

Universidad de Cantabria

Tesis Doctoral

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ÓPTICA ADAPTATIVA

Vidal Fernández Canales

Capítulo 6

IMÁGENES PARCIALMENTE COMPENSADAS

En el capítulo 2 se describió la formación de imágenes en los grandes telescopios situados sobre la superficie terrestre utilizando el modelo de Goodman. Las imágenes de corta exposición presentan un aspecto granulado, típico del speckle, y la estadística de la intensidad luminosa es exponencial. Al corregir el frente de onda mediante sistemas de óptica adaptativa se redistribuye la intensidad luminosa en la imagen y varía su estadística. En este capítulo se describe un modelo del proceso de formación de la imagen en telescopios astronómicos que cuentan con un sistema de óptica adaptativa. El modelo es una generalización del de Goodman, en el que se introducen tres modificaciones esenciales. En primer lugar, como se vio en el capítulo anterior, el frente de onda

parcialmente corregido sigue una estadística gaussiana; en segundo lugar, se utiliza una normalización distinta, más adecuada al caso de una pupila finita que la utilizada por Goodman; por último el tamaño de las celdas coherentes se deduce a partir de la función de estructura. Se presta especial atención a los sistemas que trabajan en corrección parcial. Se obtiene la intensidad en el punto central del plano imagen y se relaciona con el número de celdas en la pantalla de fase que representa la atmósfera. A continuación se presenta una aproximación de la *PSF*. En posteriores capítulos el modelo se utiliza para obtener la estadística de la intensidad y del número de fotones en el plano imagen.

Apenas existen estudios en la bibliografía científica sobre el proceso físico de formación de las imágenes en corrección parcial. La principal característica de las imágenes parcialmente corregidas fue sugerida por vez primera por F. y C. Roddier (1986): la imagen de una fuente puntual está constituida por una mancha de Airy rodeada de un halo de *speckle*. Si bien era un resultado conocido en situaciones análogas (Goodman 1985) no era evidente que ocurriera lo mismo en los sistemas de óptica adaptativa. Las imágenes logradas en 1991 con el sistema COME-ON (Rigaut et al. 1991) confirmaron la presencia de un pico coherente en la imagen de larga exposición. En la figura 6.1 se puede observar una serie de imágenes simuladas con diferentes grados de corrección. Se comprueba que al mejorar la compensación, aparece una mancha de Airy en el centro de la imagen, pero que el halo de *speckle* no desaparece hasta que la corrección es perfecta.

6.1 Criterios de calidad en la imagen

En primer lugar se definen algunos criterios para medir la calidad en la imagen, que serán de utilidad en los análisis posteriores.

6.1.1 Cociente de Strehl

El cociente de Strehl SR se define como el cociente entre la intensidad que se detecta en el centro del campo¹ (con atmósfera y sistema corrector) y la intensidad que se detectaría si no existiera atmósfera:

$$SR = \frac{PSF(\vec{0})}{PSF_0(\vec{0})} = \frac{\int FTO(\vec{r})d\vec{r}}{\int T(\vec{r})d\vec{r}} \quad (6.1)$$

donde PSF_0 indica la función imagen de un punto del telescopio sin atmósfera. Se supone que la función de transferencia óptica está normalizada a 1; por tanto, la energía total es la unidad y el cociente de Strehl coincide con la intensidad en el punto central I .

6.1.2 Energía coherente

Existen criterios de calidad de la imagen más adecuados que el cociente de Strehl en el caso de la óptica adaptativa, donde lo importante es mejorar la resolución, es decir, recuperar las altas frecuencias espaciales de la imagen. La ecuación (5.10) muestra que el nivel de atenuación de las altas frecuencias es:

$$E_c = \exp(-\Delta_j) \quad (6.2)$$

Con energía total uno, esta es la energía que se concentra en el pico coherente de la imagen y se denomina por tanto energía coherente E_c . La energía en el halo de *speckle* es por supuesto

$$I_H = 1 - \exp(-\Delta_j) \quad (6.3)$$

¹ Centro de la macha de Airy con tip y tilt corregidos.

