UNIVERSIDAD DE MURCIA

Departamento de Matemáticas

TESIS DOCTORAL

RENORMAMIENTO EN LOS ESPACIOS DE BANACH

Antonio José Guirao Sánchez

Julio 2007

Renormamiento en los espacios de Banach

D. Victor Jiménez López, Profesor Titular de Análisis Matemático y a su vez Director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral "RENORMAMIENTO EN ESPACIOS DE BANACH" ha sido realizada por el doctorando D. Antonio José Guirao Sánchez, bajo la inmediata dirección y supervisión de D. José Orihuela Calatayud y D. Stanimir Troyanski, y que el Departamento de Matemáticas ha dado su conformidad para que sea presentada ante la comisión de Doctorado.

En Murcia, a 3 de Julio de 2007

Fdo.: Victor Jiménez López

Renormamiento en los espacios de Banach

D. José Orihuela Calatayud, Catedrático de Universidad del Área de Análisis Matemático y D. Stanimir Troyanski, Profesor Titular, ambos del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia

AUTORIZAN:

La presentación de la Tesis Doctoral "RENORMAMIENTO EN ESPACIOS DE BANACH", realizada por el doctorando D. Antonio José Guirao Sánchez, bajo nuestra inmediata dirección y supervisión en el Departamento de Matemáticas, y que presenta para la obtención del Grado de Doctor de la Universidad de Murcia.

En Murcia, a 3 de Julio de 2007

Fdo.: José Orihuela Calatayud

Fdo: Stanimir Troyanski

En primer lugar quiero agradecer a mis directores, José Orihuela Calatayud y Stanimir Troyanski, el apoyo y la orientación que me han brindado.

Durante el proceso de elaboración de los resultados que se presentan en esta memoria, el autor ha realizado sendas estancias breves en el extranjero. Quiero dar las gracias a la Universidad de Burdeos I y en especial a Robert Deville, quién además de ser un anfitrión magnífico en Burdeos, me enseñó que la matemática puede ser apasionante. También quiero dar las gracias al Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la República Checa y, en especial a Petr Hájek, quién supervisó mi estancia en Praga, me hizo sentir como uno más de su familia y cuyas conversaciones conmigo han sido la razón principal de gran parte de esta memoria.

Puede creerse ilusoriamente que una Tesis Doctoral es trabajo de una única persona, el autor. Sin embargo en el proceso de creación de la misma son muchas las personas que intervienen. Por eso quiero darles las gracias, en primer lugar a mis compañeros Antonio Avilés y Jose Rodríguez que han sido a la vez que amigos, apoyo y orientación, en segundo lugar a Mariángles H. C. quién me ha enseñado a apreciar mi propia labor científica, y por último quiero hacer extensiva mi gratitud a los miembros del grupo de Análisis Funcional y al departamento de Matemáticas de la Universidad de Murcia.

Pero no sólo de ciencia vive el hombre y durante este tiempo he recibido el apoyo incondicional de mis padres y mis hermanas quiénes tanto estando lejos como cerca me han hecho sentir querido y apoyado. Así que no puedo más que expresar mi eterna gratitud a ellos y en particular a mis padres a quiénes siempre les deberé ser quién soy.

Finalmente quiero dar las gracias a Marta quién me ha estado apoyando desde que empezara mi carrera investigadora, ha sido capaz de sobrellevar mis ausencias prolongadas, y ha creído en mí lo suficiente para que yo también lo hiciera. Por eso y por tantas otras cosas esta memoria le está dedicada.

A Marta,

Los sueños que dejamos y escaparon,
Pasaron de ser sueños a ser pesadillas.
Los sueños que perseguimos y alcanzamos,
Siguen, en esencia, siendo sueños.
Pues aún siendo el presente, el ahora,
Conforman los sueños de nuestro futuro.

Esta memoria ha sido elaborada durante el período de disfrute de una Beca de Postgrado (referencia AP2003-4453) del Programa Nacional de Formación de Profesorado Universitario del Ministerio de Educación y Ciencia. Dos ayudas complementarias de dicho programa han permitido al autor realizar sendas estancias en el Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la República Checa, Praga (Octubre de 2005 a Enereo de 2006), y en la universidad Burdeos I, Burdeos (Octubre-Noviembre de 2006).

Esta investigación también ha estado financiada parcialmente por los proyectos: "Espacios de Banach: compacidad, fragmentabilidad, renormamiento y diferenciabilidad" (BFM2002-01719, Ministerio de Ciencia y Tecnología), "Geometría y topología infinito dimensional en espacios de Banach"(00690/PI/04, Fundación Seneca) y "Nuevas tendencias en Análisis Funcional y sus Aplicaciones" (MTM2005-08379, Ministerio de Educación y Ciencia).

Índice general

Introduction

The general framework of this memoir is the *theory of renorming in Banach spaces.* One of the main tools in this theory is the notion of *modulus*, this is, a real function associated to a given Banach space $(X, \|\cdot\|)$ —isometrically speaking— which pretends to give us information about geometrical properties of the space. In other words, they represent a quantitative way of studying the geometrical properties of a Banach space.

A lot of them have been defined, for instance: the *modulus of convexity* or *Clarkson's modulus* —see [15]— which characterizes uniform convexity of the given Banach space; and the *modulus of smoothness* or *Lindenstrauss' modulus* —see [48]— which characterizes uniform smoothness.

The notion of a Banach space being uniformly convex or uniformly smooth can be generalize to the concept of uniform convexity and uniform smoothness of convex function defined on a Banach space. Also, the notions of *modulus of convexity* and *modulus of smoothness* can be generalized to those functions and characterize, analogously, uniform convexity and uniform smoothness —see [68].

Recently, in [56] a new modulus was defined, which is useful for characterizing uniform properties and whose name is the *modulus of squareness.* This modulus is able to characterize at once the uniform convexity and the uniform smoothness —as well as other geometrical properties— of the given Banach space. However it is so much complicated to make computations with this modulus. Observe, for instance, that its value is not known even for the space $\ell_p(2)$ —$\mathbb{R}^2$ endowed with the canonical p-norm.

Throughout this work we focus on the quantitative study of the geometry of Banach spaces. On the one hand, we will study some moduli: *modulus of convexity*, *modulus of smoothness*, *modulus of squareness* and their respective localizations. On the other hand we will study some renormings related with uniform geometrical properties. We next summarize the content of this work.

Chapter 1. Preliminaries

This auxiliary chapter is devoted, on the one hand, to fix the notation and terminology used throughout this memoir and, on the other hand, to give a brief introduction to fundamental topics like: Convexity and smoothness in Banach spaces, moduli in quantitative study of the geometry of Banach spaces, Fenchel conjugate, etc. Our aim is to make easier the reading of the remaining chapters. The majority of the results included are well known and are presented without proof.

For the convenience of the reader, at the end of this memoir we have also included a **Subject index**, where the number appearing together each symbol or term indicates, as usual, the page where it has been defined.

Chapter 2. Moduli of Convexity and Smoothness

Modulus of convexity and smoothness have been deeply studied since they were defined. Their properties of monotonicity, continuity and convexity as well as their behaviour near the origin are known. Let us remember their definitions.

Definition 1.3.3 [22, Def. 9.1]. *Let* $(X, \|\cdot\|)$ *be a Banach space. The* modulus of convexity $\delta_X(\varepsilon)$*, for* $\varepsilon \in (0, 2]$*, of* X *is defined by*

$$\delta_X(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| ;\ x, y \in B_X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

A Banach space is said to be uniformly convex*, (UC) for short, if* $\delta_X(\varepsilon) > 0$ *for* $\varepsilon \in (0, 2]$.

Let us recall that a Banach space is called *strictly convex* if the equality $\|x\| = \|y\| = \|(x + y)/2\| = 1$, for some pair of vectors x and y, implies that $x = y$. The modulus of convexity of a space measures in a certain sense its degree of strict convexity. A simple compactness argument shows that a finite dimensional Banach space is strictly convex if and only if it is uniformly convex. However, there exist many examples of infinite dimensional Banach spaces which are strictly convex but not uniformly convex — c_0, for instance.

Observe that this modulus has a two-dimensional character. Indeed, one can realize that $\delta_X = \inf \{\delta_Y : Y \leq X, \dim Y = 2\}$.

Definition 1.3.4 [22, Def. 9.6]. *Let* $(X, \|\cdot\|)$ *be a Banach space. The* modulus of smoothness $\rho_X(\tau)$*, for* $\tau > 0$*, of* X *is defined by*

$$\rho_X(\tau) = \sup \left\{ \frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2}{2} :\ \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

A Banach space is said to be uniformly Fréchet diferenciable*, (UF) for short, if* $\rho_X(\tau)/\tau \to 0$ *as* $\tau \to 0$.

A Banach space X is called *Gâteaux smooth* if, for every $x \in X$ with $\|x\| = 1$, there exists a unique $x^* \in X^*$ such that $\|x^*\| = x^*(x) = 1$. Suppose that X is not Gâteaux smooth and let $x \in X$ and u^*, v^* be so that $\|x\| = \|u^*\| = \|v^*\| = u^*(x) = v^*(x) = 1$ and $u^* \neq v^*$. Let $y \in X$ be a norm one vector for which $a = u^*(y) > 0$ and $b = -v^*(y) > 0$. Then, for every $t > 0$, we have that $\|x + ty\| \geq u^*(x+ty) = 1+ta$ while $\|x - ty\| \geq v^*(x-ty) = 1+tb$. Hence, $\rho_X(\tau) \geq (a+b)\tau/2$ and, therefore, X is not uniformly Fréchet smooth. An easy compactness argument shows that, for finite dimensional spaces, Gâteaux smoothness is equivalent to uniform Fréchet smoothness. As in the case of the modulus of convexity, this modulus has a 2-dimensional character. Indeed, we are able to establish $\rho_X = \sup\{\rho_Y : Y \subset X, \dim Y = 2\}$.

Lindenstrauss pointed out in [48] that the moduli of convexity and smoothness are related by a strong relation of duality. Indeed he showed that

$$\rho_{X^*}(\tau) = \sup\{\tau\varepsilon/2 - \delta_X(\varepsilon), 0 \leq \varepsilon \leq 2\},$$

for all $\tau > 0$. This formula is related with the Fenchel conjugate which is a very common tool in Orlicz functions theory. In spite of the modulus of smoothness is an Orlicz function, the modulus of convexity is not even, in general, convex —see [51]. However if we define the modulus $\widetilde{\delta}_X(\varepsilon) = \sup\{\tau\varepsilon/2 - \rho_X(\tau), 0 \leq \tau\}$ we obtain that δ_X is equivalent at the origin —in the sense of [24]— to $\widetilde{\delta}_X$, and $\widetilde{\delta}_X$ is the convexification of δ_X, this is, the biggest convex and l.s.c function which is below δ_X.

A natural question is: What are the necessary conditions which have to be satisfied by a real function f in order to exists a Banach space X with a modulus of convexity —resp. of smoothness— equal to f? When a Banach space is not (UC), there exists some $\varepsilon_0 \in (0, 2)$ such that $\delta_X((0, \varepsilon_0]) = 0$. And it is easy to find renormings in $\mathbb{R}^2$ satisfying these conditions for any of those ε_0. Therefore we can reduce our question to those function satisfying $f(t) > 0$ for all $t > 0$.

Throughout this chapter we obtain a partial solution of this question. In fact, we find the essential properties which have to be satisfied by f in order to exists a norm $\|\cdot\|$ in $\mathbb{R}^2$ such that f is *equivalent* at the origin to the modulus of convexity $\delta_{(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)}$ —resp. to the modulus of smoothness $\rho_{(\mathbb{R}^2,\|\cdot\|)}$.

Some results reflecting the global behaviour of the modulus of convexity and smoothness have been obtained along the years. M.I. Kadec in [41] obtained the following remarkable result.

Theorem [22, Theorem 9.23]. *Let* $(X, \|\cdot\|)$ *be a uniformly convex Banach space with modulus of convexity* $\delta(\varepsilon)$. *If* $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$ *converges unconditionally in* X*, then* $\sum_{i=1}^{\infty} \delta(\|x_i\|) < \infty$.

It can be established a dual analogue of this Theorem for the modulus of smoothness. In fact, J. Lindenstrauss established in [48] the following result.

Theorem [18, Chapter III, §4, Theorem 2]. *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space with modulus of smoothness $\rho(\tau)$. If $\sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon_i x_i$ diverges for all choices of $\varepsilon_i \in \{\pm 1\}$, then $\sum_{i=1}^{\infty} \rho(\|x_i\|) = \infty$.*

Let us observe that J. Lindenstrauss needed only the fact that the modulus of smoothness of a Banach space is an Orlicz function with the Δ_2-condition at the origin, this is, satisfying

$$\limsup_{t \to 0} \rho(2t)/\rho(t) < \infty.$$

Let us also observe that the modulus of convexity, in general, does not satisfy the Δ_2-condition at the origin. However, due to the existent relation of duality between both moduli ρ and δ, we know that the modulus of convexity of a Banach space satisfies the ∇_2 property —there exists a constant $A > 1$ such that $2A\delta(x) \leq \delta(Ax)$—, for details on this properties and their relation up to Fenchel duality see [58].

In applications, we do not use often the precise value of the moduli but only a power type estimate from below or above. We say that the modulus of convexity δ_X —of smoothness ρ_X— has *power type p* if, for some $0 < K < \infty$, $\delta_X(\varepsilon) \geq K\varepsilon^p$ —$\rho_X(\tau) \leq K\tau^p$—. Using the duality between both moduli is easy to see that δ_X is of power type p if and only if ρ_{X^*} is of power type q, where $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

The moduli of convexity and of smoothness of a Banach space are only isometric invariants and they may obviously change considerably under an equivalent renorming. Therefore, it is natural to ask whether certain moduli in a Banach space are the best ones up to equivalence, or it is possible to improve them by a suitable renorming. The key to the study of this question is usually the finite version of Kadec's theorem. For instance it can be used to conclude that for $p > 2$ the best modulus of convexity —up to equivalence— that ℓ_p admits is exactly $\delta_p(X)$ which is of power type p.

However, along this chapter we will show that a superreflexive Banach space admits an arbitrarily bad modulus of convexity and smoothness. And in this case the previous theorems give no enough information.

G. Pisier in [54] showed that for any superreflexive Banach space X there exist constants C, C' and q, p and norms $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$ on X such that $\delta_{(X,\|\cdot\|_1)}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$ and $\rho_{(X,\|\cdot\|_2)}(\tau) \leq C'\tau^p$. Moreover, using the result of Asplund [2], we can take just one norm satisfying these properties with another constants.

From Pisier's result can be deduce the result of R. C. James [39] and Gurariĭ-Gurariĭ [36] which establishes that for any superreflexive space X there exist constants r,$s \in (1, \infty)$ such that for any Schauder basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ there exists a positive constant A satisfying

$$\frac{1}{A}\left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\right\| \leq A\left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^s\right]^{\frac{1}{s}}.$$

But giving no precise information about those r and s.

In chapter 4 we obtain a related result, instead of in terms of r and s, in terms of the modulus of convexity and smoothness of the space which is based on an improvement of a result of Buĭ-Min-Či and V.I. Gurariĭ —see [10].

Modulus of smoothness functions

The modulus of smoothness of the Hilbert space, denoted by $\rho_2(\tau)$, can be computed easily by using the parallelogram identity and one obtains that

$$\rho_2(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} - 1 = \tau^2/2 + O(\tau^4),\ \tau > 0.$$

Since, by a well-known theorem of A. Dvoretzky [20], every infinite-dimensional Banach space contains nearly isometric copies of ℓ_2^n —$\mathbb{R}^n$ endowed with the canonical 2-norm— for all n it follows that the Hilbert space is the *most uniformly smooth space* in the sense that, for any Banach space X,

$$\rho_X(\tau) \geq \sqrt{1+\tau^2} - 1,\ \tau > 0.$$

Dvoretzky's theorem proves these relations only if $\dim X = \infty$. Actually, these inequalities are true for every X with $\dim X \geq 2$. This fact is due to G. Nordlander [53] who proved it by using an elegant geometric argument.

Looking at this result carefully enough, one could realize that given a Banach space X such that there exists a constant K satisfying $\rho_X(\tau) \leq K\tau^2$, then the modulus of smoothness of X is equivalent to the Euclidean modulus of smoothness. T. Figiel, using that ρ_X has the Δ_2-condition, showed in [24] that this behaviour of the modulus is also local. Indeed he proved the following proposition.

Proposition 2.2.1 [24, Prop. 10]. *If $0 < \tau \leq \sigma$, then $\rho_X(\sigma)/\sigma^2 \leq L\rho_X(\tau)/\tau^2$, where L is a constant less or equal than $2\prod_{n=0}^{\infty}(1+2^{-n}/3)$.*

In other words, the function $\rho_X(\tau)/\tau^2$ is equivalent at the origin to a decreasing function. We are able to characterize —via *equivalence*— those function f which are modulus of convexity of a Banach space with the property of being $f(t)/t^2$ equivalent to an increasing function, which is dual to Proposition 2.2.1 —see [33]—. From this and the known relation of duality between both moduli, it is natural to ask if this property is enough to characterize —also via *equivalence*— those functions which are modulus of smoothness of a Banach space.

In fact, what we obtain is that for any given Orlicz function f satisfying this property, one obtains for each $n \in \mathbb{N}$ a norm $\|\cdot\|_n$ in $\mathbb{R}^n$ such that the modulus of smoothness of $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_n)$ is *equivalent* to f.

First of all, we will define the following notion.

Definition 2.2.2. A *modulus of smoothness function* is an Orlicz function M such that for any $0 < t < s$, satisfies

$$\frac{M(s)}{s^2} \leq C\frac{M(t)}{t^2}$$

for some constant $C \geq 1$.

The key point of the proof of our main result in this chapter lies in a former work of R. P. Maleev and S. L. Troyanski —[52]— where they define the function

$$G_M(\tau) = \tau^2 \sup\left\{\frac{M(uv)}{u^2M(v)} : u \in [\tau, 1], v > 0\right\},$$

for $\tau \in (0, 1]$. They show that if an Orlicz function M and its complementary M^* satisfy the Δ_2-condition at the origin and at infinity —$f(2t) \leq Kf(t)$, for some positive constant K, for all $t > 0$ and for $f \in \{M, M^*\}$—, then there exists an equivalent Orlicz function N such that the modulus of smoothness ρ_X of the space $X = L_N(S, \Sigma, \mu)$ satisfies $\rho_X(\tau) \leq KG_M(\tau)$ for some constant K and all $\tau \in [0, 1]$ under some additional conditions on the measure space. Let us observe that X is isomorphic to $L_M(S, \Sigma, \mu)$.

This result motivates us to define the following functions.

Definition 2.2.5. For any modulus of smoothness function M and for each $n \in \mathbb{N}$ we define the function

$$G_n(M, \tau) = \tau^2 \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} \frac{M(u_iv_i)}{u_i^2} : (v_i)_{i=1}^n \in S_{\ell_M^n}, u_i \in [\tau, 1]\right\},$$

for $\tau \in [0, 1]$.

These functions are equivalent to M —Lemma 2.2.6— and allow us to establish the following result.

Theorem 2.2.12. *Let us assume that N is a modulus of smoothness function. Then there exist: a modulus of smoothness function M* equivalent *to N, a positive constant K and for each $n \in \mathbb{N}$, constants $K_1(n) > 0$ such that for all $t \in [0, 1]$, we have*

$$K_1(n)G_n(M, \tau) \leq \rho_{\ell_M^n}(\tau) \leq KG_n(M, \tau).$$

In particular, $\mathbb{R}^n$ *can be renormed in such a way its modulus of smoothness is* equivalent *to* N*.*

Since this result is true, in particular for $n = 2$, then we can find such a norm in those superreflexive Banach spaces X with $\dim X \geq 2$. This is, for a given *modulus of smoothness function* N we obtain a new Orlicz function M such that $\rho_{\ell_M^2}$ is equivalent to N.

The real meaning of Theorem 2.2.12 is that any superreflexive space with $\dim X \geq 2$, which are exactly those who admits an equivalent (UF)-norm, admits equivalent norms as bad as we want. Indeed, given a Banach space X endowed with an (UF)-norm $\|\cdot\|$, one can ask if the modulus of smoothness of this norm is necessarily of some power type. However, if we take for example the modulus of smoothness function $M(t) = \frac{t}{1-log(t)}$ and the norm $|\cdot|$ which constructs Theorem 2.2.12, then the modulus of smoothness admits no power type.

Modulus of convexity functions

We have already pointed out the fact that modulus of convexity and modulus of smoothness are highly related via duality. Then, it is clear that the results stated in the previos section *Modulus of smoothness functions* can be restated in terms of the modulus of convexity.

First of all, let us remark that in [24] was also shown the dual result of Proposition 2.2.1.

Proposition 2.3.1 ([24, Cor. 11]). *Let X be a Banach space, and $0 < \varepsilon \leq \mu$. Then $\delta_X(\varepsilon)/\varepsilon^2 \leq 4L\delta_X(\mu)/\mu^2$, where L is a constant less or equal than $2\prod_{n=0}^{\infty}(1 + 2^{-n}/3)$.*

This is, the function $\delta_X(\varepsilon)/\varepsilon^2$ is equivalent at the origin to an increasing function.

Following the ideas of the previous section, we define the following notion.

Definition 2.3.2. A *modulus of convexity function* is an Orlicz function M such that for all $0 < t < s$, satisfies

$$\frac{M(t)}{t^2} \leq C\frac{M(s)}{s^2}$$

for some constant $C \geq 1$.

There exists a clear relation of duality between the notions of *modulus of convexity functions* and *modulus of smoothness functions*, indeed we have

Corollary 2.3.5. *The Fenchel conjugate M^* of a modulus of convexity function M —rep. a modulus of smoothness function— is a modulus of smoothness function —resp. a modulus of convexity function.*

This result together with the fact that the Fenchel conjugates of two *equivalent* Orlicz function are *equivalent*, allows us to prove the following result.

Theorem 2.3.7. *Assume N is a modulus of convexity function. Then, for each $n \in \mathbb{N}$ there exists a norm $\|\cdot\|$ on $\mathbb{R}^n$ such that the modulus of convexity $\delta_{(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)}$ is* equivalent *to N.*

Observe that using this result we are able to obtain for any superreflexive Banach space with $\dim X \geq 2$ an (UC)-norm $\|\cdot\|$ whose modulus of convexity has no power type.

Let us remark that the results we include in this chapter are not published elsewhere, however their motivation goes back to our paper [33].

Chapter 3. Uniformly Convex Functions on Banach Spaces

Throughout this chapter we study the connection between uniformly convex functions $f : X \to \mathbb{R}$ bounded above by $\|x\|^p$, and the existence of norms on X with moduli of convexity of power type.

Uniformly convex functions on Banach spaces were introduced by Levitin and Poljak in [47]. Their properties were studied in depth by Zălinescu [67], and then later Azé and Penot [4] studied their duality with uniformly smooth convex functions; see also [68] for more details.

Yet, surprisingly, little precise information seems to be known about when they can exist on Banach spaces. For example, [68, Theorem 3.5.13], shows that a Banach space admitting a uniformly convex function whose domain has nonempty interior is reflexive, and in fact, it can be shown that such a Banach space is superreflexive —see Theorem 3.2.8 (recall that a Banach space is *superreflexive* if and only if it admits an equivalent uniformly convex norm [21]). On the other hand, [12] shows that if $\|\cdot\|$ is uniformly convex, then the function $f(x) = \|x\|^r$ for $r > 1$ is totally convex which is weaker than f being uniformly convex; see [6, 13, 14] for applications of totally convex and other related convex functions.

In the first section of this chapter we introduce, extending the notion on norms, the modulus of convexity and smoothness of a convex function and the notions of being uniformly convex and uniformly smooth.

Definition 3.1.2 (Modulus of convextity [9, Section 1]). *For a convex function $f : X \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ we set its* modulus of convexity *as the function $\delta_f : \mathbb{R}^+ \to [0, +\infty]$ defined by*

$$\delta_f(t) := \inf \left\{ \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) : \|x - y\| = t,\ x, y \in \operatorname{dom} f \right\},$$

where the infimum over the empty set is $+\infty$. A convex function f is said to be uniformly convex *if $\delta_f(\varepsilon) > 0$ for $\varepsilon > 0$.*

Definition 3.1.6 (Modulus of smoothness [9, Section 1]). *For a convex function $f : X \longrightarrow$*

$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *we set its* modulus of smoothness *as the function* $\rho_f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, +\infty)$ *defined by*

$$\rho_f(t) := \sup \left\{ \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - f\left(\frac{x+y}{2} \right) : \|x-y\| = t,\ x, y \in \operatorname{dom} f \right\},$$

where the supremum over the empty set is $+\infty$*. A convex function* f *is said to be* uniformly smooth *if* $\rho_f(\tau)/\tau \to 0$ *as* $\tau \to 0$*.*

Here is also established the relation of duality between the modulus of convexity of a convex function and the modulus of smoothness of its Fenchel conjugate. All the results and definitions in this section are already known and can be consulted in [68].

As in the case of norms, in applications we do not use often the precise value of the moduli but only a power type estimate from below or above. We say that a uniformly convex —smooth— function f has modulus of convexity —smoothness— of *power type* p if, for some $0 < K < \infty$, $\delta_f(\varepsilon) \geq K\varepsilon^p$ —$\rho_f(\tau) \leq K\tau^p$—. Using the duality between both moduli is easy to see that δ_f is of power type p if and only if ρ_{f^*} is of power type q, where $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

Along section 2 we show that the norm of a Banach space has modulus of convexity of power type p if and only if the function $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ has modulus of convexity —as a function— of power type p. This is,

Theorem 3.2.6. *Let* X *be a Banach space, and let* $2 \leq p < \infty$*. Then the following are equivalent.*

(a) *The norm* $\|\cdot\|$ *on* X *has modulus of convexity of power type* p*.*

(b) *The function* $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ *has modulus of convexity of power type* p*.*

(c) *The function* $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ *is uniformly convex.*

We also present there the dual result.

Theorem 3.2.5 *For* $1 < q \leq 2$*, the following are equivalent in a Banach space* X*.*

(a) *The norm* $\|\cdot\|$ *has modulus of smoothness of power type* q*.*

(b) *The function* $f(\cdot) = \|\cdot\|^q$ *has modulus of smoothness of power type* q*.*

(c) *The function* $f(\cdot) = \|\cdot\|^q$ *is uniformly smooth.*

For closing section 2 we will establish that a Banach space X is superreflexive if and only if there exists an uniformly convex and lower semi-continuous function defined on X. More precisely,

Theorem 3.2.8. *Let* X *be a Banach space. Then the following are equivalent.*

(a) *There exists a l.s.c. uniformly convex function* $f : X \to (-\infty, +\infty]$ *such that the interior of the domain of* f *is not empty.*

(b) X *admits an equivalent uniformly convex norm.*

(c) *There exist* $p \geq 2$ *and an equivalent norm* $\|\cdot\|$ *on* X *so that* $f(x) = \|\cdot\|^p$ *is uniformly convex.*

However if we assume that the function is moreover continuous and defined on the whole space, we can know much more information on the structure of the space. Indeed, along section 3 of this chapter we will study the relation between the growth of a uniformly convex function defined on X and the existence of good renormings. Our main theorem of this section is the following.

Theorem 3.3.4. *Let* X *be a Banach space and let* $f : X \to \mathbb{R}$ *be a non-negative continuous uniformly convex function satisfying* $f(x) \leq F(\|x\|)$ *for all* $x \in X$ *for some non-negative real function* F *with* $F(0) = 0$*. Then* X *admits an equivalent norm* $|\cdot|$ *so that*

$$\delta_{|\cdot|}(t) \geq \frac{R}{\sqrt{F(Mt^{-1})}F\left(S\sqrt{F(Mt^{-1})}\right)},$$

for some positive constants R*,*M *and* S*.*

This theorem establishes, in particular, that every space with a uniformly convex function f has a norm which is (UC) —being this a corollary of Theorem 3.2.8. However it establishes a deeper result, since it gives an estimate of the modulus of convexity of a certain renorming on X in relation with the growth of the function. In particular, as a corollary of this theorem we can easily deduce the following result.

Corollary 3.3.5. *Let* X *be a Banach space and* $f : X \to \mathbb{R}$ *a non-negative continuous uniformly convex function satisfying that* $f(x) \leq \|x\|^p$ *for some* $p \geq 2$ *and for all* $x \in X$*. Then* X *admits a norm with modulus of convexity of power type* $\frac{p}{2}(p+1)$*.*

Henceforth, if a Banach space X admit a uniformly convex function with modulus of convexity of power type p, we can define on X a norm whose modulus of convexity is of power type $\frac{p}{2}(p+1)$. Observe that for $p = 2$ this theorem implies that we can find a norm with modulus of convexity of power type 3. Then it is natural to ask if this result is sharp. This is, having a function of growth p, does there exist an equivalent norm with a modulus of convexity better than "of power type $\frac{p}{2}(p+1)$"? If this norm is of power type then the question is equivalent to having a strictly smaller power type.

Culminating section 3 of this chapter, we present a sharp result for the previous problem when $p = 2$. In this case we obtain the following result.

Theorem 3.3.7. *Let X be a Banach space and $f : X \to \mathbb{R}$ a continuous uniformly convex function satisfying $f(x) \leq \|x\|^2$ for all $x \in X$. Then X admits a norm with modulus of convexity of power type* 2.

The ideas on this Theorem are similar to those used in the others results described in this section. However, the key point of this case is the result of Figiel [24, prop. 10], this is, the fact that for a Banach space X, its modulus of convexity satisfies that $\delta_X(\varepsilon)/\varepsilon^2$ is equivalent at the origin to an increasing function. As we saw in the previous chapter this fact characterizes those functions which are equivalent to a modulus of convexity of some Banach space —see [33] for the original proof.

The method we use in this case is not useful for $p > 2$, since Figiel's result says exactly that any modulus of convexity has a local behavior which is bounded above by the quadratic function t^2.

Let us remark that the results which have been stated along this chapter are mostly taken form our paper [9].

Chapter 4. Schauder Bases Under Uniform Renormings

In this chapter we study Schauder basis within the framework of the theory of uniform renormings on Banach spaces. First of all, let us start recalling that a Schauder basis of a Banach space X is a sequence of vectors $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ such that for every $x \in X$ there is a unique sequence of coefficients $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, such that $x = \sum a_n e_n$, where the convergence of the series is in norm.

A Schauder basis gives rise to the canonical sequence of finite dimensional projections $P_n : X \to X$, $P_n(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$. A well-known and useful result on Schauder bases claims that $\{\|P_n\|\}_n$ is a bounded sequence —Prop.4.1.2—. This upper bound, denoted by $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, is called the basis constant of $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

A Schauder basis is said to be *monotone*, if the value of its basis constant is 1. The previously stated boundedness result has an equivalent reformulation in the language of renormings. Namely, a separable Banach space with a Schauder basis can be equivalently renormed so that the basis becomes monotone. The proof of this equivalence is very easy, in fact the renorming is obtained via the formula $|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|$.

Unfortunately, from the renorming point of view, $|||\cdot|||$ looses some subtler geometrical properties of the original norm. The question on the existence of "good" renormings, still making the given basis monotone, has received some attention in the past.

For example, it is well-known that every separable Banach space has an LUR renorming, in fact the collection of all equivalent LUR renormings is residual in the —metric— space of all equivalent renormings —[17]. It is therefore quite natural to expect that for every separable Banach space with a Schauder basis, there exists an equivalent LUR renorming making the basis monotone. This is indeed the case, and the proof follows along the lines of the original Kadec LUR renorming result —see [17]. Similar statements —folklore— are true also for Gâteaux or uniformly Gâteaux smooth case.

On the other hand, quite surprisingly, the situation with Fréchet smooth renormings is different. Recall that a separable Banach space has an equivalent Fréchet smooth renorming if and only if it has a separable dual. In this case, the set of Fréchet smooth renormings —whose dual norm is LUR— is again residual among all equivalent renormings, yet we present the following theorem.

Theorem 4.2.1 ([34]).*Let X be a separable Banach space with a separable dual —in particular having an equivalent Fréchet smooth renorming—, and a Schauder basis. Then X is reflexive iff for every Schauder basis of X there exists some Fréchet smooth renorming of X making the basis monotone.*

As an immediate consequence, in every non-reflexive Banach space with a separable dual and a Schauder basis —such as c_0—, there exists another Schauder basis which is not monotone under any Fréchet smooth renorming of X —in spite of the rich supply of equivalent Fréchet smooth renormings for such a space.

In section 2 of this chapter we settle in the positive the case of uniformly Fréchet smooth (UF) and uniformly rotund (UC) renormings, answering a question of Godefroy —which appears also explicitly in [23]—, communicated to us by Zizler. Indeed we obtain

Theorem 4.2.14 ([34]). *Let X be a Banach space with a Schauder basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ and a (UF)-norm $\|\cdot\|$. Then there exists an equivalent (UF) renorming $|||\cdot|||$ such that $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ is a monotone Schauder basis of $(X, |||\cdot|||)$. Moreover, the moduli of uniform smoothness of $\|\cdot\|$ and $|||\cdot|||$ are equivalent —in the sense of [24].*

Dualizing, we also obtain

Theorem 4.2.19 ([34]). *Let X be a separable superreflexive Banach space with a Schauder basis. Then there exists an equivalent (UC) renorming under which the basis is monotone.*

Moreover, for a fixed superreflexive space X with base and with modulus of convexity δ_X, we find an (UC)-renorming such that the basis is monotone and the new modulus is equivalent to δ_X.

These kind of questions can be also asked when instead of a Schauder basis we work with a basic sequence, this is, a sequence which is Schauder basis of its closed linear span.

Definition 4.2.15. A basic sequence $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ in a Banach space $(X, \|\cdot\|)$ is said to be monotone if it is monotone as a base of $Y = \overline{\text{span}}\,\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$.

In these settings one can show the following result.

Corollary 4.2.18. *Let X be a superreflexive Banach space and a basic sequence $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ in X. Then there exists an equivalent uniformly smooth renorming under which the given basic sequence is monotone.*

Techniques involved in the proof of these results are highly geometrical and intuitive. Indeed, on one hand it is based on the fact that given a Schauder Basis on a Banach space which is uniformly smooth, then, for each $n \in \mathbb{N}$ the norm defined in P_nX whose unit ball is P_nB_X is uniformly smooth. This is

Lemma 4.2.6. *For any $n \in \mathbb{N}$ there exist an explicit relation between the moduli of smoothness of $P_n(B_X)$ and B_X. This relation is, $\rho(P_n(B_X), \cdot) \leq \rho(B_X, \cdot)$.*

On the other hand, it is also based on the following idea. Given an uniformly smooth manifold A, if another manifold B satisfies that for every $x \in B$ there exist $y \in X$ and $z \in A$ such that $y + z = x$ and $y + A \subset B$, then B is also uniformly smooth and both moduli of smoothness are related. This result is consequence of the following lema, where $g(C, \cdot)$ means the Minkowski functional of the set C.

Lemma 4.2.7. *Let A and B be two balls in a linear space $\mathbb{E}$. Let $x \in \mathbb{E}$ be such that $x + B \subset A$. Then, any $z \in \mathbb{E}$ satisfies the following inequality:*

$$g(A, z) \leq g(B, z - x) + |1 - g(B, z - x)|\, g(A, x).$$

These ideas can be used in order to obtain another similar results. Recall that a Schauder Basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ is said to be unconditional if for any $x \in X$ its representation as series does not depend on the order of the elements of $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ —def.4.1.10—. If we denote by $2^{<\mathbb{N}}$ the set whose elements are the finite subsets of $\mathbb{N}$ then, for each $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ we can define a projection $P_F : X \longrightarrow X$ where $P_FX = \text{span}\,\{e_n : n \in F\}$. It follows from the uniform boundedness principle that $\{\|P_F\|\}_{F \in 2^{<\mathbb{N}}}$ is uniformly bounded and thus we can define the *unconditional constant* of $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\text{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ as the supremum of these norms.

These ideas are extensive to this case, however the result does not follow straightforward from the proof of Theorem 4.2.14. In fact, for proving Theorem 4.2.14 we built a sequence of balls $\widetilde{B}_n$ defined each of them in $\mathbb{E}_n = \text{span}\,\{e_j : 1 \leq j \leq n\}$, using the two ideas described above. This family of balls is increasing, this is $\widetilde{B}_m \cap \mathbb{E}_n = \widetilde{B}_n$ for $m \geq n$. And the key point is that we start with just one space $\mathbb{E}_1 = \text{span}\,\{e_1\}$. Now we need to follow a more complicated structure.

The same idea we applied to $\mathbb{E}_1$ must now be applied to $\mathbb{E}_{\{n\}} = \operatorname{span}\{e_n\}$ for each $n \in \mathbb{N}$ and from each of these sets we have to define for each $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ a ball $\widetilde{B}_F$ defined on $\mathbb{E}_F$ and such that the family $\{\widetilde{B}_F\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ is increasing, analogously as in the non-unconditional case.

In this case, in order to apply the first idea, we have to use a generalization of Lemma 4.2.6 which says the following.

Lemma 4.3.4. *For any set $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, there exits an explicit relation between the moduli of smoothness of $P_F(B_X)$ and B_X. This relation is $\rho(P_F(B_X),\cdot) \le \rho(B_X,\cdot)$.*

To apply the second idea we do not need further results, since it follows from Lemma 4.2.7 too. This construction allows us to obtain the following results which are analogues to Theorem 4.2.14 and Theorem 4.2.19, respectively.

Theorem 4.3.12. *Let X be a Banach space with an unconditional Schauder basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ and an (UF)-norm $\|\cdot\|$. Then there exists an equivalent (UF)-norm $|||\cdot|||$ such that $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ is unconditionally monotone in $(X, |||\cdot|||)$. Moreover, both moduli of smoothness are equivalents.*

Theorem 4.3.13. *Let X be a superreflexive Banach space with an unconditional Schauder Basis. Then there exists an equivalent (UC)-norm under which the basis is unconditionally monotone.*

An analogue to Theorem 4.2.18 for unconditional basic sequences can be stated easily following the lines of its proof.

An application

We have mentioned James-Gurariĭ-Gurariĭ's result in the section relative to chapter one, namely that for a superreflexive Banach space X there exist constants $r, s \in (0,\infty)$ such that for every Schauder bases $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ there exists a positive constant A satisfying

$$\frac{1}{A}\left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^r\right]^{\frac{1}{r}} \le \left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_ie_i\right\| \le A\left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^s\right]^{\frac{1}{s}}.$$

However this result gives no precise information of the values of r and s and the constant A depends on the bases constant of $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Buĭ-Min-Či and V.I. Gurariĭ showed three years before —see [10]— the following result

Theorem [10, Corollary 3]. *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space with a Schauder basis which is orthonormal, then for all $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_ie_i$ we have*

$$|a_S|\prod_{k=S}^{\infty}\left[1+\delta_X\left(\frac{2\,|a_{k+1}|}{3\,\|x\|}\right)\right] \le \|x\| \le |a_S|\prod_{k=S}^{\infty}\left[1+2\rho_X\left(\frac{|a_{k+1}|}{a_S}\right)\right],$$

where a_S is the first non-zero term.

The key in this result is the notion of orthogonality. Given two subspaces P and Q of X they consider the angle between P and Q as the value

$$(\widehat{P,Q}) = \inf\left\{\varrho(x,Q), x \in P, \|x\| = 1\right\},$$

where $\varrho(x,Q)$ is the Hausdorff distance between the sets Q and $\{x\}$. For two vectors x and y, they define $(\widehat{x,y}) = (\widehat{\mathrm{span}(x), \mathrm{span}(y)})$. Being $(\widehat{x,y}) = 1$ equivalent to $x \perp y$ in the sense of James —see [38].

For a basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, if we denote by $\mathbb{E}_{i,j}$ the subspace $\mathrm{span}\{e_r, i \le r \le j\}$, for $i < j$, then we say that the basis is orthogonal if $(\widehat{\mathbb{E}_{1,i}, \mathbb{E}_{i+1,j}}) = 1$, for $i < j$.

The concept of orthogonality is intrinsic to the norm and therefore this condition could be remove if we make a renorming. One can realize that the result of Buĭ-Min-Či and Gurariĭ needs the strong property of the basis being orthonormal.

However, one can easily realize that a basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ is an orthogonal basis if the constant basis is 1, this is, is the basis is monotone respect to the norm. Since we are able to construct —Theorems 4.2.14 and 4.2.19— two new norms on X, say $\|\cdot\|_1$ and $\|\cdot\|_2$, satisfying

(a) $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|_1}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \mathrm{bc}_{\|\cdot\|_2}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1.$

(b) $\delta_{(X,\|\cdot\|_1)}$ is equivalent to δ_X.

(c) $\rho_{(X,\|\cdot\|_2)}$ is equivalent to ρ_X.

Therefore one obtains that Buĭ-Min-Či and Gurariĭ's result does not depend on the orthogonality of the basis. Indeed we obtain

Theorem 4.2.21. *Let $(X, \|\cdot\|)$ be a Banach space with a Schauder basis, then there exist positive constants A, B and C such that for all $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ we have*

$$|a_S| \prod_{k=S}^{\infty}\left[1 + A\delta_X\left(B\frac{|a_{k+1}|}{\|x\|}\right)\right] \le \|x\| \le |a_S| \prod_{k=S}^{\infty}\left[1 + C\rho_X\left(\frac{|a_{k+1}|}{a_S}\right)\right],$$

where a_S is the first non-zero term.

From this result one can obtain straightforwardly several corollaries, for instance the following.

Corollary 4.2.22. *Let X be a superreflexive space with a Schauder Basis $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Then there exist positive constants A and B such that for $x = \sum_i a_i e_i$ one obtains*

$$\|x\| \ge |a_1|\left[1 + A\sum_{i=1}^{\infty}\delta_X\left(B\frac{|a_{i+1}|}{\|x\|}\right)\right].$$

These results allow us to obtain better estimates than James-Gurariĭ-Gurariĭ's one, when the modulus of convexity and smoothness are good enough.

Let us remark that the second section of this chapter is almost completely included in our paper [34]. Theorems related with basic sequences, the last application and the third section are not there and are not published anywhere else.

Chapter 5. Modulus of Squareness

This chapter is devoted to the study of the modulus of squareness and their respective localizations. The modulus of squareness, which was originally defined in [56], where it arose naturally from studying Lipschitz continuous set-valued functions, is "a modulus for all seasons", as G. Godefroy described it in [29]. The reason for this name is that this modulus is able to say at once whether or not a Banach space is uniformly convex, uniformly Fréchet smooth, uniformly non-square, etc.

In [56], the authors show —under mild hypothesis— that the intersection of a Lipschitz continuos set-valued mapping and a Lipschitz continuous ball-valued mapping is again Lipschitz continuos. If we denote by $\mathscr{C}(X)$ the family of all closed convex and nonempty subsets of X and by $\xi(\cdot)$ the modulus of squareness of X, then their main result can be established as follows.

Theorem [56, Theorem 4]. *Let S be a metric space, let X be a Banach space, and let $f : S \longrightarrow X$, $F : S \longrightarrow \mathscr{C}(X)$, and $g : S \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ be three Lipschitz mappings. Suppose that there is a $\gamma > 1$ for which $g(x) \geq \gamma d(f(x), F(x))$ for every $x \in S$. Then the intersection map $G : S \longrightarrow \mathscr{C}(X)$ defined by $G(x) = F(x) \cap B(f(x), g(x))$ is Lipschitz continuous, with its Lipschitz constant*

$$L_G \leq L_F + (L_f + L_g + L_f)\xi(1/\gamma).$$

Their main tool for the proof of this result is the *modulus of squareness.* Taking a look on its proof one can realize that the definition of such a modulus is —in a certain sense— natural.

After [56], this modulus was studied by two different and independent group of people. On the one hand C. Benitez, K. Przesławski and D. Yost —see [7]— and on the other hand Ioan Şerb —see [62, 63, 64]. The techniques used by I. Şerb are fundamentally geometrical, and he was able to give and alternative definition of the modulus in terms of the supremum over the lengths of a certain family of segments, see [62] for more details. This new characterization allowed him to call it: *tangential modulus.*

The techniques used by C. Benitez, K. Przesławski and D. Yost in [7] are more analytical and more powerful than Şerb's techniques. Indeed, they obtained a great number of properties of the modulus and among them, all the results included in [62, 63, 64].

Let us introduce the definition of this modulus. In order to do so, let us observe that given a normed space X, and for any x, $y \in X$ with $\|y\| < 1 < \|x\|$, there is a unique $z = z(x, y)$ in the line segment $[x, y]$ with $\|z\| = 1$. We put

$$\omega(x, y) = \frac{\|x - z(x, y)\|}{\|x\| - 1}$$

and define $\xi = \xi_X : [0, 1) \to [1, \infty]$ by

$$\xi(\beta) = \sup\{\omega(x, y) : \|y\| \leq \beta < 1 < \|x\|\}.$$

We will say that ξ_X is the *modulus of squareness* of the normed space X. It is shown in [56] that for an inner product space, $\xi(\beta) = \xi_2(\beta) = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$, and that for any normed space containing $l_1(2)$, $\xi(\beta) = \xi_1(\beta) = (1 + \beta)/(1 - \beta)$.

The following theorem [7, Theorem O] puts together all the known properties of this modulus.

Theorem 5.1.2. *Let X be any normed space, ξ its modulus of squareness. Then*

(a) $\xi(\beta) = \sup\{\xi_M(\beta) : M \subset X, \dim M = 2\}$,

(b) ξ is strictly increasing and convex,

(c) $\xi < \xi_1$ everywhere on $(0, 1)$, unless X contains arbitrarily close copies of $l_1(2)$,

(d) $\xi' \leq \xi_1'$ almost everywhere on $(0, 1)$,

(e) $\xi > \xi_2$ everywhere on $(0, 1)$, unless X is an inner product space,

(f) X is uniformly convex if and only if $\lim_{\beta \to 1}(1 - \beta)\xi(\beta) = 0$,

(g) X is uniformly smooth if and only if $\xi'(0) = 0$,

(h) $\xi_{X^*}(\beta) = 1/\xi^{-1}(1/\beta)$, for $\beta \in [0, 1)$,

(i) if $\xi(\beta) < 1/(1 - \beta)$ for some β, then X has uniformly normal structure.

The proof of these properties can be found in [7, 56] and also some of them in [62, 63, 64]. Let us observe in particular that the behaviour of ξ near one is related to convexity, and that the behaviour of ξ near zero is related to smoothness.

An analogue to Ivanov-Troyanski's Theorem

Figiel and Pisier [26] showed that any Banach space which admits an equivalent (UF)-norm of power type 2 and an equivalent (UC)-norm of power type 2, is necessarily isomorphic to a Hilbert space. This is, admits an inner product norm.

Rakov [57] showed that if δ_X satisfies $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ for $c > 0, .1076$ and for $\varepsilon > 0$ small enough, then X admits and equivalent (UF)-norm of power type q, whenever $2-q \geq \sqrt[4]{1-8c}$, for some constant k.

In [37], M. Ivanov and S. Troyanski obtain an improvement of Rakov's estimation, using the techniques in [44, 57]. Their theorem is the following.

Theorem 5.2.1 [37, Theorem 1.1]. *There exists an universal constant k_1 such that if a Banach space X satisfies*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \geq \frac{1}{8(1+b)}$$

for some $b \geq 0$, then X admits an equivalent (UF)-norm of power type

$$q = 1 + \frac{1}{1+k_1 b}.$$

Whether or not can be established an analogue of Theorem 5.2.1 in terms of the modulus of squareness, is a question posed in [37, Observ. 1.5]. Looking carefully to the main properties of ξ one can realize that using Theorem 5.2.1, duality and the *equivalence* in the origin between the modulus of squareness ξ_X and the modulus of smoothness ρ_X —see [7]—, can be obtained the following result.

Theorem 5.2.6. *There exists an universal constant k_1 such that if a Banach space X satisfies $B(X) < \infty$ then X admits an equivalent (UF)-norm of power type $q = 1 + \frac{1}{1+k_1 B}$.*

where

$$B(X) := 2 \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{1 - \xi_X^{-1}(1/\tau)}{\tau^2 \xi_X^{-1}(1/\tau)} - 1.$$

The constant k_1 in Theorem 5.2.1 could not be possibly be less than one, since for the ℓ_p spaces the theorem is satisfied by 1. That is, the conclusion of Theorem 5.2.1 is sharp up to the multiplicative constant k_1, when $b \to 0$ as well as when $b \to \infty$. Thus in actual fact Theorem 5.2.1 reveals that, asymptotically, the behaviour of any space is the same as that of ℓ_p. However, for our constant $B(X)$ is not known if Theorem 5.2.6 is also sharp up to k_1, when $B \to 0$ or when $B \to \infty$.

