

FACULTAD DE CIENCIAS  
Departamento de Física Aplicada



POLARIMETRÍA DE SISTEMAS  
DIFUSORES CON MICROESTRUCTURAS:  
EFECTOS DE DIFUSIÓN MÚLTIPLE

*MEMORIA PRESENTADA POR*

**Juan Marcos Sanz Casado**

*PARA OPTAR AL GRADO DE DOCTOR  
POR LA UNIVERSIDAD DE CANTABRIA*

**Santander, Julio de 2010**

## NOTA INFORMATIVA

Gráficos en baja resolución

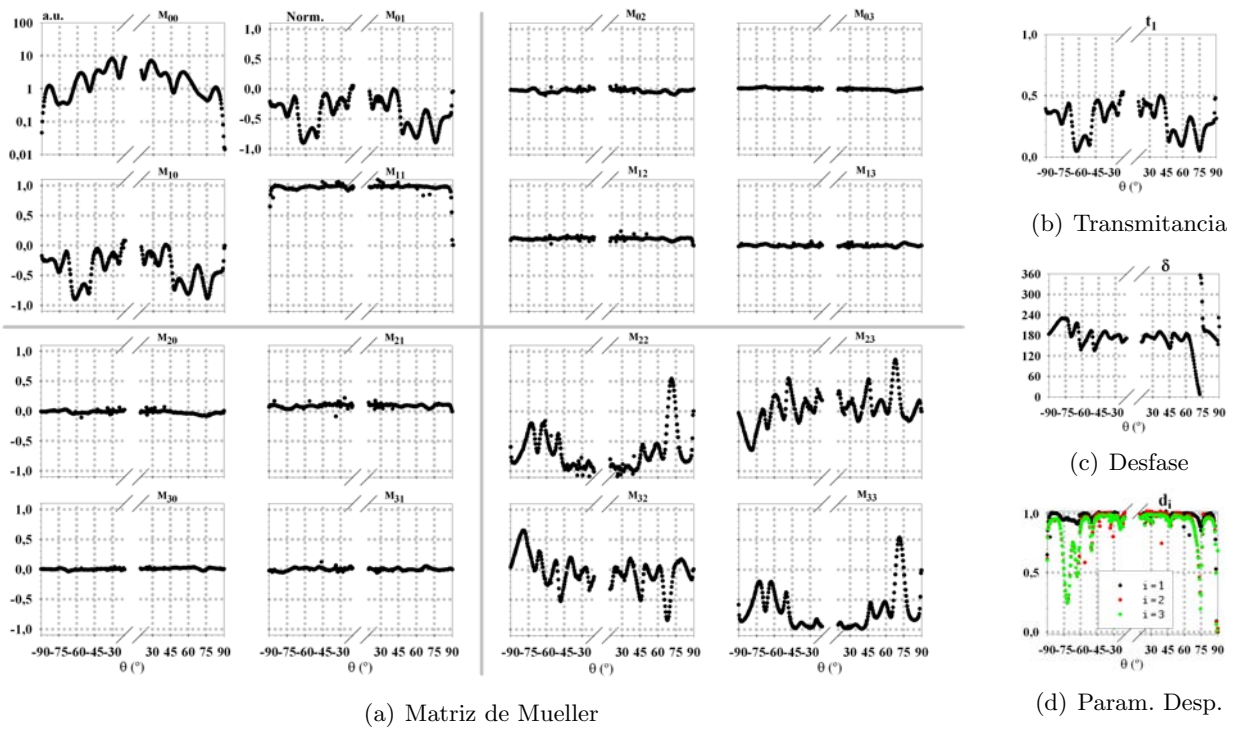


Figura 5.15: Difusión (medida con el SP) por una *rib* de Au ( $2 \times 3 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

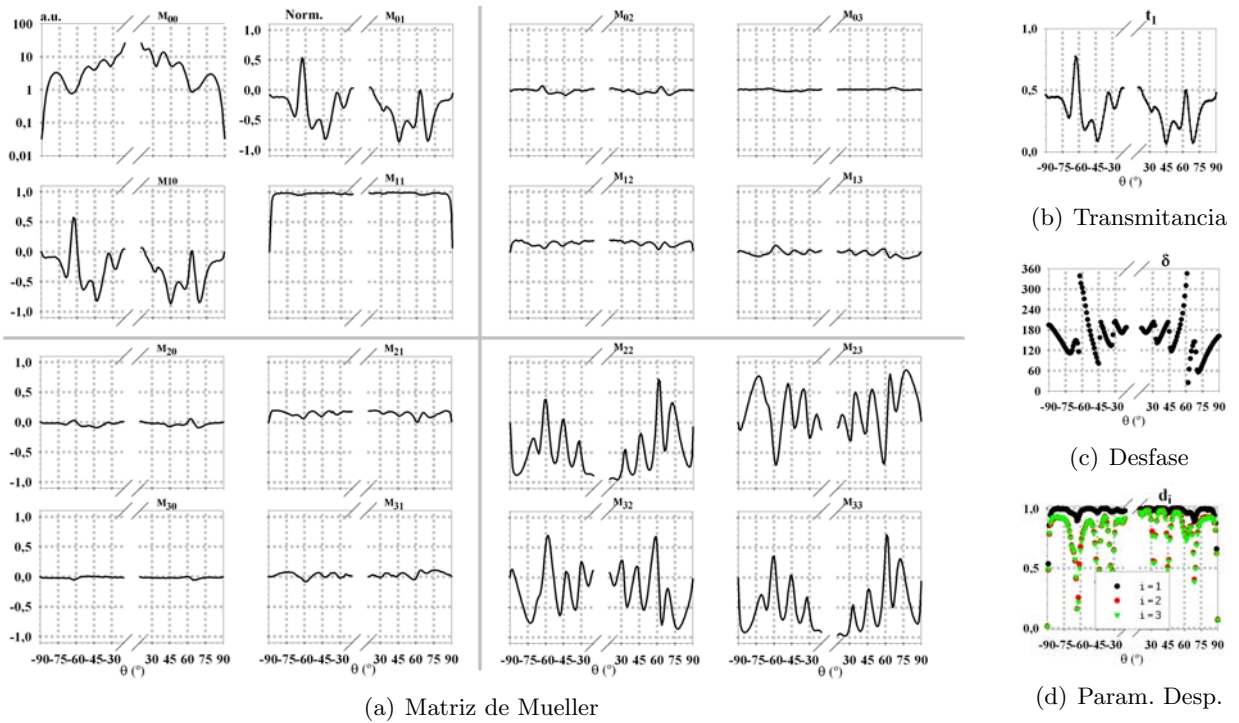


Figura 5.16: Difusión (medida con el DRCP) por una *rib* de Au ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

#### 5.1.4. Ribs de Oro: Variación con la Distancia

Tanto en este apartado como en el precedente se estudian muestras metálicas, la principal diferencia de estas con respecto al caso dieléctrico, reside en el proceso de “suavizado”, o *smooth*, que tiene lugar en la evolución del parámetro de desfase,  $\delta$ . Los saltos en este parámetro son, por así decirlo, parcialmente aliviados en las muestras metálicas. Esto puede deberse, en sí, a un cierto suavizado en los perfiles de las geometrías, debido a una deposición irregular de las partículas de Au. Este proceso daría lugar a una pérdida de visibilidad entre máximos y mínimos de intensidad (interferenciales), lo cual repercutiría directamente en la resolución de los parámetros  $m_{ij}$  y, por tanto, en todos los parámetros obtenidos mediante el PD.

Al hilo de esto, si se comparan, por ejemplo, las figs. 5.11 y 5.12, con las figs. 5.17 y 5.18 (correspondientes a pares de *ribs* metálicos y dieléctricos), se pueden realizar una serie de comentarios:

- Las diferencias en la estructura de los parámetros  $m_{ij}$  no son especialmente relevantes (número de máximos, pasos por el 0, etc.).
- Se aprecia cómo  $m_{11} \rightarrow 1$  con sputtering. Esto repercute directamente en el parámetro  $d_1$ .
- Sin embargo, sí que existe una cierta pérdida de visibilidad en los parámetros  $m_{ij}$  de las cajas superior izquierda e inferior derecha en el caso de la muestra metálica (figs. 5.11(a) y 5.17(a)).
- Esta pérdida de contraste se traslada a la transmitancia,  $t_1$ , y el desfase,  $\delta$  (comparar figs. 5.11(b) y 5.11(c), con las figs. 5.17(b) y 5.17(c)). En particular,  $\delta$  presenta un menor número de discontinuidades abruptas para la muestra metalizada, y una zona donde se diferencian claramente: La dirección de observación rasante ( $|\theta| > 70^\circ$ ). Esto se traduciría en una pérdida en la capacidad de polarizar totalmente la luz para unos determinados ángulos de difusión en incidencia normal ( $t_1$  en la muestra metálica no llega a hacerse 0 ó 1 en tantas ocasiones como ocurría en la dieléctrica). Otro hecho sobre el que también discutiremos más adelante es que las pendientes dominantes de  $\delta$  ( $\frac{\Delta\delta}{\Delta\theta}$ ) se mantienen al metalizar la muestra.
- Finalmente, es curioso observar cómo los parámetros principales de despolarización  $d_i$  no son idénticos en valor en el caso de las muestras metálicas, como ocurría en las muestras dieléctricas. Para las muestras metalizadas se cumple  $d_1 > d_2 \simeq d_3$ . Esta observación, al igual que ocurre con la asimetría, la analizaremos específicamente en un apartado más adelante.

En el apéndice B se muestran más gráficos que hacen referencia a medidas realizadas con el SP sobre pares de *ribs* de Au de  $2 \times 3 \mu\text{m}$  (figs. B.13, B.14, B.15, B.16 y B.17). En esa misma sección, los gráficos B.18, B.19 y B.20, presentan el análisis sobre medidas del DRCP, en distintos pares de *ribs* de Au de  $1 \times 3 \mu\text{m}$ .



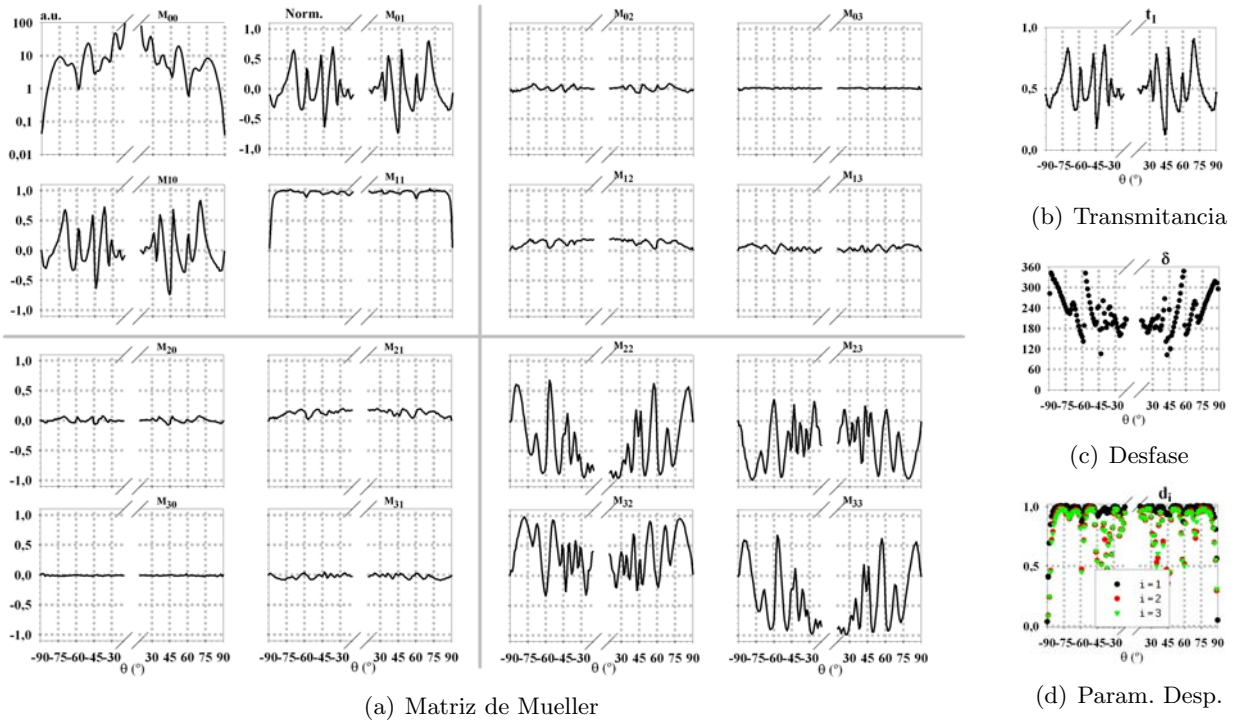


Figura 5.17: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Au ( $1 \times 3-4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

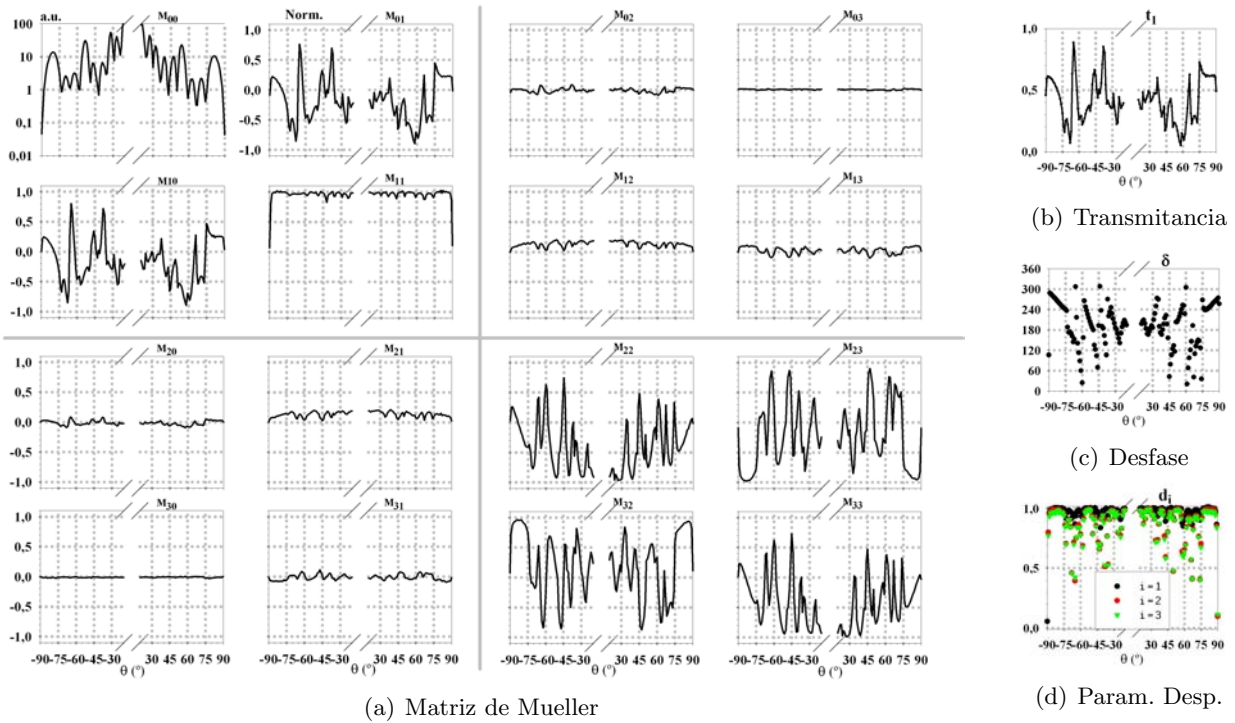


Figura 5.18: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Au ( $1 \times 3-7 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

## 5.2. Estructuras tipo “Groove”

El estudio de las *grooves* se ha realizado tanto para las muestras de Silicio como para las de Oro, pero sólo para una altura ( $h = 1 \mu\text{m}$ ). Las anchuras medidas son  $w = 1, 3$  y  $4 \mu\text{m}$ , y para el caso  $w = 3 \mu\text{m}$  se han analizado dobles *grooves* desde  $d = 4$  hasta  $d = 8 \mu\text{m}$ . Esto permitió medir únicamente las muestras ubicadas en un mismo cuadrante de la oblea, lo cual aporta algunas ventajas prácticas y de consistencia de resultados. Todas las medidas de *grooves* han sido realizadas con el DRCP, seguidas de la aplicación del PD.

Como primer comentario de tipo general al respecto del PD, la parte de despolarización ha producido resultados similares, y las dependencias angulares de las muestras monocomponente muestran un patrón más sencillo que en el caso de las *ribs*.

### 5.2.1. Grooves de Silicio: Variación con el Tamaño

En las figs. 5.19 y 5.20 se muestran los resultados (matriz de Mueller y parámetros PD) de las medidas realizadas sobre *grooves* de Si de tamaños  $w = 3$  y  $4$ . Se ha considerado que la fig. B.21 del apéndice B (una *groove* de  $w = 1$ ) es poco representativa, ya que en ella se observa claramente la falta de contraste existente entre máximos y mínimos debida a una gran pérdida de profundidad en el ataque fotolitográfico (este elemento es el más alejada del centro de la oblea).

Al igual que en el caso de las geometrías tipo *rib*, el aumento en  $w$  produce un incremento de lobulación en el patrón de scattering de la transmitancia total del sistema  $m_{00}$  y un aumento de máximos en  $t_1$  y de discontinuidades en el parámetro  $\delta$ . Desde un punto de vista puramente descriptivo, es muy interesante la nitidez de la evolución que describe  $\delta$  en las figs. 5.19(c) y 5.20(c), y que se mantendrá, en cierta medida, para las estructuras de dos componentes.

La comparación *rib-groove* es interesante por los siguientes puntos, que serán analizados en profundidad en el apartado 5.5.1:

- Ambas estructuras son parecidas ya que presentan una evolución en el parámetro  $m_{00}$  que recuerda al patrón de difracción de una rendija de anchura  $w$ . Es decir, mantienen una parte difraccional común.
- La principal diferencia reside en la fuerte interacción que la *rib* presenta con el substrato (parte interferencial), y que no está presente en la *groove*.

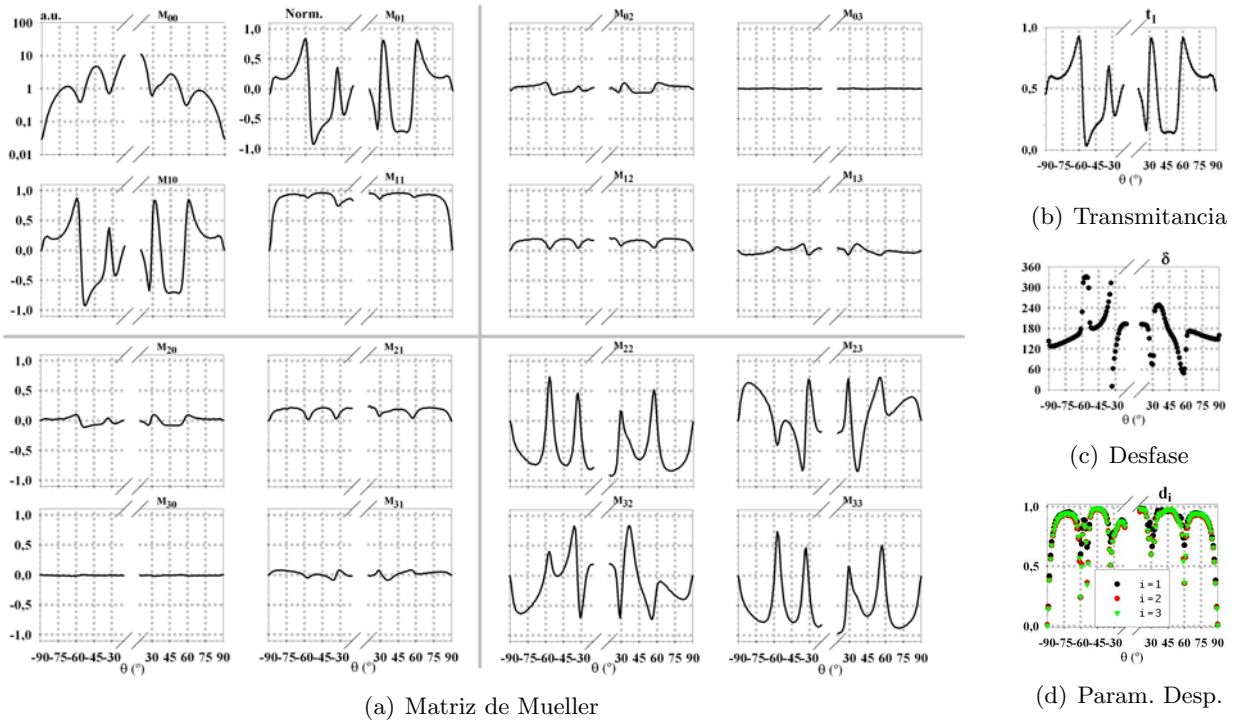


Figura 5.19: Difusión (medida con el DRCP) por una *groove* de Si ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

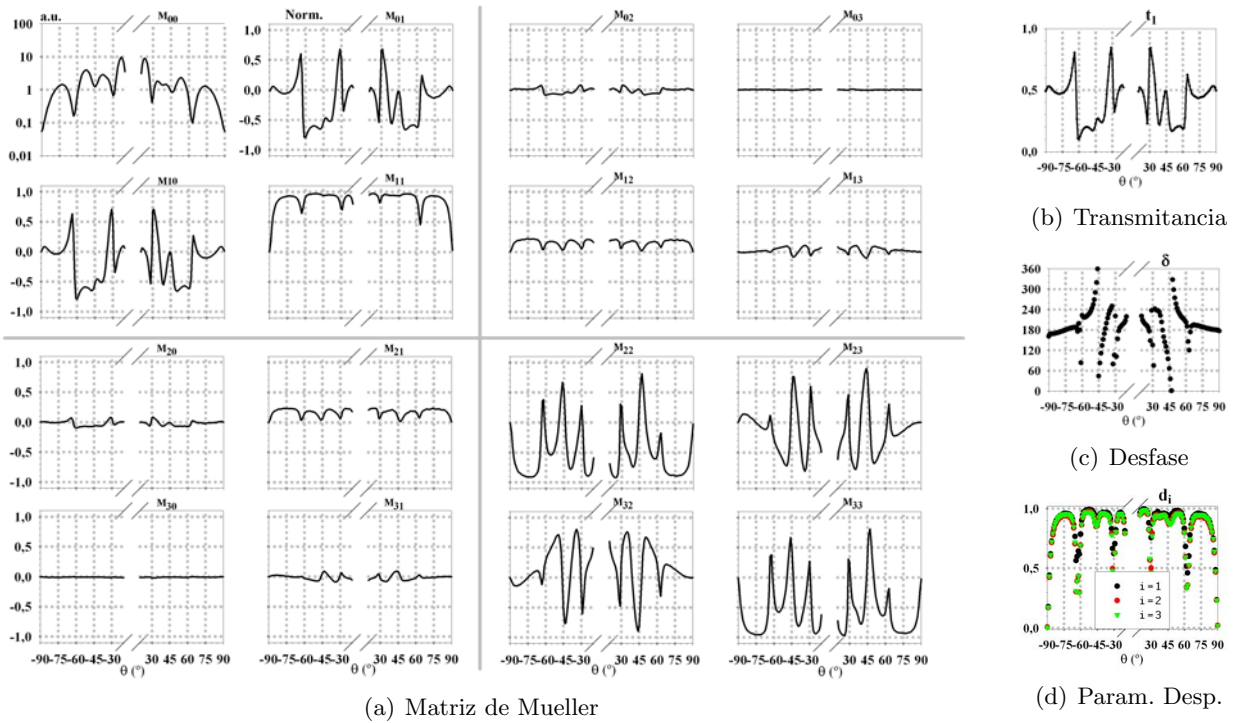


Figura 5.20: Difusión (medida con el DRCP) por una *groove* de Si ( $1 \times 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

### 5.2.2. Grooves de Silicio: Variación con la Distancia

De nuevo recurro a un apéndice para mejorar la fluidez del análisis. En este caso las figuras complementarias se encuentran en el apéndice B (pg. 176). Como en el caso de las *ribs*, al variar la distancia aparecen nuevos mínimos en el patrón de difusión de  $m_{00}$ . Esta situación se asemeja a un patrón interferencial de doble rendija. De hecho, los patrones de las *grooves* se asemejan más a la doble rendija que los de las *ribs*. En la variación con  $d$  también hay una parte común y otra diferente entre *ribs* y *grooves* (como se analizará en el apartado 5.5.1):

- Ambas responden a un patrón interferencial de doble rendija, con una separación  $d$ . Si bien la anchura  $w$  no parece estar jugando un papel importante en este caso.
- Mientras que en la doble *rib* puede haber interacción múltiple de las *ribs*, para las *grooves* eso es casi imposible. El alejamiento del patrón interferencial tendría que ser más notorio para distancias pequeñas y *ribs*, y menor para distancias mayores y *grooves*.
- Sólo en el caso de las dobles *grooves* de Oro se podría presentar interacción (por medio de la generación de plasmones en el substrato metálico [70]), pero la distancia debería ser mucho menor, y la interacción dependería fuertemente del ángulo de incidencia.

Del mismo modo que ocurrió en el caso de las *ribs*, siempre y cuando el parámetro  $d_1$  no tenga un papel principal ( $d_1 \simeq 1$ ), el parámetro  $t_1$  evolucionará con el elemento  $m_{01}$  de la matriz de Mueller. De igual forma,  $\delta$  estará directamente relacionado con  $m_{22}$  y  $m_{23}$  siempre y cuando  $d_2$  y  $d_3$  sean aproximadamente 1. Aparece aquí de nuevo la aplicación potencial del PD, pues la extracción de la parte despolarizante permite estudiar tanto sistemas puros como aquellos que no lo son.

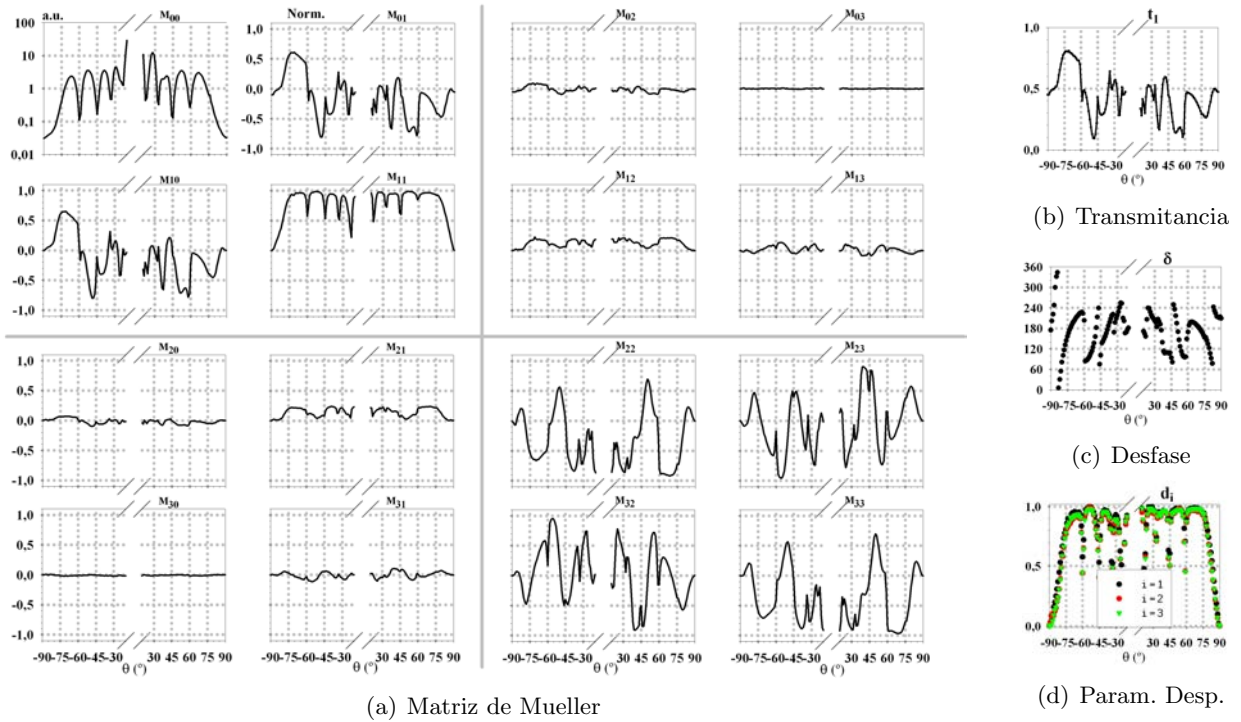


Figura 5.21: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Si ( $1 \times 3 - 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

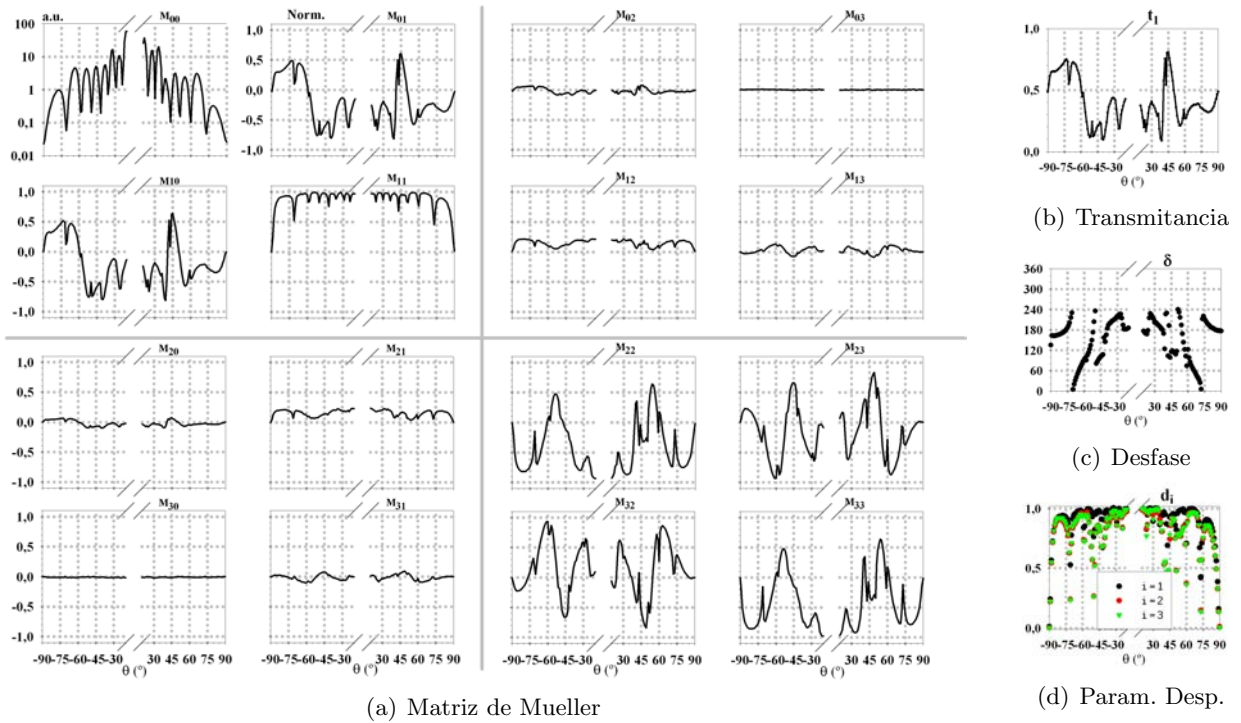


Figura 5.22: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Si ( $1 \times 3 - 7 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



### 5.2.3. Grooves de Oro: Variación con el Tamaño

En este apartado se muestran los resultados paralelos a los obtenidos en el apartado 5.2.1. En relación a la estructura de  $1 \times 1 \mu\text{m}$ , el sputtering de Au produce un incremento neto de la luz difundida, entre otras variaciones que ahora comentaremos. Además, el hecho de medir en otra zona de la muestra se manifiesta claramente en la mejora sistemática de la simetría de los distintos gráficos mostrados en la fig. 5.23.

Las figs. 5.24 y 5.25 muestran, de nuevo, un patrón difraccional típico (rendija). El parámetro *delta* muestra una evolución similar a la del caso dieléctrico (figs. 5.19(c) y 5.20(c)) y para los parámetros  $d_i$  se tiene otra vez  $d_1 > d_2 \simeq d_3$ , situación que se reproduce en todas las muestras dieléctricas metalizadas a posteriori.

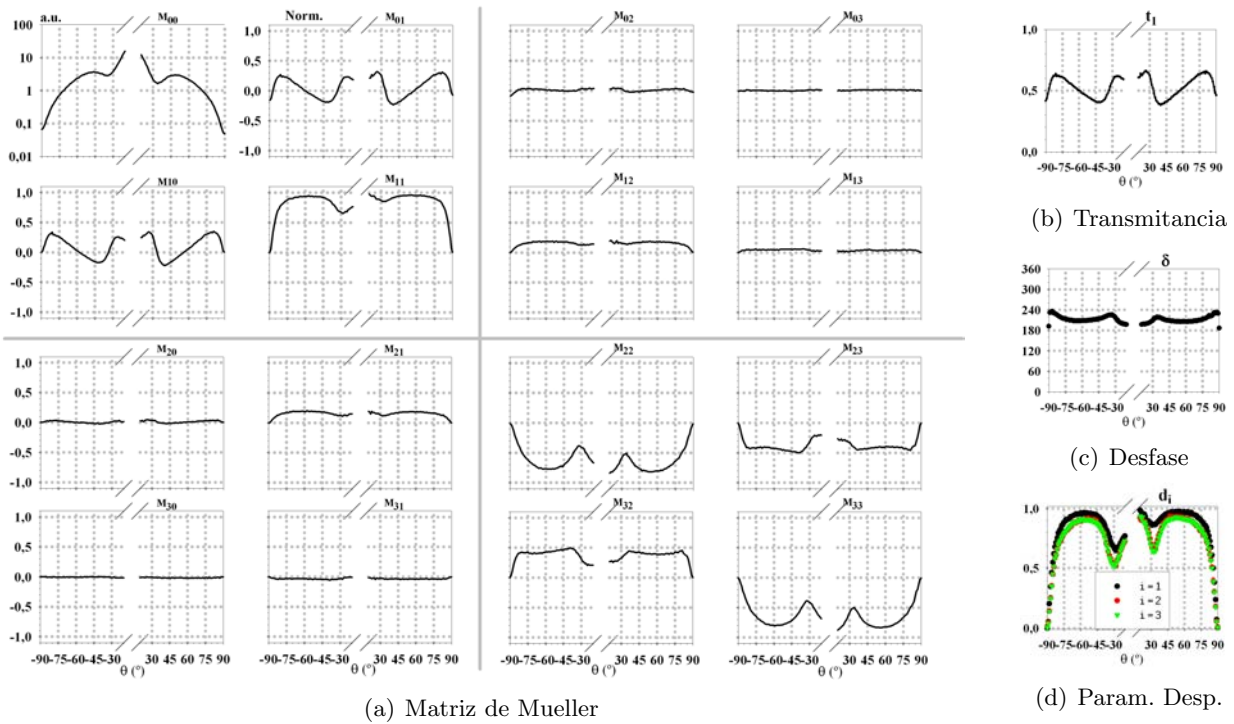


Figura 5.23: Difusión (medida con el DRCP) por una *groove* de Au ( $1 \times 1 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

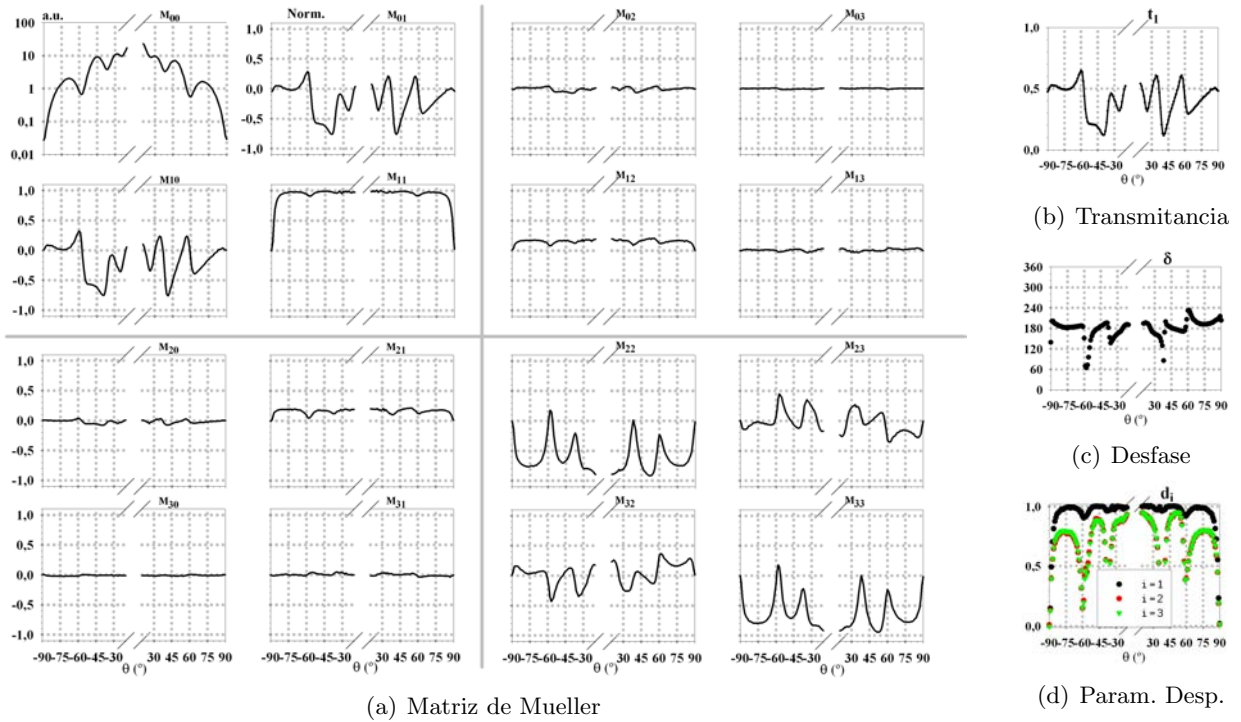


Figura 5.24: Difusión (medida con el DRCP) por una *groove* de Au ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

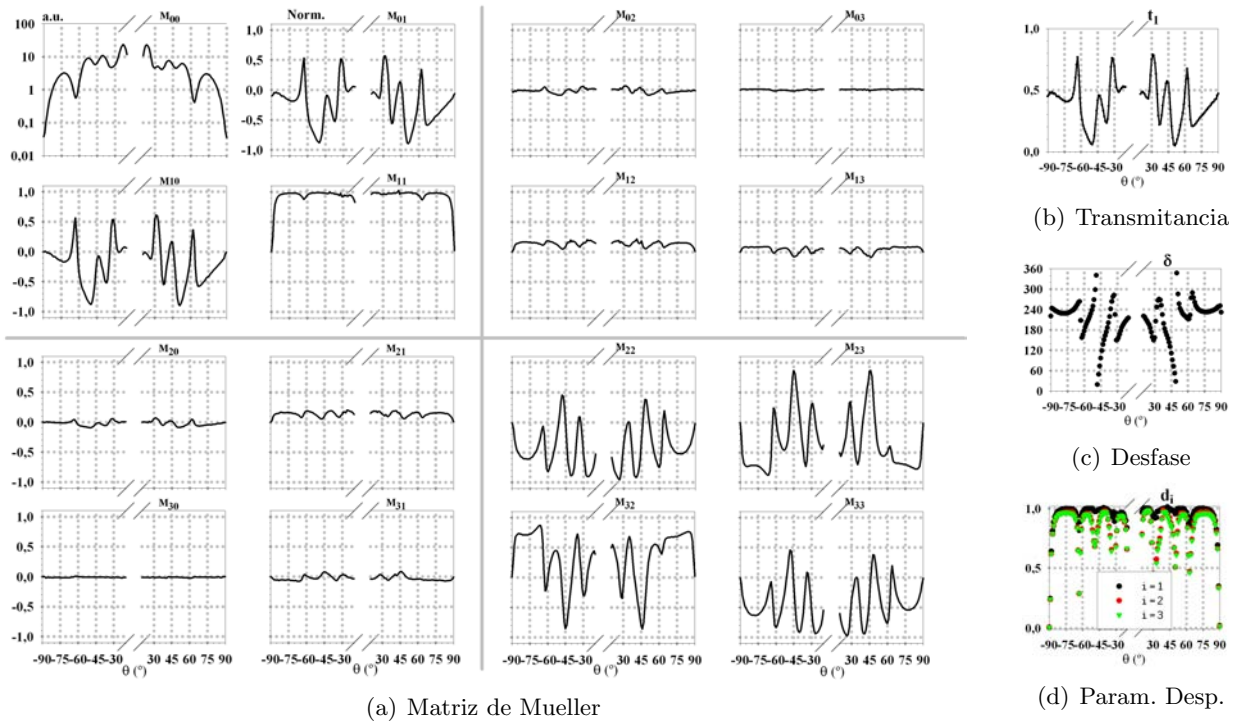


Figura 5.25: Difusión (medida con el DRCP) por una *groove* de Au ( $1 \times 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

#### 5.2.4. Grooves de Oro: Variación con la Distancia

Las figs. 5.26 y 5.27 de este apartado se completan con otras del anexo B (pg. 177, figs. B.25, B.26 y B.27). Las principales observaciones son:

- La pérdida de contraste en la transmitancia total  $m_{00}$  es de, aproximadamente, un 50 % en el paso del caso dieléctrico al metálico.
- Existe una analogía en el comportamiento de los elementos de la matriz de Mueller de ambos casos.
- Sigue apareciendo un claro patrón interferencial (doble rendija) en el parámetro  $m_{00}$ .
- El desfase en las muestras metálicas sufre un proceso de suavizado, y  $t_1$  no presenta valores extremos.
- Los parámetros de despolarización en la muestra dieléctrica son comparables ( $d_1 \simeq d_2 \simeq d_3$ ), mientras que en la metalizada aparece una relación característica ( $d_1 > d_2 \simeq d_3$ ).