La figura 6.2 explica gráficamente la contribución de cada término en el centro del campo; la intensidad total es igual al cociente de Strehl I , el pico coherente contribuye con E_c y la contribución del halo es:

$$I_H(\vec{0}) = I - E_c = I - \exp(-\Delta_j) \quad (6.4)$$

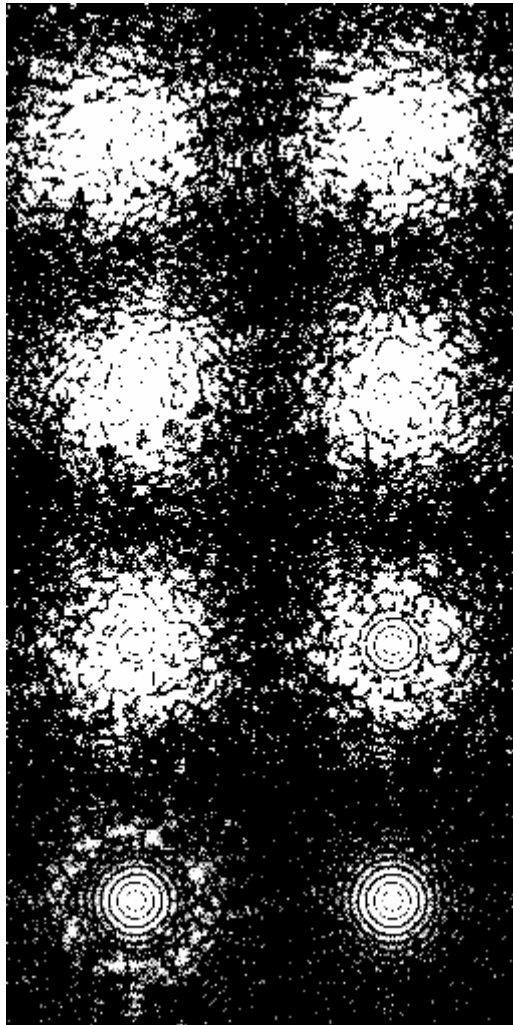


Figura 6.1 Serie de imágenes de un objeto puntual simuladas con $D/r_0 = 38.4$ y diferentes grados de corrección: de izquierda a derecha y de arriba abajo, 0, 3, 6, 11, 21, 41, 81 polinomios corregidos y corrección perfecta. Se comprueba que al mejorar la compensación, aparece una mancha de Airy en el centro de la imagen, pero que el halo de *speckle* no desaparece hasta que la corrección es perfecta.

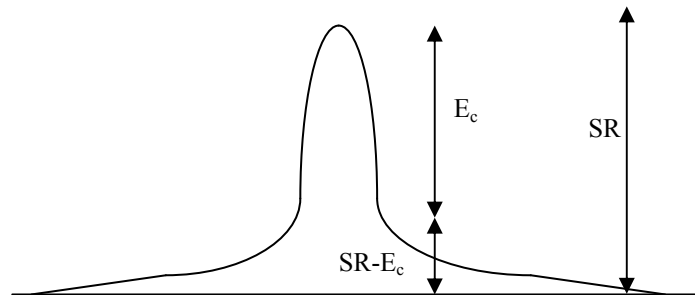


Figura 6.2 Contribución de cada término a la función imagen de un punto en el centro del campo.

6.1.3 Anchura del halo

La anchura del halo de *speckle* tiene también gran importancia para caracterizar el comportamiento del sistema. Siguiendo una definición análoga a la del ángulo de resolución de Strehl (Rodier 1981) se puede definir la anchura del halo ω de:

$$\int_{pupila} I_H(\vec{x})d\vec{x} = \frac{\pi}{4} \omega^2 I_H(\vec{0}) \tag{6.5}$$

Se puede obtener la anchura del halo de los dos parámetros precedentes. El primer término es la energía total en el halo, dada en (6.3). Sustituyendo (6.3) y (6.4) en (6.5) se tiene:

$$\omega = \sqrt{\left(\frac{1 - E_c}{I - E_c}\right)} \Omega \tag{6.6}$$

donde Ω es el ángulo de resolución de Strehl del telescopio sin atmósfera, que proporciona el tamaño angular de la mancha de Airy:

$$\Omega = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} \int T(\vec{f}) d\vec{f}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\pi}{4} R_D}} \quad (6.7)$$