It seems interesting to find an alternative proof of Theorem 5.2.6 without using Theorem 5.2.1.

Localization of the modulus of squareness

The question of the existence of a sensible *localization* of the modulus of squareness was posed in [7]. This is, they asked for new moduli which characterize at once local properties of convexity and smoothness. For example, *local uniform convexity* and *Fréchet smoothness* or *strict convexity* and *Gâteaux smoothness.* In order to answer this question we define here two new moduli.

For any norm one vector x, $\lambda > 0$ and y with $\|y\| < 1$, we will put $\omega_x(\lambda, y) = \omega((1+\lambda)x, y)$ and $z_x(\lambda, y) = z((1+\lambda)x, y)$. Therefore $\omega_x(\lambda, y) = \|(1+\lambda)x - z_x(\lambda, y)\| /\lambda$. Besides, we can deduce that for $y \in \operatorname{span}\{x\}$ and for any $\lambda > 0$, $\omega_x(\lambda, y) = 1$, since $z_x(\lambda, y)$ would be x.

Definition 5.3.1 (Pointwise modulus of squareness). For any pair of norm one vectors x, y the *pointwise modulus of squareness at x in the direction y* is the function $\xi_{X,x,y} = \xi_{x,y} : [0, 1) \to [1, \infty)$ defined by

$$\xi_{x,y}(\beta) = \sup\{\omega_x(\lambda, \gamma y) : |\gamma| \leq \beta, \lambda > 0\}.$$

Definition 5.3.2 (Local modulus of squareness). For any norm one vector x the *local modulus of squareness at x* is the function $\xi_{X,x} = \xi_x : [0, 1) \to [1, \infty)$ defined by

$$\xi_x(\beta) = \sup\{\omega_x(\lambda, y) : \|y\| \leq \beta, \lambda > 0\} = \sup_{\|y\|=1} \{\xi_{x,y}(\beta)\}.$$

These moduli are continuous, in fact, locally Lipschitz continuous and, indeed they are also "moduli for all seasons" since we have the following results.

On Differentiability

Let us first recall that a normed space is: *Gâteaux smooth at $x \in S_X$ in the direction $y \in S_X$* iff $\varrho_{x,y}(\beta)/\beta \to 0$ as $\beta \to 0$; *Gâteaux smooth at $x \in S_X$* iff it is Gâteaux smooth at x in every direction $y \in S_X$; *Gâteaux smooth* iff it is Gâteaux smooth at any $x \in S_X$; *Fréchet smooth at $x \in S_X$* iff $\varrho_x(\beta)/\beta \to 0$ as $\beta \to 0$; and *Fréchet smooth* iff it is Fréchet smooth at any $x \in S_X$. Throughout this chapter we proof the following result.

Theorem 5.3.15. *Let ξ_x and $\xi_{x,y}$ be the localized squareness moduli of X. Then*

(a) X is Gâteaux smooth at $x \in S_X$ in the direction $y \in S_X$ if and only if ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$.

(b) X is Gâteaux smooth at $x \in S_X$ if and only if ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$ for all $y \in S_X$.

(c) X is Gâteaux smooth if and only if ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$ for all pairs x, $y \in S_X$.

(d) X is Fréchet smooth at $x \in S_X$ if and only if ${\xi_x}'(0) = 0$.

(e) X is Fréchet smooth if and only if ${\xi_x}'(0) = 0$ for all $x \in S_X$.

On Convexity

First of all let us mention the *local uniform rotundity* case. In order to do this, recall that the *radius* of a set A relative to a point x is defined by $\text{rad}(x, A) = \sup_{a \in A} \|x - a\|$. It is clear that $\text{diam}(A)/2 \leq \text{rad}(x, A) \leq \text{diam}(A)$ whenever $x \in A$. For $\|x\| = 1$ and $0 < \beta < 1$, Kadets [42] defined the set $G(x, \beta) = \{y : [y, z] \subset B_X \setminus \beta \overset{\circ}{B}_X\}$, and noted that X is locally uniformly convex at x iff $\text{rad}(x, G(x, \beta)) \to 0$ as $\beta \to 1$. Moreover it is known that the function $\epsilon(x, \beta) = \text{rad}(x, G(x, \beta))$ is uniformly continuous on the set $S_X \times [0, r]$ for all $r < 1$ and that ϵ is continuous at $(x, 1)$ if the norm is locally uniformly convex at $x \in S_X$ —see [8, 31].

Local modulus of squareness is able to characterize *local uniform rotundity* through its behaviour near 1. Indeed, we obtain

Theorem 5.3.17. *For any normed space X and for any $x \in S_X$, the following are equivalent :*

- *(a)* *X is locally uniformly convex at x.*
- *(b)* $\text{diam}\, G(x, \beta) \to 0$ *as* $\beta \to 1$.
- *(c)* $\text{diam}\, R(x, \beta) \to 0$ *as* $\beta \to 1$.
- *(d)* $\limsup_{\beta \to 1} (1 - \beta) \xi_x(\beta) = 0$.
- *(e)* $\liminf_{\beta \to 1} (1 - \beta) \xi_x(\beta) = 0$.

The norm of X is said to be *strictly convex at x in the direction w* if there is no proper segment included on the unit sphere starting at x with direction w. Similarly, it is said to be *strictly convex at x* if there is no proper segment included in the unit sphere starting at x in any direction. X is said to be *strictly convex* if it is strictly convex at all its norm one vectors. We define the number $\varepsilon_0(x, w)$ as the supremum of all those $\varepsilon > 0$ such that the segment $[x, x + \varepsilon w]$ or $[x, x - \varepsilon w]$ is included on the unit sphere. We also define the set $C_x^w = \{y \in S_X : \exists \lambda \in \mathbb{R},\, y = x + \lambda w\}$.

Proposition 5.3.19. *Let X be a normed space and x, $w \in S_X$. If $\liminf_{\beta \to 1} (1 - \beta) \xi_{x,y}(\beta) = 0$ for all $y \in C_x^w$, then X is strictly convex at x in the direction w. Moreover,*

$$\sup_{y \in C_x^w} \liminf_{\beta \to 1} (1 - \beta) \xi_{x,y}(\beta) \geq \varepsilon_0(x, w).$$

The following theorem follows easily from the previous proposition and establishes that the behaviour of the *pointwise modulus of squareness* near 1 characterizes the *strict convexity at a ponint.*

Theorem 5.3.20. *For any normed space X and for any $x \in S_X$ the following are equivalent :*

(a) X *is strictly convex at* x.

(b) $\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *for all* $y \in S_X$.

(c) $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *for all* $y \in S_X$.

The following result is simply a corollary from the previous theorem. It establishes that the *pointwise modulus of squareness* characterizes the *strict convexity.*

Theorem 5.3.21. *For any normed space* X *the following are equivalent :*

(a) X *is strictly convex.*

(b) $\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *for all* $x, y \in S_X$.

(c) $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *for all* $x, y \in S_X$.

Let us remark that the results we include in this chapter are mostly taken from our paper [32]. The analogue of Ivanov-Troyanski's Theorem is not published elsewhere.

Bibliography

[1] J. Alonso and C. Benítez. Some characteristic and noncharacteristic properties of inner product spaces. *J. Approx. Theory*, 55(3):318–325, 1988.

[2] E. Asplund. Averaged norms. *Israel J. Math.*, 5:227–233, 1967.

[3] E. Asplund. Fréchet differentiability of convex functions. *Acta Math.*, 121:31–47, 1968.

[4] D. Azé and J. Penot. Uniformly convex and uniformly smooth convex functions. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 4(4):705–730, 1995.

[5] S. Banach. *Theory of linear operations*, volume 38 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. Translated from the French by F. Jellett, With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga.

[6] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes. Essential smoothness, essential strict convexity, and convex functions of Legendre type in Banach spaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, 3:615–648, 2001.

[7] C. Benítez, K. Przesławski, and D. Yost. A universal modulus for normed spaces. *Studia Math.*, 127(1):21–46, 1998.

[8] C. Bessaga and A. Pełczyński. *Selected topics in infinite-dimensional topology.* PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975. Monografie Matematyczne, Tom 58. [Mathematical Monographs, Vol. 58].

[9] J. Borwein, A. J. Guirao, P. Hájek, and J. Vanderwerff. Uniformly convex functions on Banach spaces. *Preprint*, 2007.

[10] Buĭ-Min-Či and V. I. Gurariĭ. Certain characteristics of normed spaces and their application to the generalization of Parseval's equality to Banach spaces. *Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp.*, 8:74–91, 1969. (Russian).

[11] H. Busemann. *The geometry of geodesics.* Academic Press Inc., New York, N. Y., 1955.

[12] D. Butnariu, A. N. Iusem, and E. Resmerita. Total convexity for powers of the norm in uniformly convex Banach spaces. *J. Convex Anal.*, 7(2):319–334, 2000.

[13] D. Butnariu, A. N. Iusem, and C. Zălinescu. On uniform convexity, total convexity and convergence of the proximal point and outer Bregman projection algorithms in Banach spaces. *J. Convex Anal.*, 10(1):35–61, 2003.

[14] D. Butnariu and E. Resmerita. Bregman distances, totally convex functions, and a method for solving operator equations in Banach spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 84919, 39, 2006.

[15] J. A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(3):396–414, 1936.

[16] M. M. Day. Some characterizations of inner-product spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62:320–337, 1947.

[17] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler. *Smoothness and renormings in Banach spaces*, volume 64 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics*. Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[18] J. Diestel. *Geometry of Banach spaces—selected topics.* Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485.

[19] J. Duda, L. Veselý, and L. Zajíček. On d.c. functions and mappings. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 51(1):111–138, 2003.

[20] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. In *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*, pages 123–160. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, 1961.

[21] P. Enflo. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. In *Proceedings of the International Symposium on Partial Differential Equations and the Geometry of Normed Linear Spaces (Jerusalem, 1972)*, volume 13, pages 281–288 (1973), 1972.

[22] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, and V. Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

[23] M. Fabian, V. Montesinos, and V. Zizler. Smoothness in Banach spaces. Selected problems. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 100(1-2):101–125, 2006.

[24] T. Figiel. On the moduli of convexity and smoothness. *Studia Math.*, 56(2):121–155, 1976.

[25] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. D. Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. *Acta Math.*, 139(1-2):53–94, 1977.

[26] T. Figiel and G. Pisier. Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 279:611–614, 1974.

[27] J. Gao. Modulus of convexity in Banach spaces. *Appl. Math. Lett.*, 16(3):273–278, 2003.

[28] J. Gao and Ka-Sing Lau. On two classes of Banach spaces with uniform normal structure. *Studia Math.*, 99(1):41–56, 1991.

[29] G. Godefroy. Renormings of Banach spaces. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I*, pages 781–835. North-Holland, Amsterdam, 2001.

[30] K. Goebel. Convexivity of balls and fixed-point theorems for mappings with nonexpansive square. *Compositio Math.*, 22:269–274, 1970.

[31] A. J. Guirao. Topological clasification of Banach spaces. *Published by University of Murcia*, 2005.

[32] A. J. Guirao. On the local moduli of squareness. *Preprint*, 2006.

[33] A. J. Guirao and P. Hájek. On the moduli of convexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, pages –, To appear.

[34] A. J. Guirao and P. Hájek. Schauder bases under uniform renormings. *Positivity*, pages –, To appear.

[35] V. I. Gurariĭ. Differential properties of the convexity moduli of Banach spaces. *Mat. Issled.*, 2(vyp. 1):141–148, 1967. (Russian).

[36] V. I. Gurariĭ and N. I. Gurariĭ. Bases in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35:210–215, 1971. (Russian).

[37] M. Ivanov and S. Troyanski. Uniformly smooth renorming of Banach spaces with modulus of convexity of power type 2. *J. Funct. Anal.*, 237(2):373–390, 2006.

[38] R. C. James. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61:265–292, 1947.

[39] R. C. James. Some self-dual properties of normed linear spaces. In *Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1967)*, pages 159–175. Ann. of Math. Studies, No. 69. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1972.

[40] R. C. James. Super-reflexive Banach spaces. *Canad. J. Math.*, 24:896–904, 1972.

[41] M. I. Kadec. Unconditionally convergent series in a uniformly convex space. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 11(5(71)):185–190, 1956.

[42] M. I. Kadec. A proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1:61–70, 1967.

[43] Tae Hwa Kim and W. A. Kirk. Fixed point theorems for Lipschitzian mappings in Banach spaces. *Nonlinear Anal.*, 26(12):1905–1911, 1996.

[44] K. Kirchev and S. Troyanski. On some characterisations of spaces with scalar product. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 28:445–447, 1975.

[45] M. A. Krasnosel′skiĭ and Ja. B. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces.* Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[46] S. Kwapień. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.*, 44:583–595, 1972. Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI.

[47] E. S. Levitin and B. T. Poljak. Convergence of minimizing sequences in problems on the relative extremum. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 168:997–1000, 1966.

[48] J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces. *Michigan Math. J.*, 10:241–252, 1963.

[49] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[50] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. II*, volume 97 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas].* Springer-Verlag, Berlin, 1979. Function spaces.

[51] V. I. Liokumovič. Existence of B-spaces with a nonconvex modulus of convexity. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, (12(139)):43–49, 1973. (Russian).

[52] R. P. Maleev and S. L. Troyanski. On the moduli of convexity and smoothness in Orlicz spaces. *Studia Math.*, 54(2):131–141, 1975.

[53] G. Nordlander. The modulus of convexity in normed linear spaces. *Ark. Mat.*, 4:15–17 (1960), 1960.

[54] G. Pisier. Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel J. Math.*, 20(3-4):326–350, 1975.

[55] S. Prus. Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 40(1):128–135, 1991.

[56] K. Przesławski and D Yost. Lipschitz retracts, selectors, and extensions. *Michigan Math. J.*, 42(3):555–571, 1995.

[57] S. A. Rakov. Uniformly smooth renormings of uniformly convex Banach spaces. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 135:120–134, 1984. Investigations on linear operators and the theory of functions, XIII.

[58] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics*. Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[59] R. T. Rockafellar. *Convex analysis*. Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

[60] J. J. Schäffer. *Geometry of spheres in normed spaces*. Marcel Dekker Inc., New York, 1976. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, No. 20.

[61] D. A. Senechalle. Euclidean and non-Euclidean norms in a plane. *Illinois J. Math.*, 15:281–289, 1971.

[62] I. Şerb. On the behaviour of the tangential modulus of a Banach space. I. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 24(1-2):241–248, 1995.

[63] I. Şerb. On the behaviour of the tangential modulus of a Banach space. II. *Mathematica*, 38(61)(1-2):199–207, 1996.

[64] I. Şerb. A Day-Nordlander theorem for the tangential modulus of a normed space. *J. Math. Anal. Appl.*, 209(2):381–391, 1997.

[65] K. R. Stromberg. *Introduction to classical real analysis*. Wadsworth International, Belmont, Calif., 1981. Wadsworth International Mathematics Series.

[66] Y. Yamasaki. A simple proof of Kwapień's theorem. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 20(6):1247–1251, 1984.

[67] C. Zălinescu. On uniformly convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 95(2):344–374, 1983.

[68] C. Zălinescu. *Convex analysis in general vector spaces*. World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.

[69] M. Zippin. A remark on bases and reflexivity in Banach spaces. *Israel J. Math.*, 6:74–79, 1968.

[70] V. Zizler. Nonseparable Banach spaces. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*, pages 1743–1816. North-Holland, Amsterdam, 2003.

Capítulo 1

Introducción y Preliminares

Renormar un espacio de Banach consiste en substituir la norma —definición 1.1.1— original del espacio por otra que posea mejores —y en ocasiones peores— propiedades de convexidad, diferenciabilidad o de ambas a un tiempo.

El proceso en sí es, por naturaleza, geométrico. En efecto, estamos substituyendo la bola unidad —sección 1.1— original por una nueva bola diferente en su forma . Así pues, la intuición geométrica es muy útil. Sin embargo el punto de vista analítico es esencial, encontrándonos que las demostraciones de los resultados encierran complicadas estimaciones.

Obtener estimaciones en espacios de Banach generales es complicado puesto que carecemos de bases y, por ende, de sistemas de coordenadas. Esto nos lleva a manejar propiedades topológicas. Estas estimaciones deben ser, por tanto, globales y estar basadas en funciones que no dependan de coordenadas, como por ejemplo las distancias a conjuntos convexos. A su vez, estos métodos globales nos permiten construir normas especiales. El hecho de que muchas clases de isomorfía importantes admitan caracterizaciones naturales en términos de la existencia de ciertas normas equivalentes, ejemplifica estos comentarios.

Las normas que disfrutan de buenas propiedades de convexidad y/o diferenciabilidad pueden computarse bajo condiciones topológicas naturales. Éstas, a veces, se obtienen mediante argumentos de dualidad, estando así, fuertemente conectadas a la estructura lineal del espacio. De la misma forma, estas normas pueden utilizarse para construir diversos tipos de funciones definidas en el espacio, mediante operaciones usuales del análisis, tales como: la composición de funciones reales o el uso de supremos e ínfimos. Y así, permiten comprender mejor un espacio de Banach como variedad diferenciable infinito-dimensional o como espacio métrico.

El renormamiento es, pues, un nexo de unión entre la teoría de isomorfía y la teoría isométrica de los espacios de Banach. Por un lado, la asunción de hipótesis isomórficas permiten construir —a veces, de forma natural— normas que, a su vez, aportan información sobre la clase de isomorfía a la que pertenece el espacio. Por otro lado, las propiedades de la norma —aún como objeto isométrico— aporta información sobre la clase de isomorfía —véase la sección 1.2.

Recomendamos [29], para aquellos lectores que quieran familiarizarse con la teoría de renormamiento. Este artículo, escrito por G. Godefroy abarca de forma magistral y no demasiado técnica los principales resultados de la teoría de renormamiento, centrándose en la teoría separable. Para el caso no separable, recomendamos [70] escrito por V. Zizler y también de referencia para aquel que quiere iniciarse y/o profundizar en la teoría de renormamientos. Para un conocimiento más profundo en el área y lugar donde encontrar las herramientas fundamentales utilizadas en esta teoría, recomendamos los textos [17, 22].

Esta memoria se adentra en la teoría de renormamientos en espacios de Banach. A lo largo de ella utilizaremos resultados y conceptos que son bien conocidos para aquellos lectores familiarizados con esta teoría. Por tanto, recomendamos al lector conocedor de ésta que omita la lectura del resto de este capítulo.

1.1 Conceptos fundamentales.

Conceptos tales como *norma*, *espacio de Banach*, *bola unidad*,..., son bien conocidos para el lector conocedor del análisis funcional. Con la intención de hacer la tarea menos ardua a aquellos lectores que no lo están, presentamos aquí los siguientes conceptos.

Definición 1.1.1. Una función p definida en un espacio vectorial X se dice que es un *funcional sublineal y positivamente homogéneo* si para todo par de vectores $x, y \in X$ y para todo escalar $\alpha \geq 0$ satisface

$$p(\alpha x) = \alpha p(x) \text{ y } p(x + y) \leq p(x) + p(y).$$

Si además, $p(\alpha x) = |\alpha|\, p(x)$ para todo $x \in X$ y para todo escalar α, entonces p se dice que es una *seminorma* en X. Una seminorma p que satisface que $p^{-1}(0) = \{0\}$ recibe el nombre de *norma*.

Un espacio normado es un par $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ una norma definida en X. Un espacio de Banach es un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ que es completo respecto de la métrica canónica $\rho(x, y) = \|x - y\|$.

Dado un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, la *bola unidad* de $(X, \|\cdot\|)$ a la que denotaremos por $B_{(X,\|\cdot\|)}$ es el conjunto $\{x \in X : \|x\| \leq 1\}$. La *esfera unidad* de $(X, \|\cdot\|)$ a la que denotaremos por $S_{(X,\|\cdot\|)}$ es el conjunto $\{x \in X : \|x\| = 1\}$. Cuando se sobrentienda la norma, denotaremos estos conjuntos por B_X y S_X, respectivamente.

Dado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se define su dual X^* como el espacio vectorial formado por las aplicaciones $x^* : X \to \mathbb{K}$ lineales y continuas, dotado de la norma $\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| : x \in B_X\}$. Este espacio normado es completo y, por tanto, de Banach. De la misma forma, se define el espacio bidual de X como el espacio de las aplicaciones lineales y continuas sobre el dual, esto es, el dual de X^*. Denotaremos este espacio por X^{**}.

El siguiente resultado fundamental es consecuencia directa del teorema de Hahn-Banach —[5] o [22, Teorema 2.4].

Lema 1.1.2. *Todo espacio de Banach X está isométricamente embebido en su bidual mediante la isometría $\pi : X \longrightarrow X^{**}$ definida por*

$$\pi(x)(x^*) = x^*(x),$$

para cada $x \in X$ y para cada $x^* \in X^*$.

Definición 1.1.3. Un espacio de Banach X se dice que es *reflexivo* si la isometría canónica π es biyectiva.

La topología inducida por la norma es, en ocasiones, demasiado fuerte para poder obtener propiedades interesantes, en particular, la bola unidad es compacta en norma si y sólo si el espacio es finito-dimensional. Sin embargo, la estructura lineal nos permite definir ciertas topologías más débiles que la de la norma y que suponen una herramienta fuerte en el análisis funcional.

Definición 1.1.4. Dado un espacio de Banach X, la topología débil u ω será aquella que tiene como subbase de topología los conjuntos

$$V(f, x, \varepsilon) = \{y \in X : |f(x-y)| < \varepsilon\},$$

para todo $x \in X$, $f \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Esta topología se denota en ocasiones $\sigma(X, X^*)$.

De la misma forma en el espacio dual X^* se define la topología ω^* o débil* como aquella cuya subbase está formada por los conjuntos

$$V(x, x^*, \varepsilon) = \{y^* \in X^* : |(y^* - x^*)(x)| < \varepsilon\},$$

para todo $x \in X$, $x^* \in X^*$ y $\varepsilon > 0$. Esta topología se denota en ocasiones $\sigma(X^*, X)$.

Definición 1.1.5. Un conjunto C de un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se dice que está *acotado* si $\sup\{\|x\| : x \in C\}$ es finito.

La *bola unidad* de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es un conjunto convexo y centralmente simétrico. Por definición, está acotado, es cerrado y contiene al origen como punto interior. No en vano, estas propiedades caracterizan las *bolas unidad* de los distintos espacios de Banach. Para ver esto es necesario definir el siguiente funcional.

Definición 1.1.6 ([22, Def. 2.10])**.** Sea C un conjunto en un espacio de Banach X. Definimos el funcional de Minkowski de C, como la función $\mu_C : X \to \mathbb{R}$ definida para cada $x \in X$ por

$$\mu_C(x) := \text{ínf}\{\lambda > 0 : x \in \lambda C\}.$$

Obviamente, $\mu_C(x) \geq 0$ para todo $x \in X$, pero en general puede ocurrir que $\mu_C = \infty$ para conjuntos grandes de X. El siguiente lema establece las propiedades principales del funcional de Minkowski.

Lema 1.1.7 ([22, Lem. 2.11])**.** *Sea C un conjunto convexo en un espacio de Banach X. Si C contiene al origen como punto interior, entonces el funcional de Minkowski μ_C es un funcional sublineal, positivamente homogéneo y finito. Más aún,*

$$\{x : \mu_C(x) < 1\} \subset C \subset \{x : \mu_C(x) \leq 1\}.$$

Corolario 1.1.8. *Sea B un conjunto convexo y centralmente simétrico en un espacio de Banach X. Si el origen es un punto interior de C, entonces el funcional de Minkowski μ_C es una seminorma en X. Además si C está acotado μ_C es una norma en X.*

Fijado un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$, el corolario 1.1.8 establece una biyección entre los subconjuntos C de X que son convexos, cerrados, centralmente simétricos, acotados y que contienen al origen como punto interior y las posibles normas definibles en X. En efecto, por un lado dada una norma $\|\cdot\|$ en X su *bola unidad* es uno de estos conjuntos. Por otro lado un subconjunto C de estas características define, vía el funcional de Minkowski una norma en X cuya *bola unidad* coincide con C.

A lo largo de esta memoria utilizaremos con frecuencia los conjuntos de los que hemos estado hablando. Así pues, teniendo en cuenta el paralelismo existente entre ellos y las *bolas unidad*, definimos.

Definición 1.1.9. Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado. Un subconjunto C de X se dice que es una *bola* de X si es cerrado, convexo, acotado, centralmente simétrico y contiene al origen como punto interior.

El funcional de Minkowski es una herramienta que ha recibido mucha atención en el estudio de la geometría de los espacios normados, en particular de los espacios de Banach. Esto se debe al paralelismo establecido *bola-norma* que en realidad puede entenderse como un paralelismo *geométrico-analítico*. En efecto, las normas abordan el estudio de la geometría de los espacios de Banach en una dirección analítica. En cambio, las *bolas* permiten trabajar con la geometría del espacio en estado puro.

En la teoría de espacios vectoriales finito-dimensionales y de su geometría se ha hecho un amplio uso del funcional de Minkowski. Sin embargo en la mayoría de los textos de este campo este funcional recibe el nombre de *funcional gauge* siendo estándar el uso de la notación $g(C,x)$ en vez de $\mu_C(x)$. Así pues, dada una *bola* B de un espacio normado X denotaremos la norma cuya *bola unidad* es B, por $g(B,\cdot)$ o $\mu_B(\cdot)$ de forma indistinta. Y haremos referencia, también indistintamente, a esta norma como el *funcional de Minkowski* o el *funcional gauge*.

1.2 Renormamientos.

En la sección 1.1 hemos definido un espacio de Banach, como un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ de forma que la métrica inducida por la norma $\|\cdot\|$ es completa. Es decir, entendemos los espacios de Banach no sólo como espacios topológicos completos si no también como objetos con geometría, geometría que viene dada por la norma. En este caso, en términos de la teoría de categorías, la categoría de los espacios de Banach BAN sería aquella cuyos objetos son los espacios de Banach y cuyos morfismos son las isometrías entre ellos, donde

Definición 1.2.1. Dados dos espacios de Banach $(X_1, \|\cdot\|_1)$ y $(X_2, \|\cdot\|_2)$, una isometría entre ellos es una aplicación lineal $\varphi : X_1 \to X_2$ tal que para todo $x \in X_1$,

$$\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_1 .$$

Es decir, dos objetos en la categoría BAN se consideran "iguales" si y solamente si existe una isometría entre ellos que sea biyectiva. Esto implica que la topología sigue siendo la misma pero también que la estructura geométrica de los objetos se mantiene inalterable.

Existe una definición alternativa de la categoría de los espacios de Banach que denotaremos BAN_1, cuyos objetos son los espacios de Banach y cuyos morfismos son las aplicaciones lineales continuas entre ellos. Dos objetos en esta categoría se consideran "iguales" si existe un isomorfismo lineal, es decir una aplicación lineal biyectiva y continua. En este caso, la topología sigue siendo la misma pero la estructura geométrica parece haber desaparecido. Sin embargo nuestros morfismos son aplicaciones lineales, continuas y, por tanto, no exclusivamente continuas, con lo que dos objetos iguales en esta categoría tienen algo más en común además que su topología. En efecto, tienen en común la estructura lineal.

Es claro que si tenemos un objeto en BAN que no posee una cierta propiedad geométrica, no puede encontrarse un objeto "igual" que sí la posea. Sin embargo, en la categoría BAN_1 este tipo de preguntas si que tienen sentido. Es más, dada una propiedad geométrica $\mathscr{P}$, ¿El objeto $(X, \|\cdot\|)$ es "igual" a algún objeto con la propiedad $\mathscr{P}$?¿cuáles son los objetos que son "iguales" a alguno que satisfaga la propiedad $\mathscr{P}$?. Este tipo de cuestiones son las que se suelen plantear en la teoría de renormamientos en espacios de Banach.

Definición 1.2.2. Sea X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ dos normas definidas en él. Diremos que estas dos normas son equivalentes si existen constantes positivas A y B tales que para todo $x \in X$

$$A\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq B\,\|x\|_1 .$$

Equivalentemente, si la aplicación identidad $Id : (X, \|\cdot\|_1) \to (X, \|\cdot\|_2)$ es un isomorfismo lineal.

De esta definición se deduce que el espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_1)$ es "igual" en la categoría BAN_1 a $(X, \|\cdot\|_2)$. En efecto, en general si un espacio $(X, \|\cdot\|)$ tiene una norma equivalente $|||\cdot|||$ entonces los objetos $(X, \|\cdot\|)$ y $(X, |||\cdot|||)$ son "iguales". Y si tenemos dos objetos que son "iguales" $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ en BAN_1 entonces $(Y, \|\cdot\|_Y)$ se identifica isométricamente con $(X, |\cdot|)$ para cierta norma $|\cdot|$ equivalente a $\|\cdot\|_X$. La prueba de estas afirmaciones es sencilla y estándar y se dejan al lector.

Así pues, con lo que hemos venido diciendo a lo largo de esta sección, finalmente podemos describir el proceso de renormar un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ como encontrar una norma equivalente $|||\cdot|||$ en X —equivalentemente, un objeto $(Y, \|\cdot\|_Y)$ isomorfo a $(X, \|\cdot\|)$— que tenga algunas propiedades geométricas que sean de interés.

El renormamiento es, pues, un nexo entre la teoría isométrica —BAN— y la teoría isomórfica —BAN_1— de los espacios de Banach.

Supongamos una propiedad $\mathscr{P}$, si un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ es "igual"—esto es, linealmente isomorfo— a otro espacio de Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ que satisface la propiedad $\mathscr{P}$, diremos indistintamente que X es $\langle \mathscr{P} \rangle$, que X es "*$\mathscr{P}$-renormable*", que X admite un "*$\mathscr{P}$-renormamiento*" o que "*existe una norma equivalente $\mathscr{P}$*".

1.2.1 Convexidad y Diferenciabilidad.

Entre las propiedades geométricas que se han estudiado en relación al problema del renormamiento se pueden distinguir dos líneas bien diferenciadas: *convexidad* y *diferenciabilidad*. A pesar de la separación conceptual que suponen estas dos vertientes, pueden establecerse relaciones de dualidad entre ellas. Este aspecto será debidamente justificado más adelante en la exposición. Ahora vamos a definir algunas de estas propiedades teniendo en cuenta para ello el paralelismo establecido en la sección anterior entre normas y *bolas*. A lo largo de esta sección $(X, \|\cdot\|)$ será un espacio de Banach. La mayoría de los conceptos siguientes pueden encontrarse definidos en [17, 22]

En primer lugar veamos algunas propiedades relacionadas con la convexidad.

Definición 1.2.3. Se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es *estrictamente convexo* o *rotundo*, (R) para abreviar, si la esfera unidad S_X no contiene ningún segmento propio. Esto es, si dados x, $y \in X$ con $\|x\| = \|y\| = 1$ y tal que $\|x + y\| = 2$ entonces $x = y$.

Se dice que X es *localmente uniformemente convexo* o *localmente uniformemente rotundo*, (LUR) para abreviar, si para cualquiera $x \in B_X$ y $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_X$ tal que

$$\lim_{n\to\infty} 2(\|x\|^2 + \|x_n\|^2) - \|x + x_n\|^2 = 0,$$

se tiene que $\lim_n \|x_n - x\| = 0$.

Se dice que X es *uniformemente convexo*, (UC) para abreviar, si para cualquier par de sucesiones $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B_X$ que satisfacen

$$\lim_{n\to\infty} 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2) - \|x_n + y_n\|^2 = 0,$$

se tiene que $\lim_n \|x_n - y_n\| = 0$.

Veamos ahora algunas de las propiedades relacionadas con la diferenciabilidad

Definición 1.2.4 ([22, Def. 8.1])**.** Sea f una función real definida en un abierto U de un espacio de Banach X. Sea $x \in U$. Diremos que f es *Gâteaux diferenciable* en x si existe $F \in X^*$ tal que

$$\lim_{t\to 0} \frac{f(x + th) - f(x)}{t} = F(h), \tag{1.2.1}$$

para cada $h \in X$.

Diremos que f es *Fréchet diferenciable* en x si este límite es uniforme para $h \in S_X$.

Llamamos a F la derivada Gâteaux o Fréchet de f en x y la denotaremos por $F = f'(x)$.

Definición 1.2.5. Se dice que $(X, \|\cdot\|)$ es Fréchet —resp. Gâteaux — diferenciable, para abreviar (F) —resp. (G)—, si $\|\cdot\|$ es Fréchet —resp. Gâteaux — diferenciable en todo $x \in X \setminus \{0\}$.

Diremos que X es *Uniformemente Fréchet diferenciable*, o (UF) para abreviar, si el límite (1.2.1) para $f = \|\cdot\|$, existe y es uniforme para x y $h \in S_X$.

Equivalentemente, dada una *bola* B en X diremos que es $\mathscr{P}$, donde $\mathscr{P}$ es cualquiera de las propiedades anteriores, si el espacio $(X, g(B, \cdot))$ es $\mathscr{P}$.

Estos conceptos están ligados por dualidad. En particular el conocido lema de Smulian [22, Lem. 8.4] permite establecer los siguientes resultados.

Corolario 1.2.6 ([22, Fact 8.12])**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio normado, si $(X^*, \|\cdot\|)$ es estrictamente convexo (R), entonces $(X, \|\cdot\|)$ es Gâteaux diferenciable (G).*

Corolario 1.2.7 ([22, Fact 8.18]). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach, si* $(X^*, \|\cdot\|)$ *es localmente uniformemente convexa (LUR), entonces* $(X, \|\cdot\|)$ *es Fréchet diferenciable.*

El siguiente resultado se incluye aquí con la clara intención de que cada una de las propiedades y sus relaciones de dualidad no se encuentren dispersas a lo largo de la memoria. Sin embargo para la prueba de este resultado se utilizan técnicas basadas en herramientas que serán definidas en la siguiente sección : *Estudio cuantitativo de la geometría: Los módulos.*

Teorema 1.2.8 ([22, Teo. 9.10]). *Sea* $(X, \|\cdot\|)$ *un espacio de Banach. Entonces*

(a) $(X, \|\cdot\|)$ *es uniformemente convexo (UC) si y solamente si* $(X^*, \|\cdot\|)$ *es uniformemente Fréchet diferenciable (UF).*

(b) $(X, \|\cdot\|)$ *es uniformemente Fréchet diferenciable (UF) si y sólo si* $(X^*, \|\cdot\|)$ *es uniformemente convexo (UC)*

1.3 Estudio cuantitativo de la geometría: Los módulos.

Existen gran cantidad de descripciones cuantitativas de las propiedades geométricas de los espacios de Banach. La herramienta más usual para obtener tales descripciones es la definición de una función real —módulo— que depende del espacio de Banach bajo consideración. Los módulos, desde que Clarkson en 1936 —véase [15]— definiese el que se ha dado en llamar *módulo de convexidad* —def. 1.3.3—, han tenido como objetivo clarificar dos cuestiones; en primer lugar la geometría de la bola unidad, y en segundo las relaciones no evidentes entre la topología débil y la de la norma en un espacio de Banach.

En la mayoría de ocasiones, esto es, para la mayoría de los espacios de Banach, la computación de estos módulos es una tarea ardua y, en ocasiones, imposible. Sin embargo, la descripción cuantitativa a la que hacemos referencia, usualmente, no depende directamente de los valores que toman dichos módulos, sino de su comportamiento en el dominio de definición o, en los casos que nos atañeran en esta memoria, en algunos puntos bien determinados del cierre de su dominio.

A lo largo de esta memoria estudiaremos varios módulos en espacios de Banach, algunos de estos han sido ampliamente estudiados y, por tanto, introducimos la definición en este capítulo. Otros, sin embargo, como el *módulo de cuadratura* introducido en [56, Sección 1], será definido en el capítulo 5, en el que desarrollaremos su estudio y plantearemos la solución de varios de los problemas que se han planteado en la literatura en referencia a él.

Los módulos que introduciremos en esta sección, como hemos comentado anteriormente, no deben su carácter descriptivo a los valores exactos que toman en su dominio, sino en el comportamiento que estas funciones tienen cerca del origen, donde ambas toman valor 0. El concepto clave para analizar este comportamiento es el de *equivalencia* según se define en [24, Sección 1].

Definición 1.3.1. Dadas dos funciones reales f y g, cada una de ellas definida en un intervalo $[0, a]$, diremos $f \prec g$ si existen constantes positivas A, B, C tales que $Af(Bt) \leq g(t)$ para todo $t \in [0, C]$. Diremos que f y g son *equivalentes* —escribiendo entonces $f \sim g$— si $f \prec g \prec f$.

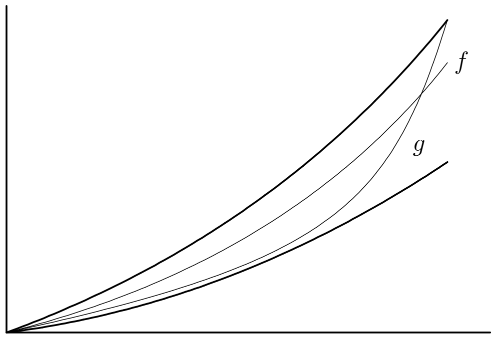

Figura 1.1:

Obsérvese que esta definición establece que dos funciones son *equivalentes* si, cuando t se acerca al origen, ambas funciones se comportan de la misma forma. En la figura 1.1 se puede observar como esta definición viene a significar que la función g está completamente acotada por múltiplos de la función f —en este caso hemos supuesto que las constantes B's son la unidad, esto es, que no hay contracción del intervalo de definición. En particular se tiene

Lema 1.3.2. *Sean f y g dos funciones reales definidas en un cierto intervalo $[0, a]$. Si suponemos que $f \prec g$ entonces existe una constante A tal que*

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(t)}{g(At)} < \infty.$$

En la sección *Conjugada de Fenchel.* —sección 1.4— extenderemos el estudio de este concepto de *equivalencia*, estableciendo correspondencias entre la equivalencia de dos funciones y de sus respectivas conjugadas de Fenchel. Pero ahora definamos los módulos que vertebrarán esta memoria.

Definición 1.3.3 ([22, Def. 9.1])**.** Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada $\varepsilon \in (0, 2]$, definimos el *módulo de convexidad* de $\|\cdot\|$ como

$$\delta_{(X,\|\cdot\|)}(\varepsilon) = \inf \left\{ 1 - \left\| \frac{x+y}{2} \right\| ;\ x, y \in B_X,\ \|x - y\| \geq \varepsilon \right\}.$$

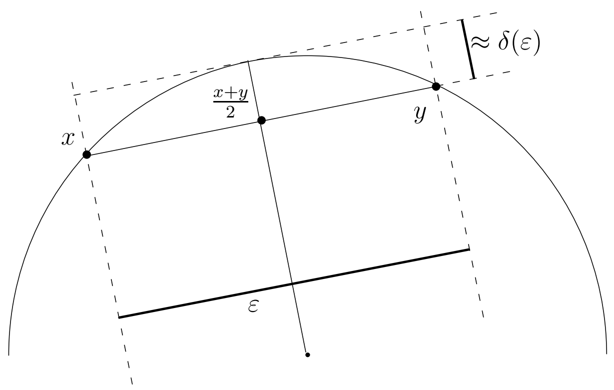

Figura 1.2:

Observando la figura 1.2 podemos ver como el módulo de convexidad estima la menor de las distancias a la esfera unidad de los puntos medios de cada par de puntos que dista al menos ε.

Trivialmente se tiene que $\delta_X(2) = 1$ si y solamente si X es estrictamente convexo —definición 1.2.3. De igual forma existen otros resultados que, a partir de valores particulares de δ_X en cierto punto de su dominio, implica que el espacio $(X, \|\cdot\|)$ tiene cierta propiedad geométrica, a este respecto puede verse [27, 28, 30, 43, 55]. En [53], Nordlander, de forma elegante a la par que breve, muestra que cualquiera que sea el espacio de Banach X siempre se tiene que $\delta_X \leq \delta_H$, donde δ_H es el módulo de convexidad de cualquier espacio de Hilbert. δ_H puede obtenerse explícitamente usando la identidad del paralelogramo, y resulta ser $\delta_H(\varepsilon) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}}$. Es más en [16] se demuestra que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es Hilbertiano si y sólo si su módulo de convexidad es δ_H. En [1] se muestra que si $\delta_X(\varepsilon) = \delta_H(\varepsilon)$ para cualquier ε en $(0, 2)$ tal que $\varepsilon/2$ no es el seno de un divisor par de π, entonces X es isométrico a un espacio de Hilbert. Este resultado resuelve parcialmente la pregunta planteada en [53]: ¿la propiedad $\delta_X(\varepsilon) = \delta_H(\varepsilon)$ caracteriza a los espacios Hilbertianos?. Este problema sigue abierto para el caso $n \geq 3$.

En [35] se demuestra, entre otras resultados relacionados, que δ_X es una función continua. En general δ_X no es una función convexa —véase [51].

En relación a la diferenciabilidad Fréchet uniforme, definimos:

Definición 1.3.4 ([22, Def. 9.6]). Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Para cada $\tau > 0$, definimos el *módulo de diferenciabilidad* de $\|\cdot\|$ como

$$\rho_{(X,\|\cdot\|)}(\tau) = \sup \left\{ \frac{\|x + \tau y\| + \|x - \tau y\| - 2}{2} : \|x\| = \|y\| = 1 \right\}.$$

Cuando se sobreentienda la norma $\|\cdot\|$ del espacio X escribiremos exclusivamente y respectivamente δ_X y ρ_X. Siguiendo el paralelismo establecido en la sección 1.1, dada una *bola* B en X, definimos sus respectivos módulos de convexidad y diferenciabilidad por las expresiones

$$\delta(B,\varepsilon) = \operatorname{ínf}\left\{1 - g\left(B, \frac{x+y}{2}\right);\ x, y \in B,\ g(B, x-y) \geq \varepsilon\right\},$$

$$\rho(B,\tau) = \sup\left\{\xi(B,x,y,\tau) :\ g(B,x) = g(B,y) = 1\right\},$$

donde

$$\xi(B,x,y,\tau) = \frac{g(B, x+\tau y) + g(B, x-\tau y) - 2}{2}.$$

De la propia definición de estos módulos se deduce que un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ es uniformemente convexo si y solamente si el módulo de convexidad δ_X es positivo en $(0,2]$ y es uniformemente Fréchet diferenciable si y solamente si $\rho_X(t)/t$ tiende a 0 cuando $t \to 0$. Así pues, diremos que una *bola* B es uniformemente convexa, cuando $\delta(B,\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon \in (0,2]$ y que es uniformemente Fréchet diferenciable si

$$\lim_{t\to 0} \frac{\rho(B,\tau)}{\tau} = 0.$$

Si se asume que $\delta_X(\varepsilon) > 0$ para todo $\varepsilon \in (0,2]$, esto es, si suponemos que el espacio X es uniformemente convexo, cobra entidad el estudio del módulo en términos de su comportamiento cerca del origen en contraposición del estudio de sus valores concretos.

Relacionado con el módulo de diferenciabilidad ρ_X e introducido por T. Figiel en [24], el *módulo de diferenciabilidad tangencial*, que definimos a continuación, nos será de gran utilidad.

Dado $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $x \in S_X$, denotaremos por $H_X(x)$ la colección de todos los hiperplanos soporte a B_X en x. Obsérvese que este conjunto es no vacío por el teorema de Hahn-Banach —[5]. De la misma forma para una bola B en X, denotaremos por $H(B,x)$ al conjunto de hiperplanos soporte a B en x. En cualquiera de los dos casos el módulo de diferenciabilidad tangencial se define —véase [24]— para cada $\tau > 0$, como

$$\overline{\rho}(B,t) = \sup\left\{\xi(B,x,y,t) :\ g(B,x) = g(B,y) = 1 \text{ y } y + x \in H(B,x)\right\},$$

$$\overline{\rho}_X(t) = \sup\left\{\frac{\|x+\tau y\| + \|x-\tau y\| - 2}{2} :\ \|x\| = \|y\| = 1 \text{ y } y + x \in H_X(x)\right\}.$$

Obsérvese que $\rho(B,\cdot) \geq \overline{\rho}(B,\cdot)$. Más aún, el módulo de diferenciabilidad ρ y él módulo de diferenciabilidad tangencial $\overline{\rho}$ son funciones *equivalentes*.

Lema 1.3.5 ([24, Lem. 12]). *Existe una constante $K \leq 16$ tal que $\rho(B,\tau) \leq K\overline{\rho}(B,\tau)$, para toda* bola *$B$ y cualquier $t \geq 0$.*

J. Lindenstrauss observó en [48] —véase también [50, pág 61]— que

$$2\rho_{X^*}(\tau) = \sup_{\varepsilon \geq 0} \{\tau\varepsilon - 2\delta_X(\varepsilon)\}. \tag{1.3.1}$$

Sin embargo, la relación contraria no es exacta, esto es, si definimos

$$\widetilde{\delta}_X(\varepsilon) = \sup_{\tau \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}\tau\varepsilon - \rho_{X^*}(\tau) \right\},$$

que satisface $\widetilde{\delta}_X \leq \delta_X$. En particular se tiene que $\widetilde{\delta}_X$ es la función convexa más grande que está por debajo de δ_X. Más adelante veremos que esta propiedad está íntimamente relaciona con la conjugada de Fenchel —sección 1.4.

Este nuevo módulo $\widetilde{\delta}_X$ es *equivalente* a δ_X. En efecto,

Proposición 1.3.6 ([24, Prop. 1]). *Sea $0 < \gamma < 1$, $\varepsilon \geq 0$. Entonces*

$$\widetilde{\delta}_X(\varepsilon) \geq (\gamma^{-1} - 1)\delta_X(\gamma\varepsilon).$$

Como aplicación de la fórmula de Lindenstrauss y del resultado antes citado de Nordlander —[53]— se tiene que $\rho_X \geq \rho_H$, donde ρ_H es el módulo de diferenciabilidad de cualquier espacio de Hilbert. A tales efectos, se tiene que $\rho_H(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} - 1$.

Antes de concluir esta sección vamos a introducir dos resultados importantes en relación a las propiedades geométricas uniformes introducidas: *convexidad uniforme* y *diferenciabilidad uniforme.*

Teorema 1.3.7 ([22, Teo. 9.18], Enflo [21], James [39]). *Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) X admite una norma equivalente uniformemente convexa.

(b) X admite una norma equivalente uniformemente Fréchet diferenciable.

(c) X admite una norma equivalente que es a un tiempo uniformemente convexa y uniformemente Fréchet diferenciable.

Definición 1.3.8. A un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ que satisface una de las propiedades anteriores —y por tanto todas— recibe el nombre de *espacio superreflexivo.*

G. Pisier en [54] obtuvo una mejora cuantitativa del teorema anterior de P. Enflo. Resultado que procedemos a enunciar.

Teorema 1.3.9 ([29, Teo. 3.6], Pisier [54]). *Sea X un espacio de Banach superreflexivo. Existen constantes C y q y una norma $|\cdot|$ en X uniformemente convexa tal que $\delta_{(X,|\cdot|)}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$. Existen constantes C' y p y una norma $\|\cdot\|$ uniformemente Fréchet diferenciable en X tal que $\rho_{(X,\|\cdot\|)}(\tau) \leq C'\tau^p$.*

Se sigue del teorema de Dvoretzky —véase [20, 25]— que $p \leq 2 \leq q$. Este resultado sugiere las siguientes definiciones

Definición 1.3.10 ([17, VI.4]). Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de forma que existen constantes positivas C y q de forma que $\delta_{(X,\|\cdot\|)}(\varepsilon) \geq C\varepsilon^q$, entonces se dice que el módulo de convexidad es *tipo potencia q*.

Definición 1.3.11 ([17, VI.4]). Si $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio de Banach de forma que existen constantes positivas C' y p de forma que $\rho_{(X,\|\cdot\|)}(\tau) \leq C'\tau^p$, entonces se dice que el módulo de diferenciabilidad es *tipo potencia p*.