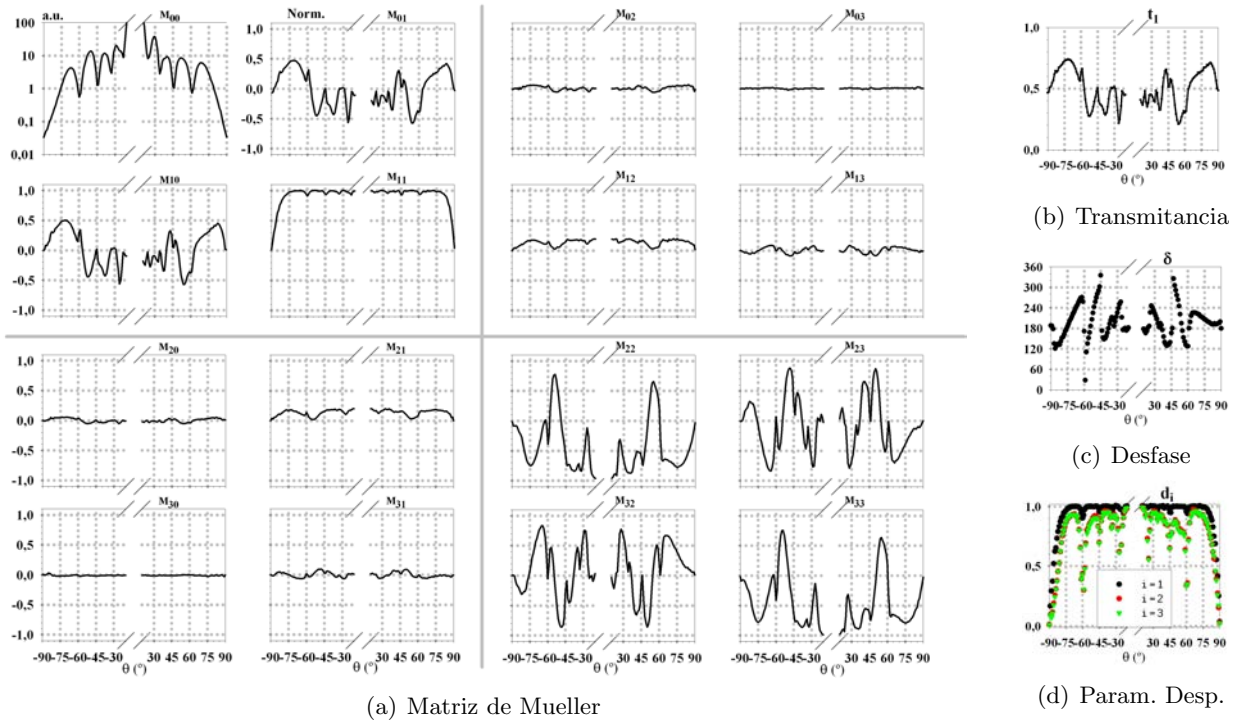


Figura 5.26: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Au ( $1 \times 3 - 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

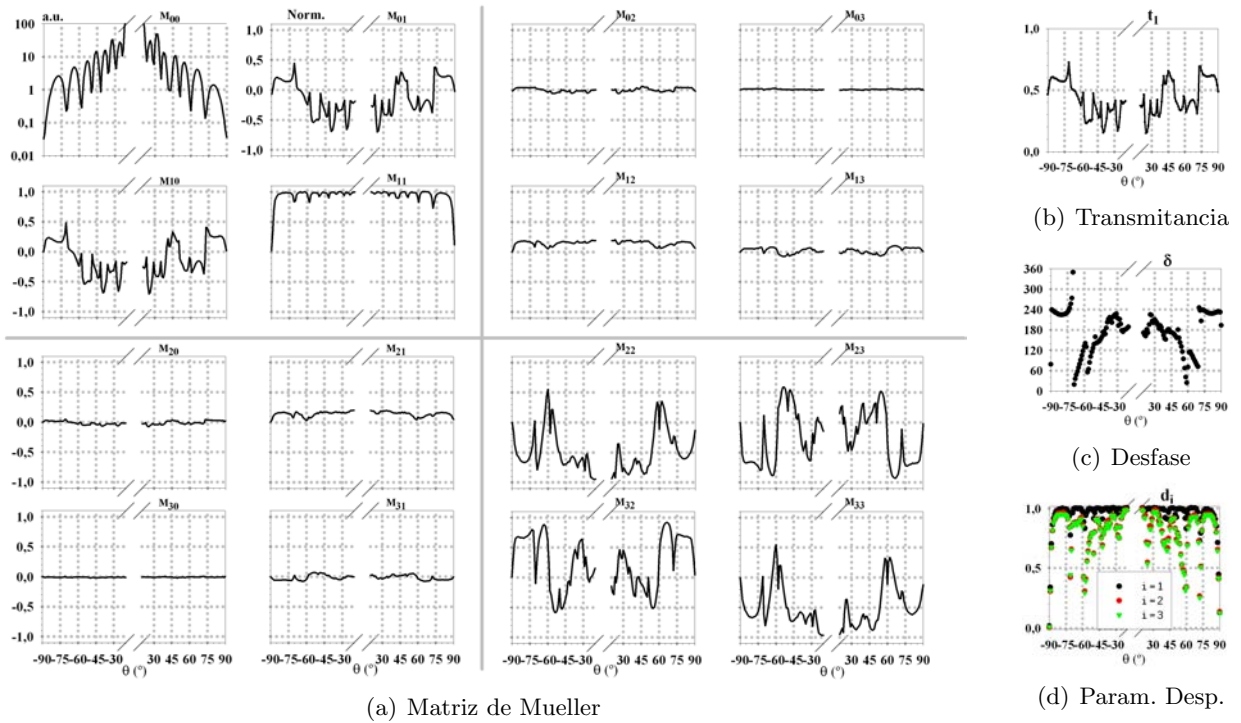


Figura 5.27: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Au ( $1 \times 3 - 7 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

### 5.3. Simetría

Al hablar de simetría en experimentos de difusión de luz por superficies planas, como los que se han descrito hasta ahora, hay que distinguir entre varios tipos:

1. La simetría de la muestra a ambos lados del plano de incidencia.
2. La simetría de la muestra a ambos lados del eje longitudinal de la estructura.
3. La simetría del experimento alrededor de la incidencia y normal a la superficie.

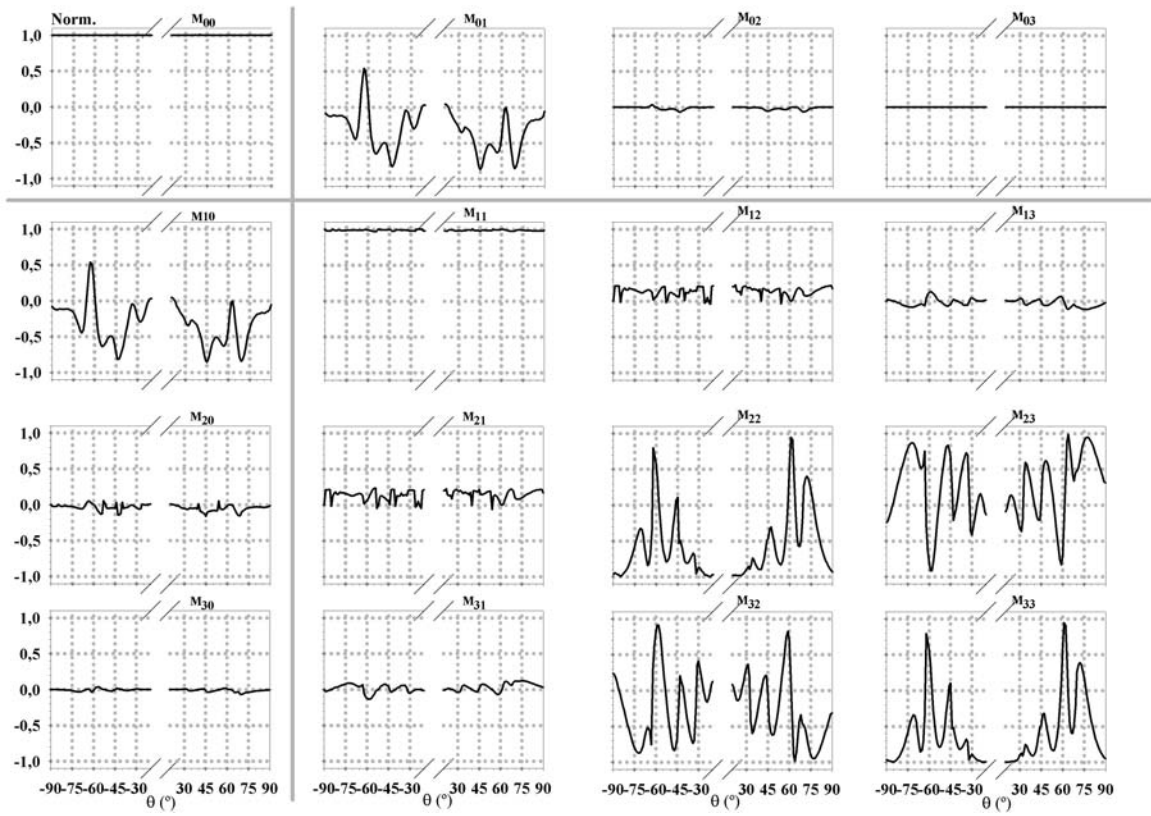
Si se verifican las simetrías 2 y 3, entonces los patrones serán, a su vez, simétricos angularmente. Puesto que la simetría 3 se mantiene siempre (incidencia normal), las asimetrías angulares nos informan de que la simetría 2 no se mantiene. En cuanto a la simetría 1, es la responsable de que las cajas no diagonales de la matriz de Mueller sean nulas. La proximidad a 0 de esos valores nos informa del grado de invariancia longitudinal de la superficie iluminada.

Como se ha podido apreciar a lo largo de los anteriores apartados, existe una fuerte asimetría entre ambos lados de algunos de los patrones de difusión analizados. Asimismo, la matriz de Mueller de las muestras analizadas presenta valores no nulos fuera de las cajas diagonales, lo cual implica que la muestra no es homogénea y no mantiene una simetría especular con respecto al plano de scattering. El hecho de que la incidencia sobre la muestra se realice con una leve inclinación ( $\theta_i \sim 0,5^0$ ) podría indicar que esta es la causa de dicha asimetría, al romper el tipo 3 de las citadas. Sin embargo, dadas las imperfecciones observadas en las muestras, la aparición de valores no nulos en las cajas no diagonales de la matriz, y las trazas de despolarización, se hizo un estudio sistemático de la simetría. En primer lugar se analizó cuál de las partes del PD (parte pura o parte despolarizante) era la que reflejaba la ausencia de valores nulos en las cajas superior derecha e inferior izquierda de la matriz de Mueller. Para ello, a partir de los parámetros resultantes del PD, se reconstruyeron la matriz pura ( $M_R \cdot M_D$ ) y la de despolarización ( $M_\Delta$ ) para una *rib* de Oro de  $1 \times 3 \mu\text{m}$  (cuya matriz de Mueller se muestra en la fig. 5.16(a), pg. 111). En la fig. 5.28 se muestra el resultado de éste análisis y se aprecia claramente cómo la parte pura del PD, fig. 5.28(a), presenta valores no nulos en las cajas superior izquierda e inferior derecha, descartando así que la parte despolarizante, fig. 5.28(b), sea la responsable de esta contribución. Esto, por otra parte, es lógico dado que, como ya se había indicado al comienzo de este capítulo,  $a_i \simeq z_i \simeq 0$  para todas las muestras analizadas.

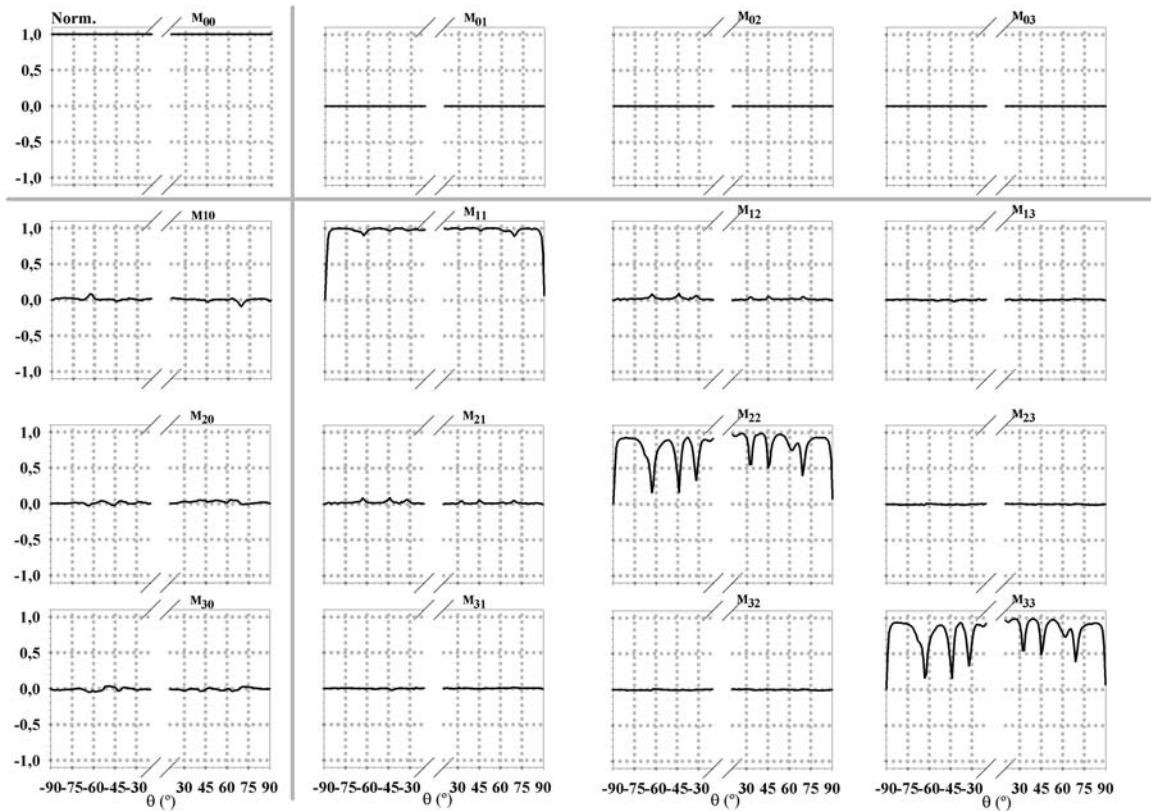
El estudio acerca de la asimetría, ahora que estaba claro que su origen no estaba ligado a la despolarización, se ha continuado centrando la atención en una única geometría tipo *rib* (elemento E4:  $2 \times 2 - 3 \mu\text{m}$ ), sobre la que se varió la orientación y la incidencia para la realización de cuatro medidas:

1. Muestra sin rotar sobre el eje definido por el haz incidente ( $\varphi_3 = 0^0$  en la fig. 4.1, pg. 62), y con un ángulo de incidencia  $\theta_i = +0,5^0$ .
2. Muestra sin rotar ( $\varphi_3 = 0^0$ ), y con un ángulo de incidencia  $\theta_i = -0,5^0$ .
3. Muestra rotada un ángulo  $\varphi_3 = 180^0$ , y con un ángulo de incidencia  $\theta_i = +0,5^0$ .
4. Muestra rotada un ángulo  $\varphi_3 = 180^0$ , y con un ángulo de incidencia  $\theta_i = -0,5^0$ .

Estas medidas también se realizaron sobre el substrato del primer cuadrante de esta misma oblea de Silicio, con objeto de ayudar en la interpretación de los resultados y evaluar, hasta cierto punto, su influencia en los mismos.

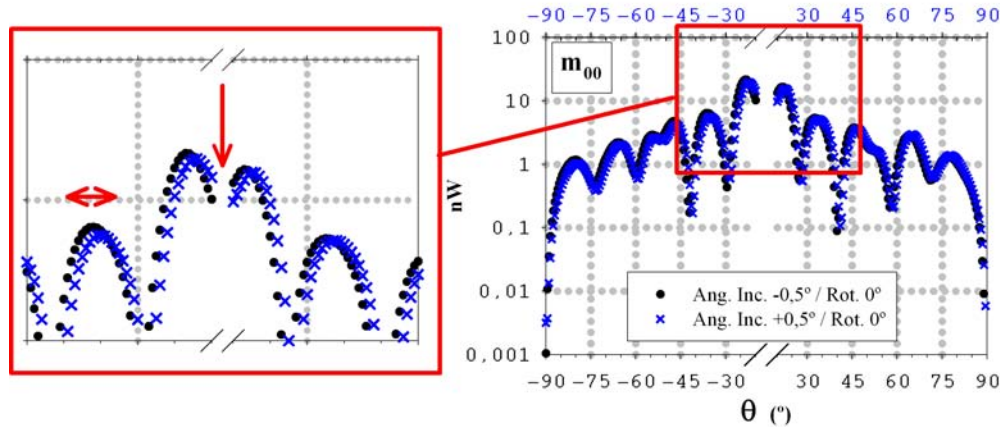


(a) Matriz Pura resultante del PD

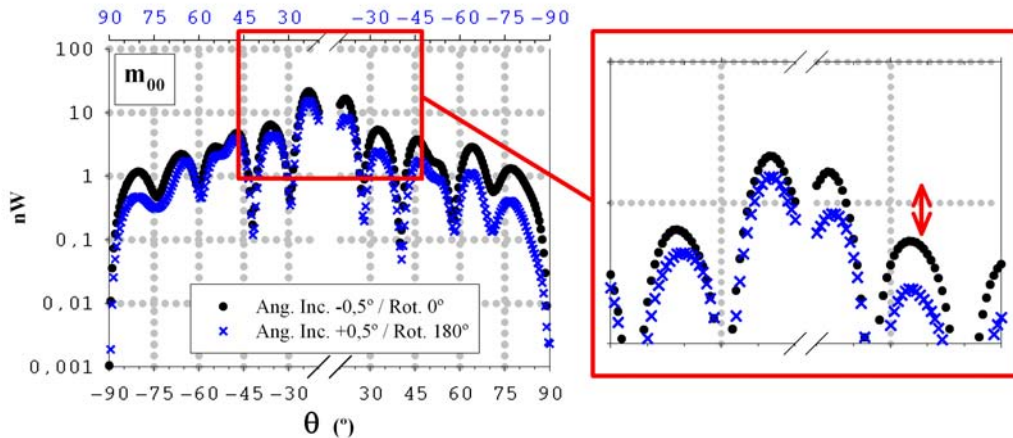


(b) Matriz de despolarización resultante del PD

Figura 5.28: Matriz pura y matriz de despolarización para una *rib* de Au ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ): Evolución de los elementos en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



(a) Elemento E4 (Si): Comparativa para  $\varphi_3 = 0^\circ$  y  $\theta_i = -0,5^\circ$  (punto negro, eje inferior) ó  $\theta_i = +0,5^\circ$  (aspa azul, eje superior, valores de abscisas simétricos)



(b) Elemento E4 (Si): Comparativa para  $\varphi_3 = 0^\circ$  y  $\theta_i = -0,5^\circ$  (punto negro, eje inferior) ó  $\varphi_3 = 180^\circ$  y  $\theta_i = +0,5^\circ$  (aspa azul, eje superior, valores de abscisas antisimétricos)

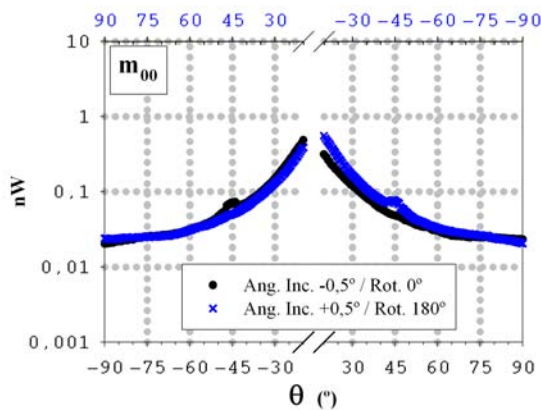
Figura 5.29: Difusión por una *rib* de Silicio (elemento E4,  $2 \times 2 - 3 \mu\text{m}$ ).

Si se comparan las medidas 1 y 2 en la *rib* del elemento E4, el resultado que se obtiene es el reflejado en la fig. 5.29(a). Dicho resultado indica claramente el desplazamiento en la posición de máximos y mínimos por la variación del ángulo de incidencia, pero mantiene el reparto relativo de intensidades a ambos lados de la especular. El desplazamiento es debido a la ruptura parcial de la simetría tipo 3 (incidencia ligeramente distinta a la normal). Pero la asimetría a ambos lados de la dirección de retrodifusión, que se mantiene al cambiar el ángulo de incidencia y se manifiesta en una mayor altura en los máximos de intensidad para  $\theta < 0$  y en un patrón de difusión distinto a ambos lados, está relacionada con la ruptura de la simetría 2.

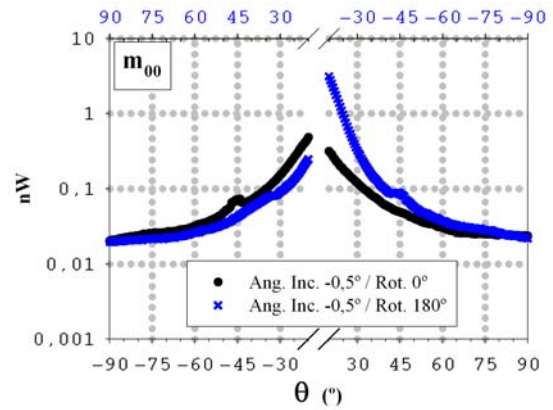
Siguiendo con el análisis, la fig. 5.29(b) muestra las medidas 2 y 3 sobre la misma *rib*. Tal y como están definidas, estas medidas corresponden al mismo experimento, salvo por la orientación relativa de la superficie de la muestra y el sistema de detección, por lo que son un indicador de la simetría del sistema, o simetría tipo 3 (la medida con  $\varphi_3 = 180^\circ$  se representa con el eje  $\theta$  invertido para realizar este efecto). Se puede apreciar que no existen cambios en la estructura del patrón de difusión, pero sí existe una variación en la intensidad difundida. Esta variación en la intensidad puede deberse a un pequeño cambio en la inclinación de la muestra tras el giro (ángulo  $\varphi_1 \neq 0$ , fig. 4.1, pg. 62), lo cual implica que el plano de difracción y el de detección no coinciden totalmente en ambos casos. Esto está relacionado con el hecho de que el eje de rotación puede no coincidir totalmente con la normal a la muestra, produciendo un ligero “*tilt*” (la inclinación de la muestra es el único parámetro que se controla manualmente en el dispositivo).

A continuación, en la fig. 5.30(a) (respectivamente 5.30(b)) se comparan los patrones de scattering obtenidos para el sustrato del elemento E4 en las medidas 2 y 3 (respectivamente 2 y 4). Se han elegido

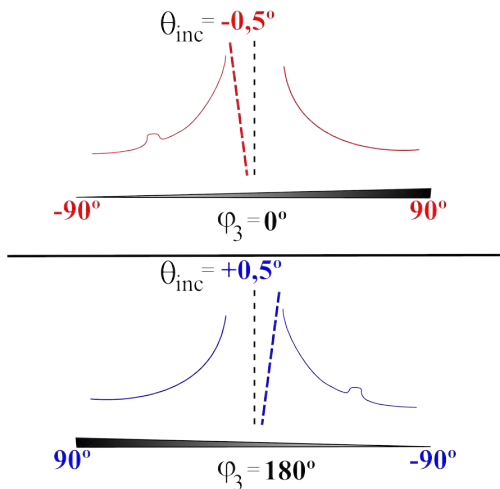
estas medidas por la aparición de una asimetría, debida a incidencias en el dispositivo experimental, que rompe la simetría 3: Se aprecia un reflejo parásito muy débil, con un pico en  $\theta \simeq -46^\circ$  que afecta ligeramente a uno de los lados (dicho reflejo más tarde fue solventado). El eje  $\theta$  se ha invertido en las medidas con  $\varphi_3 = 180^\circ$ , para realzar la supuesta coincidencia. De ser un sustrato perfecto, los patrones de difusión deberían solaparse tanto en la fig. 5.30(a) como en la 5.30(b), con la única salvedad de la anomalía en el aparato ( $\theta \simeq -46^\circ$ ). En la fig. 5.30(a) se aprecia cómo la variación en los valores de  $m_{00}$  a ambos lados de la retrodifusión para ambas medidas es mínima. Sin embargo, la asimetría se potencia en la comparación de medidas de la fig. 5.30(b). Se trata de una asimetría muy pronunciada y debida necesariamente al propio sustrato (recordemos que el sustrato ha sufrido un proceso de ablación fotolitográfica y que el ataque presenta un perfil radial, como se mostró en la fig. 4.29 de la pg. 97). En este sentido, la comparación mostrada en la fig. 5.30(b) constituye una evidencia de la asimetría en la rugosidad, o “*skewness*”, de la superficie rugosa. En las figs. 5.30(c) y 5.30(d) se muestran sendos esquemas que ilustran las situaciones de las figs. 5.30(a) y 5.30(b), respectivamente.



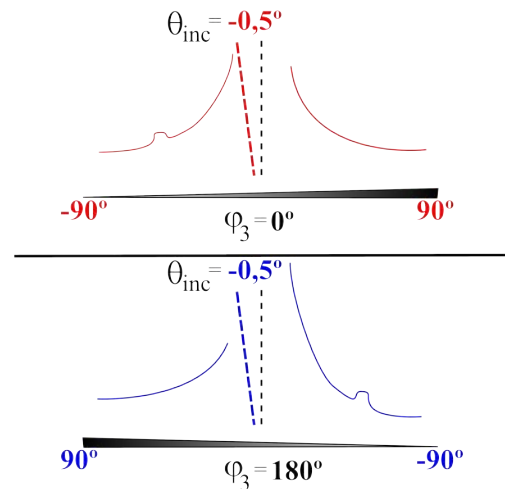
(a) Substrato Oblea (Si): Comparativa para  $\varphi_3 = 0^\circ$  y  $\theta_i = -0,5^\circ$  (punto negro, eje inferior) ó  $\varphi_3 = 180^\circ$  y  $\theta_i = +0,5^\circ$  (aspa azul, eje superior, valores de abscisas antisimétricos). Constituye un test de la simetría del sistema de detección



(b) Substrato Oblea (Si): Comparativa para  $\theta_i = -0,5^\circ$  y  $\varphi_3 = 0^\circ$  (punto negro, eje inferior) ó  $\theta_i = -0,5^\circ$  y  $\varphi_3 = 180^\circ$  (aspa azul, eje superior, valores de abscisas antisimétricos). Constituye un test de la simetría del sustrato (rugosidad asimétrica o *skewness*)



(c) Substrato Oblea (Si): Esquema de las medidas 2 (superior) y 3 (inferior), fig. (a)



(d) Substrato Oblea (Si): Esquema de las medidas 2 (superior) y 4 (inferior), fig. (b)

Figura 5.30: Difusión por el sustrato de Silicio (elemento E4) y esquemas de medida.



La aparición de valores no nulos en los cuadrantes superior derecho e inferior izquierdo de la matriz de Mueller para las medidas realizadas es un indicador directo de la asimetría respecto del plano de incidencia (ruptura de la simetría 1), dado que los sistemas con estas características de simetría [5] deberían mantener valores perfectamente nulos. Trabajos previos sobre este tipo de sistemas [163], apuntan a imperfecciones en el alineamiento y en los componentes del polarímetro como causa de estos efectos cuando son pequeños. Sin embargo, en este caso la precisión del DRCP ha sido testeada en el capítulo anterior, y muestra un margen de error del orden del 1% en el peor de los casos. Mediante este estudio se puede concluir que, por motivos relacionados con el propio proceso de fabricación, la oblea presenta una clara asimetría intrínseca que afecta a la luz difundida a ambos lados de la dirección de retrodifusión, independiente del ángulo de incidencia. Por lo tanto, la evolución de todos los parámetros de la matriz de Mueller no será completamente simétrica en la región de backscattering, con independencia de la geometría que se esté analizando en cada momento.

## 5.4. Despolarización en Superficies con Ribs y Grooves

El análisis por medio del PD nos muestra la aparición de parámetros de despolarización no nulos y, lo que es más importante, nos permite extraer la parte despolarizante facilitando el estudio, con el mínimo número de parámetros posible, de la parte pura de la matriz de Mueller. Resulta interesante utilizar para este análisis los valores principales de despolarización,  $d_i$ , y la capacidad de despolarización  $\Delta$ , definida a partir de ellos en la ecuación 3.16 (pg. 45). Podemos obtener el total de la luz despolarizada difundida por un sistema  $a$  y definir para dos sistemas  $a$  y  $b$  la siguiente relación de despolarización:

$$\frac{\Delta^a \cdot m_{00}^a}{\Delta^b \cdot m_{00}^b} \quad (5.2)$$

También se puede cuantificar individualmente la eficiencia de la despolarización asociada a cada uno de los parámetros de despolarización,  $d_i$ , sustituyendo en la ec. 5.2 la capacidad de despolarización,  $\Delta$ , por  $1 - d_i$  para cada sistema. De este modo podemos comparar, para un mismo sistema, la relación entre las eficiencias de despolarización asociadas a cada uno de los parámetros principales de despolarización  $d_i$ .

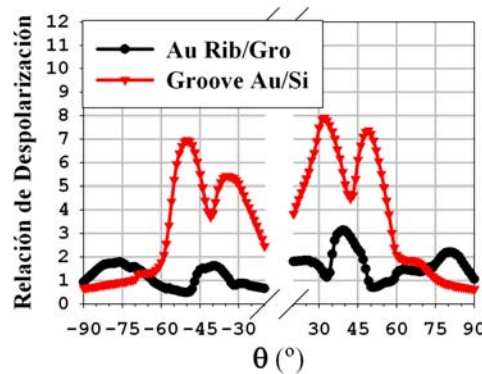
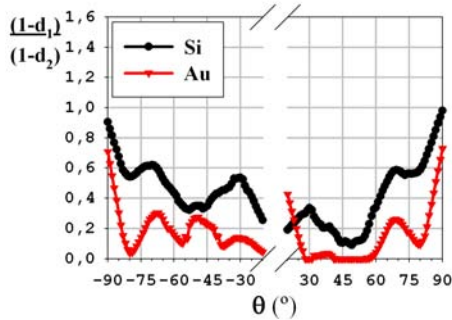


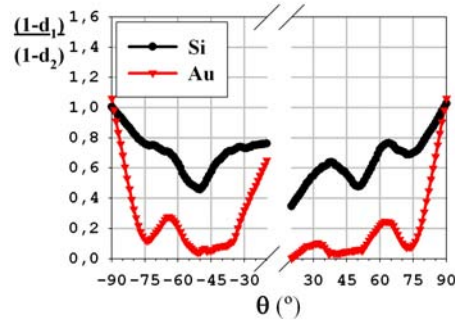
Figura 5.31: Relación de despolarización para la luz difundida por una estructura de Au ( $1 \times 4 \mu\text{m}$ ) *rib/groove* (punto negro), y por una *groove* ( $1 \times 4 \mu\text{m}$ ) de Au/Si (triángulo rojo).

Como se ha visto en las secciones precedentes, existen determinadas características en la evolución angular de los parámetros  $d_i$  para las estructuras estudiadas que los hacen muy interesantes, por ejemplo su lobulación (ver figs. 5.1 a 5.4, pg. 100). Ya se ha comentado que los valores de los parámetros principales de despolarización adquieren una mayor relevancia cuando la intensidad total difundida alcanza un mínimo, ya que la distribución angular de la luz despolarizada suele tener variaciones muy homogéneas y su peso relativo se incrementa allí donde la forma lobulada de la difusión por microestructura alcanza un mínimo. Podemos estudiar el efecto global de la despolarización utilizando

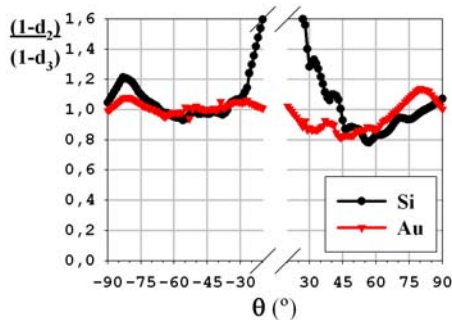
la relación de despolarización (ec. 5.2). En la fig. 5.31 se muestra dicha relación para sistemas similares *rib/groove* de Au (puntos negros) y para una *groove* de Au/Si (triángulos rojos). Se aprecia cómo la relación de despolarización oscila en torno a 1 para el primer caso, aunque presenta una cierta lobulación. Por otra parte, en el segundo caso, que se corresponde con el mismo sistema “antes-después” del sputtering, el proceso incrementa la cantidad de luz despolarizada para  $|\theta| < \pm 60^\circ$ .



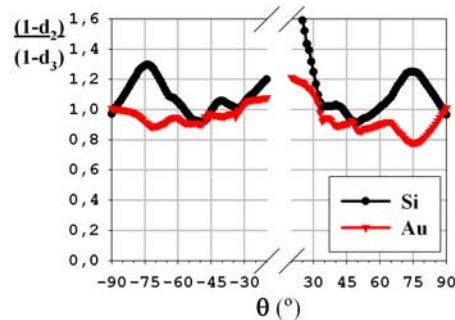
(a) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_1$  y  $d_2$  para una *rib*



(b) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_1$  y  $d_2$  para una *groove*



(c) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_2$  y  $d_3$  para una *rib*

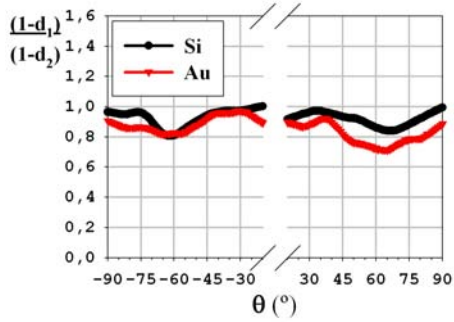


(d) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_2$  y  $d_3$  para una *groove*

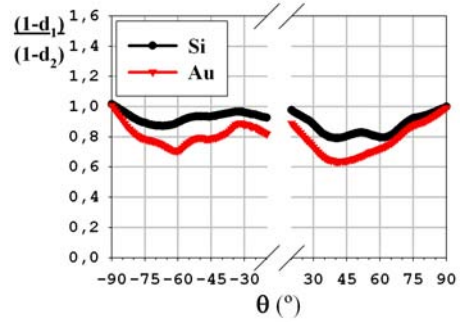
Figura 5.32: Relación entre las eficiencias de despolarización asociadas a los distintos parámetros  $d_i$  para estructuras de  $1 \times 4 \mu\text{m}$ .

Para desarrollar este punto, en la fig. 5.32 se muestra la relación entre las eficiencias de despolarización asociadas a los distintos  $d_i$  para estructuras tipo *rib*, figs. 5.32(a) y 5.32(c), y *groove*, figs. 5.32(b) y 5.32(d). El análisis de las figuras muestra que estos sistemas despolarizan más eficientemente vía  $d_2$  y  $d_3$  que por medio de  $d_1$ , y que este efecto se acentúa al metalizarlos. Esto, por otra parte, no resulta extraño a estas alturas, pues en los apartados anteriores ya se comentó brevemente que  $d_1 > d_2 \simeq d_3$  en las muestras metalizadas. Si observamos lo que ocurre en los sustratos (set de gráficos equivalentes en la fig. 5.33), el efecto es mucho menos notorio. Parece que no sólo el proceso de sputtering favorece la eficiencia de despolarización de los parámetros  $d_2$  y  $d_3$  frente a la de  $d_1$ , sino que la presencia de una estructura, ya sea *rib* o *groove*, acentúa esta diferencia.

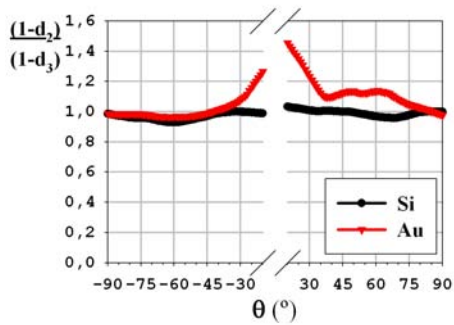
Finalmente, podemos estudiar la eficiencia relativa de despolarización ( $\frac{\Delta^a}{\Delta^b}$ ) entre un sistema con estructura (a) y su correspondiente sustrato plano (b). En la fig. 5.34(a) se muestra una evolución de dicha eficiencia suavizada mediante un *smooth* de los datos. Se aprecia claramente cómo se mantiene aproximadamente constante e inferior a 1, lo cual es lógico ya que un sustrato estructurado produce una fuerte difusión coherente. En la fig. 5.34(b) se muestra la eficiencia de despolarización total correspondiente a la fig. 5.34(a) sin suavizar. Es evidente que la evolución de la eficiencia de despolarización responde a la lobulación del elemento  $m_{00}$  de las estructuras analizadas, pero es más interesante apreciar que en los puntos donde  $m_{00}$  presenta un mínimo, esta eficiencia entre estructura y sustrato se aproxima a 1, mostrando claramente que es ahí donde la contribución del sustrato a la luz difundida adquiere un mayor peso relativo. Esto se observa muy bien en la rasante ( $\theta = \pm 90^\circ$ ), donde la eficiencia de despolarización es igual a 1 (fig. 5.34(b)).



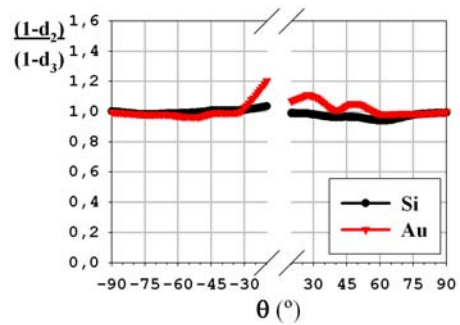
(a) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_1$  y  $d_2$  para el sustrato de una *rib*



(b) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_1$  y  $d_2$  para el sustrato de una *groove*

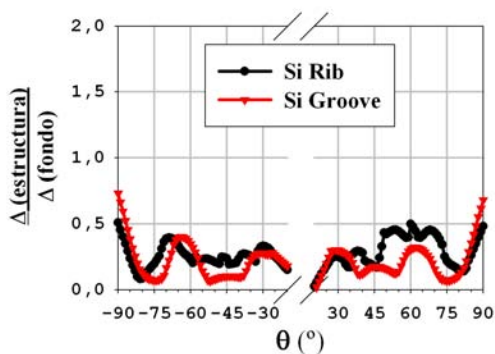


(c) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_2$  y  $d_3$  para el sustrato de una *rib*

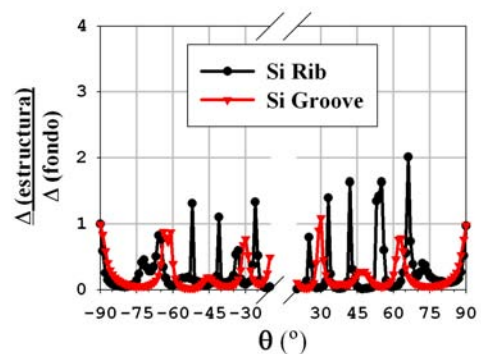


(d) Relación entre las eficiencias asociadas a  $d_2$  y  $d_3$  para el sustrato de una *groove*

Figura 5.33: Relación entre las eficiencias de despolarización asociadas a los parámetros  $d_i$  para los sustratos de las distintas estructuras.



(a) Cociente de despolarización total entre sustrato y estructuras de Si (evolución suavizada)



(b) Cociente de despolarización total entre sustrato y estructuras de Si (evolución sin suavizado)

Figura 5.34: Eficiencia de despolarización total entre sustrato y estructuras de Si de  $1 \times 4 \mu\text{m}$  (con y sin suavizado de las curvas).



## 5.5. Diferenciación entre Geometrías Rib-Groove

Puesto que las matrices de Mueller constituyen un estudio polarimétrico completo, deberíamos ser capaces, a partir de él, de alcanzar no sólo las mismas conclusiones que en medidas experimentales menos exhaustivas, sino, posiblemente, otras nuevas. Es decir, deberíamos ser capaces de avanzar en el problema inverso, en lo referente al reconocimiento de las dos estructuras básicas analizadas. En otras palabras, deberíamos intentar distinguir entre *ribs* y *grooves*. Si bien existen ciertas diferencias a las que se ha ido haciendo alusión en los apartados previos de este capítulo, éstas se han abordado desde un punto de vista descriptivo. A continuación se expondrá, primero, un análisis del problema inverso desde un punto de vista clásico, en el que aparecerán sus limitaciones, y después desde la aplicación del PD, para el que se ha alcanzado un importante resultado que muestra su importancia [166].

### 5.5.1. Análisis Convencional de la Matriz de Mueller

Como se viene comentando en los apartados precedentes, la fenomenología asociada a la difusión de luz por *ribs* y *grooves* se podría describir desde un punto de vista convencional. El patrón lobulado que se muestra frecuentemente en la literatura para la intensidad difundida (ligada al elemento  $m_{00}$  en las múltiples figuras de la matriz de Mueller mostradas) tiene una fuerte dependencia con el tamaño para un rango de tamaños  $R \sim \lambda$ . Los patrones de difusión asociados a este tipo de estructuras, denominados en ocasiones funciones de fase (*phase functions*), se utilizan, entre otras cosas, para determinar el tamaño de las estructuras, como ya se explicó en la introducción de este capítulo [76], por el mismo procedimiento que se realiza en varios analizadores de tamaños de partícula disponibles comercialmente (como los de las marcas *MICROTRAC*, *COULTER* y *MALVERN*, por citar algunas). Por ejemplo, la forma de los patrones de difusión de los elementos  $m_{00}$  y  $m_{01}$  ha sido utilizada para obtener el tamaño de partículas esféricas o fibras cilíndricas [167, 159, 168], del modo que se indicará en la sección 5.6.2. Sin embargo, como se comentó en la introducción de este capítulo, el caso de las elevaciones/huecos de sección rectangular presenta una mayor complejidad. Como punto de partida para estructuras  $2D$ , la difusión de las muestras monocomponente de tamaño micrométrico, bien sean una *rib* o una *groove*, debería tener un patrón difraccional semejante al de una rendija del mismo ancho  $w$ . Por otra parte, si se trata de muestras con dos estructuras iguales y paralelas, la difusión debería estar gobernada por un patrón interferencial de doble rendija. No obstante, como ya se comentó en el apartado 5.1.1, la altura  $h$  de la estructura también debería jugar un papel importante.

En la fig. 5.35 se muestra la evolución del elemento  $m_{00}$  para las distintas configuraciones y su comparación con los patrones difraccional e interferencial, de los cuales se representa la posición de los mínimos característicos con líneas discontinuas. Como se aprecia claramente en la fig. 5.35(a), elemento  $m_{00}$  para una *rib* ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ), la estructura difraccional de mínimos de la rendija equivalente (ancho  $w = 3 \mu\text{m}$ ) no coincide en ningún momento. El ajuste a una rendija de mayor tamaño ( $w = 3,5 \mu\text{m}$ ) podría mantener los mínimos en la misma posición, pero en ese caso estaríamos hablando de un procedimiento de ajuste muy grosero para simular la geometría del objeto, pues no está teniendo en cuenta la altura de la estructura. Si se analiza la fig. 5.35(b), correspondiente al patrón de  $m_{00}$  para una *groove* ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ), se aprecia cómo los mínimos de difracción no se ajustan exactamente en el caso del Silicio, pero sí que lo hacen en el del Oro. Es decir, el comportamiento de la luz difundida en el caso de una *groove* es semejante al de una rendija de igual dimensión, mientras que una *rib* no está representada con claridad por el diagrama de difracción de una rendija de su mismo ancho  $w$ .

Por otra parte, si observamos las figuras relativas a geometrías con dos estructuras paralelas (fig. 5.35(c) para dos estructuras de Si,  $1 \times 3 - 4 \mu$ , y fig. 5.35(c) para dos estructuras de Au,  $1 \times 3 - 7 \mu$ ) se aprecia cómo, con independencia de su composición, los mínimos del patrón de difusión del elemento  $m_{00}$  se ajustan casi a la perfección con los mínimos interferenciales de una doble rendija, y esto tanto para *ribs* como para *grooves*. Sin embargo, de nuevo el patrón de las *grooves* se adapta mucho mejor que el de las *ribs*. Estas últimas presentan mayores diferencias para ángulos de difusión grandes ( $\theta > 60^\circ$ ), posiblemente debido a su interacción con el sustrato y a efectos de sombreado, que no se presentan, para incidencia normal, en el caso de las *grooves*. Por tanto, las diferencias más evidentes entre uno u otro tipo de estructura aparecen en ángulos cercanos a la rasante, donde la capacidad de difusión de luz de la *rib* supera ampliamente la de la *groove*.

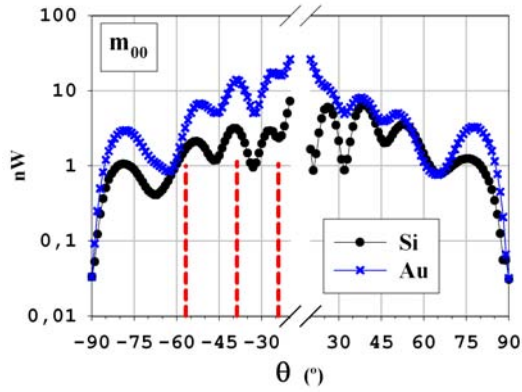
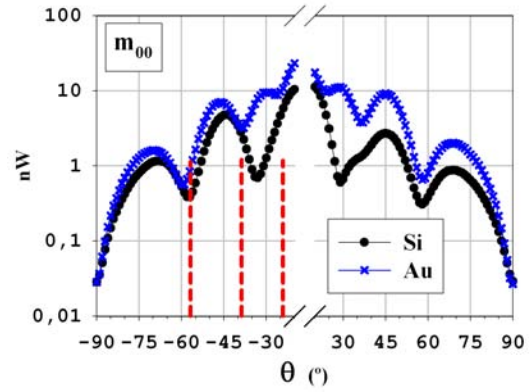
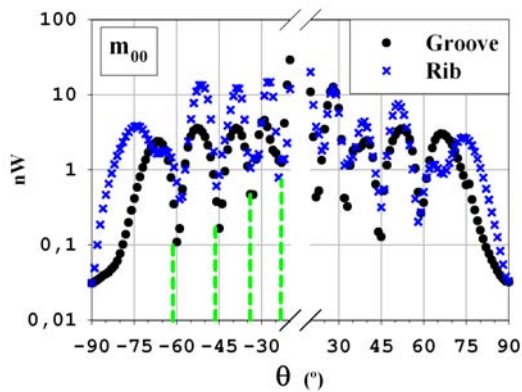
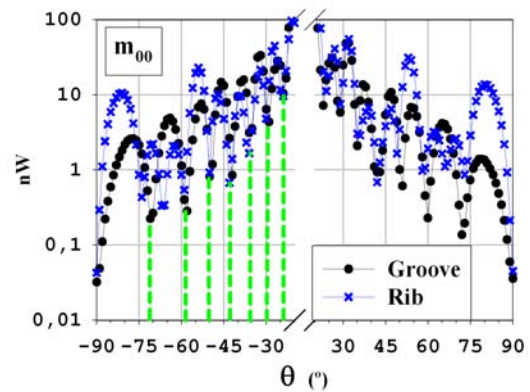
(a) Rib de Au/Si ( $1 \times 3 \mu$ ): Comparación con una rendija ( $w = 3 \mu\text{m}$ )(b) Groove de Au/Si ( $1 \times 3 \mu$ ): Comparación con una rendija ( $w = 3 \mu\text{m}$ )(c) Dos ribs/grooves (Si,  $1 \times 3 - 4 \mu$ ): Comparación con una doble rendija ( $d = 4 \mu\text{m}$ )(d) Dos ribs/grooves (Au,  $1 \times 3 - 7 \mu$ ): Comparación con una doble rendija ( $d = 7 \mu\text{m}$ )

Figura 5.35: Transmitancia total ( $m_{00}$ ) de las distintas geometrías: Comparación con modelos difraccionales e interferenciales.

