2.13: Si F, G:R-mód $\longrightarrow$ R-mód son auto equivalencias con $P = F^{-1}(R)$ y $Q = G^{-1}(R)$ entonces ${}_RP \cong {}_RQ$ si y sólo si F es seminaturalmente isomorfo a G.

Demostración: Si ${}_RP \cong {}_RQ$ el argumento anterior a la definición nos da el resultado. Recíprocamente, tenemos en principio isomorfismos naturales $F \cong \mathrm{Hom}_R(P,\_)$ y $G \cong \mathrm{Hom}_R(Q,\_)$, y un isomorfismo seminatural $\eta\_:\mathrm{Hom}_R(P,\_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(Q,\_)$.

Sea $r \in R$ arbitrario. Entonces r define un R-homomorfismo $\cdot r$, la multiplicación por la derecha por r. Así, tenemos el cuadrado conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}_R(P,R) & \xrightarrow{\eta_R} & \mathrm{Hom}_R(Q,R) \\ {\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(P,\cdot r)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Hom}_R(Q,\cdot r)} \\ \mathrm{Hom}_R(P,R) & \xrightarrow{\eta_R} & \mathrm{Hom}_R(Q,R) \end{array}$$

es decir, $\eta_R \circ \mathrm{Hom}_R(P,\cdot r) = \mathrm{Hom}_R(Q,\cdot r)\circ\eta_R$ y en consecuencia, si $f \in \mathrm{Hom}_R(P,R)$ tenemos que $\eta_R(f\cdot r) = \eta_R(f)\cdot r$. Por lo tanto η_R es un R-homomorfismo a la derecha.

Finalmente, si repetimos el argumento anterior a la definición de isomorfismo seminatural considerando todo a la derecha (o sea R_R) tenemos un isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,R),R) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Q,R),R)$ el cual es R-isomorfismo a la izquierda e isomorfismo ρ-semilineal a la derecha. En vista de que, como bimódulos ${}_RP_R \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(P,R),R)$ y ${}_RQ_R \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(Q,R),R)$ porque P y Q son progeneradores, tenemos que existe un isomorfismo $\varphi:P \longrightarrow Q$ el cual es R-isomorfismo a la izquierda (y ρ-semilineal a la derecha).

En general [17, Theorem 1], si ${}_RP$ es un generador con $S = \mathrm{End}({}_RP)$ se tiene una sucesión exacta $1 \longrightarrow \mathrm{InAut}(S) \xrightarrow{\phi_P} \mathrm{Pic}(R)$ donde $\mathrm{Im}\ \phi_P = \{[Q] \in \mathrm{Pic}(R) | Q \otimes_R P \cong P \text{ en R-mód}\}$. Esto se obtiene haciendo, a partir de $\sigma \in \mathrm{Aut}(S)$, $Q = P \otimes_S S_\sigma \otimes_S \mathrm{Hom}_R(P,R)$ donde S_σ denota que la multiplicación a la derecha es $s \bullet s' = s \bullet \sigma(s')$. En particular, para ${}_RR$ se tiene $\mathrm{Im}\ \phi_R = \{[P] \in \mathrm{Pic}(R) | P \otimes_R R \cong R \text{ en R-mód}\}$, y la sucesión exacta $1 \longrightarrow \mathrm{InAut}(R) \longrightarrow \mathrm{Aut}(R) \xrightarrow{\phi_R} \mathrm{Pic}(R)$. Nótese que en este caso para $\sigma \in \mathrm{Aut}((R)$, $P = R \otimes_R R_\sigma \otimes_R R = {}_RR_\sigma$.

Así como anteriormente vimos que Pic(R) corresponde con las autoequivalencias junto con isomorfismos naturales, lo visto ahora nos muestra que Aut(R)/InAut(R) corresponde con el subgrupo de las autoequivalencias junto con isomorfismos seminaturales. En [11, Definition 1.4] se dice que R tiene la propiedad Aut-Pic si ϕ_R es sobre. Es decir, si se verifica (véase [17, Theorem 1]):

Proposición 4.2.14: Sea R un anillo. Son equivalentes:

(a) R tiene Aut-Pic

(b) Si [P], [Q] $\in$ Pic(R) entonces ${}_RP \cong {}_RQ$

(c) Todos los progeneradores ${}_RP$ tales que $\mathrm{End}({}_RP) \approx R$, son isomorfos como R-módulos izquierdos.

(ch) Todas las autoequivalencias de R son seminaturalmente isomorfas.

Demostración: Se desprende de lo anterior.

Es interesante comparar este resultado y el teorema siguiente con aquellos en [63] que se siguen de la condición Pic(R)-trivial; esta condición expresa que, si ${}_RP \in R$-mód es proyectivo, el isomorfismo de anillos $\mathrm{End}({}_RP) \approx R$ implica ${}_RP \cong {}_RR$ [63, p.80].

Ahora vamos a trasladar lo anterior a nuestra situación. Supongamos que tenemos un anillo R tal que verifica "endomorfismos finitos invariantes en generadores". Esto quiere decir que si tenemos un contexto de Morita (R,S,P,Q) normalizado por la izquierda entonces P y Q son progeneradores y además, $\mathrm{End}({}_RP) \approx S$ y $\mathrm{End}({}_RQ) \approx R$. Restringiéndonos ahora (y debilitando la condición) a contextos normalizados de la forma (R,R,P,Q), definimos la propiedad "Autocontextos normalizados triviales" (ANT, abreviado) cuando todo contexto de Morita (R,R,P,Q) normalizado por la izquierda sea trivial (es decir, que ${}_RP$ y ${}_RQ$ son generadores o ${}_RP$ y ${}_RQ$ son proyectivos y finitamente generados, etc.). Si a esto agregamos la propiedad Aut-Pic, tendremos que ${}_RP \cong {}_RR \cong {}_RQ$ lo cual es muy útil para el siguiente resultado.

Teorema 4.2.15: Sea R un anillo. Son equivalentes:

(i) R verifica ANT y la propiedad Aut-Pic.

(ii) Si $\delta:\mathrm{End}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{End}({}_RN)$ es un isomorfismo de anillos donde M, N $\in$ R-mód son generadores entonces δ está inducido por un isomorfismo σ-semilineal $\varphi:M \longrightarrow N$.

Demostración: (i⇒ii) Considérese R, M, N, δ como se pide. Por el Teorema 4.2.2, tenemos que $P = M \otimes_E \mathrm{Hom}(N,R)$ y $Q = N \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,R)$ forman el contexto de Morita (R,R,P,Q) normalizado por la izquierda y por el Corolario 4.2.10 junto con las hipótesis tenemos que ${}_RP \cong {}_RR \cong {}_RQ$. Tomemos el isomorfismo $\psi:{}_RR \longrightarrow {}_RP$ el cual induce el automorfismo $\sigma:R \longrightarrow R$ el cual, como vimos al principio de esta sección, implica que existe un isomorfismo σ-seminatural $\eta\_:\mathrm{Hom}_R(R,\_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,\_)$. Finalmente, vamos a componer el isomorfismo natural $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,M)$, luego η_M y luego el isomorfismo $\nu:\mathrm{Hom}_R(R,M) \longrightarrow N$ del Teorema 4.2.6. Así, tenemos un isomorfismo σ-semilineal por la izquierda

$$\varphi:M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,M) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P,M) \longrightarrow N$$

el cual, como se puede comprobar sin dificultad, verifica que para toda $x \in \mathrm{End}(_RM)$, $\delta(x) = \varphi^{-1}x\varphi$. (Nótese que cualquier R-isomorfismo entre $_RR$ y $_RP$ nos permite construir un isomorfismo semilineal que induzca el isomorfismo de anillos, δ).

(ii⇒i) Primero vamos a demostrar la siguiente

<u>Afirmación</u>: Si $_RM$ y $_RN$ son generadores con elemento unimodular y $\delta:\mathrm{End}(_RM) \longrightarrow \mathrm{End}(_RN)$ está inducido por un isomorfismo τ-semilineal φ entonces, si $e \in \mathrm{End}(_RM)$ y $f \in \mathrm{End}(_RN)$ son idempotentes tales que $_RMe \cong {_RR}$ y $_RNf \cong {_RR}$ tenemos que $P = M\delta^{-1}(f) \cong M \otimes_E \mathrm{Hom}_R(N,R)$ es isomorfo, como R-módulo por la izquierda, a R.

<u>Demostración</u>: Considérese la situación descrita. Esto implica que si $y \in \mathrm{End}(_RN)$ entonces $\delta^{-1}(y)\cdot\varphi = \varphi\cdot y$. En particular, $\delta^{-1}(f)\cdot\varphi = \varphi\cdot f$ y por lo tanto, la restricción $\varphi':P \longrightarrow Nf$ es un isomorfismo σ-semilineal. Finalmente, nótese que $\sigma^{-1}:R \longrightarrow R$ es un isomorfismo σ^{-1}-semilineal así que $\psi = \varphi\cdot\sigma^{-1}$ es un R-isomorfismo $_RP \cong {_RR}$. Esto prueba la afirmación.

Ahora, primero probaremos que R verifica ANT. Sea entonces (R,R,P,Q) un contexto de Morita normalizado por la izquierda. Haciendo $M = P \oplus R$ y $N = Q \oplus R$ como en el recíproco del Teorema 4.2.2, tenemos que M y N tienen anillos de endomorfismos isomorfos; aún más, conocemos el isomorfismo (Teorema 4.2.2), sea δ, que verifica, con la notación de la afirmación anterior, $M\delta^{-1}(f) \cong P$. Por lo tanto $_RP \cong {_RR}$ es progenerador.

Ahora vamos a probar que R tiene la propiedad Aut-Pic. Sea $_RK$ un progenerador tal que $\mathrm{End}(_RK) \approx R$. Sea N cualquier generador con elemento unimodular y $M = N \oplus K$. Entonces $\mathrm{Hom}_R(K,M)$ es, a su vez, un generador con elemento unimodular y si hacemos $\delta = \mathrm{Hom}_R(K,\_):\mathrm{End}(_RM) \longrightarrow \mathrm{End}(_R\mathrm{Hom}_R(K,M))$ tenemos que δ es un isomorfismo de anillos. Si $f \in \mathrm{End}(_R\mathrm{Hom}_R(K,M))$ tenemos que $\delta^{-1}(f) = \mathrm{Hom}_R(K,\_)^{-1}(f)$, que es justo la proyección $M \longrightarrow K$ seguida de la inclusión. Por la afirmación anterior, ${}_RK = M\delta^{-1}(f)$ deberá ser isomorfo a ${}_RR$ (linealmente) y por lo tanto R verifica Aut-Pic. Esto termina la demostración.

4.3. El problema de la unicidad para módulos localmente libres

Los módulos localmente libres son en cierto sentido, parecidos a los módulos libres. Sin embargo, y a pesar de tener un teorema de caracterización que se expresa en términos de elementos idempotentes, estos objetos tampoco verifican en general, la propiedad "endomorfismos finitos invariantes", que en [13] se demuestra para módulos libres. Por lo pronto, vamos a mostrar una forma de construcción de ejemplos que, además, nos permite observar ciertos módulos localmente libres particularmente interesantes por la expresión que tienen en términos de matrices y el análisis sobre los morfismos inducidos por funtores lo haremos en la siguiente sección, donde abordaremos el problema con objetos localmente libres y proyectivos.

Observación 4.3.1: Construcción de anillos con uno, R y S y módulos localmente libres ${}_RM$ y ${}_SN$ infinitamente generados tales que $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$ y sin embargo, R y S no son anillos Morita equivalentes.

Efectivamente, sea R un anillo de división, $R_i \cong R$ y $M = \oplus_{i \in I} R_i$ un espacio vectorial con dimensión $|I| = \alpha > \aleph_0$. Sea $E = \mathrm{End}({}_RM)$ y $e_i \in E$ la proyección canónica de M sobre R_i. Tomemos entonces $\Delta =$ $= \{ A \subseteq I \mid |A| = \aleph_0 \}$ y para cada $A \in \Delta$, definimos $e_A \in E$ como la proyección canónica de M sobre el sumando $\oplus_{i \in A} R_i$.