Se introduce el valor de la resolución del telescopio, R_D , obtenido en (2.39), en (6.7):

$$\Omega = \frac{4\lambda}{\pi D} \approx 1.27 \frac{\lambda}{D} \quad (6.8)$$

La anchura del halo también se relaciona con el parámetro generalizado de Fried calculado en (5.7). Una definición equivalente a (6.5) es:

$$\omega = \sqrt{\frac{4}{\pi R}} \quad (6.9)$$

Para calcular la resolución R se utiliza la aproximación (2.40), donde la función de transferencia viene dada por el término superior en (5.10) (se considera que el término inferior no contribuye al halo). Por tanto:

$$R = \frac{\pi}{4} \left(\frac{\rho_0}{\lambda} \right)^2 \quad (6.10)$$

y por fin sustituyendo (6.10) en (6.9) la anchura del halo en función del parámetro generalizado de Fried queda:

$$\omega \approx 1.27 \frac{\lambda}{\rho_0} \quad (6.11)$$

Comparando la expresión (6.10) con (2.42) se observa que el parámetro generalizado de Fried se comporta en corrección parcial de forma análoga a cómo lo hace r_0 cuando no existe compensación de los efectos atmosféricos. El modelo descrito permite obtener la anchura del halo en función del grado de corrección y del estado de la atmósfera. La figura 6.3 muestra la función imagen de un punto simulada con $D/r_0=38.4$ fijo y distintos

grados de corrección. También se muestra la *PSF* sin corrección y $D/r_0=D/\rho_0$ (cuya anchura es evidentemente $1.27 \lambda/\rho_0$) con ρ_0 calculado de (5.7). Se comprueba que la anchura de la *PSF* es descrita por ρ_0 a través de (6.11). Esta gráfica demuestra además que en una amplia gama de condiciones el efecto de la corrección se reduce a un aumento del parámetro de Fried generalizado, porque no hay diferencia entre las dos funciones representadas. En este caso, la mejora de la resolución de la imagen es inversamente proporcional a $j^{0.362} \cdot \text{coef}(j)^{0.6}$. Para altos grados de corrección, sin embargo, la anchura del halo se calcula con precisión pero la *PSF* del telescopio con sistema de óptica adaptativa presenta un pico coherente que no existe en el caso del telescopio sin compensación y una atmósfera efectiva con parámetro ρ_0 .