A pesar de que los resultados en términos de la matriz de Mueller muestran sensibilidad a los tamaños y perfil de las estructuras y permiten estimaciones de tamaño por comparación con patrones difraccionales e interferenciales básicos, las discrepancias y ambigüedades hacen que no sea fácil establecer un mecanismo de distinción entre *ribs* y *grooves*, algo que sí supondría un avance en cuanto a la resolución del problema inverso. Es en este punto donde el análisis del PD nos ofrece alguna ventaja clara ya que, como vamos a ver, nos permitirá realizar al menos una interpretación diferente y útil de éstos resultados.

### 5.5.2. Análisis Mediante PD

La dependencia angular del parámetro de desfase obtenido mediante el PD (ver fig. 5.36) está muy relacionada con la estructura del elemento  $m_{00}$ . Los cambios abruptos de la fase están relacionados con el tamaño (relativo a  $\lambda$ ) del elemento difusor. El número de “saltos” en  $\delta$  aumenta con el tamaño y la complejidad de la estructura, tanto para *ribs* como para *grooves*, bien sean de Oro o de Silicio. El proceso de sputtering, como se aprecia en la fig. 5.36, produce un efecto de suavizado en  $\delta$  para las muestras de Oro, que puede ser debido a dos causas: A una deposición irregular de la capa de sputtering, traducida como un espesor de capa que varía a lo largo de la muestra (superposición o convolución de medidas); o bien a la afinidad de las distintas zonas de la estructura por los patrones propios del proceso de fabricación, que dan lugar a esa asimetría intrínseca de las muestras (por ejemplo, paredes verticales que presentan una ligera inclinación o defectos que actúan como “germen” para el depósito del Au).

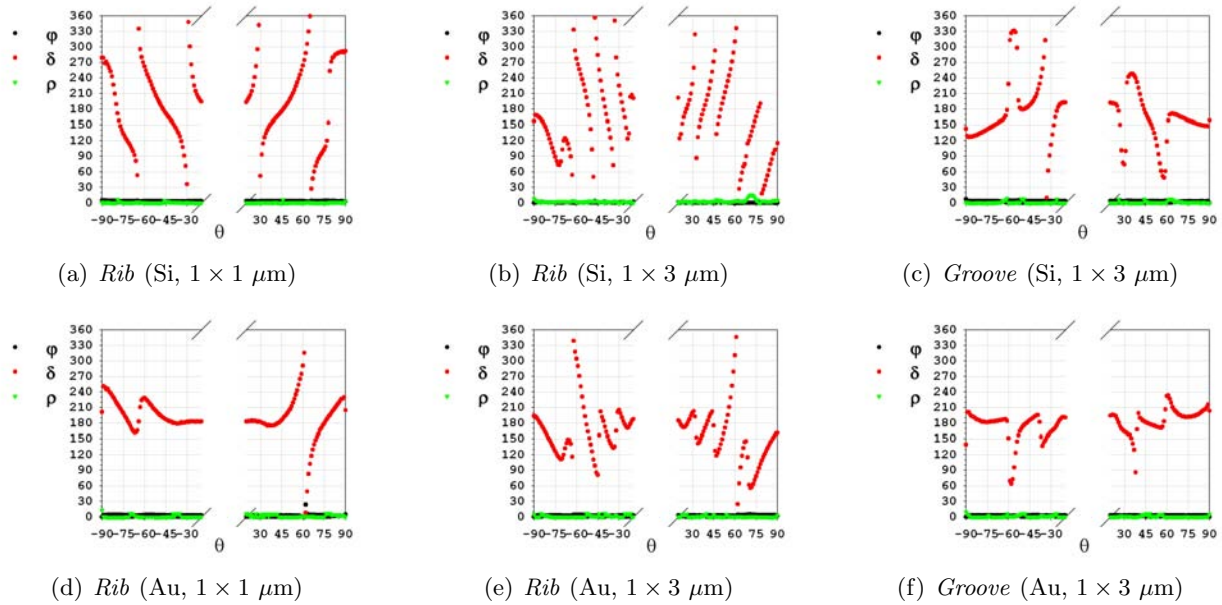


Figura 5.36: Evolución angular de  $\varphi$ ,  $\delta$  y  $\rho$  para distintas geometrías tipo *rib* y *groove* en Au y Si.

Ahora es el momento de repetirnos la pregunta: ¿En qué se diferencian las estructuras *rib* y *groove*? El patrón de  $m_{00}$  no proporciona diferencias significativas (al igual que ocurre al tomar como referencia la transmitancia  $t_1$  ó, lo que es lo mismo,  $P_L$ ), pero vamos a ver que la evolución de  $\delta$  sí lo hace.

En la fig. 5.37 se muestra un cuadro resumen de la información disponible, incluyendo las matrices de Mueller correspondientes a una estructura *rib* y *groove* (Si) de tamaño  $1 \times 3 \mu\text{m}$  (a), los parámetros obtenidos mediante el PD (b), donde la primera, segunda y tercera fila de gráficos se corresponden con los elementos de las matrices de diatenuación, retardo y despolarización, respectivamente, y la evolución de las pendientes de  $\delta$  (c).

El parámetro  $\delta$ , ya mostrado en la fig. 5.36, es la variable principal de  $M_R$ : El desfase introducido entre sus estados propios ortogonales. Para todas las *ribs* analizadas la pendiente dominante de este parámetro es negativa cuando seguimos la evolución de  $-90^\circ$  a  $0^\circ$ , y positiva al continuar hacia  $+90^\circ$ . Sin embargo, para las *grooves* el comportamiento es el inverso. En ambos caso la pendiente dominante se compensa mediante periodos más cortos con una discontinuidad o un fuerte cambio en la dirección opuesta. En la fig. 5.37(c) se representa la primera derivada de  $\delta$  para los casos de la fig. 5.37(a). El gráfico de columnas en blanco y negro bajo estas gráficas indica el signo positivo o negativo de la pendiente de  $\delta$ . La importancia de este resultado reside en el hecho de que todas las muestras analizadas siguen la misma regla, independientemente del ancho, alto, número de elementos, distancia entre los mismos o material (Si o Au). Esto indica la posibilidad de evaluar la presencia de *ribs* o *grooves* en una superficie mediante esta única consideración.

En la fig. 5.38 se muestran otros ejemplos de la evolución de  $\delta$  junto con el signo de su primera derivada. Los casos superiores son los mismos que los mostrados en la fig. 5.37, pero en este caso se trata de muestras con recubrimiento de Au. Los dos casos inferiores son muestras de dos *ribs/grooves* de Si, de ancho  $w = 3 \mu\text{m}$ , alto  $h = 1 \mu\text{m}$ , y separación  $d = 7 \mu\text{m}$ . En todos los resultados se aprecia claramente que la pendiente dominante del desfase es característica del tipo de estructura. Es importante la siguiente observación: Entre dos *ribs/grooves* existe una estructura opuesta (*groove/rib*) con la misma altura y un tamaño que depende de la separación entre ambas. Los resultados muestran que nuestra regla funciona con éxito también en estos casos.

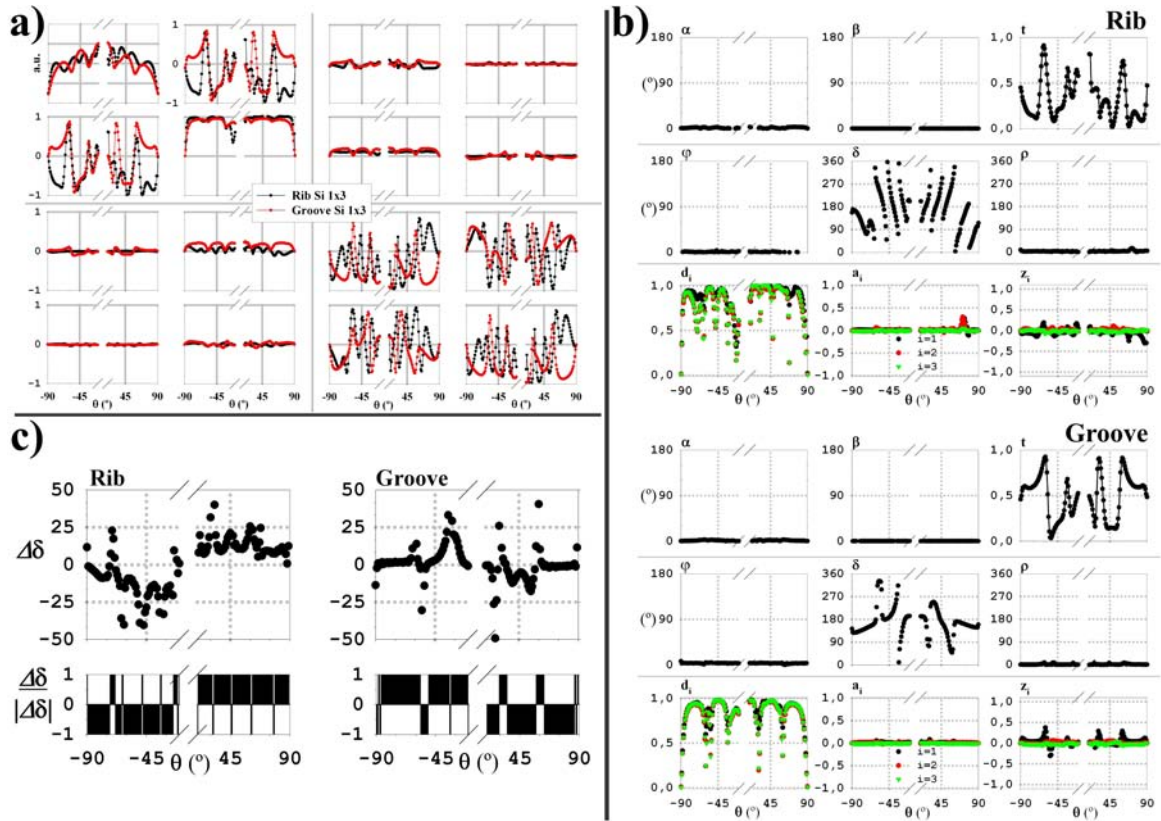


Figura 5.37: a) Elementos  $m_{ij}$  vs.  $\theta$  para una estructura de Silicio ( $1 \times 3 \mu\text{m}$ ): Rib (negro) y groove (rojo), b) Arriba: Parámetros PD correspondientes con la rib a), y Abajo: Parámetros PD para la groove equivalente b). Los gráficos centrales muestran el desfase,  $\delta$ , obtenido vía PD. c) Pendiente de  $\delta$  para una rib/groove obtenida a través del PD. Las barras b/n muestran el signo dominante de la pendiente.

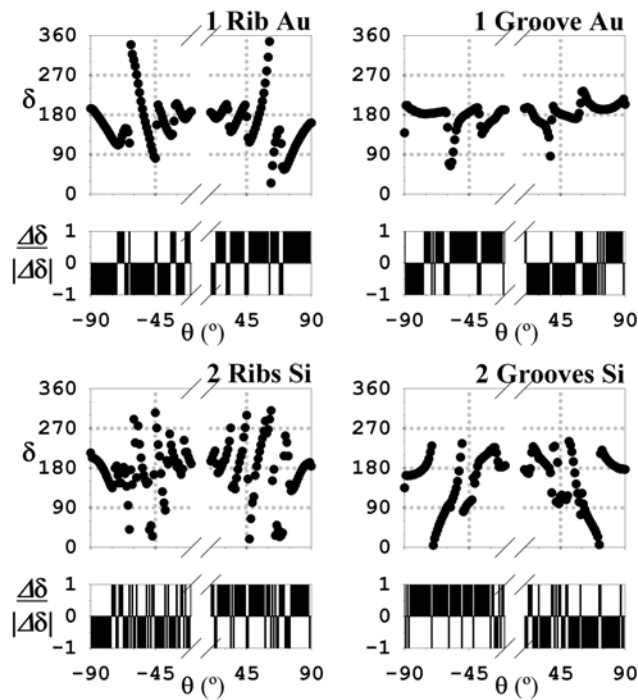


Figura 5.38: Gráficos de  $\delta$  (arriba) y del signo de la pendiente de  $\delta$  (abajo) para diferentes geometrías y composiciones.

Para cuantificar este comportamiento, podemos obtener para cada cuadrante medido (en incidencia normal, con pasos de  $1^0$ ) un parámetro definido como la diferencia, en número de pasos, entre aquellos con derivada local positiva y negativa. A partir de esto, también podemos definir un nuevo indicador,  $\Upsilon_{R-G}$ , que se puede expresar como:

$$\Upsilon_{R-G} = \frac{\sum_{\theta > 0} \frac{\Delta\delta_i}{|\Delta\delta_i|} - \sum_{\theta < 0} \frac{\Delta\delta_i}{|\Delta\delta_i|}}{N}, \quad (5.3)$$

donde  $N$  es el número total de pasos en los que se discretiza la medida. El primer ( $\theta > 0$ ) y segundo ( $\theta < 0$ ) sumatorios se corresponden con las regiones derecha ( $\theta > 0$ ) e izquierda ( $\theta < 0$ ) respecto de la normal. De forma que,  $\Upsilon_{R-G} \in [-1, 1]$  y un valor positivo indicará la presencia de *ribs*, mientras que un valor negativo estará asociado a la presencia de *grooves*. Valores en torno a cero darán lugar a un análisis incierto. En la tabla 5.1 se incluyen los resultados para toda la serie de microestructuras analizadas, con variedad de anchura, altura, número y composición de las mismas. Este resultado constituye una verdadera regla directa (*Rule-of-Thumb*) para la distinción automática entre *ribs* y *grooves* a escala micrométrica [166].

<i>Ribs</i>	Silicio									
$[w]$	1	3	4	3	3	3	3	3	4*	
$[d]$	–	–	–	4	5	6	7	8	$[h] = 2 \mu\text{m}^*$	
$\Upsilon_{R-G}$	0,92	0,76	0,62	0,45	0,52	0,45	0,49	0,36	0,13*	
<i>Ribs</i>	Oro									
$[w]$	1	3	4	3	3	3	3	3	4*	
$[d]$	–	–	–	4	5	6	7	8	$[h] = 2 \mu\text{m}^*$	
$\Upsilon_{R-G}$	0,50	0,57	0,60	0,43	0,45	0,55	0,43	0,43	0,20*	
<i>Grooves</i>	Silicio									
$[w]$	1	3	4	3	3	3	3	3	4*	1
$[d]$	–	–	–	4	5	6	7	8	$[h] = 2 \mu\text{m}^*$	2
$\Upsilon_{R-G}$	0,14	-0,65	-0,76	-0,63	-0,36	-0,62	-0,62	-0,16	-0,04*	-0,43
<i>Grooves</i>	Oro									
$[w]$	1	3	4	3	3	3	3	3	4*	
$[d]$	–	–	–	4	5	6	7	8	$[h] = 2 \mu\text{m}^*$	
$\Upsilon_{R-G}$	0,12	-0,33	-0,46	-0,42	-0,09	-0,01	-0,40	-0,21	-0,13*	

Tabla 5.1: Valores del parámetro  $\Upsilon_{R-G}$  para estructuras de perfil cuadrado ( $h = 1 \mu\text{m}$  salvo en \*;  $w$  y  $d$  en  $\mu\text{m}$ ).



## 5.6. Partículas en Coloide o sobre Sustrato

Las partículas son el difusor por excelencia, ya sea contenidas en volumen o adheridas a una superficie. En este apartado vamos a aplicar el PD a estas dos situaciones, incluyendo resultados experimentales y cálculos teóricos para la obtención de las matrices de Mueller.

### 5.6.1. Nanopartículas en Coloide: Nanosizing

A continuación vamos a mostrar el comportamiento de nanopartículas metálicas de Oro en suspensión acuosa (coloide) para ángulos de difusión en torno a  $90^0$ , cuando son iluminadas con un haz monocromático ( $\lambda = 633$  nm). La medida con el DRCP se ve dificultada por el hecho de que la eficiencia de scattering de las nanopartículas a  $\theta = 90^0$  y para  $\lambda = 633$  nm es muy baja.

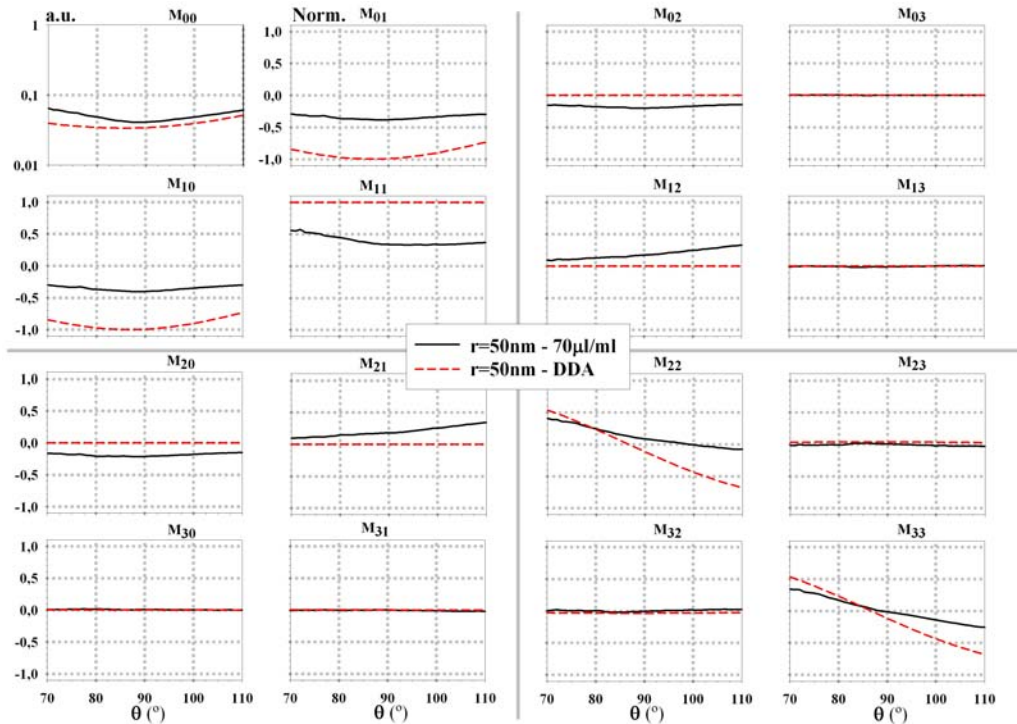


Figura 5.39: Difusión por nanopartículas (Au,  $r = 50$  nm): Evolución de los elementos de la matriz de Mueller en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ) para muestras reales y simulación teórica.

La fig. 5.39 muestra los resultados para una suspensión acuosa de Au en dilución, de tamaño de partícula estimado por el fabricante  $r = 50$  nm (*Nanospheres*). Junto a la matriz de Mueller experimental en torno a  $\theta = 90^0$  se representa el resultado obtenido mediante una simulación DDA para una partícula de Oro aislada de  $r = 50$  nm. La primera observación que es necesario realizar, aparentemente, es lo lejos que se encuentran ambas líneas de la coincidencia. Es decir, existe una semejanza en las pendientes de algunos elementos, pero los experimentales son menores en valor absoluto, excepto para los ceros teóricos, muchos de los cuales no son reproducidos experimentalmente.

Al realizar el PD sobre las matrices de Mueller teórica y experimental (esta para dos diluciones distintas, 30 y 70  $\mu$ l de coloide por cada ml de agua) se obtienen los parámetros de la parte pura, fig. 5.40, donde se aprecia, por una parte, la pérdida de contraste en  $t_1$  y, por otra, la buena aproximación experimental al valor teórico de  $\delta$ . Al observar los parámetros de despolarización de la dilución de nanopartículas, fig. 5.41 ( $r = 50$  nm, 70  $\mu$ l/ml), aparece la diferencia más notoria, y obvia, entre cálculo y experimento, ya que el primero no predice la abundante despolarización que existe en el experimento. Al analizar esta figura se puede hacer una primera observación, en relación a los cálculos de la sección 3.2.3 (pg. 58) y a los resultados de las secciones 5.2.4 y 5.1.4, pues existe una relación

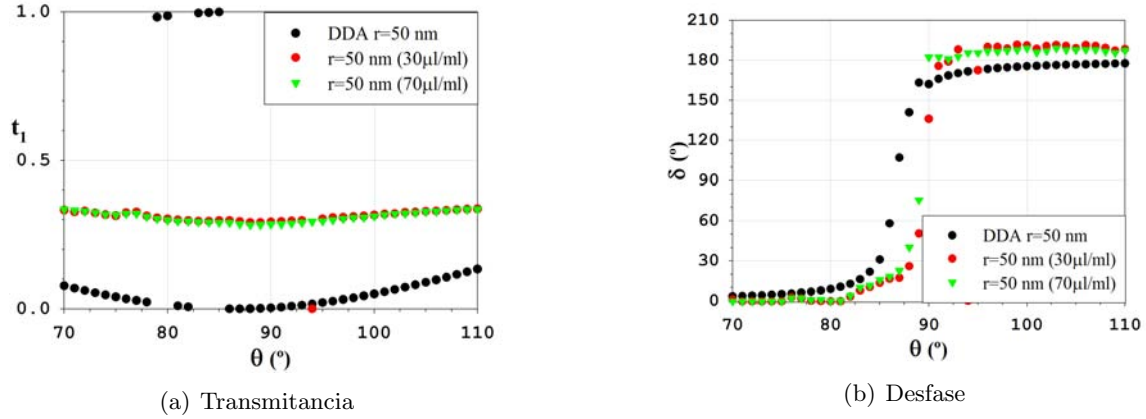


Figura 5.40: Difusión por nanopartículas (Au,  $r = 50$  nm): Evolución de los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ) para muestras reales y simulación teórica.

entre los parámetros principales de despolarización semejante a la enunciada con anterioridad ( $d_1 > d_2 \simeq d_3$ ). Además, dada la evidente pérdida de contraste para  $\theta = 90^\circ$ , se puede asociar el aumento de despolarización a esta pérdida de contraste.

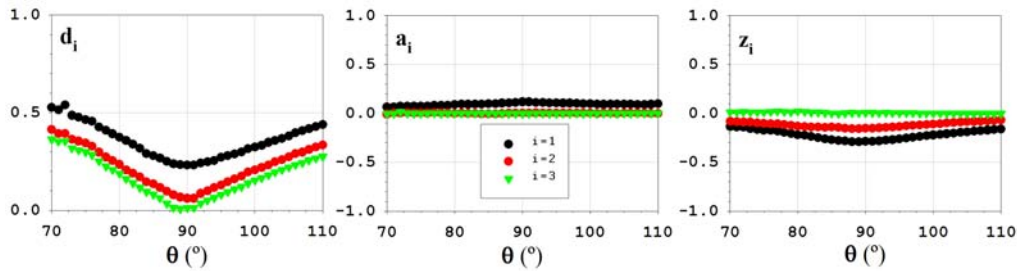


Figura 5.41: Difusión por nanopartículas (Au,  $r = 50$  nm, 70  $\mu\text{l/ml}$ ): Evolución de los parámetros de despolarización en función de  $\theta$ .

Del análisis anterior se desprende que el parámetro PD calculado numéricamente que mejor se ajusta al experimento es  $\delta$ . Para profundizar en esta idea fueron repetidas las medidas y cálculos para partículas de Au de  $r = 100$  nm (*Ted Pella*). En la fig. 5.42 se muestra la evolución de la matriz de Mueller para una dilución de dichas partículas, comparada con dos simulaciones numéricas para partículas de distintos tamaños. Existe una relativa mejora de los parámetros de la medida experimental, en particular conviene observar la variación que ha sufrido el parámetro  $m_{23}$  (resp.  $m_{32}$ ), asociada a la metodología propuesta en [169].

Si recurrimos a los parámetros PD (fig. 5.43 para los correspondientes a la diatenuación y al retardo) los resultados adquieren un mayor significado pues, aunque  $t_1$  se ajusta ligeramente mejor para  $r = 120$  nm,  $\delta$  solapa casi a la perfección con el cálculo realizado para una partícula con  $r = 120$  nm. Este no es el valor dado por el fabricante, que sin duda hace una estimación para el valor central de una distribución y para los parámetros de fabricación. Posiblemente estamos determinando el tamaño a nivel macroscópico de forma más específica y también más precisa. Esta forma de analizar el tamaño constituiría, en sí misma, una herramienta de *nanosizing* no invasiva.

Por otra parte, y como era de esperar, una mejora en el contraste (asociado a  $Q_{sca}$ ) y una menor concentración de partículas (disminución de efectos de múltiple scattering) da lugar a una pérdida de despolarización con respecto a las muestras de nanopartículas de menor tamaño. Este efecto se aprecia de forma nítida en la fig. 5.44.

Hasta el momento se han analizado las medidas realizadas con un haz monocromático ( $\lambda = 633$  nm), que se corresponde con la del diseño del dispositivo experimental polarimétrico. El análisis de

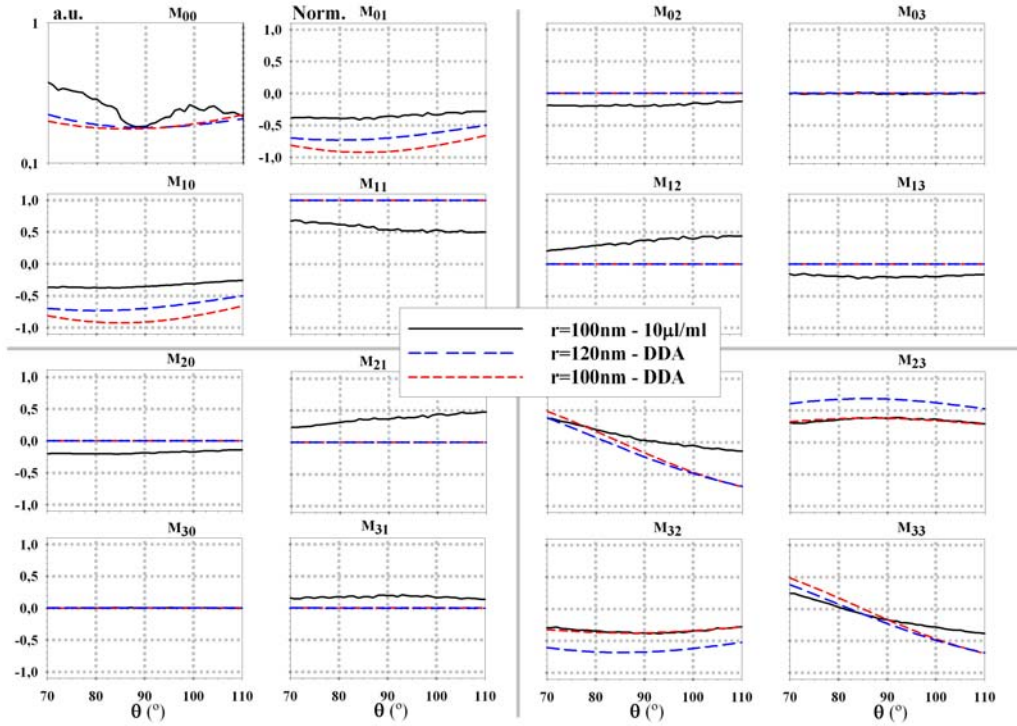


Figura 5.42: Difusión por nanopartículas (Au,  $r = 100$  nm): Evolución de los elementos de la matriz de Mueller en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ) para muestras reales y simulación teórica.

resultados se ha llevado a cabo por medio de la evolución de los distintos parámetros en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ). Sin embargo, en el estudio de nanopartículas la espectroscopía es una herramienta fundamental que puede ser utilizada en combinación con dispositivos polarimétricos.

Pese a que las bases teóricas de la estimación de tamaños de partículas por medidas de scattering en el rango de los nanómetros, o *nanosizing*, están establecidas desde hace años [169], las dificultades experimentales impedían la implantación de este tipo de técnicas. Por ejemplo, en partículas metálicas la localización en el espectro de los máximos en la eficiencia de difusión ( $Q_{sca}$ ) debidos a la resonancia cuadrupolar, está directamente relacionada con el tamaño de la partícula y su composición [14, 170]. Una disminución en el grado de polarización lineal  $P_L$  (i.e.  $t$  ó  $t_1$ , indistintamente) en la luz difundida por una nanopartícula a  $90^\circ$  marca, de forma inequívoca, la frecuencia para la cual se produce la resonancia cuadrupolar en la nanopartícula, relacionada directamente con su composición, tamaño y estructura [171].

No obstante, pese a que  $P_L$  ( $t$ , línea continua en las figs. 5.45(a) y 5.45(b) con valor cercano a 1 y representado para esferas de Ag de 50 y 65 nm) es un buen indicador, en partículas con  $r < 50$  nm presenta variaciones numéricas estimadas que son del orden del 1‰, el margen de error del aparto en el mejor de los casos. Del mismo modo, la medida de la elipticidad a partir de los parámetros  $m_{22}$  y  $m_{23}$  como indicador del tamaño de partícula, propuesta en la referencia [169], tiene valores del mismo orden de magnitud, volviendo a hacer complicado su tratamiento experimental.

Una dificultad añadida es la baja intensidad de la luz difundida por las partículas de ese tamaño. Esto conlleva la aparición, bien de un fondo despolarizante experimental debido al bajo contraste entre el fondo y el scattering, o bien a despolarización por difusión múltiple, al aumentar la concentración de nanopartículas con objeto de incrementar la intensidad difundida. Ambos casos ocasionan que, desde un punto de vista polarimétrico, cualquier medida directa realizada sin evaluar el fondo despolarizante presente un gran error experimental.

Es en este punto donde la evaluación de los resultados mediante el PD manifiesta su utilidad. En la fig. 5.45 se muestran los resultados de un estudio teórico sobre nanopartículas esféricas de Plata para  $\theta = 90^\circ$ , utilizando como método de simulación el cálculo DDA para partícula aislada. Se observa la dependencia espectral de  $\delta$ , así como la evolución de su derivada ( $\frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda}$ ), para  $r = 50$  nm (fig. 5.45(a))



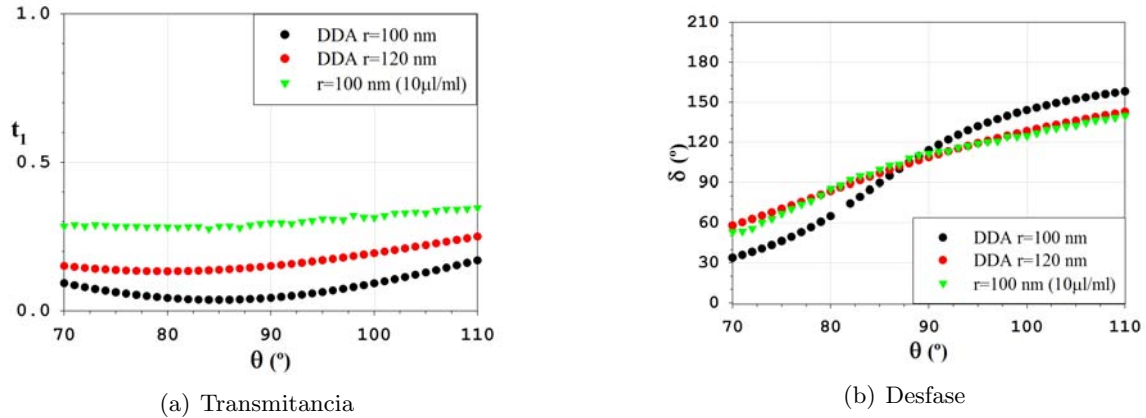


Figura 5.43: Difusión por nanopartículas (Au,  $r = 100$  nm): Evolución de los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ) para muestras reales y simulación teórica.

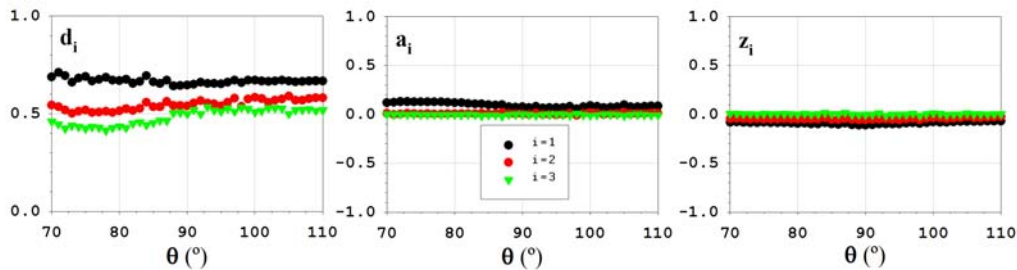


Figura 5.44: Difusión por nanopartículas (Au,  $r = 100$  nm,  $10 \mu\text{l/ml}$ ): Evolución de los parámetros de despolarización en función de  $\theta$ .

y  $r = 65$  nm (fig. 5.45(a)).

Llama la atención el hecho de que, pese a que  $t$  disminuye su variación con el tamaño,  $\delta$  mantiene el mismo rango y amplitud de oscilación, y su pendiente sigue presentando un mínimo acusado en el punto señalado por la variación de  $t$  (resonancia cuadrupolar) de la misma magnitud con independencia de  $r$ , aunque posicionado en puntos diferentes para los dos tamaños. Hay que recordar aquí que  $\delta$  es un parámetro que hemos podido ajustar previamente aplicando el PD sobre una matriz de Mueller experimental, por lo que se trata de medidas viables. En las figs. 5.46(a) y 5.46(b) se comparan la eficiencia de scattering y la pendiente de  $\delta$  en función de la longitud de onda, también para  $\theta = 90^\circ$ , con  $r = 20$  nm (a) y  $r = 30$  nm (b). La eficiencia de scattering resulta estar fuertemente relacionada con la estructura de la pendiente de  $\delta$  ( $\frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda}$ ). Dicha pendiente vuelve a presentar valores mínimos semejantes a los obtenidos para nanoesferas de mayor tamaño. En las figs. 5.46(c) y 5.46(d) se aprecia claramente cómo  $\delta$  mantiene su rango de oscilación, mientras que la variación de  $t$  es, a efectos prácticos, inapreciable.

Dado que la evolución espectral de las resonancias plasmónicas en nanopartículas metálicas es un tema de gran interés actualmente [87, 86, 172], parece lógico analizar el desplazamiento del mínimo en  $\frac{\Delta\delta}{\Delta\lambda}$  con el tamaño de la partícula. En la fig. 5.47 se refleja el resultado de este estudio, acompañado de una línea de tendencia que podía servir como indicador del tamaño de las nanoesferas en función de la posición del mínimo de la derivada de  $\delta$  con la longitud de onda. Dicha regresión lineal presenta un coeficiente de ajuste  $R = 0,98$  para este caso, en el que se ha realizado una discretización un tanto gruesa (3 nm) y no se ha suavizado ninguna de las gráficas, con objeto de preservar la objetividad del análisis visual. Este trabajo presenta una potencial aplicación práctica del PD en la determinación del tamaño de nanopartículas (*nanosizing*) complementando el estudio de  $P_L$  en su rango de aplicación, y mejorándolo para tamaños de partícula  $r < 50$  nm. Es importante hacer constar que para otros metales se obtendrían otras líneas de tendencia diferentes de la anterior.

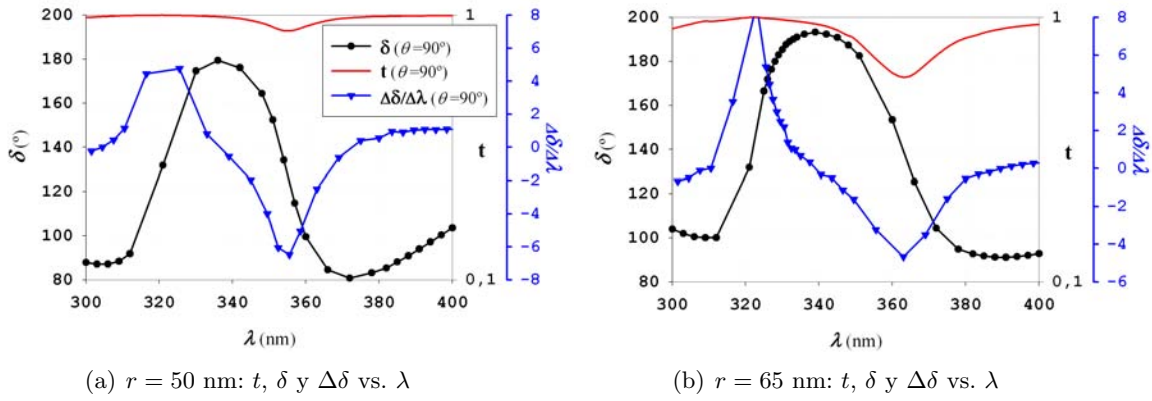


Figura 5.45: Nanosferas de Ag ( $r = 50 \text{ nm}$  y  $r = 65 \text{ nm}$ ): Parámetros PD para  $\theta = 90^\circ$ .

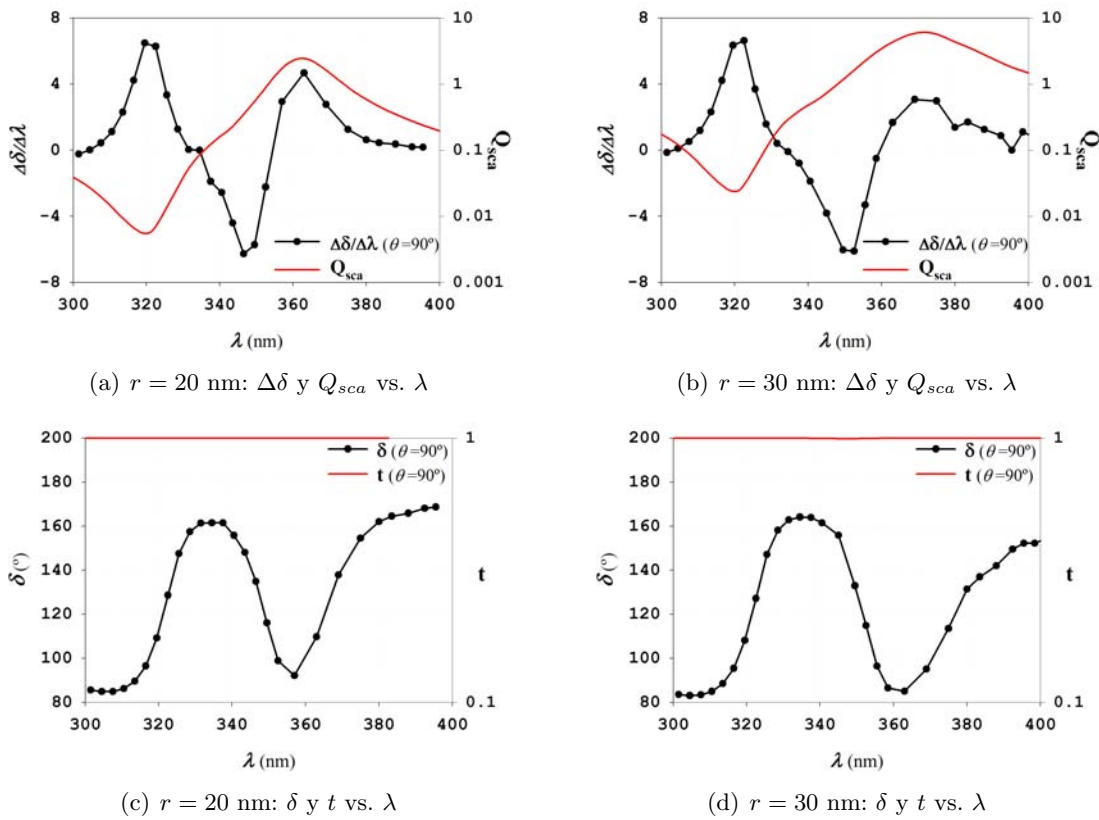


Figura 5.46: Nanosferas de Ag ( $r = 20 \text{ nm}$  y  $r = 30 \text{ nm}$ ): Parámetros PD para  $\theta = 90^\circ$  y eficiencias de difusión.

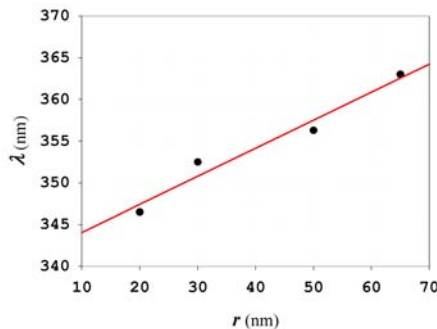


Figura 5.47: Nanosferas de Ag: Tendencia de los mínimos en  $\Delta\delta$  para  $\theta = 90^\circ$  en función del tamaño.

### 5.6.2. Depósitos sobre Sustrato

En esta sección se muestran algunos de los primeros resultados del trabajo con el polarímetro, basados en técnicas de determinación de tamaño para esferas y cilindros sobre sustrato relativamente recientes y de probada eficiencia [167, 159, 168]. De forma similar a otros resultados anteriores se realizaron depósitos de partículas/fibras dieléctricas sobre sustrato dieléctrico, que fueron metalizadas posteriormente mediante sputtering de Oro. La metodología de preparación de estas muestras es la que se expuso en la sección 4.4.

#### Partículas sobre Sustrato

En la fig. 5.48 se expone la matriz de Mueller de una muestra de partículas de Poliestireno (de radio nominal  $r = 1,1 \mu\text{m}$ ), depositadas sobre un portamuestras de vidrio y recubiertas por sputtering con una capa de 50 nm de Au, medida para un ángulo de incidencia  $\theta_{inc} = 1^\circ$ . Una imagen de la muestra previa a su metalización se puede ver en la fig. 4.24 (pg. 93). Como se puede apreciar no es la representación de una matriz teórica pura, pues las cajas superior derecha e inferior izquierda poseen valores no nulos.

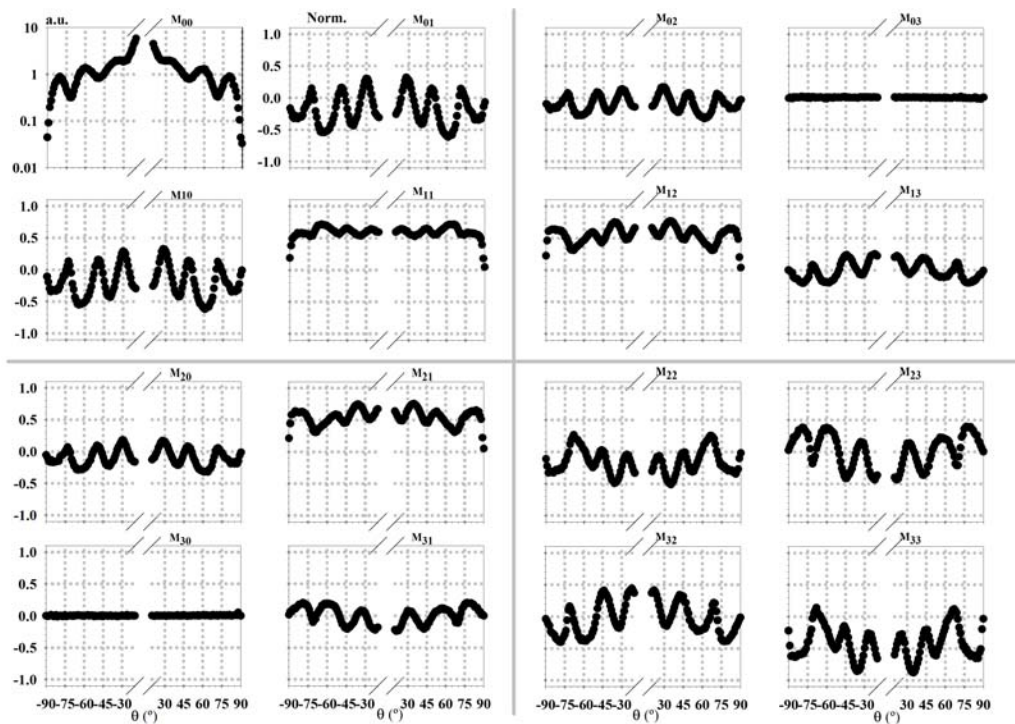


Figura 5.48: Difusión por partículas (Au,  $r = 1,1 \mu\text{m}$ ) sobre sustrato (Au): Evolución de los elementos de la matriz de Mueller en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

Al aplicar el PD sobre la anterior matriz se obtienen los siguientes parámetros (fig. 5.49), cuyo comportamiento resulta, cuanto menos, conocido a estas alturas. La forma de  $\delta$  es simétrica (fig. 5.49(b)), con pendientes abruptas y discontinuidades de salto en los puntos donde  $t_1$  apunta a máximos (mínimos en  $m_{00}$ ). Tratándose de muestras metalizadas mediante sputtering de Au, parece lógico el comportamiento de los parámetros principales de despolarización (una vez más  $d_1 > d_2 \simeq d_3$ , fig. 5.49(c)). De nuevo aparecen los máximos de despolarización sobre los mínimos de intensidad difundida, mostrando que el origen de gran parte de la despolarización se encuentra en el fondo producido por el sustrato, que carece de forma y alcanza mayor valor relativo para los mínimos totales. Además, los altos valores de la despolarización son un indicador de que la propia estructura difusora (desordenada) es una fuente de despolarización a través de mecanismos de difusión múltiple (*multiple scattering*).