Ahora, por [88] tenemos que, para cada elemento idempotente $e \in E$ tal que el rango(Im e) $= \aleph_0$, EeE consiste en todos los endomorfismos α

de M, tales que rango(Im α) $\leq \aleph_0$. En particular, si A, A' $\in \Delta$ entonces $Ee_A E \cong Ee_{A'}E$. Aún más, como $\oplus_{j \in A} R_j \cong \oplus_{j \in A'} R_j$ tenemos que $Ee_A \cong Ee_{A'}$ para cualesquiera A, A' $\in \Delta$.

Fijemos ahora $u = e_{A'}$ para algún A' $\in \Delta$ y consideremos a la familia $\{e_A\}_{A \in \Delta}$ en el anillo EuE. En vista de que $Ee_A \cong Ee_{A'}$, tenemos que la familia $\{e_A\}_{A \in \Delta}$ verifica la condición (b1) del Lema 3.3.3. Vamos a ver la otra condición: sea $x \in$ EuE, entonces rango(Im x) $\leq \aleph_0$ y en consecuencia existe A' $\in \Delta$ tal que Im x $\subseteq \oplus_{j \in A'} R_j$ y así, $xe_{A'} = x$; por lo tanto, si $x_1,\dots,x_n \in$ EuE, tendremos que rango($\sum_{i=1}^{n}$Im x_i) $\leq \aleph_0$ y entonces existe, como antes, A' $\in \Delta$ tal que $x_i = x_i e_{A'}$ para $i = 1,\dots,n$. Tomando F = { A' } tenemos que $\{e_A\}_{A \in \Delta}$ verifica la condición (b2) del Lema 3.3.3. Por lo tanto, EuE posee una familia de unidades locales de matriz cuyo anillo asociado es uEu = S. Por otro lado, EuE es un ideal bilátero e idempotente de E y contiene al zócalo de E, E_0 [88, 23]; como E es E_0-cerrado por el Teorema 3.3.6, podemos inferir que E es también EuE-cerrado y entonces podemos aplicar el Teorema 3.3.6 para obtener que N = uE es un S-módulo por la izquierda localmente libre tal que End($_S$N) $\approx$ E $\approx$ End($_R$M). Además, como MEuE = M entonces $\sum_N$Im α = M, pero si $u\alpha_1,\dots,u\alpha_n$ es un conjunto finito de elementos de N, el cual genera un submódulo K de N entonces $\sum_{i=1}^{n}$Im $\alpha_i \neq$ M, pues M no es numerablemente generado. Como $\sum_K$Im $\alpha \leq \sum_{i=1}^{n}$Im $\alpha_i \neq$ M tenemos que K $\neq$ N y en consecuencia N no puede ser finitamente generado. Para finalizar, sólo nos resta ver que R y S no pueden ser anillos Morita equivalentes. Para ello, obsérvese que Eu es un generador (cuasi-)proyectivo finitamente generado, así que por [23, Theorem 2.4] los anillos EuE y End($_{EuE}$Eu) = uEu = S son Morita equivalentes [27, Corollary 2.9]. Esto significa que S es equivalente al anillo EuE el cual no puede ser equivalente a un anillo de división (pues EuE tiene un ideal propio distinto de cero, E_0 [27, Proposition 3.5] o la Proposición 2.3.4). Por lo tanto, R y S no son anillos Morita equivalentes. Hemos construido entonces el diagrama:

$$\begin{tikzcd}
 & \text{E-mód} \arrow[dd, shift right] \arrow[dr, shift left] & & \\
 & & \text{EuE-mód} \arrow[ul, shift left] \arrow[r, "\simeq"] & \text{uEu-mód} \arrow[ull, "\mathrm{Hom}_{uEu}(uE,_)"'] \\
\text{R-mód} \arrow[uur, "\mathrm{Hom}_R(M,_)"] \arrow[r, "\simeq"] & E_0\text{-mód} \arrow[uu, shift right] & &
\end{tikzcd}$$

y hemos mostrado la construcción anunciada.

Supongamos ahora que R y S son anillos con uno, ${}_RM$ y ${}_SN$ son módulos localmente libres tales que $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$. Usaremos la siguiente notación: $E \approx \mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$ tiene dos ideales $E_0 \approx$ $\approx f\mathrm{End}({}_RM)$ y $E'_0 \approx f\mathrm{End}({}_SN)$ descritos en el Teorema 3.3.6. E_0 y E'_0 tienen familias de unidades locales de matriz $\{e^{\alpha}_{i}\}_{\alpha \in \Lambda}$; $\{u^{\beta}_{j}\}_{\beta \in \Lambda'}$ respectivamente. Elegimos arbitrariamente $e = e^{\alpha}_{i}$ y $u = u^{\beta}_{j}$.

El siguiente lema nos será útil.

Lema 4.3.2: Sean R y S anillos con uno, ${}_RM$ y ${}_SN$ módulos localmente libres tales que $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$. Con la notación descrita anteriormente tenemos las siguientes propiedades:

(i) E_0 y E'_0 son E-módulos por la izquierda planos y fieles a los dos lados.

(ii) $T = E_0 \cdot E'_0 = E'_0 \cdot E_0 = E_0 \cap E'_0 = E_0 \otimes_E E'_0 = E'_0 \otimes_E E_0$ también es plano por la izquierda y fiel a los dos lados.

(iii) T es s-unitario por la derecha.

Demostración: Como fue establecido en la Observación 3.3.7, E_0 y E'_0 son anillos s-unitarios por la derecha. Por [83, Proposition XI.3.13] E/E_0 y E/E'_0 son E-módulos por la izquierda planos [6, Exercise 19.11 y Lemma 19.18]. Por otro lado, $(E_0)_E$ y $(E'_0)_E$ son fieles, por el Teorema 3.3.6 (2)(i). Supongamos ahora que $x \in E$,

$x \neq 0$. Sea $m \in M$ tal que $m \neq 0$ y $m \in \operatorname{Im} x$. Como M es localmente libre, entonces posee una descomposición $M = F \oplus M'$, con $m \in F$, y F libre y finitamente generado. Sea $e \in E$ la proyección canónica de M sobre F; entonces $me = m$ así que $xe \neq 0$ y $e \in E_0$. Esto nos muestra que ${}_E E_0$ también es fiel.

(ii) Es inmediato por (i).

(iii) Sea $x \in T$. Entonces $x \in E_0$ y en consecuencia existe e_α ($\alpha \in \Lambda$) con $x = xe_\alpha$. De modo similar, $x \in E'_0$ y existe u_β ($\beta \in \Lambda'$) con $x = xu_\beta$; entonces $x = xe_\alpha u_\beta \in xT$ y T es s-unitario por la derecha. Esto concluye la demostración.

En vista de la Observación anterior, si ${}_R M$ y ${}_S N$ son módulos localmente libres con anillos de endomorfismos isomorfos entonces R y S no necesariamente tienen que ser Morita equivalentes. Sin embargo, en el siguiente teorema mostramos que el contexto de Morita, que sabemos que existe en general para generadores, tiene en el caso de los módulos localmente libres características muy particulares que hacen a R y S anillos fuertemente relacionados. Recordemos la definición en [69] (página 37) de contexto no degenerado: (R,S,P,Q) es un contexto no degenerado si los cuatro módulos ${}_R P$, P_S, ${}_S Q$, Q_R son fieles y las cuatro parejas determinadas por el contexto son también fieles (esto último significa, por ejemplo, que $\langle x,Q \rangle = 0$ implica $x = 0$ para todo $x \in P$). Entonces tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.3: Sean R y S anillos con uno, ${}_R M$ y ${}_S N$ módulos localmente libres y supongamos que $\operatorname{End}({}_R M) \approx \operatorname{End}({}_S N)$. Entonces existe un contexto de Morita (R,S,M',N') tal que:

(i) ${}_R M'$ es sumando directo de ${}_R M$ y ${}_S N'$ es sumando directo de ${}_S N$.

(ii) El contexto (R,S,M',N') es normalizado por la izquierda.

(iii) El contexto es también no degenerado con ideales traza s-unitarios por la derecha y en consecuencia planos.

(iv) Si ${}_R\mathcal{U}$ y ${}_S\mathcal{U}$ son las categorías cociente asociadas al contexto (R,S,M',N') e ${}_RI$, ${}_SJ$ son los ideales traza entonces ${}_R\mathcal{U}$ es equivalente a I-mód y ${}_S\mathcal{U}$ a J-mód y como ${}_R\mathcal{U}$ y ${}_S\mathcal{U}$ son equivalentes bajo $F = \mathrm{Hom}_R(M',\_)$ y $G = \mathrm{Hom}_S(N',\_)$ entonces $J\cdot\mathrm{Hom}_R(M',\_)$ e $I\cdot\mathrm{Hom}_S(N',\_)$ son equivalencias inversas entre I-mód y J-mód. Además, como ocurre para generadores, ${}_RM \in {}_R\mathcal{U}$, ${}_SN \in {}_S\mathcal{U}$, $F(M) \cong N$ y $G(N) \cong M$ e inducen el isomorfismo.

Demostración: Tomemos la notación del Lema 4.3.2; entonces $e = e_I^\alpha$, $u = u_J^\beta$ y permítasenos identificar $R = eEe$, $S = uEu$, $M = eE$ y $N = uE$. Entonces $M \otimes_E \mathrm{Hom}_S(N,S) = eEu$, $N \otimes_E \mathrm{Hom}_R(M,R) = uEe$. Es claro que $M' = eEu$ y $N' = uEe$ son sumandos directos de M y N respectivamente. Obsérvese que, en este caso, los ideales traza del contexto (eEe,uEu,eEu,uEe) pueden obtenerse directamente de la multiplicación $\langle\_,\_\rangle: eEu \otimes_E uEe \longrightarrow eEe$ definida como $\langle exu,uye\rangle =$ $= exuye$ con $x,y \in E$ y $[uxe,eyu] = uxeyu$ con $x,y \in E$. También obsérvese que los ideales traza son $I = eEuEe$ y $J = uEeEu$. Esto, en particular, demuestra (i) y (ii).

Para (iii) vamos a probar primero que $I = eEuEe$ y $J = uEeEu$ son fieles por ambos lados. Sea $x \in eEe$ y supongamos que $x\cdot I = 0$. Entonces $0 = xeEuEe = xeEuEe\cdot E = xe(EuEeE) = xeT$. Por el Lema 4.3.2, T es fiel por ambos lados y en consecuencia $xe = 0$. Como $x \in eEe$ entonces $x =$ $= xe = 0$. Para el lado derecho y para ambos lados de J se siguen argumentos enteramente análogos.

Notemos ahora que, como ${}_RM'$ genera a ${}_RI$, N'_S a J_S, ${}_SN'$ a ${}_SJ$ y N'_R a I_R entonces M' y N' son, a su vez, fieles por los dos lados. Supongamos ahora que $m \in M'$ con $\langle m,N'\rangle = 0$; entonces $m = exu$ para algún $x \in E$ y con $N'= uEe$ tenemos entonces que $exuEe = 0$. Esto implica que $0 = (exuEe)E = exu(EeE)$ y por el Lema 4.3.2 $exu = 0$. Los otros tres casos se resuelven de modo análogo.

Finalmente, para ver que I es s-unitario por la derecha, consideremos a $T = E_0\cdot E'_0 = EeEuE$ (Lema 4.3.2). Entonces, como $I =$ $= eEuEe$ y $eE = eEeE$ tenemos que $I = eEuEe = (eEeE)(uEe) = eEeEuEe =$ $= e(EeEuE)e = eTe$. Ahora, si $x \in I$ entonces $x \in T$ y por el Lema 4.3.2

(iii) sabemos que T es s-unitario por la derecha y que esto implica que $x = xt$ para alguna $t \in T$. Como también $x = xe$ entonces $x = xe = (xt)e = x(te) = xe(te) = x(ete) \in xI$. Por lo tanto I es s-unitario por la derecha. Un argumento completamente análogo nos muestra también que J es s-unitario por la derecha. Esto prueba (iii).