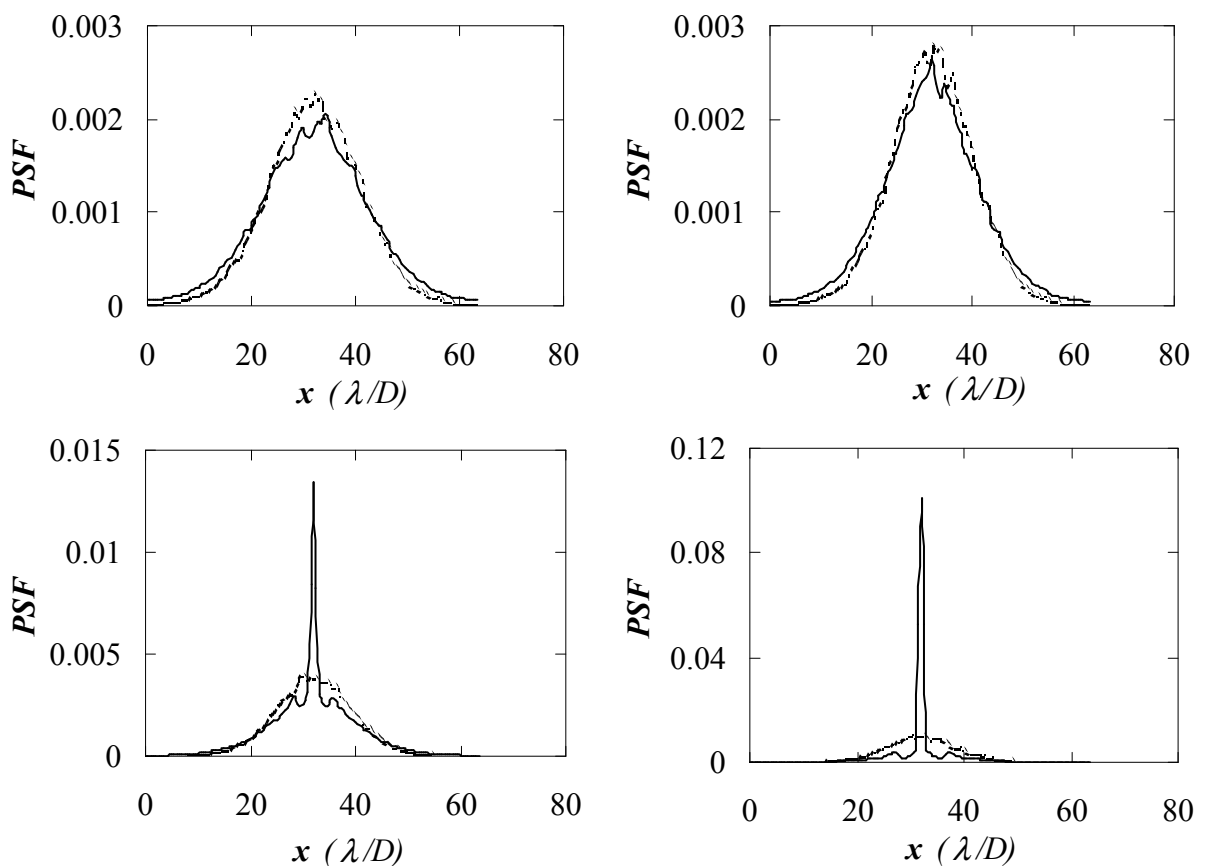


Figura 6.3 Función imagen de un punto simulada en larga exposición (línea continua) con $D/r_0=38.4$ fijo y distintos grados de corrección: de izqda. a dcha. y de arriba hacia abajo, 11, 21, 41 y 81 polinomios corregidos. También se muestra la *PSF* sin corrección y $D/r_0=D/\rho_0$ (cuya anchura es evidentemente $1.27 \lambda/\rho_0$) con ρ_0 calculado de (5.7) (línea discontinua). Se comprueba que la anchura de la *PSF* es descrita por ρ_0 a través de (6.11).

6.2 Intensidad en el punto central del plano imagen

En el capítulo anterior se desarrolló un modelo para los frentes de onda parcialmente corregidos y se obtuvo la estadística de la fase tras la corrección. El efecto de la atmósfera y del sistema de óptica adaptativa se recoge en una pantalla de fase, formada por celdas coherentes e incorreladas de diámetro ρ_c . A continuación se extiende el modelo al plano imagen. El objetivo es relacionar las magnitudes que se han estudiado del plano de la pupila con las características de la imagen. El primer paso consiste en calcular la intensidad luminosa promedio en el punto central del plano imagen en función del grado de corrección, siguiendo un análisis similar al de la sección 2.1.2, y estimar el diámetro ρ_c de las celdas del modelo.

6.2.1 Intensidad según el modelo de Goodman generalizado

La intensidad luminosa en el plano imagen se obtiene de la amplitud compleja del campo que resulta de la suma de contribuciones de gran número de celdas elementales en el frente de onda (se supone $D \gg \rho_c$):

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| e^{i\phi_k} \quad (6.12)$$

donde N es el número de celdas, proporcional a $(D/\rho_c)^2$, $|\alpha_k|/N$ es la amplitud y ϕ_k la fase de la celda k . Al considerar la atmósfera como una pantalla de fase las amplitudes de todas las celdas son constantes e iguales. La parte real y la imaginaria de la amplitud compleja son:

$$\begin{aligned}
 A_r(\vec{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \cos \phi_k \\
 A_i(\vec{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \text{sen } \phi_k
 \end{aligned} \tag{6.13}$$

Se ha escogido esta normalización para que se cumpla el teorema de Parseval. De (6.13) se pueden obtener:

$$\begin{aligned}
 \langle A_r^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \cos \phi_k \cos \phi_m \rangle \\
 \langle A_i^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle \text{sen } \phi_k \text{sen } \phi_m \rangle
 \end{aligned} \tag{6.14}$$

La intensidad luminosa se escribe por fin:

$$\langle I \rangle = \langle A_r^2 \rangle + \langle A_i^2 \rangle = \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N [\langle \cos \phi_k \cos \phi_m \rangle + \langle \text{sen } \phi_k \text{sen } \phi_m \rangle] \tag{6.15}$$