También se ha analizado el comportamiento, por medio del DRCP, de un sistema de partículas de Poliestireno de  $r = 3,3 \mu\text{m}$  sobre sustrato, una vez fueron metalizadas con una capa de sputtering

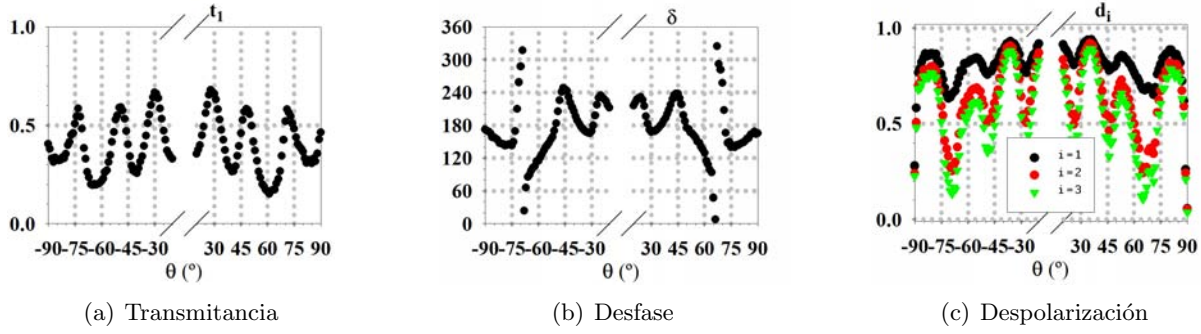


Figura 5.49: Difusión por partículas (Au,  $r = 1,1 \mu\text{m}$ ) sobre sustrato (Au): Evolución de los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

de Au. La matriz de Mueller medida para  $\theta_{inc} = 1^\circ$  es la representada en la fig. 5.50. En este caso las cajas no diagonales resultan más próximas a cero que en el caso de las partículas pequeñas. Pero los parámetros principales de despolarización  $d_i$  siguen alejándose de 1, lo que indica que la interacción múltiple es también intensa en este sistema (desorden).

Sobre la matriz medida para las partículas metálicas de  $r = 3,3 \mu\text{m}$  depositadas sobre sustrato metálico, se aplicó el PD, obteniendo como resultado los parámetros de la fig. 5.51. Los resultados son, desde un punto de vista cualitativo, semejantes a los de partículas con  $r = 1,1 \mu\text{m}$ .

En base a la referencia [76], se podrían establecer expresiones analíticas para determinar el tamaño de las partículas sobre los parámetros obtenidos mediante el PD. Para mostrar esto, en lugar de realizar este análisis por medio de nuevas medidas de intensidad, se pueden “construir” los valores de  $I_S$  e  $I_P$  a partir de la matriz de Mueller medida. Una vez conocido el perfil que presenta  $I_S$  con  $\theta$ , se puede calcular el tamaño de las partículas en base a la posición de los mínimos de intensidad ( $\theta_{min}$ ) según la referencia [76]:

$$\begin{cases} \theta_{min} = 90 - \frac{\alpha}{\phi} \\ \alpha = a + b \cdot m \\ a = 33,47 - 0,097 \cdot \theta_{inc} \\ b = 36,40 - 0,149 \cdot \theta_{inc} \end{cases} \quad (5.4)$$

donde  $\phi$  es el diámetro de la partícula expresado en micras,  $\theta_{inc}$  es el ángulo de incidencia en la muestra y  $m$  es el ordinal del mínimo, empezando en  $m = 0$  y desde la rasante en dirección a la normal. La fig. 5.52 muestra la evolución de  $I_S$ . Se analizó la matriz de Mueller, con  $\theta_{inc} = 1^\circ$ , para las partículas de  $r = 1,1 \mu\text{m}$  y de  $r = 3,3 \mu\text{m}$ . Los resultados obtenidos se muestran en la tabla 5.2, y muestran un acuerdo aproximado con las especificaciones del fabricante, pero indican que el tamaño es, en ambos casos algo menor que el que se debía suministrar.

	$r = 1,1 \mu\text{m}$ $\theta_{inc} = 1^\circ$			$r = 3,3 \mu\text{m}$ $\theta_{inc} = 1^\circ$			
$\theta_{min}$	$-74^0$	$-50^0$	$-30^0$	$-77^0$	$-69,5^0$	$75,5^0$	$67,5^0$
$m$	0	1	2	0	1	0	1
$\phi/2(\mu\text{m})$	1,05	0,87	0,88	2,68	2,60	2,42	2,35

Tabla 5.2: Tamaños de las partículas depositadas sobre sustrato (Au-Au).



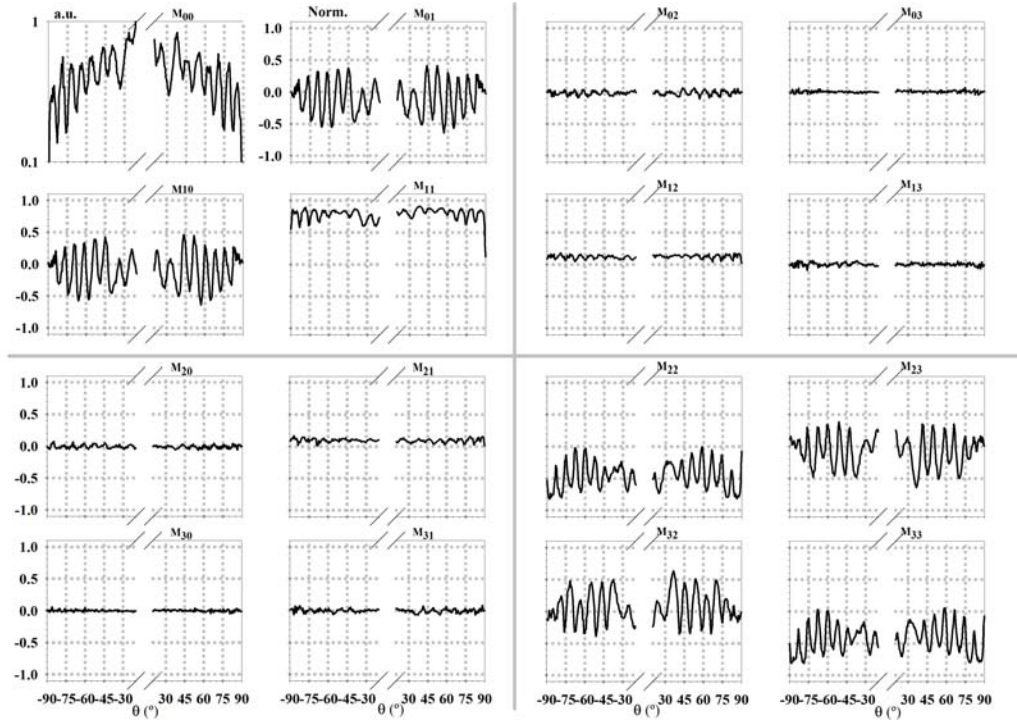


Figura 5.50: Difusión por partículas (Au,  $r = 3,3 \mu\text{m}$ ) sobre sustrato (Au): Evolución de los elementos de la matriz de Mueller en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

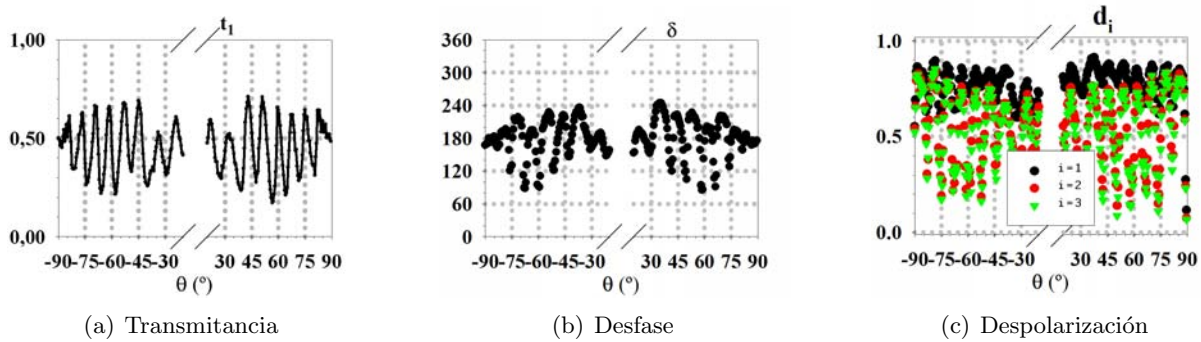


Figura 5.51: Difusión por partículas (Au,  $r = 3,3 \mu\text{m}$ ) sobre sustrato (Au): Evolución de los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

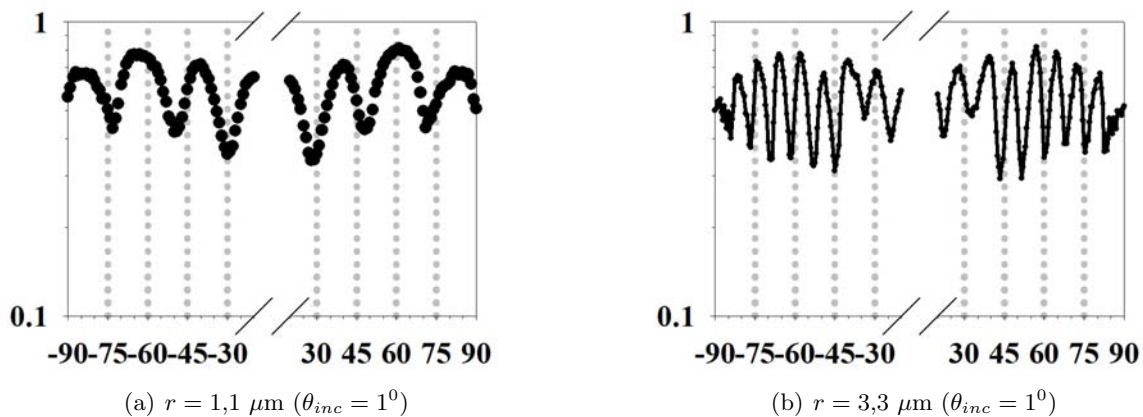


Figura 5.52: Intensidad difundida ( $I_S$ ) por partículas (Au) sobre sustrato (Au) en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

### Fibras sobre Sustrato

Por el mismo procedimiento de la sección anterior se han analizado diversas fibras depositadas sobre sustrato y recubiertas mediante sputtering de Au. Se muestran aquí medidas sobre dos fibras, una de tamaño desconocido, y otra ya observada al microscopio óptico mostrando un diámetro aproximado de  $\phi \simeq 5 \mu\text{m}$  (todas las medidas con incidencia  $\theta_{inc} = 1^0$ ). En la fig. 5.53 se expone la evolución de la matriz de Mueller para la primera de ellas, mientras que en los gráficos de la fig. 5.54 se muestran los parámetros PD obtenidos a partir de la anterior. Las observaciones realizadas con anterioridad para las partículas sobre sustrato acerca de las simetrías y los nulos de las cajas no diagonales vuelven a ser válidas. En la descomposición se observa la baja eficiencia de despolarización del sistema. Esto guarda relación con la ausencia de interacción múltiple entre difusores (sólo hay uno). En la fig. 5.55 se muestra el patrón de la la intensidad difundida  $I_S$  por los dos sistemas que se han analizado, el primero de los cuales se corresponde con las figs. 5.53 y 5.54, y el segundo (fig. 5.55(b)) con la fibra de la fig. 4.23(b) (pg. 92). Los resultados obtenidos en los cálculos de tamaño, realizados de acuerdo a la ec. 5.4, se exponen en la tabla 5.3. Como se aprecia para la fibra de radio  $r \simeq 2,8 \mu\text{m}$ , los resultados son consecuentes con lo calculado en la imagen del microscopio óptico ( $\phi \simeq 5 \mu\text{m}$ ).

	$r \simeq 3,6 \mu\text{m}$			$r \simeq 2,8 \mu\text{m}$		
$\theta_{min}$	$-85,2^0$	$-80,5^0$	$-75,5^0$	$-84^0$	$-77,5^0$	$-71,5^0$
$m$	0	1	2	0	1	2
$\phi/2(\mu\text{m})$	3,49	3,68	3,66	2,79	2,78	2,86

Tabla 5.3: Tamaños de las fibras depositadas sobre sustrato (Au-Au).

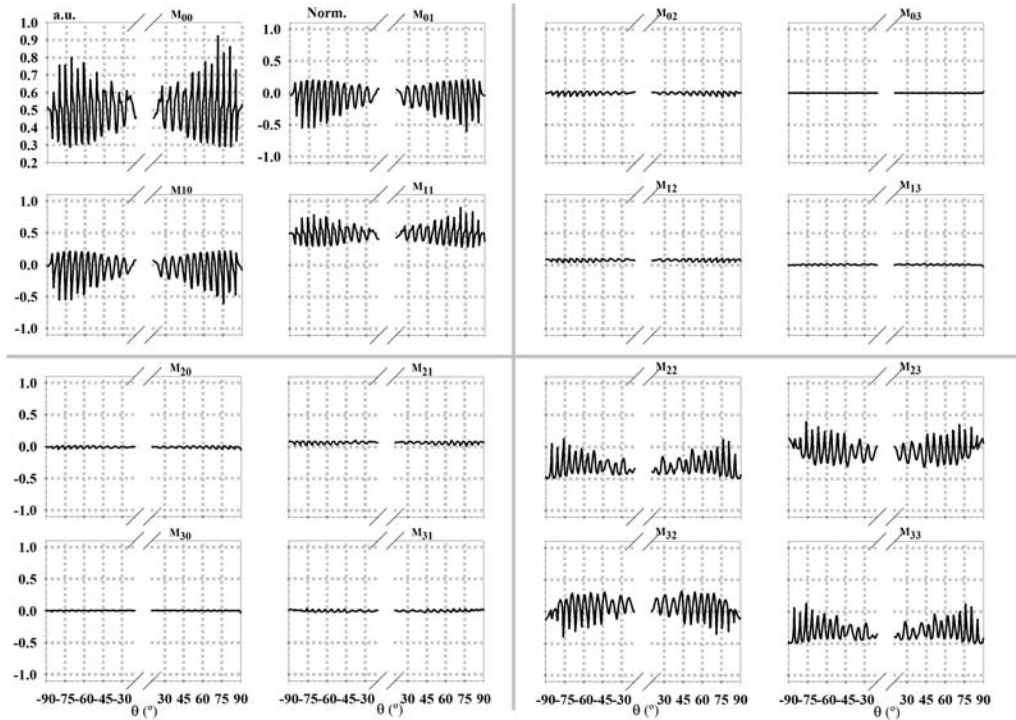


Figura 5.53: Difusión por una fibra (Au,  $r \simeq 3,7 \mu\text{m}$ ) sobre sustrato (Au): Evolución de los elementos de la matriz de Mueller en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

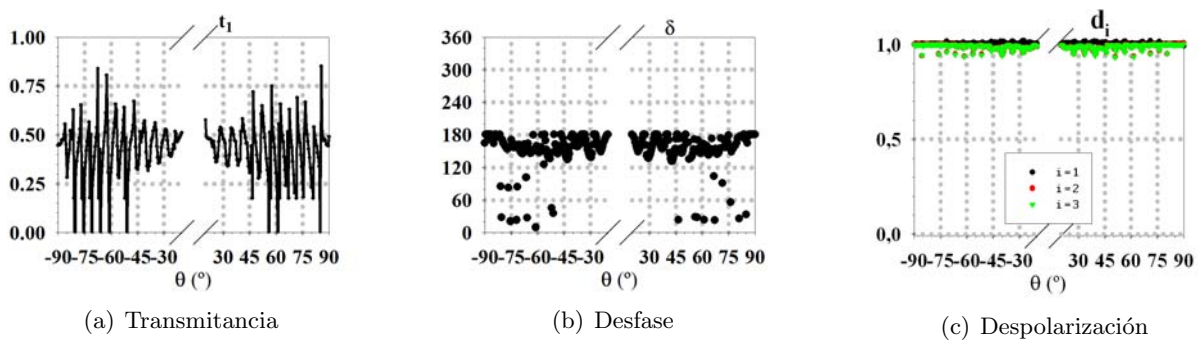


Figura 5.54: Difusión por una fibra (Au,  $r \simeq 3,7 \mu\text{m}$ ) sobre sustrato (Au): Evolución de los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

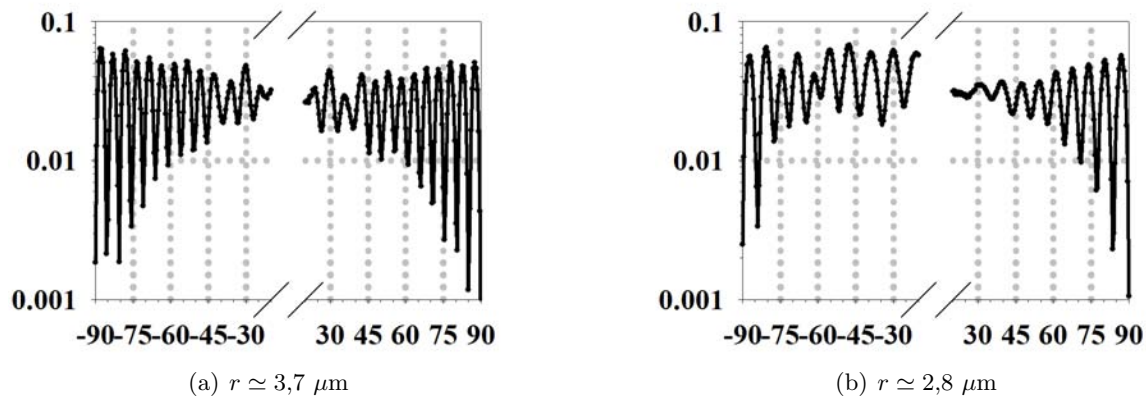


Figura 5.55: Intensidad difundida ( $I_S$ ) por dos fibras (Au) sobre sustrato (Au) en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

## 5.7. Sustancias Quirales y Medios Densos

La simulación del comportamiento de los tejidos biológicos para la obtención de datos “*in vivo*”, está siendo el objeto de diversos análisis polarimétricos recientes de grupos de investigación en biología y medicina [35, 134]. El carácter quiral y de “medio denso” (es decir, dispersor y selectivamente absorbente) de los tejidos puede ser simulado mediante disoluciones de sales o azúcares en sustancias que contienen partículas en suspensión. La fase en suspensión otorgaría el carácter denso y la fase en disolución la actividad óptica. En este apartado pretendemos mostrar cómo el PD es capaz de establecer una relación entre el comportamiento de estos medios ( $\alpha$ -glucosa en agua, con y sin partículas en suspensión) y el parámetro  $\rho$  del PD.

En la fig. 5.56 se exponen los resultados obtenidos para los parámetros PD extraídos de la medida de la matriz de Mueller de un medio turbio (partículas de Látex con  $r = 3,3 \mu\text{m}$  en suspensión acuosa). En la fotografía 4.22 (pg. 92) se muestra el aspecto visual de la muestra al incidir en ella con el haz láser y observar la difusión sobre una cartulina blanca. Como ocurrió anteriormente para nanopartículas en suspensión y partículas depositadas, el giro óptico es nulo, con independencia del ángulo de incidencia y de difusión. Las trazas de despolarización son evidentes y fundamentalmente debidas al scattering múltiple. Sin embargo, si se observa la fig. 5.57, obtenida al añadir  $\alpha$ -glucosa a la anterior hasta completar una concentración  $1 M$ , se aprecian prácticamente los mismos resultados en todos los parámetros, a excepción del giro óptico, que manifiesta un valor relativamente constante ( $\rho \sim 0,4^0$ , con una ligera dispersión).

En la fig. 5.58 se muestra la variación del giro óptico (parámetro  $\rho$  del PD) al medir y analizar la matriz de Mueller en la dirección  $\theta_{sca} = 0^0$  (*forward scattering*) para varias concentraciones de  $\alpha$ -glucosa en solución acuosa, junto con la medida realizada para la anterior suspensión de partículas en idéntica configuración. Los resultados son claros, pues la variación de  $\rho$  con la concentración es lineal, y se mantiene el valor incluso al añadir partículas difusoras al medio. Una vez más la aplicación del PD permite, no sólo separar las componentes de despolarización en la medida, sino también observar, directamente la quiralidad del medio puro.

## 5.8. Metrología y Caracterización de Componentes Ópticos

Las características polarimétricas de los componentes ópticos de propósito general son de gran importancia, y su defectuosa caracterización es un problema frecuente (algo que en este trabajo hemos padecido, como se vió en el capítulo 4). La posibilidad de obtener con precisión el perfil transversal de las propiedades polarimétricas de elementos básicos, como son los compensadores y polarizadores, y el uso de algoritmos para optimizar el rendimiento de los mismos, es una de las aplicaciones directas de los polarímetros [157]. En este apartado pretendemos mostrar cómo la potencia del método PD facilita la caracterización espacial precisa de estos elementos ópticos [161]. En concreto, he aplicado el PD a medidas realizadas sobre dos típicos componentes polarimétricos: Un polarizador dicroico y una lámina retardadora ( $\frac{\lambda}{4}$ ) de orden cero a 633 nm. Las medidas se hicieron en distintos puntos a lo largo de la superficie de ambos elementos, con objeto de mostrar la capacidad de este método para elaborar “mapas” transversales con los valores más representativos de cada elemento.

Este tipo de estudios está cobrando importancia en sistemas de formación de imágenes [24, 156], en los que la variación de las características de los elementos punto a punto (pixel a pixel) es determinante para su buen funcionamiento. Es el caso de cristales líquidos, actuadores o, por ejemplo, láminas poliméricas transparentes (*films*), que se han convertido en el objetivo de recientes estudios [45].



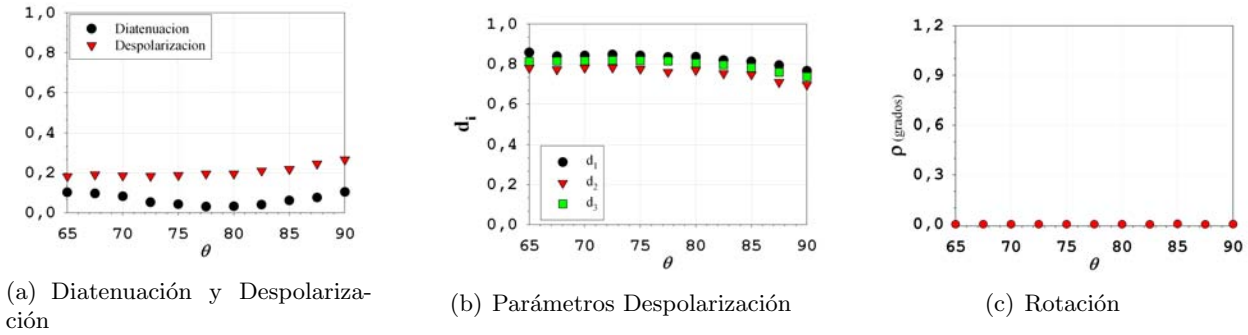


Figura 5.56: Parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ) para una muestra turbia de partículas de Latex en suspensión acuosa ( $r = 3,3 \mu\text{m}$ ).

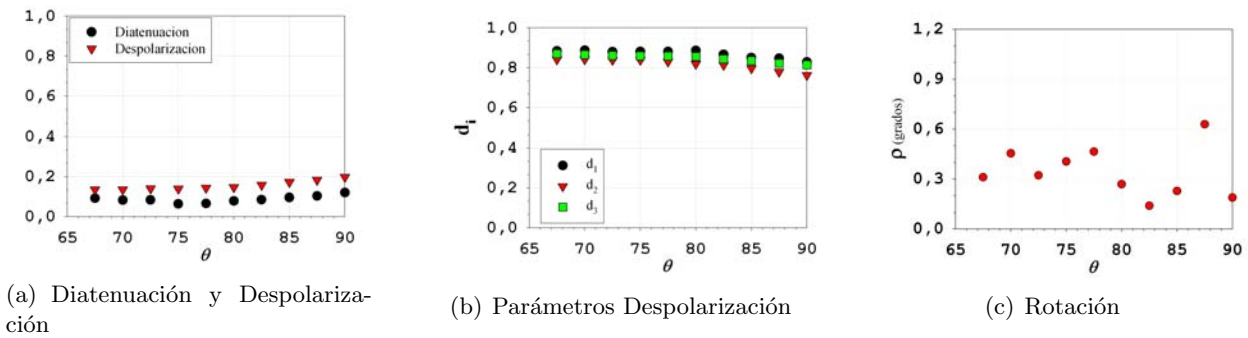


Figura 5.57: Parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ) para una muestra turbia de partículas de Latex en suspensión acuosa (concentración de  $\alpha$ -glucosa  $1 M$ ,  $r = 3,3 \mu\text{m}$ ).

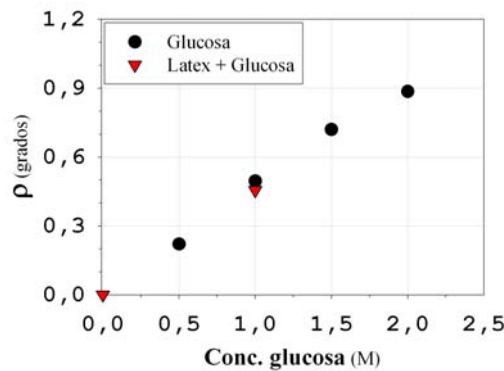


Figura 5.58: Variación de la rotación introducida en la luz transmitida por una solución de  $\alpha$ -glucosa en función de la concentración (se incluye la medida realizada para la suspensión de partículas de Latex,  $r = 3,3 \mu\text{m}$ ).

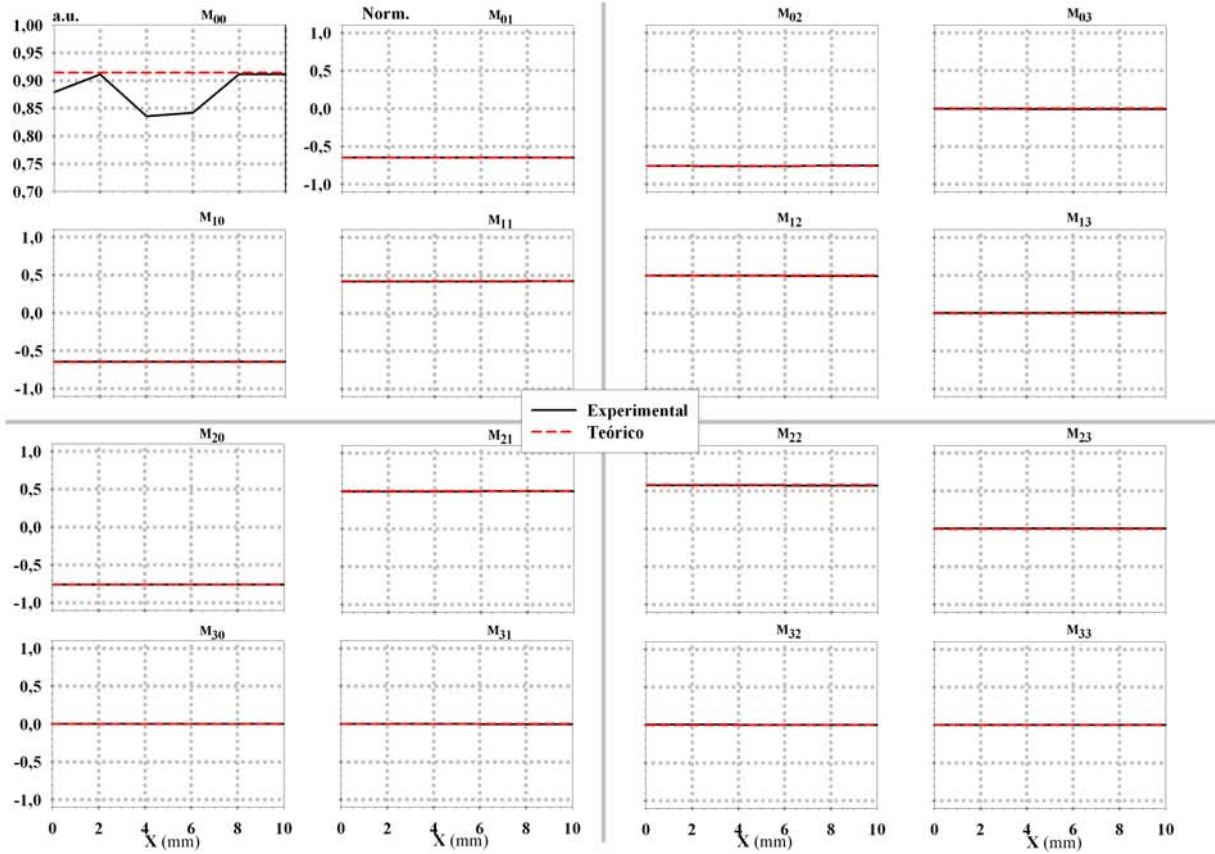


Figura 5.59: Perfil de la matriz de Mueller de un Polarizador a lo largo de 10 mm.

### 5.8.1. Medidas sobre un Polarizador

En la fig. 5.59 se muestra el comportamiento de los elementos de la matriz de Mueller para la luz transmitida por un polarizador dicroico a lo largo de 10 mm, y su comparación con un polarizador teórico (para un ángulo  $\alpha = 24,77^0$  respecto del origen de acimuts del DRCP). Se aprecian variaciones en la transmitancia total ( $m_{00}$ ) y, en general, muy buen comportamiento en el resto de los elementos (normalizados a  $m_{00}$ ). El análisis mediante el PD del polarizador indica claramente que actúa como un diatenuador (es decir,  $M_{\Delta} \simeq M_R \simeq I_{4x4}$ ), con un grado de extinción del orden de  $10^{-3}$  (muestro el comportamiento de las magnitudes características de  $M_D$ :  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $t_1$ , en la fig. 5.60). Las variaciones en la transmitancia ( $t_1$ ) de uno de los estados propios son inferiores al 1‰, pero del mismo orden que su valor. El acimut ( $\alpha$ ) representa la orientación del polarizador respecto al sistema DRCP y presenta variaciones de apenas unos minutos de arco. La elipticidad ( $\beta$ ) no es nula, y también presenta variaciones, dando cuenta de la sensibilidad del método aplicado al análisis de componentes. Es importante destacar que, ni  $t_1$  ni  $\beta$  son 0. Es decir, el elemento dicroico no sólo no extingue totalmente la componente absorbida, sino que la luz emergente presenta un pequeño grado de elipticidad.

### 5.8.2. Medidas sobre un Retardador

En la fig. 5.61 se muestra la variación de los parámetros de la matriz de Mueller experimental de un retardador tipo  $\frac{\lambda}{4}$  a lo largo de 6 mm y normalizados a  $m_{00}$ , junto con el supuesto teórico correspondiente a una lámina  $\frac{\lambda}{4}$ , girada un ángulo  $\varphi = 30,89^0$  respecto al origen de acimuts del sistema de medida. El parámetro  $m_{00}$  (la transmitancia total del sistema) presenta una variación aproximadamente lineal, pero el grueso de la desviación con respecto a un retardador ideal permanece oculto en los demás elementos que prácticamente no muestran variación a esta escala.

La fig. 5.62(a) muestra la variación de los parámetros de diatenuación resultantes de la aplicación

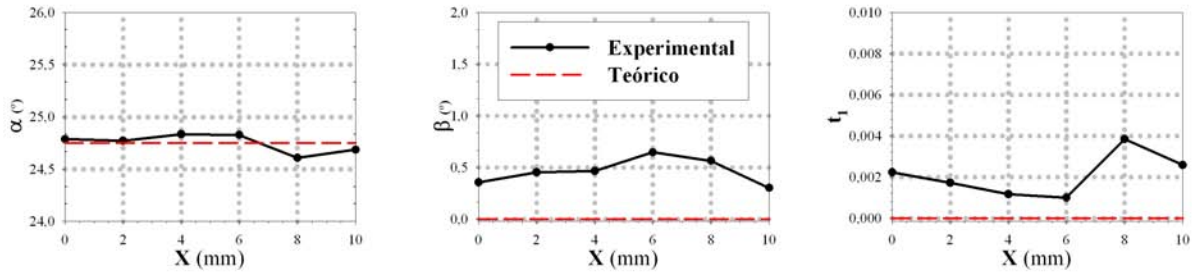


Figura 5.60: Evolución transversal (a lo largo de 10 mm) de los parámetros resultantes de la aplicación del PD a un Polarizador Lineal. De izquierda a derecha: El azimut  $\alpha$ , la elipticidad  $\beta$  y la transmitancia de un estado propio  $t_1$ .

del PD. A pesar de los saltos que presentan  $\alpha$  y  $\beta$ , estos parámetros no son demasiado representativos de este sistema en particular, pues se puede apreciar como  $t_1 \sim 0,5$ , con lo cual la matriz de diatenuación es prácticamente la matriz identidad, con un error inferior al 1%. Aún así, la pequeña desviación existente en  $t_1$  también es interesante desde el punto de vista del análisis de componentes, ya que ambos estados propios no presentan la misma transmitancia, sino que uno de ellos transmite casi un 2% más que el otro.

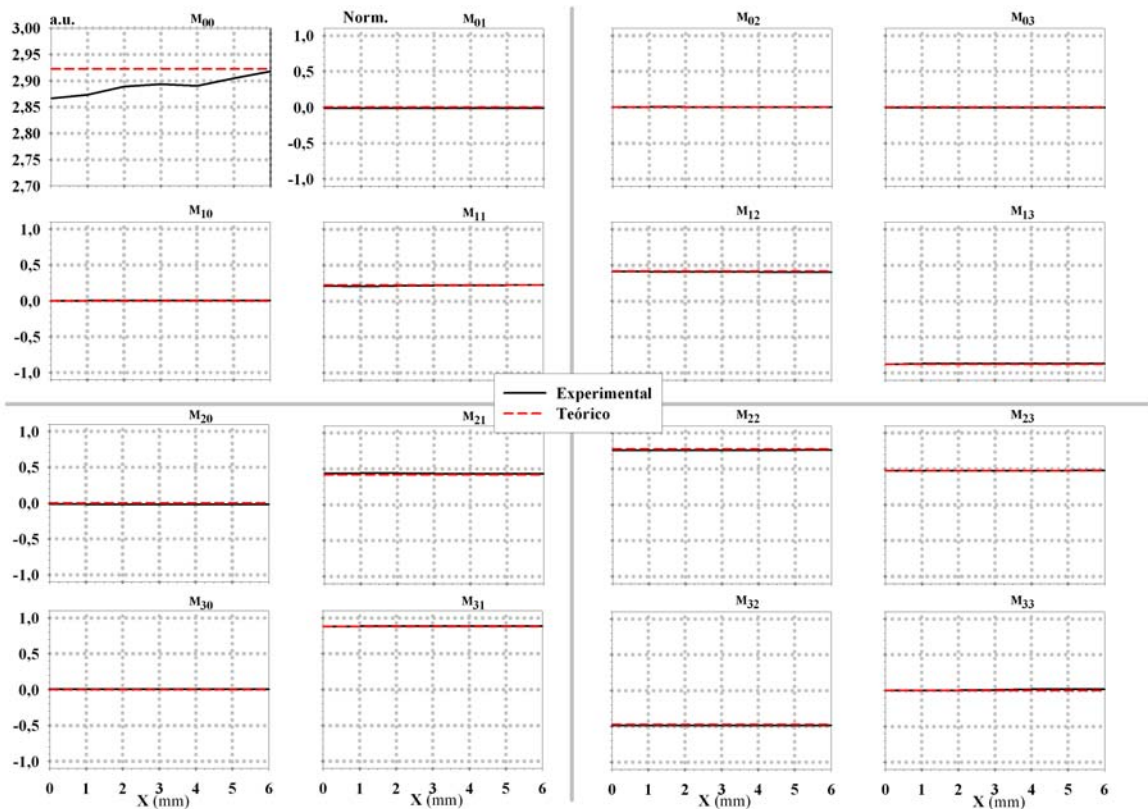


Figura 5.61: Perfil de la matriz de Mueller de una Lámina  $\frac{\lambda}{4}$  a lo largo de 6 mm.

Los parámetros de la matriz de retardo ( $M_R$ ), fig. 5.62(b), contienen la información relativa al desfase entre estados propios de la lámina, y a su actividad óptica. Es interesante observar cómo los valores del acimut de los estados propios (orientación de las líneas neutras) y la rotación,  $\varphi$  y  $\rho$  respectivamente, se mantienen constantes, mientras que el desfase ( $\delta$ ) presenta una variación sustancial (más de  $1^\circ$ ) en torno al valor ideal de  $90^\circ$ . El hecho de que tanto el azimut como el giro se mantengan constantes indica que la orientación de los ejes de transmisión de los estados propios de la lámina

(líneas neutras) no varía a lo largo de su perfil. La variación casi-lineal de  $\delta$  con el punto de medida es la principal característica a tener en cuenta al analizar este componente, ya que la fase introducida por la Lámina es su característica principal, y de su control depende la calidad de la misma.

Los parámetros de la matriz de despolarización ( $M_{\Delta}$ ) se muestran en la fig. 5.62(c), y presentan desviaciones en torno al 2% con respecto a la matriz identidad. Esto indica la aparición de pequeños efectos de despolarización, que no deben ser despreciados, pues superan el margen de error del aparato y del algoritmo de cálculo del PD. Esta despolarización, al igual que la aparición de rotación óptica y de una ligera diatenuación, puede estar ligada a la estructura de capas en la que es construida la lámina, con vidrios de protección fijados a ambos lados del material birrefringente con adhesivos, como ya apunta la referencia [3].

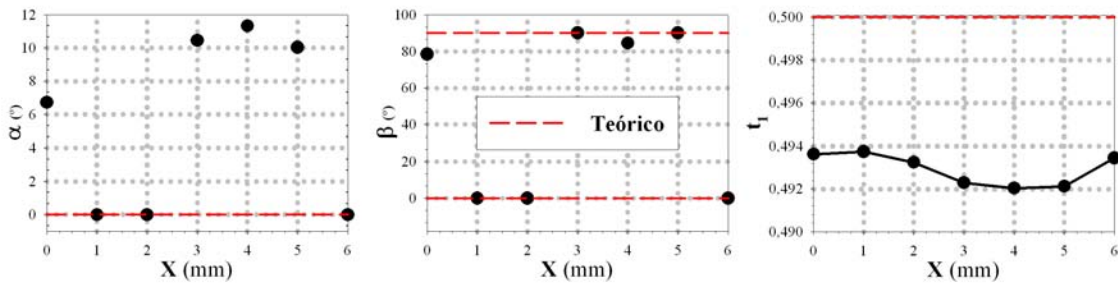
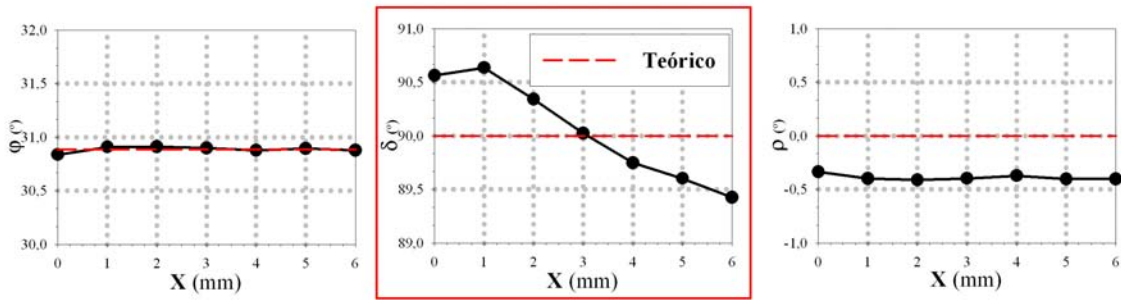
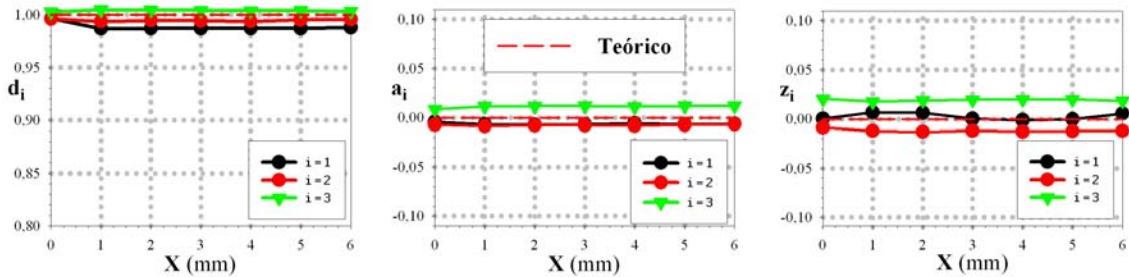
(a) De izquierda a derecha:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $t_1$ .(b) De izquierda a derecha:  $\varphi$ ,  $\delta$  y  $\rho$ .(c) De izquierda a derecha:  $d_i$ ,  $a_i$  y  $z_i$ .

Figura 5.62: Evolución transversal (a lo largo de 6 mm) de los parámetros resultantes de la aplicación del PD a una Lámina  $\frac{\lambda}{4}$ . Parámetros de: (a) Diatenuación, (b) Retardo y (c) Despolarización.

Finalmente, en la fig. 5.63 se muestra un mapa transversal completo de los principales parámetros PD ( $t_1$ ,  $\delta$  y  $\rho$ ) correspondiente a la misma lámina  $\frac{\lambda}{4}$  junto con el mapa correspondiente a la matriz de Mueller. Esta medida es independiente de la anterior y, por tanto, la orientación de los ejes propios (líneas neutras) de la lámina y la zona de la lámina donde se realiza la medida han cambiado. Incluyo este resultado como un buen ejemplo de la capacidad de nuestro análisis polarimétrico para visualizar el comportamiento de un elemento óptico. La lámina utilizada en estos análisis fue la denominada Lámina 2 del apartado 4, deshechada del montaje experimental en su momento por su comportamiento defectuoso.