(iv) Esta afirmación final se desprende del Teorema 4.2.6. Obsérvese que la demostración de la Proposición 4.3.6 comienza estableciendo en general, que todo sumando directo de un módulo localmente libre es traza accesible y además, el argumento para establecer dicho resultado no depende de las hipótesis de la proposición mencionada. Así, en este caso tenemos una equivalencia de subcategorías del tipo mencionado en la página 38 [69, Theorem 7] de este trabajo, y podemos aplicar todo lo visto en el Capítulo 2.

Corolario 4.3.4: Sea ${}_RM$ un módulo localmente libre y $E = \mathrm{End}({}_RM)$. Entonces:

(i) Si $C = \{ 1-a \mid a \in E_0\}$ entonces el anillo de fracciones por la derecha $E[C^{-1}]$ existe y $E[C^{-1}] \approx E/E_0$.

(ii) Las siguientes topologías lineales por la derecha sobre E son equivalentes:

(a) La topología finita en $E = \mathrm{End}({}_RM)$.

(b) La topología de Gabriel por la derecha perfecta

$$\mathcal{F} = \{ I \leq E_E \mid I \cap C \neq \emptyset \}$$

(c) La topología Γ del Teorema 3.5.1 con $E_0 = T$.

Demostración: (i) Se sigue de [83, Exercise XI.6.18] junto con el hecho de que E_0 es s-unitario por la derecha, como se vio en la Observación 3.3.7.

(ii) Primero vamos a mostrar la equivalencia entre (a) y (c); es decir que la topología finita y Γ son iguales. Sea U_m, $m \in M$ un elemento del filtro que forma la sub-base de vecindades del cero para la topología finita. Entonces U_m es un ideal por la derecha tal que $mU_m = 0$. Como $m \in M$ entonces, en términos del Teorema 3.3.6 ($1 \Rightarrow 2$)

existe $\delta \in \Delta$ y u_δ tal que $m = mu_\delta$ y por lo tanto $r_E(u_\delta) \subseteq U_m$. Recíprocamente, sea $x_1,\dots,x_n \in E_0$, y consideremos a $r_E(x_1,\dots,x_n)$. Como $x_1,\dots,x_n \in E_0$ entonces $\sum_i \mathrm{Im}\ x_i$ es un submódulo de M finitamente generado, y como M es localmente libre entonces existe un sumando directo libre K de M tal que $\sum_i \mathrm{Im}\ x_i \subseteq K$. Sea $\{ k_1,\dots,k_n\}$ una base para K. Es claro entonces que $\bigcap_i U_{k_i} \subseteq r_E(x_1,\dots,x_n)$. Esto prueba la equivalencia entre (a) y (b).

Finalmente, si $x_1,\dots,x_n \in E_0$ y $U = r_E(x_1,\dots,x_n)$ es una vecindad del cero en la topología Γ, existe $a \in E_0$ tal que $x_i = x_i a$ porque E_0 es s-unitario por la derecha. Entonces $1-a \in U$ y $(1-a)E \subseteq U$ con $(1-a)E \in \mathcal{F}$. Recíprocamente, si $I \in \mathcal{F}$ y $1-a \in I$, para alguna $a \in E_0$, entonces $r_E(a) = (1-a)r_E(a) \subseteq I$. Esto prueba la equivalencia entre (b) y (c).

Corolario 4.3.5: Sean R y S anillos con uno. ${}_RM$ y ${}_SN$ módulos localmente libres tales que $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$. Sean ${}_RI$ y ${}_SJ$ los ideales traza del contexto de Morita (R,S,M',N') del Teorema 4.3.3. Si I está contenido propiamente en R y $C_I = \{ 1-x \mid x \in I \}$ entonces R tiene anillo de fracciones por la derecha $R[C^{-1}] \approx R/I$. La misma propiedad se tiene, naturalmente, con J y S en lugar de I y R.

Demostración: Es [83, Exercise XI.6.18] y Teorema 4.3.3.

En el Teorema 4.3.3 dimos una condición necesaria para que dos módulos ${}_RM$ y ${}_SN$ localmente libres tuviesen anillos de endomorfismos isomorfos. Ahora estableceremos una condición suficiente para que esto ocurra.

Proposición 4.3.6: Sean R y S anillos con uno, ${}_RM$ y ${}_SN$ módulos localmente libres. Entonces $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$ si y sólo si existe un sumando directo M' de M con $T = \mathrm{Tr}_R(M')$ tal que $\mathrm{End}({}_RM') \approx S$, ${}_S\mathrm{Hom}_R(M',M) \cong {}_SN$ y el homomorfismo natural $M \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(T,M)$ es un isomorfismo.

Demostración: Comenzaremos mostrando que cualquier sumando directo M' de un módulo localmente libre ${}_RM$ es traza-accesible. Para esto, sea $m \in M'$. Como M es localmente libre entonces existe un sumando directo libre F de M con $m \in F$. Ahora, llamemos $\eta:M \longrightarrow M'$ y $\rho:M \longrightarrow F$ a las proyecciones canónicas e $\iota:M' \longrightarrow M$ y $\mu:F \longrightarrow M$ las correspondientes inclusiones; de este modo $m = m\iota\rho\mu\eta$. Como F es un módulo libre finitamente generado sabemos que existe un isomorfismo $\tau:F \longrightarrow R^t$ para alguna $t \in \mathbb{N}$ y denotamos con $p_r:R^t \longrightarrow R$ y con $q_r:R \longrightarrow R^t$ las proyecciones e inclusiones canónicas para $1 \leq r \leq t$. Por lo tanto $\tau\cdot\sum_r p_r q_r\cdot\tau^{-1}$ es la identidad en F. Entonces tenemos que $m = m\iota\rho\tau\cdot(\sum_r p_r q_r)\tau^{-1}\mu\eta = \sum_r(m\iota\rho\tau p_r q_r\tau^{-1}\mu\eta) = \sum_r(m\iota\rho\tau p_r)(q_r\tau^{-1}\mu\eta)$. Sea $\alpha_r = \iota\rho\tau p_r:M' \longrightarrow R$ y $\beta_r = q_r\tau^{-1}\mu\eta:R \longrightarrow M'$. Si hacemos $\beta_r(1) = y_r$ entonces, tenemos que para todo $a \in R$, $a\beta_r = ay_r$ y en consecuencia, $m = \sum_r(m\alpha_r)\beta_r = \sum_r m\alpha_r y_r$. Como $m\alpha_r \in T = Tr_R(M')$, vemos que $m \in TM'$ y esto prueba que M' es traza-accesible.

Supongamos ahora que M' es un sumando directo de M tal que verifica las condiciones de la proposición. Consideremos entonces el contexto derivado de M', (R,S,M',N') donde $N' \cong Hom_R(M',R)$. Como $T = Tr_R(M')$ es el ideal traza en R del contexto y $Hom_R(T,M) \cong M$ entonces [69, Proposition 1] ${}_RM'$ pertenece a la subcategoría ${}_R\mathcal{U}$. Asimismo, ${}_SN$ pertenece a ${}_S\mathcal{U}$ porque $N \cong Hom_R(M',M) \in {}_S\mathcal{U}$ [69, Theorem 3] y por lo tanto ${}_RM$ y ${}_SN$ se corresponden en la equivalencia de categorías entre ${}_R\mathcal{U}$ y ${}_S\mathcal{U}$ lo cual implica que sus anillos de endomorfismos, como R-S-módulos, respectivamente, son isomorfos.

El recíproco se desprende del Teorema 4.4.3 puesto que un contexto normalizado siempre es, salvo isomorfismos, un contexto derivado.

Observación 4.3.7: Queremos destacar que la condición $M \cong Hom_R(T,M)$ en la proposición anterior, no es superflua. Por ejemplo, sea K un cuerpo y A cualquier anillo conmutativo con uno; tómese $R = K\times A = (K,A)$. Entonces ${}_RM = R^{(I)}$, con I numerable, es un módulo (localmente) libre y $M' \cong K$ es un sumando directo de M con traza

$T = K \subseteq R$. Si llamamos $S = \mathrm{End}({}_RM') \approx K$ y ${}_SN = \mathrm{Hom}_R(M',M) \cong {}_RK^{(I)}$ entonces ${}_SN$ es un módulo (localmente) libre y las condiciones de la Proposición 4.3.6 -excepto el isomorfismo $M \cong \mathrm{Hom}_R(T,M)$- se verifican. Sin embargo, $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathbb{RFM}(R)$ y $\mathrm{End}({}_SN) \approx \mathbb{RFM}(K)$, los cuales no pueden ser anillos isomorfos.

Clases de anillos que verifican unicidad.

En este caso, la condición "endomorfismos finitos invariantes en módulos localmente libres" ocurre para clases muy extensas de anillos. Vamos a exhibir algunas de éstas. Por la Observación 4.3.1, debemos excluir, en general, a los anillos regulares von Neumann y a los anillos autoinyectivos. Sin embargo, la situación es mejor para otras clases interesantes de anillos tales como los noetherianos o los perfectos. Para mostrar esto, consideremos en la siguiente proposición anillos, R, que verifican la "Propiedad P" la cual es más débil que el "Pic(R) trivial" de [63, p.80].

Proposición 4.3.8: Sea R un anillo con uno, el cual verifica la siguiente propiedad:

(P): Si I es un ideal bilátero de R plano como ideal por la izquierda tal que el morfismo natural $R \longrightarrow \mathrm{End}({}_RI)$ es un isomorfismo, entonces I es un R-módulo por la izquierda finitamente generado y proyectivo.

Supongamos que ${}_RM$ es un módulo localmente libre, $E = \mathrm{End}({}_RM)$ y $E_0 = f\mathrm{End}({}_RM)$. Entonces E_0 es un ideal de E minimal respecto de las siguientes condiciones:

(i) E_0 es idempotente y E es E_0-cerrado.

(ii) E_0 es un E-módulo por la izquierda plano.

Demostración: Sean, pues, R, ${}_RM$, E y E_0 los objetos de las hipótesis de la proposición. Como se vio en el Teorema de la caracterización para módulos localmente libres, existe un elemento idempotente $e \in E_0$ tal que $R \approx eEe$ y R-mód y E_0-mód son categorías equivalentes, vía el funtor $\mathrm{Hom}_E(Ee,\_):E_0\text{-mód} \longrightarrow R\text{-mód}$. Ahora, sea $T \subseteq E_0$ un ideal idempotente de E que verifica que E es T-cerrado y $_ET$ es plano. En vista de esto último, Te también es plano como E_0-módulo por la izquierda y en consecuencia, por la equivalencia entre categorías que mencionamos antes, $\mathrm{Hom}_E(Ee,Te) \cong eTe$ es un ideal plano por la izquierda en $R \approx eEe$. Por otro lado, tenemos los isomorfismos $\mathrm{End}(_ETe) \cong \mathrm{Hom}_E(Te,Ee) \cong \mathrm{End}(_EEe) \cong R$, de un modo natural ya que Ee es un objeto T-cerrado. Así, eTe es un ideal por la izquierda de E, plano; y aplicando la Propiedad $\underline{P}$, podemos concluir que es finitamente generado y proyectivo en E_0-mód. Nuevamente por la equivalencia entre R-mód y E_0-mód en la cual eTe corresponde con Te, podemos concluir que Te es finitamente generado y proyectivo en E_0-mód.

Como Ee genera a Te, las propiedades que se vieron para Te implican que Te es isomorfo a un sumando directo de $(Ee)^n$ y por lo tanto Te es T-cerrado. Pero Ee es justo la T-clausura de Te y en consecuencia deberá ocurrir que Te = Ee. Tenemos entonces que $\mathrm{Tr}_{E_0}(Ee) = E_0 = \mathrm{Tr}_{E_0}(Te) = T$.

Proposición 4.3.9: Sean R y S anillos con uno, de tal manera que ambos verifican la Propiedad $\underline{P}$ y supongamos que existen módulos localmente libres $_RM$ y $_SN$ tales que $\mathrm{End}(_RM) \approx \mathrm{End}(_SN)$. Entonces R y S son anillos Morita equivalentes de manera que la equivalencia $F:R\text{-mód} \longrightarrow S\text{-mód}$ verifica $F(M) \cong N$ e induce el isomorfismo de anillos.