El modelo descrito en el apartado 5.1 permite calcular los promedios en (6.15) y hallar la intensidad media en el punto central del plano imagen. Según la primera condición se pueden promediar por separado las contribuciones de celdas distintas. Por tanto los promedios se expresan a partir de la función característica de la fase (Goodman 1985):

$$\begin{aligned}
 \langle \cos \phi_k \cos \phi_m \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{4} [2M_\phi(1)M_\phi(-1) + M_\phi^2(1) + M_\phi^2(-1)] & k \neq m \\ \frac{1}{4} [2 + M_\phi(2) + M_\phi(-2)] & k = m \end{cases} \\
 \langle \text{sen } \phi_k \text{sen } \phi_m \rangle &= \begin{cases} \frac{1}{4} [2M_\phi(1)M_\phi(-1) - M_\phi^2(1) - M_\phi^2(-1)] & k \neq m \\ \frac{1}{4} [2 - M_\phi(2) - M_\phi(-2)] & k = m \end{cases}
 \end{aligned} \tag{6.16}$$

La segunda condición impone que la fase parcialmente corregida siga una distribución gaussiana de media nula y varianza Δ_j , de donde se obtiene la función característica (5.2).

Por tanto la intensidad media queda:

$$\langle I \rangle = \frac{1}{N} [1 + (N-1)M_\phi^2(1)] = \frac{1}{N} [1 + (N-1)\exp(-\Delta_j)] \quad (6.17)$$

6.2.2 Intensidad a partir del parámetro generalizado de Fried

La intensidad en el punto central se puede estimar por otro procedimiento a partir del parámetro generalizado de Fried. Igualando (6.6) y (6.11) se tiene que:

$$\sqrt{\left(\frac{1-E_c}{I-E_c}\right)} \Omega \approx 1.27 \frac{\lambda}{\rho_0} \quad (6.18)$$

Se sustituye (6.8) y se despeja la intensidad, resultando:

$$I = \left(\frac{\rho_0}{D}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\rho_0}{D}\right)^2\right] \exp(-\Delta_j) \quad (6.19)$$

Se pueden considerar dos casos especiales. Para baja compensación, la varianza residual es muy grande, y la exponencial se puede despreciar:

$$I = \left(\frac{\rho_0}{D}\right)^2 \quad (6.20)$$

Sin embargo, para un número alto de modos corregidos, considerando que $\rho_0 \ll D$:

$$I \approx \exp(-\Delta_j) \approx 1 - \Delta_j \quad (6.21)$$

La expresión (6.21) es idéntica a la que se obtiene para este rango de corrección en la teoría de difracción (Born y Wolf 1993), y que se conoce en ocasiones como aproximación de Marechal (Beckers 1993).

Las ecuaciones (6.19) a (6.21) permiten predecir teóricamente el valor del cociente de Strehl en cualquier grado de corrección. Para comprobar la validez de este desarrollo se comparan en la figura 6.4 valores del cociente de Strehl provenientes de simulación con los valores que ofrece (6.19), para distintos grados de corrección. Además se incluyen los correspondientes valores obtenidos utilizando las aproximaciones (6.20) y (6.21). Para que sea evidente el rango de corrección en que es correcta cada expresión, la figura 6.5 muestra el error de cada uno de los métodos. Mientras que la aproximación (6.20) sólo ofrece resultados satisfactorios para un bajo número de modos corregidos, y la (6.21) para un alto grado de corrección, la ecuación (6.19) proporciona una estimación precisa del cociente de Strehl en todo el rango de compensación.