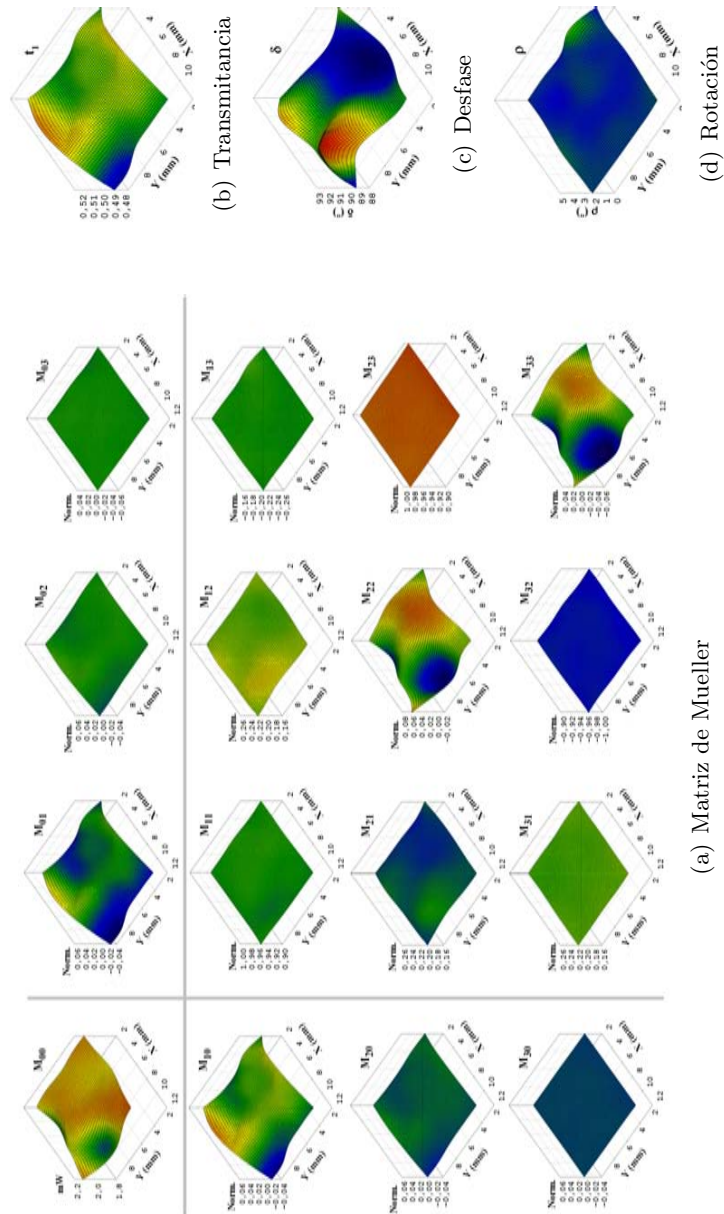


Figura 5.63: Evolución transversal (superficie de  $8 \times 10$  mm) de la matriz de Mueller y los parámetros PD principales de una Lámina  $\frac{\lambda}{4}$ .





## Capítulo 6

# Conclusiones y Trabajo Futuro

### 6.1. Tareas Realizadas

A lo largo de esta Tesis se han desarrollado una serie de tareas destinadas a probar la eficiencia de la combinación *Medida DRCP+ Análisis PD* para el análisis de sistemas difusores de luz. Entre estas tareas cabe destacar:

1. El desarrollo de una instalación experimental y puesta a punto del software para la medida precisa de la matriz de Mueller mediante un método dinámico de rotación de retardadores (DRCP). Esta instalación, cuya puesta en marcha incluyó un buen número de test y comprobaciones, permite el control del ángulo de incidencia y observación de forma independiente, lo que posibilita obtener matrices de Mueller por transmisión, reflexión o difusión.
2. La preparación y elaboración de muestras experimentales y, para el caso de las litografías sobre Silicio, el diseño de las máscaras (patrones) utilizadas en su construcción.
3. La implementación del método de Descomposición Polar (PD), y su aplicación sobre un gran número de resultados teóricos y experimentales.
4. El análisis de resultados para muestras uniformes y estructuradas, por reflexión, transmisión o difusión.

### 6.2. Conclusiones

En la exposición de estos trabajos se han incluido un buen número de comentarios y conclusiones que resulta oportuno exponer aquí de una forma breve y concisa, haciendo hincapié sobre las ideas básicas.

#### General

1. Aunque mediante la medida de la intensidad difundida y la aplicación de análisis estadísticos se puede obtener información de los sistemas difusores, parece claro que un análisis polarimétrico completo es la herramienta fundamental en la resolución del problema inverso de la difusión de luz, junto con el análisis espectral. En concreto, la información contenida en la matriz de Mueller de un sistema aporta todos los datos necesarios para el análisis de la difusión, para una longitud de onda e incidencia dadas.
2. Los dispositivos polarimétricos son, en sí mismos, una fuente de error en la medida de la matriz de Mueller de los sistemas debido, por una parte a que su caracterización no está bien definida transversalmente, pero sobre todo a que la integración espacio-temporal que realiza el sistema de detección implica una suma incoherente de estados. Estos factores aumentan la despolarización medida experimentalmente ya que los mecanismos de despolarización están asociados a procesos de difusión incoherente.

### 3. El método de Descomposición Polar directa (*forward PD*) de la matriz de Mueller:

Reduce a un número de parámetros mínimo (igual al número de grados de libertad) la descripción del sistema.

Dichos parámetros son más fácilmente interpretables físicamente, mejorando la comprensión de los resultados.

Extrae la despolarización, dejando la parte pura de la matriz apta para su análisis.

Los parámetros asociados a la matriz pura se relacionan directamente con los observables clásicos polarimétricos.

Puede describir los procesos incoherentes (integración temporal o espacial) asociados a la aparición de despolarización.

Resulta de mayor interés cuanto mayor es la complejidad del sistema, y cuanto mayor es la contribución de los procesos incoherentes al total de la intensidad difundida, ya que ayuda a la comprensión del problema.

## Instalación Experimental

1. Aunque es obvio, se ha comprobado cómo la elección adecuada y la caracterización de los componentes internos de los polarímetros redundan en una mejora del funcionamiento de los mismos.
2. Una vez comparados ambos polarímetros (polarímetro de Stokes, o SP, y DRCP), los errores del modelo clásico de polarímetro, el SP, superan claramente a los del DRCP, de análisis mucho más complejo, pero también más preciso.

## Las Medidas y la Aplicación del PD

1. El PD nos ha facilitado el estudio de la calidad de fabricación de las obleas fotolitografiadas. En especial, hemos podido comprobar la asimetría característica del proceso de ablación de las obleas.
2. La matriz de retardo del PD ( $M_R$ ) contiene un parámetro, el desfase  $\delta$ , cuya evolución angular permite discriminar entre defectos estructurales (*ribs* o *grooves*) en la superficie de la oblea, mediante una magnitud definida a tal efecto,  $\Upsilon_{R-G}$  (ec. 5.3, pg. 133). Al mismo tiempo, las *funciones de fase*, ligadas a la lobulación de la intensidad difundida por el sistema y utilizadas para calcular tamaños de partículas sobre sustrato, están asociadas al comportamiento de este parámetro ( $\delta$ ).
3. La matriz de despolarización ( $M_\Delta$ ) permite diferenciar distintos sustratos en base al comportamiento de los parámetros de despolarización.
4. En el caso de una suspensión coloidal de nanopartículas de Oro, el análisis PD ha permitido relacionar el comportamiento del parámetro  $\delta$  en las proximidades de  $\theta_{sca} = 90^\circ$ . Esto indica el potencial del método para realizar nanosizing, aún con los bajos niveles de luz difundida por este tipo de partículas.
5. En el caso de partículas regulares, como fibras o esferas, depositadas sobre sustrato, el análisis PD permite una rápida estimación del tamaño.
6. Para el caso de una sustancia quiral (entendida como una suspensión de partículas o una solución acuosa, ambas con actividad óptica) que embebe un medio denso, el análisis PD puede detectar su presencia y concentración a partir del parámetro de giro óptico ajustado ( $\rho$ ). De forma simultánea puede analizar el medio denso a partir de la despolarización. Este tipo de análisis puede servir para caracterizar *in-vivo* tejidos biológicos en aplicaciones médicas, como de hecho se propone en algún estudio reciente [35, 134].

7. El método PD también permite realizar metrología óptica (como el perfil de extinción de un polarizador o el mapa de fase introducida por una lámina de retardo de un cierto diámetro) a partir de la medida y el procesado vía PD de la matriz de Mueller punto a punto del elemento en cuestión del perfil de distintos componentes polarimétricos.

### La Simulación Teórica y la Aplicación del PD

1. Puesto que para muchos sistemas la matriz de Mueller puede obtenerse por métodos numéricos, el PD puede aplicarse sobre ellos igualmente, lo que permite, por una parte, anticipar la utilidad potencial del método sobre matrices de Mueller similares obtenidas experimentalmente, y por otra, realizar simulaciones sistemáticas que ayuden a comprender el comportamiento de esos sistemas (por ejemplo, a comprender el origen de la despolarización para un sistema dado).
2. Se puede estudiar el tamaño de nanopartículas metálicas en base a los cambios en el desfase,  $\delta$ , para la luz difundida a  $90^\circ$  debidos a la posición de las resonancias. Esto constituye una nueva técnica para la caracterización del tamaño de nanopartículas (*nanosizing*) que podría mejorar resultados y aplicarse a partículas realmente pequeñas, para las cuales el grado de polarización lineal ( $P_L$ ) apenas varía, ya que el parámetro estudiado  $\Delta\delta$  mantiene el rango de oscilación con independencia del tamaño de la nanopartícula.
3. El PD puede ayudar a conocer las constantes ópticas de las nanopartículas a partir del desfase de la matriz de retardo, mediante la elaboración de gráficos de magnitudes derivadas de  $\delta$  en función del tamaño  $r$  para cada material (fig. 5.47, pg. 138).

### 6.3. Perspectiva de Futuro

De la metodología expuesta en los puntos precedentes y de la aplicación del PD al estudio de sistemas difusores, se desprende que existen una serie de perspectivas de investigación futuras, relacionadas principalmente con el PD y la mejora del dispositivo experimental. Paso a comentar brevemente las principales:

- Este estudio se ha restringido a la aplicación directa del PD. Como se comentó en la sección 3.1, existen otras formas de aplicación del PD, realizando una descomposición bien en serie o en paralelo, que pueden ser útiles según qué tipo de sistema se analice, con objeto de sacar el máximo partido a cada forma de PD, y obtener la máxima información acerca del sistema difusor tratado. Así pues, una línea de trabajo futura, ya iniciada por algunos grupos de investigación [137, 138, 141], consistiría en estudiar los diversos métodos generales, y asociar la aplicación óptima con la que cada uno de ellos se correspondería.
- Una segunda línea de trabajo se desprende directamente de la mejora del dispositivo polarimétrico. En la actualidad existen diversas fuentes de alta potencia (por ejemplo, láser continuo o lámparas de Xe) y nuevos dispositivos de compensación (como compensadores de cristal líquido o electro-ópticos), que mejorarían sensiblemente la velocidad de adquisición de datos y permitirían un análisis espectropolarimétrico. Es decir, el polarímetro no sólo tendría un canal de medida en  $\lambda = 633$  nm, sino que tendría múltiples canales de medida (tantos como longitudes de onda fuéramos capaces de discretizar mediante la fuente de iluminación) que deberían ser previamente calibrados, pero que permitirían ampliar las aplicaciones y resolución del dispositivo. En estos casos habría que tener en cuenta el error introducido por los compensadores, que sería función del canal utilizado.
- Enlazando con lo anterior, la tercera línea tiene que ver con el análisis espectropolarimétrico de nanopartículas. Dicha aplicación ha quedado prácticamente resuelta a falta de realizar una serie de medidas experimentales, en este caso para varias longitudes de onda, que permitan corroborar la aplicabilidad de la técnica.

- Existe un campo de aplicación idóneo y que, según los indicios, se va a desarrollar con intensidad durante los próximos años: El estudio de materiales estructurados que persiguen un comportamiento tipo “zurdo” (LHM). Estos materiales consiguen sus especiales constantes efectivas a base de generar estructuras complejas a nivel micro o submicrométrico. Esto les permite respuestas de índice de refracción negativo en pequeños dominios del espectro pero, al mismo tiempo, les da un carácter anisótropo en muchas ocasiones, y los hace fuertemente difusores, cuando no absorbentes. En este contexto el PD puede constituir una herramienta muy útil ya que, por una parte el carácter tensorial de las constantes ópticas hace que su comportamiento respecto de la polarización sea complejo (parte pura del PD), mientras que su carácter difusor debe ser un aspecto a reducir (parte despolarizante del PD).

Un camino a seguir es enlazar el PD a métodos de cálculo que admitan bianisotropía, como el MDDA actualmente en funcionamiento en el Grupo de Óptica de la UC. Estos cálculos permiten obtener matrices de Mueller de sistemas complicados, como corresponde a materiales con respuesta eléctrica y magnética anisótropa, frente a los cuales el PD puede ser un gran aliado.

- Un paso más en la mejora del dispositivo polarimétrico, sería el paso del análisis monopixel, a multipixel [45, 173]. Es decir, la utilización de un haz colimado y de compensadores de cristal líquido, y la detección mediante un dispositivo CCD (o semejante) permitiría, de nuevo, ampliar el número de canales de medida, a un máximo igual al número de píxeles del CCD de detección. No obstante, esta mejora tiene algunas contraprestaciones importantes, como la variación en la sensibilidad de cada pixel con la longitud de onda o la intensidad recibida, o la variación del retardo introducida por el compensador en cada punto de su superficie (perfilometría), que habría que tener en cuenta.
- Finalmente, el estudio de las causas de la despolarización en sistemas estáticos o dinámicos sigue siendo un aspecto poco tratado en la bibliografía. Como se ha comentado en la sección 3.2.3, la suma incoherente de estados es la causa de la aparición de trazas de despolarización. Evaluar en qué medida contribuyen a ello la capacidad del sistema para producir difusión múltiple, la simetría y composición del sistema, la resolución espacio-temporal de las ventanas de iluminación y detección del dispositivo experimental o la propia ventana espectral del experimento, es una de las líneas de trabajo más prometedoras y un camino para mejorar los montajes polarimétricos y las condiciones de medida.

Hay, como se puede ver, un largo camino futuro. Este camino, puede representar un pequeño avance en la polarimetría y caracterización de sistemas, pero seguro que merece la pena recorrerlo.



## Apéndice A

### Cálculo de Fourier

El vector de Stokes que emerge de la muestra, de acuerdo a las ecuaciones expuestas en el apartado 4.2 (página 69) es:

$$\mathbf{s}^{PSGM} = \begin{pmatrix} s_0^{PSGM} \\ s_1^{PSGM} \\ s_2^{PSGM} \\ s_3^{PSGM} \end{pmatrix} = M(m_{ij})L_1(k_1, \beta_1, \delta_1)P_1(\alpha_1)\mathbf{s}_{in}$$

y queda desglosado en componentes como sigue:

$$\left\{ \begin{array}{l} s_0^{PSGM} = m_{01} \left( \cos(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 - rc_1 \cos(4\omega t) + a_1 \cos(4\omega t)) + b_1 \cos(2\omega t) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + \frac{1}{2} \sin(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{02} \left( \sin(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 + rc_1 \cos(4\omega t) - a_1 \cos(4\omega t)) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + b_1 \sin(2\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{03} (rs_1 \cos(2\alpha_1) \sin(2\omega t) - \dots \\ \quad \dots - rs_1 \sin(2\alpha_1) \cos(2\omega t)) + m_{00} (a_1 + b_1 \cos(2\alpha_1) \cos(2\omega t) + b_1 \sin(2\alpha_1) \sin(2\omega t)) \\ \\ s_1^{PSGM} = m_{11} \left( \cos(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 - rc_1 \cos(4\omega t) + a_1 \cos(4\omega t)) + b_1 \cos(2\omega t) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + \frac{1}{2} \sin(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{12} \left( \sin(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 + rc_1 \cos(4\omega t) - a_1 \cos(4\omega t)) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + b_1 \sin(2\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{13} (rs_1 \cos(2\alpha_1) \sin(2\omega t) - \dots \\ \quad \dots - rs_1 \sin(2\alpha_1) \cos(2\omega t)) + m_{10} (a_1 + b_1 \cos(2\alpha_1) \cos(2\omega t) + b_1 \sin(2\alpha_1) \sin(2\omega t)) \\ \\ s_2^{PSGM} = m_{21} \left( \cos(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 - rc_1 \cos(4\omega t) + a_1 \cos(4\omega t)) + b_1 \cos(2\omega t) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + \frac{1}{2} \sin(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{22} \left( \sin(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 + rc_1 \cos(4\omega t) - a_1 \cos(4\omega t)) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + b_1 \sin(2\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{23} (rs_1 \cos(2\alpha_1) \sin(2\omega t) - \dots \\ \quad \dots - rs_1 \sin(2\alpha_1) \cos(2\omega t)) + m_{20} (a_1 + b_1 \cos(2\alpha_1) \cos(2\omega t) + b_1 \sin(2\alpha_1) \sin(2\omega t)) \\ \\ s_3^{PSGM} = m_{31} \left( \cos(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 - rc_1 \cos(4\omega t) + a_1 \cos(4\omega t)) + b_1 \cos(2\omega t) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + \frac{1}{2} \sin(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{32} \left( \sin(2\alpha_1) \frac{1}{2} (a_1 + rc_1 + rc_1 \cos(4\omega t) - a_1 \cos(4\omega t)) + \dots \right. \\ \quad \left. \dots + b_1 \sin(2\omega t) + \frac{1}{2} \cos(2\alpha_1) \sin(4\omega t) (a_1 - rc_1) \right) + m_{33} (rs_1 \cos(2\alpha_1) \sin(2\omega t) - \dots \\ \quad \dots - rs_1 \sin(2\alpha_1) \cos(2\omega t)) + m_{30} (a_1 + b_1 \cos(2\alpha_1) \cos(2\omega t) + b_1 \sin(2\alpha_1) \sin(2\omega t)) \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Por otro lado, la matriz de Mueller del PSA (ec. 4.14) es:

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^1 \\ \mathbf{A}^2 \\ \mathbf{A}^3 \\ \mathbf{A}^4 \end{pmatrix} = L_2(k_2, \beta_2, \delta_2) P_2(\alpha_2)$$

donde los elementos  $\mathbf{A}^i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) son vectores fila de cuatro elementos. El producto  $A \cdot s_0^{PSGM}$  da lugar al vector de Stokes del haz emergente que llega al detector.

La intensidad es el observable que se puede medir de forma directa en el laboratorio y, para el cálculo de la misma, sólo son necesarios los elementos de la primera fila ( $\mathbf{A}^1$ ) de la matriz del PSA:

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{00} = a_2 + b_2 \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 2R\omega t) \\ a_{01} = \frac{1}{2}(a_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 4R\omega t)) - \frac{1}{2}(rc_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 4R\omega t)) + \dots \\ \dots + b_2 \cos(2\varphi_2 + 2R\omega t) + \frac{1}{2}(a_2 \cos(2\alpha_2)) + \frac{1}{2}(rc_2 \cos(2\alpha_2)) \\ a_{02} = \frac{1}{2}(rc_2 \sin(2\alpha_2)) - \frac{1}{2}(a_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 4R\omega t)) + \dots \\ \dots + \frac{1}{2}(rc_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 4R\omega t)) + b_2 \sin(2\varphi_2 + 2R\omega t) + \frac{1}{2}(a_2 \sin(2\alpha_2)) \\ a_{03} = rs_2 \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 2R\omega t) \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

De este modo, la intensidad luminosa que observa el detector se puede expresar como:

$$I = \mathbf{A}^1 \mathbf{s}^{PSGM} = \frac{1}{16} \frac{1}{8} (\Upsilon_1 + \Upsilon_2 + \Upsilon_3) \quad (\text{A.3})$$

donde el factor  $\frac{1}{16}$  procede de la definición de los distintos elementos polarizadores del PSG y del PSA, y el factor  $\frac{1}{8}$  es una simplificación para evitar el uso de denominadores en los distintos términos del desarrollo. Los parámetros  $\Upsilon_1$ ,  $\Upsilon_2$  y  $\Upsilon_3$  vienen dados por las expresiones A.4, A.5 y A.6, que se presentan a continuación:

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_1 = & 8a_1a_2m_{00} + m_{12}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + m_{12}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) - \dots \\
 & \dots - m_{21}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + m_{21}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + 4a_2m_{02}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - 8a_2m_{03}rs_1 \sin(2\alpha_1 - 2\omega t) - 2b_1m_{12}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 2\omega t) + 2b_1m_{12}rc_2 \sin(2\alpha_2 + 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1m_{21}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 2\omega t) + 2b_1m_{21}rc_2 \sin(2\alpha_2 + 2\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_1b_2m_{02} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) - 2a_1m_{32}rs_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_2m_{01}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) - 2a_1m_{31}rs_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{02}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) + 2m_{32}rc_1rs_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) + \dots \\
 & \dots + 2m_{31}rc_1rs_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t) + 2a_1b_2m_{11} \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1b_2m_{22} \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) - 2a_1b_2m_{12} \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1b_2m_{21} \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) - 2b_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) + a_1a_2m_{11} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1a_2m_{11} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + a_1a_2m_{11} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1a_2m_{11} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + a_1a_2m_{22} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1a_2m_{22} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + a_1a_2m_{22} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1a_2m_{22} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + 2a_1b_2m_{01} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1b_2m_{01} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + 2a_1b_2m_{01} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2b_1m_{10} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) + 2a_2b_1m_{10} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{12}rc_1 \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) - 2b_2m_{21}rc_1 \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + \omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1b_2m_{00} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 3\omega t) + 4b_1b_2m_{00} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1a_2m_{12} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + a_1a_2m_{12} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1a_2m_{12} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - a_1a_2m_{12} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1a_2m_{21} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + a_1a_2m_{21} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1a_2m_{21} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - a_1a_2m_{21} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1b_2m_{02} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + 2a_1b_2m_{02} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_1b_2m_{02} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + 2a_2b_1m_{20} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_2b_1m_{20} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) - a_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_1 - \dots \\
 & \dots - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - a_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - a_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_1 + \dots \\
 & \dots + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - a_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - a_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - a_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + a_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - a_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + a_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + 2a_1m_{32}rs_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_1m_{32}rs_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + 2a_1m_{32}rs_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2m_{23}rs_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) - 2a_2m_{23}rs_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_1m_{10}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) - 2b_1m_{10}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{01}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + 2b_2m_{01}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_2m_{01}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + 2a_1b_2m_{01} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + \omega t)
 \end{aligned}
 \tag{A.4}$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_2 = & a_1 m_{12} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - a_1 m_{12} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1 m_{12} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + a_1 m_{12} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1 m_{21} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - a_1 m_{21} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{21} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + a_1 m_{21} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{12} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + a_2 m_{12} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{12} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + a_2 m_{12} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_2 m_{21} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + a_2 m_{21} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_2 m_{21} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + a_2 m_{21} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_1 m_{31} r s_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + 2a_1 m_{31} r s_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1 m_{31} r s_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - 2a_2 m_{13} r s_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_2 m_{13} r s_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) - 2b_1 m_{20} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1 m_{20} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + 2b_2 m_{02} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2 m_{02} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + 2b_2 m_{02} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_1 m_{30} r s_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 3\omega t) + 4b_1 m_{30} r s_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_2 m_{03} r s_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 3\omega t) - 4b_2 m_{03} r s_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + \dots \\
 & \dots + m_{11} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - m_{11} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{11} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + m_{11} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + \dots \\
 & \dots + m_{22} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) + m_{22} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{22} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - m_{22} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2m_{23} r c_2 r s_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) + 2m_{23} r c_2 r s_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2m_{32} r c_1 r s_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) - 2m_{32} r c_1 r s_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2m_{32} r c_1 r s_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - 4m_{33} r s_1 r s_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 3\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4m_{33} r s_1 r s_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) - m_{12} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{12} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) - m_{12} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{12} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + m_{21} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 6\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{21} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 10\omega t) + m_{21} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{21} r c_1 r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 14\omega t) + 2m_{13} r c_2 r s_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2 + 8\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2m_{13} r c_2 r s_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) - 2m_{31} r c_1 r s_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2m_{31} r c_1 r s_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - 2m_{31} r c_1 r s_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1 a_2 m_{11} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + a_1 a_2 m_{11} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1 a_2 m_{22} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + a_1 a_2 m_{22} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4a_1 a_2 m_{10} \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) + 2a_2 b_1 m_{10} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2 b_1 m_{10} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) + 8a_1 b_2 m_{00} \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1 b_2 m_{11} \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + 2a_1 b_2 m_{11} \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1 b_2 m_{11} \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + 2a_1 b_2 m_{22} \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_1 b_2 m_{22} \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) - 2a_1 b_2 m_{22} \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2 b_1 m_{11} \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) + 2a_2 b_1 m_{11} \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2 b_1 m_{22} \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) - 2a_2 b_1 m_{22} \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1 b_2 m_{10} \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 3\omega t) + 4b_1 b_2 m_{01} \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 3\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1 b_2 m_{10} \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + 4b_1 b_2 m_{01} \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4a_1 a_2 m_{01} \cos(2\alpha_1) + 4a_1 a_2 m_{10} \cos(2\alpha_2) - a_1 a_2 m_{12} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1 a_2 m_{12} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - a_1 a_2 m_{21} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1 a_2 m_{21} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - 4a_1 a_2 m_{20} \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - \dots
 \end{aligned}
 \tag{A.5}$$

$$\begin{aligned}
 & \dots - 2a_2b_1m_{20} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) + 2a_2b_1m_{20} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1b_2m_{12} \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + 2a_1b_2m_{12} \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_1b_2m_{12} \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - 2a_1b_2m_{21} \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_1b_2m_{21} \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) - 2a_1b_2m_{21} \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2b_1m_{12} \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) - 2a_2b_1m_{12} \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_2b_1m_{21} \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) - 2a_2b_1m_{21} \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + a_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + a_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - a_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - a_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4a_1m_{10}rc_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - 2a_2m_{23}rs_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2m_{23}rs_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) + 4b_1b_2m_{02} \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 3\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_1b_2m_{02} \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + 4b_1b_2m_{20} \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 3\omega t)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Upsilon_3 = & 2b_1m_{10}rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) - 4b_1b_2m_{20} \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1m_{10}rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) - 2b_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_1m_{11}rc_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) - 2b_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1m_{22}rc_2 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + 2b_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) - 2b_2m_{11}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - 2b_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{22}rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - 4b_1m_{32}rs_2 \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 3\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1m_{32}rs_2 \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + 4b_2m_{23}rs_1 \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 3\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_2m_{23}rs_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 7\omega t) + 4a_1a_2m_{02} \sin(2\alpha_1) + 4a_1a_2m_{20} \sin(2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + 4a_1m_{10}rc_2 \cos(2\alpha_2) + 4a_2m_{01}rc_1 \cos(2\alpha_1) + 8a_2b_1m_{01} \cos(2\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1m_{12}rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - a_1m_{12}rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - a_1m_{21}rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + a_1m_{21}rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2m_{12}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + a_2m_{12}rc_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_2m_{21}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - a_2m_{21}rc_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4a_1m_{20}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 10\omega t) - 2a_2m_{13}rs_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_2m_{13}rs_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) + 8a_1m_{30}rs_2 \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 5\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_1m_{20}rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) + 2b_1m_{20}rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2b_1m_{12}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) + 2b_1m_{12}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1m_{21}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 8\omega t) + 2b_1m_{21}rc_2 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2 - 12\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{12}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + 2b_2m_{12}rc_1 \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{12}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - 2b_2m_{21}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 5\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_2m_{21}rc_1 \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 5\omega t) + 2b_2m_{21}rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 9\omega t) - \dots \\
 & \dots - m_{11}rc_1rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - m_{11}rc_1rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + m_{22}rc_1rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - m_{22}rc_1rc_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1m_{31}rs_2 \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 3\omega t) + 4b_1m_{31}rs_2 \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2 - 7\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_2m_{13}rs_1 \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2 + 3\omega t) - 4b_2m_{13}rs_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2 - 7\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2m_{23}rc_2rs_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) + 2m_{23}rc_2rs_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + a_1a_2m_{11} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + a_1a_2m_{11} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_1a_2m_{22} \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - a_1a_2m_{22} \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + 4a_1m_{20}rc_2 \sin(2\alpha_2) + 4a_2m_{02}rc_1 \sin(2\alpha_1) + 8a_2b_1m_{02} \sin(2\omega t) + \dots \\
 & \dots + m_{12}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) + m_{12}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) + \dots \\
 & \dots + m_{21}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 4\omega t) - m_{21}rc_1rc_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2m_{13}rc_2rs_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 - 2\omega t) - 2m_{13}rc_2rs_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\omega t) + \dots
 \end{aligned} \tag{A.6}$$



$$\begin{aligned}
 & \dots + a_1 a_2 m_{12} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + a_1 a_2 m_{12} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) - \dots \\
 & \dots - a_1 a_2 m_{21} \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + a_1 a_2 m_{21} \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{11} r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + a_1 m_{11} r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{22} r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - a_1 m_{22} r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{11} r c_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + a_2 m_{11} r c_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{22} r c_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - a_2 m_{22} r c_1 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + 4a_1 a_2 m_{01} \cos(2\alpha_1 - 4\omega t) + 8a_2 b_1 m_{00} \cos(2\alpha_1 - 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2 b_1 m_{11} \cos(2\alpha_2 - 2\omega t) + 2a_2 b_1 m_{11} \cos(2\alpha_2 + 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2 b_1 m_{22} \cos(2\alpha_2 - 2\omega t) - 2a_2 b_1 m_{22} \cos(2\alpha_2 + 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 8a_1 b_2 m_{10} \cos(2\varphi_2 + 5\omega t) + 4b_1 b_2 m_{11} \cos(2\varphi_2 + 3\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1 b_2 m_{11} \cos(2\varphi_2 + 7\omega t) + 4b_1 b_2 m_{22} \cos(2\varphi_2 + 3\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_1 b_2 m_{22} \cos(2\varphi_2 + 7\omega t) + a_1 m_{12} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{12} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) - a_1 m_{21} r c_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{21} r c_2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + a_2 m_{12} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{12} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) - a_2 m_{21} r c_1 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{21} r c_1 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + m_{11} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 & \dots + m_{11} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) + m_{22} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) - \dots \\
 & \dots - m_{22} r c_1 r c_2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) - 4a_1 a_2 m_{02} \sin(2\alpha_1 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - 2a_2 b_1 m_{12} \sin(2\alpha_2 - 2\omega t) + 2a_2 b_1 m_{12} \sin(2\alpha_2 + 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2a_2 b_1 m_{21} \sin(2\alpha_2 - 2\omega t) + 2a_2 b_1 m_{21} \sin(2\alpha_2 + 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 8a_1 b_2 m_{20} \sin(2\varphi_2 + 5\omega t) - 4a_2 m_{01} r c_1 \cos(2\alpha_1 - 4\omega t) - \dots \\
 & \dots - 4b_1 b_2 m_{12} \sin(2\varphi_2 + 3\omega t) + 4b_1 b_2 m_{12} \sin(2\varphi_2 + 7\omega t) + \dots \\
 & \dots + 4b_1 b_2 m_{21} \sin(2\varphi_2 + 3\omega t) + 4b_1 b_2 m_{21} \sin(2\varphi_2 + 7\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1 m_{11} r c_2 \cos(2\alpha_2 - 2\omega t) + 2b_1 m_{11} r c_2 \cos(2\alpha_2 + 2\omega t) + \dots \\
 & \dots + 2b_1 m_{22} r c_2 \cos(2\alpha_2 - 2\omega t) - 2b_1 m_{22} r c_2 \cos(2\alpha_2 + 2\omega t)
 \end{aligned}$$

En las ecs. A.4, A.5 y A.6 se aprecia cómo los términos dependen de la posición angular ( $\omega t$ ) para distintos armónicos, como cabe esperar a partir de los principios de funcionamiento del dispositivo (sección 2.3.3). Dichos armónicos están relacionados directamente con el cociente de velocidades  $R$  elegido. La ec. A.3 se resume como (ec. 4.15):

$$I = \frac{1}{16} \sum_{i=0}^{14} \frac{1}{8} (A_i \sin(i\omega t) + B_i \cos(i\omega t))$$

Haciendo uso de las relaciones trigonométricas del ángulo suma y el ángulo diferencia, las amplitudes de los distintos armónicos ( $A_i$  y  $B_i$ ) obtenidas a partir de las ecs. A.4, A.5 y A.6, son:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 8a_1 a_2 m_{00} + m_{12} r c_1 r c_2 s_5 + m_{12} r c_1 r c_2 s_4 - m_{21} r c_1 r c_2 s_5 - m_{22} r c_1 r c_2 c_4 + \dots \\
 & \dots + m_{21} r c_1 r c_2 s_4 + 4a_1 a_2 m_{01} c_1 + 4a_1 a_2 m_{10} c_2 + 4a_1 a_2 m_{02} s_1 + 4a_1 a_2 m_{20} s_2 + \dots \\
 & \dots + 4a_1 m_{10} r c_2 c_2 + 4a_2 m_{01} r c_1 c_1 + a_1 a_2 m_{11} c_5 + a_1 a_2 m_{11} c_4 + \dots \\
 & \dots + a_1 a_2 m_{22} c_5 - a_1 a_2 m_{22} c_4 + 4a_1 m_{20} r c_2 s_2 + 4a_2 m_{02} r c_1 s_1 + a_1 a_2 m_{12} s_5 + \dots \\
 & \dots + a_1 a_2 m_{12} s_4 - a_1 a_2 m_{21} s_5 + a_1 a_2 m_{21} s_4 + a_1 m_{11} r c_2 c_5 + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{11} r c_2 c_4 + a_1 m_{22} r c_2 c_5 - a_1 m_{22} r c_2 c_4 + a_2 m_{11} r c_1 c_5 + a_2 m_{11} r c_1 c_4 + \dots \\
 & \dots + a_2 m_{22} r c_1 c_5 - a_2 m_{22} r c_1 c_4 + a_1 m_{12} r c_2 s_5 + a_1 m_{12} r c_2 s_4 - a_1 m_{21} r c_2 s_5 + \dots \\
 & \dots + a_1 m_{21} r c_2 s_4 + a_2 m_{12} r c_1 s_5 + a_2 m_{12} r c_1 s_4 - a_2 m_{21} r c_1 s_5 + a_2 m_{21} r c_1 s_4 + \dots \\
 & \dots + m_{11} r c_1 r c_2 c_5 + m_{11} r c_1 r c_2 c_4 + m_{22} r c_1 r c_2 c_5 \\
 A_1 &= 2(a_1 - r c_1)(b_2 m_{01} c_{11} - b_2 m_{02} s_{11} - m_{32} r s_2 c_{11} - m_{31} r s_2 s_{11} + \dots \\
 & \dots + b_2 m_{11} c_6 + b_2 m_{22} c_6 - b_2 m_{12} s_6 + b_2 m_{21} s_6)
 \end{aligned} \tag{A.7}$$

⇓⇓

$\uparrow\uparrow$ 

$$\begin{aligned}
 A_2 &= 8a_2b_1m_{01} - 2m_{13}rc_2rs_1s_5 - 2m_{13}rc_2rs_1s_4 + 8a_2b_1m_{00}c_1 + 4a_2b_1m_{11}c_2 + \dots \\
 &\dots + 4a_2b_1m_{21}s_2 + 4b_1m_{11}rc_2c_2 - 8a_2m_{03}rs_1s_1 + 2a_2b_1m_{10}c_5 + \dots \\
 &\dots + 2a_2b_1m_{10}c_4 + 4b_1m_{21}rc_2s_2 - 2a_2b_1m_{20}s_5 + 2a_2b_1m_{20}s_4 - 2a_2m_{23}rs_1c_5 + \dots \\
 &\dots + 2a_2m_{23}rs_1c_4 + 2b_1m_{10}rc_2c_5 + 2b_1m_{10}rc_2c_4 - 2a_2m_{13}rs_1s_5 - \dots \\
 &\dots - 2a_2m_{13}rs_1s_4 - 2b_1m_{20}rc_2s_5 + 2b_1m_{20}rc_2s_4 - 2m_{23}rc_2rs_1c_5 + 2m_{23}rc_2rs_1c_4 \\
 A_3 &= 4b_1b_2m_{00}c_{11} + 4b_1b_2m_{11}c_3 + 4b_1b_2m_{22}c_3 - 4b_2m_{13}rs_1s_6 - 4b_1m_{30}rs_2s_{11} - \dots \\
 &\dots - 4b_2m_{03}rs_1s_{11} - 4m_{33}rs_1rs_2c_{11} - 4b_1b_2m_{12}s_3 + 4b_1b_2m_{21}s_3 + \dots \\
 &\dots + 4b_1b_2m_{10}c_6 + 4b_1b_2m_{01}c_8 + 4b_1b_2m_{02}s_8 + 4b_1b_2m_{20}s_6 - \dots \\
 &\dots - 4b_1m_{32}rs_2c_8 + 4b_2m_{23}rs_1c_6 + 4b_1m_{31}rs_2s_8 \\
 A_4 &= (a_1 - rc_1)(4a_2m_{01}c_1 - 4a_2m_{02}s_1 + a_2m_{11}c_5 + a_2m_{11}c_4 - a_2m_{22}c_5 + a_2m_{22}c_4 - \dots \\
 &\dots - a_2m_{12}s_5 - a_2m_{12}s_4 - a_2m_{21}s_5 + a_2m_{21}s_4 + m_{11}rc_2c_5 + m_{11}rc_2c_4 - \dots \\
 &\dots - m_{22}rc_2c_5 + m_{22}rc_2c_4 - m_{12}rc_2s_5 - m_{12}rc_2s_4 - m_{21}rc_2s_5 + m_{21}rc_2s_4) \\
 A_5 &= 2a_1b_2m_{01}c_{11} + 2a_1b_2m_{01}c_{12} + 2a_1b_2m_{02}s_{11} + 2a_1b_2m_{02}s_{12} + 2a_1m_{32}rs_2c_{11} - \dots \\
 &\dots - 2a_1m_{32}rs_2c_{12} + 2b_2m_{01}rc_1c_{11} + 2b_2m_{01}rc_1c_{12} + 8a_1b_2m_{10}c_3 - \dots \\
 &\dots - 2a_1m_{31}rs_2s_{11} + 2a_1m_{31}rs_2s_{12} + 2b_2m_{02}rc_1s_{11} + 2b_2m_{02}rc_1s_{12} + \dots \\
 &\dots + 2m_{32}rc_1rs_2c_{11} - 2m_{32}rc_1rs_2c_{12} + 8a_1b_2m_{20}s_3 - 2m_{31}rc_1rs_2s_{11} + \dots \\
 &\dots + 2m_{31}rc_1rs_2s_{12} + 8a_1b_2m_{00}c_8 + 2a_1b_2m_{11}c_7 + 2a_1b_2m_{11}c_6 + \dots \\
 &\dots + 2a_1b_2m_{22}c_7 - 2a_1b_2m_{22}c_6 + 2a_1b_2m_{12}s_7 + 2a_1b_2m_{12}s_6 - 2a_1b_2m_{21}s_7 + \dots \\
 &\dots + 2a_1b_2m_{21}s_6 + 2b_2m_{11}rc_1c_7 + 2b_2m_{11}rc_1c_6 + 2b_2m_{22}rc_1c_7 - 2b_2m_{22}rc_1c_6 + \dots \\
 &\dots + 8a_1m_{30}rs_2s_8 + 2b_2m_{12}rc_1s_7 + 2b_2m_{12}rc_1s_6 - 2b_2m_{21}rc_1s_7 + 2b_2m_{21}rc_1s_6 \\
 A_6 &= (a_1 - rc_1)(a_2 - rc_2)(m_{11}c_{13} + m_{22}c_{13} - m_{12}s_{13} + m_{21}s_{13}) \\
 A_7 &= 4b_1b_2m_{00}c_{12} + 4b_1b_2m_{11}c_3 - 4b_1b_2m_{22}c_3 + 4b_1m_{30}rs_2s_{12} - 4b_2m_{03}rs_1s_{12} - 4b_2m_{13}rs_1s_7 + \dots \\
 &\dots + 4m_{33}rs_1rs_2c_{12} + 4b_1b_2m_{12}s_3 + 4b_1b_2m_{21}s_3 + 4b_1b_2m_{10}c_7 + 4b_1b_2m_{01}c_8 - \dots \\
 &\dots - 4b_1b_2m_{02}s_8 - 4b_1b_2m_{20}s_7 + 4b_1m_{32}rs_2c_8 - 4b_2m_{23}rs_1c_7 + 4b_1m_{31}rs_2s_8 \\
 A_8 &= 2(a_2 - rc_2)(b_1m_{10}c_{13} + b_1m_{20}s_{13} + m_{23}rs_1c_{13} - m_{13}rs_1s_{13} + \dots \\
 &\dots + b_1m_{11}c_9 + b_1m_{22}c_9 + b_1m_{12}s_9 - b_1m_{21}s_9) \\
 A_9 &= 2(a_1 - rc_1)(b_2m_{01}c_{12} - b_2m_{02}s_{12} + m_{32}rs_2c_{12} + m_{31}rs_2s_{12} + \dots \\
 &\dots + b_2m_{11}c_7 - b_2m_{22}c_7 - b_2m_{12}s_7 - b_2m_{21}s_7) \\
 A_{10} &= (a_2 - rc_2)(a_1m_{11}c_{13} + a_1m_{11}c_{10} - a_1m_{22}c_{13} + a_1m_{22}c_{10} + a_1m_{12}s_{13} + a_1m_{12}s_{10} - \dots \\
 &\dots - a_1m_{21}s_{10} + m_{11}rc_1c_{13} + m_{11}rc_1c_{10} - m_{22}rc_1c_{13} + m_{22}rc_1c_{10} + m_{12}rc_1s_{13} + \dots \\
 &\dots + m_{12}rc_1s_{10} + m_{21}rc_1s_{13} - m_{21}rc_1s_{10} + 4a_1m_{10}c_9 - 4a_1m_{20}s_9) + a_1m_{21}s_{13} \\
 A_{12} &= (-2)(a_2 - rc_2)(b_1m_{20}s_{10} - b_1m_{10}c_{10} + m_{23}rs_1c_{10} + m_{13}rs_1s_{10} - \dots \\
 &\dots - b_1m_{11}c_9 + b_1m_{22}c_9 + b_1m_{12}s_9 + b_1m_{21}s_9) \\
 A_{14} &= -(a_1 - rc_1)(a_2 - rc_2)(m_{22}c_{10} - m_{11}c_{10} + m_{12}s_{10} + m_{21}s_{10})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_1 &= (-2)(a_1 - rc_1)(b_2m_{02}c_{11} + b_2m_{01}s_{11} + m_{31}rs_2c_{11} - m_{32}rs_2s_{11} + \dots \\
 &\dots + b_2m_{12}c_6 - b_2m_{21}c_6 + b_2m_{11}s_6 + b_2m_{22}s_6) \\
 B_2 &= 8a_2b_1m_{02} - 2m_{23}rc_2rs_1s_5 + 2m_{23}rc_2rs_1s_4 + 4a_2b_1m_{12}c_2 + 8a_2b_1m_{00}s_1 + \dots \\
 &\dots + 4a_2b_1m_{22}s_2 + 8a_2m_{03}rs_1c_1 + 4b_1m_{12}rc_2c_2 + 2a_2b_1m_{20}c_5 - \dots \\
 &\dots - 2a_2b_1m_{20}c_4 + 4b_1m_{22}rc_2s_2 + 2a_2b_1m_{10}s_5 + 2a_2b_1m_{10}s_4 + 2a_2m_{13}rs_1c_5 + \dots \\
 &\dots + 2a_2m_{13}rs_1c_4 + 2b_1m_{20}rc_2c_5 - 2b_1m_{20}rc_2c_4 - 2a_2m_{23}rs_1s_5 + \dots \\
 &\dots + 2a_2m_{23}rs_1s_4 + 2b_1m_{10}rc_2s_5 + 2b_1m_{10}rc_2s_4 + 2m_{13}rc_2rs_1c_5 + 2m_{13}rc_2rs_1c_4 \\
 B_3 &= 4b_1b_2m_{21}c_3 - 4b_1m_{30}rs_2c_{11} - 4b_2m_{03}rs_1c_{11} - 4b_1b_2m_{12}c_3 - 4b_1b_2m_{00}s_{11} - \dots \\
 &\dots - 4b_1b_2m_{11}s_3 - 4b_1b_2m_{22}s_3 + 4m_{33}rs_1rs_2s_{11} - 4b_1b_2m_{02}c_8 + \dots \\
 &\dots + 4b_1b_2m_{20}c_6 - 4b_1b_2m_{10}s_6 + 4b_1b_2m_{01}s_8 - 4b_1m_{31}rs_2c_8 - \dots \\
 &\dots - 4b_2m_{13}rs_1c_6 - 4b_1m_{32}rs_2s_8 - 4b_2m_{23}rs_1s_6
 \end{aligned} \tag{A.8}$$