Demostración: Usaremos la notación del Lema 4.3.2 y del Teorema 4.3.3 con $T = E_0 \cdot E'_0$. Por el Lema 4.3.2, T es s-unitario por la derecha y en consecuencia idempotente. Como T_E es fiel, entonces E es T-libre de torsión. Además, $\mathrm{Hom}_E(T,E) \cong \mathrm{Hom}_E(E_0 \otimes_E E'_0,E) \cong \mathrm{Hom}_E(E'_0,\mathrm{Hom}_E(E_0,E)) \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_E(E'_0,E) \cong E$, porque E es E_0 y E'_0-cerrado. Por lo tanto E es T-cerrado. Como $_ET$ es también plano, podemos deducir, a partir de la

Proposición 4.3.8 que $T = E_0$ y $T = E'_0$. Con la notación del Teorema 4.3.3, tenemos la igualdad $E_0u = E'_0u$ y en consecuencia E_0u es un generador en E_0-mód y por lo tanto ${}_RM' = {}_ReE_0u$ también es un generador en R-mód. Con un razonamiento análogo podemos inferir que ${}_SN' = {}_SuE'_0e$ también es un generador en S-mód y en consecuencia el contexto de Morita (R,S,M',N') nos da una equivalencia entre R-mód y S-mód en la cual ${}_RM$ corresponde con ${}_SN$. El resto se tiene por el Teorema 4.3.3.

Corolario 4.3.10: Sean R y S anillos con uno tales que pertenecen a alguna de las siguientes clases: noetherianos, perfectos o de Kasch, todos por la izquierda. Si ${}_RM$ y ${}_SN$ son módulos localmente libres tales que $\mathrm{End}({}_RM) \approx \mathrm{End}({}_SN)$ entonces existe una equivalencia de Morita **F** entre R-mód y S-mód tal que $\mathbf{F}(M) \cong N$ y **F** induce el isomorfismo de anillos.

Demostración: Se sigue del hecho de que estas tres clases de anillos verifican la Propiedad P̲. Para anillos noetherianos se sigue de inmediato de [83, Corollary I.3.6 y I.11.5]; en el caso de los anillos de Kasch, como $\mathrm{End}({}_RI) \approx R$ tenemos que I_R es fiel y por [83, Lemma XI.5.1] tenemos que $I = R$, pues $I \neq 0$. Finalmente, la Propiedad P̲ para anillos perfectos por la izquierda es consecuencia de que todo módulo por la izquierda plano sobre un anillo perfecto por la izquierda es proyectivo y [85, Proposition 5.2].

4.4 El problema de la unicidad para módulos proyectivos con elemento unimodular.

Como en las secciones anteriores, nuestra primera pregunta en ésta es si la clase $\mathfrak{M}$ de los módulos proyectivos con elemento unimodular tiene "endomorfismos finitos invariantes". La respuesta, tal como se ha comentado con anterioridad será negativa. En consecuencia, nos preguntamos si los módulos localmente libres y proyectivos (que no están contemplados en la construcción del parágrafo anterior) verificarán la propiedad, pero tampoco es así. Vamos entonces primero a mostrar una forma de construcción de ejemplos para módulos proyectivos con elemento unimodular y después haremos otra para localmente libres y proyectivos (que, en particular, también son proyectivos con elemento unimodular). La razón de dar las construcciones es que creemos que la primera construcción, para la clase más amplia, tiene interés por sí misma, aunque no sea aplicable directamente al segundo caso.

Observación 4.4.1: Una forma de construcción de ejemplos de anillos R y S y módulos proyectivos infinitamente generados con elemento unimodular $P \in R$-mód y $Q \in S$-mód tales que tengan anillos de endomorfismos isomorfos y sin embargo, las categorías R-mód y S-mód no sean equivalentes.

Efectivamente, sea R un anillo tal que existan dos R-módulos por la izquierda proyectivos no finitamente generados P' y Q' que verifiquen $\mathrm{Hom}_R(P',Q')^{\bullet} = 0$ (esto es posible en anillos bastante generales, por ejemplo, anillos con zócalo proyectivo con al menos dos sumandos) y sea $P = P'\oplus Q'\oplus R$. Es claro que P es un R-módulo por la izquierda proyectivo con elemento unimodular. Sean $L = P'\oplus R$, $S = \mathrm{End}({}_RL)$ (obsérvese que también P' y Q' pueden ser elegidos de manera que R y S no sean Morita equivalentes) y sea $Q = \mathrm{Hom}_R(L,P) = \cong S\oplus \mathrm{Hom}_R(L,Q)$.

Afirmamos que $\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ es un S-módulo no finitamente generado y proyectivo en S-mód. Para ello, notemos primero que $L \otimes_S \mathrm{Hom}_R(L,Q') \cong \cong Q'$ y en consecuencia, si existiese una sucesión exacta de la forma $S^n \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(L,Q') \longrightarrow 0$ entonces se tendría una sucesión exacta $L^n \longrightarrow Q' \longrightarrow 0$ (escindida). Como $\mathrm{Hom}_R(L,Q') \cong \mathrm{Hom}_R(P'\oplus R,Q') \cong \cong \mathrm{Hom}_R(R,Q')$ entonces la existencia de $L^n \longrightarrow Q' \longrightarrow 0$ que se mencionó antes, implica que existe la sucesión $R^n \longrightarrow Q' \longrightarrow 0$

exacta, lo cual es imposible porque se eligió a Q' infinitamente generado. Por lo tanto, $\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ no puede ser finitamente generado. Ahora vamos a probar que $\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ es proyectivo. Para ello, por la equivalencia entre R-mód y $f\mathrm{End}({}_RL)$-mód, basta ver que $\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ es un objeto de $f\mathrm{End}({}_RL)$-mód. Sea $f:L \longrightarrow Q'$ un R-homomorfismo. Si $0 \longrightarrow R \underset{\eta_1}{\overset{\iota_1}{\rightleftarrows}} L \underset{\iota_2}{\overset{\eta_2}{\rightleftarrows}} P' \longrightarrow 0$ es la descomposición para L en sus sumandos directos R y P', tenemos que $f = \eta_1\iota_1 f + \eta_2\iota_2 f$, pero $\eta_2\iota_2 f = 0$ porque hemos asumido que $\mathrm{Hom}_R(P',Q') = 0$, entonces $f = \eta_1\iota_1 f \in f\mathrm{End}({}_RL)\cdot\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ y como $\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ es $f\mathrm{End}({}_RL)$-cerrado, tenemos que $\mathrm{Hom}_R(L,Q') \in f\mathrm{End}({}_RL)$-mód y es proyectivo. Esto, junto con [31, Proposition 16.2] implica que $\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ es un S-módulo por la izquierda proyectivo y no finitamente generado. Por lo tanto $Q =$ $= S\oplus\mathrm{Hom}_R(L,Q')$ es un S-módulo por la izquierda proyectivo con elemento unimodular y no finitamente generado. Finalmente, obsérvese que

$$\mathrm{End}({}_SQ) = \mathrm{Hom}_S(Q,Q) = \mathrm{Hom}_S(\mathrm{Hom}_R(L,P),\mathrm{Hom}_R(L,P)) \cong$$

$$\cong \mathrm{Hom}_R(L \otimes_S \mathrm{Hom}_R(L,P),P) \cong \mathrm{Hom}_R(P,P) = \mathrm{End}({}_RP),$$

como queríamos mostrar.

Nos preguntamos ahora si la unión de las propiedades de ser localmente libre y ser proyectivo, junto con la restricción a objetos numerablemente generados podrá implicar la de "endomorfismos finitos invariantes". Un objeto localmente libre, proyectivo y numerablemente generado [13, 30, 55] está muy cerca de ser libre. Sin embargo, en este caso tampoco se verifica la equivalencia de categorías, como veremos en el siguiente ejemplo; pero antes, los siguientes lemas nos serán útiles:

Lema 4.4.2: Sea K un anillo de división, V un K-espacio vectorial de dimensión $\aleph_n$ con $n \in \mathbb{N}-\{0\}$, $A = \mathrm{End}({}_KV)$, $M = A^{(N)}$ con N un conjunto infinito numerable y $B = \mathrm{End}({}_AM)$. Entonces, A y B no pueden ser anillos Morita equivalentes.

Demostración: Si A y B fuesen anillos Morita equivalentes entonces entre otras consecuencias sus retículos de ideales biláteros deberían ser isomorfos. Vamos a ver que esto no es posible.

Como $A = \mathrm{End}(_K V)$ entonces, por [88], el retículo de ideales de A es $\{ 0, A_0, \ldots, A_n, A \}$ donde $A_j = \{ \alpha \in A \mid \mathrm{rango}(\alpha) < \aleph_j \}$. Es claro que $0 \subset A_0 \subset \ldots \subset A_n \subset A$ y que todas las inclusiones son propias. Aún más, afirmamos que A_i, A_j con $i \neq j$ no pueden ser anillos Morita equivalentes. Esto es inmediato por un argumento de los retículos de ideales biláteros (Proposición 2.3.4) y por el hecho de que están linealmente ordenados. Así, hay n+2 ideales para A.

Supongamos ahora que A y B son anillos Morita equivalentes. Entonces existe un progenerador $P \in A$-mód tal que $\mathrm{End}(_A P) \approx B$ y para cada $i = 0, \ldots, n$, P es A_i-cerrado porque A lo es (esto se puede deducir de la Observación 4.3.1). Esto implica que existen los isomorfismos $\mathrm{End}(_A A_i P) \approx \mathrm{End}(_{A_i} A_i P) \approx \mathrm{End}(_A P) \approx B$. Entonces estamos en una situación tal que se verifican todas las hipótesis de [26, Proposition 2.5] y sabemos que el ideal por la izquierda, sea B_i, de los endomorfismos $\alpha : A_i P \longrightarrow A_i P$ tales que se factorizan a través de $A^{(k)}$, con $k \in \mathbb{N}$, es bilátero e idempotente, que B es B_i-cerrado y que A_i-mód y B_i-mód son categorías equivalentes. En consecuencia $B_i \neq B_j$ si y sólo si $i \neq j$. Hasta ahora, hemos contado entonces n+2 ideales para B. Finalmente, como $\mathrm{End}(_A M) \approx B$ tenemos un ideal, $f\mathrm{End}(_A M) = T$. Afirmamos que T no ha sido contado.

Como M no es finitamente generado ni cero entonces $T \neq B$ y T no es cero, y como A-mód y T-mód son, por el Teorema 3.2.1, categorías equivalentes entonces $T \neq B_j$ para $j = 0, \ldots, n$. Así, hemos contado n+3 ideales para B. Por lo tanto, teniendo A exactamente n+2 ideales y habiendo contado n+3 ideales para B, es claro que los retículos de ideales de A y B no pueden ser isomorfos, lo cual contradice el que pudiesen ser equivalentes.

Lema 4.4.3: Sea R un anillo tal que no tiene elementos idempotentes centrales no triviales; X un conjunto infinito, y $L = R^{(X)}$. Entonces, $E = \mathrm{End}({}_RL)$ no tiene elementos idempotentes centrales no triviales.

Demostración: Para cada $i \in X$ sea e_i la proyección canónica de L sobre su i-ésima componente, seguida de la inclusión a L. Sea, como siempre, $E_0 = f\mathrm{End}({}_RL) = \sum_i Ee_i = \oplus_i Ee_i$, y sea $f \in E$ cualquier idempotente central no cero. Si $e_if = 0$ para todo $i \in X$ entonces, $E_0f = 0$ y, como E es E_0-cerrado, $f = 0$. Así que existe $i \in X$ tal que $e_if \neq 0$. Nótese que e_if es un idempotente central en e_iEe_i. Pero como $e_iEe_i \approx R$, deberá ocurrir que $e_if = e_i$ (el 1 de e_iEe_i). Esto implica que $E_0 = Ee_iE \subseteq EfE = Ef = fE$, lo cual implica de inmediato que para todo $j \in X$, $e_jf = e_j$ y en consecuencia $e_j(1-f) = 0$ para todo $j \in X$. Por lo tanto $E_0(1-f) = 0$ y así $1-f = 0$. En consecuencia $f = 1$.

Ejemplo 4.4.4: Existen anillos con uno R y S tales que no son Morita equivalentes y módulos $P \in R$-mód y $Q \in S$-mód, proyectivos, localmente libres y numerablemente generados tales que sus anillos de endomorfismos son isomorfos.