1.4 Conjugada de Fenchel.

A lo largo de esta sección introduciremos un concepto ampliamente utilizado en la teoría de convexidad y que tiene sus implicaciones no triviales en la dualidad entre las propiedades relacionadas con la convexidad y con la diferenciabilidad en los espacios de Banach.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y sea $f : X \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ una función de forma que existe cierto $x \in X$ con $f(x) < \infty$. Definimos su *conjugada de Fenchel* como la función $f^* : X^* \longrightarrow (-\infty, +\infty]$ definida para cada $x^* \in X^*$ por

$$f^*(x^*) = \sup_{x\in X} \{x^*(x) - f(x)\}.$$

Esta función es inferiormente semicontinua y convexa. Es más es exactamente la mayor función convexa e inferiormente semicontinua inferior a f en todo X —la figura 1.3 ilustra este punto.

Las siguientes propiedades son básicas y pueden encontrarse en diversos textos, para X finito dimensional el texto [59] es una muy buena guía, para espacios infinito dimensionales recomendamos la obra de referencia [68].

Proposición 1.4.1. *Sean f_1 y f_2 dos funciones definidas en un espacio de Banach X, de forma que $f_1(x) \leq f_2(x)$ para todo $x \in X$. Entonces $f_1^* \geq f_2^*$.*

Proposición 1.4.2 (Identidad de Fenchel). *Sea f una función definida en un espacio de Banach X. Si f es convexa, entonces $x^*(x) \leq f(x) + f^*(x^*)$ para todo $x \in X$ y para todo $x^* \in X^*$.*

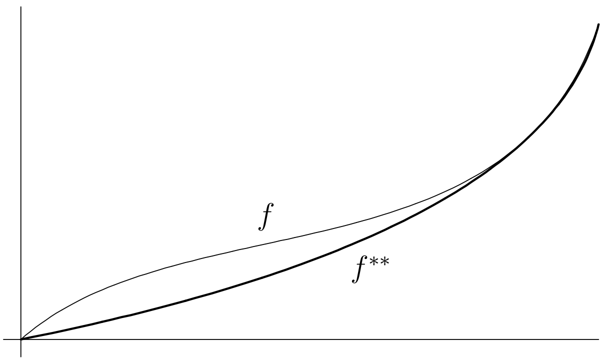

Figura 1.3:

Obsérvese que dado un espacio de Banach X, la función ρ_{X^*} está definida en $[0, \infty)$ y es convexa. Si extendemos tal función de forma que $\rho_{X^*}(t) = \infty$ para todo $t < 0$, entonces podemos calcular su *conjugada de Fenchel* que es exactamente

$$\rho_{X^*}^*\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \sup_{t\in\mathbb{R}}\left\{\frac{t\varepsilon}{2} - \rho_{X^*}(t)\right\} = \sup_{t\geq 0}\left\{\frac{t\varepsilon}{2} - \rho_{X^*}(t)\right\} = \widetilde{\delta}_X(\varepsilon).$$

De la misma forma, por la igualdad de Lindenstrauss se tiene que

$$\delta_X^*\left(\frac{\tau}{2}\right) = \sup_{\varepsilon\geq 0}\left\{\frac{1}{2}\varepsilon\tau - \delta_X(\varepsilon)\right\} = \rho_{X^*}(\tau).$$

Ahora bien, volviendo a conjugar la función δ_X^*, tenemos

$$\delta_X^{**}(\varepsilon) = \sup_{\tau\geq 0}\{\varepsilon\tau - \delta_X^*(\tau)\} = \sup_{\tau\geq 0}\{\varepsilon\tau - \rho_{X^*}(2\tau)\} = \sup_{\tau\geq 0}\left\{\frac{\varepsilon\tau}{2} - \rho_{X^*}(\tau)\right\} = \widetilde{\delta}_X(\varepsilon).$$

Luego, en efecto, como dijimos en la sección anterior $\widetilde{\delta}_X$ es la mayor función convexa inferior a δ_X –no olvidemos que ambas son funciones continuas y, por tanto, inferiormente semicontinuas. Así además, δ_X es una función convexa si y solamente si $\delta_X = \widetilde{\delta}_X$.

Entre el concepto de *equivalencia* introducido en la sección 1.3 y el de *conjugada de Fenchel* existe una cierta compatibilidad que será establecida en el capítulo 2. Ahora presentamos un par de resultados que serán muy útiles en la computación de las conjugadas de Fenchel en el citado capítulo, así como en el capítulo 3.

Lema 1.4.3. *Sea f una función definida en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ con valores en $(-\infty, \infty]$, K y R constantes positivas. Entonces la conjugada de Fenchel de la función $g(x) = Kf(Rx)$ es $g^*(x^*) = Kf^*(x^*/KR)$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} g^*(x^*) &= \sup_{x\in X}\{x^*(x)-g(x)\} = K\sup_{x\in X}\left\{x^*\left(\frac{Rx}{RK}\right)-f(Rx)\right\} \\ &= K\sup_{y\in X}\left\{\frac{1}{RK}x^*(y)-f(y)\right\} = Kf^*\left(\frac{1}{RK}x^*\right). \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado establece la relación exacta entre la conjugada de Fenchel de una función definida en un espacio de Banach X mediante la composición de una función real f y la norma del espacio, y la composición de la conjugada de f con la norma del espacio dual.

Proposición 1.4.4 ([3, Lema 2])**.** *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach y $f : [0,\infty) \longrightarrow [0,\infty]$ convexa, inferiormente semicontinua —continua por la izquierda— y con $f(0) = 0$. Entonces la conjugada de Fenchel de la función $g(x) = f(\|x\|)$ es $f^*(\|\cdot\|)$.*

Capítulo 2

Los módulos de Convexidad y Diferenciabilidad

Los módulos de convexidad y diferenciabilidad han sido ampliamente estudiados. Se conocen sus propiedades de monotonía y convexidad —véase capítulo 1— así como su comportamiento genérico cerca del origen. La definición de los mismos — def. 1.3.3 y def. 1.3.4— pone de manifiesto que son de carácter 2-dimensional. Esto es, satisfacen

$$\delta_X(\varepsilon) = \text{ínf}\left\{\delta_M(\varepsilon) : M \subset X, \text{2-dimensional}\right\},$$
$$\rho_X(\varepsilon) = \sup\left\{\rho_M(\varepsilon) : M \subset X, \text{2-dimensional}\right\}.$$

Una pregunta natural en el seno de la teoría de renormamientos es ¿cuáles son las condiciones necesarias que debe satisfacer una función real f para que exista una norma en un espacio de Banach con módulo de convexidad —resp. diferenciabilidad— igual a f?

En primer lugar, si $(X, \|\cdot\|)$ no es uniformemente convexo, entonces existe un cierto $\varepsilon_0 \in (0,2)$ tal que $\delta_X((0,\varepsilon_0]) = 0$. En particular, para cualquiera de tales ε_0 existe en $\mathbb{R}^2$ una norma que cumple exactamente esa condición. En efecto, definiendo para cada ε_0 la norma

$$\|(x,y)\|_{\varepsilon_0} = \text{máx}\left\{\|(x,y)\|_1, \frac{2}{2-\varepsilon_0}|y|\right\},$$

tenemos que $\delta_{\|\cdot\|_{\varepsilon_0}}((0,\varepsilon_0]) = 0$ —véase la figura 2.1.

Ahora bien, dada una función f candidata a módulo de convexidad —resp. módulo de diferenciabilidad— tal que $f(t) > 0$ para todo $t \in (0,2]$. ¿Existe una norma en algún espacio de Banach X tal que $\delta_X \sim f$? ¿ Es posible tal renormamiento en $\mathbb{R}^2$?

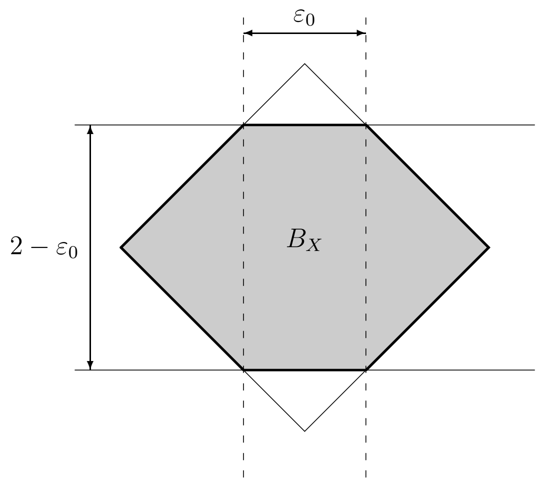

Figura 2.1:

A lo largo de este capítulo responderemos a las preguntas anteriores, estableciendo para ello las condiciones caracterizadoras de las funciones módulo.

2.1 Espacios de Orlicz.

La definición de los espacios de Orlicz ha estado inspirada por el claro papel que juegan en la definición de los espacios ℓ^p —o, más generalmente $L_p(\mu)$— las funciones t^p. Es natural el intentar substituir la función t^p por una función general M y considerar el conjunto de todas las sucesiones de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ para las cuales la serie $\sum_{n=1}^{\infty} M(|a_n|)$ converge. W. Orlicz comprobó las restricciones que se le debían imponer a la función M para que este conjunto de sucesiones fuera un espacio de Banach. Su estudio dio origen a la siguiente definición de los así llamados: *espacios de Orlicz* y *funciones de Orlicz*. La teoría básica de espacios de Orlicz puede estudiarse tanto en el trabajo pionero [45] como en el más actual [58], donde, en particular, pueden encontrarse citas bibliográficas concretas sobre las investigaciones clásicas de W. Orlicz.

Definición 2.1.1 ([49, Def. 4.a.1]). Una *función de Orlicz* M es una función continua, estrictamente creciente y convexa definida para $t \geq 0$, tal que $M(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} M(t) = \infty$. Se dice que M es una *función de Orlicz degenerada* si $M(t) = 0$ para algún $t > 0$.

A cualquier función de Orlicz M le asociamos el espacio ℓ_M de todas las sucesiones de escalares $x = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tales que $\sum_{n=1}^{\infty} M(|a_n|/\rho) < \infty$ para algún $\rho > 0$. El espacio ℓ_M junto a la norma

$$\|x\| = \text{ínf}\left\{\rho > 0 : \sum_{n=1}^{\infty} M(|a_n|/\rho) \leq 1\right\}$$

es un espacio de Banach usualmente denominado espacio de sucesiones de Orlicz.

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$ se define de forma análoga el espacio ℓ_M^n como aquel formado, esta vez, por n-uplas de escalares. En realidad, ℓ_M^n es $\mathbb{R}^n$ dotado de una norma especial, la norma inducida por la función de Orlicz M.

Toda función de Orlicz M, al ser no decreciente y convexa, tiene derivada por la derecha $p(t)$ para todo $t > 0$ y $M(t) = \int_0^t p(s)ds$. Como la función p es no negativa y no decreciente se sigue que $1 \leq tp(t)/M(t)$ para todo $t > 0$. En particular, esto implica por derivación que la función $M(t)/t$ es no decreciente. Este hecho puede deducirse también directamente de la convexidad de M, puesto que para $0 < s < t$, tenemos $M(s) \leq (s/t)M(t) + (1 - s/t)M(0) = (s/t)M(t)$.

2.1.1 Dualidad de funciones de Orlicz.

A partir de ahora supondremos que M es una función de Orlicz no degenerada cuya derivada por la derecha p satisface $p(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$. Estas restricciones excluyen únicamente el caso en el que $M(t)$ es *equivalente* a t. Consideramos la inversa por la derecha q de p que se define como $q(u) = \inf \{t : p(t) \leq u\}$, $u \geq 0$. Es sencillo comprobar que q es continua por la derecha, no decreciente y tal que $q(0) = 0$ y $q(u) > 0$ siempre que $u > 0$. Si escribimos $M^*(u) = \int_0^1 q(v)dv$ para $u \geq 0$. Entonces, M^* es también una función de Orlicz no degenerada y q es su derivada por la derecha. La función M^* recibe el nombre de *complementaria* aunque coincide con la conjugada de Fenchel que introdujimos en el capítulo 1, sección 1.4. En efecto, se tiene que

$$M^*(t) = \sup \{tu - M(u) : u \geq 0\}.$$

Es más, las funciones q y p son aquellas que establecen la igualdad en las desigualdades de Fenchel introducidas también en la sección 1.4. En efecto, se tiene:

$$uq(u) = M(q(u)) + M^*(u) \qquad \text{y} \qquad p(t)t = M(t) + M^*(p(t)).$$

Hay casos en los que las funciones de Orlicz M están definidas sólo en un entorno del origen. En esta situación la función M puede extenderse para $t > t_0$ de forma que sea una función de Orlicz en toda la recta real positiva. El siguiente resultado permite el uso de extensiones arbitrarias de una función de Orlicz M cuando se están estudiando problemas de equivalencia de su complementaria M^*.

Definición 2.1.2. Sean $M : [0, a] \to [0, \infty)$ y $N : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$ dos funciones de Orlicz y p la derivada por la derecha de N. Diremos que N es una *extensión* de M si ambas coinciden en $[0, a]$, $p(0) = 0$ y $\lim_{t\to\infty} p(t) = \infty$.

Lema 2.1.3. *Sea M una función de Orlicz definida en un intervalo* $[0, a]$*. Y sean M_1 y M_2 dos* extensiones *de M. Entonces, $M_1^* \sim M_2^*$. Es más, existe $b > 0$ tal que $M_1^*(s) = M_2^*(s)$ para todo $s \in [0, b)$.*

Demostración. El caso en el que la función M es *equivalente* a una recta es sencillo y se deja como ejercicio. Para el caso general, sean: p_1 y p_2 las derivadas por la derecha de M_1 y M_2 respectivamente; q_1 y q_2 las inversas por la derecha de p_1 y p_2 y $s_0 = p_1(a')$, para cierto $a' < a$ fijado. Claramente p_1 y p_2 coinciden en $[0, a)$ y por la definición de la inversa por la derecha se tiene $q_1(s) = q_2(s)$ para $s \in [0, s_0)$. Así, para todo $s < s_0$ se tiene que

$$M_1^*(s) = sq_1(s) - M(q_1(s)) = sq_2(s) - M(q_2(s)) = M_2^*(s),$$

que termina la demostración. □

Por lo tanto, dada una función de Orlicz M definida en un entorno del origen, tiene sentido hablar de M^* como cualquiera de los elementos pertenecientes a la clase de equivalencia establecida por cualquiera de sus extensiones y por el orden $\prec$ definido en el capítulo 1 —véase def. 1.3.1.

2.2 Funciones Módulo de Diferenciabilidad.

En [24], T. Figiel demuestra que el módulo de diferenciabilidad ρ_X, definido en la sección 1.3, asociado a cualquier espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ satisface lo que podría calificarse como una localización del teorema de Nordlander [53]. En efecto, obsérvese que el módulo de diferenciabilidad de un espacio de Hilbert, como dijimos en la sección 1.3, es $\rho_H(\tau) = \sqrt{1+\tau^2} - 1$. Esta función es *equivalente* en el origen a la función $\tau^2/2$, esto es, el módulo de diferenciabilidad de los espacios de Hilbert es cuadrático. El resultado de Nordlander en [53] muestra que todo módulo de diferenciabilidad está acotado inferiormente por ρ_H. Sin embargo este resultado no aporta información suficientemente relevante para poder estudiar la mayor o menor rapidez con la que la función se acerca a 0 cuando τ tiende al origen. El resultado anunciado de T. Figiel es:

Proposición 2.2.1 ([24, Prop. 10])**.** *Si $0 < \tau \leq \sigma$, entonces $\rho_X(\sigma)/\sigma^2 \leq L\rho_X(\tau)/\tau^2$, donde L es una constante menor que $2\prod_{n=0}^{\infty}(1 + 2^{-n}/3)$.*

Esta proposición nos está diciendo que, localmente alrededor del origen, los módulos de diferenciabilidad convergen al origen de forma siempre más lenta que la función cuadrática. En efecto, para cualquier $t \in (0, \infty)$ fijado y para todo $s \in [0, 1]$ se tiene que

$$\frac{\rho_X(t)}{t^2} \leq L\frac{\rho_X(st)}{s^2t^2}$$

o lo que es lo mismo

$$\rho_X(ts) \geq \frac{1}{L}\rho_X(t)s^2.$$

El módulo de diferenciabilidad ρ_X de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ desde que fue introducido por J. Lindenstrauss en [48] ha sido centro de atención y estudio. Se han clarificado sus propiedades fundamentales, sabiéndose, por ejemplo que es creciente, continuo, convexo en $[0, \infty)$ y que satisface $\rho_X(0) = 0$ y $\rho_X(t) \leq t$. Sin embargo se desconocen hasta ahora las propiedades que caracterizan a estos módulos. A lo largo de esta sección, y como anunciamos en la introducción, daremos respuesta a esta pregunta. Para ello y, en primer lugar, definimos el siguiente concepto.

Definición 2.2.2. Se define como *función módulo de diferenciabilidad* a toda aquella función de Orlicz M tal que para todo $0 < t < s$, satisface

$$\frac{M(s)}{s^2} \leq C\frac{M(t)}{t^2}$$

para cierta constante $C > 0$. A la menor de las constantes que satisfacen la propiedad anterior la denominaremos la *constante de módulo diferenciable* de M, $\mathrm{ctd}(M)$. Denotaremos por $\mathscr{M}_d$ al conjunto de todas las funciones módulo de diferenciabilidad.

Definición 2.2.3 ([49, Def. 4.a.3],[52, Sec. 1])**.** Una función de Orlicz M tiene la propiedad Δ_2 en cero —resp. en infinito— si existen dos constantes positivas A y B tales que $M(2t) \leq AM(t)$, para $t \in [0, B]$ —resp. $t \in [B, \infty)$—.

En [52] S. L. Troyanski y R. P. Maleev estiman los módulos de diferenciabilidad de algunos espacios de Orlicz $L_M(S, \Sigma, \mu)$. Uno de los casos principales consiste en suponer que $\mu(S) = \infty$ y que S contiene un conjunto sin átomos y de medida positiva. En este caso, consideramos una función de Orlicz M de forma que ella y su complementaria M^* satisfacen la condición Δ_2 en el cero y en infinito —equivalentemente, el espacio L_M es reflexivo. Para cada $0 < \tau \leq 1$, se define la función

$$G_M(\tau) = \tau^2 \sup\left\{\frac{M(uv)}{u^2 M(v)} : u \in [\tau, 1], v > 0\right\}.$$

Entonces existe una función de Orlicz N *equivalente* a M y tal que el módulo de diferenciabilidad $\rho_X(\tau)$ del espacio $X = L_N(S, \Sigma, \mu)$ satisface la condición $\rho_X(\tau) \leq KG_M(\tau)$ para cierta constante K y $\tau \in [0, 1]$. Esta nueva función N, al ser *equivalente* a M establece un renormamiento, siendo éste óptimo módulo equivalencia. Es decir, cualquier función de Orlicz S *equivalente* a M de forma que su módulo de diferenciabilidad, digamos ρ_S, converge más rápidamente al origen que ρ_X, satisface que ambos módulos son *equivalentes*.

Como contrapartida a este resultado, en [24] se demuestra el siguiente resultado.

Proposición 2.2.4 ([24, Prop. 21]). *Sea M una función de Orlicz que satisface la condición Δ_2 en el origen. Si ρ es el módulo de diferenciabilidad de ℓ_M para una cierta norma equivalente $|\cdot|$, entonces existe una constante $K > 0$ tal que*

$$\rho(\tau) \geq KG_M(\tau) \text{ para todo } 0 < \tau \leq 1.$$

Por tanto, para cualquier función de Orlicz M tal que, tanto ella como su complementaria satisfacen la condición Δ_2 en el origen y en el infinito, existe una función de Orlicz *equivalente* N —equivalentemente un renormamiento— tal que ρ_{ℓ_N} es *equivalente* a G_M.

Obsérvese que toda *función módulo de diferenciabilidad* satisface la condición Δ_2 en el origen y en el infinito, puesto que para todo $t > 0$ se tiene que $M(2t) \leq 4LM(t)$. La función G_M no tiene por qué ser *equivalente* a M. Sin embargo en dimensión finita algo más puede decirse. En particular, los siguientes resultados muestran que toda *función módulo de diferenciabilidad* es *equivalente* al módulo de diferenciabilidad de un espacio de Orlicz de dimensión n para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Vamos a empezar definiendo la siguiente función.

Definición 2.2.5. Para M en $\mathscr{M}_d$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos la función

$$G_n(M, \tau) = \tau^2 \sup \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{M(u_i v_i)}{u_i^2} : (v_i)_{i=1}^n \in S_{\ell_M^n}, u_i \in [\tau, 1] \right\},$$

para $\tau \in [0, 1]$.

Estas funciones $G_n(M, \cdot)$ tienen la particularidad de ser *equivalentes* a M. Si en lugar de ℓ_M^n nuestro espacio fuera ℓ_M esto no podría ocurrir.

Lema 2.2.6. *Sea M en $\mathscr{M}_d$ con $M(1) = 1$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$M(\cdot) \leq G_n(M, \cdot) \leq \operatorname{ctd}(M) \|z_n\|_M M(\cdot),$$

donde $z_n = (1, 1, \ldots, 1) \in (\ell_M^n)^*$.

Demostración. La desigualdad de la izquierda se sigue directamente tomando $u_i = \tau$, $v_1 = 1$ y $v_i = 0$ para $1 < i \leq n$. Para ver la desigualdad de la derecha introducimos la siguiente notación.

$$h(t) := \max \left\{ \frac{M(s)}{s^2} : s \in [t, 1] \right\}, \quad h_v(t) := \max \left\{ \frac{M(sv)}{s^2} : s \in [t, 1] \right\},$$

donde $v \in [0, 1]$ está fijado y $t \in [0, 1]$. Es claro que

$$\frac{M(t)}{t^2} \leq h(t) \leq \operatorname{ctd}(M) \frac{M(t)}{t^2},$$

y también que

$$h_v(t) \leq v^2 h(tv).$$

Así, denotando $v = (v_i)_{i=1}^n$, obtenemos

$$\begin{aligned} G_n(M,\tau) &= \tau^2 \sup\left\{\sum_{i=1}^n h_{v_i}(\tau) : v \in S_{\ell_M^n}\right\} \leq \tau^2 \sup\left\{\sum_{i=1}^n v_i^2 h(\tau v_i) : v \in S_{\ell_M^n}\right\} \\ &\leq \mathrm{ctd}(M) \sup\left\{\sum_{i=1}^n M(\tau v_i) : v \in S_{\ell_M^n}\right\} \leq \mathrm{ctd}(M) M(\tau) \sup\left\{\sum_{i=1}^n v_i : v \in S_{\ell_M^n}\right\} \\ &= \mathrm{ctd}(M) M(\tau) \sup\left\{z_n(v) : v \in S_{\ell_M^n}\right\} = \mathrm{ctd}(M) \left\|z_n\right\|_M M(\tau), \end{aligned}$$

como se quería demostrar. □

Vamos a calcular, ahora, el valor de $\|z_n\|_M$ para mostrar que la equivalencia que establece el lema anterior es óptima.

Lema 2.2.7. *Sea M una función de Orlicz. Entonces, $\|z_n\|_M = nM^{-1}(n^{-1})$.*

Demostración. Primeramente denotemos por S a la función inversa de M y observemos que S es cóncava. Como ℓ_M^n es finito dimensional, existe un cierto vector $v \in S_{\ell_M^n}$ tal que $\|z_n\|_M = z_n(v)$. Entonces $\sum_{i=1}^n M(v_i) = 1$ y por lo tanto

$$S\left(\frac{1}{n}\right) = S\left(\sum_{i=1}^n \frac{M(v_i)}{n}\right) \geq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n S\left(M(v_i)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n v_i,$$

esto es $z_n(u) = nS(n^{-1}) \geq z_n(v)$, donde $u = (S(n^{-1}), \ldots, S(n^{-1}))$. Como $z_n(v)$ es el máximo, entonces ambos son iguales y la demostración ha terminado. □

Así, puede establecerse el siguiente corolario.

Corolario 2.2.8. *Sea M en $\mathscr{M}_d$ con $M(1) = 1$. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$*

$$M(\cdot) \leq G_n(M,\cdot) \leq \mathrm{ctd}(M) n M^{-1}(n^{-1}) M(\cdot).$$

Observación 2.2.9. Como hemos anunciado, el corolario anterior es óptimo. Óptimo en el sentido de que existe $M \in \mathscr{M}_d$ con $M(1) = 1$ de forma que

$$\sup_{\tau\in[0,1]} \{G_n(M,\tau)/M(\tau)\} = \mathrm{ctd}(M) n M^{-1}(n^{-1}).$$

En efecto, consideremos la función de Orlicz definida por $M(t) = \frac{t}{1-log(t)}$ en $[0,1]$ y $M(t) = t^2$ en $[1,\infty)$. Es sencillo comprobar que esta función está en $\mathscr{M}_d$ —según la definición 2.2.5- y $\mathrm{ctd}(M) = 1$. Además,

$$\sup\left\{\frac{G_n(M,\tau)}{M(\tau)} : 1 \geq \tau \geq 0\right\} = \mathrm{prodlog}(ne),$$

donde la función prodlog(z) es la solución principal de la ecuación $z = we^w$, y $M^{-1}(n^{-1}) = \frac{\text{prodlog}(ne)}{n}$. Obsérvese también que

$$G_n(M,\tau) = nM\left(\frac{\text{prodlog}(ne)}{n}\tau\right).$$

El papel de las funciones $G_n(M,\cdot)$ en esta sección es paralelo al papel de la función $G_M(\cdot)$ utilizada por S.L. Troyanski y R.P. Maleev en [52] y T. Figiel en [24]. Esto es, vamos a probar que la función $G_n(M,\tau)$ es *equivalente* a ρ_X, donde X es ℓ_N^n para cierta función N *equivalente* a M.

Lema 2.2.10. *Sea N en $\mathscr{M}_d$. Entonces, existe $M \in \mathscr{M}_d$* equivalente *a N y derivable tal que* $\text{ctd}(M) \leq \text{ctd}(N)$, $M(1) = 1$ *y para todo $t \in (0,1]$, $s \in (-t,t)$,*

$$\begin{aligned} M(2t) &\leq \gamma M(t), & M'(t) &\leq \beta M(t)/t, \\ M(t+s) &= M(t) + sM'(t) + ds^2, & &\textit{donde } d = d(t,s) \leq BM(t)/t^2, \end{aligned}$$

para ciertas constantes positivas γ, β y B. Más aún, M puede definirse como

$$M(t) := \int_0^t \frac{N(u)}{u}du, \ \textit{para } t \in (0,1].$$

Demostración. La prueba se sigue de [24, Lema 20] y del siguiente lema. □

Lema 2.2.11. *Sea N en $\mathscr{M}_d$ y M definida como en el lema anterior. Entonces M está en $\mathscr{M}_d$ y* $\text{ctd}(M) \leq \text{ctd}(N)$.

Demostración. Sean $0 < \varepsilon \leq \eta$, entonces

$$M(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \frac{M(u)}{u}du = \int_0^1 \frac{M(s\varepsilon)}{s}ds \leq \text{ctd}(N)\frac{\varepsilon^2}{\eta^2}\int_0^1 \frac{M(s\eta)}{s}ds = \text{ctd}(N)\frac{\varepsilon^2}{\eta^2}M(\eta).$$

De donde se deduce que $M \in \mathscr{M}_d$ y $\text{ctd}(M) \leq \text{ctd}(N)$. □

El siguiente resultado, central de esta sección, muestra que las funciones módulo de diferenciabilidad son, módulo equivalencia, los posibles módulos de diferenciabilidad en los espacios de Banach.

Recordamos antes el concepto de *delta de Kronecker*. Para valores i y $j \in \mathbb{N}$ consideramos el valor $\delta_{i,j}$ que será la unidad cuando $i = j$ y en cualquier otro caso será 0.

Teorema 2.2.12. *Supongamos que N está en $\mathscr{M}_d$. Entonces existen: una función M en $\mathscr{M}_d$* equivalente *a N, con la misma constante de módulo, $K > 0$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, una constante positiva $K'(n)$ tales que para todo $t \in [0,1]$, se tiene*

$$K'(n)G_n(M,\tau) \leq \rho_{\ell_M^n}(\tau) \leq KG_n(M,\tau).$$

En particular $\mathbb{R}^n$ *puede renormarse de forma que su módulo de diferenciabilidad sea* equivalente *a* N*.*

Demostración. En primer lugar tomamos la función M del lema 2.2.10. Para ver la desigualdad de la derecha, consideremos τ fijado, y sean $x = (x_i)_{i=1}^n$, $y = (y_i)_{i=1}^n$, a lo largo de esta prueba, elementos de ℓ_M^n tales que $\|x\| = 1$, $\|y\| = \tau$. Probaremos que

$$m(x,y) := \sum_{i=1}^{n} [M(|x_i + y_i|) + M(|x_i - y_i|) - 2M(|x_i|)] \leq 2K_1 G_n(M,\tau), \tag{2.2.1}$$

donde $K_1 = K_1(\gamma, \beta, B)$. Para hacerlo de la forma más clara posible introducimos la siguiente notación.

$$a_i^1(x,y) = \begin{cases} 1 & si \quad |y_i| \geq |x_i|, \\ 0 & si \quad |y_i| < |x_i|. \end{cases}$$

$$a_i^2(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y_i| < |x_i| < |y_i|/\tau, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

$$a_i^3(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } |y_i| \leq \tau |x_i|, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

y

$$m_j(x,y) = \sum_{i=1}^{n} a_i^j(x,y) \big[M(|x_i + y_i|) + M(|x_i - y_i|) - 2M(|x_i|)\big],$$

para $j = 1, 2, 3$. Es claro que $m(x,y) = m_1(x,y) + m_2(x,y) + m_3(x,y)$. Vamos a estimar el término derecho de esta ecuación, $m(x,y)$.

Si $|y_i| \geq |x_i|$, entonces

$$M(|x_i \pm y_i|) \leq M(2|y_i|) \leq \gamma M(|y_i|).$$

Por lo tanto

$$m_1(x,y) \leq 2\gamma \sum_{i=1}^{n} a_i^1(x,y) M(|y_i|).$$

Tomando $v_i = |y_i|/\tau$ y $u_i = \tau$ para $0 \leq i \leq n$ observamos que

$$G_n(M,\tau) \geq \sum a_i^1(x,y) M(|y_i|),$$

esto es, $m_1(x,y) \leq 2\gamma G_n(M,\tau)$.

Si $|y_i| < |x_i|$, entonces podemos estimar

$$\begin{aligned} &M(|x_i + y_i|) + M(|x_i - y_i|) - 2M(|x_i|) \\ &\qquad \leq M'(|x_i|)(|x_i + y_i| + |x_i - y_i| - 2|x_i|) + (d' + d'')|y_i|^2 \\ &\qquad = (d' + d'')|y_i|^2 \leq 2BM(|x_i|)(|y_i|/|x_i|)^2. \end{aligned}$$

Si $|y_i| < |x_i| < |y_i|/\tau$, por la definición de $G_n(M,\tau)$, tomando $v_i = |y_i|/\tau$ y $u_i = \tau |x_i| / |y_i|$,

$$G_n(M,\tau) \geq \sum_{i=1}^{n} M(|x_i|)(|y_i| / |x_i|)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} a_i^2(x,y) M(|x_i|)(|y_i| / |x_i|)^2 .$$

Por lo tanto, $m_2(x,y) \leq 2BG_n(M,\tau)$.

Finalmente, si $|y_i| \leq \tau |x_i|$, entonces $(|y_i| / |x_i|)^2 \leq \tau^2 \leq G_n(M,\tau)$. Así,

$$\begin{aligned} m_3(x,y) &\leq 2B \sum_{i=1}^{n} a_i^3(x,y) M(|x_i|) \left(\frac{|y_i|}{|x_i|}\right)^2 \leq 2BG_n(M,\tau) \sum_{i=1}^{n} a_i^3(x,y) M(|x_i|) \\ &\leq 2BG_n(M,\tau) \sum_{i=1}^{n} M(|x_i|) = 2BG_n(M,\tau). \end{aligned}$$

Y, por tanto, $m(x,y) \leq 2(\gamma + 2B) G_n(M,\tau)$.

Si asumimos que $\|x \pm y\| \geq 1$, entonces usando la convexidad de M y la hipótesis de que $\|x\| = 1$, obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n} M(|x_i \pm y_i|) \geq \|x \pm y\|, \qquad \sum_{i=1}^{n} M(|x_i|) = 1,$$

y por lo tanto, por (2.2.1), $\|x+y\| + \|x-y\| - 2\|x\| \leq 2K_1 G_n(M,\tau)$, y, finalmente el lema 1.3.5 nos dice que $K \leq 16K_1$, lo que termina la prueba de la primera desigualdad

Para mostrar la desigualdad restante, consideramos los vectores $x = (\delta_{i,1})_{i=1}^n$ e $y = (\delta_{i,2})_{i=1}^n$ en $S_{\ell_M^n}$ y definimos la función $n(t) := \|x+ty\|_{\ell_M^n}$. Obsérvese que $n(t) = n(-t)$ y que

$$\rho_{\ell_M^n}(t) \geq \frac{\|x+ty\|_{\ell_M^n} + \|x-ty\|_{\ell_M^n} - 2}{2} = n(t) - 1.$$

Uno puede fácilmente darse cuenta de que $n(t)$ es $\mathscr{C}^1$ en $(0,1]$ puesto que está definida de forma implícita por la ecuación

$$M\left(\frac{1}{n(t)}\right) + M\left(\frac{t}{n(t)}\right) = 1. \tag{2.2.2}$$

Por lo tanto, derivando (2.2.2) obtenemos para todo $t \in (0,1]$

$$n'(t)\left(M'\left(\frac{1}{n(t)}\right) + tM'\left(\frac{t}{n(t)}\right)\right) = M'\left(\frac{t}{n(t)}\right) n(t). \tag{2.2.3}$$

Denotamos por φ a la función

$$\varphi(t) = \frac{M'\left(\frac{t}{n(t)}\right)}{M'\left(\frac{1}{n(t)}\right) + tM'\left(\frac{t}{n(t)}\right)}.$$

$\varphi(t)$ está bien definida y es continua en $[0,1]$ puesto que el denominador es siempre positivo y las funciones que participan en la definición son continuas en $[0,1]$. De (2.2.3) obtenemos que

$$n(t) = e^{\int_0^t \varphi(u)du}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\liminf_{t\to 0^+} \frac{n(t)-1}{M(t)} &= \liminf_{t\to 0^+} \frac{n'(t)}{M'(t)} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\varphi(t)n(t)}{M'(t)} \\
&= \frac{1}{M'(1)} \liminf_{t\to 0^+} \frac{M'\left(\frac{t}{n(t)}\right)}{M'(t)} n(t) \\
&= \frac{1}{M'(1)} \liminf_{t\to 0^+} \frac{N\left(\frac{t}{n(t)}\right)}{N(t)} n(t)^2 \\
&\geq \frac{1}{M'(1)} \lim_{t\to 0^+} \frac{N(t)}{\operatorname{ctd}(M)N(t)n(t)^2} n(t)^2 = \frac{1}{\operatorname{ctd}(M)M'(1)}.
\end{aligned}$$

Obsérvese que la última desigualdad se obtiene gracias a que $n(t) \geq 1$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Por tanto, como $M'(1) \neq 0$, existe una constante $K' > 0$ tal que $n(t) - 1 \geq K'M(t)$ para todo $t \in [0,1]$, lo que implica que $\rho_{\ell_M^n}(t) \geq K'M(t)$ para $t \in [0,1]$. Aplicando el corolario 2.2.8 y llamando $K'(n) = K'/(\operatorname{ctd}(M)nM^{-1}(n^{-1}))$ terminamos la prueba. $\square$

En particular, dada cualquier *función módulo de diferenciabilidad* M y un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, X tiene un renormamiento uniformemente Fréchet diferenciable $|\cdot|$ de forma que $\rho_{(X,\|\cdot\|)} \prec \rho_{(X,|\cdot|)}$. Obsérvese que, por definición, el módulo de diferenciabilidad ρ_X refleja la convergencia —uniforme sobre la esfera unidad— de la derivada de la norma. Así pues, el resultado anterior se puede interpretar como que un espacio superreflexivo X admite normas equivalentes uniformemente Fréchet diferenciables y arbitrariamente malas, esto es, donde la convergencia de las derivadas —controlada uniformemente en la esfera unidad— es cada vez más lenta.

Teorema 2.2.13. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (UF). Para cada función $M \in \mathscr{M}_d$, existe una norma equivalente $|\cdot|$ tal que $\rho_{(X,\|\cdot\|)} \sim \max\left\{M(t), \rho_{(X,|\cdot|)}\right\}$.*

Demostración. Sea $Y \subset X$ de dimensión 2, y $P : X \to X$ la proyección natural asociada a Y, que satisface $P(X) = Y$. Ahora, aplicando el teorema 2.2.12 para $n = 2$ y el lema 2.2.6, obtenemos una norma $|||\cdot|||$ definida en Y tal que $K'M(\tau) \leq \rho_{(Y,|||\cdot|||)}(\tau) \leq KM(\tau)$, para ciertas constantes positivas K y K'. Entonces, la formula

$$|x|^2 = |||Px|||^2 + \|x - Px\|^2 \,,$$

aplicando [24, Prop. 19], define una norma equivalente en X tal que

$$\rho_{(X,|\cdot|)}(\tau) \leq R \max\left\{\rho_{(Y,|||\cdot|||)}(\tau), \rho_{(X,\|\cdot\|)}(\tau)\right\}$$

y, en particular

$$\rho_{(X,|\cdot|)}(\tau) \leq R' \max\left\{M(\tau), \rho_{(X,\|\cdot\|)}(\tau)\right\},$$

para ciertas constantes positivas R y R'. □

2.3 Funciones Módulo de Convexidad.

En [24], T. Figiel, de forma dual al caso uniforme Fréchet diferenciable, demuestra que el módulo de convexidad δ_X, definido en la sección 1.3, asociado a cualquier espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ satisface lo que podría calificarse como una localización del teorema de Nordlander [53]. En efecto, obsérvese que el módulo de convexidad de un espacio de Hilbert, como dijimos en la sección 1.3, es $\delta_H(\varepsilon) = 1-\sqrt{1-\frac{\varepsilon^2}{4}}$. Esta función es *equivalente* en el origen a la función $\varepsilon^2/8$, esto es, el módulo de convexidad de los espacios de Hilbert es cuadrático. El resultado de Nordlander en [53] muestra que todo módulo de convexidad está acotado superiormente por δ_H. Sin embargo este resultado no aporta información suficientemente relevante para poder estudiar la mayor o menor rapidez con la que la función se acerca a 0 cuando ε tiende al origen. El resultado anunciado de T. Figiel es:

Proposición 2.3.1 ([24, Cor. 11]). *Si $0 < \varepsilon \leq \eta$, entonces $\delta_X(\varepsilon)/\varepsilon^2 \leq 4L\delta_X(\eta)/\eta^2$, donde L es la misma constante de la proposición 2.2.1.*

Dualmente a lo que ocurría en el estudio del módulo de diferenciabilidad, esta proposición nos está diciendo que, localmente alrededor del origen, los módulos de convexidad convergen al origen de forma siempre más rápida que la función cuadrática. En efecto, para cualquier $t \in (0, \infty)$ fijado y para todo $s \in [0, 1]$ se tiene que

$$\frac{\delta_X(st)}{s^2t^2} \leq 4L\frac{\delta_X(t)}{t^2}$$

o lo que es lo mismo

$$\delta_X(ts) \leq 4L\delta_X(t)s^2.$$

El módulo de convexidad, al igual que el de diferenciabilidad, desde su definición ha sido objeto de atención y estudio. Se han establecido sus propiedades fundamentales que fueron descritas en la sección 1.3 tras la definición del mismo. Análogamente como hiciéramos en la sección anterior, definimos el siguiente concepto.

Definición 2.3.2. Se define como *función módulo de convexidad* a toda aquella función de Orlicz M tal que para todo $0 < t < s$, satisface

$$\frac{M(t)}{t^2} \leq C\frac{M(s)}{s^2}$$

para cierta constante $C > 0$. A la menor de las constantes que satisfacen la propiedad anterior la denominaremos la *constante de módulo de convexidad* de M, $\mathrm{ctc}(M)$. El conjunto de todas las funciones módulo de convexidad será denotado por $\mathscr{M}_c$.

En [52] S.L. Troyanski y R.P. Maleev estiman los módulos de convexidad de algunos espacios de Orlicz $L_M(S, \Sigma, \mu)$. Al igual que hacían para el módulo de diferenciabilidad, uno de los casos principales consistía en suponer que $\mu(S) = \infty$ y que S contenía un conjunto sin átomos y de medida positiva. En este caso, de nuevo, consideraban una función de Orlicz M de forma que ella y su complementaria M^* satisfacían la condición Δ_2 en el cero y en infinito —equivalentemente, el espacio L_M era reflexivo. Para cada $0 < \varepsilon \leq 1$, definían la función

$$F_M(\varepsilon) = \varepsilon^2 \operatorname{ínf} \left\{ \frac{M(uv)}{u^2 M(v)} : u \in [\varepsilon, 1], v > 0 \right\}.$$

Entonces existía una función de Orlicz N *equivalente* a M y tal que el módulo de convexidad δ_X del espacio $X = L_N(S, \Sigma, \mu)$ satisfacía la condición $\delta_X(\varepsilon) \geq K F_M(\varepsilon)$ para cierta constante K y $\varepsilon \in [0, 1]$. Esta nueva función N, al ser *equivalente* a M, establecía un renormamiento, siendo éste óptimo módulo equivalencia. Es decir, cualquier función de Orlicz S *equivalente* a M de forma que su módulo de convexidad, digamos δ_S, converge más lentamente al origen que δ_X, satisfaría que ambos módulos son *equivalentes*.

Obsérvese que para toda *función módulo de convexidad* M, su complementaria M^* satisface la condición Δ_2 —Def. 2.2.3— en el origen y en el infinito. En efecto, M^* es una *función módulo de diferenciabilidad* —Def. 2.2.2— con $\mathrm{ctd}\,(M^*) = \mathrm{ctc}(M)$ y por tanto, como se observó en la sección anterior, M^* satisface la condición Δ_2. En realidad, la dualidad entre ambos conceptos vía la conjugada de Fenchel se establece en los dos sentidos y, siendo consecuencia de los dos lemas siguientes, está enunciada en el corolario 2.3.5.

Lema 2.3.3. *Si M está en $\mathscr{M}_d$ entonces su complementaria M^* está en $\mathscr{M}_c$ y sus constantes de módulo satisfacen* $\mathrm{ctc}\,(M^*) \leq \mathrm{ctd}(M)$.

Demostración. Sean $0 < \varepsilon \leq \eta$, y denotemos $a = \varepsilon/\eta$. Que M^* está en $\mathscr{M}_c$ se sigue de la existencia de un cierto $K \geq 1$ tal que se verifica la desigualdad siguiente

$$M^*(\varepsilon) \leq K a^2 M^*(\eta). \tag{2.3.1}$$

A continuación probamos esta desigualdad para $K = \mathrm{ctd}(M)$.

En primer lugar supongamos que la cantidad aK es mayor o igual que la unidad. En este caso, como la convexidad de M^* junto a que $M^*(0) = 0$ implica que $M^*(t)/t$ es no decreciente, se tiene

$$M^*(\varepsilon) \leq \frac{\varepsilon}{\eta} M^*(\eta) = a M^*(\eta) \leq K a^2 M^*(\eta).$$

Por otro lado, si suponemos que $aK < 1$, denotando $m = (aK)^{-1} > 1$ se tiene

$$\begin{aligned} M^*(\varepsilon) &= \sup_{\tau\geq 0}\{\varepsilon\tau - M(\tau)\} \leq \sup_{\tau\geq 0}\left\{\tau a\eta - K^{-1}m^{-2}M(m\tau)\right\} \\ &= K^{-1}m^{-2}\sup_{\tau\geq 0}\{(m\tau)(a\eta K m) - M(m\tau)\} \\ &= Ka^2M^*(a\eta K m) = Ka^2M^*(\eta). \end{aligned}$$

Así pues M^* es módulo de convexidad y $\operatorname{ctc}(M^*) \leq \operatorname{ctd}(M)$. □

El siguiente resultado tiene una prueba completamente dual a la anterior. Sin embargo, la incluimos en esta memoria para conveniencia del lector.

Lema 2.3.4. *Si M está en $\mathscr{M}_c$ entonces su complementaria M^* está en $\mathscr{M}_d$ y sus constantes de módulo satisfacen* $\operatorname{ctd}(M^*) \leq \operatorname{ctc}(M)$.

Demostración. Sean $0 < \tau \leq \sigma$, y denotemos $a = \sigma/\tau$. Que M^* está en $\mathscr{M}_d$ se sigue de la existencia de una constante $K \geq 1$ tal que se verifica la desigualdad siguiente

$$M^*(\sigma) \leq Ka^2M^*(\tau). \tag{2.3.2}$$

Paralelamente al lema anterior, veremos que esta desigualdad es cierta para $K = \operatorname{ctc}(M)$.

En primer lugar supongamos que la cantidad aK es menor o igual que la unidad. En este caso, como la convexidad de M^* junto a que $M^*(0) = 0$ implica que $M^*(t)/t$ es no decreciente, y denotando $m = (aK)^{-1} > 1$, se tiene

$$M^*(\sigma) \leq \frac{\sigma}{m\sigma}M^*(m\sigma) = KaM^*(m\sigma) \leq Ka^2M^*(\tau/K) \leq Ka^2M^*(\tau).$$

Por otro lado, si suponemos que $m < 1$ se tiene

$$\begin{aligned} M^*(\sigma) &= \sup_{\varepsilon\geq 0}\{\varepsilon\sigma - M(\varepsilon)\} \leq \sup_{\varepsilon\geq 0}\left\{\varepsilon a\tau - K^{-1}m^{-2}M(m\varepsilon)\right\} \\ &= K^{-1}m^{-2}\sup_{\varepsilon\geq 0}\{(m\varepsilon)(a\tau K m) - M(m\varepsilon)\} \\ &= Ka^2M^*(a\tau K m) = Ka^2M^*(\tau). \end{aligned}$$

Así pues M^* es módulo de diferenciabilidad y $\operatorname{ctd}(M^*) \leq \operatorname{ctc}(M)$. □

Corolario 2.3.5. *La conjugada de Fenchel de una función módulo de convexidad —resp. diferenciabilidad— es una función módulo de diferenciabilidad —resp. convexidad—. Además, las respectivas constantes de módulo coinciden.*

Demostración. Los lemas 2.3.3 y 2.3.4 muestran que la primera afirmación es cierta. Veamos la segunda; si M está en $\mathscr{M}_c$ entonces usando primero el lema 2.3.4 y luego el lema 2.3.3, sabemos que

$$\mathrm{ctc}(M) = \mathrm{ctc}\left(M^{**}\right) \leq \mathrm{ctd}\left(M^{*}\right) \leq \mathrm{ctc}(M).$$

Esto quiere decir que $\mathrm{ctc}(M) = \mathrm{ctd}\left(M^{*}\right)$. De la misma forma se ve que si M está en $\mathscr{M}_d$ entonces $\mathrm{ctd}(M) = \mathrm{ctc}\left(M^{*}\right)$. □

Lema 2.3.6. *Sean M y N dos funciones de Orlicz tal que $M \prec N$. Entonces $M^{*} \succ N^{*}$.*

Demostración. Como $M \prec N$ existen constantes A, B y C tales que $AM(Bt) \leq N(t)$ para todo $t \in [0, C]$. Sean M_1 y N_1 dos extensiones, respectivamente de M y N restringidas a $[0, C]$ de forma que $AM_1(Bt) \leq N_1(t)$ para todo $t \in [0, \infty)$ —si fuera necesario se toman nuevas constantes A y B—. Se tiene entonces que $H(t) = AM_1(Bt) \leq N_1(t)$, con lo que $H^{*} \geq N_1^{*}$. Aplicando el lema 1.4.3 a H tenemos

$$AM_1^{*}\left(\frac{1}{AB}t\right) \geq N_1^{*}(t).$$

Es decir $N_1^{*} \prec M_1^{*}$. Ahora bien como $M_1^{*} \sim M^{*}$ y $N_1^{*} \sim N^{*}$, se tiene que $N^{*} \prec M^{*}$. □

La aplicación directa del teorema 2.2.12 nos da el siguiente resultado que establece que la condición necesaria y suficiente de una función f para ser módulo de convexidad de un espacio de Banach —módulo equivalencia— es ser una *función módulo de convexidad.*

Teorema 2.3.7. *Supongamos que N está en $\mathscr{M}_c$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ tal que el modulo de convexidad $\delta_{(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)}$ es* equivalente *a N.*

Demostración. Por el corolario 2.3.5 se sabe que N^{*} está en $\mathscr{M}_d$. Por tanto, aplicando el teorema 2.2.12, existe una función $M \in \mathscr{M}_d$ tal que: $M \sim \rho_{\ell_M^n}$ y $M \sim N^{*}$, y así tenemos

$$N \sim M^{*} \sim \rho_{\ell_M^n}^{*} = \widetilde{\delta}_{\ell_M^n{}^{*}} \sim \delta_{\ell_M^n{}^{*}}.$$ □

En particular, dada cualquier *función módulo de convexidad* M y un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, X tiene un renormamiento uniformemente convexo $|\cdot|$ de forma que $\delta_{(X,|\cdot|)} \prec \delta_{(X,\|\cdot\|)}$. El resultado anterior se puede interpretar como que un espacio superreflexivo X admite normas equivalentes uniformemente convexas y arbitrariamente malas, esto es, conteniendo regiones cada vez más planas. En efecto, este resultado viene a ser la versión dual del teorema 2.2.13.