 $\downarrow\downarrow$

↑↑

$$\begin{aligned}
 B_4 &= (a_1 - rc_1)(4a_2m_{02}c_1 + 4a_2m_{01}s_1 + a_2m_{12}c_5 + a_2m_{12}c_4 + a_2m_{21}c_5 - a_2m_{21}c_4 + \dots \\
 &\quad \dots + a_2m_{11}s_5 + a_2m_{11}s_4 - a_2m_{22}s_5 + a_2m_{22}s_4 + m_{12}rc_2c_5 + m_{12}rc_2c_4 + \dots \\
 &\quad \dots + m_{21}rc_2c_5 - m_{21}rc_2c_4 + m_{11}rc_2s_5 + m_{11}rc_2s_4 - m_{22}rc_2s_5 + m_{22}rc_2s_4) \\
 B_5 &= 2a_1b_2m_{02}c_{11} - 2a_1b_2m_{02}c_{12} - 2a_1b_2m_{01}s_{11} + 2a_1b_2m_{01}s_{12} - 2a_1m_{31}rs_2c_{11} - \dots \\
 &\quad \dots - 2a_1m_{31}rs_2c_{12} + 2b_2m_{02}rc_1c_{11} - 2b_2m_{02}rc_1c_{12} + 8a_1b_2m_{20}c_3 - \dots \\
 &\quad \dots - 2a_1m_{32}rs_2s_{11} - 2a_1m_{32}rs_2s_{12} - 2b_2m_{01}rc_1s_{11} + 2b_2m_{01}rc_1s_{12} - \dots \\
 &\quad \dots - 2m_{31}rc_1rs_2c_{11} - 2m_{31}rc_1rs_2c_{12} - 8a_1b_2m_{10}s_3 - 2m_{32}rc_1rs_2s_{11} - \dots \\
 &\quad \dots - 2m_{32}rc_1rs_2s_{12} - 2a_1b_2m_{12}c_7 + 2a_1b_2m_{12}c_6 + 2a_1b_2m_{21}c_7 + \dots \\
 &\quad \dots + 2a_1b_2m_{21}c_6 + 8a_1b_2m_{00}s_8 + 2a_1b_2m_{11}s_7 - 2a_1b_2m_{11}s_6 + 2a_1b_2m_{22}s_7 + \dots \\
 &\quad \dots + 2a_1b_2m_{22}s_6 - 8a_1m_{30}rs_2c_8 - 2b_2m_{12}rc_1c_7 + 2b_2m_{12}rc_1c_6 + 2b_2m_{21}rc_1c_7 + \dots \\
 &\quad \dots + 2b_2m_{21}rc_1c_6 + 2b_2m_{11}rc_1s_7 - 2b_2m_{11}rc_1s_6 + 2b_2m_{22}rc_1s_7 + 2b_2m_{22}rc_1s_6 \\
 B_6 &= -(a_1 - rc_1)(a_2 - rc_2)(m_{12}c_{13} - m_{21}c_{13} + m_{11}s_{13} + m_{22}s_{13}) \\
 B_7 &= 4b_1b_2m_{00}s_{12} - 4b_1m_{30}rs_2c_{12} + 4b_2m_{03}rs_1c_{12} + 4b_1b_2m_{12}c_3 + 4b_1b_2m_{21}c_3 - 4b_2m_{23}rs_1s_7 - \dots \\
 &\quad \dots - 4b_1b_2m_{11}s_3 + 4b_1b_2m_{22}s_3 + 4m_{33}rs_1rs_2s_{12} + 4b_1b_2m_{02}c_8 + 4b_1b_2m_{20}c_7 + \dots \\
 &\quad \dots + 4b_1b_2m_{10}s_7 + 4b_1b_2m_{01}s_8 - 4b_1m_{31}rs_2c_8 + 4b_2m_{13}rs_1c_7 + 4b_1m_{32}rs_2s_8 \\
 B_8 &= 2(a_2 - rc_2)(b_1m_{20}c_{13} - b_1m_{10}s_{13} - m_{13}rs_1c_{13} - m_{23}rs_1s_{13} - \dots \\
 &\quad \dots - b_1m_{12}c_9 + b_1m_{21}c_9 + b_1m_{11}s_9 + b_1m_{22}s_9) \\
 B_9 &= 2(a_1 - rc_1)(b_2m_{02}c_{12} + b_2m_{01}s_{12} - m_{31}rs_2c_{12} + m_{32}rs_2s_{12} + \dots \\
 &\quad \dots + b_2m_{12}c_7 + b_2m_{21}c_7 + b_2m_{11}s_7 - b_2m_{22}s_7) \\
 B_{10} &= (a_2 - rc_2)(a_1m_{12}c_{13} - a_1m_{12}c_{10} + a_1m_{21}c_{13} + a_1m_{21}c_{10} - a_1m_{11}s_{13} + a_1m_{11}s_{10} + \dots \\
 &\quad \dots + a_1m_{22}s_{10} + m_{12}rc_1c_{13} - m_{12}rc_1c_{10} + m_{21}rc_1c_{13} + m_{21}rc_1c_{10} - m_{11}rc_1s_{13} + \dots \\
 &\quad \dots + m_{11}rc_1s_{10} + m_{22}rc_1s_{13} + m_{22}rc_1s_{10} + 4a_1m_{20}c_9 + 4a_1m_{10}s_9) + a_1m_{22}s_{13} \\
 B_{12} &= 2(a_2 - rc_2)(b_1m_{20}c_{10} + b_1m_{10}s_{10} + m_{13}rs_1c_{10} - m_{23}rs_1s_{10} + \dots \\
 &\quad \dots + b_1m_{12}c_9 + b_1m_{21}c_9 + b_1m_{11}s_9 - b_1m_{22}s_9) \\
 B_{14} &= (a_1 - rc_1)(a_2 - rc_2)(m_{12}c_{10} + m_{21}c_{10} + m_{11}s_{10} - m_{22}s_{10})
 \end{aligned}$$

Con  $B_0 = 0$ ,  $A_{11} = 0$ ,  $B_{11} = 0$ ,  $A_{13} = 0$  y  $B_{13} = 0$ , y habiendo utilizado en las ecs. A.7 y A.8 las siguientes relaciones:

$$\left\{ \begin{array}{ll}
 k_1 = \frac{k_{21}}{k_{11}}, & k_2 = \frac{k_{22}}{k_{12}} \\
 a_1 = 1 + K_1, & a_2 = 1 + K_2 \\
 b_1 = 1 - K_1, & b_2 = 1 - K_2 \\
 rs_1 = 2\sqrt{K_1} \sin(\delta_1), & rc_1 = 2\sqrt{K_1} \cos(\delta_1) \\
 rs_2 = 2\sqrt{K_2} \sin(\delta_2), & rc_2 = 2\sqrt{K_2} \cos(\delta_2) \\
 s_1 = \sin(2\alpha_1), & c_1 = \cos(2\alpha_1) \\
 s_2 = \sin(2\alpha_2), & c_2 = \cos(2\alpha_2) \\
 s_3 = \sin(2\varphi_2), & c_3 = \cos(2\varphi_2) \\
 s_4 = \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2), & c_4 = \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2) \\
 s_5 = \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2), & c_5 = \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) \\
 s_6 = \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2), & c_6 = \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2) \\
 s_7 = \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2), & c_7 = \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2) \\
 s_8 = \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2), & c_8 = \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2) \\
 s_9 = \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2), & c_9 = \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2) \\
 s_{10} = \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2), & c_{10} = \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2) \\
 s_{11} = \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2), & c_{11} = \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) \\
 s_{12} = \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2), & c_{12} = \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2) \\
 s_{13} = \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2), & c_{13} = \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2)
 \end{array} \right. \quad (A.9)$$

donde  $k_{ij}$  son las transmitancias de los estados propios ortonormales ( $i = 1, 2$ ) de la Lámina 1 ( $j = 1$ ) y la Lámina 2 ( $j = 2$ ),  $\delta_j$  es el desfase entre los estados propios introducido por las láminas, y  $\alpha_1$ ,  $\alpha_2$  y  $\varphi_2$  son los acimuts del Polarizador, el Analizador y la Lámina 2, respectivamente, con relación al eje rápido de la Lámina 1.

## Ecuaciones de Calibrado

Si sustituimos en las ecs. A.7 y A.8 los valores de la matriz identidad, se obtiene una relación directa entre las amplitudes de Fourier y los parámetros libres del polarímetro:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 8a_1a_2 + 2a_1a_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + 2a_1rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 &\dots + 2a_2rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + 2rc_1rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) \\
 A_1 &= 4b_2 \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2)(a_1 - rc_1) \\
 B_1 &= (-4)b_2 \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2)(a_1 - rc_1) \\
 A_2 &= 4b_1(2a_2 \cos(2\alpha_1) + a_2 \cos(2\alpha_2) + rc_2 \cos(2\alpha_2)) \\
 B_2 &= 4b_1(rc_2 \sin(2\alpha_2) + 2a_2 \sin(2\alpha_1) + a_2 \sin(2\alpha_2)) \\
 A_3 &= 4b_1b_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) + 8b_1b_2 \cos(2\varphi_2) - 4rs_1rs_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) \\
 B_3 &= 4rs_1rs_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) - 8b_1b_2 \sin(2\varphi_2) - 4b_1b_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) \\
 A_4 &= 2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2)(a_2 + rc_2)(a_1 - rc_1) \\
 B_4 &= \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2)(a_1 - rc_1)(2a_2 + 2rc_2) \\
 A_5 &= 4b_2(a_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2) + 2a_1 \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2) + rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2)) \\
 B_5 &= 4b_2(a_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2) + 2a_1 \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2) + rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2)) \\
 A_6 &= 2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2)(a_1 - rc_1)(a_2 - rc_2) \\
 B_6 &= (-2) \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2)(a_1 - rc_1)(a_2 - rc_2) \\
 A_7 &= 4 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2)(b_1b_2 + rs_1rs_2) \\
 B_7 &= \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2)(4b_1b_2 + 4rs_1rs_2) \\
 A_8 &= 4b_1 \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a_2 - rc_2) \\
 B_8 &= 4b_1 \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a_2 - rc_2) \\
 A_{10} &= 2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a_1 + rc_1)(a_2 - rc_2) \\
 B_{10} &= \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a_2 - rc_2)(2a_1 + 2rc_1) \\
 A_9 &= B_9 = A_{12} = B_{12} = A_{14} = B_{14} = 0
 \end{aligned} \tag{A.10}$$

donde han sido utilizadas algunas de las definiciones de la ec. A.9.

Si se supone que ambas láminas presentan idéntica transmitancia  $K_1 = K_2$ , entonces:

$$\begin{aligned}
 A_0 &= 8a^2 + 2a^2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + 2arc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + \dots \\
 &\dots + 2arc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) + 2rc_1rc_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2) \\
 A_1 &= 4b \cos(2\alpha_1 + 2\varphi_2)(a - rc_1) \\
 B_1 &= -4b \sin(2\alpha_1 + 2\varphi_2)(a - rc_1) \\
 A_2 &= 4b(2a \cos(2\alpha_1) + a \cos(2\alpha_2) + rc_2 \cos(2\alpha_2)) \\
 B_2 &= 4b(2a \sin(2\alpha_1) + a \sin(2\alpha_2) + rc_2 \sin(2\alpha_2)) \\
 A_3 &= 4b^2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) + 8b^2 \cos(2\varphi_2) - 4rs_1rs_2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) \\
 B_3 &= -4b^2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) - 8b^2 \sin(2\varphi_2) + 4rs_1rs_2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\varphi_2) \\
 A_4 &= 2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2)(a + rc_2)(a - rc_1) \\
 B_4 &= 2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2)(a + rc_2)(a - rc_1) \\
 A_5 &= 4b(a \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2) + 2a \cos(2\alpha_2 - 2\varphi_2) + rc_1 \cos(2\alpha_1 - 2\varphi_2)) \\
 B_5 &= 4b(a \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2) + 2a \sin(2\alpha_2 - 2\varphi_2) + rc_1 \sin(2\alpha_1 - 2\varphi_2)) \\
 A_6 &= 2 \cos(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2)(a - rc_1)(a - rc_2) \\
 B_6 &= -2 \sin(2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 4\varphi_2)(a - rc_1)(a - rc_2) \\
 A_7 &= 4 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2)(b^2 + rs_1rs_2) \\
 B_7 &= 4 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\varphi_2)(b^2 + rs_1rs_2) \\
 A_8 &= 4b \cos(2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a - rc_2) \\
 B_8 &= 4b \sin(2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a - rc_2) \\
 A_{10} &= 2 \cos(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a + rc_1)(a - rc_2) \\
 B_{10} &= 2 \sin(2\alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\varphi_2)(a + rc_1)(a - rc_2)
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

con  $a = 1 + K$ ,  $b = 1 - K$ ,  $rc_i = 2\sqrt{K} \cos(\delta_i)$  y  $rs_i = 2\sqrt{K} \sin(\delta_i)$ , siendo  $K = k_2/k_1$  el cociente entre las transmitancias de los estados propios del retardador (se supone que ambas láminas retardadoras tienen la misma relación de transmitancias, pero se mantiene la posibilidad de que presenten desfases distintos).



## Apéndice B

# Compendio de Resultados

### Ribs de Silicio: Variación con el Tamaño

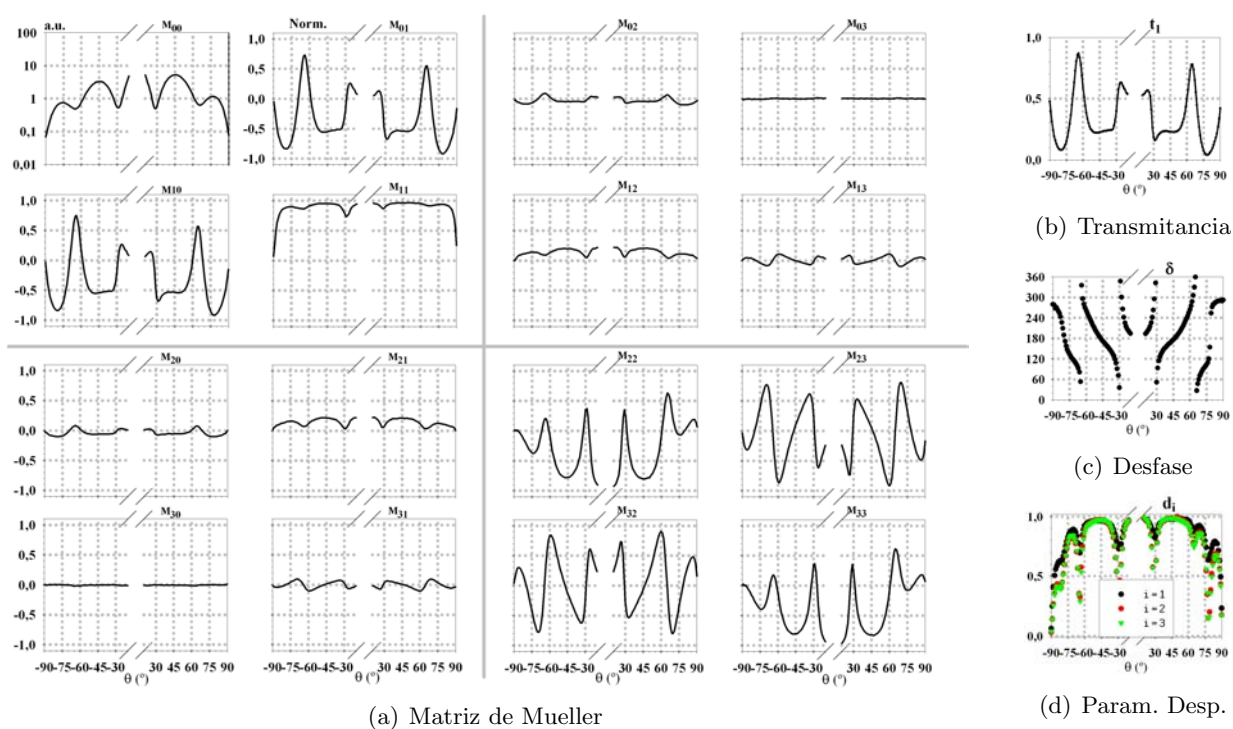


Figura B.1: Difusión (medida con el DRCP) por una *rib* de Si ( $1 \times 1 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



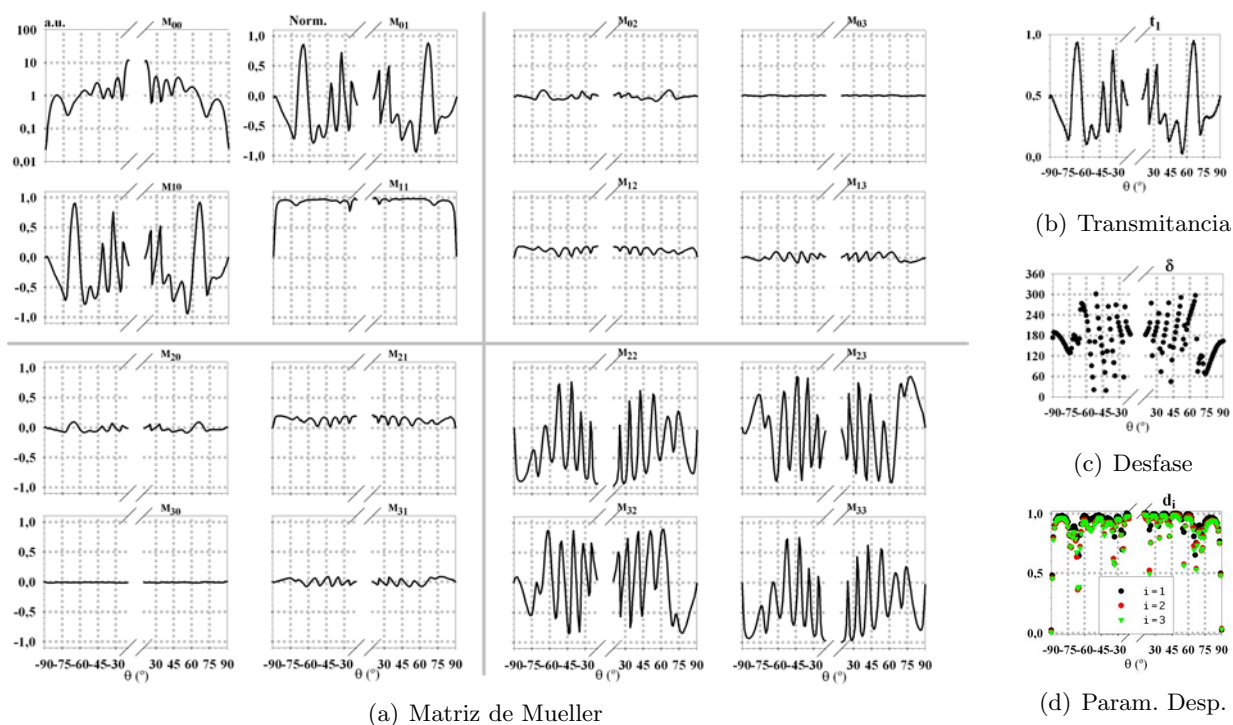


Figura B.2: Difusión (medida con el DRCP) por una *rib* de Si ( $1 \times 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

## Ribs de Silicio: Variación con la Distancia

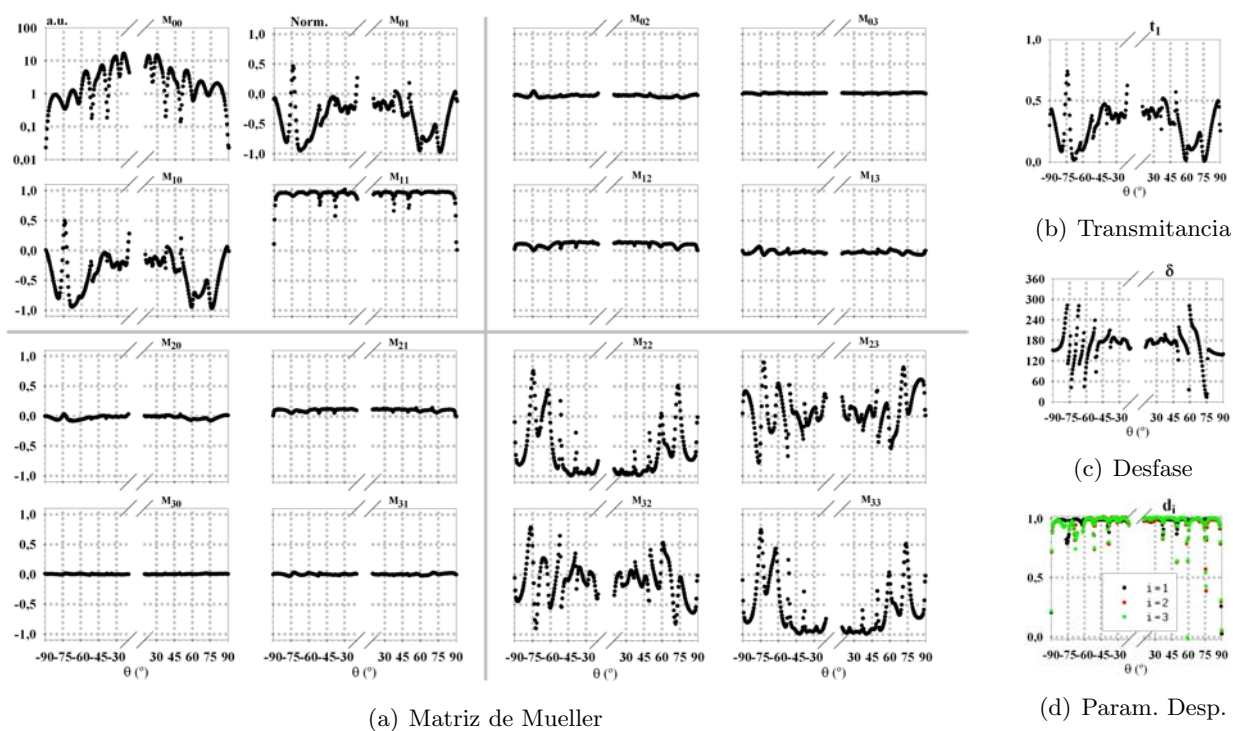


Figura B.3: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Si ( $2 \times 3 - 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

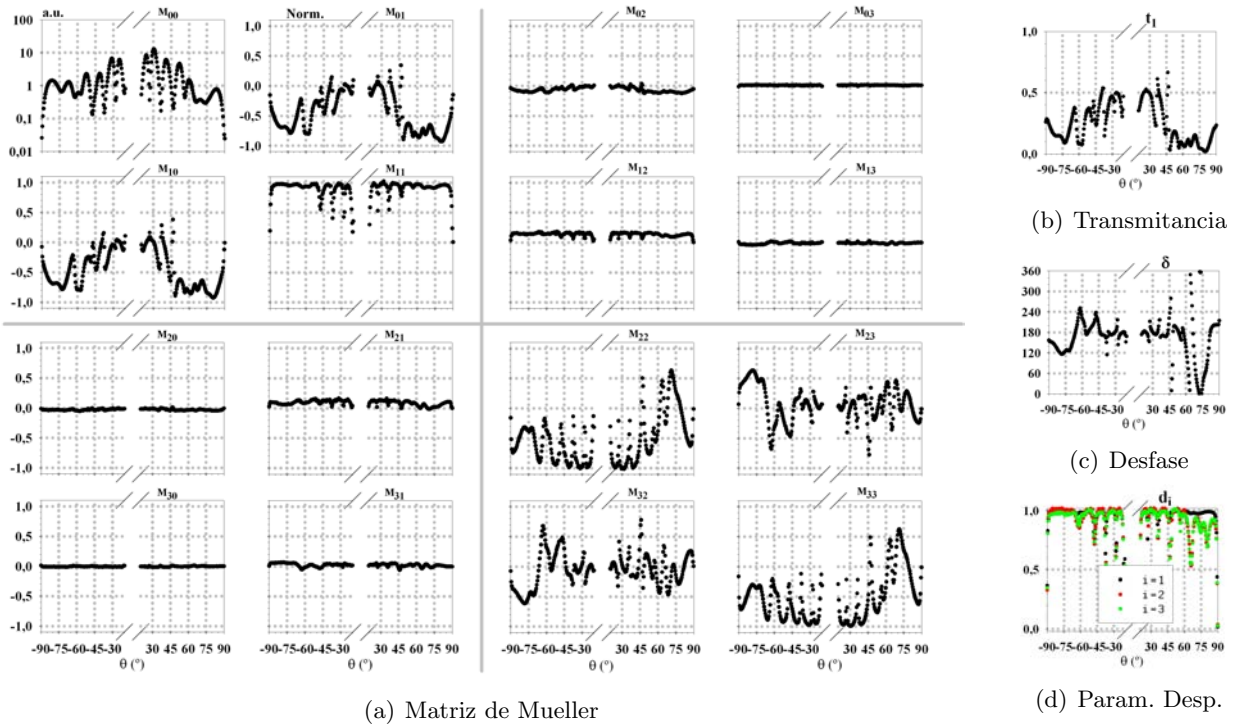


Figura B.4: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Si ( $2 \times 3 - 5 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

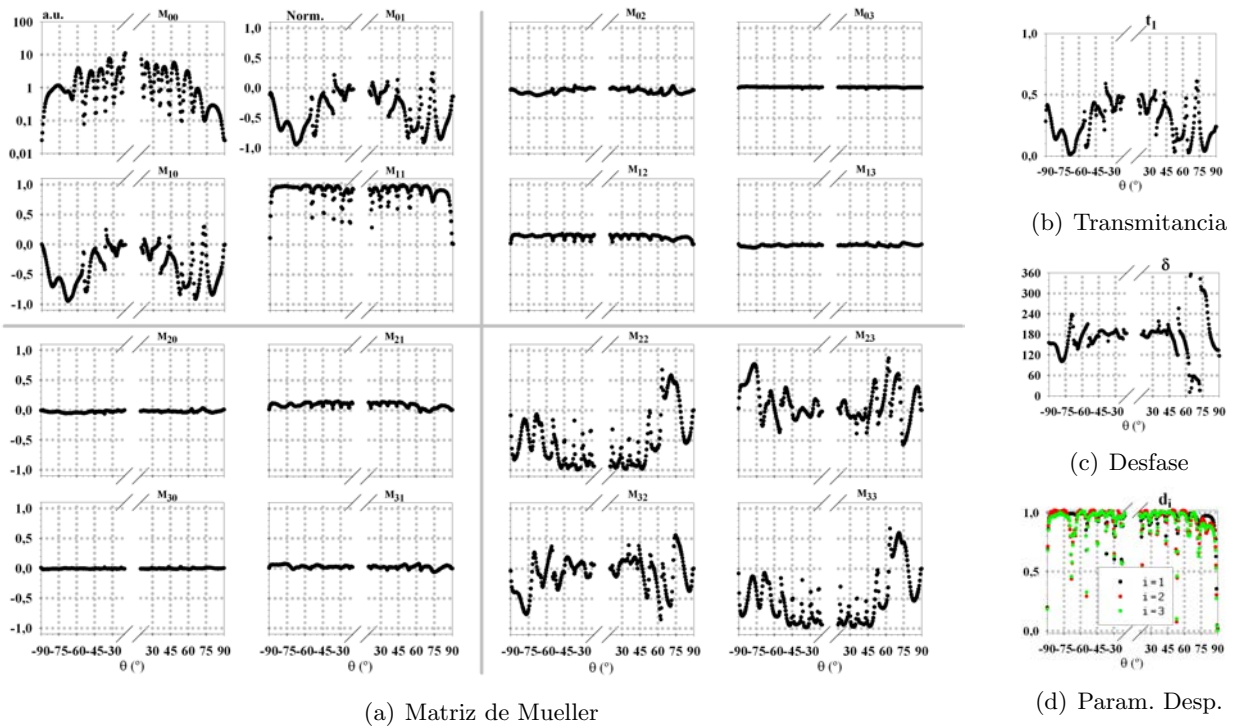


Figura B.5: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Si ( $2 \times 3 - 6 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

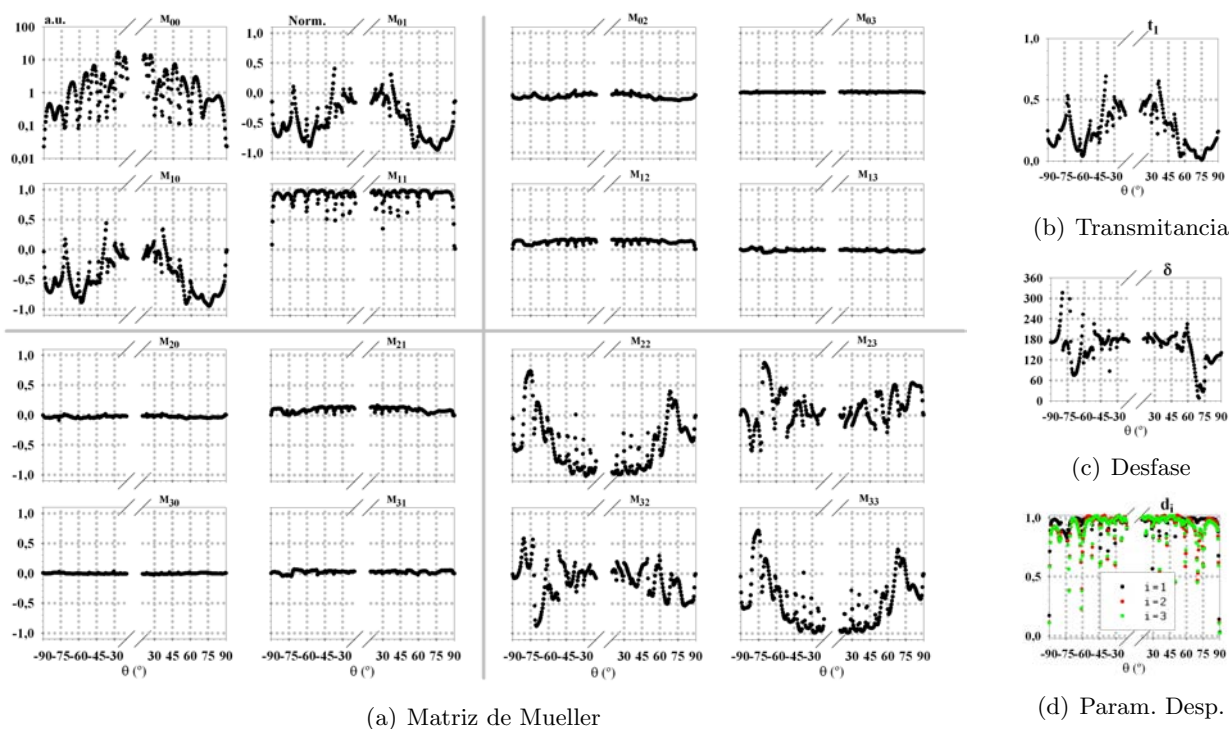


Figura B.6: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Si ( $2 \times 3 - 7 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

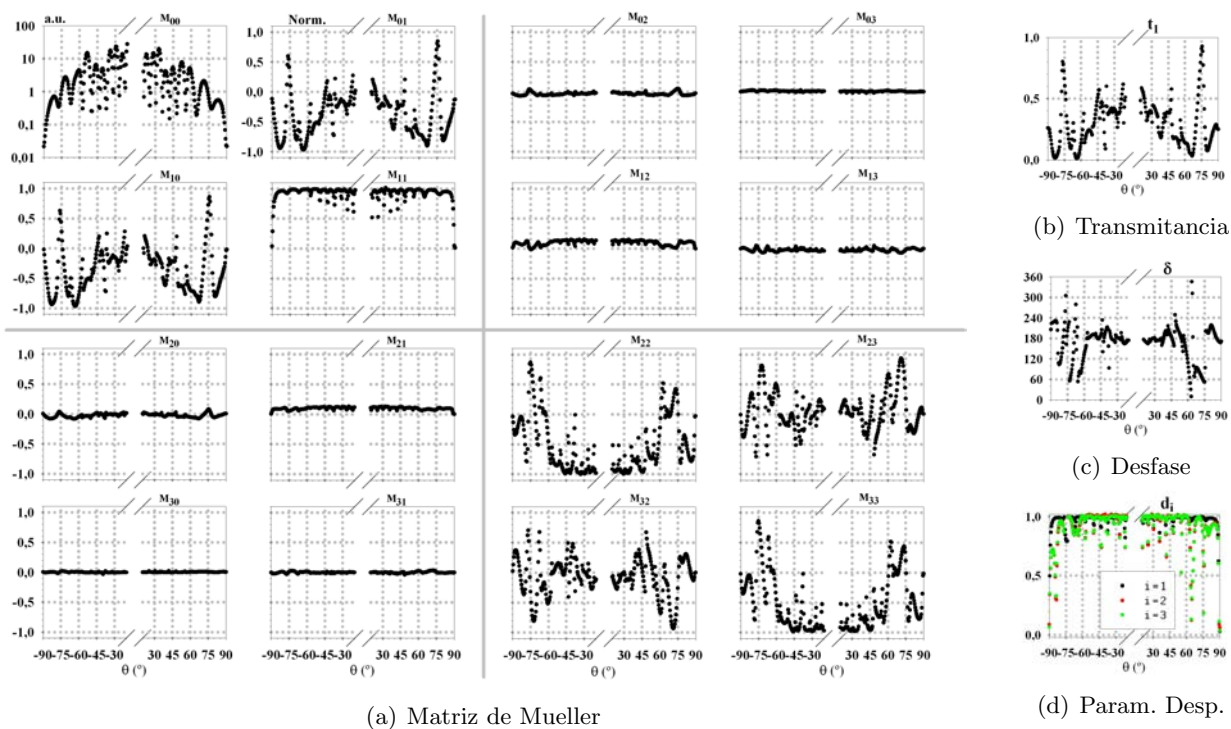


Figura B.7: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Si ( $2 \times 3 - 8 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



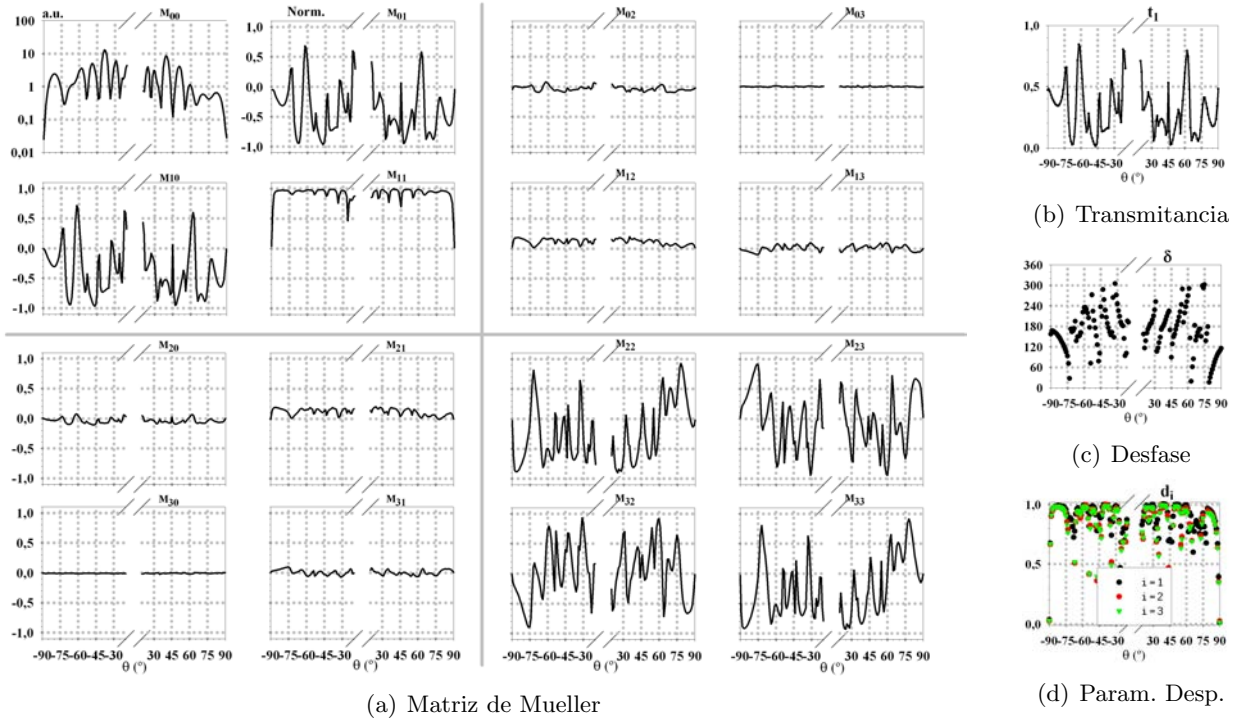


Figura B.8: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Si ( $1 \times 3 - 5 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

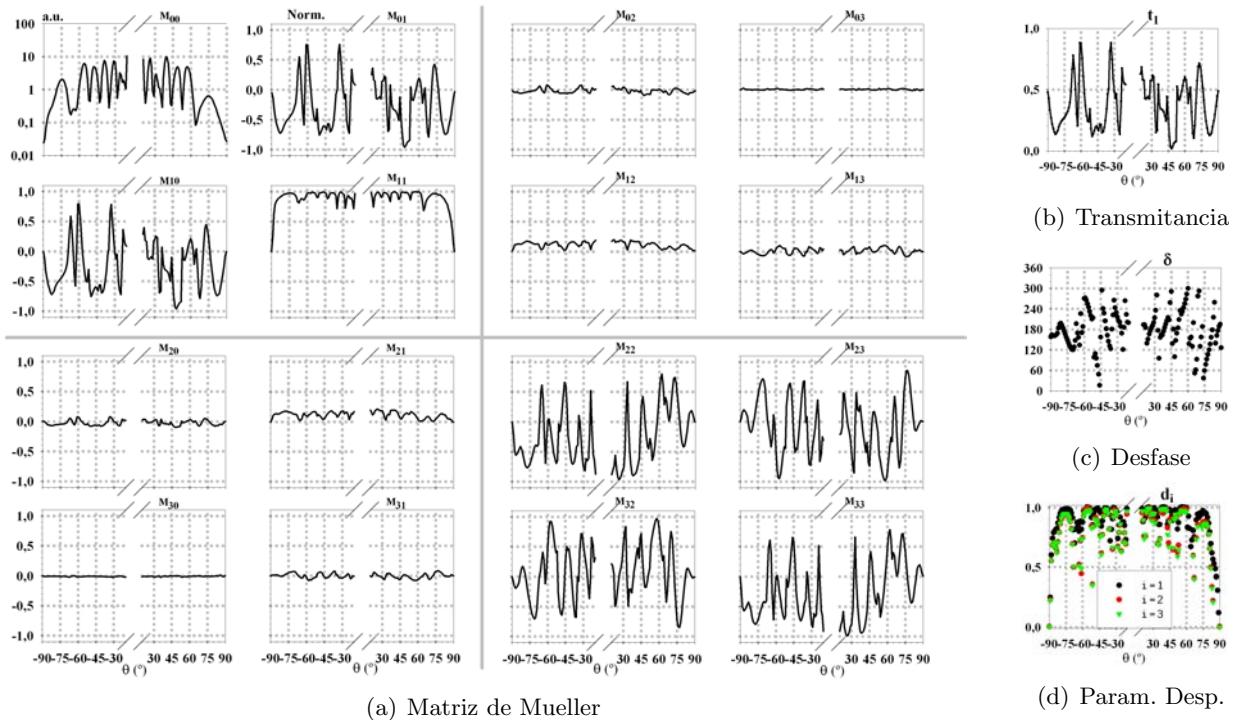


Figura B.9: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Si ( $1 \times 3 - 6 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

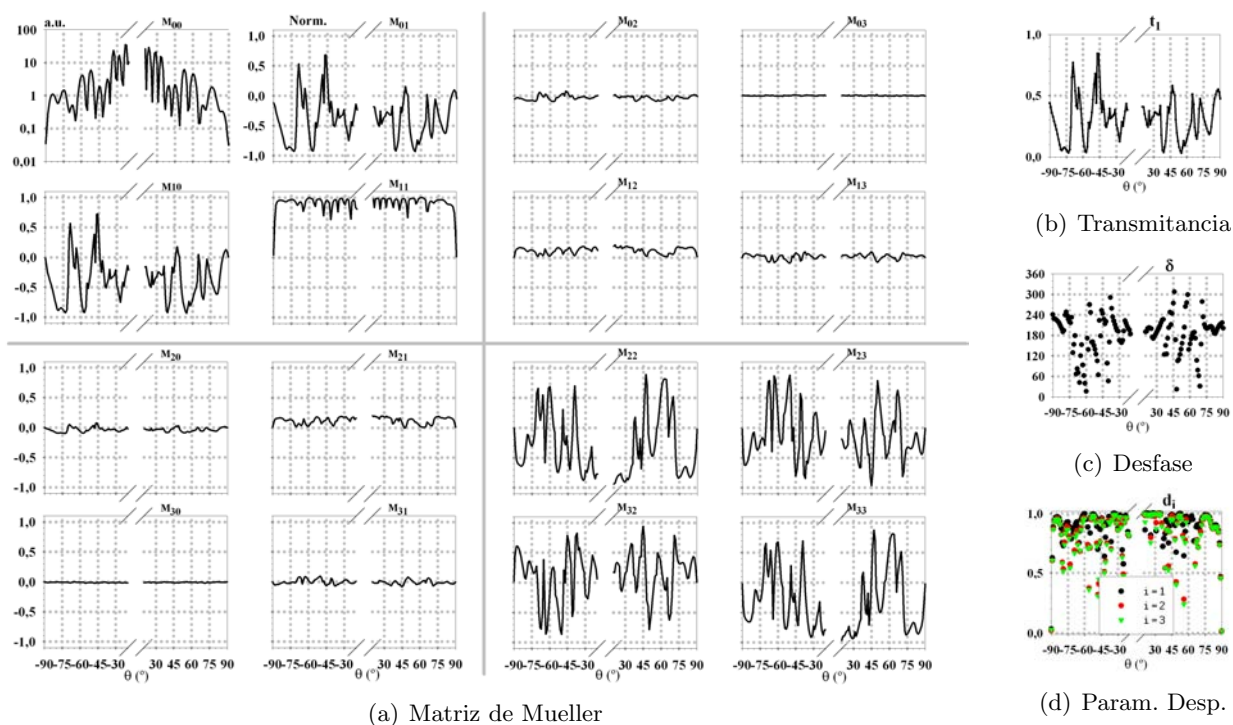


Figura B.10: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Si ( $1 \times 3 - 8 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

## Ribs de Oro: Variación con el Tamaño

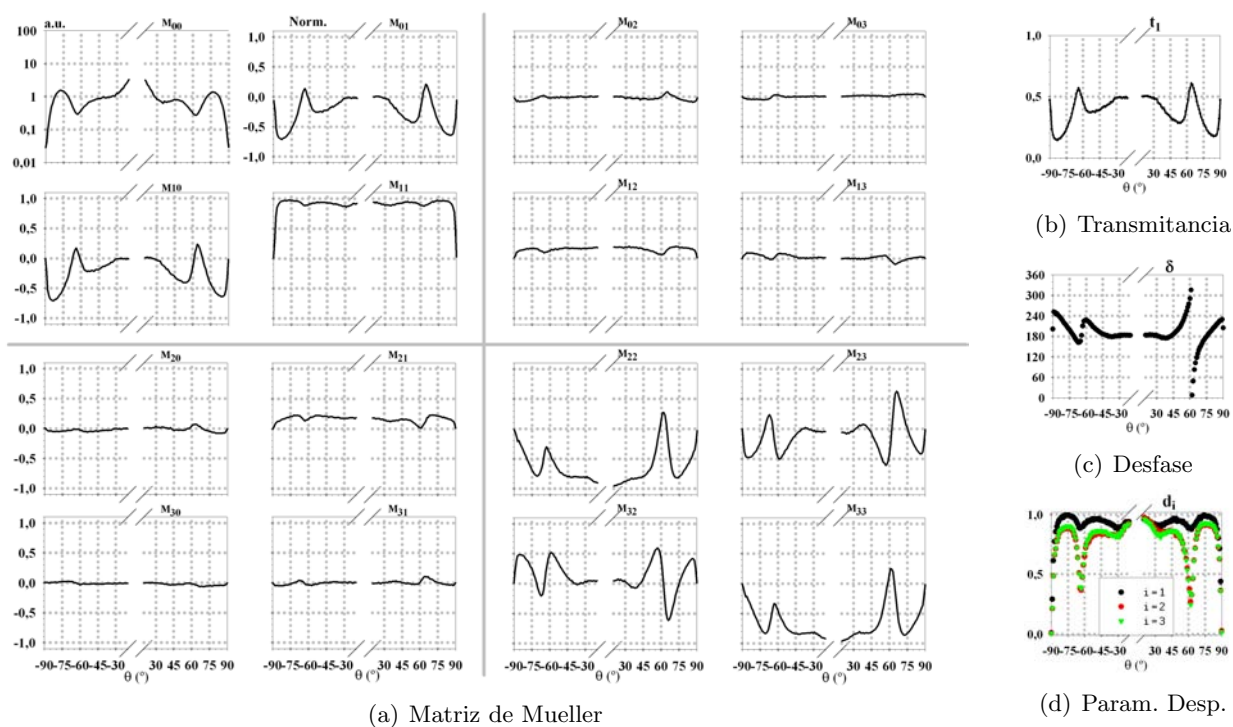


Figura B.11: Difusión (medida con el DRCP) por una *rib* de Au ( $1 \times 1 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