Efectivamente, sea K un anillo de división, V, W K-espacios vectoriales por la izquierda con dimensiones $\aleph_0$ y $\aleph_1$ respectivamente, $A = \mathrm{End}({}_KV)$, $B = \mathrm{End}({}_KW)$, $T = \mathrm{End}({}_AA^{(N)})$, $U = \mathrm{End}({}_BB^{(N)})$, con N un conjunto numerable, $R = (T,B)$ y $S = (A,U)$.

Afirmamos que R y S no son anillos Morita equivalentes. Supongamos que sí. Entonces, por [13] tenemos que $\mathrm{End}({}_RR^{(N)}) \approx$ $\approx \mathrm{End}({}_SS^{(N)})$. Nótese que:

$$\mathrm{End}({}_RR^{(N)}) = (\mathrm{End}({}_TT^{(N)}),\mathrm{End}({}_BB^{(N)})) = (\mathrm{End}({}_TT^{(N)}),U) \text{ y}$$

$$\mathrm{End}({}_SS^{(N)}) = (\mathrm{End}({}_AA^{(N)}),\mathrm{End}({}_UU^{(N)})) = (T,\mathrm{End}({}_UU^{(N)}))$$

y que por el Lema 4.4.3 (1,0) y (0,1) son los únicos idempotentes centrales no triviales en $\mathrm{End}({}_RR^{(N)})$ y $\mathrm{End}({}_SS^{(N)})$. Esto obliga a que existan parejas de anillos isomorfos, $\mathrm{End}({}_TT^{(N)})$ y T, y U y $\mathrm{End}({}_UU^{(N)})$

o éstas otras, U y T, y $\mathrm{End}({}_T T^{(N)})$ y $\mathrm{End}({}_U U^{(N)})$. Pero, como A y B no pueden ser anillos Morita equivalentes entonces U y T no pueden ser anillos isomorfos y como A y T no pueden ser anillos Morita equivalentes entonces T y $\mathrm{End}({}_T T^{(N)})$ no pueden ser anillos isomorfos.

Así, no se pueden dar las parejas de anillos isomorfos, lo cual contradice que $\mathrm{End}({}_R R^{(N)})$ y $\mathrm{End}({}_S S^{(N)})$ sean anillos isomorfos. En consecuencia [13] R y S no pueden ser anillos Morita equivalentes.

Ahora sean $P = (T,B^{(N)})$ y $Q = (A^{(N)},U)$. Afirmamos que P y Q son módulos proyectivos, localmente libres y numerablemente generados. El hecho de que sean proyectivos y numerablemente generados se verifica de manera inmediata. Para ver que, por ejemplo, P es localmente libre, consideremos un elemento, $x \in P$. Entonces tenemos que $x(1,0) \in T$ y $x(0,1) \in B^{(N)}$; así, $x(0,1)$ pertenece a un sumando directo libre finitamente generado K de $B^{(N)}$. Por [81, p.64] tenemos que ${}_B B \cong {}_B B^2$ y por lo tanto ${}_B B^i \cong {}_B B^j$ para todo $i,j \in \mathbb{N}-\{0\}$. Esto implica que ${}_B K \cong {}_B B$ y en consecuencia (T,K) es isomorfo a (T,B) como (T,B)-módulos. Esto prueba que $(T,B^{(N)})$ es localmente libre y con un argumento análogo se tiene que $(A^{(N)},U)$ también es localmente libre. Finalmente, es obvio que $\mathrm{End}_{(T,B)}((T,B^{(N)})) \approx (T,U) \approx \mathrm{End}_{(A,U)}((A^{(N)},U))$.

Con esto hemos establecido que el resultado de [13] no puede extenderse a clases de módulos con propiedades tan cercanas a la de los libres como es la de los proyectivos, localmente libres y numerablemente generados.

Todavía falta establecer si existen, como en el caso de los generadores, funtores que induzcan isomorfismos entre anillos de endomorfismos de módulos localmente libres y proyectivos y que no sean equivalencias, a pesar de que las categorías sean equivalentes. Vamos a probar, como para generadores, que existen anillos isomorfos y módulos localmente libres y proyectivos con un isomorfismo semilineal pero los funtores obtenidos **F** y **G** no son equivalencias inversas de categorías.

Ejemplo 4.4.5: Existen anillos con uno isomorfos R y S y módulos localmente libres y proyectivos $P \in R$-mód, $Q \in S$-mód tales que son semilinealmente isomorfos, y un isomorfismo $\sigma:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SQ)$ de tal manera que σ no está inducido por ninguna equivalencia de categorías entre R-mód y S-mód.

Efectivamente, considérese de nuevo K un anillo de división y V un K-espacio vectorial de dimensión $\aleph_0$. Sea $A = \mathrm{End}({}_KV)$ y $E = \mathrm{End}({}_AA^{(N)})$ con N un conjunto infinito numerable. Sean $R = (A,E)$, $S = (E,A)$, $P = (A^{(N)},E)$, $Q = (E,A^{(N)})$. Entonces, $\mathrm{End}({}_RP) \approx (E,E) \approx \mathrm{End}({}_SQ)$, $f\mathrm{End}({}_RP) \approx (E\alpha E,E)$ y $f\mathrm{End}({}_SQ) \approx (E,E\alpha E)$ donde $\alpha \in E$ es un idempotente tal que $\alpha E\alpha \approx A$ y $\alpha E \cong A^{(N)}$ (semilinealmente). Hacemos $e = (\alpha,1)$ y $f = (1,\alpha)$ y nuevamente, como $(E,E)e(E,E) \neq (E,E)f(E,E)$ entonces, por lo que se vio en la Observación 4.2.8, **F** y **G** no pueden ser equivalencias inversas y por la misma observación, no hay ninguna otra.

En los siguientes resultados, además de analizar el contexto de Morita que se obtiene a partir de un isomorfismo entre anillos de endomorfismos de módulos proyectivos con elemento unimodular para ver qué relación existe entre los anillos base y poder encontrar algunas consecuencias y condiciones, vamos a cambiar la notación a la siguiente:

Consideremos dos anillos arbitrarios R y S, $P \in R$-mód y $Q \in S$-mód proyectivos con elemento unimodular y supongamos que existe un isomorfismo de anillos $\sigma:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SQ)$. Sea $\pi \in \mathrm{End}({}_RP)$ tal que ${}_RP\cdot\pi \cong {}_RR$, $e = \sigma(\pi)$ y $f \in \mathrm{End}({}_SQ)$ tal que ${}_SQf \cong {}_SS$. Entonces, existe un isomorfismo de anillos $\alpha:R \longrightarrow \pi\mathrm{End}({}_RP)\pi$ y un isomorfismo de grupos abelianos $\varphi:P \longrightarrow \pi\mathrm{End}({}_RP)$ tal que es un isomorfismo α-semilineal; y un isomorfismo $\gamma:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_{\pi\mathrm{End}({}_RP)\pi}\pi\mathrm{End}({}_RP))$ tal que si $x \in \mathrm{End}({}_RP)$ entonces $\gamma(x)$ corresponde justo con la multiplicación por x.

Asimismo, hay isomorfismos semilineales tomando la restricciones adecuadas para σ. Éstas son: $\sigma_1:\pi\mathrm{End}(_RP)\pi \longrightarrow eEe$ y $\sigma_2:\pi\mathrm{End}(_RP) \longrightarrow eE$ que es un isomorfismo σ_1-semilineal tal que $\sigma(x) = \varphi^{-1}x\varphi$ para todo $x \in \mathrm{End}(_RP)$. Vamos a tener entonces un contexto de Morita (eEe,fEf,eEf,fEe), como veremos en el Teorema 4.4.7, con ideales traza eEfEe y fEeEf que veremos que son s-unitarios por la derecha. En esta situación, $\mathrm{Hom}_{eEe}(eEf,\_):eEe\text{-mód} \longrightarrow fEf\text{-mód}$ y $\mathrm{Hom}_{fEf}(fEe,\_):fEf\text{-mód} \longrightarrow eEe\text{-mód}$ son equivalencias inversas entre las categorías eEfEe-mód y fEeEf-mód e inducen la identidad en $\mathrm{End}(_SQ)$ mientras que las equivalencias $\mathrm{Hom}_R(P',\_)$ y $\mathrm{Hom}_S(Q',\_)$, con $P'= P \otimes_E \mathrm{Hom}_S(Q,S) \cong P\cdot\sigma^{-1}(f) \cong eEf$ y $Q'= Q \otimes_E \mathrm{Hom}_R(P,R) \cong Qe \cong fEe$ sumandos directos de P y Q, inducirán σ en el sentido del Teorema 4.2.2. La razón de este cambio en la notación es que a lo largo de nuestra investigación, fue justo esta forma la que nos proveyó de ejemplos y resultados. En particular, el siguiente diagrama de la situación resultó, para nosotros, muy ilustrativo:

$$
\begin{tikzcd}
 & & E\text{-mód} \arrow[dll, shift left, "eE\otimes_E -"] \arrow[dl, shift left] \arrow[dd, shift left] \arrow[dr, shift left] \arrow[drr, shift left, "fE\otimes_E -"] & & \\
eEe\text{-mód} \arrow[urr, shift left, "\mathrm{Hom}_{eEe}(eE,\_)"] \arrow[r, shift left, "\simeq"] \arrow[d, shift left] & EeE\text{-mód} \arrow[ur, shift left] \arrow[l, shift left] \arrow[dr, shift left] & & EfE\text{-mód} \arrow[ul, shift left] \arrow[r, shift left, "\simeq"] \arrow[dl, shift left] & fEf\text{-mód} \arrow[ull, shift left, "\mathrm{Hom}_{fEf}(fE,\_)"'] \arrow[l, shift left] \arrow[d, shift left] \\
eEfEe\text{-mód} \arrow[u, shift left] \arrow[rr, shift left, "\simeq"] & & T\text{-mód} \arrow[uu, shift left] \arrow[ll, shift left] \arrow[ul, shift left] \arrow[ur, shift left] \arrow[rr, shift left, "\simeq"] & & fEeEf\text{-mód} \arrow[u, shift left] \arrow[ll, shift left]
\end{tikzcd}
$$

(T = EeEfE = EfEeE)

Lema 4.4.6: En la situación descrita anteriormente, tenemos las siguientes propiedades:

(i) EeE y EfE son módulos por la izquierda proyectivos, fieles en ambos lados y s-unitarios por la derecha.

(ii) $T = EeE \cdot EfE = EfE \cdot EeE = EeE \cap EfE = EeE \otimes_E EfE = EfE \otimes_E EeE$ también es un E-módulo por la izquierda proyectivo y fiel en ambos lados.

(iii) ${}_E E$ es T-cerrado y en consecuencia T es s-unitario por la derecha.

Demostración: (i) Es parte del Teorema de la caracterización para modulos proyectivos con elemento unimodular.

(ii) Es inmediata.

(iii) Los isomorfismos de grupos $\mathrm{Hom}_E(T,E) \cong \mathrm{Hom}_E(EeE \otimes_E EfE,E) \cong$ $\cong \mathrm{Hom}_E(EfE,\mathrm{Hom}_E(EeE,E)) \cong \mathrm{Hom}_E(EfE,E) \cong E$ implican que E es T-cerrado, y la siguiente afirmación proviene de un argumento análogo al de la Proposición 3.4.2.

Teorema 4.4.7: En la misma situación anterior se tiene un contexto de Morita (eEe,fEf,eEf,fEe) tal que:

(i) eEf es sumando directo de eE, fEe de fE y los morfismos del contexto son la multiplicación.

(ii) El contexto (eEe,fEf,eEf,fEe) es normalizado por la izquierda.

(iii) El contexto es también no degenerado con ideales traza (s-unitarios por la derecha y) proyectivos.