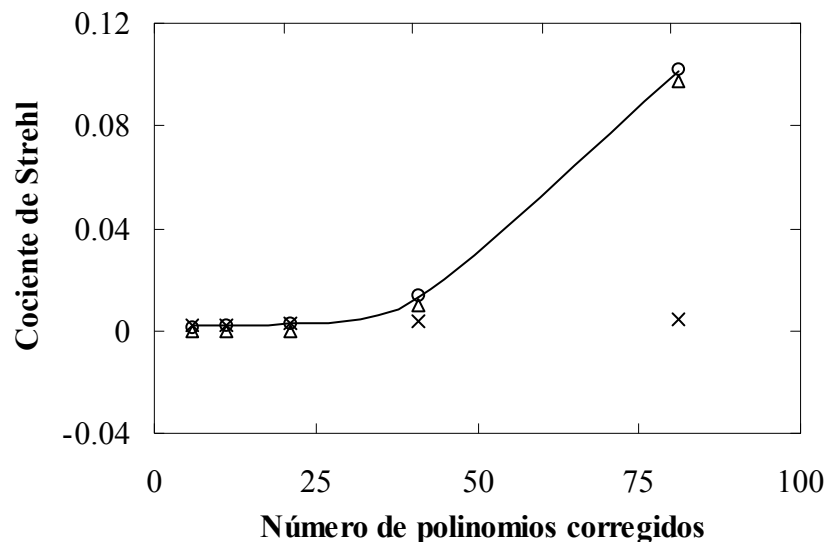


Figura 6.4 Valores de la intensidad en el punto central del plano imagen provenientes de simulación (puntos) comparados con los valores que ofrece (6.19) (línea continua), para distintos grados de corrección. Además se ofrecen las aproximaciones (6.20) (equis) y (6.21) (triángulos).

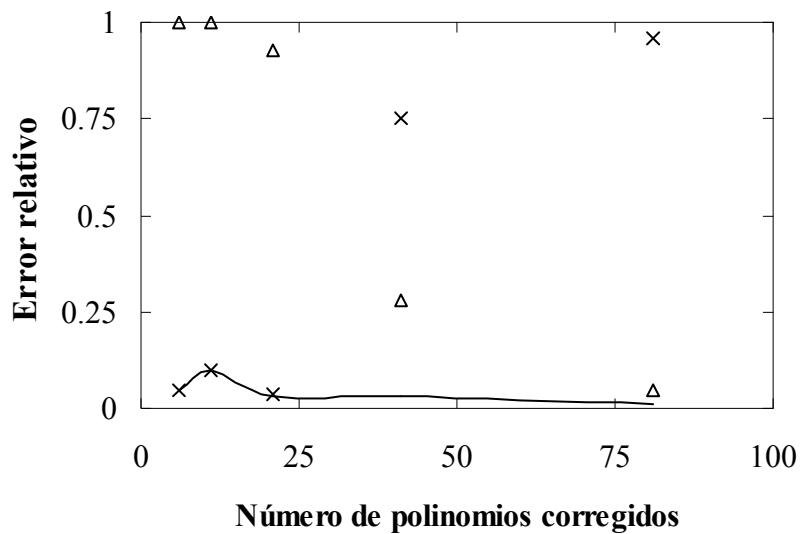


Figura 6.5 Error de cada uno de los métodos para hallar el cociente de Strehl presentes en la figura 6.4. Las aproximaciones (6.20) –equis- y (6.21) –triángulos- sólo ofrecen resultados satisfactorios para determinados grados de corrección; la ecuación (6.19) -línea continua- proporciona una estimación correcta en todo el rango.

6.3 Número de celdas en la atmósfera

Un parámetro importante en el modelo es el número de celdas N . Como el diámetro de una celda es ρ_c , el número de celdas que contribuyen a la intensidad en el plano imagen es proporcional a $(D/\rho_c)^2$.

6.3.1 Cálculo a partir del parámetro generalizado de Fried

El número de celdas se puede estimar a partir del parámetro generalizado de Fried. Si se comparan las ecuaciones (6.17) y (6.19), que se han obtenido por métodos totalmente

diferentes, se observa que son idénticas, si el factor de normalización o número de celdas N se escribe:

$$N = \left(\frac{D}{\rho_0} \right)^2 \quad (6.20)$$

Es evidente por tanto que el diámetro de estas celdas elementales en la atmósfera es precisamente el parámetro generalizado de Fried:

$$\rho_c = \rho_0 \quad (6.21)$$

En la figura 6.6 se muestran valores del número de celdas N obtenidos de (6.20), en función del grado de corrección; el parámetro generalizado de Fried se estima de (5.7).