Teorema 2.3.8. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach (UC). Para cada $M \in \mathscr{M}_c$, existe una norma equivalente $|\cdot|$ tal que $\delta_{(X,\|\cdot\|)} \sim \text{mín}\left\{M(t), \rho_{(X,|\cdot|)}\right\}$.*

Estos resultados extienden el resultado del autor de esta memoria en [33], trabajo conjunto con P. Hájek, y que presentamos en la siguiente sección.

2.3.1 Funciones módulo de convexidad; versión geométrica.

La relación $\prec$ —definición 1.3.1— define un orden parcial en el espacio de las funciones no decrecientes definidas en un cierto entorno del origen $[0, a]$, y es sencillo comprobar que $\sim$ es, en efecto una relación de equivalencia. En particular, es consistente usar $\sim$ también para todas y cada una de las clases de equivalencia. Es estándar construir dos funciones incomparables —y así, dos clases incomparables—, con lo que $\prec$ no es un orden lineal. Esto justifica el uso que hemos hecho anteriormente cuando hablábamos de obtener módulos de convexidad —o diferenciabilidad— tan malos como quisiéramos. En esta sección, como hemos anunciado anteriormente, vamos ha probar un análogo al teorema 2.3.7, esta vez de forma constructiva y geométrica. Para ello, antes necesitamos ciertas construcciones geométricas.

Construcción

Sea $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|)$ el espacio de Banach real 2-dimensional canónico donde $\|\cdot\|$ es la norma Euclídea y sea $S = \{x \in \mathbb{R}^2 : \|x\| = 1\}$ la esfera unidad, esto es, la circunferencia de radio uno, cuyo centro es el origen.

Tomemos cualquier punto en S, digamos a_1, su simétrico $-a_1$ y una cantidad positiva ε. Empezando en a_1 y $-a_1$, tomaremos, procediendo en una orientación prefijada, puntos b_1, a_2, $-b_1$, $-a_2$ en S tales que los segmentos $[a_1, b_1]$ y $[b_1, a_2]$ tienen longitud ε. Ahora, repetimos el mismo proceso empezando en a_2 pero de tal forma que la longitud de los segmentos sea ε^2. Asumamos que hemos escogido los puntos $\{(a_i, b_i)\}_{i=1}^n$ y a_{n+1}; entonces elegimos puntos b_{n+1} y a_{n+2} en la esfera unidad tal que los segmentos $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ y $[b_{n+1}, a_{n+2}]$ tengan longitud ε^{n+1}.

Es un hecho crucial que la familia $\{(a_i, b_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$ esté sólo en uno de los hemisferios de la esfera S. Así, para clarificar el tamaño al que tiene que ser tomado ε, tenemos el siguiente sencillo lema.

Lema 2.3.9. *Dados dos puntos x e y de la esfera unidad S, el ángulo α opuesto al segmento $[x, y]$ del triángulo de vértices x, y, y el origen, toma el valor*

$$\alpha = 2 \arcsin\left(\frac{\|x - y\|}{2}\right).$$

Entonces, en la construcción anterior, tenemos que los segmentos que hemos escogido cubren un arco con longitud de arco

$$4\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \arcsin\left(\frac{\varepsilon^n}{2}\right)\right),$$

y si $\varepsilon \leq 1/2$, es menor o igual que π.

Demostración. Todos los resultados excepto el último son evidentes. Para demostrar que para $\varepsilon \leq 1/2$ tenemos

$$4\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \arcsin\left(\frac{\varepsilon^n}{2}\right)\right) \leq \pi,$$

observemos que la función $x/\sin(x)$ cuando $x \leq 0{,}34$ está acotada superiormente por 1,02, y entonces cuando $\frac{\varepsilon^n}{2}1{,}02 \leq \frac{1}{3}$,

$$\arcsin\left(\frac{\varepsilon^n}{2}\right) \leq \arcsin\left(\sin\left(\frac{\varepsilon^n}{2}1{,}02\right)\right) = \frac{\varepsilon^n}{2}1{,}02,$$

puesto que arcsin es una función creciente. Entonces para $\varepsilon \leq 1/2$ tenemos la estimación anterior y

$$4\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \arcsin\left(\frac{\varepsilon^n}{2}\right)\right) \leq 4\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon^n}{2}1{,}02\right) \leq 2{,}04\sum_{n\in\mathbb{N}} \varepsilon^n = 2{,}04\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \leq 2{,}04.$$

Y este valor es menor que π. □

Por lo tanto, podemos asegurar que nuestra elección de puntos es buena, en el sentido de que no se solapan entre ellos ni con sus puntos simétricos.

Vamos a definir una nueva esfera en $\mathbb{R}^2$. Para hacerlo, consideramos un cierto $i \in \mathbb{N}$ fijado, tomamos el segmento $[a_i, b_i]$ y eliminamos de S los puntos del arco que cae entre a_i y b_i y los substituimos por un arco parabólico. Para especificar estos arcos parabólicos utilizaremos nuevos sistemas afines de coordenadas.

En efecto, dada una cantidad no negativa c_i, consideramos el sistema de coordenadas definido por la siguiente ecuación:

$$\begin{pmatrix} x^i \\ y^i \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{4-\varepsilon^{2i}}}\begin{pmatrix} a_i'' + b_i'' & a_i' + b_i' \\ -a_i' - b_i' & a_i'' + b_i'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left(\frac{1}{2} + \frac{c_i}{\sqrt{4-\varepsilon^{2i}}}\right)\begin{pmatrix} a_i' + b_i' \\ a_i'' + b_i'' \end{pmatrix}$$

donde $a_i = (a_i', a_i'')$ y $b_i = (b_i', b_i'')$ están expresados en términos del sistema de coordenadas canónico. Entonces el eje y^i contiene el origen de coordenadas inicial y el punto medio del segmento $[a_i, b_i]$. Por lo tanto, el origen del nuevo sistema de coordenadas caerá en el eje y^i, a distancia c_i del segmento $[a_i, b_i]$ —véase la figura 2.2.

Así, el antiguo arco es substituido por el conjunto $\{(t, y_i(t)) : |2t| \leq \varepsilon^i\}$ —expresado en términos del sistema (x^i, y^i)—, donde y_i es la función definida por $y_i(t) = (4c_i/\varepsilon^i)t^2$.

Para el segmento simétrico $[-a_i, -b_i]$ repetimos el proceso para obtener una curva simétrica.

Supongamos que hemos hecho la misma construcción para cada uno de los segmentos $[a_i, b_i]$. Así, hemos definido una nueva esfera S', que define una nueva norma en $\mathbb{R}^2$ —vía

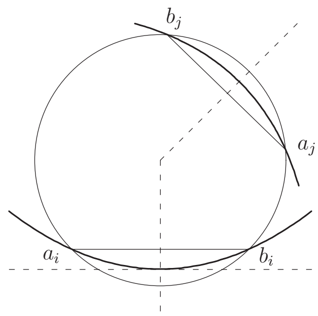

Figura 2.2:

funcional de Minkowski—; denotaremos esta norma por $|||\cdot|||_{\{\varepsilon,\{c_i\}\}}$. Obsérvese que, en nuestra construcción, hemos elegido secciones parabólicas en lugar de arcos de grandes esferas. Esto es debido a que las parábolas nos permiten hacer estimaciones más elegantes.

Observación 2.3.10. Para poder asegurar que la esfera S' define una nueva norma, los valores c_i deben satisfacer

$$c_i \leq \delta_H(\varepsilon^i) = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^{2i}}{4}},$$

Por lo tanto, en particular, para cada función módulo de convexidad f con $f \leq \delta_H$ y para cada $0 < \varepsilon \leq 1/2$, podemos tomar en la construcción anterior $c_i = f(\varepsilon^i)$. En este caso, denotaremos la norma resultante $|||\cdot|||_{\{\varepsilon,f\}}$. Desde ahora supondremos, sin pérdida de generalidad que una función módulo de convexidad f satisface —sin pérdida de generalidad— que $f \leq \delta_H$.

El siguiente paso es demostrar la propiedad principal de esta nueva norma. Para hacerlo, utilizaremos la siguiente definición.

Definición 2.3.11. Dada una norma $|||\cdot|||$ en $\mathbb{R}^2$, podemos definir la función

$$\eta(t) = \text{ínf}\big\{\varphi(x,y) : |||x||| = |||y||| = 1,\ \ \|x-y\| \geq t\big\},$$

donde $\varphi(x,y) = \left\|\frac{x+y}{2}\right\| \left(\frac{1}{|||\frac{x+y}{2}|||} - 1\right)$.

Lema 2.3.12. *Sea η como en la definición 2.3.11. Entonces $\eta \sim \delta_{(\mathbb{R}^2,|||\cdot|||)}$.*

Demostración. Se deduce del hecho de que en $\mathbb{R}^2$ toda norma es equivalente a la norma Euclídea. □

Proposición 2.3.13. *Para cada $0 < \varepsilon \leq 1/2$, y para cada función módulo de convexidad δ, existe una constante positiva $L'(\varepsilon)$ tal que*

$$\delta(\varepsilon^i) \geq \eta(\varepsilon^i) \geq L'(\varepsilon)\delta(\varepsilon^i),$$

para cada $i \in \mathbb{N}$, donde η se define utilizando la norma $|||\cdot|||_{\{\varepsilon,\delta\}}$.

Demostración. Denotaremos como $|||\cdot|||$ a la norma $|||\cdot|||_{\{\varepsilon,\delta\}}$. Fijamos un cierto $i \in \mathbb{N}$, y tomamos dos puntos arbitrarios x e y tales que $|||x||| = |||y||| = 1$ y $\|x - y\| = \varepsilon^i$. Tenemos que distinguir dos casos:

(a) Supongamos que $|||x + y||| = \|x + y\|$. Obviamente $\|x\|, \|y\| \leq 1$. Entonces, la identidad del paralelogramo asegura que

$$\|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x - y\|^2 \leq 4 - \varepsilon^{2i},$$

y así,

$$\varphi(x, y) = 1 - \left\|\frac{x + y}{2}\right\| \geq 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^{2i}}{4}} = \delta_E(\varepsilon^i) \geq \delta(\varepsilon^i).$$

(b) Supongamos que $|||x + y||| \neq \|x + y\|$. En este caso existe un cierto $j \in \mathbb{N}$ tal que el punto $x + y$ cae en el cono convexo de vértice el origen, y determinado por a_j y b_j. Si $j > i$ entonces $\varepsilon^j < \varepsilon^i$ y entonces

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &\geq \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^{2j}}{4}} - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^{2i}}{4}} = \delta_E(\varepsilon^i) - \delta_E(\varepsilon^j) \\ &\geq \delta_E(\varepsilon^i) - \delta_E(\varepsilon^{i+1}) \geq (1 - \varepsilon^2)\delta_E(\varepsilon^i) \geq (1 - \varepsilon^2)\delta(\varepsilon^i).\end{aligned}$$

Pero si $j \leq i$ hemos de ser más cuidadosos. Consideramos el sistema de coordenadas correspondiente al segmento $[a_j, b_j]$, que fueron utilizados para la definición de $|||\cdot|||$. Y tomamos las primeras coordenadas, digamos t y s, en este sistema, de los puntos x y y, respectivamente. Ahora, denotaremos por D al punto medio del segmento $[x, y]$, por C el punto intersección del segmento $[0, x + y]$ con la esfera S', y por C' la proyección ortogonal de D en el gráfico de la función y_j —véase la figura 2.3.

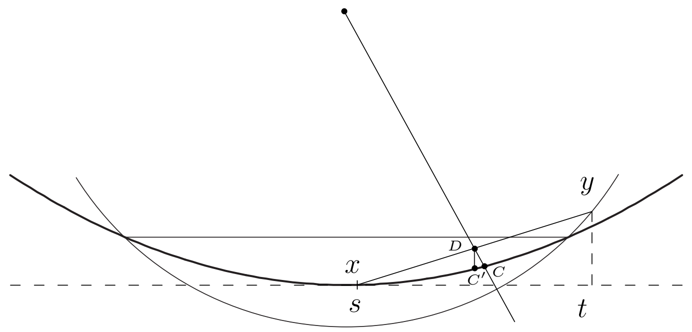

Figura 2.3:

Entonces se tiene $\varphi(x, y) = |DC|$. Claramente,

$$|DC'| \geq \frac{y_j(s) + y_j(t)}{2} - y_j\left(\frac{s + t}{2}\right) = \frac{\delta(\varepsilon^j)}{\varepsilon^{2j}}(s - t)^2,$$

y vamos a probar que existe una constante $W(\varepsilon)$ tal que $|DC| \geq W(\varepsilon)|DC'|$. Para mostrar esto, consideramos la siguiente triángulo rectángulo: tomamos la línea recta que pasa por D, que es perpendicular al eje x, y la línea ortogonal a DC que pasa a través C; estas dos líneas se intersecan en un punto que denotaremos por G; entonces, consideramos el triángulo con vértices D, C y G. Ahora, es claro que $\frac{|DC|}{|DG|} = \cos\alpha$, donde α es el ángulo de nuestro triángulo correspondiente al punto D. Pero este ángulo satisface $|\alpha| \leq \arcsin(\varepsilon/2)$, y entonces $\cos\alpha \geq \cos\big(\arcsin(\varepsilon/2)\big)$. Si denotamos por

$$W(\varepsilon) = \cos\left(\arcsin\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

y observando que $|DG| \geq |DC'|$, obtenemos finalmente $|DC| \geq W(\varepsilon)|DC'|$.

Por otro lado tenemos el cociente $|t-s|/\,\|x-y\| = \cos\beta$, donde β es el ángulo determinado por el segmento $[x,y]$ con respeto al eje x. Como $\varepsilon \leq 1/2$, tenemos que el valor absoluto $|\beta|$ siempre es menor o igual que $\pi/2$. Por lo tanto, existe una constante $A(\varepsilon)$ tal que $|t-s| \geq A(\varepsilon)\,\|x-y\|$. Finalmente, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(x,y) = |DC| \geq W(\varepsilon)|DC'| &\geq W(\varepsilon)\frac{\delta(\varepsilon^j)}{\varepsilon^{2j}}(s-t)^2\\ &\geq W(\varepsilon)A(\varepsilon)^2\frac{\delta(\varepsilon^j)}{\varepsilon^{2j}}\,\|x-y\|^2 = W(\varepsilon)A(\varepsilon)^2\delta(\varepsilon^j)\varepsilon^{2(i-j)},\end{aligned}$$

y como δ es una función módulo de convexidad, obtenemos que

$$\delta(\varepsilon^i) = \delta(\varepsilon^{i-j}\varepsilon^j) \leq L\delta(\varepsilon^j)\varepsilon^{2(i-j)}$$

para una cierta constante positiva L. Entonces

$$\varphi(x,y) \geq \frac{W(\varepsilon)A(\varepsilon)^2}{L}\delta(\varepsilon^i).$$

Ahora, si tomamos $L'(\varepsilon) = \min\left\{(1-\varepsilon^2), \frac{W(\varepsilon)A(\varepsilon)^2}{L}\right\} > 0$ tenemos que

$$\eta(\varepsilon^i) \geq L'(\varepsilon)\delta(\varepsilon^i),$$

como queríamos demostrar.

La primera parte de la desigualdad del teorema se sigue de que

$$\varphi(a_i, b_i) = \delta(\varepsilon^i). \qquad \square$$

El resultado principal

El resultado principal de esta sección es sólo un corolario del resultado anterior — proposición 2.3.13.

Teorema 2.3.14. *Una función δ es una función módulo de convexidad si y sólo si es* equivalente *al módulo de convexidad de un espacio de Banach* 2*-dimensional.*

Demostración. Sea δ una función módulo de convexidad. Si vemos que para algún $0 < \varepsilon < 1/2$ tenemos $\eta \sim \delta$, por el lema 2.3.12 habríamos terminado la demostración. Así, fijamos un cierto $0 < \varepsilon < 1/2$. Por la proposición 2.3.13, se cumple que

$$\delta(\varepsilon^i) \geq \eta(\varepsilon^i) \geq L'\delta(\varepsilon^i)$$

para todo $i \in \mathbb{N}$.

Tomamos un $t \in (0, \varepsilon]$ arbitrario y consideramos i de tal forma que $t \in (\varepsilon^{i+1}, \varepsilon^i]$, entonces tenemos

$$\eta(t) \geq \eta(\varepsilon^{i+1}) \geq L'\delta(\varepsilon^{i+1}) = L'\delta(\varepsilon\varepsilon^i) \geq L'\delta(\varepsilon t). \tag{2.3.3}$$

Ahora, para cada $t \in (0, \varepsilon^2]$ fijado, existe un cierto i tal que $t \in (\varepsilon^{i+1}, \varepsilon^i]$ y finalmente tenemos

$$\eta(t) \leq \eta(\varepsilon^i) \leq \delta(\varepsilon^i) = \delta(\varepsilon^{-1}\varepsilon^{i+1}) \leq \delta(\varepsilon^{-1}t). \tag{2.3.4}$$

Combinando (2.3.3) y (2.3.4) concluimos que $\eta \sim \delta$. Esto termina la demostración. $\square$

Capítulo 3

Funciones Uniformemente Convexas en Espacios de Banach

El concepto de función uniformemente convexa en el contexto de los espacios de Banach tiene su origen en el trabajo [47] de E. S. Levitin y B. T. Poljak. Sus propiedades fueron estudiadas en profundidad por C. Zălinescu en [67], y posteriormente D. Azé y J. Penot en [4] estudiaron su dualidad con las funciones convexas uniformemente diferenciables; véase también [68] para más detalles.

Sin embargo, sorprendentemente, se conoce muy poca información precisa acerca de cuando las funciones uniformemente convexas pueden existir en los espacios de Banach. Por ejemplo, [68, Theorem 3.5.13], muestra que un espacio de Banach que admite una función uniformemente convexa cuyo dominio tiene interior no vacío es reflexivo, y de hecho, puede demostrarse que tal espacio de Banach es superreflexivo —véase el teorema 3.2.8 —recordemos que un espacio de Banach es *superreflexivo* si y sólo si admite una norma equivalente uniformemente convexa, [21]. Por otro lado, [12] muestra que si $\|\cdot\|$ es uniformemente convexa, entonces la función $f(x) = \|x\|^r$ para $r > 1$ es totalmente convexa, que es más débil que exigir que f sea uniformemente convexa; véase [6, 13, 14] para aplicaciones de las funciones totalmente convexas y otras funciones convexas relacionadas.

En esta sección, vamos a dar información precisa acerca de cuando $f(x) = \|x\|^r$ es uniformemente convexa. Examinamos también el problema opuesto pero más general: si $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ es uniformemente convexa y acotada superiormente por $\|\cdot\|^r$, ¿admite X una norma equivalente con módulo de convexidad de *tipo potencia* —Def. 1.3.10— relacionada con r?

3.1 Módulos de convexidad y diferenciabilidad uniforme.

En el estudio de la geometría de los espacios de Banach, la descripción cuantitativa a través de los módulos ha sido, y es, una celebrada herramienta. La información contenida en los módulos estudiados en el capítulo 2: *módulo de convexidad* y *módulo de diferenciabilidad* procede de la norma; función que otorga la estructura geométrica al espacio.

En esta sección se considera la generalización natural del concepto de convexidad uniforme —y diferenciabilidad uniforme— a las funciones convexas definidas sobre un espacio de Banach. A lo largo de este capítulo denotaremos por $\mathbb{R}^{\bullet}$ al conjunto $(-\infty, \infty]$ y dada una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\bullet}$ diremos que su *dominio*, que denotaremos por $\operatorname{dom} f$, es el conjunto $\{x \in X : f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Definición 3.1.1 (Gage de convexidad uniforme [4, Def. 2])**.** El *gage de convexidad* de una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\bullet}$ es la función $\widehat{\delta}_f$ definida por

$$\widehat{\delta}_f(t) = \text{ínf} \left\{ \frac{(1-s)f(x_1) + sf(x_2) - f((1-s)x_1 + sx_2)}{s(1-s)} : 0 < s < 1, \right.$$
$$\left. x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} f, \|x_1 - y_1\| = t \right\},$$

donde el ínfimo sobre el conjunto vacío es $+\infty$.

Definición 3.1.2 (Módulo de convexidad [9, Sección 1])**.** Para una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\bullet}$ definimos su *módulo de convexidad* como la función $\delta_f : \mathbb{R}^+ \to [0, +\infty]$ definida por

$$\delta_f(t) := \text{ínf} \left\{ \frac{1}{2} f(x) + \frac{1}{2} f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) : \|x - y\| = t,\ x, y \in \operatorname{dom} f \right\},$$

donde el ínfimo sobre el conjunto vacío es $+\infty$.

Obsérvese que estas dos funciones δ_f y $\widehat{\delta}_f$ son *equivalentes*. En efecto, se tiene la siguiente relación.

Lema 3.1.3. *Para cualquier función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^{\bullet}$ y para todo $t \geq 0$, se tiene*

$$2\delta_f(t) \leq \widehat{\delta}_f(t) \leq 4\delta_f(t).$$

Demostración. Sean x, $y \in \operatorname{dom} f$ y $s \in (0, 1)$. Si $s \in [1/2, 1)$ entonces

$$\begin{aligned}
f((1-s)x + sy) &= f\left(2(1-s)\left(\frac{x+y}{2}\right) + (2s-1)y\right) \\
&\leq 2(1-s) f\left(\frac{x+y}{2}\right) + (2s-1)f(y) \\
&\leq 2(1-s)\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \delta_f\left(\|x-y\|\right)\right) + (2s-1)f(y) \\
&\leq (1-s)f(x) + sf(y) - 2(1-s)s\delta_f\left(\|x-y\|\right).
\end{aligned}$$

Por otro lado y simétricamente si $s \in (0, 1/2]$ entonces

$$\begin{aligned}
f((1-s)x + sy) &= f\left((1-2s)x + 2s\left(\frac{x+y}{2}\right)\right)\\
&\le (1-2s)f(x) + 2sf\left(\frac{x+y}{2}\right)\\
&\le (1-2s)f(x) + 2s\left(\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - \delta_f\left(\|x-y\|\right)\right)\\
&\le (1-s)f(x) + sf(y) - 2(1-s)s\delta_f\left(\|x-y\|\right).
\end{aligned}$$

Es decir, para todo $s \in (0, 1)$ tenemos

$$\delta_f\left(\|x-y\|\right) \le \frac{1}{2}\frac{(1-s)f(x) + sf(y) - f((1-s)x + sy)}{s(1-s)}.$$

Fijado $t \ge 0$, tomamos el ínfimo en la desigualdad anterior sobre el conjunto de ternas $(x, y, s) \in (\operatorname{dom} f)^2 \times (0, 1)$ tales que $\|x - y\| = t$, obteniendo:

$$\delta_f(t) \le \frac{1}{2}\widehat{\delta}_f(t).$$

Esto demuestra la desigualdad de la izquierda. La de la derecha se deduce directamente de la definición de ambos módulos. □

Definición 3.1.4. Una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ se dice *uniformemente convexa* si su gage de convexidad uniforme $\widehat{\delta}_f$ o —equivalentemente— su módulo de convexidad δ_f es estrictamente positivo en $(0, \infty]$. f tiene *módulo de convexidad de tipo potencia* p si existe una constante $C > 0$ tal que $\delta_f(t) \ge Ct^p$ para todo $t > 0$.

Obsérvese que una función f tiene módulo de convexidad de tipo potencia p si y solamente si existe $C' > 0$ tal que $\widehat{\delta}_f(t) \ge C't^p$, puesto que $\delta_f \sim \widetilde{\delta}_f$.

Dualmente al concepto de convexidad uniforme, como hemos analizado en el caso de las normas, está la diferenciabilidad Fréchet uniforme. Para dar una definición consecuente con la línea de estudio que seguimos, a través de módulos, veamos la siguiente definición.

Definición 3.1.5 (Gage de diferenciabilidad [4, Def. 2])**.** El *gage de diferenciabilidad* de una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ es la función $\widehat{\rho}_f$ definida por

$$\widehat{\rho}_f(t) = \sup\left\{\frac{(1-s)f(x_1) + sf(x_2) - f((1-s)x_1 + sx_2)}{s(1-s)} : 0 < s < 1,\right.$$
$$\left. x_1,\ x_2 \in \operatorname{dom} f, \|x_1 - y_1\| = t\right\}.$$

Definición 3.1.6 (Módulo de diferenciabilidad [9, Sección 1])**.** Para una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ definimos su *módulo de diferenciabilidad* como la función $\rho_f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow [0, +\infty)$ definida por

$$\rho_f(t) := \sup\left\{\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) : \|x-y\| = t,\ x, y \in \operatorname{dom} f\right\},$$

donde el supremo sobre el conjunto vacío es $+\infty$.

Definición 3.1.7. Una función convexa $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ se dice *uniformemente diferenciable* si su gage de diferenciabilidad $\widehat{\rho}_f$ satisface que $\lim_{t\to 0^+} \widehat{\rho}_f(t)/t = 0$ —equivalentemente, su módulo de diferenciabilidad ρ_f satisface $\lim_{t\to 0^+} \rho_f(t)/t = 0$. f tiene *módulo de diferenciabilidad de tipo potencia* p si existe una constante $C > 0$ tal que $\rho_f(t) \leq Ct^p$ para todo $t > 0$.

Como pasaba con el módulo y el gage de convexidad, el módulo y el gage de diferenciabilidad son funciones *equivalentes*. En la siguiente sección incluiremos una prueba de este hecho en la que utilizamos la dualidad existente entre las funciones gage definidas y sus respectivos módulos. Con lo que, al igual que para la convexidad, la condición de *tipo potencia* es equivalente obtenerla para ρ_f o para $\widehat{\rho}_f$.

Veamos ahora la relación existente entre los módulos de convexidad y diferenciabilidad para una norma y para funciones convexas. En primer lugar obsérvese que una norma $\|\cdot\|$ es una función convexa definida en todo el espacio X luego, como tal, pueden computarse sus módulos de convexidad y diferenciabilidad como función $\delta_{\|\cdot\|}$ y $\rho_{\|\cdot\|}$ y a la vez sus correspondientes módulos de convexidad y diferenciabilidad definidos en el capítulo 1, $\delta_{(X,\|\cdot\|)}$ y $\rho_{(X,\|\cdot\|)}$. También pueden computarse sus respectivas funciones gage, esto es $\widehat{\delta}_{\|\cdot\|}$, $\widehat{\rho}_{\|\cdot\|}$. Hemos visto que las funciones gauge y los módulos de $\|\cdot\|$ entendida como función convexa, son *equivalentes*. Sin embargo, los módulos de convexidad y diferenciabilidad que estudian la geometría del espacio no tienen por qué serlo. Es más, una norma nunca es uniformemente convexa —nótese que al restringirla a un subespacio 1-dimensional, identificado con $\mathbb{R}$, obtenemos la función valor absoluto.

En [33] se demuestra que para una norma $\|\cdot\|$ definida en un espacio de Banach, su cuadrado es uniformemente convexo —como función— si y solamente si el espacio $(X, \|\cdot\|)$ tiene módulo de convexidad de tipo potencia 2. Es decir si suponemos que un espacio $(X, \|\cdot\|)$ no tiene tipo potencia 2 y que es uniformemente convexo —puede verse una construcción en [33]—, la función $\|\cdot\|^2$ no es u.c. En un espacio de Banach cualquiera pueden obtenerse renormamientos tan malos como queramos, en el sentido visto en el capítulo 2 —véase también a este respecto [33]. Por lo que pueden conseguirse normas uniformemente convexas de forma que ninguna de sus potencias es uniformemente convexa como función.

Si observamos la definición de δ_X junto a la observación de que podemos definirla también como

$$\delta_X(t) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : x, y \in S_X, \|x-y\| = t\right\}.$$

Entonces esta función coincide con δ_f donde f es la siguiente función convexa e inferiormente semicontinua

$$f(x) = \begin{cases} \|x\| & \text{si } x \in B_X, \\ +\infty & \text{si } \|x\| > 1. \end{cases}$$

De la misma forma, pueden encontrarse paralelismos entre la definición de módulo de convexidad de una norma $\|\cdot\|$ y $\rho_{\|\cdot\|}$.

3.1.1 Dualidad.

Los módulos y las funciones gage que hemos definido en la sección anterior están relacionadas mediante la conjugada de Fenchel. Como vimos en el caso de las normas para espacios de Banach esta relación viene siendo habitual. El resultado más fuerte a este respecto lo demostraron D. Azé y J. Penot en [4].

Teorema 3.1.8 ([4, Cor. 2.7]). *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ convexa y ω-inferiormente semicontinua. Entonces*

(a) $\widehat{\rho}_f$ es convexa e inferiormente semicontinua.

(b) $\widehat{\rho}_f = \widehat{\delta}_g^*$, donde $g = f^*$.

(c) $\widehat{\rho}_f(cr) \geq c^2 \widehat{\rho}_f(r)$ para todo $r \geq 0$ y $c \in [0, 1]$.

Corolario 3.1.9 ([4, Cor. 2.8]). *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ una función convexa e inferiormente semicontinua, entonces.*

(a) Si f es uniformemente diferenciable entonces $g = f^*$ es uniformemente convexa.

(b) Si f es uniformemente convexa entonces $g = f^*$ es uniformemente diferenciable.

Lema 3.1.10. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ convexa e inferiormente semicontinua. Entonces*

$$\delta_{f^*}(t) \geq \rho_f^*(t/4).$$

Demostración. Sean x^*, y^* en X^*. Para cualquier par de vectores x, $v \in X$, denotamos $y = x + v$, $z = x + \frac{1}{2}v$ y $z^* = \frac{1}{2}x^* + \frac{1}{2}y^*$. Entonces tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f^*(x^*) + \frac{1}{2}f^*(y^*) &\geq \frac{x^*(x) + y^*(y) - f(x) - f(y)}{2} \\
&\geq \frac{1}{2}(x^*(x) + y^*(y)) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) - \rho_f(\|v\|) \\
&= \frac{1}{2}(x^*(x) + y^*(x) + y^*(v)) + z^*\left(\frac{v}{2}\right) - z^*\left(\frac{v}{2}\right) - f(z) - \rho_f(\|v\|) \\
&= z^*(z) + \frac{1}{2}y^*(v) - z^*\left(\frac{v}{2}\right) - f(z) - \rho_f(\|v\|) \\
&= z^*(z) + \frac{1}{4}(y^* - x^*)(v) - f(z) - \rho_f(\|v\|) \\
&= z^*(z) - f(z) + \frac{1}{4}\big((y^* - x^*)(v) - 4\rho_f(\|v\|)\big).
\end{aligned}$$

Como x y v eran arbitrarios, tomando supremos obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f^*(x^*) + \frac{1}{2}f^*(y^*) &\geq \sup_{v\in X}\sup_{x\in X}\left\{z^*(z) - f(z) + \frac{1}{4}\big((y^*-x^*)(v) - 4\rho_f(\|v\|)\big)\right\}\\
&= f^*(z^*) + \frac{1}{4}\sup_{v\in X}\{(y^*-x^*)(v) - 4\rho_f(\|v\|)\}\\
&\geq f^*(z^*) + \frac{1}{4}\sup_{v\in X}\{\|y^*-x^*\|\,\|v\| - 4\rho_f(\|v\|)\}\\
&= f^*\left(\frac{x^*+y^*}{2}\right) + \frac{1}{4}(4\rho_f)^*(\|x^*-y^*\|).
\end{aligned}$$

De donde $\delta_{f^*}(t) \geq \rho_f^*(t/4)$, usando el lema 1.4.3. □

Lema 3.1.11. *Sea $g : X^* \longrightarrow \mathbb{R}^\bullet$ convexa e inferiormente semicontinua. Entonces, para cada $t \geq 0$ se tiene*

$$\rho_{g^*}(t) \leq \delta_g^*(t/4).$$

Demostración. Sean x e y dos puntos en X. Sean r y s en $\mathbb{R}$ tales que $r < g^*(x)$ y $s < g^*(y)$. Entonces existen x^* e y^* en X^* tales que

$$r \leq x^*(x) - g(x^*), \qquad s \leq y^*(y) - g(y^*).$$

Denotando por $z = (x+y)/2$ y $z^* = (x^*+y^*)/2$ la desigualdad de Fenchel nos dice que

$$0 \leq g^*(z) + g(z^*) - z^*(z).$$

Uniendo las dos últimas ecuaciones obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{r+s}{2} &\leq g^*(z) + g(z^*) - \frac{1}{2}g(x^*) - \frac{1}{2}g(y^*) + \frac{1}{4}(x^*-y^*)(x-y)\\
&\leq g^*(z) + \frac{1}{4}\big(\,\|x-y\|\,\|x^*-y^*\| - 4\delta_g(\|x^*-y^*\|)\big)\\
&\leq g^*(z) + \delta_g^*\left(\frac{\|x-y\|}{4}\right).
\end{aligned}$$

Como r y s son arbitrarios en $(-\infty, g^*(x))$ y $(-\infty, g^*(y))$ respectivamente, se tiene que

$$\frac{1}{2}g^*(x) + \frac{1}{2}g^*(y) - g^*\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \delta_g^*\left(\frac{\|x-y\|}{4}\right),$$

de donde se sigue el lema. □

Estos resultados implican —como anunciamos en la sección anterior— que las funciones ρ_f y $\widehat{\rho}_f$ son *equivalentes.*

Lema 3.1.12. *Sea f una función convexa e inferiormente semicontinua. Entonces*

$$4\rho_f(t) \leq \widehat{\rho}_f(t) \leq 2\rho_f(2t)$$

Demostración. El lema 3.1.3 nos asegura que $2\delta_{f^*}(t) \leq \widehat{\delta}_{f^*}(t) \leq 4\delta_{f^*}(t)$, de donde omando dualidad se tiene que $(4\delta_{f^*})^* \leq \left(\widehat{\delta}_{f^*}\right)^* \leq (2\delta_{f^*})^*$. El teorema 3.1.8 no asegura que $\left(\widehat{\delta}_{f^*}\right)^* = \widehat{\rho}_f$ y usando los dos lemas anteriores se tiene

$$4\rho_f(s) \leq 4\delta^*_{f^*}(s/4) = (4\delta_{f^*})^*(s) \leq \widehat{\rho}_f(s) \leq (2\delta_{f^*})^*(s) = 2\delta^*_{f^*}(s/2) \leq 2\rho_f(2s).$$

□

3.2 Funciones uniformemente convexas y "tipo potencia ".

En esta sección vamos a demostrar para $1 < p < \infty$ que $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ es una función uniformemente convexa si y sólo si $\|\cdot\|$ tiene módulo de convexidad —como espacio de Banach— de *tipo potencia p*—véase def. 1.3.10. Para ello necesitamos los siguientes resultados auxiliares.

Lema 3.2.1. *Sea $0 < r \leq 1$, entonces $|t^r - s^r| \leq |t-s|^r$ para todo s, $t \in [0,\infty)$.*

Demostración. Primero, para $x \geq 0$, $(1+x)^r \leq 1 + x^r$ —véase [65, Ejemplo 4.20]. Tomando $x = (t-s)/s$ con $t \geq s > 0$, y luego multiplicando por s^r, tenemos $t^r \leq s^r + (t-s)^r$. La conclusión se sigue de esto. □

Lema 3.2.2 ([17, Lema IV.5.1])**.** *Sea $p > 1$ y $\alpha = p-1$. Para cualquier $x \in X \setminus \{0\}$, denotando $J(x) = \{x^* \in S_{X^*} : x^*(x) = \|x\|\}$. Las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) $\rho_X(t) \leq Kt^p$ para algún $K > 0$ para todo $t \geq 0$ —ρ_X es de tipo potencia p.

(b) Para cualesquiera $x \in X \setminus \{0\}$, el conjunto $J(x)$ es unitario. Más aún, para cualquier $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon)$ tal que

$$\|J(x) - J(y)\| \leq C(\varepsilon)\|x-y\|^\alpha \qquad si \qquad \text{máx}(\|x\|, \|y\|) \geq \varepsilon$$

Definición 3.2.3. Diremos que una función f definida en un espacio de Banach es α-Hölder en X, para algún $\alpha \in (0,1]$, si existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera x, $y \in X$ se tiene

$$|f(x) - f(y)| \leq C\|x-y\|^\alpha.$$

Lema 3.2.4 ([17, Lema V.3.5])**.** *Sea f una función continua y convexa en un espacio de Banach X y sea $1 < q \leq 2$. Considerando las siguientes condiciones sobre f:*

(a) Existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera x y $h \in X$,

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq C\|x-y\|^q.$$

Es decir, ρ_f es de tipo potencia q.

(b) La derivada f' es $(q-1)$-Hölder en X.

(c) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $\|x-y\| < \delta$ implica

$$\frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2}f(y) - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \varepsilon \|x-y\|.$$

Es decir, $\lim_{t\to 0} \frac{\rho_f(t)}{t} = 0$

(d) La derivada f' es uniformemente continua en X.

Entonces (a) es cierta si y sólo si (b) lo es y (c) es cierta si y sólo si (d) lo es.

Una vez introducidas estas herramientas, estamos en condiciones de probar los dos siguientes resultados.

Teorema 3.2.5. *Para $1 < q \leq 2$, las siguientes condiciones son equivalentes en un espacio de Banach X.*

(a) La norma $\|\cdot\|$ tiene módulo de diferenciabilidad de tipo potencia q.

(b) La función $f(\cdot) = \|\cdot\|^q$ tiene módulo de diferenciabilidad de tipo potencia q.

(c) La función $f(\cdot) = \|\cdot\|^q$ es uniformemente diferenciable.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Asumimos que $\|\cdot\|$ tiene módulo de diferenciabilidad de tipo potencia q. Entonces tiene una derivada —Fréchet — que satisface una condición de tipo $(q-1)$-Hölder en su esfera, por el lema 3.2.2. Mas aún, $f(x) = \|x\|^q$ satisface $f'(0) = 0$ y $f'(x) = q\|x\|^{q-1}\phi_x$ donde $\phi_x \in J(x)$, la aplicación dualidad, para $x \neq 0$ —i.e. $\phi_x \in S_X$, y $\phi_x(x) = \|x\|$). Obsérvese que si $x = 0$ o $y = 0$ entonces $\|f'(x) - f'(y)\| \leq q\|x-y\|^{q-1}$. Suponiendo que $x, y \in X \setminus \{0\}$ computamos,

$$\begin{aligned} f'(x) - f'(y) &= q\|x\|^{q-1}\phi_x - q\|y\|^{q-1}\phi_y \\ &= q\|x\|^{q-1}\phi_x - q\|x\|^{q-1}\phi_y + q\|x\|^{q-1}\phi_y - q\|y\|^{q-1}\phi_y \\ &= q\|x\|^{q-1}(\phi_x - \phi_y) + \big(q\|x\|^{q-1} - q\|y\|^{q-1}\big)\phi_y. \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Usando el lema 3.2.1 podemos también computar

$$\left| q\|x\|^{q-1} - q\|y\|^{q-1} \right| \leq 2^{q-1}q \big| \|x\| - \|y\| \big|^{q-1} \leq 2^{q-1}q\|x-y\|^{q-1}. \tag{3.2.2}$$

Trabajaremos ahora en una estimación de $q\|x\|^{q-1}(\phi_x - \phi_y)$. Primero, consideramos el caso donde $0 < \|y\| \leq \|x\| \leq 1$. Si $\|y\| \leq \|x\|/2$, entonces

$$q\|x\|^{q-1}\|\phi_x - \phi_y\| \leq 2q\|x\|^{q-1} \leq q2^q\|x-y\|^{q-1}.$$

Si $\|x\| \leq 1$ y $\|y\| \geq \|x\|/2$, consideramos $x' = \lambda x$ donde $\lambda = \|y\| / \|x\|$, tal que $\|x'\| = \|y\|$. Entonces

$$\begin{aligned}\|x' - y\| &\leq \|x' - x\| + \|x - y\| \\ &= \|x\| - \|y\| + \|x - y\| \leq 2\|x - y\|.\end{aligned}$$

Así, dada la condición tipo Hölder para la derivada en la esfera, existe $C > 0$ tal que $\|\phi_u - \phi_v\| \leq C\|u - v\|^{q-1} / \|u\|^{q-1}$ cuando $\|u\| = \|v\|$, y por lo tanto tenemos

$$\|\phi_x - \phi_y\| = \|\phi_{x'} - \phi_y\| \leq C\left(\frac{2\|x - y\|}{\|y\|}\right)^{q-1}.$$

Consecuentemente,

$$q\|x\|^{q-1}\|\phi_x - \phi_y\| \leq Cq\frac{\|x\|^{q-1}}{\|y\|^{q-1}}2^{q-1}\|x - y\|^{q-1} \leq C2^{2q-2}q\|x - y\|^{q-1}.$$

Así, en cualquier caso existe $K > 0$ tal que para x, $y \in B_X$ tenemos

$$q\|x\|^{q-1}\|\phi_x - \phi_y\| \leq K\|x - y\|^{q-1}.$$

Consideramos el caso $\|x\| > 1$, y sea $\lambda = \|x\|$. Denotamos $u = x/\lambda$ y $v = y/\lambda$. Entonces u, $v \in B_X$ y $\|u - v\| = \|x - y\|/\lambda$. Así, puede escribirse

$$\begin{aligned}q\|x\|^{q-1}\|\phi_x - \phi_y\| &= q\|x\|^{q-1}\|\phi_u - \phi_v\| \\ &\leq q\|x\|^{q-1}K\|u - v\|^{q-1} \\ &= q\|x\|^{q-1}\frac{1}{\|x\|^{q-1}}K\|x - y\|^{q-1} \\ &= Kq\|x - y\|^{q-1}.\end{aligned}$$

Consecuentemente, en cualquier caso

$$q\|x\|^{q-1}\|\phi_x - \phi_y\| \leq Kq\|x - y\|^{q-1}. \tag{3.2.3}$$

Combinando (3.2.1), (3.2.2) y (3.2.3) se tiene que $f(x) = \|x\|^q$, f' es $(q-1)$-Hölder y, por lo tanto la función $\|x\|^q$ tiene módulo de diferenciabilidad ρ_f de tipo potencia q, usando para ello el lema 3.2.4 —véase también [68, Corolario 3.5.7].

Ahora bien (b) $\Rightarrow$ (c) es trivial, por lo que vamos a probar (c) $\Rightarrow$ (a). Supongamos que $\|\cdot\|$ no tiene módulo de diferenciabilidad de tipo potencia q. Entonces, usando 3.2.2, existen x_n, $y_n \in S_X$ tales que $\|x_n - y_n\| \to 0$ mientras que

$$\|\phi_{x_n} - \phi_{y_n}\| \geq n\|x_n - y_n\|^{q-1}.$$

Sean $\delta_n = \|x_n - y_n\|$ y definamos $u_n = \frac{1}{\delta_n \sqrt{n}} x_n$ y $v_n = \frac{1}{\delta_n \sqrt{n}} y_n$. Entonces $\|u_n - v_n\| = \frac{1}{\sqrt{n}} \to 0$. Sin embargo

$$\begin{aligned}
\left\| f'(u_n) - f'(v_n) \right\| &= \left\| q \|u_n\|^{q-1} \phi_{u_n} - q \|v_n\|^{q-1} \phi_{v_n} \right\| \\
&= \left\| q \|u_n\|^{q-1} \phi_{x_n} - q \|v_n\|^{q-1} \phi_{y_n} \right\| \\
&= \frac{q}{\delta_n^{q-1} n^{\frac{q-1}{2}}} \|\phi_{x_n} - \phi_{y_n}\| \\
&\geq \frac{q}{\delta_n^{q-1} n^{\frac{q-1}{2}}} \left(n \delta_n^{q-1} \right) = q n^{\frac{3-q}{2}} \to \infty.
\end{aligned}$$

Consecuentemente, f' no es uniformemente continua y, por lo tanto, el lema 3.2.4 —véase también [68, Teorema 3.5.6]— muestra que $f(\cdot) = \|\cdot\|^q$ no es una función uniformemente diferenciable. □

Los resultados de dualidad establecidos en el apartado anterior nos permiten establecer la versión dual de 3.2.5 para funciones uniformemente convexas.

Teorema 3.2.6. *Sea X un espacio de Banach, y $2 \leq p < \infty$. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) La norma $\|\cdot\|$ en X tiene módulo de convexidad δ_X de tipo potencia p.

(b) La función $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ tiene módulo de convexidad δ_f de tipo potencia p.

(c) La función $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ es uniformemente convexa.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Supongamos que $\|\cdot\|$ tiene módulo de convexidad δ de tipo potencia p, entonces el módulo de diferenciabilidad de la norma dual sobre X^*, que denotaremos $\|\cdot\|_*$, es de tipo potencia q donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. En efecto esto se sigue de la dualidad entre δ_X y ρ_{X^*} estudiada en el capítulo 1 y del hecho de que la conjugada de Fenchel de $\frac{1}{p} t^p$ es $\frac{1}{q} t^q$. Por el teorema 3.2.5 la función $g(\cdot) = \frac{1}{q} \|\cdot\|_*^q$ tiene módulo de diferenciabilidad de tipo potencia q. La conjugada de Fenchel de g es $g^*(\cdot) = \frac{1}{p} \|\cdot\|^p$, por el lema 1.4.4. Ahora g^*—y por lo tanto $\|\cdot\|^p$— tiene módulo de convexidad de tipo potencia p. En efecto, $\widehat{\rho}_g$ es de tipo potencia q con lo que $\widehat{\delta}_{g^*}$ —y, por tanto, δ_{g^*}— es de tipo potencia p —véase también [4, 68].

(b) $\Rightarrow$ (c) es trivial, así pues, probaremos (c) $\Rightarrow$ (a). En efecto, suponiendo que $f(\cdot) = \|\cdot\|^p$ es uniformemente convexa, el corolario 3.1.9 muestra que f^* —y por lo tanto $\|\cdot\|_*^q$— es una función uniformemente diferenciable. De acuerdo con el teorema 3.2.5, $\|\cdot\|_*$ tiene módulo de diferenciabilidad de tipo potencia q; por lo tanto $\|\cdot\|$ tiene módulo de convexidad de tipo potencia p —véase también [17]). □

Cerramos esta sección confirmando que los espacios con funciones uniformemente convexas no triviales son los espacios superreflexivos —véase def. 1.3.8. Primero, un sencillo resultado de simetrización.

Lema 3.2.7. *Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}$ es una función uniformemente convexa e inferiormente semicontinua. Entonces existe una función uniformemente convexa e inferiormente semicontinua $h : X \to \mathbb{R}$ que es centralmente simétrica con*

$$0 = h(0) = \text{ínf}\{h(x) : x \in X\}.$$

Demostración. Podemos asumir que f es centralmente simétrica y uniformemente convexa reemplazando f por $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$. Obsérvese entonces que $f(0) = \text{mín}\{f(x) : x \in X\}$ y así, la función $h(x) = g(x) - g(0)$ satisface nuestros exigencias. □

Teorema 3.2.8. *Sea X un espacio de Banach. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) Existe una función inferiormente semicontinua y uniformemente convexa $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ tal que el interior del dominio de f es no vacío.