(iv) Si ${}_{eEe}\mathcal{U}$ y ${}_{fEf}\mathcal{U}$ son las categorías cociente asociadas al contexto (eEe,fEf,eEf,fEe) entonces eEfEe-mód es equivalente a ${}_{eEe}\mathcal{U}$ y fEeEf-mód es equivalente a ${}_{fEf}\mathcal{U}$ y como ${}_{eEe}\mathcal{U}$; y ${}_{fEf}\mathcal{U}$ son equivalentes bajo las restricciones de $F = \mathrm{Hom}_{eEe}(Eef,\_)$ y $G = \mathrm{Hom}_{fEf}(fEe,\_)$ entonces $(fEeEf\cdot\_)\circ F$ y $(eEfEe\cdot\_)\circ G$ son equivalencias inversas entre eEfEe-mód y fEeEf-mód. Además, como ocurre para generadores, $eE \in {}_{eEe}\mathcal{U}$ y $fE \in {}_{fEf}\mathcal{U}$, ${}_{fEf}F(eE) \cong {}_{fEf}fE$ y ${}_{eEe}G(fE) \cong {}_{eEe}eE$.

Demostración: (i) Es inmediato y nótese que los ideales traza del contexto son eEfEe y fEeEf.

(ii) Es caso particular de lo visto para generadores.

(iii) Probar que eEfEe y fEeEf son fieles en ambos lados se puede hacer con un argumento igual al empleado para módulos localmente libres en el Teorema 4.3.3 y lo mismo para ver que es no degenerado. Falta probar que los ideales traza son (s-unitarios y) proyectivos. Esto se desprende de [98, Lemma 5.2] pues eEfEe es autogenerador. Obsérvese que $eEf \otimes_{fEf} fEe \cong eEfEe$ (como grupos abelianos) por dicho resultado. Esto, junto con el hecho de que Hom y $\otimes$ forman un par adjunto, prueba (iii).

(iv) Es análogo al Teorema 4.3.3 (iv). Nótese que, como se dijo en la página 153, F y G inducen la identidad. El resto se deduce fácilmente y así terminamos la demostración.

El hecho de que las trazas sean proyectivas es muy importante para determinar condiciones suficientes o equivalentes a que ocurra la equivalencia de categorías, pues, como veremos más adelante, existen en la literatura referencias al respecto.

Vamos a ver algunas propiedades más de estos contextos.

Lema 4.4.8: Sea (R,S,P,Q) un contexto de Morita normalizado por la izquierda, con ideales traza ${}_RI$ y ${}_SJ$. Entonces,

(i) ${}_RP$ es proyectivo si y sólo si ${}_SJ$ es proyectivo.

(ii) ${}_SQ$ es proyectivo si y sólo si ${}_RI$ es proyectivo.

Demostración: Es inmediato a partir de la equivalencia que se obtiene del contexto entre I-mód y J-mód. Obsérvese que, aunque en principio el contexto puede no ser no degenerado, el isomorfismo $\mathrm{Hom}_R(I,R) \cong R$ significa que $I \cdot x = 0$ implica $x = 0$ y por lo tanto $I \in$ I-mód, aunque podría ocurrir que $I \notin$ mód-I. Análogamente, $J \in$ J-mód, y como ${}_RP \in$ I-mód y ${}_SQ \in$ J-mód tenemos el resultado.

Proposición 4.4.9: Si (R,S,P',Q') es un contexto de Morita con ideales traza ${}_RI$ y ${}_SJ$, normalizado por la izquierda, entonces cualquiera de las siguientes condiciones:

(i) ${}_R P'$ y ${}_S Q'$ son proyectivos

(ii) ${}_R P'$ e ${}_R I$ son proyectivos

(iii) ${}_S Q'$ y ${}_S J$ son proyectivos

(iv) ${}_R I$ y ${}_S J$ son proyectivos

implica que existen módulos proyectivos con elemento unimodular $P \in R$-mód y $Q \in S$-mód tales que $\mathrm{End}({}_R P) \approx \mathrm{End}({}_S Q)$.

Demostración: Obsérvese que por el Lema 4.4.8 cualquiera de las condiciones implica que todos los módulos ${}_R P'$, ${}_S Q'$, ${}_R I$ y ${}_S J$ son proyectivos.

Finalmente, hacemos $P = P' \oplus R$ y $Q = Q' \oplus S$ y ya probamos en el recíproco del Teorema 4.2.2 que sus anillos de endomorfismos son isomorfos.

Corolario 4.4.10: Si (R,S,P',Q') es un contexto de Morita normalizado por la izquierda tal que verifica alguna de las condiciones (i), (ii), (iii) o (iv) de la proposición anterior entonces el contexto es no degenerado.

Demostración: Esto se puede probar de forma directa, pero vamos a aprovechar la ocasión para ver algo más.

Sea $P = P' \oplus R$ y $Q = Q' \oplus S$. Recordemos el isomorfismo de anillos que obtenemos $\begin{pmatrix} R & P' \\ Q' & S \end{pmatrix} \xrightarrow{\ \sigma\ } \begin{pmatrix} S & Q' \\ P' & R \end{pmatrix}$ tal que $\begin{pmatrix} r & p \\ q & s \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} s & q \\ p & r \end{pmatrix}$.

Usemos, como en nuestros resultados anteriores, la identificación $\mathrm{End}({}_R P) = \mathrm{End}({}_S Q) = E = \begin{pmatrix} S & Q' \\ P' & R \end{pmatrix}$. Entonces, E posee dos elementos idempotentes, a saber: $e = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $f = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Obsérvese que $eEe = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & R \end{pmatrix} \approx R$, $eE = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P' & R \end{pmatrix} \cong P$, $eEf = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ P' & 0 \end{pmatrix}$ y $fEf = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $fE = \begin{pmatrix} S & Q' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $fEe = \begin{pmatrix} 0 & Q' \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ y los ideales traza son $J = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $I = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}$.

Así, los contextos (R,S,P',Q') y (eEe,fEf,eEf,fEe) se corresponden bajo isomorfismos semilineales (es decir, son isomorfos) y como el último es no degenerado entonces el primero también lo es.

Corolario 4.4.11: Sea R un anillo con uno, ${}_RP$ un módulo proyectivo con elemento unimodular y $E = \mathrm{End}({}_RP)$. Entonces

(i) Si $C = \{ 1-a \mid a \in E_0\}$ entonces el anillo de fracciones por la derecha $E[C^{-1}]$ existe y $E[C^{-1}] \approx E/E_0$.

(ii) Las siguientes topologías lineales por la derecha de E son equivalentes:

(a) La topología finita en $E = \mathrm{End}({}_RP)$.

(b) La topología de Gabriel por la derecha perfecta

$$\mathcal{F} = \{ I \leq {}_EE \mid I \cap C \neq \emptyset \}$$

(c) La topología Γ del Teorema 3.5.1 (con $T = E_0$).

Demostración: (i) Se sigue de [83, Exercise XI.6.18] junto con el hecho de que E_0 es s-unitario por la derecha, como se vio en la Proposición 3.4.2.

(ii) Vamos a ver primero que las topologías de (a) y (c) son equivalentes. Sea U_p, $p \in P$ un elemento del filtro de vecindades del cero para la topología finita. Entonces $p\cdot U_p = 0$. Como $p \in P$ entonces, por la Proposición 3.4.2, y con la notación de dicha proposición, se tiene un subconjunto finito $\{x_{\alpha_i}\}_{i=1}^{n} \subseteq \{x_\alpha\}_{\alpha \in I}$ tal que $x = \sum_\alpha x\cdot x_\alpha = \sum_{i=1}^{n} x\cdot x_{\alpha_i} = x(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i})$ y en consecuencia tenemos que $r_E(\sum_{i=1}^{n} x_{\alpha_i}) \subseteq \mathcal{U}_p$. Recíprocamente, si $a_1,\ldots,a_n \in E_0$ entonces $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, a_i$ es finitamente generado; entonces si $\{f_\alpha, p_\alpha\}$ es una base dual para P, existe $m \in \mathbb{N}-\{0\}$ y $\{f_{\alpha_j}, p_{\alpha_j}\}_{j=1}^{m}$ tal que para todo $x \in \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Im}\, a_i$, $x = \sum_{j=1}^{m} x\cdot f_{\alpha_j}\cdot p_{\alpha_j}$. En consecuencia, $\bigcap_j U_{p_{\alpha_j}} \subseteq r_E(a_1,\ldots,a_n)$.

Finalmente, si $x_1,\ldots,x_n \in E_0$ y $U = r_E(x_1,\ldots,x_n)$ es una vecindad del cero en la topología Γ, existe $a \in E_0$ tal que $x_i = x_i a$ porque E_0 es s-unitario por la derecha. Entonces $1-a \in U$ y $(1-a)E \subseteq U$ con

$(1-a)E \in \mathcal{F}$. Recíprocamente, si $I \in \mathcal{F}$ y $1-a \in I$, para alguna $a \in E_0$ entonces $r_E(a) = (1-a)r_E(a) \subseteq I$. Esto prueba que (b) y (c) son equivalentes.

Corolario 4.4.12: Sean R y S anillos con uno, $P \in R$-mód y $Q \in S$-mód módulos proyectivos con elemento unimodular tales que $\mathrm{End}({}_RP) \approx \mathrm{End}({}_SQ)$. Sean ${}_RI$ y ${}_SJ$ los ideales traza del contexto de Morita (R,S,P',Q') del Teorema 4.4.7. Si I está contenido propiamente en R y $C_I = \{ 1-x \mid x \in I \}$ entonces R tiene anillo de fracciones por la derecha, $R[C_I^{-1}] \approx R/I$. La misma propiedad se verifica con J y S en lugar de I y R.

Demostración: Es [83, Exercise XI.6.18] y el Teorema 4.4.7.

Los dos resultados siguientes nos muestran, primero, una condición necesaria y suficiente para que dados dos anillos R y S con uno, y dados dos módulos proyectivos con elemento unimodular $P \in R$-mód y $Q \in S$-mód los anillos de endomorfismos de P y Q sean isomorfos, y segundo, una condición suficiente para que dado un anillo R y un módulo proyectivo, exista un anillo S, y módulos proyectivos con elemento unimodular en R-mód y S-mód tales que sus anillos de endomorfismos sean isomorfos.

Proposición 4.4.13: Sean R y S anillos con uno y $P \in R$-mód, $Q \in S$-mód módulos proyectivos con elemento unimodular. Entonces $\mathrm{End}({}_RP) \approx \mathrm{End}({}_SQ)$ si y sólo si existe un sumando directo P' de P tal que $\mathrm{End}({}_RP') \approx S$, ${}_S\mathrm{Hom}_R(P',P) \cong {}_SQ$, y además el homomorfismo natural $P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tr}_R(P'),P)$ es isomorfismo.

Demostración: Sea $Q' = \mathrm{Hom}_R(P',R)$. Entonces (R,S,P',Q') es el contexto derivado de P'. Como $\mathrm{Hom}_R(\mathrm{Tr}_R(P'),P) \cong P$ entonces P pertenece a la categoría cociente ${}_R\mathcal{U}$ [69, Proposition 1]. Como $Q \cong \mathrm{Hom}_R(P',P)$ entonces Q pertenece a ${}_S\mathcal{U}$ [69, Theorem 3]. En consecuencia, P y Q se corresponden bajo la equivalencia entre ${}_R\mathcal{U}$ y ${}_S\mathcal{U}$ lo cual implica que ${}_RP$ y ${}_SQ$ tienen anillos de endomorfismos isomorfos.

La otra implicación es el Teorema 4.4.7.

Proposición 4.4.14: Sea R un anillo con uno y $P' \in$ R-mód un módulo proyectivo. Si $Tr_R(P')$ es proyectivo como R-módulo por la izquierda, $Hom_R(Tr_R(P'),P') \cong P'$ y $End({}_RTr_R(P')) \approx R$ entonces existe un anillo $S = End({}_RP')$ y módulos proyectivos con elemento unimodular $P = P' \oplus R$ y $Q = Hom_R(P',R) \oplus S$ tales que tienen anillos de endomorfismos isomorfos.

Demostración: Se desprende de que $(R,S,P',Hom_R(P',R))$ es un contexto normalizado por la izquierda, junto con el recíproco del Teorema 4.4.2.

Observación 4.4.15: La Observación 4.3.7 hecha a la Proposición 4.3.6 tiene su análogo con la Proposición 4.4.13 en vista de que el ejemplo que aparece en la mencionada observación se construye con módulos libres.

<u>Clases de anillos que verifican unicidad</u>.