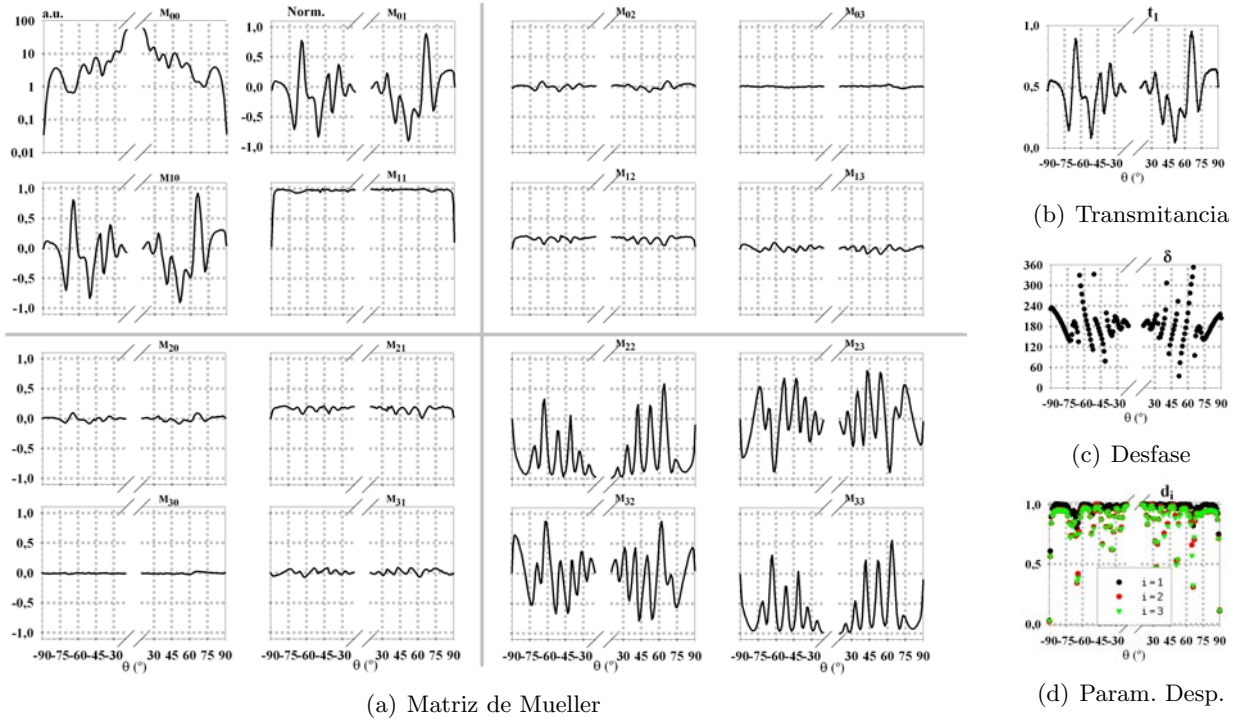


Figura B.12: Difusión (medida con el DRCP) por una *rib* de Au ( $1 \times 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

### Ribs de Oro: Variación con la Distancia

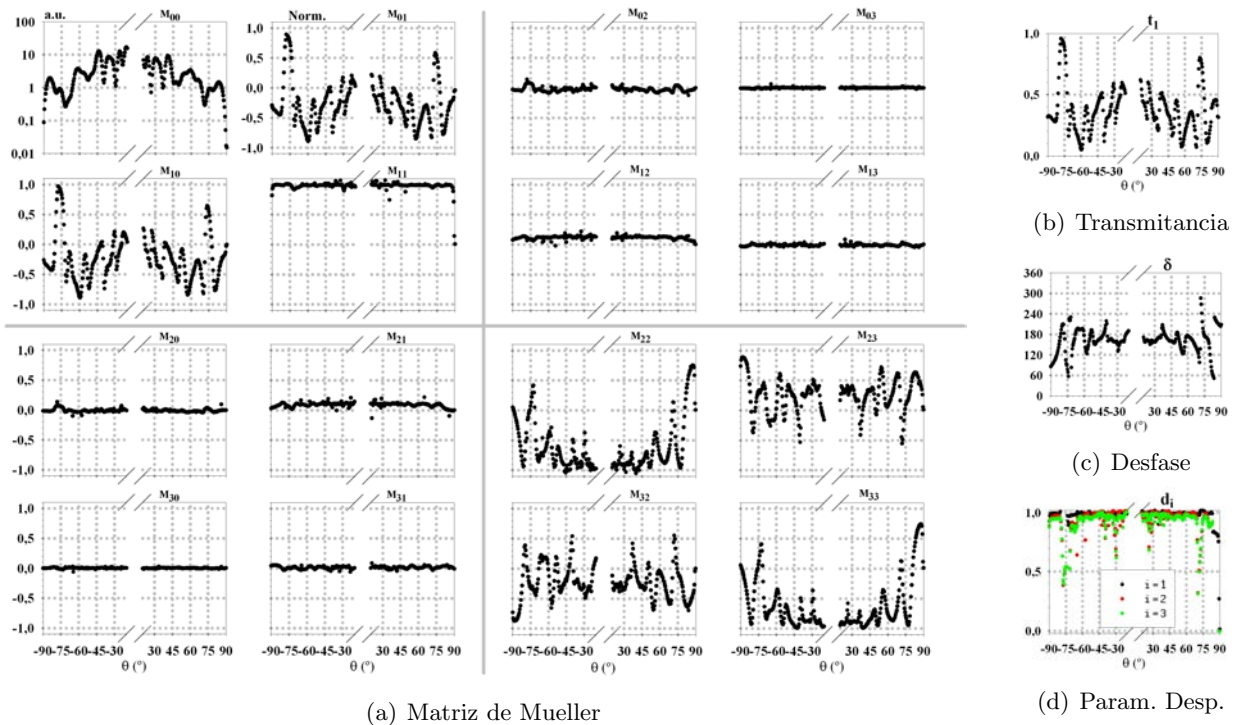


Figura B.13: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Au ( $2 \times 3 - 4 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



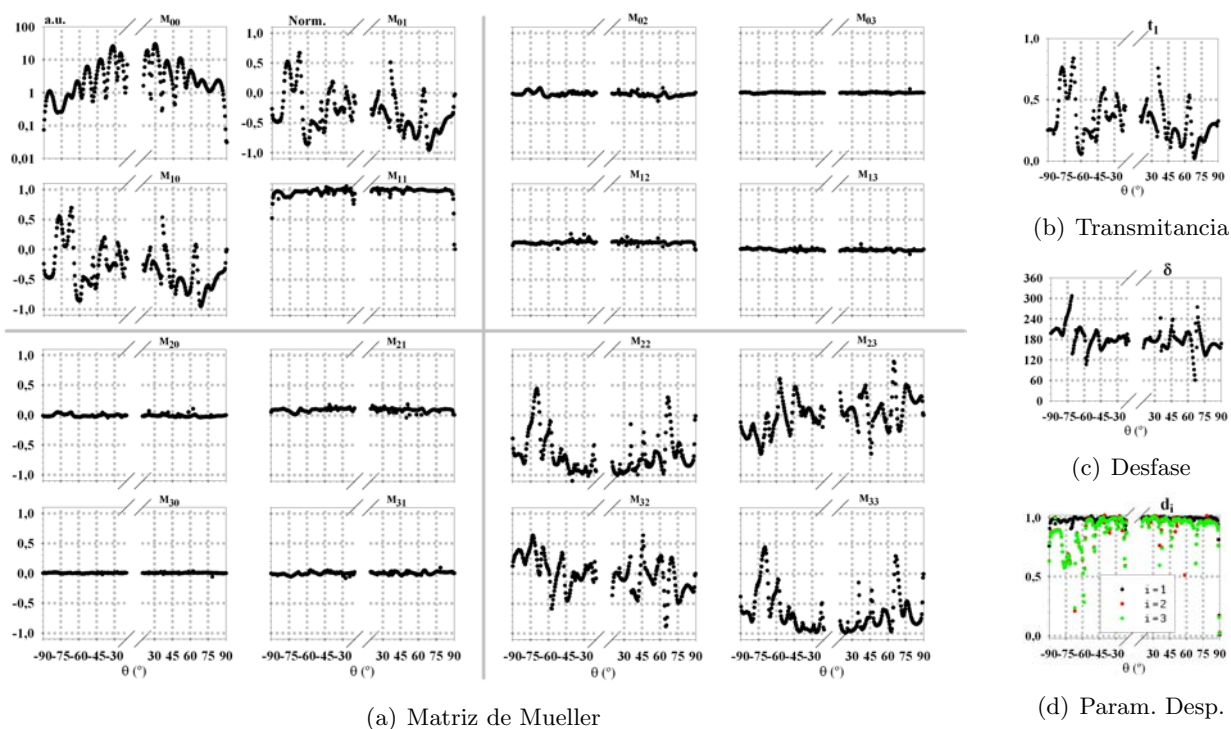


Figura B.14: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Au ( $2 \times 3 - 5 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

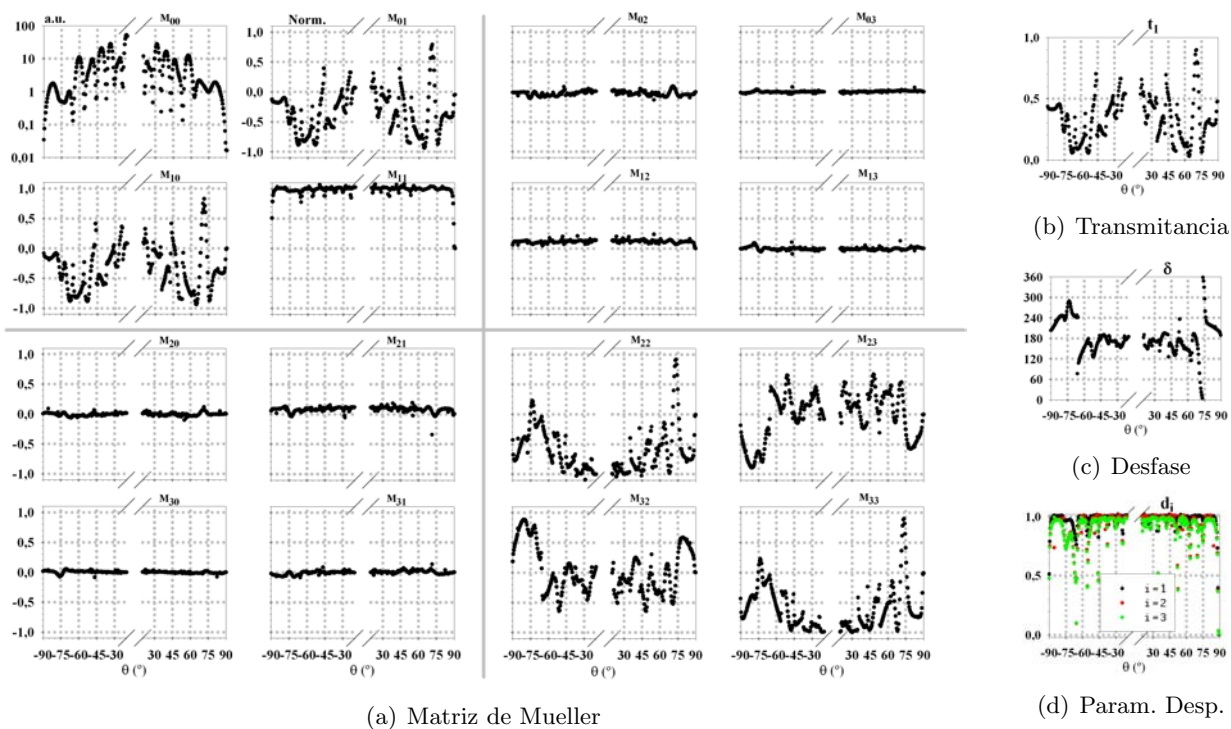


Figura B.15: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Au ( $2 \times 3 - 6 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

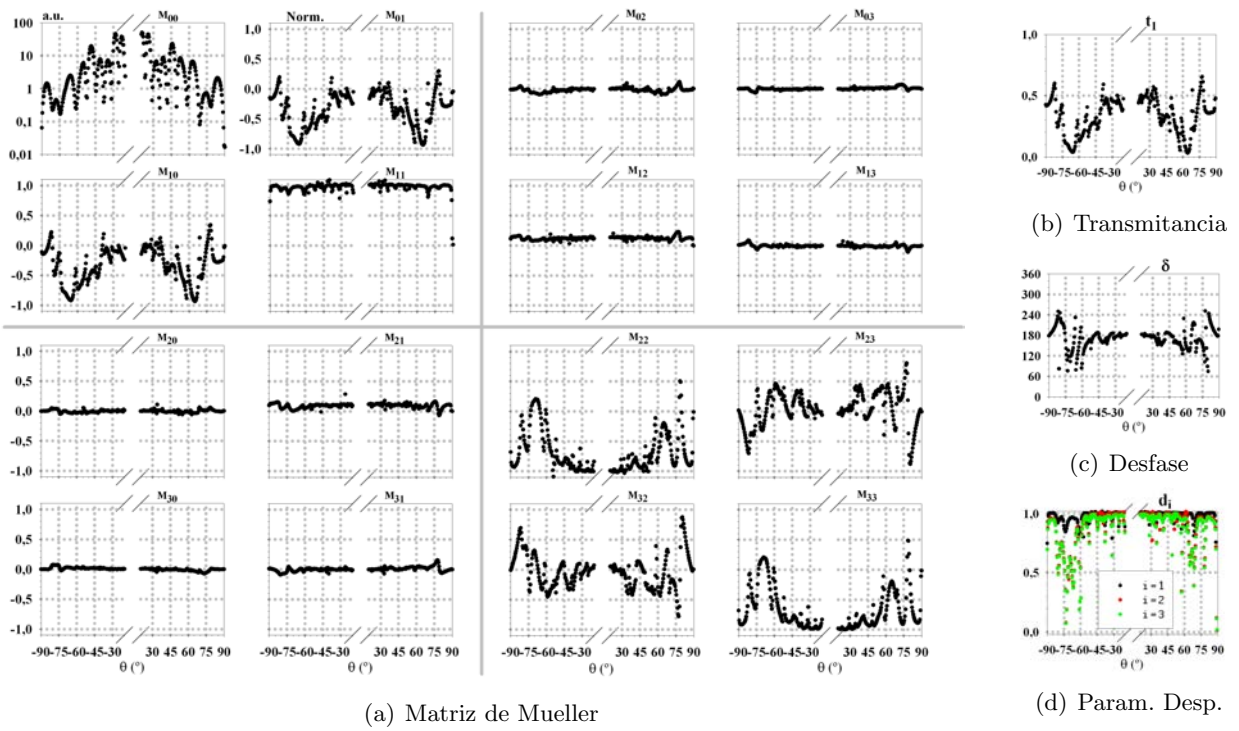


Figura B.16: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Au ( $2 \times 3 - 7 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

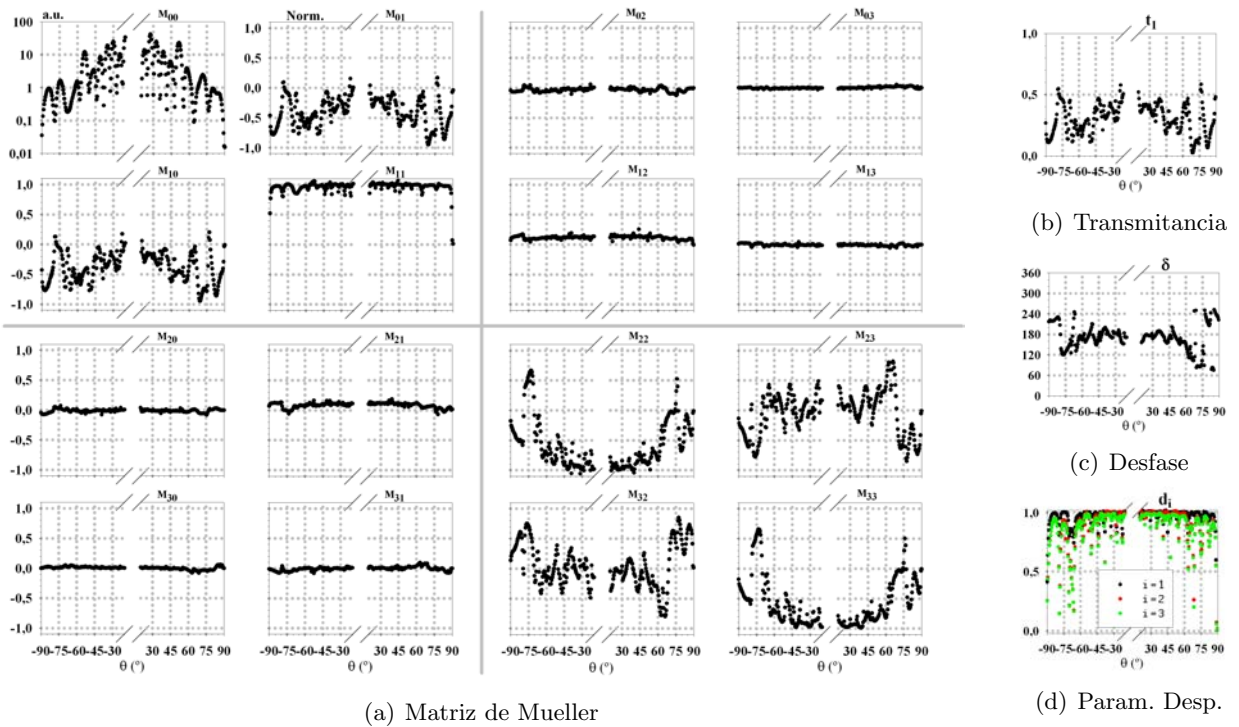


Figura B.17: Difusión (medida con el SP) por dos *ribs* de Au ( $2 \times 3 - 8 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

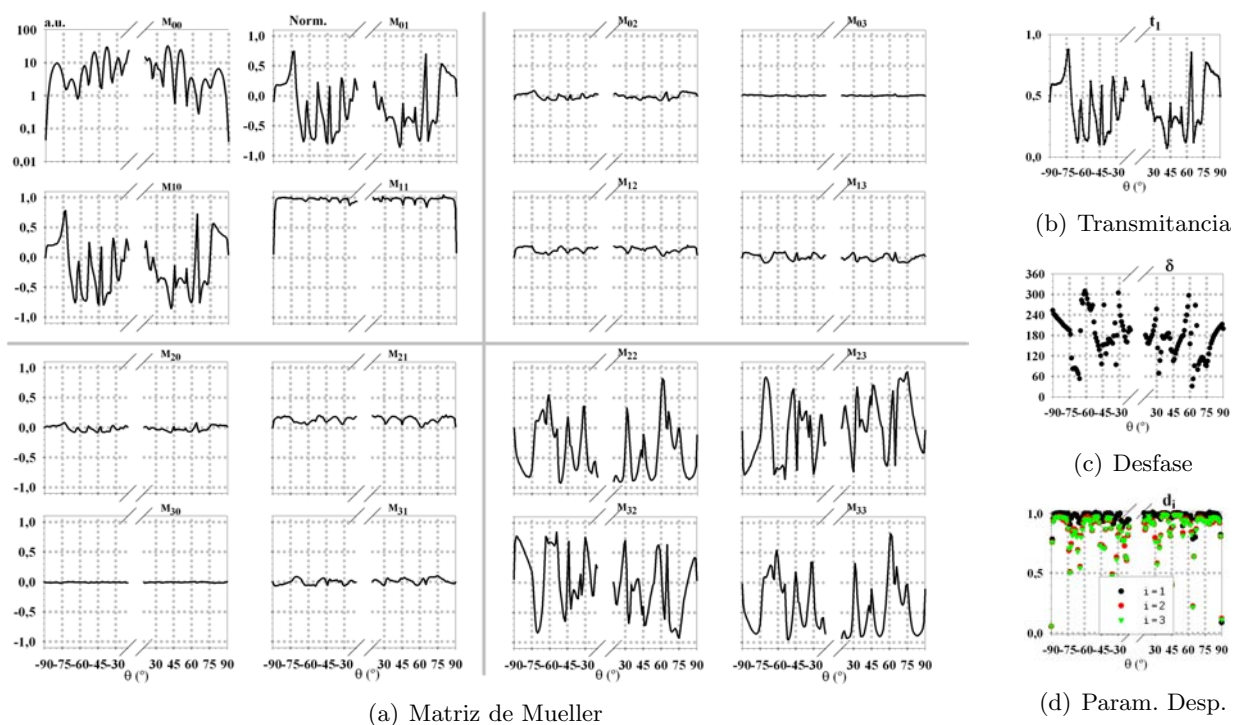


Figura B.18: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Au ( $1 \times 3 - 5 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

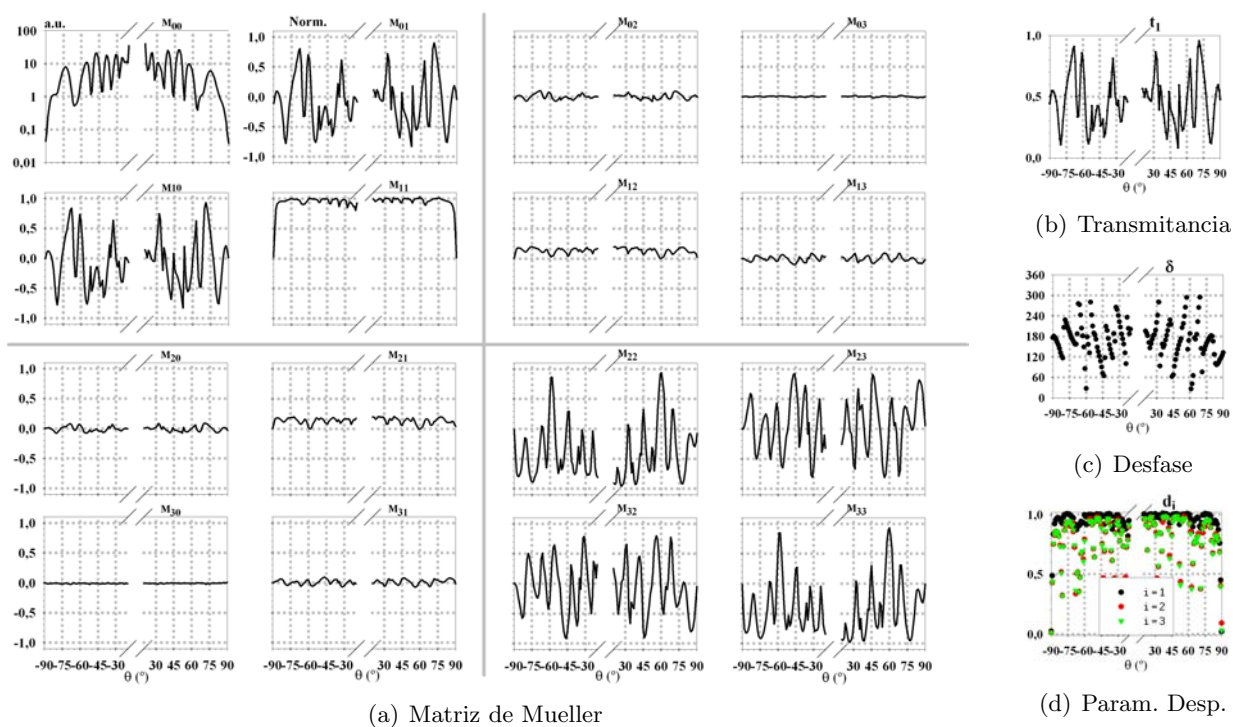


Figura B.19: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Au ( $1 \times 3 - 6 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



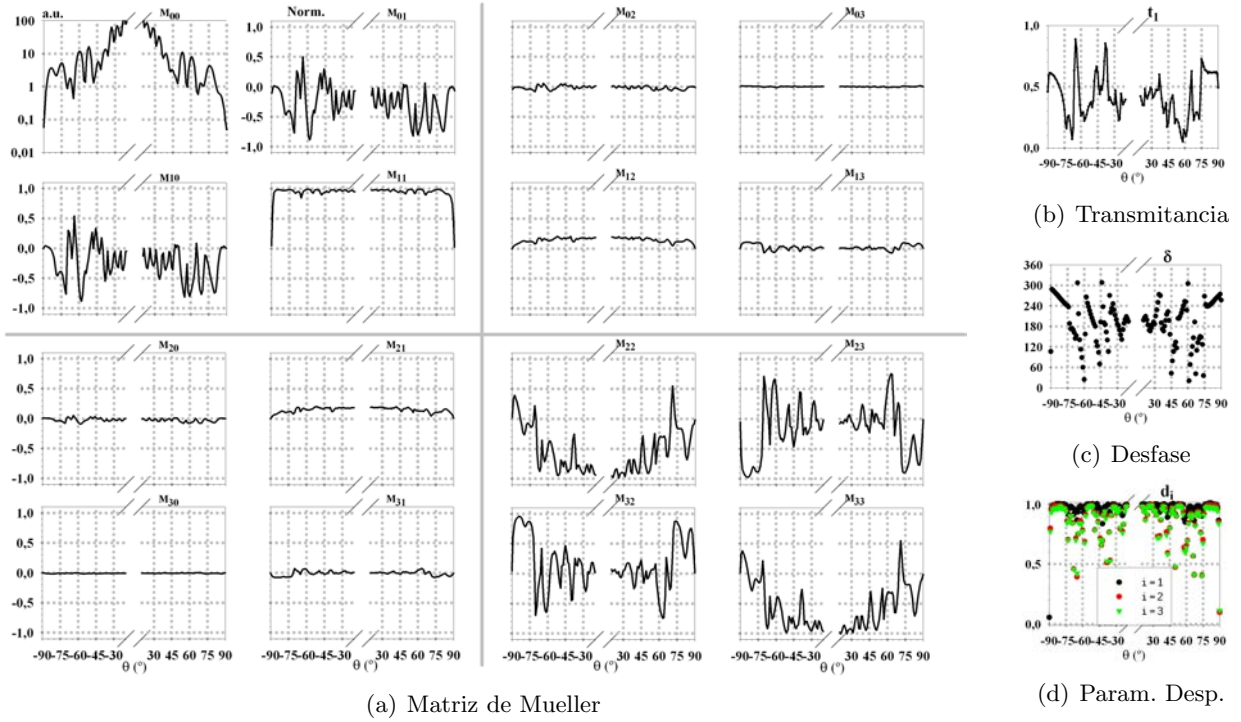


Figura B.20: Difusión (medida con el DRCP) por dos *ribs* de Au ( $1 \times 3 - 8 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

### Grooves de Silicio: Variación con el Tamaño

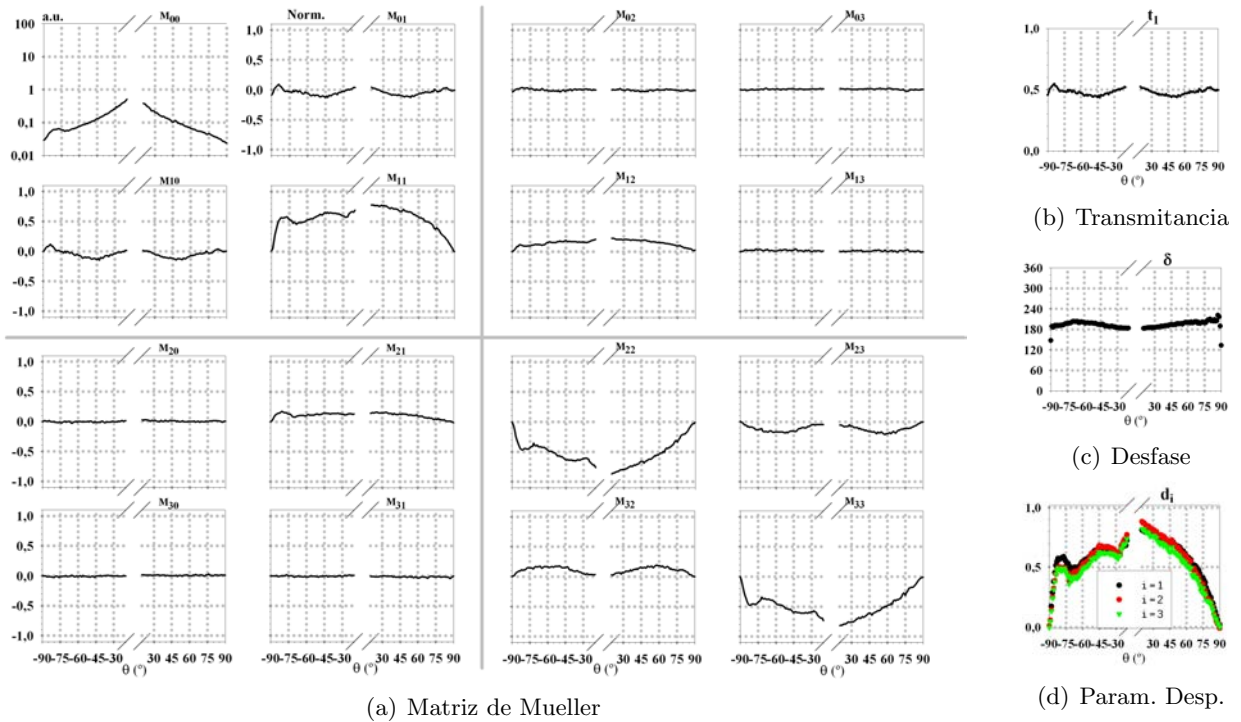


Figura B.21: Difusión (medida con el DRCP) por una *groove* de Si ( $1 \times 1 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

## Grooves de Silicio: Variación con la Distancia

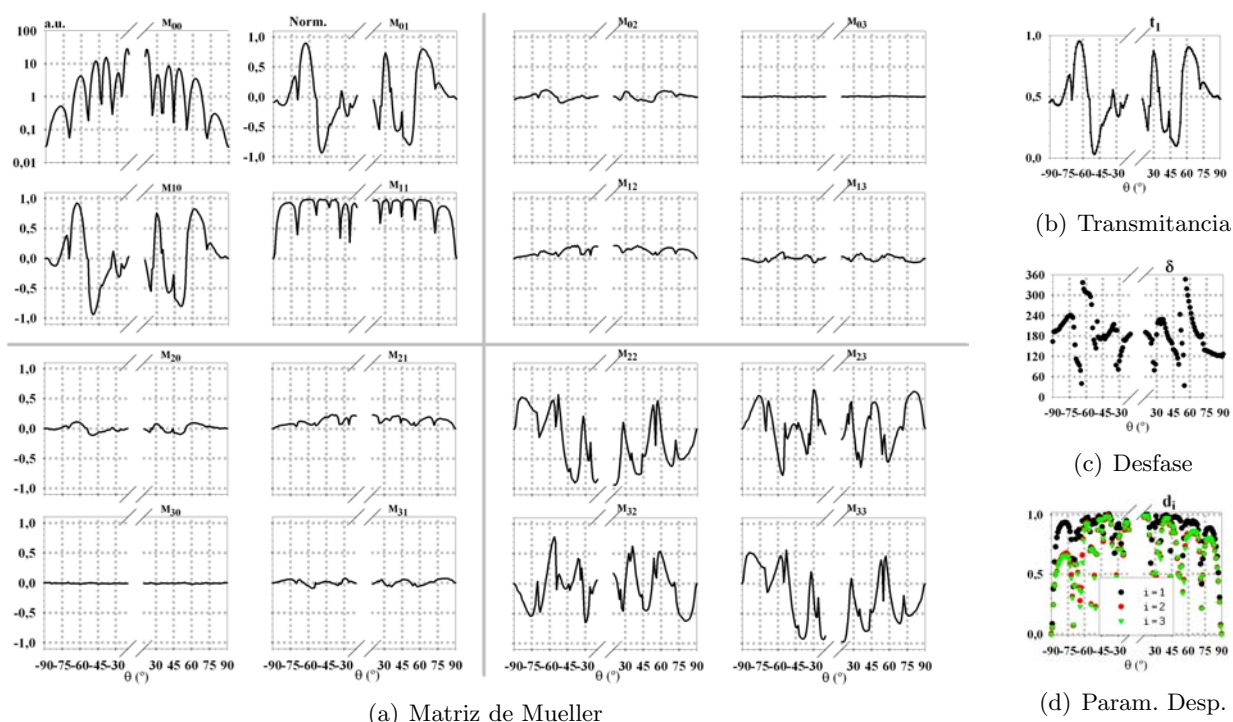


Figura B.22: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Si ( $1 \times 3 - 5 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

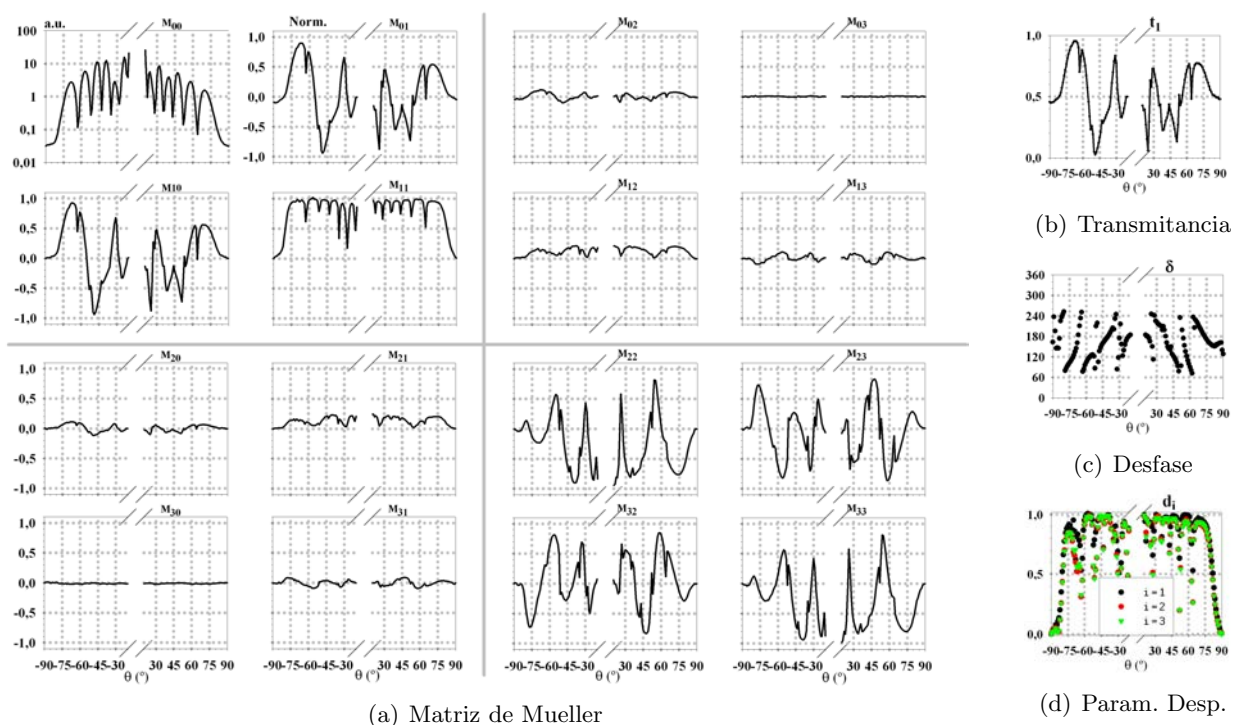


Figura B.23: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Si ( $1 \times 3 - 6 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

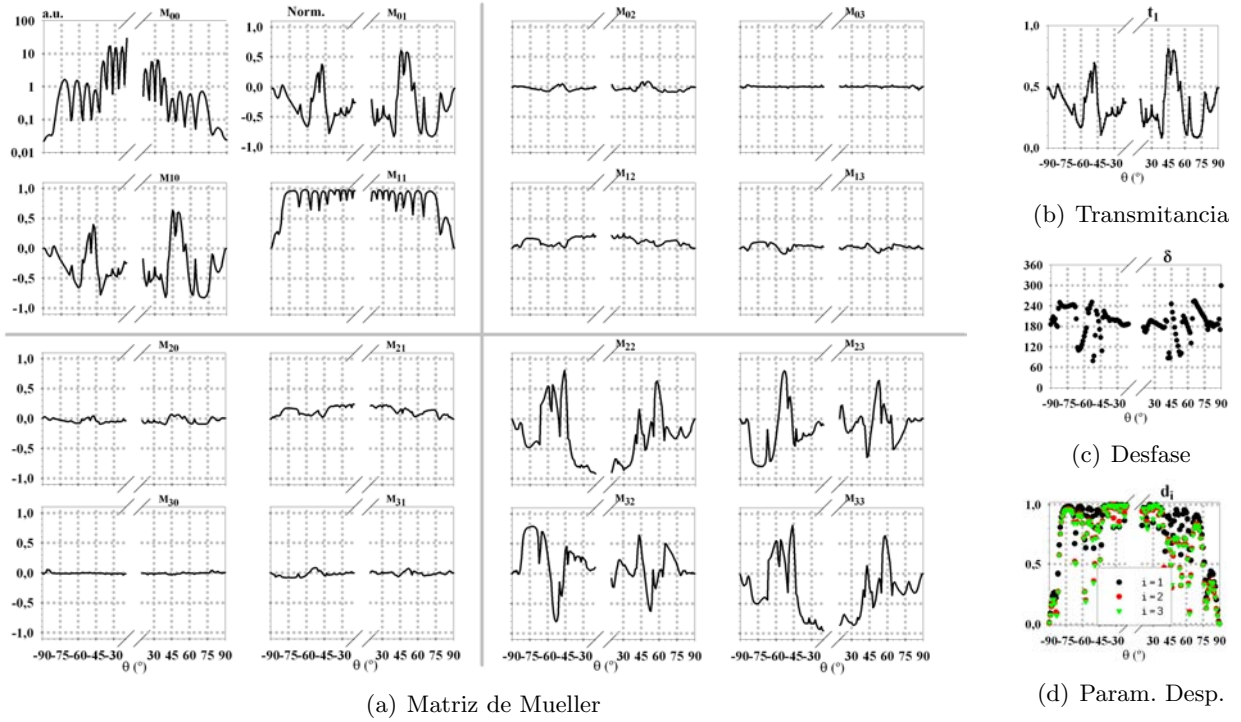


Figura B.24: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Si ( $1 \times 3 - 8 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

### Grooves de Oro: Variación con la Distancia

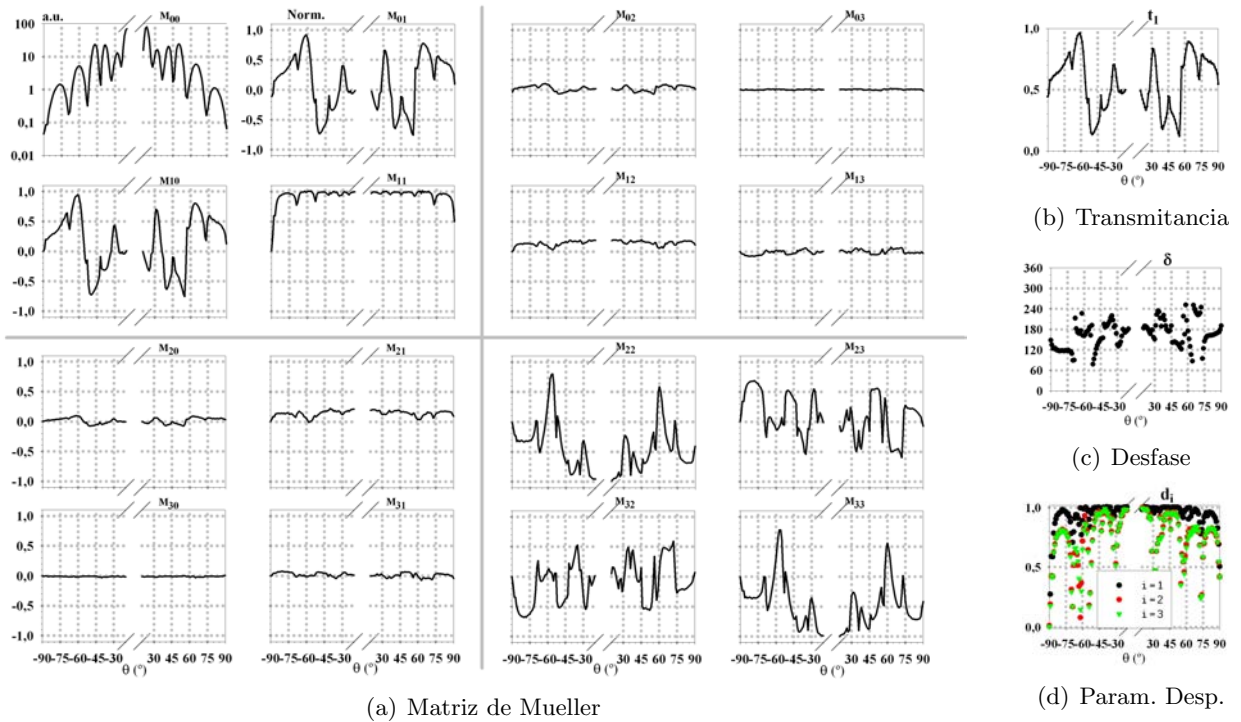


Figura B.25: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Au ( $1 \times 3 - 5 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



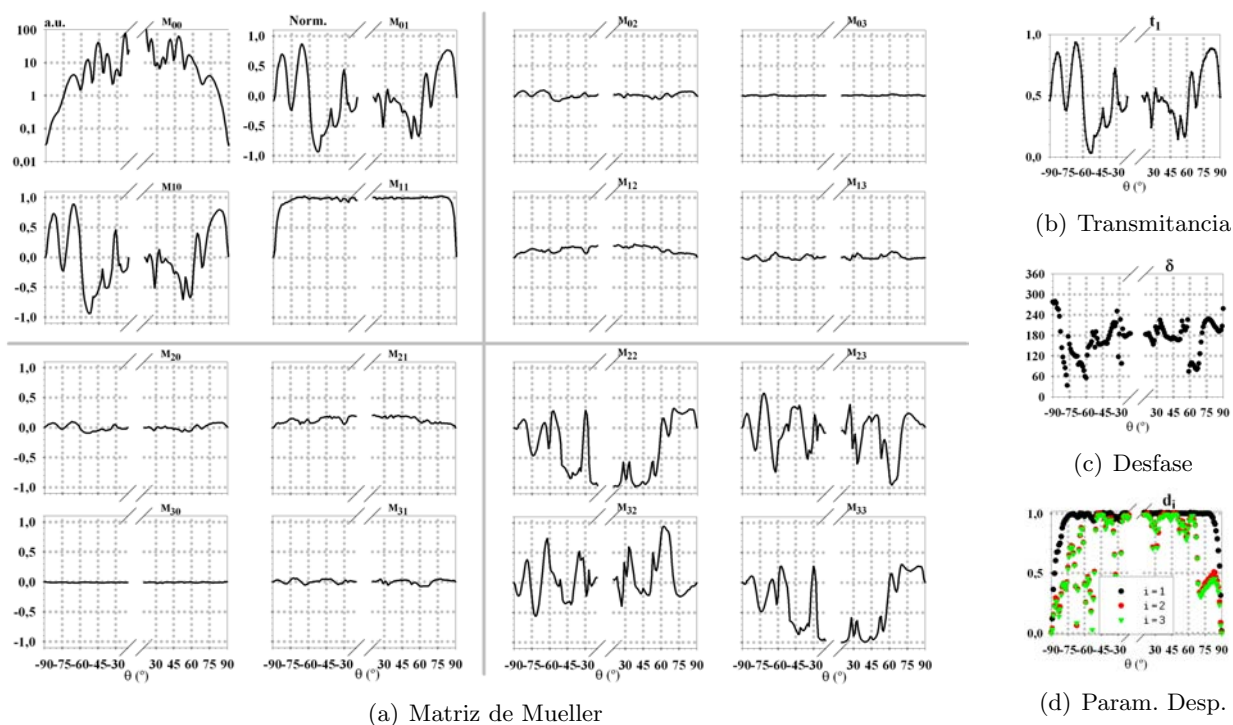


Figura B.26: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Au ( $1 \times 3 - 6 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

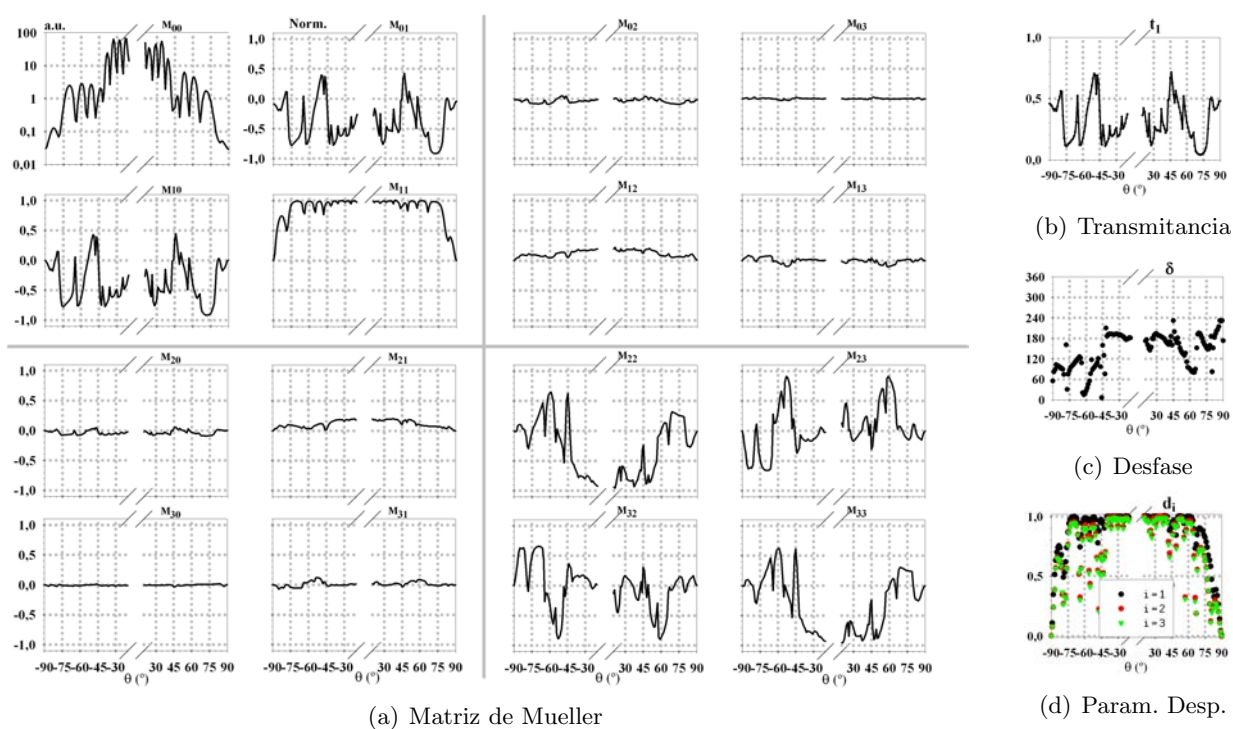


Figura B.27: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Au ( $1 \times 3 - 8 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

Otros Resultados

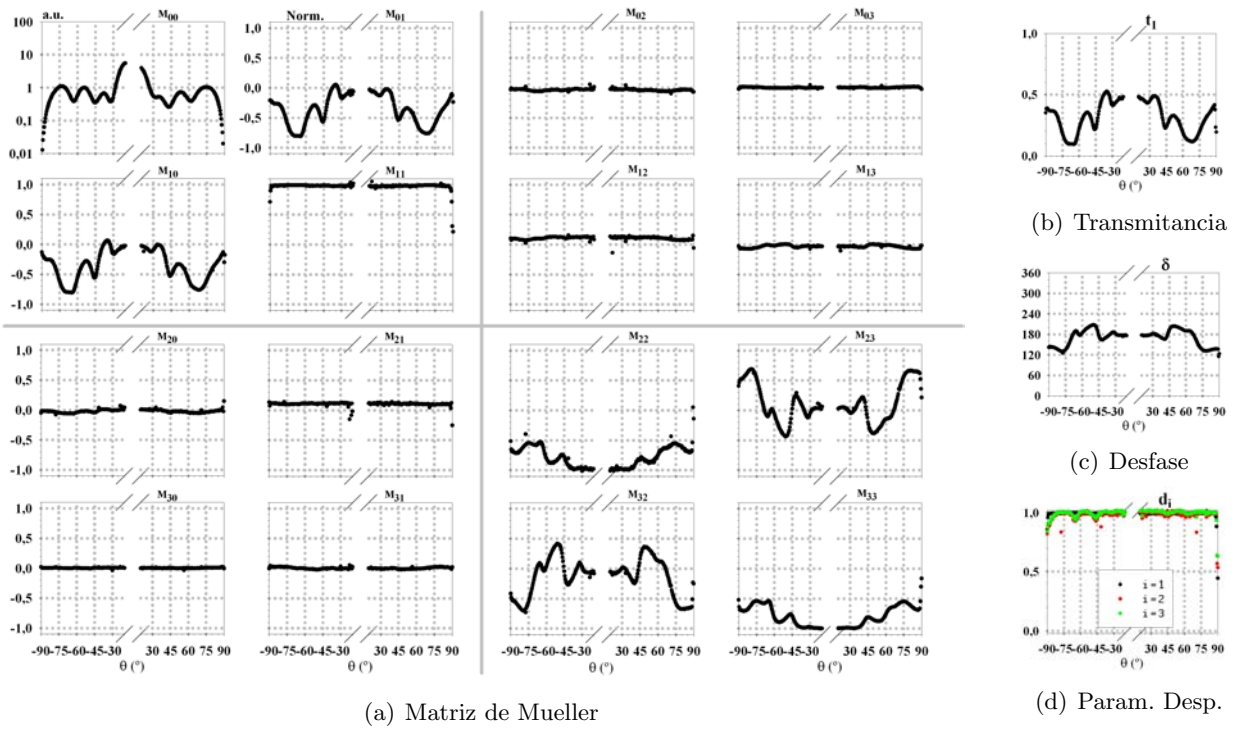


Figura B.28: Difusión (medida con el SP) por una *rib* de Si ( $2 \times 2 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).