(b) X admite una norma equivalente uniformemente convexa.

(c) Existe $p \geq 2$ y una norma equivalente $\|\cdot\|$ en X tal que $f(x) = \|\cdot\|^p$ es uniformemente convexa.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b): Desplazamos f de forma que $0 \in \int(\text{dom}\, f)$. Por el lema 3.2.7 existe una función uniformemente convexa g que es centralmente simétrica, $g(x) \geq g(0)$ para todo $x \in X$, y el origen es un punto interior del dominio de g. Sea $r > 0$ tal que $B_{2r} \subset \text{dom}\, f$. Ahora, para $\|h\| = r$ tenemos

$$\frac{1}{2}g(h) + \frac{1}{2}g(0) - g\left(\frac{h}{2}\right) \geq \delta_g(r) > 0.$$

Así $g(h) \geq 2\delta_g(r)$ para todo h tal que $\|h\| = r$. Asumamos que la norma $|||\cdot|||$ cuya bola unidad es —vía el funcional de Minkowski— $B = \{x : g(x) \leq \delta_g(r)\}$. Hemos mostrado que $B \subset rB_{(X,\|\cdot\|)}$ y como 0 es un punto de continuidad de g —véase [68, Corollary 2.2.13]— entonces el origen es un punto interior de B por lo que la norma$|||\cdot|||$ es una norma equivalente en X.

Si $|||x_n||| = |||y_n||| = 1$ y

$$\frac{1}{2}|||x_n||| + \frac{1}{2}|||y_n||| - \left|\left|\left|\frac{x_n + y_n}{2}\right|\right|\right| \to 0,$$

entonces $d\left(\frac{x_n+y_n}{2}, S_{|||\cdot|||}\right) \to 0$. Como g es Lipschitz en B por [68, Corollary 2.2.12], esto significa que $g\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) \to \delta_g(r)$. Consecuentemente $\frac{1}{2}g(x_n) + \frac{1}{2}g(y_n) - g\left(\frac{x_n+y_n}{2}\right) \to 0$, luego la convexidad uniforme de g asegura que $\|x_n - y_n\| \to 0$ y por lo tanto $|||x_n - y_n||| \to 0$.

(b) $\Rightarrow$ (c): De acuerdo al conocido teorema de Pisier —Teorema 1.3.9—, existe $p \geq 2$ y una norma equivalente $\|\cdot\|$ cuyo módulo de convexidad es de tipo potencia p. Por lo tanto, el teorema 3.2.6 muestra que la función $\|\cdot\|^p$ es uniformemente convexa.

(c) $\Rightarrow$ (a): Esto es trivial. $\square$

Obsérvese que la función indicador de un único punto en cualquier espacio de Banach es trivialmente uniformemente convexa. Así, alguna condición acerca del interior del dominio de la función es necesaria en el teorema 3.2.8(a).

3.3 Ratio de Crecimiento de funciones uniformemente convexas y renormamiento.

En esta sección construiremos una norma uniformemente convexa cuyo módulo de convexidad está relacionado con el ratio de crecimiento de una función uniformemente convexa definida en un espacio de Banach y fijada, mejorando así el teorema 3.2.8.

Lema 3.3.1. *Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio de Banach X. Supongamos que $\|x\| = \|y\| \geq 1$, y $\|x - y\| \geq \delta$ donde $0 < \delta \leq 2\|x\|$. Entonces $\inf_{t\geq 0} \|x - ty\| \geq \delta/2$.*

Demostración. Asumamos que $\|x - t_0 y\| < \delta/2$ para algún $t_0 \geq 0$. Entonces $|1 - t_0|\,\|y\| < \delta/2$ y así
$$\|x - y\| \leq \|x - t_0 y\| + |1 - t_0|\,\|y\| < \delta.$$
que es una contradicción. $\square$

Lema 3.3.2. *Supongamos $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ es continua y convexa con $F(0) = 0$ y $F(t) > 0$ para $t > 0$. Supongamos para todo $n \geq N$ que $\{\|\cdot\|_n\}_{n\geq N}$ son normas en X con*
$$\frac{K}{\sqrt{F(2^n)}}\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_n \leq \frac{1}{2^n}\|\cdot\|,$$
para algún $K > 0$. Supongamos que $\|x\|_n = \|y\|_n = 1$ con $\|x - y\| \geq 1$ implica que
$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_n \leq 1 - \frac{C}{F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(2^n)}\right)}$$

para algún $C > 0$. Entonces el módulo de convexidad de la norma equivalente $|\cdot| = \sum_{n\geq N} \|\cdot\|_n$ satisface

$$\delta_{|\cdot|}(t) \geq \frac{R}{\sqrt{F(Mt^{-1})}F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(Mt^{-1})}\right)},$$

para ciertas constantes positivas R y M.

Demostración. Es claro que la norma $|\cdot|$ es equivalente a $\|\cdot\|$. Más aún, podemos encontrar un cierto escalar $k > 0$ tal que la norma $|||\cdot||| = k\,|\cdot|$ satisface

$$K'\,|||\cdot||| \leq \|\cdot\| \leq |||\cdot||| \text{ y } \frac{K'}{\sqrt{F(2^n)}}\,|||\cdot||| \leq \|\cdot\|_n \leq \frac{1}{2^n}\,\|\cdot\|$$

para algún $0 < K' < \frac{1}{2^{N-1}}$ y para todo $n \geq N$. Ahora, asumamos que $|||x||| = |||y||| = 1$ y $x \neq y$. Podemos elegir y fijar un cierto $n \geq N$ tal que

$$\frac{1}{K'2^{n-1}} \leq |||x-y||| < \frac{1}{K'2^{n-2}}. \tag{3.3.1}$$

Podemos sin pérdida de generalidad asumir que $\|x\|_n \leq \|y\|_n$. Ahora, denotemos $a = \|x\|_n^{-1}$ y $b = \|y\|_n^{-1}$. Entonces $2^n \leq b \leq a \leq \frac{\sqrt{F(2^n)}}{K'}$, y por lo tanto

$$|||ax - ay||| \geq \frac{a}{K'2^{n-1}} \geq \frac{2}{K'}.$$

De acuerdo con el lema 3.3.1 $|||ax - by||| \geq \frac{1}{K'}$, que implica $\|ax - by\| \geq 1$. Así computamos

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{ax+ay}{2}\right\|_n &\leq \left\|\frac{ax+by}{2}\right\|_n + \frac{1}{2}(a-b)\,\|y\|_n \\
&\leq \frac{1}{2}\,\|ax\|_n + \frac{1}{2}\,\|by\|_n + \frac{1}{2}(a-b)\,\|y\|_n - \frac{C}{F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(2^n)}\right)} \\
&= \frac{a}{2}(\|x\|_n + \|y\|_n) - \frac{C}{F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(2^n)}\right)}.
\end{aligned}$$

Esta desigualdad implica

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_n \leq \frac{1}{2}\,\|x\|_n + \frac{1}{2}\,\|y\|_n - \frac{C}{aF\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(2^n)}\right)}. \tag{3.3.2}$$

Así, usando (3.3.2), y la desigualdad triangular en $\|\cdot\|_j$ para $j \neq n$, tenemos

$$\left|\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|\right| \leq \frac{k}{2}\sum_{j\geq N}\|x\|_j + \frac{k}{2}\sum_{j\geq N}\|y\|_j - \frac{K'kC}{\sqrt{F(2^n)}F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(2^n)}\right)}.$$

Denotemos $M = 4/K'$ y $R = K' \cdot k \cdot C$. Sea $t = |||x - y|||$, de acuerdo con (3.3.1)), $t \le \frac{1}{K'2^{n-2}}$ y así $F(2^n) \le F\left(\frac{4}{tK'}\right)$. Por lo tanto

$$\left|\left|\left|\frac{x+y}{2}\right|\right|\right| \le 1 - \frac{R}{\sqrt{F(Mt^{-1})}F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(Mt^{-1})}\right)},$$

lo que termina la prueba, puesto que $\delta_{|||\cdot|||} = \delta_{|\cdot|}$. □

Lema 3.3.3. *Supongamos que $f : X \to \mathbb{R}^\bullet$ es una función convexa e inferiormente semicontinua.*

(a) Si f es uniformemente convexa, entonces $\liminf_{\|x\|\to\infty} \frac{f(x)}{\|x\|^2} > 0$.

(b) Supongamos $f(x) \le F(\|x\|)$ para todo x y $F : [0, +\infty) \to [0, +\infty]$ es no decreciente. Si $x_0 \ne 0$, y $f(x_0) \ge 0$, entonces

$$\sup_{\|h\|=1} f'(x_0, h) \le F(2\|x_0\|)/\|x_0\|.$$

Demostración. ((a)) Este resultado se muestra en [68, Proposition 3.5.8].

((b)) Asumiendo que $x_0 \ne 0$, $f(x_0) \ge 0$ y $\|h\| = 1$, tenemos

$$f'(x_0, h) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t} \le \frac{f(x_0 + \|x_0\| h) - f(x_0)}{\|x_0\|} \le \frac{F(2\|x_0\|)}{\|x_0\|},$$

donde la primera desigualdad se sigue de la convexidad de f. □

Teorema 3.3.4. *Sea X un espacio de Banach y sea $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y uniformemente convexa que satisface $f(x) \le F(\|x\|)$ para todo $x \in X$ para cierta función real no negativa F tal que $F(0) = 0$. Entonces X admite una norma equivalente $|\cdot|$ tal que*

$$\delta_{|\cdot|}(t) \ge \frac{R}{\sqrt{F(Mt^{-1})}F\left(S\sqrt{F(Mt^{-1})}\right)},$$

para ciertas constantes positivas R,M y S.

Demostración. Antes de nada, substituyendo f por $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ podemos asumir que f es centralmente simétrica. Usando la conjugación de Fenchel obtenemos $f(x) \le F^{**}(\|x\|)$ para todo $x \in X$. De acuerdo con el lema 3.3.3 elegimos $N \in \mathbb{N}$ y $K > 0$ tal que $f(x) \ge K^2\|x\|^2$ siempre que $\|x\| \ge N$. Así tenemos

$$K^2\|x\|^2 \le f(x) \le F^{**}(\|x\|) \text{ siempre que } \|x\| \ge N.$$

Para $n \geq N$, consideramos las normas $|\cdot|_n$ que tienen como bola unidad $B_n = \{x : f(x) \leq F^{**}(2^n)\}$ —véase dualidad bola-norma en el capítulo 1. Para cualquier $x \in X \setminus \{0\}$, $f(x/|x|_n) = F^{**}(2^n)$. Por lo tanto $F^{**}(\|x\|/|x|_n) \geq F^{**}(2^n)$. Como $F(0) = 0$, F^{**} y $F^{**}(s)/s$ son no decrecientes. Esto implica que $\|x\| \geq 2^n |x|_n$. Análogamente, usando que $K^2 \|x/|x|_n\|^2 \leq f(x/|x|_n)$ uno obtiene $\sqrt{F^{**}(2^n)}\,|x|_n \geq K\|x\|$. Consecuentemente,

$$\frac{K}{\sqrt{F^{**}(2^n)}}\|x\| \leq |x|_n \leq \frac{1}{2^n}\|x\|.$$

Ahora, supongamos que $|x|_n = |y|_n = 1$, y $\|x-y\| \geq 1$. Siendo δ_f el módulo de convexidad de f respecto a $\|\cdot\|$, la convexidad uniforme de f asegura que $\delta_f(1) > 0$. Entonces denotando $z = \frac{x+y}{2}$ y $z' = z/|z|_n$ obtenemos

$$\begin{aligned}\delta_f(1) \leq f(z') - f(z) &= \frac{f(z) - f(z')}{-1} \leq f'\left(z', z'-z\right)\\ &= \left\|z'-z\right\| f'\left(z, \frac{z'-z}{\left\|z'-z\right\|}\right) \leq M_n \left\|z'-z\right\|,\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

donde $M_n = \sup\{f'(u,v) : |u|_n = 1, \|v\| = 1\}$. Usando el hecho de que $F^{**}(r)/r$ es no decreciente para $r > 0$ —véase [59]— junto con el lema 3.3.3 y observando que $f(u) \geq 0$ cuando $|u|_n = 1$, obtenemos

$$M_n \leq F^{**}\left(2\frac{\sqrt{F^{**}(2^n)}}{K}\right) / \frac{\sqrt{F^{**}(2^n)}}{K} \tag{3.3.4}$$

Consecuentemente, usando $|\cdot|_n \geq \frac{K}{\sqrt{F^{**}(2^n)}}\|\cdot\|$, (3.3.3) y entonces (3.3.4), obtenemos

$$\begin{aligned}\left|\frac{x+y}{2}\right|_n &\leq 1 - \|z'-z\| \frac{K}{\sqrt{F^{**}(2^n)}} \leq 1 - \frac{\delta_f(1)}{M_n} \cdot \frac{K}{\sqrt{F^{**}(2^n)}}\\ &\leq 1 - \frac{\delta_f(1)}{F^{**}\left(\frac{2}{K}\sqrt{F^{**}(2^n)}\right)}.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Aplicando el lema 3.3.2, y observando que $F^{**} \leq F$, obtenemos que

$$\delta_{|\cdot|}(t) \geq \frac{R}{\sqrt{F^{**}(Mt^{-1})}F^{**}\left(\frac{2}{K}\sqrt{F^{**}(Mt^{-1})}\right)} \geq \frac{R}{\sqrt{F(Mt^{-1})}F\left(\frac{2}{K}\sqrt{F(Mt^{-1})}\right)}.$$

Esto completa la demostración. □

Corolario 3.3.5. *Sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ una función uniformemente convexa que satisface $f(x) \leq \|x\|^p$ para cierto $p \geq 2$ y para todo $x \in X$. Entonces X admite una norma con módulo de convexidad de tipo potencia $\frac{p}{2}(p+1)$.*

Demostración. Aplicando el teorema 3.3.4 para $F(t) = t^p$ obtenemos una norma equivalente $|\cdot|$ y constantes positivas R, M y S tales que

$$\begin{aligned}\delta_{|\cdot|}(t) &\geq \frac{R}{\sqrt{(Mt^{-1})^p}\left(S\sqrt{(Mt^{-1})^p}\right)^p} = \frac{R}{\left(\frac{M}{t}\right)^{\frac{p}{2}} S^p \left(\frac{M}{t}\right)^{\frac{p^2}{2}}} \\ &= \frac{R}{S^p M^{\frac{p}{2}(p+1)}} t^{\frac{p}{2}(p+1)},\end{aligned}$$

i.e., existe una constante positiva K tal que $\delta_{|\cdot|}(t) \geq K t^{\frac{p}{2}(p+1)}$. $\square$

3.3.1 Un resultado ajustado para $p = 2$.

En esta sección, mejoraremos el resultado establecido en el corolario 3.3.5 en el caso $p = 2$ obteniendo el resultado óptimo de que si X tiene una función uniformemente convexa acotada superiormente por $\|\cdot\|^2$ entonces existe una norma equivalente en X con módulo de convexidad de *tipo potencia* 2. Nos remitimos a [19] para información adicional relativa a este caso. Empezamos con algunos resultados preliminares.

Sea X un espacio de Banach. Como vimos en el capítulo 1, podemos asociar a X el módulo

$$\widetilde{\delta}_X(\varepsilon) = \sup_{\tau \geq 0} \left\{ \frac{1}{2}\tau\varepsilon - \rho_{X^*}(\tau) \right\},$$

donde $\varepsilon \in [0, 2]$. Recordemos que $\widetilde{\delta}_X$ y δ_X son funciones *equivalentes* —lema 1.3.6 e identidad de Lindenstrauss.

Como vimos en el capítulo 2, el módulo de diferenciabilidad asociado a X satisface la proposición 2.2.1. Es más, vimos que esta propiedad caracteriza a aquellas funciones que son módulo de diferenciabilidad de un espacio de Banach —módulo *equivalencia.*

Lema 3.3.6. *Sea X un espacio de Banach. Supongamos que $\{\|\cdot\|_n\}_{n \geq N}$ son normas en $(X, \|\cdot\|)$ tales que para cierto $K > 0$ y para todo $n \geq N$, uno tiene*

$$K\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_n \leq \|\cdot\|.$$

Entonces existe una norma equivalente $|\cdot|$ tal que para todo $n \geq N$

$$\delta_{|\cdot|}(t) \geq R_0 \delta_{\|\cdot\|_n}(t),$$

donde $R_0 > 0$ es una constante universal.

Demostración. Una norma con la propiedad requerida puede definirse mediante la fórmula

$$|x|^2 = \sum_{n \geq N} a_n \|x\|_n^2,$$

donde a_n satisface $\sum_{n\geq N} a_n = \left(\frac{K}{2K_0L}\right)^2$ y donde L es la constante universal de la proposición 2.2.1.

Fijamos $n \geq N$ y denotamos $Y = \ell_2(X, \|\cdot\|_n)$. Aplicando [24, Prop. 19] con $M(t) = t^2$ y $X_i = (X, \|\cdot\|_n)^*$ uno tiene que

$$\rho_{Y^*}(\tau) \leq K_0 \sup_{\tau\leq u\leq 1} \rho_{(X,\|\cdot\|_n)^*}(\tau/u)u^2,$$

donde K_0 no depende de X ni de $\|\cdot\|_n$. Ahora, aplicando la proposición 2.2.1 obtenemos

$$\rho_{Y^*}(\tau) \leq K_0 L \rho_{(X,\|\cdot\|_n)^*}(\tau),$$

y por dualidad

$$\delta_Y(\varepsilon) \geq \widetilde{\delta}_Y(\varepsilon) \geq K_0 L \widetilde{\delta}_{(X,\|\cdot\|_n)}(\varepsilon/K_0L) \geq K_0 L \delta_{(X,\|\cdot\|_n)}(\varepsilon/2K_0L),$$

para todo $0 \leq \varepsilon < 2$.

De la prueba de [24, Prop. 18] uno obtiene que $\delta_{(X,|\cdot|)}(\varepsilon) \geq \frac{1}{2}\delta_Y(c\varepsilon)$, donde $c = 2K_0L$. Por lo tanto

$$\delta_{(X,|\cdot|)}(\varepsilon) \geq \frac{K_0 L}{2} \delta_{(X,\|\cdot\|_n)}(\varepsilon),$$

que termina la demostración. $\square$

Ahora podemos completar nuestro resultado final del capítulo.

Teorema 3.3.7. *Sea X un espacio de Banach y $f : X \to \mathbb{R}$ una función continua y uniformemente convexa que satisface $f(x) \leq \|x\|^2$ para todo $x \in X$. Entonces X admite una norma con módulo de convexidad de tipo potencia 2.*

Demostración. De nuevo, reemplazar f por $\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ claramente conserva la convexidad uniforme de f y nos permite asumir que $f(-x) = f(x)$ para todo $x \in X$. De acuerdo con el lema 3.3.3 podemos elegir $N \in \mathbb{N}$ y $K > 0$ tal que $f(x) \geq K^2 \|x\|^2$ siempre que $\|x\| \geq N$. Así tenemos

$$K^2 \|x\|^2 \leq f(x) \leq \|x\|^2 \text{ siempre que } \|x\| \geq N.$$

Para $n \geq N$, sea $|\cdot|_n$ la norma cuya bola unidad es $B_n = \{x : f(x) \leq 2^{2n}\}$.

Para cualquier $x \in X\backslash\{0\}$, $f(x/|x|_n) = 2^{2n}$. Por lo tanto, usando $f(x) \leq \|x\|^2$, obtenemos $\|x\| \geq 2^n |x|_n$. Análogamente, usando que $K^2 \|x/|x|_n\|^2 \leq f(x/|x|_n)$ uno obtiene $2^n |x|_n \geq K\|x\|$. Consecuentemente,

$$\frac{K}{2^n}\|x\| \leq |x|_n \leq \frac{1}{2^n}\|x\|.$$

Consideramos $|x|_n = |y|_n = 1$, esto es $f(x) = f(y) = 2^{2n}$, con $|x-y|_n \geq 1/2^n$. Entonces $\|x-y\| \geq 1$, y denotando $z = \frac{x+y}{2}$, $z' = z/|z|_n$ y $M_n = \sup\{f'(u,v) : |u|_n = 1, \|v\| = 1\}$, como en (3.3.3) en la demostración del teorema 3.3.4 uno tiene

$$0 < \delta_f(1) \leq M_n \left\|z' - z\right\| \tag{3.3.6}$$

Puesto que $f(x) \leq \|x\|^2$, y procediendo como en (3.3.4) obtenemos

$$M_n \leq \left(2 \cdot \frac{2^n}{K}\right)^2 / \frac{2^n}{K} = \frac{4(2^n)}{K}. \tag{3.3.7}$$

Usando $|\cdot|_n \geq \frac{K}{2^n}\|\cdot\|$, (3.3.6), (3.3.7) y procediendo como en (3.3.5), obtenemos

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|_n \leq 1 - \delta_f(1)\frac{K}{2^{n+2}} \cdot \frac{K}{2^n} = 1 - \frac{C}{2^{2n}}.$$

donde $C = \delta_f(1)K^2/4$. Esto implica que

$$\delta_{|\cdot|_n}\left(\frac{1}{2^n}\right) \geq C\left(\frac{1}{2^n}\right)^2.$$

Para un cierto $n \geq N$ fijado, consideramos $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ y la constante $R = \frac{CR_0}{4L}$ donde L es la constante de Figiel de la proposición 2.2.1.Entonces

$$C = \frac{C}{2^{2n}} \cdot \frac{1}{2^{-2n}} \leq \frac{\delta_{|\cdot|_n}(2^{-n})}{2^{-2n}} \leq 4L\frac{\delta_{|\cdot|_n}(k2^{-n})}{k^2 2^{-2n}}.$$

Esto implica

$$\delta_{|\cdot|_n}\left(\frac{k}{2^n}\right) \geq \frac{R}{R_0}\left(\frac{k}{2^n}\right)^2.$$

Para cada $n \geq N$, consideramos la nueva norma $\|\cdot\|_n = 2^n |\cdot|_n$. Estas normas satisfacen

$$K\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_n \leq \|\cdot\| \text{ y } \delta_{|\cdot|_n}(\cdot) = \delta_{\|\cdot\|_n}(\cdot).$$

Aplicando el lema 3.3.6 obtenemos una norma equivalente $|\cdot|$ en X tal que $\delta_{|\cdot|}(t) \geq R_0\delta_{\|\cdot\|_n}(t)$ para $n \geq N$.

Finalmente, fijamos n_0 y $k \leq 2^{n_0}$. Para cualquier $n \geq n_0$ tenemos que $\frac{k}{2^{n_0}} = \frac{k2^{n-n_0}}{2^n}$. Por lo tanto $\delta_{\|\cdot\|_n}\left(\frac{k}{2^{n_0}}\right) = \delta_{\|\cdot\|_n}\left(\frac{k2^{n-n_0}}{2^n}\right) \geq \frac{R}{R_0}\left(\frac{k}{2^{n_0}}\right)^2$, que implica que

$$\delta_{|\cdot|}\left(\frac{k}{2^{n_0}}\right) \geq R\left(\frac{k}{2^{n_0}}\right)^2.$$

En el párrafo anterior hemos visto que $\delta_{|\cdot|}(t) \geq Rt^2$ para todo t en el conjunto

$$\mathscr{D} = \left\{\frac{k}{2^n} : n \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq 2^n\right\}.$$

Como $\mathscr{D}$ es denso en $[0,1]$ y como $\delta_{|\cdot|}(\cdot)$ es continua [35], tenemos que $\delta_{|\cdot|}(t) \geq Rt^2$, que termina la demostración. □

La mayor parte de resultados contenidos en este capítulo son parte de [9], trabajo conjunto del autor de esta memoria con J. Borwein, P. Hájek y J. Vanderwerff.

Capítulo 4

Bases de Schauder bajo renormamientos uniformes

4.1 Introducción.

El objetivo de este capítulo es estudiar el buen comportamiento de las Bases de Schauder en relación con los renormamientos uniformemente convexos y uniformemente Fréchet diferenciables. Empecemos recordando la noción de Base de Schauder.

Definición 4.1.1. Una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach X es una *base de Schauder* de X si para cada vector $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n.$$

Una sucesión $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ que es base de Schauder de su envoltura lineal cerrada $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$, se llama *sucesión básica.*

A lo largo de esta memoria no vamos a considerar otro tipo de base diferente a las de Schauder. Así pues, omitiremos con frecuencia la palabra Schauder.

Evidentemente, un espacio X con una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ puede considerarse como un espacio de sucesiones identificando cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ con la unívocamente determinada sucesión de coeficientes $(a_1, a_2, \dots)$. Es importante tener en cuenta que para la descripción de una base de Schauder uno ha de considerar no sólo un conjunto sino una sucesión ordenada de vectores. En efecto, dada una permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, y $x \in X$ no tiene por qué ocurrir que $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} e_{\pi(n)}$ converja en X. Veremos más adelante que la posibilidad de ignorar el orden de la base está relacionado con el concepto de incondicionalidad.

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para cada $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ en X la cantidad $\|x\|_0 = \sup \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\|$ es finita. Evidentemente, $\|\cdot\|_0$ es una norma en X y $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_0$. Por el teorema de la aplicación abierta, puesto que X es completo respecto de $\|\cdot\|_0$, se deduce que las normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|_0$ son equivalentes [17, Lema 6.4]. Es decir,

Proposición 4.1.2 ([49, Prop. 1.a.2]). *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces las proyecciones $P_n : X \to X$, definidas por $P_n\big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\big) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i$, son operadores lineales continuos y* $\sup \|P_n\| < \infty$.

Las proyecciones $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ reciben el nombre de *proyecciones naturales* asociadas a la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$; llamaremos *constante de la base* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ al número $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\big(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\big) = \sup_n \|P_n\|$. Una base cuya constante de base es 1 se dice *monótona*. En otras palabras, una base es monótona si, para cualquier elección de escalares $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, la sucesión $\{\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\|\}_{n=1}^{\infty}$ es no decreciente o, equivalentemente cuando las proyecciones de la bola unidad siguen estando en la bola unidad. Toda base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona respecto de la norma $\|x\|_0 = \sup_n \{\|P_n(x)\|\}$ que ha sido definida antes. En efecto, dado $n \in \mathbb{N}$ y $x \in X$,

$$\|P_n(x)\|_0 = \sup_{m\in\mathbb{N}} \|P_m(P_n(x))\| = \max_{i\leq n} \|P_i(x)\| \leq \|x\|_0 \,,$$

esto es, $\|P_n\|_0 = 1$.

Así, dada una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X, podemos considerar una norma equivalente en X respecto a la cual la base es monótona.

Existe un criterio simple y útil para comprobar si una sucesión de vectores es o no una sucesión básica, relacionada a su vez con la constante de base.

Proposición 4.1.3 ([49, Prop. 1.a.3]). *Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en X. Entonces $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica de X si y sólo si se satisfacen las siguientes dos condiciones.*

(a) $e_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

(b) Existe una constante K tal que, para cualquier elección de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y naturales $n < m$, tenemos

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i e_i\right\|$$

Si además $\overline{\mathrm{span}}\,\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = X$ *entonces la sucesión es base de Schauder.*

Observemos que la menor constante K que satisface la proposición anterior es precisamente la *constante de la base*, $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\big(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\big)$ [17, Prop. 6.13].

4.1.1 Bases de Schauder y Dualidad.

Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ la aplicación lineal e_n^* definida por $e_n^*\big(\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i\big) = a_n$ es, por la proposición 4.1.2, un funcional continuo. En efecto $e_n^*(\cdot)e_n = P_n - P_{n-1}$, de donde $\|e_n^*\|\,\|e_n\| \leq 2\,\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\big(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\big)$. Estos funcionales, caracterizados por la relación $e_n^*(e_m) = \delta_{n,m}$, se denominan *funcionales biortogonales* asociados a la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Al igual que la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ establece una identificación del espacio X con un espacio de sucesiones, sus funcionales biortogonales permiten establecer cierta correspondencia del dual X^*. En efecto, sean $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ las proyecciones naturales asociadas a la base. Para cada elección de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ y para naturales $n < m$ tenemos

$$P_n^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_i e_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i e_i^*.$$

Luego, aplicando la proposición 4.1.3, la sucesión $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica en X^* cuya constante de base es idéntica a aquella de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ puesto que $\|P_n\| = \|P_n^*\|$.

Como $\|P_n(x) - x\| \to 0$, para cada $x \in X$, tenemos que $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} x^*(e_n)e_n^*$ para cada $x^* \in X^*$, donde la convergencia de la serie es en la topología ω^*. En general, la expansión no converge en norma. Tendríamos convergencia en norma si y solamente si la sucesión $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de X^* —proposición 4.1.3—, esto es, si y solamente si la envoltura lineal y cerrada de los elementos de $base[*]$ es X^*. Para ello es necesario que el dual sea separable; así, para $X = \ell_1$ o $X = C[0,1]$ no puede ocurrir para ninguna base. Por otro lado esto es siempre cierto si el espacio es reflexivo.

Definición 4.1.4 ([49, Prop. 1.b.1]). Una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *contractiva* si la sucesión de sus funcionales asociados $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es base de Schauder en X^*.

Otro concepto importante relacionado con bases y que es en cierto sentido dual a la propiedad de ser contractiva es ser acotadamente completa.

Definición 4.1.5 ([49, Def. 1.b.3]). Una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es *acotadamente completa* si para cualquier sucesión de escalares $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$ tal que $\sup_n \|\sum_{i=1}^{n} a_i e_i\| < \infty$, la serie $\sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ es convergente.

Combinando los conceptos anteriores se obtiene la siguiente caracterización de la reflexividad en términos de bases.

Teorema 4.1.6 ([49, Teo. 1.b.5]). *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces X es reflexivo si y sólo si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es contractiva y acotadamente completa.*

En el teorema anterior hemos considerado fijada una base en X. En [69] M. Zippin mostró que si consideramos todas las bases en un espacio dado es suficiente usar sólo una de las dos propiedades que aparecen en 4.1.6. Es decir, obtuvo el siguiente resultado.

Teorema 4.1.7 ([69]). *Sea X un espacio de Banach con base. Entonces X es reflexivo si y sólo si toda base en X es contractiva o alternativamente, si toda base en X es acotadamente completa.*

4.1.2 Bases Incondicionales.

La existencia de una base de Schauder en un espacio de Banach no aporta demasiada información sobre la estructura del espacio. Si se quiere estudiar en mayor detalle la estructura de un espacio de Banach usando bases será necesario considerar bases con varias propiedades especiales. Anteriormente hemos hablado de dos de estos tipos especiales de bases: contractivas y acotadamente completas. Sin duda, el tipo más útil y ampliamente estudiado es el de las bases incondicionales.

Antes de introducir el concepto de bases incondicionales presentamos algunos resultados básicos en relación a las convergencia incondicional.

Proposición 4.1.8 ([49, Prop. 1.c.1]). *Sea $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de vectores en un espacio de Banach X. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes.*

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ converge cualquiera que sea la permutación de naturales $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) Para cada $\varepsilon > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\left\|\sum_{i\in F} x_i\right\| < \varepsilon$ para cualquier conjunto finito F de $\mathbb{N}$ con $\min\{i : i \in F\} > n$.

Una serie $\sum_{n=1}^{\infty}$ que satisface una, y por tanto ambas condiciones, se dice incondicionalmente convergente.

Observación 4.1.9. Puede comprobarse fácilmente que si $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge incondicionalmente entonces la suma de $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ no depende de la permutación π.

Definición 4.1.10 ([49, Def. 1.c.5]). Una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de un espacio de Banach X es incondicional si para cada $x \in X$, su expansión en términos de la base $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ converge incondicionalmente.

La observación 4.1.9 nos está diciendo que una base incondicional ya no es más, o no ha de serlo, un conjunto ordenado. Mientras que en una base de Schauder ordinaria es fundamental el orden de la sucesión, en bases incondicionales este orden carece de sentido puesto que cualquier permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ define otra base $\left\{e_{\pi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que los espacios de sucesiones asociados son isométricos.

Proposición 4.1.11 ([49, Prop. 1.c.6]). *Una sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es incondicional si y sólo si satisface al menos una de las siguientes condiciones.*

(a) La sucesión $\left\{e_{\pi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es básica para cualquier permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

(b) La convergencia de $\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n$ implica la convergencia de $\sum_{n\in F} a_n e_n$ para cualquier $F \subset \mathbb{N}$.

Se sigue de (b) y del teorema de la gráfica cerrada que si $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión básica incondicional y F es cualquier subconjunto de los naturales entonces existe una proyección acotada P_F definida en $\overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ por

$$P_F\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n e_n\right) = \sum_{n\in F} a_n e_n.$$

Estas proyecciones reciben el nombre de *proyecciones naturales asociadas a la sucesión básica incondicional*. Para los conjuntos de la forma $F = \{1, 2, \ldots, n\}$ las proyecciones P_F coinciden con las proyecciones P_n que son las proyecciones naturales asociadas a la sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. El principio de acotación uniforme implica que $\sup_F \{\|P_F\|\}$ es finito.

A la constante $\operatorname{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sup_F \{\|P_F\|\}$ la llamaremos *constante incondicional* de la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ respecto de la norma $\|\cdot\|$. Obsérvese que para cada permutación $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\operatorname{bc}_{\|\cdot\|}\left(\left\{e_{\pi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}\right) \le \operatorname{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right).$$

Es decir, una base incondicional $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ con $\operatorname{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$ satisfacen que cualquiera de las bases de Schauder $\left\{e_{\pi(n)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona respecto a $\|\cdot\|$. Estas bases reciben el nombre de *incondicionalmente monótonas*.

Toda base de Schauder incondicional $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona respecto de la norma $\|x\|_0 = \sup_{F\in 2^{<\mathbb{N}}} \{\|P_F(x)\|\}$. En efecto, dado $G \in 2^{<\mathbb{N}}$ y $x \in X$,

$$\|P_G(x)\|_0 = \sup_{F\in 2^{<\mathbb{N}}} \|P_F(P_G(x))\| = \sup_{F\in 2^{<\mathbb{N}}} \|P_{F\cap G}(x)\| \le \|x\|_0\,,$$

esto es, $\|P_G\|_0 = 1$ y $\operatorname{ubc}_{\|\cdot\|_0}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$. Así, dada una base incondicional $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ de X, podemos considerar una norma equivalente en X respecto a la cual la base es incondicionalmente monótona.

4.2 Bases de Schauder y renormamientos uniformes.

Hemos visto que todo espacio de Banach separable con base de Schauder puede renormarse para conseguir que la base sea monótona. Es decir, dado el espacio $(X, \|\cdot\|)$ y definiendo la norma equivalente $\|\cdot\|_0$ que introdujimos en la página 88, tenemos una norma equivalente que hace monótona a la base. Sin embargo, desde el punto de vista del renormamiento, $|||\cdot|||_0$ no tiene por qué conservar las propiedades geométricas que $\|\cdot\|$ posee.

La pregunta sobre la existencia de buenos renormamientos que hacen monótona una base dada, ha recibido alguna atención en el pasado. Por ejemplo, es bien conocido el hecho de que todo espacio de Banach separable tiene un renormamiento (LUR), más aún la colección de todos los renormamientos (LUR) es residual en el espacio —métrico— de todos los renormamientos —véase [17]. Es, por tanto, bastante natural esperar que para todo espacio de Banach separable con base de Schauder exista un renormamiento (LUR) haciendo monótona la base. Éste es, en efecto, el caso y la prueba se sigue a lo largo de la prueba original de Kadec sobre renormamiento (LUR) —véase [31]. Resultados similares son ciertos para diferenciabilidad Gâteaux y diferenciabilidad uniforme Gâteaux .

Por otra lado, sorprendentemente, la situación para renormamientos diferenciables Fréchet es diferente. Dado X un espacio de Banach separable, éste admite una norma equivalente Fréchet diferenciable si y solamente si X^* es separable [17, II. Cor. 3.3]. En este caso, el conjunto de tales renormamientos —cuyo dual es (LUR)— es, de nuevo, residual entre todos los renormamientos. No obstante tenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.2.1. *Sea X un espacio de Banach con dual separable —en particular con un renormamiento equivalente diferenciable Fréchet —, y una base de Schauder. Entonces X es reflexivo si y sólo si para toda base de Schauder de X existe algún renormamiento Fréchet diferenciable de X que hace la base monótona.*

Demostración. Si X es reflexivo, entonces X^* es separable y por el Teorema 4.1.6 la base $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es contractiva, es decir $\{e_n^*\}_{n=1}^\infty$ es base de X^*. Aplicando el conocido resultado de Kadec [31, Teo. 3.3.5] encontramos una norma equivalente localmente uniformemente convexa $|\cdot|$ en X^* que hace monótona la base $\{e_n^*\}_{n=1}^\infty$. Así pues, por el corolario 1.2.7, la norma predual $|\cdot|$ en X es Fréchet diferenciable y hace monótona la base $\{e_n\}_{n=1}^\infty$.

Por otro lado, si $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una base monótona de $(X, |||\cdot|||)$ y $|||\cdot|||$ es Fréchet diferenciable entonces por [22, Teo. 8.34] la base $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es contractiva. Así para espacios que satisfacen la segunda condición, toda base de Schauder es contractiva. El teorema 4.1.7 nos asegura que esta condición es equivalente a la reflexividad, con lo que acabamos la prueba. □

Como consecuencia inmediata, en todo espacio de Banach no reflexivo con dual separable y base de Schauder —cómo c_0—, existe otra base de Schauder que no es monótona bajo ningún renormamiento diferenciable Fréchet de X —en contraposición a la gran cantidad de renormamientos diferenciable Fréchet para este espacio.

En esta sección resolvemos afirmativamente los casos uniformes, es decir los relativos a renormamientos uniformemente convexos (UC) y uniformemente Fréchet diferenciable (UF), resolviendo una pregunta de Godefroy —que aparece explícitamente en [23]— y comunicada al autor por V. Zizler. Nos gustaría agradecerle a Václav Zizler haber sugerido el problema así como sus observaciones y consejos relativos al resultado que presentamos.

4.2.1 Construcción Preliminar.

Sea X un espacio de Banach dotado de una norma $\|\cdot\|$ uniformemente Fréchet diferenciable, y una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nuestro objetivo es mostrar que existe una norma equivalente uniformemente Fréchet diferenciable en X que hace monótona la base. Por tanto, supondremos que la constante de base $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ es estrictamente mayor que la unidad. Entonces, podemos considerar la norma $\|x\|_0 = \sup\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ que hace la base monótona —pero por supuesto no (UF), en general.

Vamos a seguir un proceso geométrico para definir la nueva norma, así que hablaremos indistintamente de *bolas* y normas, teniendo en cuenta la equivalencia establecida en el capítulo 1, sección 1.1.

A lo largo de esta sección denotemos por B y B_0 respectivamente las *bolas*:

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \text{ y } B_0 = \{x \in X : \|x\|_0 \leq 1\}.$$

Por la definición de *constante de base* es claro que, $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_0 \leq \mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)\|\cdot\|$, y por tanto que $B_0 \subset B \subset \mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)B_0$. Es claro que para $k \geq \mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ fijado, las dos expresiones anteriores siguen siendo ciertas si substituimos $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ por k.

Para cualquier número natural n, denotaremos por $\mathbb{E}_n$ al rango de la n-ésima proyección natural P_n, esto es, $P_nX = \mathbb{E}_n$; por B_n' la imagen $P_n\left(\frac{1}{k}B\right)$; y para cada $y \in \mathbb{E}_n$, por $B_n'(y)$ el conjunto $y + B_n'$. En particular $B_n'(0) = B_n'$ es una *bola* de $\mathbb{E}_n$. Para cualquier $y \in \mathbb{E}_n$ el conjunto $B_n'(y)$ es un trasladado de una *bola* de $\mathbb{E}_n$. Vamos a definir inductivamente una sucesión $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ de *bolas* de $\mathbb{E}_n$ como sigue. Para $n = 1$ definimos $B_1 := B_0 \cap \mathbb{E}_1$.

Habiendo definido B_n para $n \geq 1$, definimos entonces

$$B_{n+1} := \bigcup_{y \in \mathbb{B}_{n+1}} B_{n+1}'(y),$$

donde

$$\mathbb{B}_{n+1} := \left\{y \in \mathbb{E}_{n+1} : \; P_n(B_{n+1}'(y)) \subset B_n, \; B_{n+1}'(y) \cap B_0 \neq \emptyset\right\}.$$

Puede verse, por ejemplo, la construcción de B_2 en la figura 4.1.

En primer lugar, vamos a ver que la familia $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ está uniformemente acotada en X y que tiene interior no vacío respecto a la topología de $\mathbb{E}_n$. Más aún

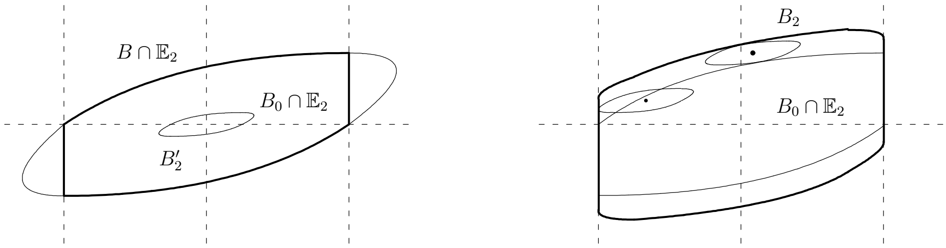

Figura 4.1:

Lema 4.2.2. *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene:*

$$\frac{1}{k} B \cap \mathbb{E}_n \subset B_n \subset 3B \cap \mathbb{E}_n.$$

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y $x \in B_n$. Por la definición de B_n existen y, $z \in \mathbb{E}_n$ tales que $x \in B'_n(y)$, $z \in B_0 \cap B'_n(y)$ y $P_{n-1}(B'_n(y)) \subset B_{n-1}$. Así pues, los vectores $x - y$, $z - y$ están en B'_n. Como $kB'_n = P_n B$, existen x', $z' \in B$, tales que $P_n(x') = k(x-y)$ y $P_n(z') = k(z-y)$, de donde se deduce que

$$\|x - y\| = \frac{1}{k}\|P_n(x')\| \leq \frac{1}{k}\|P_n\|\|x'\| \leq 1,$$
$$\|z - y\| = \frac{1}{k}\|P_n(z')\| \leq \frac{1}{k}\|P_n\|\|z'\| \leq 1.$$

Como $z \in B_0$ y $B_0 \subset B$, tenemos que $\|z\| \leq 1$. Por lo tanto $\|x\| \leq 3$, es decir $B_n \subset 3B \cap \mathbb{E}_n$.

La segunda parte de esta prueba es una consecuencia directa del siguiente lema, ya que $B \cap \mathbb{E}_n \subset P_n(B)$. En efecto, como $0 \in \mathbb{B}_n$ se tiene $B_n \supset B'_n = (1/k)P_n(B) \supset (1/k)B \cap \mathbb{E}_n$. $\square$

Lema 4.2.3. *Para todo número natural* n*, el conjunto* $\mathbb{B}_n$ *es no vacío. Más aún,* $0 \in \bigcap_{n \geq 1} \mathbb{B}_n$.

Demostración. En primer lugar, obsérvese que $B'_1 \subset B_1$. En efecto, como B_0 es monótona

$$B'_1 = P_1\left(\frac{1}{k}B\right) \subset P_1(B_0) \subset B_0 \cap \mathbb{E}_1 = B_1.$$

Afirmamos que para cualquier $n \in \mathbb{N}$, 0 está en $\mathbb{B}_n$ si y sólo si $B'_1 \subset B_1$. Si probamos tal afirmación habremos terminado la prueba. Para ello procederemos por inducción sobre n.

Para $n = 2$, 0 está en $\mathbb{B}_2$ si y sólo si $P_1(B'_2) \subset B_1$, puesto que B'_2 siempre corta a B_0 —la intersección contiene al menos el origen. Pero

$$P_1(B'_2) = P_1\left(P_2\left(\frac{1}{k}B\right)\right) = B'_1,$$

que termina la prueba de este caso.

Si la equivalencia es cierta para $n-1 \geq 2$, entonces $0 \in \mathbb{B}_n$ si y sólo si $P_{n-1}(B'_n) \subset B_{n-1}$, puesto que la intersección entre B'_n y B_0 es siempre no vacía —contiene el origen. Además

$$P_{n-1}(B'_n) = P_{n-1}\left(P_n\left(\frac{1}{k}B\right)\right) = P_{n-1}\left(\frac{1}{k}B\right) = B'_{n-1}.$$

Por lo tanto $0 \in \mathbb{B}_n$ si y sólo si $0 \in \mathbb{B}_{n-1}$ que, por hipótesis de inducción, es equivalente a $B'_1 \subset B_1$. $\square$

Vamos a comprobar ahora que los conjuntos $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ son *bolas* en $\mathbb{E}_n$. Esto es, que sus respectivos funcionales de Minkowski definen normas en $\mathbb{E}_n$.

Lema 4.2.4. *Para cada $n \in \mathbb{N}$, el conjunto B_n es una* bola *en $\mathbb{E}_n$.*

Demostración. Por el lema 4.2.2 es claro que para cualquier n, el conjunto B_n está acotado y contiene el origen como punto interior. Para mostrar las demás propiedades usaremos inducción.

Es claro que B_1 es cerrado, convexo y centralmente simétrico. Supongamos que B_{n-1} satisface las mismas propiedades para $n-1 \geq 1$.

a) Empezamos probando que B_n es cerrado. Consideremos $x \in \overline{B_n}$. Entonces existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en B_n que converge a x. Por definición de B_n, para cada $m \in \mathbb{N}$ existen y_m y z_m en $\mathbb{E}_n$ tales que $x_m \in B'_n(y_m)$, $z_m \in B_0 \cap B'_n(y_m)$ y $P_{n-1}(B'_n(y_m)) \subset B_{n-1}$. Podemos suponer, tomando si fuera necesario subsucesiones, que ambas sucesiones $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ convergen respectivamente a y y z en $\mathbb{E}_n$, puesto que B_n está acotado y, por ende, es compacto. Queremos ver que $y \in \mathbb{B}_n$.

   Como $z_m \in B_0$ entonces $z \in B_0$, y es claro que

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} &\geq \lim_{m\to\infty} \|z_m - y_m\| = \|z - y\|, \\ \frac{1}{k} &\geq \lim_{m\to\infty} \|x_m - y_m\| = \|x - y\|. \end{aligned}$$

   Estas ecuaciones significan, respectivamente, que $z \in B_0 \cap B'_n(y)$ y $x \in B'_n(y)$. Más aún, si tomamos $w \in B'_n(y)$, entonces $w_m := y_m + (w-y) \in B'_n(y_m)$ y $\{w_m\}_m$ converge a w. Por lo tanto, como $P_{n-1}(w_m) \in B_{n-1}$ y por hipótesis de inducción B_{n-1} es cerrado, $P_{n-1}(w) \in B_{n-1}$, esto es $x \in B_n$.

b) Ahora veremos que B_n es convexo. Tomemos x_1 y x_2 en B_n. Para $i \in \{1,2\}$ existen $y_i \in \mathbb{B}_n$ tal que $x_i \in B'_n(y_i)$, y $z_i \in B_0 \cap B'_n(y_i)$. Denotemos por $y = (y_1+y_2)/2$, $z = (z_1+z_2)/2$ y $x = (x_1+x_2)/2$. Como $z_i - y_i \in B'_n$ para $i \in \{1,2\}$ y B'_n es convexo, entonces

$$z = \frac{z_1+z_2}{2} = y + \frac{(z_1-y_1)+(z_2-y_2)}{2} \in B'_n(y).$$

Por lo tanto $z \in B_0 \cap B'_n(y)$, puesto que B_0 es también convexo. Análogamente tenemos $x \in B'_n(y)$. Para probar que $x \in B_n$ necesitamos solamente ver que $y \in \mathbb{B}_n$, por lo que es suficiente mostrar que $P_{n-1}(B'_n(y)) \subset B_{n-1}$. En realidad, si $w \in B'_n(y)$, entonces $w - y \in B'_n$ y para $i \in \{1, 2\}$ tenemos $y_i + (w - y) \in B'_n(y_i)$. Como $y_i \in \mathbb{B}_n$ para $i \in \{1, 2\}$, entonces $P_{n-1}(y_i + (w - y)) \in B_{n-1}$ para $i = 1, 2$. Por lo tanto

$$P_{n-1}(w) = \frac{1}{2}\Big[P_{n-1}\big(y_1 + (w - y)\big) + P_{n-1}\big(y_2 + (w - y)\big)\Big] \in B_{n-1},$$

puesto que, por hipótesis, B_{n-1} es convexo.

c) Sea $x \in B_n$. Entonces existen $y \in \mathbb{B}_n$ tal que $x \in B'_n(y)$, y $z \in B_0 \cap B'_n(y)$. Por definición de $B'_n(y)$ es claro que $z - y \in B'_n$ y, como B'_n es centralmente simétrico, $y - z \in B'_n$. Por lo tanto $-z = -y + (y - z) \in B'_n(-y)$. Pero B_0 es también centralmente simétrico, y así $-z \in B_0 \cap B'_n(-y)$. Análogamente podemos ver que $-x \in B'_n(-y)$.