Este caso (y otros muy cercanos) ha sido frecuentemente considerado en la literatura [2, 3, 11, 12, 16, 63, 64]. Nosotros vamos a abordarlo de manera análoga a como hicimos para el caso de generadores.

Definiciones 4.4.16: Decimos que una pareja de anillos R y S tiene "contextos de Morita normalizados por la izquierda y proyectivos triviales" y abreviamos CNPT(R,S) si para todo contexto de Morita (R,S,P,Q) normalizado por la izquierda con ${}_RP$ y ${}_SQ$ proyectivos, se tiene que ${}_RP$ es progenerador. En particular, decimos que R verifica CNPT(R,R) para autocontextos y que R verifica CNPG(R) cuando, para todo anillo S, y todo contexto de Morita (R,S,P,Q) normalizado por la izquierda con ${}_RP$ y ${}_SQ$ proyectivos se tiene que ${}_RP$ es generador. Nótese que si R y S verifican CNPG(R) y CNPG(S) entonces se tiene CNPT(R,S).

Diremos que R tiene IPFG si para todo ideal proyectivo ${}_RI$ de R tal que el morfismo canónico $R \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(I,R)$ es isomorfismo se tiene que ${}_RI$ es finitamente generado (Cfr. Propiedad P).

Las definiciones de Aut-Pic y Pic(R)-trivial ya se dieron en las páginas 133 y 134 respectivamente. Vamos a ver cómo se relacionan entre sí estas condiciones. Sea R un anillo:

Proposición 4.4.16: R verifica CNPG(R) si y sólo si R tiene "endomorfismos finitos invariantes en proyectivos con unimodular".

Demostración: Supongamos primero que R verifica CNPG(R) y consideremos ${}_RP$ y ${}_SQ$ tales que $\delta:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SQ)$ es un isomorfismo de anillos con ${}_RP$, ${}_SQ$ proyectivos con elemento unimodular. Entonces, con la notación $E = \mathrm{End}({}_SQ)$, $E_0 = \delta(f\mathrm{End}({}_RP))$, $E'_0 = f\mathrm{End}({}_SQ)$, $E_0 = EeE$, $E'_0 = EfE$, $R \approx eEe$, $P \cong eE$, $S \approx fEf$, $Q \cong fE$ tenemos que (eEe, fEf, eEf, fEe) es el contexto de Morita del Teorema 4.4.7 y por hipótesis eEf es generador. Así, $eEfEe = eEe$ y por lo tanto $EeE = EeEfEeE \subset EfE$. Por lo tanto $\delta(f\mathrm{End}({}_RP)) \subset f\mathrm{End}({}_SQ)$.

Recíprocamente, si (R,S,P,Q) es un contexto de Morita normalizado por la izquierda con ${}_RP$ y ${}_SQ$ proyectivos, haciendo $M = P \oplus R$, $N = Q \oplus S$ tenemos entonces que $\delta:\mathrm{End}({}_RM) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SN)$ es un isomorfismo de anillos (véase la demostración del Corolario 4.4.10) tal que si $e:M \longrightarrow R$ y $f:N \longrightarrow S$, se tiene $M\delta^{-1}(f) = P$ y $N\delta(e) = Q$. Por hipótesis, $\delta(f\mathrm{End}({}_RM)) \subseteq f\mathrm{End}({}_SN)$ lo cual implica que $\mathrm{End}({}_SN)f$ genera a $\delta(f\mathrm{End}({}_RM))$ y en consecuencia ${}_RP \cong M\delta^{-1}(f) \cong$ $\cong e\mathrm{End}({}_RM)\delta^{-1}(f) \cong \delta(e)\mathrm{End}({}_SN)f$ es generador de R-mód.

Proposición 4.4.17: Si R verifica IPFG entonces R verifica "endomorfismos finitos invariantes en proyectivos con unimodular".

Demostración: Con argumentos completamente análogos a los de las Proposición 4.3.8 se pude demostrar que si R verifica IPFG entonces, si $P \in$ R-mód es un módulo proyectivo con elemento unimodular, $E = End({}_RP)$ y $E_0 = fEnd({}_RP)$ entonces E_0 es un ideal minimal respecto de las propiedades: (i) E_0 es un E-módulo por la izquierda proyectivo; (ii) E es E_0-cerrado.

Como ejemplos de estos anillos tenemos una amplia clase: Noetherianos, Semi-perfectos, Kasch.

Observación 4.4.18: El hecho de que R verifique CNPG(R) y Aut-Pic no implica que verifique IPFG. Por ejemplo, sea R un producto infinito de anillos de división $\prod_{\mathbb{N}} D_n$. Entonces R es un anillo regular abeliano (o fuertemente regular) [35] y $\oplus_{\mathbb{N}} D_n$ = Zóc(R) verifica End(${}_R$Zóc(R)) ≈ ≈ R, además, Zóc(R) es proyectivo y está propiamente contenido en R. Por lo tanto, R no verifica IPFG. •

Ahora supongamos que existe un (R,S,P,Q) normalizado por la izquierda con ${}_RP$ y ${}_SQ$ proyectivos. Por el Lema 4.4.8, los ideales traza ${}_RI$ y ${}_SJ$ son proyectivos; además, $Hom_R(I,P) \cong {}_RP$ y $End({}_RI) \approx R$. Como R es regular von Neumann entonces $P \cong \oplus_{\alpha\in A} Re_\alpha$. Por lo anterior,

$${}_RI = Tr_R(P) = Tr_R(\oplus_{\alpha\in A} Re_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} Tr_R(Re_\alpha) = \sum_{\alpha\in A} Re_\alpha R = \sum_{\alpha\in A} Re_\alpha$$

porque R es regular abeliano y entonces los idempotentes conmutan. Así, podemos asegurar que existe un epimorfismo escindido $P \longrightarrow I$. Aplicamos $Hom_R(I,\_)$ y tenemos $P \longrightarrow R$ epimorfismo escindido. Por lo tanto ${}_RP$ es generador y en consecuencia R verifica CNPG(R). Finalmente, de [35, Theorem 3.4] se desprende de inmediato que R verifica Aut-Pic.

Así, IPFG (como <u>P</u>) es una propiedad con "buena" descripción, pero sólo es suficiente para obtener la unicidad para la clase $\mathfrak{M}$ de los módulos proyectivos con elemento unimodular. A continuación, enunciamos una condición necesaria y suficiente para lo mismo; en términos de dos anillos con uno, R y S.

Proposición 4.4.19: R y S verifican CNPT(R,S) si y sólo si para todo P $\in$ R-mód y Q $\in$ S-mód, proyectivos con elemento unimodular y todo isomorfismo de anillos $\delta:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SQ)$, se tiene que δ está inducido por una equivalencia de Morita.

Demostración: Si R y S verifican CNPT(R,S) entonces el resultado se desprende del Teorema 4.4.7. Recíprocamente, si (R,S,P,Q) es un contexto de Morita normalizado por la izquierda con ${}_RP$ y ${}_SQ$ basta observar que, por hipótesis, haciendo $M = P \oplus R$ y $N = Q \oplus S$ tenemos que $\delta(\mathrm{fEnd}(M)) = \mathrm{fEnd}({}_SN)$ lo cual, por la Observación 4.2.8 implica que ${}_RP$ y ${}_SQ$ son progeneradores.

Corolario 4.4.20: La clase $\mathfrak{M}$ de los módulos proyectivos con elemento unimodular sobre la clase $\mathfrak{K}$ de los anillos noetherianos por la izquierda, semi-perfectos y Kasch por la izquierda verifican la unicidad en el sentido de equivalencias de Morita; es decir si ${}_RM$ y ${}_SN$ son proyectivos con elemento unimodular con R y S en cualesquiera de las clases mencionadas entonces todo isomorfismo de anillos entre $\mathrm{End}({}_RM)$ y $\mathrm{End}({}_SN)$ está inducido por una equivalencia de categorías entre R-mód y S-mód.

Isomorfismos semilineales

Comenzamos con condiciones suficientes. Sea R un anillo. En [63, p.80] se puede ver que si R verifica Pic(R)-trivial entonces para cualesquiera P, Q $\in$ R-mód proyectivos con unimodular y cualquier isomorfismo de anillos $\delta:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_SQ)$, δ está inducido por un isomorfismo semilineal entre P y Q. Podemos reducir la clase sobre la que se impone la condición Pic(R)-trivial y obtener otra condición suficiente.

Proposición 4.4.21: Si R verifica IPFG y Aut-Pic entonces para cualesquiera P, Q $\in$ R-mód proyectivos con elemento unimodular e isomorfismo $\delta:\mathrm{End}({}_RP) \longrightarrow \mathrm{End}({}_RQ)$ se tiene que δ está inducido por un isomorfismo semilineal entre P y Q.

Demostración: Sean $e \in \mathrm{End}({}_RP)$ y $f \in \mathrm{End}({}_RQ)$ los idempotentes tales que ${}_RPe \cong {}_RR$ y ${}_RQf \cong {}_RR$. Como R verifica IPFG entonces $P' = P\delta^{-1}(f)$ y $Q' = Q\delta(e)$ son progeneradores. Además, por el Teorema 4.4.7 $\mathrm{End}({}_RP') \approx R$ lo cual, por la propiedad Aut-Pic implica que existe un isomorfismo de anillos $\tau:R \longrightarrow R$ y un isomorfismo τ-semilineal entre ${}_RP'$ y ${}_RR$, el cual, componiéndolo con τ^{-1} nos da un R-isomorfismo por la izquierda, $\psi:{}_RP' \longrightarrow {}_RR$. Éste, a su vez, induce un automorfismo $\sigma:R \longrightarrow R$ que, por la Observación 4.2.13 implica que existe un isomorfismo σ-seminatural $\eta\_:\mathrm{Hom}_R(R,\_) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P',\_)$. Si componemos $P \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(R,P) \longrightarrow \mathrm{Hom}_R(P',P) \longrightarrow Q$ tenemos un ismorfismo σ-semilineal, el cual claramente induce δ.

Es claro que Pic(R)-trivial implica IPFG + Aut-Pic, pero el recíproco no lo sabemos. Por otro lado se tiene que IPFG no implica Pic(R)-trivial. Por ejemplo, si D es un dominio de Dedekind tal que no es DIP entonces, como D es noetheriano [42, p.606] tenemos que D verifica IPFG. Por [42, pp.628-629] sabemos que Pic(D) = 1 si y sólo si D es un DIP. Por lo tanto D, en este caso no puede tener grupo de Picard trivial. Y en consecuencia, no tiene Pic(D)-trivial.

A partir de la Observación 4.4.18 y de que Pic(R)-trivial implica IPFG tenemos que CNPT(R,R) junto con Aut-Pic no implica Pic(R)-trivial, y tampoco implica IPFG junto con Aut-Pic. La primera es una condición necesaria y suficiente para que cualquier isomorfismo entre los anillos de endomorfismos de dos módulos proyectivos esté inducido por un isomorfismo semilineal y nos da una idea de cuáles anillos pueden verificar la unicidad (en el sentido de isomorfismos semilineales), como por ejemplo en un anillo semi-perfecto básico [11, Proposition 3.10]. Con un argumento completamente análogo al del

Teorema 4.2.15 se puede demostrar el siguiente resultado con el que terminamos esta memoria

Teorema 4.4.24: R verifica CNPT(R,R) y Aut-Pic si y sólo si para cualesquiera P, Q $\in$ R-mód proyectivos con elemento unimodular e isomorfismo de anillos $\delta:\mathrm{End}({}_{R}P) \longrightarrow \mathrm{End}({}_{R}Q)$ se tiene que δ está inducido por un isomorfismo semilineal entre P y Q.

BIBLIOGRAFIA

[1] G. D. Abrams, Morita equivalence for rings with local units, Comm. Algebra 11(8) (1983), 801-837.

[2] G. D. Abrams, On the existence of rings R with R isomorphic to $\mathbb{RFM}(R)$, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 42(1987), 129-131.

[3] G. D. Abrams, On dense subrings of $\mathbb{RFM}(R)$, J. Algebra, 110(1987), 243-248.

[4] T. Albu y C. Nastasescu, Relative finiteness in module theory, Marcel Dekker, New York, Basel, 1984.