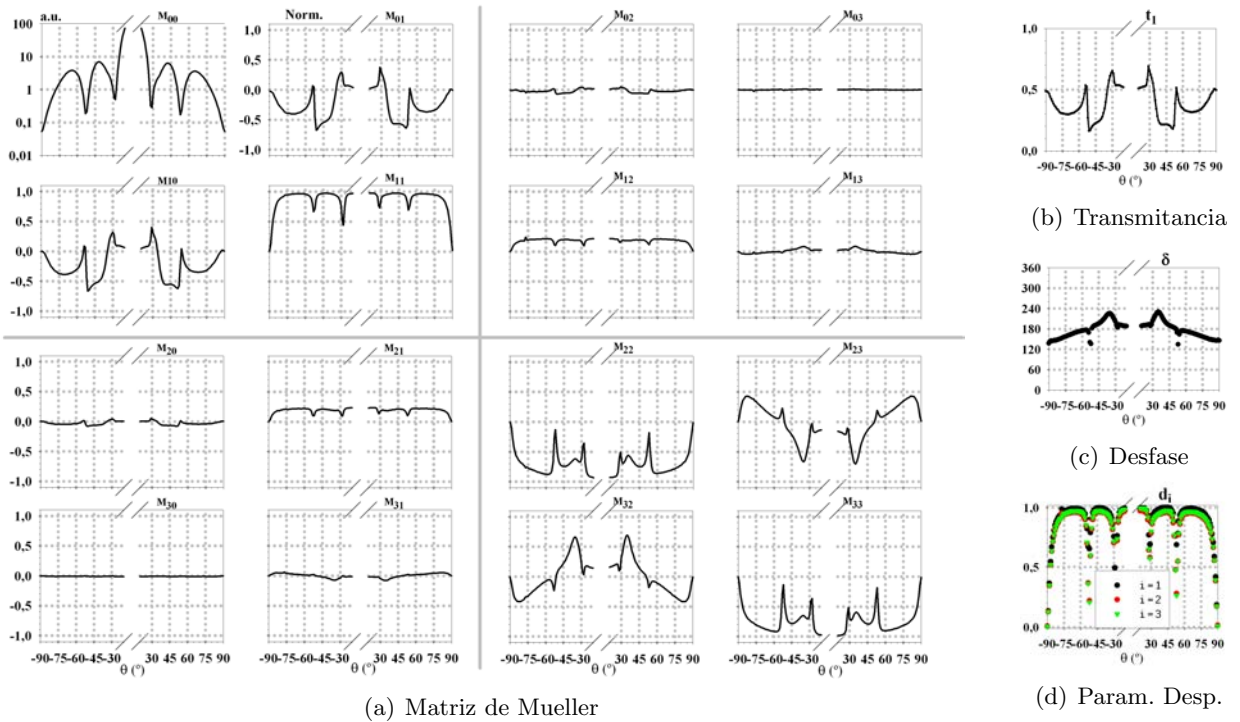


Figura B.29: Difusión (medida con el DRCP) por dos *grooves* de Si ( $1 \times 1 - 2 \mu\text{m}$ ): Evolución de la matriz de Mueller y los parámetros PD en función del ángulo de scattering ( $\theta$ ).



# Difusión de Resultados: Publicaciones y Congresos

A continuación se enumeran todas las contribuciones científicas que se han realizado en el transcurso de la investigación que ha dado lugar a esta memoria:

## Artículos

- [143] J.M. Sanz, P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz and F. González. Application of the polar decomposition to light scattering particle systems. *JQSRT*, 110:1369 – 1374, 2009.
- [14] P. Albella, J.M. Saiz, J.M. Sanz, F. Moreno, and F. González. Nanoscopic surface inspection by analyzing the linear polarization degree of the scattered light. *Opt. Lett.*, 34(12):1906 – 1908, 2009.
- [174] J.M. Sanz, P. Albella, F. González, J.M. Saiz, and F. Moreno. Mueller Matrices Polar Decomposition of the Light Scattered by 2D Geometries. *EPJ*, 5(04006):1 – 4, 2010.
- [166] J.M. Sanz, J.M. Saiz, F. González, and F. Moreno. Polar Decomposition of the Mueller Matrix: Rule-of-thumb for Square-Profile Surface Structure Recognition. *JOSA A Sent for Publication*, 2010.

## Congresos

- [142] J.M. Sanz, P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Application of the polar decomposition method to particle scattering systems. Xth Electromagnetic Light Scattering Conference, Hertfordshire (UK), September 2008. University of Hertfordshire (UK).
- [144] J.M. Sanz, P. Albella, F. González, J.M. Saiz, and F. Moreno. Polar decomposition and interference model applied to metallic nanospheres. NanoSpain 2009, Expo Congress Hall, Zaragoza (ES), March 2009. Phantoms Foundation.
- [175] J.M. Sanz, P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Aplicación del método de descomposición polar al análisis polarimétrico de sistemas difusores. IX Reunión Nacional de Óptica, Ourense (ES), September 2009. Universidad de Vigo.
- [164] J.M. Sanz, P. Albella, F. González, J.M. Saiz, and F. Moreno. Mueller matrices polar decomposition of the light scattered by 2d geometries. 1st Nanocharm on Advanced Polarimetric Instrumentation, Paris, December 2009. Echole Polytechnique.
- [176] J.M. Sanz, J.M. Saiz, F. Moreno, F. González. Polar decomposition applied to light scattering by structured 2D surfaces. SPIE: Optics and Photonics. August 2010. San Diego (USA).



# Bibliografía

- [1] E. Collett. *Polarized Light: Fundamentals and Applications*. Marcel Dekker, Inc., New York, optical engineering; v.36 edition, 1993.
- [2] R.M.A. Azzam and N.M. Bashara. *Ellipsometry and polarized light*. North Holland, Amsterdam, 1977.
- [3] R.A. Chipman. *Handbook of Optics*. OSA, 1996.
- [4] G. Mie. Beiträge zur optik trüber medien, speziell kolloidaler metallösungen. *Annalen der Physik*, 25(3):377–445, 1908.
- [5] H. Hulst. *Light scattering by small particles*. Dover, New York, 1981.
- [6] C.F. Bohren and D.R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by Small Particles*. New York Wiley, 1983.
- [7] M.I. Mishchenko, L.D. Travis, and A.A. Lacis. *Scattering, Absorption, and Emission of Light by Small Particles*. Cambridge University Press, 2002.
- [8] B.T. Draine and P.J. Flatau. *User Guide for the Discrete Dipole Approximation Code DDSCAT 6.1*. 2004.
- [9] P.C. Waterman. Symmetry, unitarity and geometry in electromagnetic scattering. *Phys. Rev.*, D(3):825–839, 1971.
- [10] J.A. Sanchez-Gil and M.Nieto-Vesperinas. Light scattering from random rough dielectric surfaces. *JOSA A*, (8):1270–1286, 1991.
- [11] K.S. Yee. Numerical solution of initial boundary value problems involving maxwells equations in isotropic media. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 14(3):302–307, 1966.
- [12] P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Backscattering of metallic microstructures with small defects located on flat substrates. *Opt. Exp.*, 15(11):6857–6867, May 2007.
- [13] Andreas Hielscher, Angela Eick, Judith Mourant, Dan Shen, James Freyer, and Irving Bigio. Diffuse backscattering mueller matrices of highly scattering media. *Opt. Exp.*, 1(13):441–453, December 1997.
- [14] P. Albella, J.M. Saiz, J.M. Sanz, F. Moreno, and F. González. Nanoscopic surface inspection by analyzing the linear polarization degree of the scattered light. *Opt. Lett.*, 34(12):1906–1908, 2009.
- [15] P. Albella. *Numerical study of light scattering by micro and nanostructures on substrate. Application to real experimental situations*. PhD thesis, Santander, 2009.
- [16] C. Whitney. Pauli-algebraic operators in polarization optics. *JOSA*, 61(9):1207–1213, 1971.
- [17] P.K. Smith and R.A. Chipman. Characterizing multilayer, low diattenuation mirrors with a mueller matrix imaging polarimeter. OSA Technical Digest (CD). OSA, June 2007.



- [18] J.A. Gordon, N. Beaudry, and R.A. Chipman. Near-angle polarization light scattering measurements of polished surfaces using a mueller matrix imaging scatterometer. OSA Technical Digest Series. OSA, October 2005.
- [19] S.C. McClain, C.L. Bartlett, J.L. Pezzaniti, and R.A. Chipman. Depolarization measurements of an integrating sphere. *Appl. Opt.*, 34(1):152, 1995.
- [20] M. Losurdo, M. Bergmair, G. Bruno, D. Cattelan, C. Cobet, A. de Martino, K. Fleischer, Z. Dohcevic-Mitrovic, N. Esser, M. Galliet, R. Gajic, D. Hemzal, K. Hingerl, J. Humlicek, R. Ossikovski, Z.V. Popovic, and O. Saxl. Spectroscopic ellipsometry and polarimetry for materials and systems analysis at the nanometer scale: state-of-the-art, potential, and perspectives. *J. Nanopart. Res.*, 11:1521–1554, 2009.
- [21] B. Kaplan and B. Drevillon. Mueller matrix measurements of small spherical particles deposited on a c-si wafer. *Appl. Opt.*, 41(19):3911–3918, July 2002.
- [22] J.L. Pezzaniti and R.A. Chipman. Angular dependence of polarizing beam-splitter cubes. *Appl. Opt.*, 33(10):1916, April 1994.
- [23] F. Le Roy-Brehonnet and B. Le Jeune. Utilization of mueller matrix formalism to obtain optical targets depolarization and polarization properties. *Prog. Quant. Electr.*, 21(2):109–151, 1997.
- [24] P.Y. Gerligand, M. Smith, and R.A. Chipman. Polarimetric images of a cone. *Opt. Exp.*, 4(10):420–430, May 1999.
- [25] R.A. Chipman. Polarization imaging. OSA Technical Digest (CD). OSA, October 2003.
- [26] J.L. Pezzaniti, S.C. McClain, R.A. Chipman, and S.Y. Lu. Depolarization in liquid-crystal televisions. *Opt. Lett.*, 18(23):2071–2073, 1993.
- [27] W. Keydel, S.R. Cloude, W.M. Boerner, E. Pottier, J.S. Lee, L. Ferro-Famil, and M. Hellmann. Radar polarimetry and interferometry. RTO EDUCATIONAL NOTES. (RTO) of NATO, 2004.
- [28] S. Guyot, M. Anastasiadou, E. Delechelle, and A. De Martino. Registration scheme suitable to mueller matrix imaging for biomedical applications. *Opt. Exp.*, 15(12):7393–7400, June 2007.
- [29] C. Collet, J. Zallat, and Y. Takakura. Clustering of mueller matrix images for skeletonized structure detection. *Opt. Exp.*, 12(7):1271–1280, April 2004.
- [30] S. Jiao and L.V. Wang. Two-dimensional depth-resolved mueller matrix of biological tissue measured with double-beam polarization-sensitive optical coherence tomography. *Opt. Lett.*, 27(2):101–103, 2002.
- [31] L. Xu, H. Li, and S. Xie. Theoretical analysis of backscattered polarization patterns of turbid media containing glucose. *Chinese Opt. Lett.*, 5(2):102–104, February 2007.
- [32] K. Twietmeyer, R.A. Chipman, and A. Elsner. Gdx-mm: An imaging mueller matrix retinal polarimeter. OSA Technical Digest (CD). OSA, 2007.
- [33] J. Bueno. Mueller matrix cslo polarimetry and improved imaging of retinal structures. 2007.
- [34] A.H. Hielscher, A.A. Eick, J.R. Mourant, D. Chen, J.P. Freyer, and I.J. Bigio. Backscattering mueller matrix analysis for biomedical optical diagnostics. volume 22 of *OSA Trends in Optics and Photonics*. OSA, March 1998.
- [35] J. Chung, W. Jung, M.J. HammerWilson, P. WilderSmith, and Z. Chen. Use of polar decomposition for the diagnosis of oral precancer. *Appl. Opt.*, 46(15):3038–3045, May 2007.
- [36] E. Collett. *Polarized Light in Fiber Optics*. The PolaWave Group and SPIE Press, 2003.

- [37] W. Sun and B. Lin. Optical characterization of metallic aerosols. *JQSRT*, 100(1-3):359–372, 2006.
- [38] Z. Balevicius, V. Vaicikauskas, and G.J. Babonas. The role of surface roughness in total internal reflection ellipsometry of hybrid systems. *App. Surf. Sci.*, 256:640–644, 2009.
- [39] G. Videen, Y. Yatskiv, and M. Mischenko, editors. *Photopolarimetry in Remote Sensing*, volume 161 of *NATO Science Series: Mathematics, Physics and Chemistry*. Kluwer Academic Publishers, Holland, 2003.
- [40] F. González and F. Moreno. *Light Scattering from Microstructures*. Springer, Berlin, lectures notes in physics edition, 2000.
- [41] M.I. Mishchenko, J.W. Hovenier, and L.D. Travis. *Light Scattering by Nonspherical Particles: Theory, Measurements, and Applications*. Academic Press, San Diego, 2000.
- [42] C.F. Bohren. Light scattering by an optically active sphere. *Chem. Phys. Lett.*, 29(3):458–462, December 1974.
- [43] A.V. Sudha, A.R. Gopala Rao, U. Devi, and A.K. Rajagopal. Positive-operator-valued-measure view of the ensemble approach to polarization optics. *JOSA A*, 25(4):874–880, 2008.
- [44] H.R. Xia, J.I. Cirac, S. Swartz, B. Kohler, D.S. Elliott, J.L. Hall, and P. Zoller. Phase shifts and intensity dependence in frequency-modulation spectroscopy. *JOSA B*, 11(5):721–730, 1994.
- [45] M. Stchakovsky, C. Caillaud, M. Foldyna, R. Ossikovski, and E. García-Caurel. Polarimetric characterization of optically anisotropic flexible substrates. *Thin Solid Films*, 516:1414–1418, 2008.
- [46] T.F. Thonn and R.M.A. Azzam. Determination of the optical constants and thickness profile of a tapered inconel film by reflection ellipsometry. *Thin Solid Films*, 127(3-4):215–222, May 1985.
- [47] G.E. Jellison. Generalized ellipsometry for materials characterization. *Thin Solid Films*, (450):42–50, 2004.
- [48] C. Packham, J.H. Hough, L. Kolokolova, and C.M. Telesco. Polarimetry research at the university of florida. *JQSRT*, 88(1-3):285–295.
- [49] N. Kiselev, V. Rosenbush, L. Kolokolova, and K. Antonyuk. The anomalous spectral dependence of polarization in comets. *JQSRT*, 109(8):1384–1391, May 2008.
- [50] S.N. Savenkov, L.T. Mishchenko, R.S. Muttiah, Y.A. Oberemok, and I.A. Mishchenko. Mueller polarimetry of virus-infected and healthy wheat under field and microgravity conditions. *JQSRT*, 88(1-3):327–343, 2003.
- [51] J.C. Maxwell. *A Treatise on Electricity and Magnetism*. 1873.
- [52] J.D. Jackson. *Classical Electrodynamics*, volume 2nd ed. New York Wiley, 1975.
- [53] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*, volume 3rd ed. Oxford Pergamon, 1965.
- [54] L.B. Felsen and S. Choudhary. A new look at evanescent waves. *Nouv. Rev. Optique*, 6(5):297–301, 1975.
- [55] J.R. Arias-González. *Resonancias Electromagnéticas en el Scattering de Luz por Superficies y Objetos: Detección y Caracterización de Objetos Ocultos, Campo Cercano y Fuerzas Ópticas*. PhD thesis, Madrid, 2002.
- [56] E.D. Palik. *Handbook of Optical Constants of Solids*. Academic Press.

- [57] M.Nieto-Vesperinas. *Scattering and Diffraction in Physical Optics*. John Wiley and Sons, Inc., New York, 1991.
- [58] P.W. Barber and S.C. Hill. *Light scattering by particles: computational methods*. World Scientific Pub Co Inc, Singapore, 1990.
- [59] F. Moreno, S. Cotera, F. González, J.M. Saiz, and G. Videen. Multiple scattering by two-particle systems: statistics of the cross-polarized scattered intensity. *JQSRT*, 79-80:983–994, 2003.
- [60] J.M. Saiz, J.L. de la Peña, F. González, and F. Moreno. Detection and recognition of local defects in 1d structures. *Opt. Com.*, 196(1-6):33–39, September 2001.
- [61] J.R. Reitz and F.J. Mildford. *Foundations of electromagnetic theory*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading-Massachusetts, 1967.
- [62] H. Yu, J. Shen, and Y. Wei. Geometrical optics approximation for light scattering by absorbing spherical particles. *JQSRT*, 110:1178–1189, 2009.
- [63] M.I. Mishchenko. Electromagnetic scattering by nonspherical particles: A tutorial review. *JQSRT*, (110):808–832, 2009.
- [64] E.M. Purcell and C.R. Pennypacker. Scattering and absorption of light by nonspherical dielectric grains. *The Astrophysical Journal*, 186:705–714, 1973.
- [65] B.T. Draine. The discrete-dipole approximation and its application to interstellar graphite grains. *Astrophys.J.*, (333):848–872, 1988.
- [66] J. Hellmers, N. Riefler, T. Wriedt, and Y.A. Eremin. Light scattering simulation for the characterization of sintered silver nanoparticles. *JQSRT*, 109(8):1363–1373, May 2008.
- [67] D. Petrov, Y. Shkuratov, and G. Videen. Optimized matrix inversion technique for the t-matrix method. *Opt. Lett.*, 32(9):1168–1170, May 2007.
- [68] D. Petrov, Y. Shkuratov, and G. Videen. Analytical light-scattering solution for chebyshev particles. *JOSA A*, 24(4):1103–1119, April 2007.
- [69] F. González, G. Videen, P.J. Valle, J.M. Saiz, J.L. de la Peña, and F. Moreno. Light scattering computational methods for particles on substrates. *JQSRT*, 70(4-6):383–393, August 2001.
- [70] W.L. Barnes, A. Dereux, and T.W. Ebbesen. Surface plasmon subwavelength optics. *Nature*, 424:824–830, 2003.
- [71] A. Madrazo and M.Nieto-Vesperinas. Scattering of electromagnetic waves from a cylinder in front of a conducting plane. *JOSA A*, 12(6):1298–1309, 1995.
- [72] G. Videen. Light scattering from a sphere on or near a surface. *JOSA A*, 8(3):483, March 1991.
- [73] G. Videen, M.G. Turner, V.J. Iafelice, W.S. Bickel, and W.L. Wolfe. Scattering from a small sphere near a surface. *JOSA A*, 10(1):118, 1993.
- [74] G. Videen and D.Ngo. Light scattering from a cylinder near a plane interface: theory and comparison with experimental data. *JOSA A*, 14(1):70–78, 1997.
- [75] K.B.Nahm and W.L. Wolfe. Light scattering models for spheres on a conducting plane: comparison with experiment. *Appl. Opt.*, (26):2995–2999, 1987.
- [76] J.L. de la Peña, J.M. Saiz, P.J. Valle, F. González, and F. Moreno. Tracking scattering minima to size metallic particles on flat substrates. *Part. Part. Syst. Charact.*, 16(3):113–118, 1999.
- [77] P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. 2d double interaction method for modeling small particles contaminating microstructures located on substrates. *JQSRT*, 106(1-3):4–10, 2007.

- [78] F. González, J.M. Saiz, P.J. Valle, and F. Moreno. Scattering from particulate metallic surfaces: effect of surface particle density. *Opt. Eng.*, 34(4):1200–1207, 1995.
- [79] G. Videen, J.Y. Hsu, W.S. Bickel, and W.L. Wolfe. Polarized light scattered from rough surfaces. *JOSA A*, 9(7):1111, July 1992.
- [80] C.B. Tan, A. Khoh, and S.H. Yeo. Electromagnetic ray tracing model for line structures. *Opt. Exp.*, 16(6):3589–3603, 2008.
- [81] B. Ung and Y. Sheng. Optical surface waves over metallo-dielectric nanostructures: Sommerfeld integrals revisited. *Opt. Exp.*, 16(12), June 2008.
- [82] U. Comberg and T. Wriedt. Comparison of scattering calculations for aggregated particles based on different models. *JQSRT*, 63:149–162, 1999.
- [83] G.W. Mulholland, C.F. Bohren, and K.A. Fuller. Light scattering by agglomerates: Coupled electric and magnetic dipole method. *Langmuir, Am. Chem. Soc.*, 10(8):2533–2546, 1994.
- [84] Y.L. Xu. Electromagnetic scattering by an aggregate of spheres: asymmetry parameter. *Phys. Lett. A*, (249):30–36, 1998.
- [85] P.J. Valle, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Electromagnetic interaction between two parallel circular cylinders on a planar interface. *IEEE Trans. Ant. Prop.*, 44(3):321–325, 1996.
- [86] F. Moreno, F. González, and J.M. Saiz. Plasmon spectroscopy of metallic nanoparticles above flat dielectric substrates. *Opt. Lett.*, 31(12):1902–1904, June 2006.
- [87] T. Kalkbrenner, U. Hakanson, A. Schadle, S. Burger, C. Henkel, and V. Sandoghdar. Optical microscopy via spectral modifications of a nanoantenna. *Physical Review Letters*, 95, November 2005.
- [88] J. Casas. *Óptica*. Coop. Artes Gráficas LIBRERIA GENERAL, Zaragoza, 7a. ed. edition, 1994.
- [89] R. Barakat. Theory of the coherency matrix for light of arbitrary spectral bandwidth. *JOSA*, 53(3):317–323, March 1963.
- [90] J.J. Gil, J.M. Correas, P.A. Melero, and C. Ferreira. Generalized polarization algebra. volume 31 of *Monografías Sem. Matem. García de Galdeano*, pages 161–167, 2004.
- [91] J.J. Gil. Polarimetric characterization of light and media. *Eur. Phys. Jour. Appl. Phys.*, 40:1–47, 2007.
- [92] S.Y. Lu and R.A. Chipman. Mueller matrices and the degree of polarization. *Opt. Com.*, 146(1-6):11–14, 1998.
- [93] S.N. Savenkov, O.I. Sydoruk, and R.S. Muttiah. Conditions for polarization elements to be dichroic and birefringent. *JOSA A*, 22(7):1447–1452, 2005.
- [94] C. Vezien, B. Clairac, B. Fontas, and S. Guyot. Conceiving an easy-to-understand and automated polarimeter: application to a study of collagen. *IEEE Trans. Edu.*, 48(4):772–778, November 2005.
- [95] D.G.M. Anderson and R. Barakat. Necessary and sufficient conditions for a mueller matrix to be derivable from a jones matrix. *JOSA A*, 11(8):2305, 1994.
- [96] J.J. Gil Perez. *Determinación de parámetros de polarización en representación matricial. Contribución teórica y realización de un dispositivo automático*. PhD thesis, Zaragoza, 1983.
- [97] A. Gerrard and J.M. Burch. *Introduction to Matrix Methods in Optics*. Dover Publications, Inc., New York, originally pub: london; new york:wiley, 1975 edition, 1994.

- [98] S.Y. Lu and R.A. Chipman. Interpretation of mueller matrices based on polar decomposition. *JOSA A*, 13(5):1106, May 1996.
- [99] R.M.A. Azzam, T.L. Bundy, and N.M. Bashara. The fixed-polarizer nulling scheme in generalized ellipsometry. *Opt. Com.*, 7(2):110–115, February 1973.
- [100] R.M.A. Azzam, F.F. Sudradjat, and M.Nazim Uddin. Prism spectroscopic ellipsometer. *Thin Solid Films*, 455-456:54–60, May 2004.
- [101] A. Álvarez Herrero. *Caracterización Elipsométrica de Materiales Dieléctricos de Aplicación en el Desarrollo de Sensores Evanescentes de Fibra Óptica para el Sector Aeroespacial*. PhD thesis, Madrid, 2002.
- [102] R.M.A. Azzam, A.M. El-Saba, and M.A.G. Abushagur. Spectrophotopolarimeter based on multiple reflections in a coated dielectric slab. *Thin Solid Films*, 313-314:53–57, February 1998.
- [103] S. Krishnan, S. Hampton, and R.M.A. Azzam. Spectroscopic ellipsometry using the grating division-of-amplitude photopolarimeter (g-doap). *Thin Solid Films*, 455-456:24–32, May 2004.
- [104] R.M.A. Azzam. Modulated generalized ellipsometry. *JOSA*, 66(6):520, June 1976.
- [105] R.M.A. Azzam. A simple fourier photopolarimeter with rotating polarizer and analyzer for measuring jones and mueller matrices. *Opt. Com.*, 25(2):137–140, May 1978.
- [106] O. Muñoz, F. Moreno, D. Guirado, J.L. Ramos, A. López, F. Girela, J.M. Jerónimo, L.P. Costillo, and I. Bustamante. Experimental determination of scattering matrices of dust particles at visible wavelengths: The iaa light scattering apparatus. *JQSRT*, 111(1):187–196, 2010.
- [107] J.L. de la Peña, J.M. Saiz, P.J. Valle, F. González, F. Moreno, and G. Videen. Enhanced backscatter from monodisperse contaminants on a substrate. *JQSRT*, 63:383–392, 1999.
- [108] R.M.A. Azzam. Photopolarimeter using two modulated optical rotators. *Opt. Lett.*, 1(5):181, November 1977.
- [109] R.M.A. Azzam. Photopolarimetric measurement of the mueller matrix by fourier analysis of a single detected signal. *Opt. Lett.*, 2(6):148, June 1978.
- [110] R.M.A. Azzam. Modulated-mueller-matrix photopolarimetry (mmpm): a technique for the study of elastic light scattering by depolarizing temporally modulated media and surfaces. *Opt. Lett.*, 5(7):303, July 1980.
- [111] D.H. Goldstein. Mueller matrix dual-rotating retarder polarimeter. *Appl. Opt.*, 31(31):6676, November 1992.
- [112] G. Videen and W.S. Bickel. Light-scattering mueller matrix for a rough fiber. *Appl. Opt.*, 31(18):3488, June 1992.
- [113] D. Guirado, J.W. Hovenier, and F. Moreno. Circular polarization of light scattered by asymmetrical particles. *JQSRT*, 106(1-3):63–73, 2007.
- [114] S.N. Savenkov, R.S. Muttiah, and Y.A. Oberemok. Transmitted and reflected scattering matrices from an english oak leaf. *Appl. Opt.*, 42(24):4955–4962, 2003.
- [115] J.B. Conway. *A Course in Functional Analysis*. Springer-Verlag, 1994.
- [116] J.J. Gil and E. Bernabeu. Obtainment of the polarizing and retardation parameters of a non-depolarizing optical system from the polar decomposition of its mueller matrix. *Optik*, 76(2):67–71, 1987.
- [117] S.R. Cloude. Group theory and polarization algebra. *Optik*, 75(1):26–36, 1986.

- [118] A.B. Kostinski, C.R. Givens, and J.M. Kwiatkowski. Constraints on mueller matrices of polarization optics. *Appl. Opt.*, 32(9):1646–1651, March 1993.
- [119] J.W. Hovenier and C.V.M. van der Mee. Testing scattering matrices: A compendium of recipes. *JQSRT*, 55(5):649–661, May 1996.
- [120] S.R. Cloude. Depolarization by aerosols: Entropy of the amsterdam light scattering database. *JQSRT*, 110:1665–1676, 2009.
- [121] J.E. Ahmad and Y. Takakura. Error analysis for rotating active stokes-mueller imaging polarimeters. *Opt. Exp.*, 16(18):14274–14287, 2008.
- [122] E.S. Fry and G.W. Kattawar. Relations between elements of the stokes matrix. *Appl. Opt.*, 20(16):2811–2814, August 1981.
- [123] J.J. Gil. Characteristic properties of mueller matrices. *JOSA A*, 17(2):328–334, February 2000.
- [124] C. Brosseau and R. Barakat. Jones and mueller polarization matrices for random media. *Opt. Com.*, 84:127–132, 1991.
- [125] M. Anastasiadou, S. Ben Hatit, R. Ossikovski, S. Guyot, and A. De Martino. Experimental validation of the reverse polar decomposition of depolarizing mueller matrices. *J. Eur. Opt. Soc.*, Rapid Publications(07018):07018, May 2007.
- [126] E. Wolf. Non-cosmological redshifts of spectral lines. *Lett. to Nat.*, 326:363–365, March 1987.
- [127] T.A. Leskova, A.A. Maradudin, A.V. Shchegrov, and E.R. Méndez. Spectral changes of light scattered from a bounded medium with a random surface. *Phys. Rev. Lett.*, 79(6):1010–1013, August 1997.
- [128] R.A. Chipman. Depolarization analyzed by matrix logarithms. OSA Technical Digest (CD). OSA, 2007.
- [129] R. Ossikovski. Interpretation of nondepolarizing mueller matrices based on singular-value decomposition. *JOSA A*, 25(2):473–482, February 2008.
- [130] J. Morio and F. Goudail. Influence of the order of diattenuator, retarder, and polarizer in polar decomposition of mueller matrices. *Opt. Lett.*, 29(19):2234–2236, October 2004.
- [131] R. Ossikovski, A. De Martino, and S. Guyot. Forward and reverse product decompositions of depolarizing mueller matrices. *Opt. Lett.*, 32(6):689–691, March 2007.
- [132] M.K. Swami, S. Manhas, P. Buddhiwant, N. Ghosh, A. Uppal, and P.K. Gupta. Polar decomposition of 3 x 3 mueller matrix: a tool for quantitative tissue polarimetry. *Opt. Exp.*, 14(20):9324–9337, October 2006.
- [133] R. Ossikovski, M. Anastasiadou, and A. De Martino. Product decompositions of depolarizing mueller matrices with negative determinants. *Opt. Com.*, 281(9):2406–2410, May 2008.
- [134] N. Ghosh, M.F.G. Wood, S.H. Li, R.D. Weisel, B.C. Wilson, R.K. Li, and I.A. Vitkin. Mueller matrix decomposition for polarized light assessment of biological tissues. *J. Biophoton.*, 2(3):145–156, 2009.
- [135] N. Ghosh, M.F.G. Wood, and A. Vitkin. Influence of the order of the constituent basis matrices on the mueller matrix decomposition-derived polarization parameters in complex turbid media such as biological tissues. *Opt. Comm.*, 283(6):1200–1208, March 2010.
- [136] S. Manhas, M.K. Swami, P. Buddhiwant, N. Ghosh, P.K. Gupta, and J. Singh. Mueller matrix approach for determination of optical rotation in chiral turbid media in backscattering geometry. *Opt. Exp.*, 14(1):190–202, 2006.



- [137] R. Ossikovski. Analysis of depolarizing mueller matrices through a symmetric decomposition. *JOSA A*, 26(5):1109–1118, May 2009.
- [138] M. Foldyna, E. García-Caurel, R. Ossikovski, A. De Martino, and J.J. Gil. Retrieval of a non-depolarizing component of experimentally determined depolarizing mueller matrices. *Opt. Exp.*, 17(15):12794–12806, July 2009.
- [139] F. Boulvert, G. Le Brun, B. Le Jeune, J. Cariou, and L. Martin. Decomposition algorithm of an experimental mueller matrix. *Opt. Comm.*, 282:692–704, 2009.
- [140] F. LeRoy-Bruhonnet, B. LeJeune, P. Elias, J. Cariou, and J. Lotrian. Optical media and target characterization by mueller matrix decomposition. *J. Phys. D Appl. Phys.*, 29:34–38, 1996.
- [141] J.M. Correas, P.A. Melero, and J.J. Gil. Decomposition of mueller matrices in pure optical media. volume 27 of *Monografías Sem. Matem. García de Galdeano*, pages 233–240, 2003.
- [142] J.M. Sanz, P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Application of the polar decomposition method to particle scattering systems. Electromagnetic Light Scattering Xth Conference, Hertfordshire (UK), September 2008. University of Hertfordshire (UK).
- [143] J.M. Sanz, P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Application of the polar decomposition to light scattering particle systems. *JQSRT*, 110:1369–1374, 2009.
- [144] J.M. Sanz, P. Albella, F. González, J.M. Saiz, and F. Moreno. Polar decomposition and interference model applied to metallic nanospheres. NanoSpain 2009, Expo Congress Hall - Zaragoza (ES), March 2009. Phantoms Foundation.
- [145] M.I. Mishchenko, D.W. Mackowski, and L.D. Travis. Scattering of light by bispheres with touching and separated components. *Appl. Opt.*, 34(21):4589–4599, 1995.
- [146] B. DeBoo, J. Sasian, and R.A. Chipman. Degree of polarization surfaces and maps for analysis of depolarization. *Opt. Exp.*, 12(20):4941–4958, October 2004.
- [147] M. Kocifaj, F. Kundracik, and G. Videen. Optical properties of single mixed-phase aerosol particles. *JQSRT*, 109(11):2108–2123, 2008.
- [148] M.H. Smith. Optimization of a dual-rotating-retarder mueller matrix polarimeter. *Appl. Opt.*, 41(13):2488–2493, May 2002.
- [149] K. Ichimoto, K. Shinoda, T. Yamamoto, and J. Kiyohara. Photopolarimetric measurement system of mueller matrix with dual rotating waveplates. *Publ.Natl. Astron. Obs. Japan*, 9:11–19, 2006.
- [150] C. Chen, I. An, G.M. Ferreira, N.J. Podraza, J.A. Zapien, and R.W. Collins. Multichannel mueller matrix ellipsometer based on the dual rotating compensator principle. *Thin Solid Films*, 455:14–23, 2004.
- [151] R.M.A. Azzam. Simulation of mechanical rotation by optical rotation: Application to the design of a new fourier photopolarimeter. *JOSA*, 68(4):518, April 1978.
- [152] D.H. Goldstein and R.A. Chipman. Error analysis of a mueller matrix polarimeter. *JOSA A*, 7(4):693, April 1990.
- [153] J.E. Ahmad and Y. Takakura. Error analysis for rotating active stokes-mueller imaging polarimeters. *Opt. Lett.*, 31(19):2858–2860, October 2006.
- [154] J. Lee, J. Koh, and R.W. Collins. Multichannel mueller matrix ellipsometer for real-time spectroscopy of anisotropic surfaces and films. *Opt. Lett.*, 25(21):1573–1575, November 2000.

- [155] C. Chen, I. An, and R.W. Collins. Multichannel mueller matrix ellipsometry for simultaneous real-time measurement of bulk isotropic and surface anisotropic complex dielectric functions of semiconductors. *Phys. Rev. Lett.*, 90(21):4, May 2003.
- [156] Y. Takakura and J. El Sayed Ahmad. Noise distribution of mueller matrices retrieved with active rotating polarimeters. *Appl. Opt.*, 46:7354–7364, 2007.
- [157] S.M.F.Nee, C. Yoo, T. Cole, and D. Burge. Characterization for imperfect polarizers under imperfect conditions. *App. Opt.*, 37(1):54–64, 1998.
- [158] Schott Glass Inc. Publications. *Optical Glass Datasheets*. 2009.
- [159] J.M. Saiz, P.J. Valle, F. González, E.M. Ortiz, and F. Moreno. Scattering by a metallic cylinder on a substrate: burying effects. *Opt. Lett.*, 21(17):1330, 1996.
- [160] F. Moreno, F. González, J.M. Saiz, P.J. Valle, and D.L. Jordan. Experimental study of copolarized light scattering by spherical metallic particles on conducting flat substrates. *JOSA A*, 10(1):141, 1993.
- [161] P. Clemente, V. Durán, L. Martínez-León, V. Climent, E. Tajahuerce, and J. Lancis. Use of polar decomposition of mueller matrices for optimizing the phase response of a liquid-crystal-on-silicon display. *Opt. Exp.*, 16(3):1965–1974, 2008.
- [162] M. Smith. Polarization metrology moves beyond home-brewed solutions. *Laser Focus World*, Oct. 2004, 40(10), October 2004.
- [163] V.J. Iafelice and W.S. Bickel. Polarized light scattering matrix elements for micron-sized rectangular aluminum lines on reflecting optical surfaces. *App. Opt.*, 26:1799, 1987.
- [164] J.M. Sanz, P. Albella, F. González, J.M. Saiz, and F. Moreno. Mueller matrices polar decomposition of the light scattered by 2d geometries. 1st Nanocharm on Advanced Polarimetric Instrumentation, Paris, December 2009. Ecole Polytechnique.
- [165] P. Elies, B. Le Jeune, F. Le Roy-Brehonnet, J. Cariou, and J. Lotrian. Experimental investigation of the speckle polarization for a polished aluminium sample. *J. Phys. D Appl. Phys. Physics D Applied Physics*, 30:29–39, 1997.
- [166] J.M. Sanz, J.M. Saiz, F. González, and F. Moreno. Polar decomposition of the mueller matrix: Rule of thumb for square profile surface structure recognition. *JOSA A*, Sent for Publication, 2010.
- [167] F. Moreno, J.M. Saiz, P.J. Valle, and F. González. Metallic particle sizing on flat surfaces: Application to conducting substrates. *Appl. Phys. Lett.*, 68(21):3087, 1996.
- [168] J.L. de la Peña, F. González, J.M. Saiz, F. Moreno, and P.J. Valle. Sizing particles on substrates. a general method for oblique incidence. *J. Appl. Phys.*, 85:432, 1999.
- [169] C.F. Bohren. Sizing nanoparticles by means of elliptically polarized scattered light: A suggested method. *Particle and Particle Systems Characterization*, 7(1-4):107–112, 1990.
- [170] C.Y. Liu and W.E. Fun. Polarized angular dependence of out-of-plane light-scattering measurements for nanoparticles on wafer. *Opt. Com.*, 282:2097–2103, 2009.
- [171] B. Setién, P. Albella, J.M. Saiz, F. González, and F. Moreno. Spectral behaviour of the linear polarization degree at right-angle scattering configuration for nanoparticle systems. *New J. of Phys. IOP*, Sent for Publication, 2010.
- [172] H.A. Atwater and A. Polman. Plasmonics for improved photovoltaic devices. *Nat. Mat.*, 9:205–213, March 2010.

- [173] P.Y. Gerligand, M. Smith, and R.A. Chipman. Polarimetric images of a cone. *Opt. Exp.*, 4(10):420–430, May 1999.
- [174] J.M. Sanz, P. Albella, F. González, J.M. Saiz, and F. Moreno. Mueller matrices polar decomposition of the light scattered by 2d geometries. *EPJ*, 5(04006):1–4, 2010.
- [175] J.M. Sanz, P. Albella, F. Moreno, J.M. Saiz, and F. González. Aplicación del método de descomposición polar al análisis polarimétrico de sistemas difusores. IX Reunión Nacional de Óptica, Ourense (ES), September 2009. Universidad de Vigo.
- [176] J.M. Sanz, J.M. Saiz, F. Moreno, and F. González. Polar decomposition applied to light scattering by structured 2d surfaces. Optics and Photonics, San Diego (USA), August 2010. SPIE.

\* Algunos de los tipos de letra no han sido reproducidos correctamente en *latex*, como ocurre en la referencia [106]: **O. Muñoz et al.**