Por otro lado, si tomamos $w \in B'_n(-y)$, entonces $w + y \in B'_n$, y, como B'_n es centralmente simétrico, $-w - y \in B'_n$. Por lo tanto $-w = y + (-w - y) \in B'_n(y)$. Como $P_{n-1}(B'_n(y)) \subset B_{n-1}$, y, por hipótesis de inducción, B_{n-1} es centralmente simétrico, $P_{n-1}(w) \in B_{n-1}$. Luego, hemos visto que $P_{n-1}(B'_n(-y)) \subset B_{n-1}$ y así que $-y \in \mathbb{B}_n$. Por lo tanto $-x \in B'_n(-y) \subset B_n$, esto es, B_n es centralmente simétrico. □

La pieza clave de este proceso de renormamiento es el hecho de que cada uno de los conjuntos B_n ha sido construido a partir de trasladados de proyecciones de una homotecia fija de la bola original, los $B'_n(y)$. Y es clave porque se construyen de forma que B_n herede la diferenciabilidad de B de una forma uniforme respecto a n. Es decir

Proposición 4.2.5. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ el módulo de diferenciabilidad de B_n satisface*

$$\rho(B_n, t) \leq 32\rho(B, 3kt).$$

Para probar este resultado necesitamos dos lemas auxiliares. El primero de estos es un corolario del lema 4.3.4, sin embargo se incluye aquí una prueba en pro de una exposición lo más autocontenida posible.

Lema 4.2.6. *Para cualquier $n \in \mathbb{N}$ existe una relación explícita entre los módulos de diferenciabilidad de B'_n y B. Esta es $\rho(B'_n, \cdot) \leq \rho(B, \cdot)$.*

Demostración. Fijamos $n \in \mathbb{N}$ y $t > 0$. Tomemos también x e y tales que $g(B'_n, x) = g(B'_n, y) = 1$. En particular, como x e y están en $S_{B'_n}$, existen x', $y' \in S_B$ de forma que $P_n(x') = kx$ y $P_n(y') = ky$, puesto que $kB'_n = P_nB$. Nótese que

$$g\left(B'_n, P_n\left(\frac{x' \pm ty'}{kg(B, x' \pm ty')}\right)\right) \leq 1.$$

Esta desigualdad es equivalente a $g(B_n', x \pm ty) \leq g(B, x' \pm ty')$. Por lo tanto

$$\xi(B_n', x, y, t) \leq \xi(B, x', y', t) \leq \rho(B, t),$$

y tomando supremos sobre $(x, y) \in S_{B_n'} \times S_{B_n'}$ obtenemos el resultado requerido. □

Lema 4.2.7. *Sean A y B dos* bolas *en un espacio vectorial $\mathbb{E}$. Sea $x \in \mathbb{E}$ tal que $x + B \subset A$. Entonces, cualquier $z \in \mathbb{E}$ satisface la siguiente desigualdad:*

$$g(A, z) \leq g(B, z - x) + |1 - g(B, z - x)|\, g(A, x).$$

Demostración. Nótese que el vector

$$\widetilde{z} = x + \frac{z - x}{g(B, z - x)}$$

está en el conjunto A, véase figura 4.2. Entonces, es claro que

$$g\left(A, \frac{z - x\big(1 - g(B, z - x)\big)}{g(B, z - x)}\right) = g(A, \widetilde{z}) \leq 1.$$

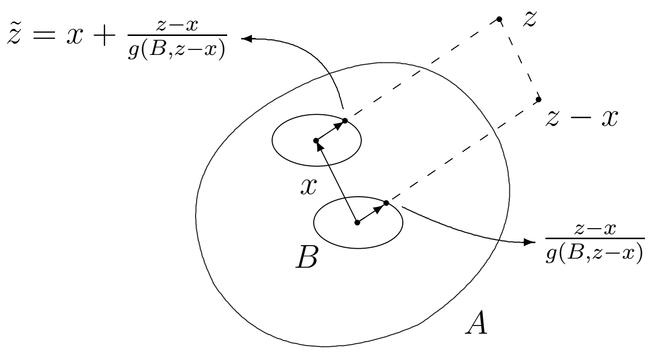

Figura 4.2:

Y, por lo tanto,

$$\begin{aligned} g(B, z - x) &\geq g\big(A, z - x\big(1 - g(B, z - x)\big)\big) \\ &\geq g(A, z) - g\big(A, x\big(1 - g(B, z - x)\big)\big). \end{aligned}$$

O lo que es equivalente,

$$\begin{aligned} g(A, z) &\leq g(B, z - x) + g\big(A, x\big(1 - g(B, z - x)\big)\big) \\ &= g(B, z - x) + |1 - g(B, z - x)|\, g(A, x), \end{aligned}$$

que termina la prueba. □

Demostración de Prop. 4.2.5. Fijamos $n \in \mathbb{N}$, y $t > 0$. Sean x y h puntos en S_{B_n}. Por construcción, existe $y \in \mathbb{B}_n$ tal que $g(B_n', x - y) = 1$. Aplicando lema 4.2.7 a B_n, B_n' y el punto y, podemos afirmar que

$$g(B_n, x \pm th) \leq g(B_n', x \pm th - y) + [g(B_n', x \pm th - y) - 1]g(B_n, y),$$

bajo la hipótesis de que $g(B_n', x \pm th - y) \geq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\xi(B_n, x, h, t) &\leq \xi(B_n', x - y, h, t) + g(B_n, y)\xi(B_n', x - y, h, t) \\ &= \big(1 + g(B_n, y)\big)\xi(B_n', x - y, h, t) \leq 2\xi(B_n', x - y, h, t).\end{aligned}$$

Si denotamos por $\vartheta = g(B_n', h)$, tenemos

$$\xi(B_n, x, h, t) \leq 2\xi(B_n', x - y, h, t) = 2\xi(B_n', x - y, \vartheta^{-1}h, \vartheta t) \leq 2\rho(B_n', \vartheta t).$$

Como $\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_n \subset (1/k)P_n(B) = B_n'$ y por la monotonía del funcional gauge tenemos

$$\begin{aligned}\vartheta = g(B_n', h) &\leq g\left(\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_n, h\right) = kg\left(B \cap \mathbb{E}_n, h\right) \\ &= kg\left(B, h\right) = k\|h\|.\end{aligned}$$

Pero, como $h \in B_n$, por el lema 4.2.2, obtenemos $\|h\| \leq 3$.

Como el módulo de diferenciabilidad es una función no decreciente, finalmente tenemos

$$\xi(B_n, x, h, t) \leq 2\rho(B_n', \vartheta t) \leq 2\rho(B_n', 3kt) \leq 2\rho(B, 3kt). \tag{4.2.1}$$

La última desigualdad se sigue directamente del lema 4.2.6. Tomando supremos sobre aquellos x, h que satisfacen $x + h \in H(B_n, x)$, como esto implica que $g(B_n', x \pm th - y) \geq 1$, obtenemos que

$$\overline{\rho}(B_n, t) \leq 2\rho(B, 3kt).$$

Donde $\overline{\rho}$ es el módulo de diferenciabilidad uniforme tangencial —véase capítulo 1. La prueba termina aplicando el lema 1.3.5. □

4.2.2 Renormamiento Monótono Uniforme.

Ahora, estamos preparados para construir la nueva norma en X que satisfaga ambos de nuestros requerimientos: monotonía de la base y diferenciabilidad Fréchet uniforme. Para obtenerla consideremos en primer lugar algunos nuevos conjuntos. Fijemos $m \in \mathbb{N}$ y definamos

$$\widetilde{B}_m := \bigcap_{n \geq m} (B_n \cap \mathbb{E}_m) = \left(\bigcap_{n \geq m} B_n\right) \cap \mathbb{E}_m.$$

Necesitamos comprobar si estos nuevos conjuntos definen, en realidad, nuevas normas en $\mathbb{E}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$, respectivamente.

Lema 4.2.8. *La familia de conjuntos* $\{\widetilde{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ *está uniformemente acotada en* X*, y para cada* m*, el conjunto* $\widetilde{B}_m$*, respecto de la topología de* $\mathbb{E}_n$*, tiene interior no vacío. Más aún*

$$\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_m \subset \widetilde{B}_m \subset 3B \cap \mathbb{E}_m.$$

Demostración. Fijado $m \in \mathbb{N}$ y para $n \geq m$, el lema 4.2.2 nos asegura que

$$\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_n \subset B_n \subset 3B \cap \mathbb{E}_n,$$

con lo que

$$\widetilde{B}_m = \bigcap_{n\geq m} (B_n \cap \mathbb{E}_m) \subset \bigcap_{n\geq m} \big((3B \cap \mathbb{E}_n) \cap \mathbb{E}_m\big) = 3B \cap \mathbb{E}_m \subset 3B,$$

$$\widetilde{B}_m = \bigcap_{n\geq m} (B_n \cap \mathbb{E}_m) \supset \bigcap_{n\geq m} \left(\left(\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_n\right) \cap \mathbb{E}_m\right) = \frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_m.$$

□

Lema 4.2.9. *Para cualquier* $m \in \mathbb{N}$*, el conjunto* $\widetilde{B}_m$ *es una* bola *en* $\mathbb{E}_m$*.*

Demostración. Por el lema anterior, estos conjuntos están acotados y tienen el origen como punto interior. Sólo queda demostrar que estos conjuntos son cerrados, convexos y centralmente simétricos. Sin embargo, estas tres propiedades son evidentes, puesto que cada $\widetilde{B}_m$ es la intersección de conjuntos que son cerrados, convexos y centralmente simétricos. □

Los conjuntos $\{\widetilde{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ son, en realidad, las restricciones a $\mathbb{E}_m$ de la bola unidad de la norma que venimos buscando $|||\cdot|||$. Es pues necesario comprobar que sus módulos de diferenciabilidad uniforme siguen estando relacionados —de forma uniforme— con el módulo de $\|\cdot\|$.

Proposición 4.2.10. *Para cualquier* $m \in \mathbb{N}$*, el módulo de diferenciabilidad de* $\widetilde{B}_m$ *satisface*

$$\rho\big(\widetilde{B}_m, t\big) \leq 32\rho(B, 3kt).$$

Demostración. Para un $m \in \mathbb{N}$ fijado, consideramos $n \geq m$ y tomamos $x \in B_{n+1} \cap \mathbb{E}_m$. Como $P_n(x) \in B_n$, tenemos que $x = P_m(x) = P_n(x) \in B_n$. Esto es, la sucesión $\{B_n \cap \mathbb{E}_m\}_{n\geq m}$ es decreciente. Por lo tanto converge en la métrica de Hausdorff de $\mathbb{E}_m$ a su intersección, esto es, a $\widetilde{B}_m$. Es bien conocido y estándar que

$$\lim_{n\to\infty} g(B_n \cap \mathbb{E}_m, \cdot) = g\big(\widetilde{B}_m, \cdot\big), \tag{4.2.2}$$

donde el limite se entiende como convergencia uniforme sobre conjuntos acotados de $\mathbb{E}_m$.

Tomemos x e y tales que $g(\widetilde{B}_m, x) = g(\widetilde{B}_m, y) = 1$. Tenemos

$$\begin{aligned}\xi(B_n, x, y, t) &= g(B_n, x)\xi\left(B_n, \frac{x}{g(B_n, x)}, \frac{y}{g(B_n, y)}, t\frac{g(B_n, y)}{g(B_n, x)}\right)\\ &\leq g(B_n, x)\rho\left(B_n, t\frac{g(B_n, y)}{g(B_n, x)}\right).\end{aligned}$$

Luego, por la proposición 4.2.5,

$$\xi(B_n, x, y, t) \leq g(B_n, x)32\rho\left(B, 3kt\frac{g(B_n, y)}{g(B_n, x)}\right).$$

Tomando límites, usando la ecuación (4.2.2) y la continuidad de $\rho(B, \cdot)$, tenemos

$$\xi(\widetilde{B}_m, x, y, t) \leq 32\rho\,(B, 3kt)\,.$$

Ahora, tomamos supremos sobre x e y obteniendo $\rho(\widetilde{B}_m, t) \leq 32\rho(B, 3kt)$, como queríamos probar. □

Finalmente definimos la que será la bola unidad de la norma $|||\cdot|||$. Esto es, el conjunto

$$\widetilde{B} := \overline{\bigcup_{m\in\mathbb{N}} \widetilde{B}_m}^{|||\cdot|||}.$$

El siguiente lema muestra que en efecto los conjuntos $\{\widetilde{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ no son más que las restricciones de $\widetilde{B}$ a $\mathbb{E}_m$ para cada $m \in \mathbb{N}$ —ítem (c)—, y que $P_m(\widetilde{B}_n) \subset \widetilde{B}_m$ para todo m, $n \in \mathbb{N}$ —ítem (b). El primer ítem afirma que la colección $\{\widetilde{B}_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ es creciente y que dados n y $m \in \mathbb{N}$, estos coinciden en su restricción con $\mathbb{E}_n \cap \mathbb{E}_m$.

Lema 4.2.11. *Para cualquier $m \in \mathbb{N}$, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) Para cada $n > m$, $\widetilde{B}_n \cap \mathbb{E}_m = \widetilde{B}_m$.

(b) $\widetilde{B}_n \subset \widetilde{B}_m + \operatorname{span}\{e_j : m < j \leq n\}$.

(c) $\widetilde{B}_m = \widetilde{B} \cap \mathbb{E}_m$.

Demostración. (a) Como la sucesión $\{B_r \cap \mathbb{E}_m\}_{r\geq m}$ es decreciente, entonces

$$\widetilde{B}_n \cap \mathbb{E}_m = \bigcap_{r\geq n}(B_r \cap \mathbb{E}_n) \cap \mathbb{E}_m = \bigcap_{r\geq n}(B_r \cap \mathbb{E}_m) = \bigcap_{r\geq m}(B_r \cap \mathbb{E}_m) = \widetilde{B}_m.$$

(b) Es suficiente probar que $\widetilde{B}_n \subset \widetilde{B}_{n-1} + \operatorname{span}\{e_n\}$. Tomemos $x \in \widetilde{B}_n$, entonces $x \in B_r \cap \mathbb{E}_n$ para todo $r \geq n$. Consideremos $r \geq n-1$. Entonces $x \in B_{r+1} \cap \mathbb{E}_n$ y por lo tanto x está en $(B_r + \operatorname{span}\{e_{r+1}\}) \cap \mathbb{E}_n$. Esto implica que $P_{n-1}(x) \in B_r \cap \mathbb{E}_{n-1}$. Como $r \geq n-1$ es arbitrario, tenemos que $P_{n-1}(x)$ está en $\widetilde{B}_{n-1}$, esto es, $x \in \widetilde{B}_{n-1} + \operatorname{span}\{e_n\}$.

(c) Claramente $\widetilde{B}_m \subset \widetilde{B} \cap \mathbb{E}_m$. Por otro lado, tomemos $x \in \widetilde{B} \cap \mathbb{E}_m$. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x y tal que $x_n \in \widetilde{B}_{m_n}$ para ciertos valores $m_n \in \mathbb{N}$. Sin pérdida de generalidad, podemos reducir la prueba a dos casos:

- Si $m_n \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces por el primer ítem de este lema, $x_n \in \widetilde{B}_m$ y, como $\widetilde{B}_m$ es cerrado, $x \in \widetilde{B}_m$.
- Si $m_n > m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por el segundo ítem de este lema tenemos $P_m(x_n) \in \widetilde{B}_m$. Pero, como $x \in \mathbb{E}_m$, tenemos que $\{P_m(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x, y por lo tanto $x \in \widetilde{B}_m$. $\square$

La siguiente proposición resume las principales propiedades de $\widetilde{B}$. Si definimos $|||\cdot|||$ como el funcional de Minkowski de $\widetilde{B}$ entonces: la condición (a) afirma que $|||\cdot|||$ es una norma equivalente en X, (b) implica que la base $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ es monótona respecto a $|||\cdot|||$, y (c) da una estimación de $\rho_{(X,|||\cdot|||)}(\cdot)$.

Proposición 4.2.12. *$\widetilde{B}$ es una* bola *de X, que satisface las siguientes condiciones*

(a) $\widetilde{B} \subset 3B \subset 3k\widetilde{B}$.

(b) Para cada $x \in \widetilde{B}$ y para cada $n \in \mathbb{N}$, $P_n(x) \in \widetilde{B}$.

(c) $\rho\big(\widetilde{B}, t\big) \leq 32\rho(B, 3kt)$.

Demostración. Por el lema 4.2.11 (iii), la sucesión $\big\{\widetilde{B}_m\big\}_m$ es creciente. Por lo tanto $\widetilde{B}$ es claramente convexo y centralmente simétrico. Se sigue de la definición de $\widetilde{B}$ que es cerrada en X. Para probar que $\widetilde{B}$ es una *bola* sólo necesitamos ver que contiene el origen como punto interior, lo que es una consecuencia del ítem (a). Por tanto sólo necesitamos ver los ítems (a),(b) y (c).

(a) Por el lema 4.2.8 tenemos que $\widetilde{B}_m \subset 3B$ para cada $m \in \mathbb{N}$, por tanto es claro que $\widetilde{B} \subset 3B$. Por otro lado, tomemos x tal que $\|x\| < 1/k$. Como la sucesión $\{P_m(x)\}_m$ converge a x, existe m_0, tal que si $m \geq m_0$ entonces $\|P_m(x)\| \leq 1/k$. Como, por el lema 4.2.8, $B \cap \mathbb{E}_m \subset k\widetilde{B}_m$, tenemos $P_m(x) \in \widetilde{B}_m$ para cada $m \geq m_0$, y entonces $P_m(x) \in \widetilde{B}$ para todo $m \geq m_0$. Por lo tanto x está en $\widetilde{B}$. Entonces $sB \subset \widetilde{B}$ para cualquier $s < 1/k$. Tomando clausuras $B \subset k\widetilde{B}$.

(b) Tomemos $x \in \widetilde{B}$ y $m \in \mathbb{N}$. Tomemos también $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{B}$ de tal forma que $x_n \in \widetilde{B}_{m_n}$ y x_n converja a x. Sin pérdida de generalidad, podemos reducir la prueba a dos casos:

- Si $m_n \leq m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el lema 4.2.11 (a), $x_n \in \widetilde{B}_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\widetilde{B}_m$ es cerrado, $x \in \widetilde{B}_m \subset \widetilde{B}$.

- Si $m_n > m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces, por el lema 4.2.11 (b), $P_m(x_n) \in \widetilde{B}_m$ para todo $n \in \mathbb{N}$, así $P_m(x)$ está en $\widetilde{B}_m \subset \widetilde{B}$.

(c) De los resultados anteriores es claro que la restricción de $g\big(\widetilde{B}, .\big)$ a $\mathbb{E}_m$ coincide con $g\big(\widetilde{B}_m, \cdot$
big). Fijamos $t > 0$ y consideramos x e y tal que $g\big(\widetilde{B}, x\big) = g\big(\widetilde{B}, y\big) = 1$. Denotamos $x_m = P_m(x)$, $y_m = P_m(y)$, $\theta_m = g\big(\widetilde{B}_m, x_m\big)$ y $\vartheta_m = g\big(\widetilde{B}_m, y_m\big)$. Entonces, por la proposición 4.2.10,

$$\begin{aligned}\xi\big(\widetilde{B}, x_m, y_m, t\big) &= \xi\big(\widetilde{B}_m, x_m, y_m, t\big) = \theta_m \xi\left(\widetilde{B}_m, \frac{x_m}{\theta_m}, \frac{y_m}{\vartheta_m}, t\frac{\vartheta_m}{\theta_m}\right) \\ &\leq \theta_m \rho\left(\widetilde{B}_m, t\frac{\vartheta_m}{\theta_m}\right) \leq \theta_m 32\rho\left(B, 3kt\frac{\vartheta_m}{\theta_m}\right).\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}\xi\big(\widetilde{B}, x, y, t\big) &= \lim_{m\to\infty} \xi\big(\widetilde{B}, x_m, y_m, t\big) \leq \lim_{m\to\infty} \theta_m 32\rho\left(B, 3kt\frac{\vartheta_m}{\theta_m}\right) \\ &= 32\rho(B, 3kt).\end{aligned}$$

Tomar supremos sobre x e $y \in S_{\widetilde{B}}$ nos lleva a la conclusión deseada. □

Observación 4.2.13. Si denotamos por $\zeta_n(\cdot)$ al funcional de Minkowski de B_n y $\|x\|_n = \sup_{m\geq n}\{\zeta_m(x)\}$, es claro que $\|\cdot\|_n$ es el funcional de Minkowski de $\widetilde{B}_n$. Luego, nuestra norma $|||\cdot|||$ está definida como

$$|||x||| = \lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\|_n.$$

Como un simple corolario de la proposición 4.2.12 obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.2.14. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ y una norma (UF), $\|\cdot\|$. Entonces existe un renormamiento (UF), $|||\cdot|||$ tal que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una base de Schauder monótona de $(X, |||\cdot|||)$. Más aún, los módulos de diferenciabilidad uniforme de $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son* equivalentes.

El teorema anterior nos dice que un espacio superreflexivo con base tiene una norma equivalente (UF) que la hace monótona. Cabe la siguiente pregunta relacionada. Si X es superreflexivo con $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica, ¿existe un renormamiento (UF) en X que haga monótona a $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$?.

En primer lugar, observemos que la constante de base de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ como base en Y coincide con el supremo de las cantidades $\big\{\|\overline{P}_n\|\big\}_{n<\omega}$, donde $\overline{P}_n$ es 0 sobre el complemento topológico de P_nY y $\overline{P}_{n|Y} = P_n$.

Definición 4.2.15. Una sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$ se dice monótona si es monótona como base de Schauder en $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ o, equivalentemente, si $\operatorname{bc}_{(X,\|\cdot\|)}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$, donde

$$\operatorname{bc}_{(X,\|\cdot\|)}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\left\|\overline{P}_n\right\|\right\}.$$

Como aplicación directa del teorema 4.2.14 y de [24, Proposición 19], tenemos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.16. *Sea X un espacio de Banach superreflexivo e Y un subespacio complementado de X con base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces existe un renormamiento (UF) que hace que la sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea monótona.*

Demostración. Sea Z el complemento topológico de Y en X y sean P_Z, P_Y las correspondientes proyecciones asociadas respectivamente a Z y a Y. Por ser X superreflexivo existe una norma $\|\cdot\|$ en X que es (UF). Por el teorema 4.2.14 existe una norma $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ en Y que hace monótona la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Consideremos la norma

$$|x|^2 = |\!|\!|P_Y(x)|\!|\!|^2 + \|P_Z(x)\|^2.$$

Esta norma satisface los requerimientos del teorema. En efecto, por un lado [24, Proposición 19] muestra que esta norma es (UF). Por otro, dado x con $|x| \leq 1$, entonces $P_Y(x)$ está en $B_{|\!|\!|\cdot|\!|\!|}$ y, por tanto $\overline{P}_n(x) = \overline{P}_n(P_Y(x)) + \overline{P}_n(P_Z(x)) = P_n(P_Y(x)) \in B_{|\!|\!|\cdot|\!|\!|}$. Lo que termina la prueba puesto que $P_Z(\overline{P}_n(x)) = 0$. □

Los espacios reflexivos tienen la siguiente propiedad.

Lema 4.2.17. *Sea X un espacio reflexivo y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X, entonces el subespacio $Y = \overline{\operatorname{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ está complementado en X.*

Demostración. Consideramos la familia de proyecciones $\left\{\overline{P}_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ asociadas a la sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Obsérvese que $\left\|\overline{P}_n\right\| = \|P_n\|_Y$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $\|\cdot\|_Y$ es la restricción de $\|\cdot\|$ a Y. Es decir $\sup_n \left\|\overline{P}_n\right\| = \operatorname{bc}_{\|\cdot\|_Y}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$. Consideremos el subespacio cerrado $Z = \cap_n \overline{P}_n^{-1}(0)$. Afirmamos que Z es el complemento topológico de Y.

En primer lugar, es claro que $Y \cap Z = 0$. En efecto, si $y \in Y \cap Z$ entonces $P_n(y) = \overline{P}_n(y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y como $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es base en Y esto implicaría que $y = 0$. Por otro lado, dado un $x \in X$ arbitrario y para cada $n \in \mathbb{N}$, existe un $z_n \in \overline{P}_n^{-1}(0)$ tal que $x = \overline{P}_n(x) + z_n$. Obsérvese que si la sucesión $\left\{\overline{P}_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ converge, ésta lo haría a un cierto $y \in Y$ y entonces la sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ convergería a un cierto $z \in Z$, teniéndose que $x = y + z$. En efecto, z_n convergería a $z := x - y$ y para cada $n \in \mathbb{N}$ se tendría que $\overline{P}_n(z) = \overline{P}_n(x - y) = 0$.

Así pues, para terminar la prueba sólo hemos de ver que la sucesión $\{\overline{P}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ converge para cualquier $x \in X$. Ahora bien, como el espacio es reflexivo y, por ende el espacio Y, aplicando el teorema 4.1.6 tenemos que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es completamente acotada y, por tanto la sucesión $\{\overline{P}_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ convergerá si y sólo si la sucesión $\{\|\overline{P}_n(x)\|\}_{n=1}^{\infty}$ está acotada. Ahora bien,

$$\|\overline{P}_n(x)\| \leq \|\overline{P}_n\| \, \|x\| \leq \mathrm{bc}_{\|\cdot\|_Y}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) \|x\| < \infty,$$

con lo que terminamos la prueba. $\square$

Corolario 4.2.18. *Sea X un espacio de Banach superreflexivo y $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión básica en X. Entonces existe un renormamiento (UF) que hace que $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ sea monótona.*

Demostración. Puesto que X es reflexivo, por el lema 4.2.17, sabemos que el subespacio $Y = \operatorname{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ está complementado en X. Aplicando el teorema 4.2.16 acabamos la prueba. $\square$

Los resultados conocidos de dualidad entre (UF) y (UC) nos permiten establecer un análogo al teorema 4.2.14 para las normas uniformemente convexas.

Teorema 4.2.19. *Sea X un espacio de Banach superreflexivo separable con una base de Schauder. Entonces existe una norma equivalente (UC) bajo la cual la base es monótona.*

Demostración. Al ser X superreflexivo, aplicando el conocido resultado de Enflo [21], existe una norma (UC), $\|\cdot\|$ en X. Por el Teorema 4.1.6 la base es contractiva. Así, $(X^*, \|\cdot\|)$ es (UF) y $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es su base de Schauder. Podemos aplicar el teorema 4.2.14 a X^*, para obtener un renormamiento (UF) en X^* tal que la base $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona. Por el teorema 1.2.8, esto significa que $X^{**} = X$ tiene una renormamiento (UC) que hace monótona la base. $\square$

Los resultados presentados hasta ahora están basados, mayoritariamente, en [34], trabajo conjunto entre el autor de esta memoria y P. Hájek.

4.2.3 Una mejora del teorema de Buĭ-Min-Či y Gurariĭ.

En los trabajos [36, 40], con diferentes aproximaciones, demuestran, respectivamente por un lado R. C. James y por otro V. I. Gurariĭ junto a N. I. Gurariĭ que para todo espacio de Banach superreflexivo X existen constantes r, $s \in (1, \infty)$ tales que para cualquier sucesión básica $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ en X existe una constante positiva A tal que

$$\frac{1}{A}\left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^r\right]^{\frac{1}{r}} \leq \left\|\sum_{i=1}^{\infty}a_i e_i\right\| \leq A\left[\sum_{i=1}^{\infty}|a_i|^s\right]^{\frac{1}{s}}.$$

Sin embargo, este resultado no aporta información precisa acerca de los valores de r y s. Además la constante A depende de la constante de base de $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Buĭ-Min-Či junto a V.I. Gurariĭ probaron tres años antes —véase [10]— el siguiente resultado:

Teorema 4.2.20 ([10, Corollary 3]). *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder ortonormal, entonces para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ se tiene*

$$|a_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + \delta_X \left(\frac{2\,|a_{k+1}|}{3\,\|x\|}\right)\right] \leq \|x\| \leq |a_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + 2\rho_X \left(\frac{|a_{k+1}|}{a_S}\right)\right],$$

donde a_S es el primer coeficiente no nulo.

La clave en este resultado reside en la noción usada de ortogonalidad. Dados dos subespacios P y Q de X denotamos el ángulo entre P y Q como el valor

$$(\widehat{P, Q}) = \operatorname{ínf}\{\varrho(x, Q), x \in P, \|x\| = 1\},$$

donde $\varrho(x, Q)$ es la distancia de Hausdorff entre los conjuntos Q y $\{x\}$. Para dos vectores x e y, se define $(\widehat{x, y}) = (\widehat{\operatorname{span}(x), \operatorname{span}(y)})$. De esta forma la condición $(\widehat{x, y}) = 1$ es equivalente a $x \perp y$ en el sentido de James —see [38].

Para una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, si denotamos por $\mathbb{E}_{i,j}$ al subespacio $\operatorname{span}\{e_r, i \leq r \leq j\}$, para $i < j$, entonces decimos que la base es ortogonal si $(\widehat{\mathbb{E}_{1,i}, \mathbb{E}_{i+1,j}}) = 1$, para $i < j$. Diremos que es ortonormal si es ortogonal y la norma de cada uno de los elementos de la base es 1.

El concepto de ortogonalidad es intrínseco a la norma y por lo tanto esta condición podría perderse si hacemos un renormamiento. Obsérvese que el resultado de Buĭ-Min-Či y Gurariĭ necesita de forma fundamental la hipótesis de que la base sea ortonormal, que es, a priori, una condición bastante restrictiva.

Sin embargo, se puede comprobar fácilmente que una base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es ortogonal si la constante de base es 1, esto es, si la base es monótona respecto de la norma. Como somos capaces de construir —Teorema 4.2.14 y 4.2.19— dos nuevas normas en X, digamos $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$, que satisfacen

(a) $\operatorname{bc}_{\|\cdot\|_1}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = \operatorname{bc}_{\|\cdot\|_2}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$.

(b) $\delta_{(X, \|\cdot\|_1)}$ es equivalente en el origen a δ_X.

(c) $\rho_{(X, \|\cdot\|_2)}$ es equivalente en el origen a ρ_X.

Por lo tanto se obtiene que el resultado de Buĭ-Min-Či y Gurariĭ no depende de la ortonormalidad de la base. En efecto, obtenemos que

Teorema 4.2.21. *Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder, entonces existen constantes positivas A, B y C tales que para todo $x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i e_i$ se tiene*

$$|a_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + A\delta_X \left(B\frac{|a_{k+1}|}{\|x\|}\right)\right] \leq \|x\| \leq |a_S| \prod_{k=S}^{\infty} \left[1 + C\rho_X \left(\frac{|a_{k+1}|}{a_S}\right)\right],$$

donde a_S es el primer coeficiente no nulo.

De este resultado se obtiene directamente algunos corolarios, por ejemplo el siguiente.

Corolario 4.2.22. *Sea X un espacio superreflexivo con una base de Schauder $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Entonces existen constantes positivas A y B tales que para todo $x = \sum_i a_i e_i$ se cumple*

$$\|x\| \geq |a_1| \left[1 + A\sum_{i=1}^{\infty} \delta_X \left(B\frac{|a_{i+1}|}{\|x\|}\right)\right].$$

Estos resultados nos permiten obtener mejor estimaciones que los resultados de James y de Gurariĭ-Gurariĭ, cuando los módulos de convexidad y diferenciabilidad son suficientemente buenos.

4.3 Bases de Schauder Incondicionales bajo renormamientos uniformes.

Al igual que un espacio de Banach con base de Schauder puede ser renormado para conseguir la monotonía de la base, vimos en la sección 4.1.2 que un espacio de Banach con una base incondicional tiene una norma equivalente $\|\cdot\|_0$ tal que $\mathrm{ubc}_{\|\cdot\|_0}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ es 1. En particular dicha norma viene dada por $\|x\|_0 := \sup\{\|P_F(x)\| : F \in 2^{<\omega}\}$.

Sin embargo e igualmente que en el caso no incondicional esta nueva norma no nos asegura que las buenas propiedades geométricas que tenía la norma original se sigan satisfaciendo.

Así pues, nos planteamos la siguiente pregunta: ¿Todo espacio superreflexivo con base incondicional admite un renormamiento (UC) y/o (UF) de forma que la *constante incondicional de la base* sea la unidad?.

4.3.1 Construcción Preliminar.

En primer lugar establezcamos lo que será la configuración de nuestro problema. Consideramos un espacio de Banach X dotado de una norma $\|\cdot\|$ uniformemente Fréchet diferenciable, y una base de Schauder incondicional $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Partiendo del hecho de que nuestro objetivo a lo largo de esta sección es encontrar una norma equivalente uniformemente Fréchet diferenciable $|||\cdot|||$ en X de forma que la constante $\mathrm{ubc}_{|||\cdot|||}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ sea la unidad, supondremos que $\mathrm{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ es estrictamente mayor que la unidad. Consideramos la norma $\|x\|_0 = \sup\left\{\|P_F(x)\| : F \in 2^{<\mathbb{N}}\right\}$, respecto a la cual la constante incondicional de la base es 1.

Nótese que en caso de que $\|\cdot\|_0$ fuera (UF) los argumentos que encontraremos a continuación no serían necesarios puesto que ella misma sería solución de nuestro problema.

A lo largo de esta sección denotaremos, al igual que en la sección anterior, por B y B_0 las siguientes *bolas*:

$$B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\} \text{ y } B_0 = \{x \in X : \|x\|_0 \leq 1\}.$$

Por la definición de *constante incondicional*, es claro que $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_0 \leq \mathrm{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, y por tanto $B_0 \subset B \subset \mathrm{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)B_0$. Con la intención de simplificar la notación denotaremos $k = \mathrm{ubc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ a lo largo de esta sección.

Para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ denotaremos por $\mathbb{E}_F$ al rango de la proyección natural asociada a la base correspondiente a F, esto es, $P_F X = \mathbb{E}_F$; por B'_F la imagen $P_F\left(\frac{1}{k}B\right)$; y para cada $y \in \mathbb{E}_F$, por $B'_F(y)$ el conjunto $y + B'_F$. En particular $B'_F(0) = B'_F$ es una *bola* de $\mathbb{E}_F$. Para cualquier $y \in \mathbb{E}_F$ el conjunto $B'_F(y)$ es un trasladado de una *bola* de $\mathbb{E}_F$.

La técnica que utilizamos en esta sección extiende las ideas utilizadas en la sección anterior, así pues, vamos a proceder a la definición, de forma inductiva, de una red de subconjuntos de X. Esta red de conjuntos será el origen, vía el uso del funcional de Minkowski, del renormamiento que pretendemos obtener.

Sea $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ con $\mathrm{card}(F) = 1$, definimos $B_F := B_0 \cap \mathbb{E}_F$. Habiendo sido definido B_F para todo $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ con $\mathrm{card}(F) \leq n$ y dado $G \in 2^{<\mathbb{N}}$ con $\mathrm{card}(G) = n+1$, definimos

$$B_G := \bigcup_{y \in \mathbb{B}_G} B'_G(y),$$

donde

$$\mathbb{B}_G := \left\{y \in \mathbb{E}_G : \ P_F(B'_G(y)) \subset B_F \ \ \forall F \subsetneq G, \ \ B'_G(y) \cap B_0 \neq \emptyset\right\}.$$

Puede verse, por ejemplo, la construcción de B_F, para $F = \{1, 2\}$ en la figura 4.3.

Lema 4.3.1. *La familia de conjuntos $\{B_F\}_{F \in 2^{<\mathbb{N}}}$ está uniformemente acotada en X, y para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ el conjunto B_F tiene interior no vacío respecto a la topología de $\mathbb{E}_F$.*

Demostración. Fijamos un conjunto $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ y $x \in B_F$. Entonces existen $y, z \in \mathbb{E}_F$ tales que $x \in B'_F(y)$, $z \in B_0 \cap B'_F(y)$ y $P_G(B'_F(y)) \subset B_G$, para todo $G \subsetneq F$. Es claro que los vectores

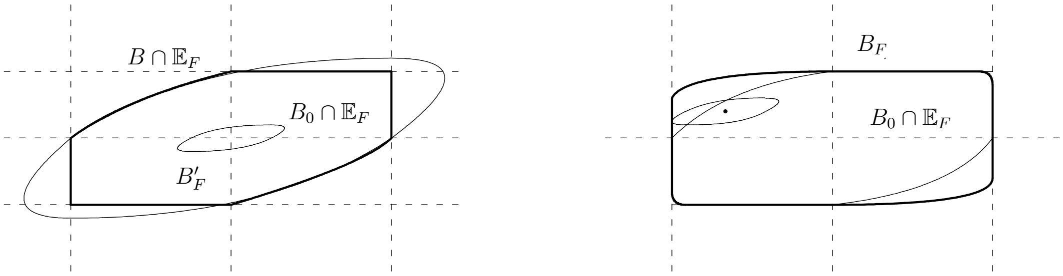

Figura 4.3:

$x - y$, $z - y$ están en B'_F. Por lo tanto, existen x', $z' \in B$, tales que $P_F(x') = k(x - y)$ y $P_F(z') = k(z - y)$, y entonces

$$\|x - y\| = \frac{1}{k}\|P_F(x')\| \le \frac{1}{k}\|P_F\|\|x'\| \le 1,$$
$$\|z - y\| = \frac{1}{k}\|P_F(z')\| \le \frac{1}{k}\|P_F\|\|z'\| \le 1.$$

Como $z \in B_0$ y $B_0 \subset B$, tenemos que $\|z\| \le 1$. Por lo tanto $\|x\| \le 3$, esto es $B_F \subset 3B \cap \mathbb{E}_F$. La segunda parte de esta prueba es una consecuencia directa del siguiente lema puesto que $B \cap \mathbb{E}_F \subset P_F(B)$. $\square$

Con la intención de que las pruebas siguientes sean más claras y concisas en su notación, introducimos los conjuntos siguientes: para cada $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{C}_n = \{F \in 2^{<\mathbb{N}} : \mathrm{card}(F) = n\}$ y $\mathscr{D}_n = \{F \in 2^{<\mathbb{N}} : \mathrm{card}(F) \le n\}$ y para cada $G \in \mathscr{C}_m$ y $n < m$, $\mathscr{C}_n(G) = \{F \in \mathscr{C}_n : F \subsetneq G\}$.

Lema 4.3.2. *Para todo F en $2^{<\mathbb{N}}$, el conjunto $\mathbb{B}_F$ es no vacío. Más aún,*

$$0 \in \bigcap_{F \in 2^{<\mathbb{N}}} \mathbb{B}_F.$$

Demostración. Es suficiente ver que $0 \in \mathbb{B}_F$ para cualquier $F \in 2^{<\mathbb{N}}$. Probaremos que $0 \in \mathbb{B}_F$ si y sólo si $B'_G \subset B_G$ para todo $G \in \mathscr{C}_1(F)$, lo que terminará la prueba, puesto que para todo $G \in \mathscr{C}_1$ siempre se cumple que

$$B'_G = P_G\left(\frac{1}{k}B\right) \subset P_G(B_0) \subset B_0 \cap \mathbb{E}_G = B_G$$

puesto que B_0 es una *bola* monótona.

Mostraremos la equivalencia anterior por inducción sobre el cardinal de F. Si suponemos que $F \in \mathscr{C}_2$, 0 estará en $\mathbb{B}_F$ si y sólo si $P_G(B'_F) \subset B_G$ para todo $G \in \mathscr{C}_1(F)$, puesto que B'_F siempre corta a B_0 —la intersección contiene al menos el origen. Pero

$$P_G(B'_F) = P_G\left(P_F\left(\frac{1}{k}B\right)\right) = B'_G,$$

que termina la prueba de este caso.

Si suponemos que la equivalencia es cierta para todo $G \in \mathscr{C}_{n-1}$ para $n > 2$, entonces, dado $F \in \mathscr{C}_n$, $0 \in \mathbb{B}_F$ si y sólo si $P_G(B'_F) \subset B_G$ para todo $G \subsetneq F$, puesto que la intersección entre B'_F y B_0 es siempre no vacía —contiene el origen. Además, para todo $G \subsetneq F$,

$$P_G(B'_F) = P_G\left(P_F\left(\frac{1}{k}B\right)\right) = P_G\left(\frac{1}{k}B\right) = B'_G.$$

Esto quiere decir que $0 \in \mathbb{B}_F$ si y sólo si $B'_G \subset B_G$ para todo $G \subsetneq F$.

Ahora bien, fijado $G \subsetneq F$, por hipótesis de inducción, $B'_G \subset B_G$ es equivalente a $B'_S \subset B_S$ para todo $S \in \mathscr{C}_1(G)$. Es decir $0 \in \mathbb{B}_F$ si y sólo si $B'_S \subset B_S$ para todo $S \in \mathscr{C}_1(G)$ para todo $G \subsetneq F$, esto es, si y sólo si $B'_S \subset B_S$ para todo $S \in \mathscr{C}_1(F)$. □

El siguiente lema muestra que los conjuntos B_F son *bolas* en $\mathbb{E}_F$, i.e., sus funcionales de Minkowski definen normas en $\mathbb{E}_F$, para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Lema 4.3.3. *Para cualquier $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, el conjunto B_F es una* bola *de $\mathbb{E}_F$.*

Demostración. Por el lema 4.3.1 es claro que para cualquier $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, el conjunto B_F está acotado y contiene el origen como punto interior. Para mostrar las demás propiedades usaremos inducción.

Es claro que B_F es cerrado, convexo y centralmente simétrico para cada $F \in \mathscr{C}_1$. Supongamos que B_G satisface las mismas propiedades para todo $G \in \mathscr{D}_{n-1}$ para $n-1 \geq 1$. Y tomemos $F \in \mathscr{C}_n$.

a) Empezamos probando que B_F es cerrado. Consideremos $x \in \overline{B_F}$. Entonces existe una sucesión $\{x_m\}_{m=1}^{\infty}$ en B_F que converge a x. Para cada $m \in \mathbb{N}$ existen y_m y z_m en $\mathbb{E}_F$ tales que $x_m \in B'_F(y_m)$, $z_m \in B_0 \cap B'_F(y_m)$ y $P_G(B'_F(y_m)) \subset B_G$ para todo $G \subsetneq F$. Podemos suponer que las sucesiones $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ y $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ convergen respectivamente a y y z en $\mathbb{E}_F$, puesto que B_F está acotado y, por ende, es compacto. Queremos ver que $y \in \mathbb{B}_F$.

   Como $z_m \in B_0$ entonces $z \in B_0$, y es claro que

$$\frac{1}{k} \geq \lim_{m\to\infty} \|z_m - y_m\| = \|z - y\|,$$
$$\frac{1}{k} \geq \lim_{m\to\infty} \|x_m - y_m\| = \|x - y\|.$$

   Estas ecuaciones significan, respectivamente, que $z \in B_0 \cap B'_F(y)$ y $x \in B'_F(y)$. Más aún, si tomamos $w \in B'_F(y)$, entonces $w_m := y_m + (w - y) \in B'_F(y_m)$ y la sucesión $\{w_m\}_{m=1}^{\infty}$ converge a w. Por lo tanto, como $P_G(w_m) \in B_G$ para cada $G \subsetneq F$ y por hipótesis de inducción B_G es cerrado para cada $G \subsetneq F$, $P_G(w) \in B_G$, esto es $x \in B_F$.

b) Ahora veremos que B_F es convexo. Tomamos x_1 y x_2 en B_F. Para $i \in \{1,2\}$ existen $y_i \in \mathbb{B}_F$ tal que $x_i \in B'_F(y_i)$, y $z_i \in B_0 \cap B'_F(y_i)$. Denotemos por $y = (y_1 + y_2)/2$, $z = (z_1 + z_2)/2$ y $x = (x_1 + x_2)/2$. Como $z_i - y_i \in B'_F$ para $i \in \{1,2\}$ y B'_F es convexo, entonces
$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = y + \frac{(z_1 - y_1) + (z_2 - y_2)}{2} \in B'_F(y).$$
Por lo tanto $z \in B_0 \cap B'_F(y)$, puesto que B_0 es también convexo. Análogamente tenemos $x \in B'_F(y)$.

Para probar que $x \in B_F$ necesitamos solamente ver que $y \in \mathbb{B}_F$, por lo que es suficiente mostrar que $P_G(B'_F(y)) \subset B_G$ para todo $G \subsetneq F$. En realidad, si $w \in B'_F(y)$, entonces $w - y \in B'_F$ y para $i \in \{1,2\}$ tenemos $y_i + (w - y) \in B'_F(y_i)$. Como $y_i \in \mathbb{B}_F$ para $i \in \{1,2\}$, entonces $P_G(y_i + (w-y)) \in B_G$ para $i = 1,2$. Por lo tanto, para todo $G \subsetneq F$,
$$P_G(w) = \frac{1}{2}\Big[P_G\big(y_1 + (w - y)\big) + P_G\big(y_2 + (w - y)\big)\Big] \in B_G,$$
puesto que, por hipótesis, B_G es convexo para cada $G \subsetneq F$.

c) Sea $x \in B_F$. Entonces existen $y \in \mathbb{B}_F$ tal que $x \in B'_F(y)$, y $z \in B_0 \cap B'_F(y)$. Es claro que $z - y \in B'_F$ y, como B'_F es centralmente simétrico, $y - z \in B'_F$. Por lo tanto $-z = -y + (y - z) \in B'_F(-y)$. Pero B_0 es también centralmente simétrico, y así $-z \in B_0 \cap B'_F(-y)$. Análogamente podemos ver que $-x \in B'_F(-y)$.

Por otro lado, si tomamos $w \in B'_F(-y)$, entonces $w + y \in B'_F$, y, como B'_F es centralmente simétrico, $-w - y \in B'_F$. Por lo tanto $-w = y + (-w - y) \in B'_F(y)$. Como $P_G(B'_F(y)) \subset B_G$ para cada $G \subsetneq F$, y, por hipótesis de inducción, B_G es centralmente simétrico para todo $G \in \mathscr{D}_{n-1}$, se tiene $P_G(w) \in B_G$ para cada $G \subsetneq F$. Hemos visto que $P_G(B'_F(-y)) \subset B_G$ para todo $G \subsetneq F$ y así que $-y \in \mathbb{B}_F$. Por lo tanto $-x \in B'_F(-y) \subset B_F$, esto es, B_F es centralmente simétrico. □

Para ver que los conjuntos $\{B_F\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ son *bolas* (UF), necesitamos un lema auxiliar.

Lema 4.3.4. *Para cualquier $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ existe una relación explícita entre los módulos de diferenciabilidad de B'_F y B. Esta es $\rho(B'_F, \cdot) \leq \rho(B, \cdot)$.*

Observación 4.3.5. Obsérvese que este lema generaliza el lema 4.2.6 visto en la sección anterior. En efecto, el lema 4.3.4 aplicado a los conjuntos $F_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ es exactamente el lema 4.2.6.