[5] F. W. Anderson, Endomorphism rings of projective modules, Math. Z. 111(1969), 322-332.

[6] F. W. Anderson y K. R. Fuller, Rings and categories of modules, Springer, New York, 1974.

[7] P. N. Ánh y L. Marki, Morita equivalence for rings without identity, Tsukuba J. Math. 11(1) (1987), 1-16.

[8] R. Baer, Linear algebra and projective geometry, Academic press, New York, 1952.

[9] H. Bass, Big projective modules are free, Illinois J. Math. 7(1963), 24-31.

[10] S. Bazzoni y C. Metelli, On abelian torsion-free separable groups and their endomorphism rings, Symposia Math. 23(1979), 259-285.

[11] M. Bolla, Isomorphisms betweeen endomorphism rings of progenerators, J. Algebra 87(1984), 261-281.

[12] M. Bolla, Isomorphisms between infinite matrix rings, Linear Alg. Appl. 69(1985), 239-247.

[13] V. Camillo, Morita equivalence and infinite matrix rings, Proc. Amer. Math. Soc. 90(1984), 186-188.

[14] R. R. Colby y E. A. Rutter Jr., Generalization of QF-3 algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 153(1971), 371-386.

[15] R. Dimitrič, A note on isomorphisms of endomorphism algebras of modules over valuation domains, Arch. Math. (Basel) 51(1988), 419-424.

[16] W. N. Franszen y P. Schultz, The endomorphism ring of a locally free module, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 35(1983), 308-326.

[17] A. Frohlich, The Picard group of noncommutative rings in particular of orders, Trans. Amer. Math. Soc. 180(1973), 1-45.

[18] L. Fuchs, Infinite abelian groups, vol. 2, Academic press, New York, 1973.

[19] L. Fuchs y P. Schultz, Endomorphism rings of valuated vector spaces, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 65(1981).

[20] K. R. Fuller, Density and equivalence, J. Algebra 29(1974), 528-550.

[21] P. Gabriel, Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France 90(1962), 323-448.

[22] J. L. García, The finite column matrix ring of a ring, Proceedings of the first Spanish-Belgian week on algebra and geometry, eds. J. L. Bueso, M. I. Segura, A. Verschoren, R. U. C. A., Antwerpen, 1988, 64-74.

[23] J. L. García, The characterization problem for endomorphism rings, J. Austral. Math. Soc. (Series A) 58(1991), 116-137.

[24] J. L. García y J. L. Gómez Pardo, On endomorphism rings of quasiprojective modules, Math. Z. 196(1987), 87-108.

[25] J. L. García y J. L. Gómez Pardo, Self-injective and PF endomorphism rings, Israel J. Math. 58(3) (1987), 324-350.

[26] J. L. García y M. Saorín, Endomorphism rings and category equivalences, J. Algebra 127(1989), 182-205.

[27] J. L. García y J. J. Simón, Morita equivalence for idempotent rings, J. Pure Appl. Algebra 76(1991), 39-56.

[28] J. L. García y J. J. Simón, Characterization and isomorphisms between endomorphism rings of locally free modules, J. Algebra, por aparecer.

[29] R. Gentle, T.T.F. Theories in abelian categories, Comm. Algebra 16(5) (1988), 877-908.

[30] L. Gewirtzman, Anti-isomorphisms of the endomorphism ring of torsion-free modules, Math. Z. 98(1967), 391-400.

[31] J. S. Golan, Localization of noncommutative rings, New York, Marcel Dekker, 1975.

[32] J. S. Golan, Torsion theories, Harlow, Longman Scientific & Technical, 1986.

[33] B. Goldsmith, Endomorphism rings of torsion-free modules over a complete discrete valuation ring, J. London Math. Soc. 18(1978), 464-471.

[34] B. Goldsmith, On endomorphism rings of non-separable abelian p-groups, J. Algebra 127(1989), 73-79.

[35] K. R. Goodearl, Von Neumann regular rings, Pitman, London, 1979.

[36] C. J. Hauptfleisch, Torsion-free abelian groups with isomorphic endomorphism rings, Arch. Math. (Basel) 24(1973), 269-273.

[37] N. Jacobson, The theory of rings, Math. Surveys, vol. 2, New York, 1943.

[38] N. Jacobson, Structure theory of simple rings without finiteness assumptions, Trans. Amer. Math. Soc. 57(1945), 228-245.

[39] N. Jacobson, The radical and semi-simplicity for arbitrary rings, Amer. J. Math. 67(1945), 300-320.

[40] N. Jacobson, Structure of rings, Amer. Math. Soc. 37, 1956.

[41] N. Jacobson, Basic algebra I, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.

[42] N. Jacobson, Basic algebra II, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1980.

[43] J. P. Jans, Some aspects of torsion, Pacific J. Math. 15(1965), 1249-1259.

[44] S. Jøndrup y P. J. Trosborg, A remark on pure ideals and projective modules, Math. Scand. 35(1974), 16-20.

[45] I. Kaplansky, Infinite abelian groups, Ann Arbor, University of Michigan Press, 1954.

[46] I. Kaplansky, Projective modules, Ann. Math. 68(1958) 372-377.

[47] F. Kasch, Moduln und ringe, B. G. Teubner, Stuttgart, 1977.

[48] J. L. Kelly, General topology, Springer, New York, 1955.

[49] S. M. Khuri, Baer endomorphism rings and closure operators, Can. J. Math. 30(5)(1978), 1070-1078.

[50] S. M. Khuri, Modules whose endomorphism rings have isomorphic maximal left and right quotient rings, Proc. Amer. Math. Soc. 85(2)(1982), 161-164.

[51] S. M. Khuri, Correspondence theorems for modules and their endomorphism rings, J. Algebra 122(1989), 380-396.

[52] H. Komatsu, The category of s-unital modules, Math. J. Okayama Univ. 28(1986), 65-91.

[53] S. Kyuno, Equivalence of module categories, Math. J. Okayama Univ. 28(1986), 147-150.

[54] S. Kyuno, M. Smith y N. Nobusawa, Closed ideals in non-unital matrix rings, Math. J. Okayama Univ. 29(1987), 147-152.

[55] D. Lazard, Liberté des gros modules projectifs, J. Algebra 31(1974), 437-451.

[56] W. Liebert, Characterization of the endomorphism rings of divisible torsion modules and reduced complete torsion free modules over complete discrete valuation rings, Pacific J. Math. 37(1971), 141-170.

[57] W. Liebert, Endomorphism rings of reduced complete torsion-free modules over complete discrete valuation rings, Proc. Amer. Math. Soc. 36(1972), 375-378.

[58] W. Liebert, Endomorphism rings of reduced torsion free modules over complete discrete valuation rings, Trans. Amer. Math. Soc. 169(1972), 347-363.

[59] W. Liebert, Endomorphism rings of free modules over principal ideal domains, Duke J. Math. 41(1974), 323-328.

[60] W. May, Isomorphisms of the endomorphism algebras over complete discrete valuation rings, Math. Z. 204(1990), 485-499.

[61] W. May y E. Toubassi, Endomorphisms of abelian groups and the theorem of Baer and Kaplansky, J. Algebra 43(1976), 1-13.

[62] W. May y E. Toubassi, Isomorphisms of endomorphism rings of rank one mixed groups, J. Algebra 71(1981), 515-523.

[63] B. R. McDonald, Endomorphism rings of infinitely generated projective modules J. Algebra 45(1977), 69-82.

[64] A. V. Mijailov, Isomorfismos de anillos de endomorfismos de módulos cercanos a los libres, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh. 2(1989) 2-27, 104. Trad. esp. J. Valero.

[65] B. Mitchell, Theory of categories, New York, Academic Press, 1965.

[66] C. Metelli y L. Salce, The endomorphism ring of an abelian torsion-free homogeneous separable group, Arch. Math. (Basel) 26(1975), 480-485.

[67] K. Morita, Duality for modules and its applications to the theory of rings with minimum condition, Sci. Rep. Tokyo Daigaku (Sect. A) 6(1958), 83-142.

[68] K. Morita, Category-isomorphisms and endomorphism rings of modules, Trans. Amer. Math. Soc. 103(1962), 451-469.

[69] B. J. Müller, The quotient category of a Morita context, J. Algebra 28(1974), 389-407.

[70] N. Nobusawa, On duality in Γ-rings, Math. J. Okayama Univ. 25(1983), 69-73.

[71] N. Nobusawa, Γ-rings and Morita equivalence of rings, Math. J. Okayama Univ. 26(1984), 151-156.

[72] N. Nobusawa, On Morita pairs of rings, Math. J. Okayama Univ. 29(1987), 153-158.

[73] N. Nobusawa, Correspondences of modules over a Morita ring, Math. J. Okayama Univ. 30(1988), 63-70.

[74] K. Ohtake, Colocalization and localization, J. Pure Appl. Algebra 11(1977), 217-241.

[75] K. Ohtake, Equivalence between colocalization and localization in abelian categories with applications to the theory of modules, J. Algebra 79(1982), 169-205.

[76] M. Parvathi y P. Raj Adhikari, Gamma rings and Morita equivalence for rings with local units, Comm. Algebra 13(3) (1985), 585-598.

[77] M. Parvathi y P. A. Rajendran, Gamma-rings and Morita equivalence, Comm. Algebra 12(14) (1984), 1781-1786.

[78] M. Parvathi y A. Ramakrishna Rao, Morita equivalence for a larger class of rings, Publ. Math. Debrecen 35(1988), 65-71.

[79] L. Pontrjagin, Topological groups, Princeton, 1939.

[80] N. Popescu y P. Gabriel, Caractérisation des catégories abeliénnes avec générateurs et limites inductives exactes, C. R. Acad. Sci. Paris 258(1964), 4188-4190.

[81] L. H. Rowen, Ring theory, vol. 1, Academis Press, Boston, 1988.

[82] F. L. Sandomiersky, Relative injectivity and projectivity, Ph.D. Thesis, Pennsylvania State University, 1964.

[83] B. Stenström, Rings of quotients, Springer, Berlin, 1975.

[84] H. Tachikawa y K. Ohtake, Colocalization and localization in abelian categories, J. Algebra 56(1979), 1-23.

[85] R. Ware, Endomorphism rings of projective modules, Trans. Amer. Math. Soc. 155(1971), 233-256.

[86] R. Webb, The endomorphism ring of pointed separable torsion-free abelian groups, J. Algebra 55(1978), 446-454.

[87] R. Wisbauer, Grundlgen der Modul-und ring theorie, München, Reinhard Fischer, 1988.

[88] K. G. Wolfson, An ideal theoretic characterization of the ring of all linear transformations, Amer. J. Math. 75(1953), 358-386.

[89] K. G. Wolfson, Isomorphisms of the endomorphism ring of torsion-free modules, Proc. Amer. Math. Soc. 13(1962), 712-714.

[90] K. G. Wolfson, Isomorphism of the endomorphism ring of a free module over a principal left ideal domain, Michigan J. Math. 9(1962), 69-75.

[91] K. G. Wolfson, Isomorphisms of the endomorphism ring of a class of torsion-free modules, Proc. Amer. Math. Soc. 14(1963), 584-594.

[92] K. G. Wolfson, The endomorphism ring of a free module over a principal left ideal domain, Comm. Algebra 18(2) (1990), 357-370.

[93] K. G. Wolfson, Endomorphism rings of locally free modules, Comm. Algebra, 19(1991).

[94] M. Yao (Yao Musheng) Equivalence of categories of modules and isomorphisms of rings, Scien. Sinica (Series A) 30(1987), 12-18.

[95] J. M. Zelmanowitz, The structure of rings with faithful nonsingular modules, Trans. Amer. Math. Soc. 278(1983), 347-359.

[96] J. M. Zelmanowitz, Regular modules, Trans. Amer. Math. Soc. 163(1972), 345-355.

[97] S. Zhu (Zhu Shenglin), On the equivalence of quotient category Mod-(R,$\mathcal{F}$) with module category Mod-S, Comm. Algebra 16(8) (1988), 1639-1661.

[98] B. Zimmermann, Endomorphism rings of self-generators, Algebra Ber. 27, Math. Inst. Univ., München, 1975.