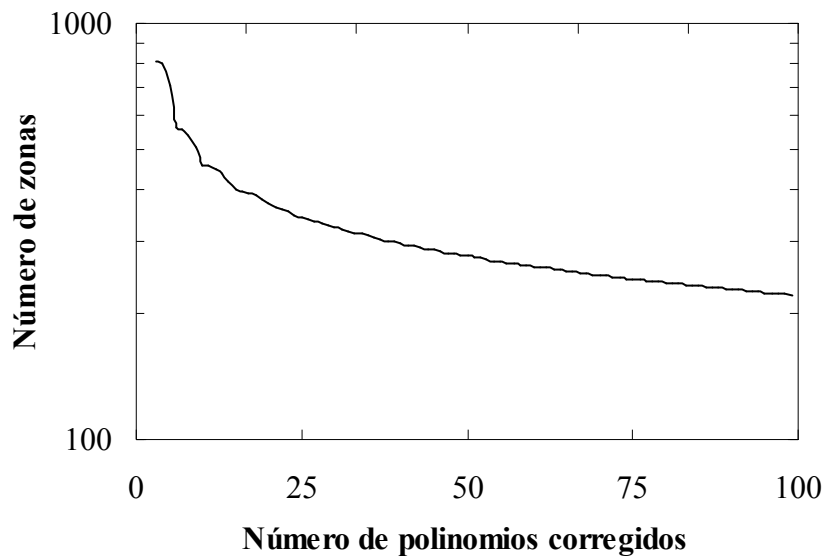


Figura 6.6 Número de celdas obtenidos de (6.21) en función del grado de corrección; el parámetro generalizado de Fried se estima de (5.7) y la condiciones de atmósfera son $D/r_0=38.4$.

Al aumentar el nivel de corrección, ρ_0 crece, las celdas coherentes en el frente de onda compensado son mayores, y por tanto menos numerosas dentro de la pupila finita del telescopio. La curva parece mostrar ruido sobre todo para bajo número de polinomios corregidos. Sin embargo, la dependencia de todas las funciones con el número de polinomios corregidos presenta este efecto, como se comprueba para la varianza residual en la figura 4.7. A pesar de este ligero inconveniente, el análisis en función del número de modos corregidos es muy útil para comprender las prestaciones del sistema.

6.4 Modelo aproximado de la *PSF*

En el capítulo anterior se presentó un modelo para los frentes de onda parcialmente corregidos, del que se dedujeron expresiones aproximadas de la función de estructura (5.8) y de la función de transferencia óptica (5.10) y (5.12). En estas expresiones se ajustaba de forma muy precisa el comportamiento de las funciones en las bajas frecuencias espaciales, mientras que se promediaba su comportamiento para las altas frecuencias. Un modelo aproximado de la *PSF* se puede obtener a partir de la transformada de Fourier de la función de transferencia óptica (5.12):

$$\begin{aligned}
 PSF(x) &= \text{TF}[FTO(r)](x) = \\
 &= \text{TF} \left\{ \begin{array}{ll} T(r) \exp(-\Delta_j) + \left[\exp\left(-3.44\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{5/3}\right) - \exp(-\Delta_j) \right] & r < l_c \\ T(r) \exp(-\Delta_j) & r > l_c \end{array} \right.
 \end{aligned}
 \tag{6.22}$$

En la figura 6.7 se compara la *PSF* de larga exposición aproximada con la obtenida de la simulación en las condiciones de la figura 6.3. Se observa que la forma aproximada reproduce con bastante precisión los valores simulados.

Esta expresión podría resultar útil en los procesos de deconvolución. Permite estimar la *PSF* instantánea a partir de la estimación de Δ_j (4.4) y la medida experimental del cociente de Strehl. De ambas se deducen el parámetro generalizado de Fried y la longitud de correlación, utilizando (6.19) y (5.6) respectivamente, y se halla la *PSF* de (6.22). Esta *PSF* instantánea aproximada tiene menor resolución que la experimental, debido a que se promedian las altas frecuencias espaciales en el cálculo de la función de transferencia.