Demostración del lema 4.3.4. Fijamos $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ y $t > 0$. Tomamos x e y tales que $g(B'_F, x) = g(B'_F, y) = 1$. En particular, como x e y están en $S_{B'_F}$, existen x', $y' \in S_B$ de forma que $P_F(x') = kx$ y $P_F(y') = ky$. Nótese que
$$g\left(B'_F, P_F\left(\frac{x' \pm ty'}{kg(B, x' \pm ty')}\right)\right) \leq 1$$

Esta desigualdad es equivalente a $g(B'_F, x \pm ty) \leq g(B, x' \pm ty')$. Por lo tanto

$$\xi(B'_F, x, y, t) \leq \xi(B, x', y', t) \leq \rho(B, t),$$

y tomando supremos sobre $(x, y) \in S_{B'_F} \times S_{B'_F}$ obtenemos el resultado requerido. $\square$

Proposición 4.3.6. *Para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ el módulo de diferenciabilidad de B_F satisface*

$$\rho(B_F, t) \leq 32\rho(B, 3kt).$$

Demostración. Fijamos $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, y $t > 0$. Consideramos x y h puntos en S_{B_F}. Por construcción, existe $y \in \mathbb{B}_F$ tal que $g(B'_F, x - y) = 1$. Aplicando el lema 4.2.7 a B_F, B'_F y el punto y, podemos afirmar que

$$g(B_F, x \pm th) \leq g(B'_F, x \pm th - y) + [g(B'_F, x \pm th - y) - 1]g(B_F, y)$$

bajo la hipótesis de que $g(B'_F, x \pm th - y) \geq 1$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \xi(B_F, x, h, t) &\leq \xi(B'_F, x - y, h, t) + g(B_F, y)\xi(B'_F, x - y, h, t) \\ &= \big(1 + g(B_F, y)\big)\xi(B'_F, x - y, h, t) \leq 2\xi(B'_F, x - y, h, t). \end{aligned}$$

Si denotamos por $\vartheta = g(B'_F, h)$, tenemos

$$\xi(B_F, x, h, t) \leq 2\xi(B'_F, x - y, h, t) = 2\xi(B'_F, x - y, \vartheta^{-1}h, \vartheta t) \leq 2\rho(B'_F, \vartheta t).$$

Como $\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_F \subset \frac{1}{k}P_F(B) = B'_F$, por la monotonía del funcional gauge tenemos

$$\begin{aligned} \vartheta = g(B'_F, h) &\leq g\left(\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_F, h\right) = kg\left(B \cap \mathbb{E}_F, h\right) \\ &= kg\left(B, h\right) = k\|h\|. \end{aligned}$$

Pero, como $h \in B_F$, usando el lema 4.3.1, obtenemos $\|h\| \leq 3$.

Como el módulo de diferenciabilidad es una función no decreciente, finalmente tenemos

$$\xi(B_F, x, h, t) \leq 2\rho(B'_F, \vartheta t) \leq 2\rho(B'_F, 3kt) \leq 2\rho(B, 3kt). \tag{4.3.1}$$

La última desigualdad se sigue directamente del lema 4.3.4. Tomando supremos sobre aquellos x, h que satisfacen $x + h \in H(B_F, x)$, como esto implica que $g(B'_F, x \pm th - y) \geq 1$, obtenemos que

$$\overline{\rho}(B_F, t) \leq 2\rho(B, 3kt).$$

La prueba termina aplicando el lema 1.3.5. $\square$

4.3.2 Renormamiento Monótono Uniforme.

Hasta ahora hemos construido una red de conjuntos $\{B_F\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ de forma que cada uno de ellos define una norma en su respectivo espacio ambiente, esto es B_F define una norma φ_F que es (UF) en $\mathbb{E}_F$ para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$.

Análogamente a como hicimos en la sección anterior, para poder obtener una norma $\|\!|\cdot|\!\|$ definida en todo el espacio X que sea (UF) y que satisfaga $\mathrm{ubc}_{\|\!|\cdot|\!\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right) = 1$, hemos de depurar las normas anteriores. En primer lugar consideraremos una familia de normas $\{\|\cdot\|_F\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ de forma que para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ la norma $\|\cdot\|_F$ esté definida en $\mathbb{E}_F$, y tal que para cada par de conjuntos F y G en $2^{<\mathbb{N}}$ se tenga $\|x\|_F = \|x\|_G$ para todo $x \in \mathbb{E}_F \cap \mathbb{E}_G$.

A partir de esta familia de normas es directo definir una única norma en X que extienda a cada una de las $\|\cdot\|_F$. En efecto, dado $x \in X$ definimos

$$\|\!|x|\!\| := \lim_{F\in 2^{<\mathbb{N}}} \|P_F(x)\|_F \,.$$

Como la red $\{P_F(x)\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ converge a x, la función $\|\!|\cdot|\!\|$ es una norma definida en todo X y equivalente a $\|\cdot\|$.

A la hora de definir las normas $\|\cdot\|_F$ podemos optar por dos vías. Por un lado está la vía analítica y por otro la geométrica. Si seguimos la vía analítica definiremos para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ y para cada $x \in \mathbb{E}_F$,

$$\|x\|_F = \sup_{G\in\mathscr{C}(F)} \varphi_G(x),$$

donde $\mathscr{C}(F) = \left\{G \in 2^{<\mathbb{N}} : G \supset F\right\}$.

Por analogía al proceso seguido en la sección anterior elegimos la vía geométrica. Según ésta, las normas $\|\cdot\|_F$ las vamos a definir para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$ como el funcional de Minkowski del conjunto

$$\widetilde{B}_F = \bigcap_{G\in\mathscr{C}(F)} \Big(B_G \cap \mathbb{E}_F\Big).$$

Obsérvese que tanto la vía geométrica como la analítica definen las misma normas.

Necesitamos comprobar si, en efecto, estos conjuntos son *bolas* puesto que en otro caso sus respectivos funcionales de Minkowski no definirían normas. Los siguientes dos lemas nos muestra no sólo esto sino que la familia $\{\|\cdot\|_F\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ está formada por normas uniformemente equivalentes a la norma $\|\cdot\|$ cuando esta se entiende restringida, en cada caso, a $\mathbb{E}_F$.

Lema 4.3.7. *La familia de conjuntos $\{\widetilde{B}_F\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ está uniformemente acotada en X, y para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, el conjunto $\widetilde{B}_F$, respecto de la topología de $\mathbb{E}_F$, tiene interior no vacío. Más aún*

$$\frac{1}{k}B \cap \mathbb{E}_F \subset \widetilde{B}_F \subset 3B.$$

Demostración. Fijamos $F \in 2^{<\mathbb{N}}$. Usando la prueba del lema 4.3.1 es claro que

$$\widetilde{B}_F = \bigcap_{G\in\mathscr{C}(F)} (B_G \cap \mathbb{E}_F) \subset \bigcap_{G\in\mathscr{C}(F)} \big((3B\cap\mathbb{E}_G)\cap\mathbb{E}_F\big) = 3B\cap\mathbb{E}_F \subset 3B.$$

Por otro lado, por el lema 4.3.2 sabemos que

$$\widetilde{B}_F = \bigcap_{G\in\mathscr{C}(F)} (B_G \cap \mathbb{E}_F) \supset \bigcap_{G\in\mathscr{C}(F)} \left(\left(\frac{1}{k}B\cap\mathbb{E}_G\right)\cap\mathbb{E}_F\right) = \frac{1}{k}B\cap\mathbb{E}_F.$$

□

Lema 4.3.8. *Para cualquier $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, el conjunto $\widetilde{B}_F$ es una* bola *en $\mathbb{E}_F$.*

Demostración. Por el lema anterior, estos conjuntos están acotados y tienen el origen como punto interior. Sólo queda por mostrar que estos conjuntos sean cerrados, convexos y centralmente simétricos. Sin embargo, estas tres propiedades son evidentes, puesto que cada $\widetilde{B}_F$ es la intersección de conjuntos que son cerrados, convexos y centralmente simétricos. □

En la sección anterior, cuando estudiábamos el caso de la constante $\mathrm{bc}_{\|\cdot\|}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$, la sucesión de conjuntos $\{B_n\cap\mathbb{E}_m\}_{n\geq m}$ era decreciente para cada $m\in\mathbb{N}$. Ahora la situación no va a ser demasiado diferente. En efecto, para cada $F\in 2^{<\mathbb{N}}$ la red $\{B_G\cap\mathbb{E}_F\}_{G\in\mathscr{C}(F)}$, donde $\mathscr{C}(F)$ está dotado del orden de la inclusión, será también monótona decreciente en el sentido siguiente: dados G_1 y G_2 en $\mathscr{C}(F)$ tales que $G_1\subset G_2$ entonces $B_{G_1}\cap\mathbb{E}_F\supset B_{G_2}\cap\mathbb{E}_F$.

En efecto, sea $x\in B_{G_2}\cap\mathbb{E}_F$. Por la definición de B_{G_2} se tiene que $P_{G_1}(x)\in B_{G_1}$.Ahora bien $P_{G_1}(x)=P_F(x)=x$ puesto que, en la primera igualdad, $G_1\in\mathscr{C}(F)$ y, en la segunda igualdad, $x\in\mathbb{E}_F$.

Por lo tanto, fijado $F\in 2^{<\mathbb{N}}$, la red $\{B_G\cap\mathbb{E}_F\}_{G\in\mathscr{C}(F)}$ converge en la métrica de Hausdorff de $\mathbb{E}_F$ a su intersección, esto es, a $\widetilde{B}_F$. Es bien conocido y estándar entonces que

$$\lim_{G\in\mathscr{C}(F)} g(B_G\cap\mathbb{E}_F,\cdot) = g\big(\widetilde{B}_F,\cdot\big), \tag{4.3.2}$$

donde el limite se entiende como convergencia uniforme sobre conjuntos acotados de $\mathbb{E}_F$.

Proposición 4.3.9. *Para cualquier $F\in 2^{<\mathbb{N}}$, el módulo de diferenciabilidad de $\widetilde{B}_F$ satisface*

$$\rho\big(\widetilde{B}_F,t\big)\leq 32\rho(B,3kt).$$

Demostración. Fijamos $F\in 2^{<\mathbb{N}}$ y tomamos x e y tales que $g\big(\widetilde{B}_F,x\big)=g\big(\widetilde{B}_F,y\big)=1$. Tenemos entonces que para cada $G\in\mathscr{C}(F)$,

$$\begin{aligned}\xi(B_G,x,y,t) &= g(B_G,x)\,\xi\left(B_G,\frac{x}{g(B_G,x)},\frac{y}{g(B_G,y)},t\frac{g(B_G,y)}{g(B_G,x)}\right)\\ &\leq g(B_G,x)\,\rho\left(B_G,t\frac{g(B_G,y)}{g(B_G,x)}\right).\end{aligned}$$

Luego por la proposición 4.3.6

$$\xi(B_G, x, y, t) \leq g(B_G, x) 32\rho \left(B, 3kt\frac{g(B_G, y)}{g(B_G, x)} \right),$$

y tomando límites, usando la ecuación (4.3.2) y la continuidad de $\rho(B, \cdot)$, tenemos

$$\xi\big(\widetilde{B}_F, x, y, t\big) \leq 32\rho\,(B, 3kt)\,.$$

Tomando supremos sobre x e y obtenemos $\rho\big(\widetilde{B}_F, t\big) \leq 32\rho(B, 3kt)$ como queríamos probar. $\square$

La bola unidad de la norma que hemos anunciado anteriormente como aquella que siendo uniformemente diferenciable Fréchet hace que $\mathrm{ubc}_{|||\cdot|||}\left(\{e_n\}_{n=1}^{\infty}\right)$ sea la unidad puede expresarse en términos de los conjuntos $\big\{\widetilde{B}_F\big\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ de la siguiente forma

$$\widetilde{B} := \overline{\bigcup_{F\in 2^{<\mathbb{N}}} \widetilde{B}_F}^{\|\cdot\|}.$$

El siguiente lema auxiliar, que expresa la relación entre los distintos elementos de la familia $\big\{\widetilde{B}_F\big\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ y la de estos con $\widetilde{B}$, es la pieza clave para mostrar que $|||\cdot|||$ es (UF) y satisface la condición buscada de monotonía incondicional.

Lema 4.3.10. *Sean F y G cualesquiera en $2^{<\mathbb{N}}$, se satisfacen las siguientes condiciones:*

(a) $\widetilde{B}_G \cap \mathbb{E}_F = \widetilde{B}_{G\cap F}$.

(b) $\widetilde{B}_G \subset \widetilde{B}_{G\cap F} + \operatorname{span}\{e_j : j \in G \cap F^c\}$.

(c) $\widetilde{B}_F = \widetilde{B} \cap \mathbb{E}_F$.

Demostración. (a) Como la red $\{B_H \cap \mathbb{E}_{F\cap G}\}_{H\in\mathscr{C}(F\cap G)}$ es decreciente, entonces

$$\begin{aligned}\widetilde{B}_G \cap \mathbb{E}_F &= \bigcap_{H\in\mathscr{C}(G)} (B_H \cap \mathbb{E}_G) \cap \mathbb{E}_F = \bigcap_{H\in\mathscr{C}(G)} (B_H \cap \mathbb{E}_{F\cap G}) \\ &= \bigcap_{H\in\mathscr{C}(F\cap G)} (B_H \cap \mathbb{E}_{F\cap G}) = \widetilde{B}_{F\cap G}.\end{aligned}$$

(b) Sea $x \in \widetilde{B}_G$, entonces $x \in B_H \cap \mathbb{E}_G$ para todo $H \in \mathscr{C}(G)$. Obsérvese que

$$\begin{aligned}P_F(B_H \cap \mathbb{E}_G) &\subset P_F(B_H) \cap P_F(\mathbb{E}_G) = P_F(B_H) \cap \mathbb{E}_{F\cap G} \\ &= P_{F\cap H}(B_H) \cap \mathbb{E}_{F\cap G} \subset B_{F\cap H} \cap \mathbb{E}_{F\cap G}.\end{aligned}$$

Por lo tanto $P_F(x) \in B_{F\cap H} \cap \mathbb{E}_{F\cap G}$ para todo $H \in \mathscr{C}(G)$, lo que implica que $P_F(x) \in B_H \cap \mathbb{E}_{F\cap G}$ para todo $H \in \mathscr{C}_{F\cap G}$, esto es, $P_F(x) \in \widetilde{B}_{F\cap G}$. Hemos probado que $P_F\big(\widetilde{B}_G\big) \subset \widetilde{B}_{F\cap G}$, precisamente lo que afirma (b).

(c) Claramente $\widetilde{B}_F \subset \widetilde{B} \cap \mathbb{E}_F$. Por otro lado, tomemos $x \in \widetilde{B} \cap \mathbb{E}_F$, $x \neq 0$. Entonces, existe una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a x y tal que $x_n \in \widetilde{B}_{F_n}$ para ciertos conjuntos $F_n \in 2^{<\mathbb{N}}$. Sin pérdida de generalidad, podemos reducir la prueba a dos casos:

- Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \cap F = \emptyset$, entonces $P_F(x_n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como P_F es continua tenemos que $x = P_F(x) = 0$ que es absurdo.
- Si para todo $n \in \mathbb{N}$, $F_n \cap F \neq \emptyset$, entonces $P_F(x_n) \in \widetilde{B}_{F \cap F_n}$. Por (a) sabemos que $\widetilde{B}_{F \cap F_n} = \widetilde{B}_F \cap \mathbb{E}_{F_n}$. Luego $P_F(x_n) \in \widetilde{B}_F$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $\widetilde{B}_F$ es cerrado, y $P_F(x_n)$ converge a $P_F(x) = x$, se tiene que $x \in \widetilde{B}_F$. □

La siguiente proposición, finalmente, muestra que la norma $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$, o equivalentemente $\widetilde{B}$, es la norma que venimos buscando. En efecto, la condición (a) afirma que $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$ es equivalente a $\|\cdot\|$, (b) implica que la base $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ es incondicionalmente monótona respecto a $|\!|\!|\cdot|\!|\!|$, y (c) da una estimación de $\rho_{(X,|\!|\!|\cdot|\!|\!|)}(\cdot)$.

Proposición 4.3.11. *$\widetilde{B}$ es una* bola *de X, que satisface las siguientes condiciones*

(a) $\widetilde{B} \subset 3B \subset 3k\widetilde{B}$.

(b) Para cada $x \in \widetilde{B}$ y para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, $P_F(x) \in \widetilde{B}$.

(c) $\rho\big(\widetilde{B}, t\big) \leq 32\rho(B, 3kt)$.

Demostración. Por el lema 4.3.10 (a), la red $\big\{\widetilde{B}_F\big\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ es creciente. Por lo tanto $\widetilde{B}$ es claramente convexo y centralmente simétrico. Se sigue de la definición de $\widetilde{B}$ que es cerrado en X. Para probar que $\widetilde{B}$ es una *bola* sólo necesitamos ver que contiene el origen como punto interior, lo que es una consecuencia del ítem (a). Por tanto sólo necesitamos ver los ítems (a),(b) y (c).

(a) Por el lema 4.3.7 tenemos que $\widetilde{B}_F \subset 3B$ para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$, por tanto es claro que $\widetilde{B} \subset 3B$. Por otro lado, tomemos x tal que $\|x\| < 1/k$. Como la red $\{P_F(x)\}_{F\in 2^{<\mathbb{N}}}$ converge a x, existe F_0, tal que si $F \in \mathscr{C}(F_0)$ entonces $\|P_F(x)\| \leq 1/k$. Como, por el lema 4.3.7, $B \cap \mathbb{E}_G \subset k\widetilde{B}_G$ para todo $G \in 2^{<\mathbb{N}}$, en particular tenemos $P_F(x) \in \widetilde{B}_F$ para cada $F \in \mathscr{C}(F_0)$. Así $P_F(x) \in \widetilde{B}$ para todo $F \in \mathscr{C}(F_0)$. Por lo tanto x está en $\widetilde{B}$. Entonces $sB \subset \widetilde{B}$ para cualquier $s < 1/k$. Tomando clausuras $B \subset k\widetilde{B}$.

(b) Tomamos $x \in \widetilde{B}$ y $F \in 2^{<\mathbb{N}}$. Tomamos también $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \widetilde{B}$ de tal forma que $x_n \in \widetilde{B}_{F_n}$ y $x_n \to x$. Por el lema 4.2.11 (b) y puesto que $x_n \in \widetilde{B}_{F_n}$, tenemos que $P_F(x) \in \widetilde{B}_{F\cap F_n}$. Aplicando el lema 4.2.11 (a) tenemos entonces que $P_F(x_n) \in \widetilde{B}_F \cap \mathbb{E}_{F_n}$. En particular $P_F(x_n) \in \widetilde{B}_F$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y, por tanto, $P_F(x) \in \widetilde{B}_F \subset \widetilde{B}$.

(c) De los resultados anteriores es claro que la restricción de $|||\cdot||| = g(\widetilde{B}, \cdot)$ a $\mathbb{E}_F$ coincide con $\|\cdot\|_F = g(\widetilde{B}_F, \cdot)$ para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$. Fijamos $t > 0$ y consideramos x e y tal que $g(\widetilde{B}, x) = g(\widetilde{B}, y) = 1$. Denotamos $x_F = P_F(x)$, $y_F = P_F(y)$, $\theta_F = g(\widetilde{B}_F, x_F)$ y $\vartheta_F = g(\widetilde{B}_F, y_F)$, para cada $F \in 2^{<\mathbb{N}}$. Entonces, por la proposición 4.3.9,

$$\begin{aligned} \xi(\widetilde{B}, x_F, y_F, t) &= \xi(\widetilde{B}_F, x_F, y_F, t) = \theta_F \xi\left(\widetilde{B}_F, \frac{x_F}{\theta_F}, \frac{y_F}{\vartheta_F}, t\frac{\vartheta_F}{\theta_F}\right) \\ &\leq \theta_F \rho\left(\widetilde{B}_F, t\frac{\vartheta_F}{\theta_F}\right) \leq \theta_F 32\rho\left(B, 3kt\frac{\vartheta_F}{\theta_F}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \xi(\widetilde{B}, x, y, t) &= \lim_{F \in 2^{<\mathbb{N}}} \xi(\widetilde{B}, x_F, y_F, t) \leq \lim_{F \in 2^{<\mathbb{N}}} \theta_F 32\rho\left(B, 3kt\frac{\vartheta_F}{\theta_F}\right) \\ &= 32\rho(B, 3kt). \end{aligned}$$

Tomar supremos sobre x e y nos lleva a la conclusión deseada. $\square$

Como un simple corolario de la proposición 4.3.11 obtenemos el resultado principal de esta sección.

Teorema 4.3.12. *Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder incondicional $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ y una norma (UF), $\|\cdot\|$. Entonces existe un renormamiento (UF) $|||\cdot|||$ tal que $\{e_n\}_{n=1}^\infty$ es una base de Schauder incondicionalmente monótona de $(X, |||\cdot|||)$. Más aún, los módulos de diferenciabilidad uniforme de $\|\cdot\|$ y $|||\cdot|||$ son* equivalentes.

Dualizando, obtenemos el siguiente resultado.

Teorema 4.3.13. *Sea X un espacio de Banach superreflexivo separable con una base de Schauder incondicional. Entonces existe una norma equivalente (UC) bajo la cual la base es incondicionalmente monótona.*

Demostración. Como X es superreflexivo, por el conocido resultado de Enflo [21], existe una norma (UC), $\|\cdot\|$, en X. Como la base es contractiva por el teorema 4.1.6, $(X^*, \|\cdot\|)$ es (UF) y $\{e_n^*\}_{n=1}^\infty$ es su base de Schauder incondicional. Podemos aplicar el teorema 4.3.12 a X^* para obtener un renormamiento (UF) en X^* tal que la base $\{e_n^*\}_{n=1}^\infty$ es incondicionalmente monótona. Por el teorema 1.2.8, esto significa que $X^{**} = X$ tiene una renormamiento (UC) que hace incondicionalmente monótona la base. $\square$

Capítulo 5

El Módulo de Cuadratura

5.1 Introducción.

En el capítulo 1 fueron introducidos los módulos de convexidad y diferenciabilidad. Estos han sido estudiados con más detalle y caracterizadas —vía *equivalencia*— las funciones que son módulo de algún espacio de Banach en el capítulo 2. Recordemos que el módulo de convexidad de un espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$, denotado por δ_X, es una función definida en $[0, 2]$ y que toma valores en $[0, \infty)$ — o equivalentemente definida en $[0, \infty]$ con valores en $[0, \infty]$— y que caracteriza la convexidad uniforme de la bola unidad de X —equivalentemente la convexidad uniforme de la función $\|\cdot\|$ sobre la esfera unidad. En efecto, un espacio es uniformemente convexo si y sólo si $\delta_X(t) > 0$ para $t > 0$.

De la misma forma el módulo de diferenciabilidad del espacio $(X, \|\cdot\|)$, denotado por ρ_X, es una función definida en $[0, \infty)$ con valores en $[0, \infty)$ y que caracteriza la diferenciabilidad Fréchet uniforme del espacio —equivalentemente, la diferenciabilidad Fréchet uniforme de la función $\|\cdot\|$ en la esfera unidad S_X. En efecto, un espacio es uniformemente Fréchet diferenciable si y sólo si $\rho_X(t)/t \to 0$, cuando $t \to 0$.

En este capítulo vamos a estudiar un nuevo módulo, introducido por K. Przesławski y D. Yost en su trabajo [56] y que caracteriza a un mismo tiempo aquellos espacios que son uniformemente convexos y uniformemente diferenciables. El origen de este módulo se adentra en la teoría de funciones multivaluadas Lipschitz continuas. En efecto, el módulo surge como herramienta necesaria en la construcción de los selectores Lipschitz continuos de tales funciones multivaluadas en un espacio de Banach.

Tras su definición fueron varios los autores que profundizaron en las propiedades descriptivas —relativas a la geometría del espacio de Banach— de este módulo y que lo han denominado *módulo de cuadratura* —en [7, 56]— y *módulo tangencial* —en [62, 63, 64].

A continuación vamos a describir las propiedades fundamentales de tal módulo que han sido probadas con anterioridad e independencia de esta memoria. En primer lugar, procedemos a dar su definición.

Definición 5.1.1. Dado un espacio de Banach X, para cada par de vectores x e $y \in X$ con $\|y\| < 1 < \|x\|$, existe un único vector $z = z(x, y)$ con $\|z\| = 1$ y en el segmento $[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda)y : \lambda \in [0, 1]\}$. Denotaremos

$$\omega(x, y) = \frac{\|x - z(x, y)\|}{\|x\| - 1}$$

y definimos $\xi = \xi_X : [0, 1) \to [1, \infty]$ como

$$\xi(\beta) = \sup\{\omega(x, y) : \|y\| \leq \beta < 1 < \|x\|\}.$$

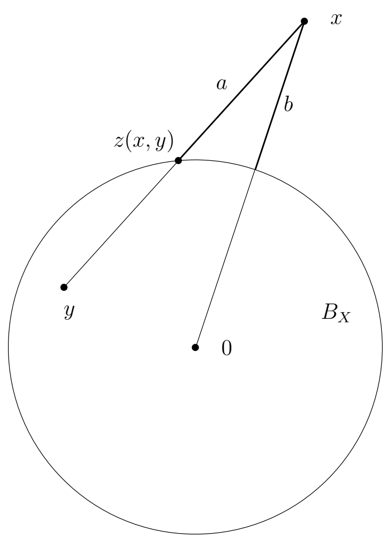

Figura 5.1:

Esto es, $\omega(x, y)$ es el cociente entre la longitud a y la longitud b —véase la figura 5.1— medidas en términos de la norma, y el módulo es el supremo sobre todos estos cocientes cuando $\|y\| \leq \beta$.

En [56], donde fue introducido, se demuestran las primera propiedades de este módulo, a saber; que para un espacio prehilbertiano, $\xi(\beta) = \xi_2(\beta) = 1/\sqrt{1 - \beta^2}$; que para cada espacio normado conteniendo $l_1(2)$, $\xi(\beta) = \xi_1(\beta) = (1 + \beta)/(1 - \beta)$; que ξ es creciente; que $\xi(0) = 1$

y que $\xi_X \leq \xi_1$ para cualquier espacio de Banach $(X, \|\cdot\|)$. En [62], I. Şerb demuestra que un espacio de Banach es uniformemente convexo si y solamente si

$$\lim_{\beta \nearrow 1} (1-\beta)\xi_X(\beta) = 0.$$

Este último resultado será redescubierto en [7]. En [63] se demuestra que el módulo de cuadratura ξ_X y el módulo de diferenciabilidad ρ_X son *equivalentes* y en particular que un espacio es uniformemente diferenciable si y solamente si $\xi'_X(0) = 0$. Sin embargo en [7] y a posteriori se obtiene una relación más precisa —teorema 5.2.4— entre ambos módulos. En [64] el autor obtiene un resultado paralelo al resultado de Nordlander para los módulos de convexidad y diferenciabilidad [53], $\xi_X \geq \xi_2$ para cualquier espacio de Banach X. Y así caracteriza los espacios que admiten un producto escalar como aquellos X tales que existe $\beta_0 \in (0,1)$ tal que $\xi_X(\beta_0) = \xi_2(\beta_0)$. Este resultado fue probado también de forma independiente por C. Benítez, K. Przesławski y D. Yost en [7].

Es [7] un trabajo donde encontrar enunciadas y probadas todas las propiedades conocidas hasta esta memoria acerca del módulo de cuadratura. En particular, a continuación presentamos un teorema que sumariza estas propiedades y que puede encontrarse como tal en el citado trabajo. En particular muestra, como hemos anunciado al principio, que este módulo caracteriza a un tiempo convexidad uniforme y diferenciabilidad uniforme —véanse los ítems (6) y (7).

Teorema 5.1.2 ([7, Teorema 0]). *Sea X un espacio normado, ξ su módulo de cuadratura. Entonces*

(a) $\xi(\beta) = \sup\{\xi_M(\beta) : M \subset X, \dim M = 2\}$,

(b) ξ es estrictamente creciente y convexo,

(c) $\xi < \xi_1$ en $(0,1)$, a no ser que X contenga copias arbitrariamente cercanas de $l_1(2)$,

(d) $\xi' \leq \xi'_1$ casi en todo punto en $(0,1)$,

(e) $\xi > \xi_2$ en $(0,1)$, a no ser que X admita un producto escalar,

(f) X es uniformemente convexo si y solamente si $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi(\beta) = 0$,

(g) X es uniformemente diferenciable si y solamente si $\xi'(0) = 0$,

(h) $\xi_{X^*}(\beta) = 1/\xi^{-1}(1/\beta)$, para $\beta \in [0,1)$,

(i) Si $\xi(\beta) < 1/(1-\beta)$ para algún β, entonces X tiene estructura normal uniforme.

Como hemos dicho las pruebas de estos resultados se encuentran en [7, 56] y algunas de ellas en [62, 63, 64] donde se utiliza una caracterización más geométrica del módulo ξ.

Obsérvese en particular que el comportamiento de ξ cerca de 1 está relacionado con la convexidad, y que el comportamiento de ξ cerca del origen está relacionado con la diferenciabilidad —recuérdese la equivalencia cerca del origen entre ξ_X y ρ_X.

5.2 Superreflexividad y el módulo de cuadratura.

Usando la caracterización de los espacios de Hilbert de Kwapień [46] —para una demostración elegante véase también [66]—, Figiel y Pisier [26] probaron que todo espacio de Banach que es renormable tipo potencia 2 para convexidad y para diferenciabilidad es necesariamente isomorfo a un espacio de Hilbert, es decir, admite una norma equivalente hilbertiana.

Rakov [57] probó que si δ_X satisface $\delta_X(\varepsilon) \geq c\varepsilon^2$ para $c > 0{,}1076$ y para $\varepsilon > 0$ pequeño, entonces X admite una norma (UF) de tipo potencia q siempre que $2 - q \geq k\sqrt[4]{1-8c}$, para cierta constante k.

Cuando definimos el módulo de convexidad de un espacio de Banach —véase el capítulo 1— se dijo que en [1] se había probado que cualquier espacio de Banach X que satisface $\delta_X(\varepsilon) = \delta_H(\varepsilon)$ para algún $\varepsilon \neq 2\cos(k\pi/2n)$ $n = 2, 3, \ldots$; $k = 1, 2, \ldots, n-1$, es un espacio de Hilbert. Una versión asintótica de este resultado fue probada independiente y cada una de ellas con diferentes técnicas en [44, 57, 61]. Esta versión nos dice que si

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{8},$$

entonces X es un espacio de Hilbert.

En [37] se obtiene una mejora de la estimación obtenida por Rakov, usando las técnicas de [44, 57]. Obtienen el resultado

Teorema 5.2.1 ([37, Teorema 1.1]). *Existe una constante universal k_1 tal que si un espacio de Banach X satisface*

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \geq \frac{1}{8(1+b)}$$

para cierto $b \geq 0$, entonces X admite una norma equivalente (UF) de tipo potencia

$$q = 1 + \frac{1}{1 + k_1 b}.$$

En este mismo trabajo [37, Observ. 1.5] se plantea la pregunta de si es posible establecer un resultado análogo al teorema 5.2.1 en términos del módulo de cuadratura. En realidad tal resultado se obtiene utilizando las propiedades básicas del módulo de cuadratura y el propio teorema 5.2.1. Presentamos a continuación este resultado.

En primer lugar recordamos la definición de las constantes $a(X)$ y $b(X)$ introducidas en [37].

Definición 5.2.2 ([37])**.** Sea X un espacio de Banach, se definen las siguientes constantes

$$a(X) := 2 \limsup_{\tau\to 0^+} \frac{\rho_X(\tau)}{\tau^2} - 1 \qquad \text{y} \qquad b(X) := \left(8 \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} \right)^{-1} - 1.$$

En [37] se demuestra que $0 \leq b(X) \leq \infty$ y de la igualdad de Lindenstrauss —véase (1.3.1) en el capítulo 1— se deduce que $a(X^*) = b(X)$. Introducimos ahora una nueva constante $B(X)$.

Definición 5.2.3. Sea X un espacio de Banach, se define la constante

$$B(X) := 2 \limsup_{\tau\to 0^+} \frac{1 - \xi_X^{-1}(1/\tau)}{\tau^2 \xi_X^{-1}(1/\tau)} - 1.$$

Obsérvese que también se cumple $0 \leq B(X) \leq \infty$. Utilizando el siguiente resultado probado en [7] y que establece la relación de equivalencia explícita entre el módulo de cuadratura y de diferenciabilidad en el origen, pueden deducirse relaciones entre las constantes B y b.

Teorema 5.2.4 ([7, Teorema 2.4 (i)])**.** *Para cualquier espacio normado X y para todo $\beta \in (0,1)$ se tiene*

$$1 \leq \frac{\xi_X(\beta) - 1}{\rho_X(\beta)} \leq \frac{2}{1-\beta}.$$

Lema 5.2.5. *Sea X un espacio de Banach, entonces*

$$b(X) = a(X^*) \leq B(X).$$

Demostración. Usando el teorema 5.2.4 y el ítem (h) del teorema 5.1.2, podemos establecer

$$\begin{aligned} a(X^*) &= 2 \limsup_{\tau\to 0^+} \frac{\rho_{X^*}(\tau)}{\tau^2} - 1 \leq 2 \limsup_{\tau\to 0^+} \frac{\xi_{X^*}(\tau) - 1}{\tau^2} - 1 \\ &\leq 2 \limsup_{\tau\to 0^+} \frac{\left(\frac{1}{\xi_X^{-1}(1/\tau)}\right) - 1}{\tau^2} - 1 = B(X), \end{aligned}$$

como queríamos probar. □

En particular, podemos establecer el siguiente análogo al teorema 5.2.1.

Teorema 5.2.6. *Existe una constante universal k_1 tal que si un espacio de Banach X satisface $B(X) < \infty$ entonces X admite una norma equivalente (UF) de tipo potencia $q = 1 + \frac{1}{1+k_1 B}$.*

Demostración. Si $B(X) < \infty$ entonces $0 \leq b(X) \leq B(X)$, con lo que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} \frac{\delta_X(\varepsilon)}{\varepsilon^2} = \frac{1}{8(1+b(X))} \geq \frac{1}{8(1+B(X))}.$$

Aplicando el teorema 5.2.1 para la constante $B(X)$ obtenemos el renormamiento deseado. □

De forma análoga a como se define la constante $B(X)$, puede definirse la siguiente constante

$$B'(X) = \limsup_{\tau \to 0^+} \frac{(1-\xi_X^{-1}(1/\tau))(1-\tau)}{\tau^2 \xi_X^{-1}(1/\tau)} - 1.$$

De la misma forma que en el lema 5.2.5 se establece que $b(X) \geq B'(X)$. Es más, cuando $B(X)$ es finito, se tiene que $B(x) = 2B'(X) + 1$.

Obsérvese que la definición de B es natural. En efecto, observando el caso $X = H$ tenemos que $\xi_X = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ y, por tanto $\xi_X^{-1}(1/\tau) = \sqrt{1-\tau^2}$ con lo que

$$2\frac{1-\xi_X^{-1}(1/\tau)}{\tau^2 \xi_X^{-1}(1/\tau)} - 1 = \frac{2(1-\sqrt{1-\tau^2})}{\tau^2\sqrt{1-\tau^2}} - 1 \sim \left(8\frac{\delta_X(\tau)}{\tau^2}\right)^{-1} - 1.$$

Si bien en este caso $b(X) = B(X)$.

Por la relación de dualidad entre el módulo de convexidad y de diferenciabilidad y la *equivalencia* entre el módulo de diferenciabilidad y el de cuadratura, se deduce que el módulo de convexidad δ_X es *equivalente* a $(\xi_{X^*} - 1)^*$. La posibilidad de establecer resultados análogos a los demostrados en el capítulo 2 en relación al módulo de cuadratura pasan por establecer la relación entre el módulo de convexidad y el módulo de cuadratura del mismo espacio y no de su dual.

5.3 Localización del módulo de cuadratura.

La pregunta sobre la existencia de una *localización* sensible del módulo de cuadratura fue establecida en [7, Problema 4.8]. Con la intención de responder a esta pregunta definimos los siguientes dos módulos.

De ahora en adelante y con la intención de que nuestra notación sea lo más clara posible, para cualquier vector de norma uno x, $\lambda > 0$ e y con $\|y\| < 1$, escribiremos $\omega_x(\lambda, y) = \omega((1+\lambda)x, y)$ y $z_x(\lambda, y) = z((1+\lambda)x, y)$ —véase la figura 5.2—. Por lo tanto $\omega_x(\lambda, y) = \|(1+\lambda)x - z_x(\lambda, y)\| / \lambda$. Además, podemos deducir que para $y \in \operatorname{span}\{x\}$ y para cualquier $\lambda > 0$, $\omega_x(\lambda, y) = 1$, puesto que $z_x(\lambda, y)$ sería x.

Definición 5.3.1 (Módulo de cuadratura puntual)**.** Para cualquier para de vectores de norma uno x, y el *módulo de cuadratura puntual en x en la dirección y* es la función $\xi_{X,x,y} = \xi_{x,y} : [0,1) \to [1,\infty)$ definida por

$$\xi_{x,y}(\beta) = \sup\{\omega_x(\lambda, \gamma y) : |\gamma| \leq \beta, \lambda > 0\}.$$

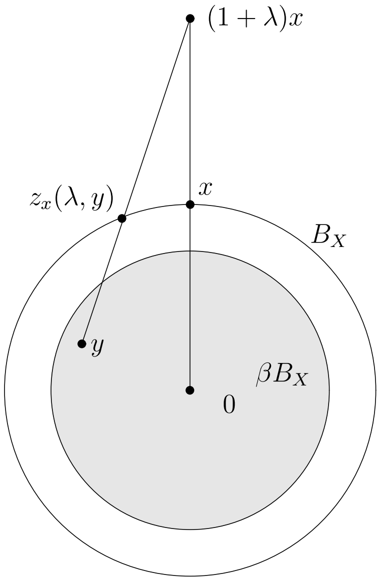

Figura 5.2:

Definición 5.3.2 (Módulo de cuadratura local)**.** Para cualquier vector de norma uno x el *módulo de cuadratura local en* x es la función $\xi_{X,x} = \xi_x : [0,1) \to [1,\infty)$ definida por

$$\xi_x(\beta) = \sup\{\omega_x(\lambda, y) : \|y\| \leq \beta, \lambda > 0\} = \sup_{\|y\|=1} \{\xi_{x,y}(\beta)\}.$$

Obsérvese que para cualquier subespacio $M \subset X$ de dimensión 2 y que contiene el par de vectores de norma uno x, y, tenemos que $\xi_{x,y} = \xi_{M,x,y}$. Para ξ_x establecemos un análogo a (a) del teorema 5.1.2. En efecto,

$$\xi_x(\beta) = \sup\{\xi_{M,x}(\beta) : x \in M \subset X, \ \dim M = 2\}.$$

Obsérvese que para cualquier $\beta \in [0,1)$, se tiene

$$\xi(\beta) = \sup\{\xi_x(\beta) : x \in S_X\} = \sup\{\xi_{x,y}(\beta) : x, y \in S_X\}.$$

Probaremos cómo estos módulos están relacionados con las diferentes propiedades geométricas de la norma de X. En particular, en la sección 5.3.2 demostraremos cuándo un espacio normado X es o no Fréchet —resp. Gâteaux — diferenciable dependiendo del comportamiento del módulo de cuadratura local —resp. puntual— cerca del origen. En la sección 5.3.3 recordamos las nociones de convexidad local uniforme y convexidad estricta y mostraremos si X es o no localmente uniformemente —resp. estrictamente— convexo dependiendo en el comportamiento del módulo de cuadratura local —resp. puntual— cerca de uno. Más precisamente, estableceremos los siguientes resultados :

Teorema 5.3.3. *Sea X un espacio normado y x un vector de norma uno. Entonces*

(a) X es Gâteaux diferenciable en x si y sólo si $\xi'_{x,y}(0) = 0$ para todo y con $\|y\| = 1$.

(b) X es Fréchet diferenciable en x si y sólo si $\xi'_x(0) = 0$.

(c) X es estrictamente convexo en x si y sólo si $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$ para todo y con $\|y\| = 1$.

(d) X es localmente uniformemente convexo en x si y sólo si $\lim_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_x(\beta) = 0$.

En la siguiente sección nos centramos en el estudio de las propiedades del ratio $\omega_x(\cdot,\cdot)$.

5.3.1 Propiedades de $\omega_x(\lambda, y)$.

El siguiente lema puede encontrase en [7] como parte de la demostración de que ξ es localmente Lipschitz continua.

Lema 5.3.4 ([7, Teorema 1.5])**.** *Sea X un espacio normado y x, $y \in S_X$. Entonces, para cualquier $\lambda > 0$ y $0 \le \beta < \gamma < 1$,*

$$\omega_x(\lambda, \gamma y) - \omega_x(\lambda, \beta y) \le \xi_1(\gamma) - \xi_1(\beta).$$

Si fijamos dos vectores de norma uno x, y, uno puede darse cuenta de que el módulo $\xi_{x,y}$ puede expresarse de una forma mucho más sencilla. En efecto, tenemos el siguiente resultado.

Proposición 5.3.5. *Sea X un espacio normado y x, y dos vectores de norma uno. Entonces, para todo $\beta \in [0, 1)$,*

$$\xi_{x,y}(\beta) = \sup\{\omega_x(\lambda, \pm\beta y) : \lambda > 0\}.$$

Demostración. Es suficiente probar que para cualquier $\lambda > 0$ fijado y cualquier $\gamma \le \beta$ tenemos que $\omega_x(\lambda, \beta y) \ge \omega_x(\lambda, \gamma y)$. Utilizaremos el siguiente resultado que puede encontrarse en [11, 28, 60, 62].

Lema 5.3.6 ([62, Lema 2.2])**.** *Sea X un espacio normado de dimensión 2 y sean K_1, K_2 dos subconjuntos cerrados y convexos de X con interior no vacío. Si $K_1 \subset K_2$ entonces $r(K_1) \le r(K_2)$, donde $r(K_i)$ denota la longitud de la circunferencia de K_i, $i = 1, 2$.*

Podemos aplicar este lema a los triángulos : K_1 con vértices en el origen, $z_x(\lambda, \gamma y)$ y $(1+\lambda)x$; K_2 con vértices el origen, $z_x(\lambda, \beta y)$ y $(1+\lambda)x$ —véase la figura 5.3. Por lo tanto

$$\begin{aligned} r(K_1) &= \|(1+\lambda)x\| + \|z_x(\lambda,\gamma y)\| + \|(1+\lambda)x - z_x(\lambda,\gamma y)\| \\ &\le \|(1+\lambda)x\| + \|z_x(\lambda,\beta y)\| + \|(1+\lambda)x - z_x(\lambda,\beta y)\| = r(K_2) \end{aligned}$$

Simplificando y dividiendo por λ, obtenemos la desigualdad buscada. □

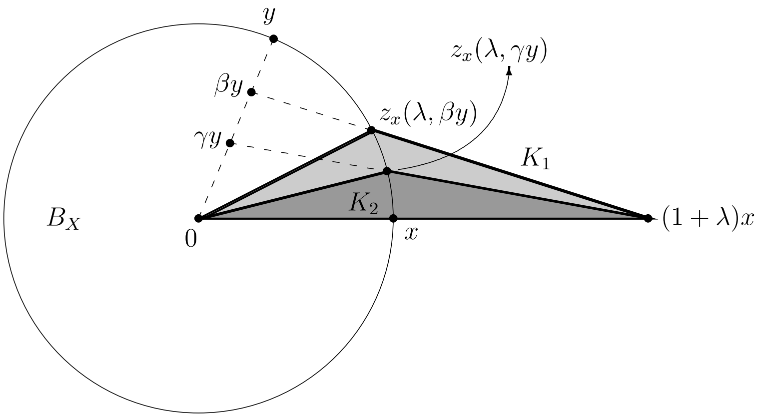

Figura 5.3:

Proposición 5.3.7. *Sea X un espacio normado. Si x, y es un par de vectores de norma uno y $0 \leq \beta < \gamma < 1$, entonces*

$$\xi_{x,y}(\gamma) - \xi_{x,y}(\beta) \leq \xi_1(\gamma) - \xi_1(\beta) \tag{5.3.1}$$

$$\xi_x(\gamma) - \xi_x(\beta) \leq \xi_1(\gamma) - \xi_1(\beta), . \tag{5.3.2}$$

En particular, $\xi_{x,y}$ y ξ_x son funciones localmente Lipschitz continuas.

Demostración. Del lema 5.3.4 deducimos que $\omega_x(\lambda, \gamma y) - \xi_{x,y}(\beta) \leq \xi_1(\gamma) - \xi_1(\beta)$ y, por la proposición 5.3.5, obtenemos la desigualdad (5.3.1) tomando supremos sobre $\lambda > 0$. La desigualdad (5.3.2) sigue similarmente de la desigualdad (5.3.1), tomando supremos sobre $y \in S_X$. $\square$

Intentando simplificar la expresión para $\xi_{x,y}$ obtenida en la proposición 5.3.5, uno puede estudiar el comportamiento de la función $\omega_x(\cdot, y)$ para $x \in S_X$ e $y \in \overset{\circ}{B}_X$ fijados. A primera vista se puede observar el siguiente resultado que nos será de utilidad.

Proposición 5.3.8. *Sea X un espacio normado y $x \in S_X$. Entonces,*

$$1 \leq \omega_x(\lambda) := \sup\{\omega_x(\lambda, y) : y \in \overset{\circ}{B}_X\} \leq 1 + \frac{2}{\lambda}.$$

Probaremos ahora que el límite de la función $\omega_x(\lambda, y)$ cuando λ tiende a cero existe siempre y lo computamos.

Recordemos que en un espacio normado X y para cualquier par de vectores $x, y \in X \setminus \{0\}$, se puede definir la derivada por la derecha de la norma en x en la dirección de y como el límite

$$N_+(x, y) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\|x + \lambda y\| - \|x\|}{\lambda}.$$

Proposición 5.3.9. *Sea X cualquier espacio normado, $x \in S_X$, e y con $\|y\| < 1$. Entonces*

$$\lim_{\lambda \searrow 0} \omega_x(\lambda, y) = \frac{\|x - y\|}{1 - N_+(x, y)}.$$

Con la intención de probar este resultado, antes de nada, necesitamos introducir alguna notación.

Fijado un espacio normado X, $x \in S_X$ e $y \in \overset{\circ}{B}_X$ —su interior— con $y \notin \operatorname{span}\{x\}$. Denotaremos por $z'(\lambda)$ al único vector que cae en $\operatorname{span}\{z_x(\lambda, y)\}$ y en el rayo que empieza en x y tiene dirección y, esto es

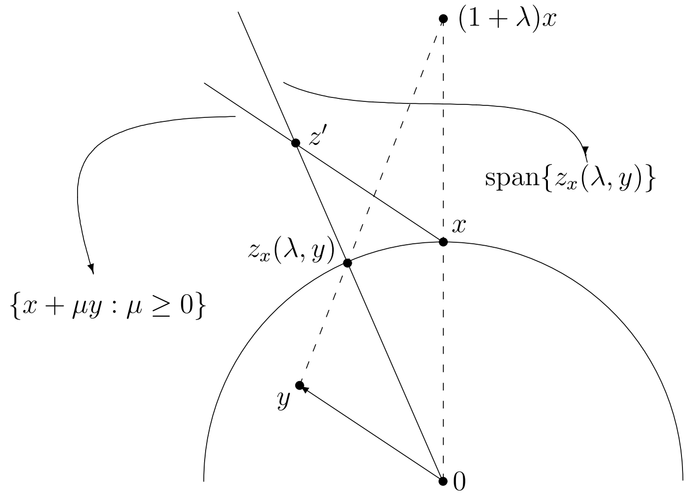

Figura 5.4:

$$z'(\lambda) = \{x + \mu y : \mu \geq 0\} \cap \operatorname{span}\{z_x(\lambda, y)\}.$$

Podemos escribir $z'(\lambda) = x + \mu(\lambda)y$, para algún $\mu(\lambda) \geq 0$. Denotamos por f_λ a un funcional continuo en X^* que satisfaga $f_\lambda(x) = f_\lambda(z_x(\lambda, y)) = 1$. Podemos también escribir $z_x(\lambda, y) = (1 + \lambda)x + \nu(\lambda)(y - (1 + \lambda)x)$, para algún $\nu(\lambda) \in [0, 1]$.

Lema 5.3.10. *Sea X un espacio normado, $x \in S_X$ e $y \in \overset{\circ}{B}_X$ tal que $y \notin \operatorname{span}\{x\}$. Entonces*

(a) $\lim_{\lambda \searrow 0} z_x(\lambda, y) = x$.

(b) $\lim_{\lambda \searrow 0} \mu(\lambda) = 0$.

(c) $\lim_{\lambda \searrow 0} f_\lambda(y) = N_+(x, y)$.

Demostración del lema 5.3.10. Para probar (a) será suficiente mostrar que $\nu(\lambda)$ tiende a cero cuando $\lambda \to 0$. Primero, observemos que la función $\varphi(t) = \|(1 + \lambda)x + t(y - (1 + \lambda)x)\|$

es convexa y satisface $\varphi(1) = \|y\|$ y $\varphi(0) = 1+\lambda$. Por lo tanto $\varphi(t) \leq (1+\lambda)+t(\|y\| - (1+\lambda))$ para $t \in [0,1]$.

En segundo lugar, como $z_x(\lambda, y) \in S_X$, entonces $\varphi(\nu(\lambda)) = 1$, esto es, $1 \leq (1+\lambda) + \nu(\lambda)(\|y\| - (1+\lambda))$. Finalmente, como $\nu(\lambda) \in [0,1]$, obtenemos $\lim_{\lambda \searrow 0} \nu(\lambda) = 0$ y (a) está probado.

Para probar (b), obsérvese que $z_x(\lambda, y) = (1+\lambda)(1-\nu(\lambda))x + \nu(\lambda)y$. Como $z'(\lambda)$ está en $\operatorname{span}\{z_x(\lambda, y)\}$, existe un cierto $\alpha(\lambda) \in \mathbb{R}$ tal que

$$x + \mu(\lambda)y = z'(\lambda) = \alpha(\lambda)z_x(\lambda, y),$$

de donde se sigue que $\alpha(\lambda) = (1+\lambda)^{-1}(1-\nu_x(\lambda))^{-1}$ y entonces

$$\mu(\lambda) = \nu(\lambda)/[(1+\lambda)(1-\nu(\lambda))].$$

Como $\nu(\lambda)$ converge a 0 cuando $\lambda \to 0$, (b) queda probado.

Para demostrar (c), obsérvese que, como (b), tenemos

$$N_+(x, y) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\|x + \mu(\lambda)y\| - \|x\|}{\mu(\lambda)} = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\|z'(\lambda)\| - \|x\|}{\mu(\lambda)}.$$

Como $z'(\lambda) \in \operatorname{span}\{z\}$, $\|z'(\lambda)\| = f_\lambda(z'(\lambda))$. Por lo tanto, como $f_\lambda(x) = \|x\|$,

$$N_+(x, y) = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{f_\lambda(z'(\lambda)) - f_\lambda(x)}{\mu(\lambda)} = \lim_{\lambda \searrow 0} \frac{\mu(\lambda)f_\lambda(y)}{\mu(\lambda)} = \lim_{\lambda \searrow 0} f_\lambda(y). \qquad \square$$

Demostración de la proposición 5.3.9. En primer lugar, si $y \in \operatorname{span}\{x\}$ entonces $1 - N_+(x, y) = \|x - y\|$, y como $\omega_x(\lambda, y) = 1$, este caso es claro. Así pues, asumamos que $y \notin \operatorname{span}\{x\}$ y consideremos $w(\lambda)$ el único vector que satisface las condiciones $f_\lambda(w(\lambda)) = 1$ y $w(\lambda) \in \{\mu((1+\lambda)x - y) : \mu \geq 0\}$. Puede verse fácilmente, comparando triángulo semejantes, que $\omega_x(\lambda, y) = \|w(\lambda)\|$. Como $f_\lambda(w(\lambda)) = 1$, es claro que

$$w(\lambda) = (1 + \lambda - f_\lambda(y))^{-1}[(1+\lambda)x - y],$$

esto es, $\omega_x(\lambda, y) = \frac{\|(1+\lambda)x - y\|}{1+\lambda - f_\lambda(y)}$.

Usando la continuidad de la norma y el ítem (c) del lema anterior obtenemos la desigualdad deseada. $\square$

Observación 5.3.11. Sin embargo, este hecho no ayuda a computar $\xi_{x,y}(\beta)$, puesto que la función $\omega_x(\cdot, y)$ no es ni convexa ni monótona como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 5.3.12. Para cualquier $0 < \varepsilon < 1/2$, consideremos en $\mathbb{R}^2$ la norma definida mediante $\|x\|_\varepsilon = \max\{(1-\varepsilon)^{-1}\|x\|_\infty, \|x\|_1\}$, y los vectores $x = (1-\varepsilon, 0)$ e $y = (\varepsilon, 1-\varepsilon)$. —véase la figura 5.5.

Fijemos también $\beta \geq 1 - \varepsilon$. Aquí tenemos la gráfica de la función $\omega_x(\cdot, \beta y)$ para $\varepsilon = 0{,}2$ y $\beta = 0{,}88$.

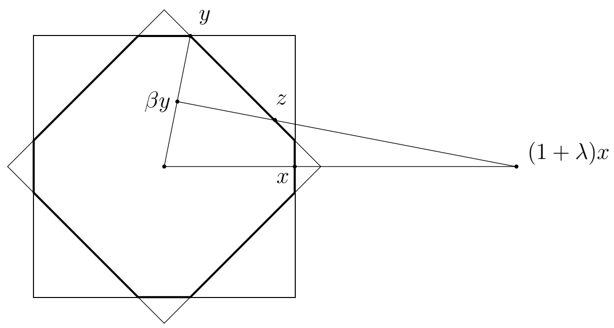

Figura 5.5:

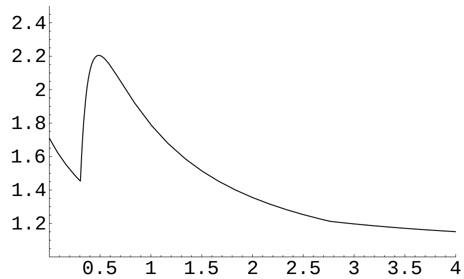

Figura 5.6:

5.3.2 Sobre diferenciabilidad y los módulos de cuadratura localizados.

A lo largo de esta sección X será un espacio normado dotado de la norma $\|\cdot\|$. La colección de todos los funcionales soporte de un vector de norma uno x se define como

$$J(x) = \{f \in X^* : \|f\| = 1, f(x) = \|x\| = 1\}.$$

Recordemos que el *módulo de diferenciabilidad* de un espacio normado es la función $\varrho : [0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ definida por

$$\varrho(\beta) = \sup\Big\{\big(\,\|x + \beta y\| + \|x - \beta y\|\,\big)/2 - 1 : \|x\| = \|y\| = 1\Big\}.$$

La diferentes localizaciones de este módulo son: el *módulo de diferenciabilidad local*, que se define para cualquier $x \in S_X$ y para todo $\beta \in [0, \infty)$ como

$$\varrho_x(\beta) = \sup\Big\{\big(\,\|x + \beta y\| + \|x - \beta y\|\,\big)/2 - 1 : \|y\| = 1\Big\},$$

y el *módulo de diferenciabilidad puntual*, que se define para cualquier par de vectores de norma uno x, y y para todo $\beta \in [0, \infty)$ por

$$\varrho_{x,y}(\beta) = \big(\,\|x + \beta y\| + \|x - \beta y\|\,\big)/2 - 1.$$

Diremos que un espacio normado es: *Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$ en la dirección $y \in S_X$* si y sólo si $\varrho_{x,y}(\beta)/\beta \to 0$ as $\beta \to 0$; *Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$* si y sólo si es Gâteaux diferenciable en x en cualquier dirección $y \in S_X$; *Gâteaux diferenciable* si y sólo si es Gâteaux diferenciable en cualquier $x \in S_X$; *Fréchet diferenciable en $x \in S_X$* si y sólo si $\varrho_x(\beta)/\beta \to 0$ as $\beta \to 0$; y *Fréchet diferenciable* si y sólo si es Fréchet diferenciable en cualquier $x \in S_X$.

Para cualquier par de vectores de norma uno x, y, definimos la función $\varepsilon_{x,y} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ por la fórmula

$$\varepsilon_{x,y}(\beta) = \sup\left\{\frac{\|x+\beta w\| - \|x\|}{\beta} - f(w) : w \in Y, f \in J_Y(x)\right\},$$

donde $Y = \operatorname{span}\{x, y\}$ y $J_Y(x)$ denota el conjunto $\{f|_Y : f \in J(x)\}$. Puede observarse que esta función es creciente y que el espacio es Gâteaux diferenciable en x en la dirección y si y sólo si $\varepsilon_{x,y}(\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$. Veamos la relación entre $\varepsilon_{x,y}$ y el módulo de cuadratura puntual $\xi_{x,y}$.

Proposición 5.3.13. *Para cualquier par de vectores de norma uno x e y y para todo $\beta \in [0,1)$*

$$\xi_{x,y}(\beta) \leq 1 + \frac{2\beta}{(1-\beta)^2}\varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right).$$

Demostración. Fijamos dos vectores x, $y \in S_X$, escalares $\lambda > 0$, $\beta \in [0,1)$ y un funcional lineal $f \in J_Y(x)$. Entonces, existe un cierto $z_0 \in [\beta y, (1+\lambda)x]$ tal que $f(z_0) = 1$. Se puede tomar un vector u tal que $f(u) = 0$ y $z_0 \in [u, (1+\lambda)x]$.

Se sigue que existe un cierto $\mu \geq 0$ tal que $u = (1-\mu)(1+\lambda)x + \mu\beta y$ y, como $f(u) = 0$, que $\mu = (1+\lambda)/(1+\lambda-\beta f(y))$. Así, se puede estimar

$$\|u\| \leq \frac{(1+\lambda)\beta}{1+\lambda-\beta f(y)}(|f(y)|+1) \leq \frac{2\beta}{1-\beta}.$$

Como $z_0 \in [u, (1+\lambda)x]$, existe un cierto $\alpha \in (0,1)$ tal que $z_0 = (1-\alpha)(1+\lambda)x + \alpha u$. Utilizando que $f(z_0) = 1$, se comprueba fácilmente que $\alpha = \lambda/(1+\lambda)$. Por lo tanto

$$\frac{\|z_0 - x\|}{\lambda} = \frac{\|u\|}{1+\lambda} \leq \|u\| \leq \frac{2\beta}{1-\beta}, \tag{5.3.3}$$

$$\|z_0 - x\| = \frac{\lambda}{1+\lambda}\|u\| \leq \|u\| \leq \frac{2\beta}{1-\beta}. \tag{5.3.4}$$

Observemos ahora que, de la definición de $\varepsilon_{x,y}$, se sigue

$$\|(1+\lambda)x - z_0\| - \|\lambda x\| \leq \|x - z_0\|\,\varepsilon_{x,y}\left(\frac{\|x-z_0\|}{\lambda}\right).$$

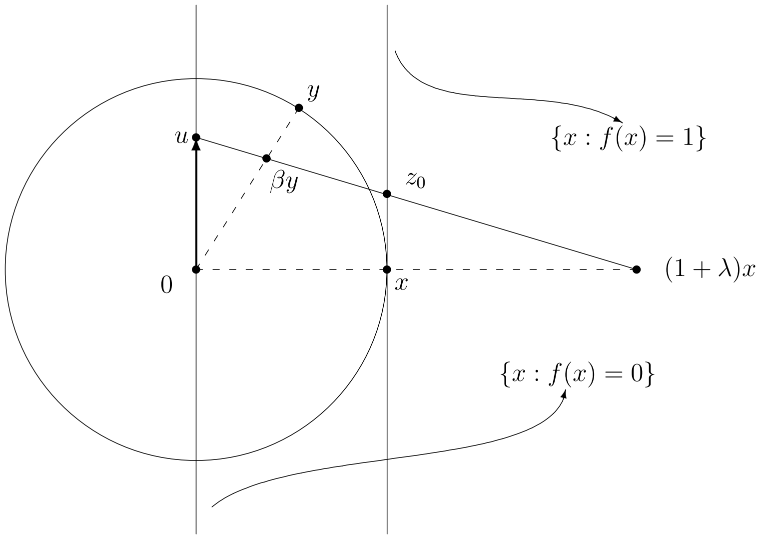

Figura 5.7:

Dividiendo por λ, y utilizando (5.3.3) se obtiene la desigualdad

$$\frac{\|(1+\lambda)x - z_0\|}{\lambda} \leq 1 + \frac{2\beta}{1-\beta}\varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right). \tag{5.3.5}$$

Ahora, escribimos $z = z_x(\lambda, \beta y)$ y denotamos por ξ_X al módulo de cuadratura de X. Se puede observar fácilmente que $\|z - z_0\| \leq (\|z_0\| - 1)\xi_X(\beta)$, y

$$(\|z_0\| - 1) \leq \|x - z_0\|\, \varepsilon_{x,y}(\|x - z_0\|).$$

Uniendo ambas desigualdades, y usando (5.3.3), (5.3.4) y $\xi_X \leq \xi_1$, se tiene

$$\frac{\|z - z_0\|}{\lambda} \leq \xi_1(\beta)\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right)\varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right). \tag{5.3.6}$$

Finalmente, como

$$\omega_x(\lambda, \beta y) \leq \frac{\|(1+\lambda)x - z_0\|}{\lambda} + \frac{\|z - z_0\|}{\lambda},$$

usando (5.3.5) y (5.3.6) se obtiene

$$\omega_x(\lambda, \beta y) \leq 1 + \frac{2\beta}{1-\beta}\varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right)(1 + \xi_1(\beta)),$$

lo que, tomando supremos sobre $\lambda > 0$, termina la demostración. □

Ahora establecemos la relación entre el módulo de cuadratura puntual $\xi_{x,y}$, y el módulo de diferenciabilidad puntual $\rho_{x,y}$.

Proposición 5.3.14. *Para cualquier par de vectores de norma uno x e y y para todo $\beta \in [0,1)$:*

$$\varrho_{x,y}(\beta) \le \xi_{x,y}(\beta) - 1, \tag{5.3.7}$$

$$\varrho_{x}(\beta) \le \xi_{x}(\beta) - 1, \tag{5.3.8}$$

Demostración. Observemos que la segunda desigualdad se sigue de la primera tomando supremos sobre $y \in S_X$. Por lo tanto sólo hemos de mostrar la desigualdad (5.3.7). Para hacerlo, fijamos dos vectores x e y en la esfera. Para un cierto $\beta \in [0,1)$ fijado y para $\lambda > 0$, denotamos $y_1 = y_1(\lambda, \beta y) = -(1+\lambda)\beta y$, $y_2 = y_2(\lambda, \beta y) = (1+\lambda)\beta y$, $x' = (1+\lambda)x$ y $z_i = (1-\alpha_i)x' + \alpha_i y_i$, donde $\alpha_i \in [0,1]$ para $i = 1,2$.

Por un lado, observamos que $1 = \|z_i\| \ge f(z_i)$ para cualquier $f \in J(x)$. Por lo tanto $\alpha_i \ge \lambda/(1+\lambda-f(y_i))$. Por otro lado, $\|x' - y_i\| = (1+\lambda)\,\|x \pm \beta y\|$. Como, para $\lambda < (1-\beta)/\beta$,

$$\frac{\alpha_i(\lambda)\,\|x' - y_i\|}{\lambda} = \omega_x(\lambda, \pm(1+\lambda)\beta y) \le \xi_{x,y}((1+\lambda)\beta),$$

tenemos que

$$\left\|x' - y_1\right\| + \left\|x' - y_2\right\| \le \xi_{x,y}((1+\lambda)\beta)\left(\frac{\lambda}{\alpha_1} + \frac{\lambda}{\alpha_2}\right).$$

Como $\alpha_i \ge \lambda/(1+\lambda-f(y_i))$ deducimos que

$$\begin{aligned}
\left\|x' - y_1\right\| + \left\|x' - y_2\right\| &\le \xi_{x,y}((1+\lambda)\beta)(2+2\lambda-(f(y_1)+f(y_2)))\\
&= \xi_{x,y}((1+\lambda)\beta)(2+2\lambda)\\
&= 2\xi_{x,y}((1+\lambda)\beta)(1+\lambda),
\end{aligned}$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned}
\|x+\beta y\| + \|x-\beta y\| &\le \frac{\|x'-y_1\| + \|x'-y_2\|}{(1+\lambda)}\\
&\le 2\xi_{x,y}((1+\lambda)\beta),
\end{aligned}$$

que significa que

$$\varrho_{x,y}(\beta) \le \xi_{x,y}((1+\lambda)\beta) - 1.$$

Como esto es cierto para $\lambda < (1-\beta)/\beta$, podemos tomar el límite cuando λ tiende a cero y, por la continuidad de $\xi_{x,y}$, obtenemos la desigualdad buscada. □

Teorema 5.3.15. *Sean ξ_x y $\xi_{x,y}$ los módulos de cuadratura localizados de X. Entonces*

(a) X es Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$ en la dirección $y \in S_X$ si y sólo si ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$.

(b) X es Gâteaux diferenciable en $x \in S_X$ si y sólo si ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$ para todo $y \in S_X$.

(c) X es Gâteaux diferenciable si y sólo si ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$ para todo par x, $y \in S_X$.

(d) X es Fréchet diferenciable en $x \in S_X$ si y sólo si ${\xi_x}'(0) = 0$.

(e) X es Fréchet diferenciable si y sólo si ${\xi_x}'(0) = 0$ para todo $x \in S_X$.

Demostración. (a) Primero, considerando la desigualdad (5.3.7) de la proposición 5.3.14, es directo que si $\xi'_{x,y}(0) = 0$ entonces $\varrho_{x,y}(\beta)/\beta$ converge a 0 cuando β tiende a 0, i.e. la norma es diferenciable en x en la dirección y.

En segundo lugar, asumamos que X es Gâteaux diferenciable en x en la dirección y. Si x e y son linealmente dependientes el resultado es trivial. Supongamos entonces que x e y son linealmente independientes, entonces aplicando la proposición 5.3.13 se tiene que

$$\frac{\xi_{x,y}(\beta) - 1}{\beta} \leq \frac{2}{(1-\beta)^2} \varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right).$$

Como la norma de X es Gâteaux diferenciable en x en la dirección y, tenemos $\varepsilon_{x,y}(t) \to 0$ cuando $t \to 0$. Esto implica que ${\xi_{x,y}}'(0) = 0$.

(b) Se sigue de (a) puesto que para funciones convexas la existencia de todas las derivadas direccionales en x implican diferenciabilidad Gâteaux en x.

(c) Evidente usando (b).

(d) Por un lado, considerando la desigualdad (5.3.8), de la proposición 5.3.14, es claro que si ${\xi_x}'(0) = 0$ entonces $\varrho_x(\beta)/\beta$ converge a 0 cuando β tiende a 0, i.e. el espacio es diferenciable Fréchet en x.

Por otro lado, si suponemos que X es Fréchet diferenciable en x, entonces aplicando la proposición 5.3.13, para cualquier $y \in S_X$ tenemos

$$\frac{\xi_{x,y}(\beta) - 1}{\beta} \leq \frac{2}{(1-\beta)^2} \varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right).$$

Tomando supremos sobre $y \in S_X$ obtenemos

$$\frac{\xi_x(\beta) - 1}{\beta} \leq \frac{2}{(1-\beta)^2} \sup_{y \in S_X} \left\{\varepsilon_{x,y}\left(\frac{2\beta}{1-\beta}\right)\right\}.$$

Como el espacio es diferenciable Fréchet en x, el lado derecho de la desigualdad converge a 0 cuando β tiende a 0. Por lo tanto ${\xi_x}'(0) = 0$.

(e) Se sigue de (d). □

5.3.3 Sobre convexidad y los módulos de cuadratura localizados.

Esta sección está dedicada a mostrar las relaciones entre el comportamiento cerca de uno de los módulos de cuadratura localizados y las propiedades de convexidad de un espacio normado X. En la primera subsección, el módulo de cuadratura local ξ_x será relacionado con la convexidad local uniforme y en la segunda subsección el módulo de cuadratura puntual $\xi_{x,y}$ se relaciona con la convexidad estricta.

Convexidad Local Uniforme

Fijado un espacio normado X y $x \in S_X$. Diremos que el espacio X es *localmente uniformemente convexo en* x si su *módulo de convexidad local*

$$\delta_x(\varepsilon) = \text{ínf}\left\{1 - \left\|\frac{x+y}{2}\right\| : \|y\| = 1, \|x-y\| \geq \varepsilon\right\}$$

es estrictamente positivo, para cada $\varepsilon > 0$ —esta definición es equivalente a def. 1.2.3. El valor $\varepsilon_0(x) = \sup\{\varepsilon : \delta_x(\varepsilon) = 0\}$ se denominará *la característica de convexidad en* x. Obviamente, un espacio normado es localmente uniformemente convexo en x si y sólo si $\varepsilon_0(x) = 0$.

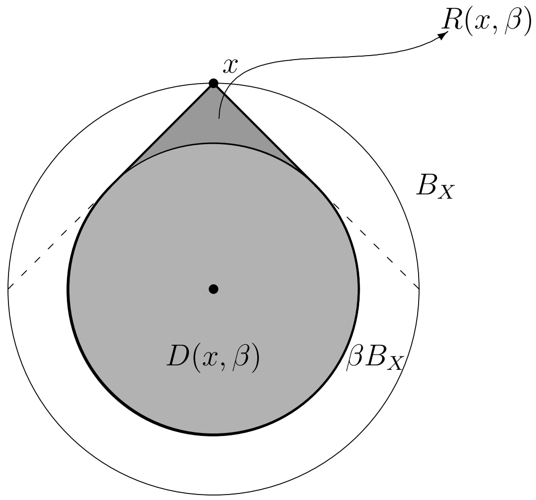

Figura 5.8:

Se define $D(x,\beta) = \text{co}(\{x\} \cup \beta B_X)$ como la *gota* de βB_X con respecto al punto x, y $R(x,\beta) = D(x,\beta) \setminus \beta B_X$ como el *residuo*. En la figura 5.8 las dos zonas sombreadas conforman $D(x,\beta)$ y la zona sombreada de forma más obscura constituye $R(x,\beta)$. En [7, Sección 2], los autores observan que X es localmente uniformemente convexo en x si y sólo si $\operatorname{diam} R(x,\beta) \to 0$ cuando $\beta \to 0$.

Recordemos que el *radio* de un conjunto A relativo a un punto x se define como $\operatorname{rad}(x,A) = \sup_{a\in A} \|x-a\|$. Es claro que $\operatorname{diam}(A)/2 \leq \operatorname{rad}(x,A) \leq \operatorname{diam}(A)$ siempre que $x \in A$. Para $\|x\| = 1$ y $0 < \beta < 1$, Kadets [42] definió el conjunto $G(x,\beta) = \{y : [y,z] \subset B_X \setminus \beta \mathring{B}_X\}$, y observó que X es localmente uniformemente convexo en x si y sólo si $\operatorname{rad}(x, G(x,\beta)) \to 0$

cuando $\beta \to 1$. Más aún, se sabe que la función $\epsilon(x, \beta) = \mathrm{rad}(x, G(x, \beta))$ es uniformemente continua en el conjunto $S_X \times [0, r]$ para todo $r < 1$ y que ϵ es continua en $(x, 1)$ si la norma es localmente uniformemente convexa en $x \in S_X$ —véase [31, Lema 3.4.1] o [8, VI lema 9.2].

Es también bien conocido el hecho de que la norma es localmente uniformemente convexa en x si y sólo si para cualquier sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que satisface

$$\lim_{n\to\infty} 2(\|x\|^2 + \|x_n\|^2) - \|x + x_n\|^2 = 0,$$

se tiene $lim_n \|x_n - x\| = 0$. Esto puede mostrarse fácilmente mediante el uso del módulo de convexidad local. Finalmente, decimos que la norma de X es localmente uniformemente convexa si es localmente uniformemente convexa en todo $x \in S_X$.

Lema 5.3.16. *Si un espacio normado es localmente uniformemente convexo en $x \in S_X$, entonces*

$$\lim_{\lambda\to 0} \sup_{y\in \overset{\circ}{B}_X} \|x - z_x(\lambda, y)\| = 0.$$

Demostración. Obsérvese que para cualquier $\lambda > 0$ e y con $\|y\| < 1$, todos los puntos del segmento $[(1+\lambda)x, z_x(\lambda, y)]$ diferentes de $z_x(\lambda, y)$ están fuera de la bola unidad cerrada. En efecto, la función $f(\alpha) = \|\alpha(1+\lambda)x + (1-\alpha)z(\lambda, y)\|$ satisface $f(0) = 1$ y existe un cierto $\alpha_0 < 0$ tal que $f(\alpha_0) = \|y\| < 1$. Como f es una función convexa, obtenemos que $f(\alpha) > 1$ siempre que $\alpha > 0$. En particular, $f(1/2) = \frac{(1+\lambda)}{2} \left\| x + \frac{z_x(\lambda,y)}{1+\lambda} \right\| > 1$.

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} 0 \le 2\|x\|^2 + 2\left\| \frac{z_x(\lambda, y)}{1+\lambda} \right\|^2 - \left\| x + \frac{z_x(\lambda, y)}{1+\lambda} \right\|^2 &< 2 + \frac{1}{(1+\lambda)^2} - \frac{4}{(1+\lambda)^2} \\ &= 2 - \frac{2}{(1+\lambda)^2} \end{aligned}$$

cuyo último término converge a 0 uniformemente sobre todos los $y \in \overset{\circ}{B}_X$ y, como el espacio es localmente uniformemente convexo en x, $z_x(\lambda, y)$ converge ax uniformemente sobre $y \in \overset{\circ}{B}_X$. □

Teorema 5.3.17. *Para cualquier espacio normado X y para cualquier $x \in S_X$, las siguientes condiciones son equivalentes :*

(a) *X es localmente uniformemente convexo en x.*

(b) $\mathrm{diam}\, G(x, \beta) \to 0$ *cuando* $\beta \to 1$.

(c) $\mathrm{diam}\, R(x, \beta) \to 0$ *cuando* $\beta \to 1$.

(d) $\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_x(\beta) = 0$.

(e) $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_x(\beta) = 0$.

Más aún, $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_x(\beta) \geq \varepsilon_0(x)$.

Demostración. La equivalencia entre (a), (b) y (c) son conocidas. Afirmamos que para todo $0 \leq \beta < 1$,

$$\varepsilon_0(x) - 1 + \beta \leq (1-\beta)\xi_x(\beta). \tag{5.3.9}$$

Dejando a β tender hacia 1, esta desigualdad prueba la última afirmación y (e)⇒(a).

La desigualdad (5.3.9) es trivial si $\varepsilon_0(x) = 0$, así pues asumamos que X no es localmente uniformemente convexo en x. Esto significa que, dado cualquier $\lambda > 0$ podemos encontrar un vector de norma uno y, a distancia al menos $\varepsilon_0(x)$ de x, y tal que para todo $\gamma, \mu \geq 0$ se tiene

$$(1+\lambda^2)\,\|\gamma x + \mu y\| \geq \gamma + \mu.$$

Consideramos $x' = (1+\lambda)x$ e $y' = \beta y$, tales que $\|x' - y'\| \geq \varepsilon_0(x) - \lambda - (1-\beta)$. Entonces $z = z_x(\lambda, y') = (1-\alpha)x' + \alpha y'$ debe satisfacer

$$1 = \|z\| \geq \frac{1+\lambda-\alpha(1+\lambda-\beta)}{1+\lambda^2} \text{ y así } \alpha \geq \frac{\lambda-\lambda^2}{1+\lambda-\beta}.$$

Pero entonces

$$\frac{\|x'-z\|}{\lambda} = \frac{\alpha\,\|x'-y'\|}{\lambda} \geq \frac{(1-\lambda)(\varepsilon_0(x)-\lambda-(1-\beta))}{1+\lambda-\beta}.$$

Dejando a λ tender hacia 0, vemos que $\xi_x(\beta) \geq (\varepsilon_0(x) - 1 + \beta)/(1-\beta)$. Y la desigualdad que buscábamos ha sido obtenida.

Es obvio que (d) implica (e). Entonces, sólo nos queda mostrar la implicación (a)⇒(d). Para hacer esto, consideramos una sucesión $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converge a 1, y las siguientes sucesiones: $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a 0, $\lambda_n > 0$ y vectores $y_n \in \beta_n B_X$ de tal forma que

$$\xi_x(\beta_n) < \omega_x(\lambda_n, y_n) + \delta_n.$$

Hemos de distinguir entre dos casos diferentes:

1. Si $\liminf_n \lambda_n > 0$, el lema 5.3.8 muestra que $M = \sup_n\{\omega_x(\lambda_n)\} < \infty$ y entonces

$$\xi_x(\beta_n) < \omega_x(\lambda_n, y_n) + \delta_n \leq \omega_x(\lambda_n) + \delta_n \leq M + \delta_n.$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty}(1-\beta_n)\xi_x(\beta_n) \leq \lim_{n\to\infty}(1-\beta_n)(M+\delta_n) = 0.$$

2. Si $\liminf_n \lambda_n = 0$, podemos asumir, tomando —si fuera necesario— a una subsucesión, que $\lambda_n \to 0$. Si fuera necesario, podemos elegir y'_n de tal forma que $\|y'_n\| = \beta_n$ e $y'_n \in [y_n, (1+\lambda_n)x] \cap G(z_x(\lambda_n, y_n), \beta_n))$. Escribimos $z_n = z_x(\lambda_n, y_n) = \alpha_n(1+\lambda_n)x + (1-\alpha_n)y'_n$. Entonces, $1 = \|z_n\| \leq \alpha_n(1+\lambda_n) + (1-\alpha_n)\beta_n$, de donde se sigue que $(1-\alpha_n)(1-\beta_n) \leq \alpha_n\lambda_n$ y

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y'_n) &\leq \alpha_n \|(1+\lambda_n)x - z_n\| = (1-\alpha_n)\left\|y'_n - z_n\right\| \\ &\leq (1-\alpha_n)\,\mathrm{rad}(z_n, G(z_n, \beta)).\end{aligned}$$

Esto es, $(1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y_n) = (1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y'_n) \leq \epsilon(z_n, \beta_n)$. El lema 5.3.16 nos dice que z_n tiende a x y por lo tanto, como $\epsilon(\cdot,\cdot)$ es continua en $(x, 1)$ obtenemos que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(1-\beta_n)\xi_x(\beta_n) &\leq \limsup_{n\to\infty}(1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\epsilon(z_n, \beta_n) = \epsilon(x, 1) = 0,\end{aligned}$$

que es exactamente lo que queríamos probar. □

De esta proposición nace una nueva caracterización de lo que es un espacio localmente uniformemente convexo.

Corolario 5.3.18. *Para cualquier espacio normado X las siguientes condiciones son equivalentes :*

(a) X es localmente uniformemente convexo.

(b) $\mathrm{diam}\, G(x, \beta) \to 0$ *cuando* $\beta \to 1$ *para todo* $x \in S_X$*.*

(c) $\mathrm{diam}\, R(x, \beta) \to 0$ *cuando* $\beta \to 1$ *para todo* $x \in S_X$*.*

(d) $\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_x(\beta) = 0$ *para todo* $x \in S_X$*.*

(e) $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_x(\beta) = 0$ *para todo* $x \in S_X$*.*

Convexidad Estricta

Sea X un espacio normado y fijamos dos vectores x, $w \in S_X$. La norma de X diremos que es *estrictamente convexa en x en la dirección w* si no existe ningún segmento propio incluido en la esfera unidad empezando en x con dirección w. De forma similar, diremos que es *estrictamente convexo en x* si no existe ningún segmento propio incluido en la esfera unidad, que empiece en x, sin importar la dirección. Diremos que X es *estrictamente convexo* si es estrictamente convexo en todos los vectores de la esfera unidad —esta definición es equivalente a def. 1.2.3. Definimos el número $\varepsilon_0(x, w)$ como el supremo de todos aquellos $\varepsilon > 0$ tales que el segmento $[x, x+\varepsilon w]$ o $[x, x-\varepsilon w]$ está incluido en la esfera unidad. Definimos también el conjunto

$$C_x^w = \{y \in S_X : \exists \lambda \in \mathbb{R},\, y = x + \lambda w\}.$$

Proposición 5.3.19. *Sea X un espacio normado y x, w dos vectores de norma uno. Si $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$ para todo $y \in C_x^w$, entonces X es estrictamente convexo en x en la dirección w. Más aún,*

$$\sup_{y\in C_x^w} \liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) \geq \varepsilon_0(x,w).$$

Demostración. Supongamos que X no es estrictamente convexo en x en la dirección w. Esto significa que $\varepsilon_0(x,w) > 0$, y que para cualquier $\varepsilon_0(x,w) > \delta > 0$ existe $y \in C_x^w$ tal que $\|y - x\| \geq \varepsilon_0(x,w) - \delta$. Denotamos $z = z_x(\lambda, \beta y)$. Existe $\alpha \in [0,1]$ tal que $z = (1-\alpha)(1+\lambda)x + \alpha\beta y$. Vamos a computar α. Fijamos $f \in \mathscr{D}(x)$ tal que $f([x,y]) = 1$. Tenemos $1 = f(z) = (1-\alpha)(1+\lambda) + \alpha\beta$. Por lo tanto $\alpha = \lambda/(1+\lambda-\beta)$.

Por otro lado, $\|(1+\lambda)x - \beta y\| \geq \|x-y\| - \|\lambda x + (1-\beta)y\| \geq \varepsilon_0(x,w) - \delta - \lambda - (1-\beta)$. Por lo tanto,

$$\xi_{x,y}(\beta) \geq \omega_x(\lambda, \beta y) = \alpha\frac{\|(1+\lambda)x - \beta y\|}{\lambda} \geq \frac{\varepsilon_0(x,w) - \delta - \lambda - (1-\beta)}{1+\lambda-\beta}.$$

Tomando límites cuando $\lambda \to 0$, obtenemos $(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) \geq \varepsilon_0(x,w) - \delta - (1-\beta)$. Por lo tanto

$$\liminf_{\beta\to 0}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) \geq \varepsilon_0(x,w) - \delta.$$

Esto implica que $\liminf_{\beta\to 0}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) > 0$, lo que muestra la primera y, siempre que $\varepsilon_0(x,w) > 0$, la segunda afirmación del teorema. La demostración ha terminado puesto que la segunda afirmación es evidente cuando $\varepsilon_0(x,w) = 0$. □

Teorema 5.3.20. *Para cualquier espacio normado X y para cualquier $x \in S_X$ las siguientes condiciones son equivalentes :*

(a) *X es estrictamente convexo en x.*

(b) $\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *para todo $y \in S_X$.*

(c) $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *para todo $y \in S_X$.*

Demostración. La implicación (b)⇒(c) es evidente. La implicación (c)⇒(a) se sigue de la proposición 5.3.19. Para ver (a)⇒(b), fijaremos $y \in S_X$, consideraremos una cierta sucesión creciente $\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ que converja a 1, y las siguientes sucesiones: $\{\delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ decreciente y que converge a 0, $\lambda_n > 0$ y vectores $y_n = \gamma_n y \in \beta_n B_X$ de tal forma que

$$\xi_{x,y}(\beta_n) < \omega_x(\lambda_n, y_n) + \delta_n.$$

Tenemos que distinguir entre dos casos:

1. Si $\liminf_n \lambda_n > 0$, el lema 5.3.8 muestra que $M = \sup_n\{\omega_x(\lambda_n)\} < \infty$ y entonces

$$\xi_{x,y}(\beta_n) < \omega_x(\lambda_n, y_n) + \delta_n \leq \omega_x(\lambda_n) + \delta_n \leq M + \delta_n.$$

Por lo tanto,

$$\limsup_{n\to\infty}(1-\beta_n)\xi_{x,y}(\beta_n) \leq \lim_{n\to\infty}(1-\beta_n)(M+\delta_n) = 0.$$

2. Si $\liminf_n \lambda_n = 0$, podemos asumir —pasando a una subsucesión si fuera necesario— que $\lambda_n \to 0$. Si fuera necesario podemos elegir ciertos y_n' de tal forma que $\|y_n'\| = \beta_n$ y $y_n' \in [y_n, (1+\lambda_n)x] \cap G_Y(z_x(\lambda_n, y_n), \beta_n))$, donde $Y = \operatorname{span}\{x, y\}$. Escribamos $z_n = z_x(\lambda_n, y_n) = \alpha_n(1+\lambda_n)x + (1-\alpha_n)y_n'$. Entonces, $1 = \|z_n\| \leq \alpha_n(1+\lambda_n) + (1-\alpha_n)\beta_n$, de donde se sigue que $(1-\alpha_n)(1-\beta_n) \leq \alpha_n\lambda_n$ y

$$\begin{aligned}(1-\alpha_n)(1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y_n') &\leq \alpha_n \|(1+\lambda_n)x - z_n\| = (1-\alpha_n)\left\|y_n' - z_n\right\| \\ &\leq (1-\alpha_n)rad(z_n, G_Y(z_n, \beta)).\end{aligned}$$

Esto es, $(1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y_n) = (1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y_n') \leq \epsilon_Y(z_n, \beta_n)$. Como Y es localmente uniformemente convexo en x, el lema 5.3.16 nos dice que z_n converge a x y por lo tanto, como $\epsilon_Y(\cdot,\cdot)$ es continua en $(x, 1)$, obtenemos que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty}(1-\beta_n)\xi_{x,y}(\beta_n) &\leq \limsup_{n\to\infty}(1-\beta_n)\omega_x(\lambda_n, y_n) \\ &\leq \lim_{n\to\infty}\epsilon_Y(z_n, \beta_n) = \epsilon_Y(x, 1) = 0,\end{aligned}$$

que es lo que queríamos probar. □

De este teorema se puede deducir fácilmente el siguiente.

Teorema 5.3.21. *Para cualquier espacio normado X las siguientes condiciones son equivalentes :*

(a) X es estrictamente convexo.

(b) $\limsup_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *para todo $x, y \in S_X$.*

(c) $\liminf_{\beta\to 1}(1-\beta)\xi_{x,y}(\beta) = 0$, *para todo $x, y \in S_X$.*

Bibliografía

[1] J. Alonso and C. Benítez. Some characteristic and noncharacteristic properties of inner product spaces. *J. Approx. Theory*, 55(3):318–325, 1988.

[2] E. Asplund. Averaged norms. *Israel J. Math.*, 5:227–233, 1967.

[3] E. Asplund. Fréchet differentiability of convex functions. *Acta Math.*, 121:31–47, 1968.

[4] D. Azé and J. Penot. Uniformly convex and uniformly smooth convex functions. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6)*, 4(4):705–730, 1995.

[5] S. Banach. *Theory of linear operations*, volume 38 of *North-Holland Mathematical Library*. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1987. Translated from the French by F. Jellett, With comments by A. Pełczyński and Cz. Bessaga.

[6] H. H. Bauschke, J. M. Borwein, and P. L. Combettes. Essential smoothness, essential strict convexity, and convex functions of Legendre type in Banach spaces. *Communications in Contemporary Mathematics*, 3:615–648, 2001.

[7] C. Benítez, K. Przesławski, and D. Yost. A universal modulus for normed spaces. *Studia Math.*, 127(1):21–46, 1998.

[8] C. Bessaga and A. Pełczyński. *Selected topics in infinite-dimensional topology.* PWN—Polish Scientific Publishers, Warsaw, 1975. Monografie Matematyczne, Tom 58. [Mathematical Monographs, Vol. 58].

[9] J. Borwein, A. J. Guirao, P. Hájek, and J. Vanderwerff. Uniformly convex functions on Banach spaces. *Preprint*, 2007.

[10] Buĭ-Min-Či and V. I. Gurariĭ. Certain characteristics of normed spaces and their application to the generalization of Parseval's equality to Banach spaces. *Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. i Priložen. Vyp.*, 8:74–91, 1969. (Russian).

[11] H. Busemann. *The geometry of geodesics.* Academic Press Inc., New York, N. Y., 1955.

[12] D. Butnariu, A. N. Iusem, and E. Resmerita. Total convexity for powers of the norm in uniformly convex Banach spaces. *J. Convex Anal.*, 7(2):319–334, 2000.

[13] D. Butnariu, A. N. Iusem, and C. Zălinescu. On uniform convexity, total convexity and convergence of the proximal point and outer Bregman projection algorithms in Banach spaces. *J. Convex Anal.*, 10(1):35–61, 2003.

[14] D. Butnariu and E. Resmerita. Bregman distances, totally convex functions, and a method for solving operator equations in Banach spaces. *Abstr. Appl. Anal.*, pages Art. ID 84919, 39, 2006.

[15] J. A. Clarkson. Uniformly convex spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 40(3):396–414, 1936.

[16] M. M. Day. Some characterizations of inner-product spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62:320–337, 1947.

[17] R. Deville, G. Godefroy, and V. Zizler. *Smoothness and renormings in Banach spaces*, volume 64 of *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics.* Longman Scientific & Technical, Harlow, 1993.

[18] J. Diestel. *Geometry of Banach spaces—selected topics.* Springer-Verlag, Berlin, 1975. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 485.

[19] J. Duda, L. Veselý, and L. Zajíček. On d.c. functions and mappings. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 51(1):111–138, 2003.

[20] A. Dvoretzky. Some results on convex bodies and Banach spaces. In *Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960)*, pages 123–160. Jerusalem Academic Press, Jerusalem, 1961.

[21] P. Enflo. Banach spaces which can be given an equivalent uniformly convex norm. In *Proceedings of the International Symposium on Partial Differential Equations and the Geometry of Normed Linear Spaces (Jerusalem, 1972)*, volume 13, pages 281–288 (1973), 1972.

[22] M. Fabian, P. Habala, P. Hájek, V. Montesinos, J. Pelant, and V. Zizler. *Functional analysis and infinite-dimensional geometry.* CMS Books in Mathematics/Ouvrages de Mathématiques de la SMC, 8. Springer-Verlag, New York, 2001.

[23] M. Fabian, V. Montesinos, and V. Zizler. Smoothness in Banach spaces. Selected problems. *RACSAM Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat. Ser. A Mat.*, 100(1-2):101–125, 2006.

[24] T. Figiel. On the moduli of convexity and smoothness. *Studia Math.*, 56(2):121–155, 1976.

[25] T. Figiel, J. Lindenstrauss, and V. D. Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies. *Acta Math.*, 139(1-2):53–94, 1977.

[26] T. Figiel and G. Pisier. Séries aléatoires dans les espaces uniformément convexes ou uniformément lisses. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A*, 279:611–614, 1974.

[27] J. Gao. Modulus of convexity in Banach spaces. *Appl. Math. Lett.*, 16(3):273–278, 2003.

[28] J. Gao and Ka-Sing Lau. On two classes of Banach spaces with uniform normal structure. *Studia Math.*, 99(1):41–56, 1991.

[29] G. Godefroy. Renormings of Banach spaces. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I*, pages 781–835. North-Holland, Amsterdam, 2001.

[30] K. Goebel. Convexivity of balls and fixed-point theorems for mappings with nonexpansive square. *Compositio Math.*, 22:269–274, 1970.

[31] A. J. Guirao. Topological clasification of Banach spaces. *Published by University of Murcia*, 2005.

[32] A. J. Guirao. On the local moduli of squareness. *Preprint*, 2006.

[33] A. J. Guirao and P. Hájek. On the moduli of convexity. *Proc. Amer. Math. Soc.*, pages–, To appear.

[34] A. J. Guirao and P. Hájek. Schauder bases under uniform renormings. *Positivity*, pages–, To appear.

[35] V. I. Gurariĭ. Differential properties of the convexity moduli of Banach spaces. *Mat. Issled.*, 2(vyp. 1):141–148, 1967. (Russian).

[36] V. I. Gurariĭ and N. I. Gurariĭ. Bases in uniformly convex and uniformly smooth Banach spaces. *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 35:210–215, 1971. (Russian).

[37] M. Ivanov and S. Troyanski. Uniformly smooth renorming of Banach spaces with modulus of convexity of power type 2. *J. Funct. Anal.*, 237(2):373–390, 2006.

[38] R. C. James. Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61:265–292, 1947.

[39] R. C. James. Some self-dual properties of normed linear spaces. In *Symposium on Infinite-Dimensional Topology (Louisiana State Univ., Baton Rouge, La., 1967)*, pages 159–175. Ann. of Math. Studies, No. 69. Princeton Univ. Press, Princeton, N.J., 1972.

[40] R. C. James. Super-reflexive Banach spaces. *Canad. J. Math.*, 24:896–904, 1972.

[41] M. I. Kadec. Unconditionally convergent series in a uniformly convex space. *Uspehi Mat. Nauk (N.S.)*, 11(5(71)):185–190, 1956.

[42] M. I. Kadec. A proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces. *Funkcional. Anal. i Priložen.*, 1:61–70, 1967.

[43] Tae Hwa Kim and W. A. Kirk. Fixed point theorems for Lipschitzian mappings in Banach spaces. *Nonlinear Anal.*, 26(12):1905–1911, 1996.

[44] K. Kirchev and S. Troyanski. On some characterisations of spaces with scalar product. *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 28:445–447, 1975.

[45] M. A. Krasnosel′skiĭ and Ja. B. Rutickiĭ. *Convex functions and Orlicz spaces.* Translated from the first Russian edition by Leo F. Boron. P. Noordhoff Ltd., Groningen, 1961.

[46] S. Kwapień. Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector valued coefficients. *Studia Math.*, 44:583–595, 1972. Collection of articles honoring the completion by Antoni Zygmund of 50 years of scientific activity, VI.

[47] E. S. Levitin and B. T. Poljak. Convergence of minimizing sequences in problems on the relative extremum. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 168:997–1000, 1966.

[48] J. Lindenstrauss. On the modulus of smoothness and divergent series in Banach spaces. *Michigan Math. J.*, 10:241–252, 1963.

[49] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. I.* Springer-Verlag, Berlin, 1977. Sequence spaces, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Vol. 92.

[50] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri. *Classical Banach spaces. II*, volume 97 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete [Results in Mathematics and Related Areas].* Springer-Verlag, Berlin, 1979. Function spaces.

[51] V. I. Liokumovič. Existence of B-spaces with a nonconvex modulus of convexity. *Izv. Vysš. Učebn. Zaved. Matematika*, (12(139)):43–49, 1973. (Russian).

[52] R. P. Maleev and S. L. Troyanski. On the moduli of convexity and smoothness in Orlicz spaces. *Studia Math.*, 54(2):131–141, 1975.

[53] G. Nordlander. The modulus of convexity in normed linear spaces. *Ark. Mat.*, 4:15–17 (1960), 1960.

[54] G. Pisier. Martingales with values in uniformly convex spaces. *Israel J. Math.*, 20(3-4):326–350, 1975.

[55] S. Prus. Some estimates for the normal structure coefficient in Banach spaces. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 40(1):128–135, 1991.

[56] K. Przesławski and D Yost. Lipschitz retracts, selectors, and extensions. *Michigan Math. J.*, 42(3):555–571, 1995.

[57] S. A. Rakov. Uniformly smooth renormings of uniformly convex Banach spaces. *Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI)*, 135:120–134, 1984. Investigations on linear operators and the theory of functions, XIII.

[58] M. M. Rao and Z. D. Ren. *Theory of Orlicz spaces*, volume 146 of *Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics.* Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[59] R. T. Rockafellar. *Convex analysis.* Princeton Landmarks in Mathematics. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

[60] J. J. Schäffer. *Geometry of spheres in normed spaces.* Marcel Dekker Inc., New York, 1976. Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, No. 20.

[61] D. A. Senechalle. Euclidean and non-Euclidean norms in a plane. *Illinois J. Math.*, 15:281–289, 1971.

[62] I. Şerb. On the behaviour of the tangential modulus of a Banach space. I. *Rev. Anal. Numér. Théor. Approx.*, 24(1-2):241–248, 1995.

[63] I. Şerb. On the behaviour of the tangential modulus of a Banach space. II. *Mathematica*, 38(61)(1-2):199–207, 1996.

[64] I. Şerb. A Day-Nordlander theorem for the tangential modulus of a normed space. *J. Math. Anal. Appl.*, 209(2):381–391, 1997.

[65] K. R. Stromberg. *Introduction to classical real analysis.* Wadsworth International, Belmont, Calif., 1981. Wadsworth International Mathematics Series.

[66] Y. Yamasaki. A simple proof of Kwapień's theorem. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 20(6):1247–1251, 1984.

[67] C. Zălinescu. On uniformly convex functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 95(2):344–374, 1983.

[68] C. Zălinescu. *Convex analysis in general vector spaces.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2002.

[69] M. Zippin. A remark on bases and reflexivity in Banach spaces. *Israel J. Math.*, 6:74–79, 1968.

[70] V. Zizler. Nonseparable Banach spaces. In *Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. 2*, pages 1743–1816. North-Holland, Amsterdam, 2003.

Índice alfabético