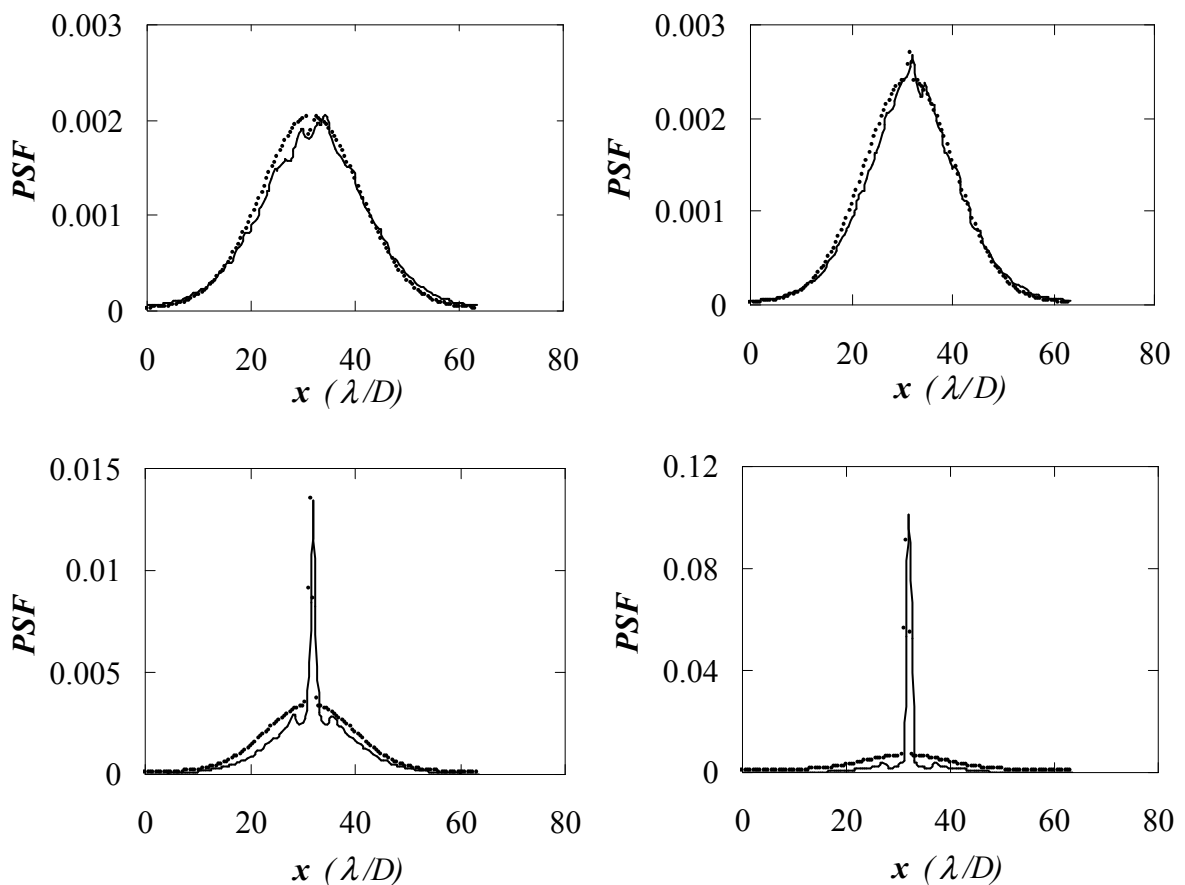


Figura 6.7 Función imagen de un punto simulada (línea continua) en larga exposición con $D/r_0=38.4$ fijo y distintos grados de corrección: de izqda. a dcha. y de arriba hacia abajo, 11, 21, 41 y 81 polinomios corregidos. También se muestra la *PSF* aproximada (6.22) (puntos).

6.5 Conclusiones

Se ha presentado la generalización del modelo de Goodman de formación de imágenes al caso de corrección parcial. A partir del modelo se ha obtenido la intensidad en el punto central del plano imagen y se ha mostrado que el parámetro ρ_0 permite realizar una analogía muy útil con el parámetro de Fried. De la misma manera que r_0 , ρ_0 permite calcular la función de estructura (en el caso de corrección parcial hasta la longitud de correlación), describe el tamaño de las celdas coherentes en la atmósfera y proporciona la resolución y anchura del halo. Por último se ha presentado un modelo aproximado para la *PSF*, que se deduce de la función de transferencia óptica calculada en el capítulo anterior. Este modelo proporciona valores precisos de la *PSF* de larga exposición y valores aproximados de la *PSF* instantánea, por lo que podría ser de gran utilidad en los procesos de deconvolución.