

Universidad de Cantabria

Tesis Doctoral

# FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ÓPTICA ADAPTATIVA

Vidal Fernández Canales

## **Capítulo 5.**

# **FRENTES DE ONDA PARCIALMENTE CORREGIDOS**

El objetivo de los sistemas de óptica adaptativa es corregir las aberraciones que la atmósfera introduce en los frentes de onda que la atraviesan. El sensor de frente de onda mide las distorsiones y, a partir de esta información, los actuadores del espejo deformable se sitúan de forma que las compensan. Existen diversos factores que impiden que esta compensación sea perfecta, como el número finito de aberturas en el sensor y de actuadores en el espejo o el retraso temporal entre la medida del sensor y la corrección (Roggemann y Welsh 1996, Glindemann 1994, Nisenson y Barakat 1987, Beckers 1993). Por tanto, el frente de onda que la lente colectora focaliza para formar la imagen final está

parcialmente corregido. El valor de la fase en cada instante y punto del frente de onda sigue siendo una variable aleatoria. En este capítulo se ofrece un modelo que describe los frentes de onda compensados usando un sistema de óptica adaptativa, y se obtiene la estadística de la fase tras la corrección.

En todo el capítulo el frente de onda se desarrolla en la base de los coeficientes de Zernike como ocurre en la mayoría de sistemas. Las ventajas de la base de los polinomios de Zernike son que sus términos de bajo orden representan las aberraciones usadas en el estudio de elementos ópticos (desenfoque, coma, astigmatismo...), los polinomios son ortonormales en una pupila circular, su expresión analítica es simple y su orden radial representa de forma aproximada su frecuencia espacial.

## **5.1 Función densidad de probabilidad de la fase**

En el apartado 2.1.2 se describió el modelo de Goodman de formación de imágenes a través de la atmósfera. En él la atmósfera se considera una pantalla de fase. Esto significa que es un medio no absorbente, que sólo afecta a la fase de las ondas que la atraviesan, y que todos sus efectos sobre el frente de onda se concentran en una única capa formada por un gran número de celdas, como se indica en la figura 5.1. Cada una de estas celdas se considera homogénea y se caracteriza por su índice de refracción, o sea, por el desfase que introducen en el frente de onda. El modelo describe la estadística del frente de onda tras atravesar la pantalla de fase.

En este trabajo se desarrolla un modelo para el frente de onda tras la corrección con un sistema de óptica adaptativa que se basa en el modelo anterior. En realidad es una generalización del modelo de Goodman (1984, 1985) porque la pantalla de fase incluye tanto el efecto de la atmósfera como la compensación con el sistema de óptica adaptativa. Por tanto, el modelo es útil para describir la estadística del frente de onda corregido y para interpretar físicamente el efecto de la compensación: por analogía con el modelo de Goodman las características de la pantalla de fase se pueden asociar a un medio inhomogéneo (o atmósfera efectiva) que produce el mismo efecto que la atmósfera real y

el sistema de óptica adaptativa (figura 5.2). Una ventaja es que las teorías desarrolladas para el caso de la atmósfera se pueden utilizar para este nuevo medio.



Figura 5.1 Los múltiples efectos de la atmósfera son concentrados en una pantalla de fase. El frente de onda tras atravesar esta pantalla de fase es idéntico al que se ha propagado a través de la atmósfera turbulenta.

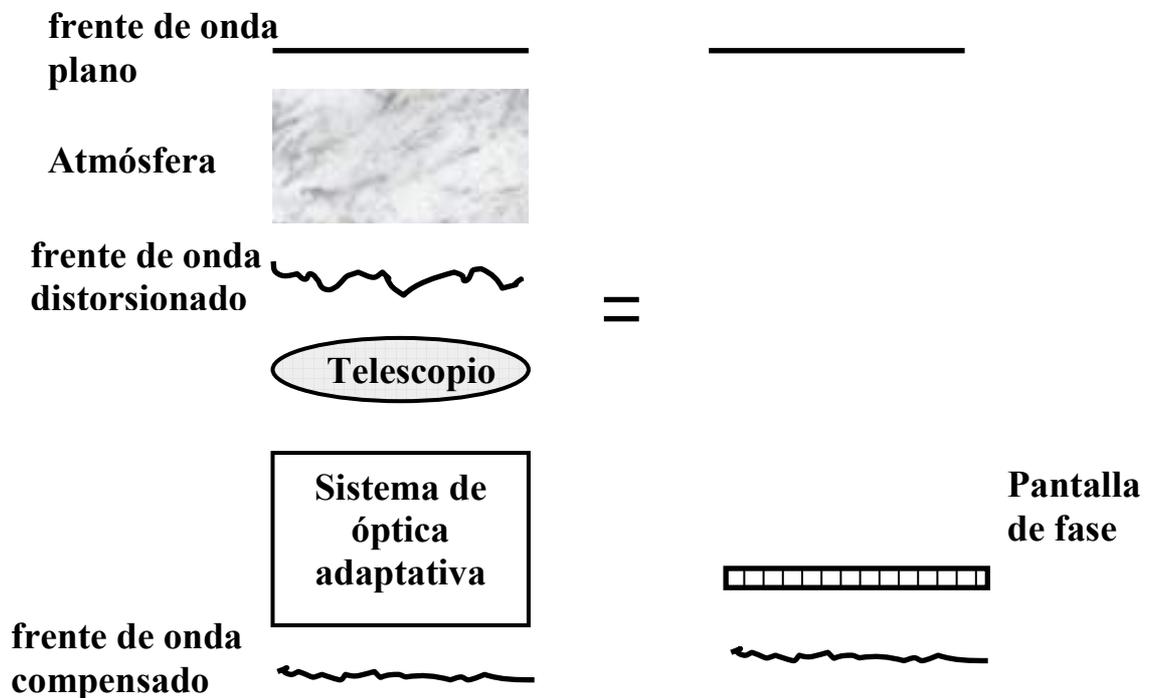


Figura 5.2 El efecto de la atmósfera y del sistema de óptica adaptativa se recoge en una pantalla de fase. El frente de onda tras atravesar esta pantalla de fase es idéntico al que se ha propagado a través de la atmósfera turbulenta y se ha corregido en el sistema de óptica adaptativa.

La pantalla de fase que recoge el efecto de la atmósfera y del sistema de óptica adaptativa se supone formada por celdas coherentes de diámetro  $\rho_c$ . El número de estas celdas es por tanto proporcional a  $(D/\rho_c)^2$ . El modelo que se propone en este trabajo impone dos condiciones:

- 1) La fase que caracteriza cada celda es independiente de la de cualquier otra.
- 2) La fase del frente de onda compensado sigue una distribución gaussiana de media nula (el *piston* no se considera como se explicó en el capítulo anterior) y varianza residual  $\Delta_j$ , que se puede obtener teóricamente de (4.4):

$$P(\phi) = \sqrt{\frac{1}{2\pi\Delta_j}} \exp\left(-\frac{\phi^2}{2\Delta_j}\right) \quad (5.1)$$

La función característica se puede obtener realizando la transformada de Fourier de la función densidad de probabilidad:

$$M_\phi(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega\phi} P(\phi) d\phi = \exp\left(-\frac{\Delta_j\omega^2}{2}\right) \quad (5.2)$$

Para comprobar la validez de la segunda condición, se simulan series de frentes de onda compensados usando 560 polinomios. El valor de  $D/r_0$  es 11.7. La figura 5.3 muestra el histograma normalizado (función densidad de probabilidad) de la fase en un punto cualquiera del frente de onda para 0, 9 y 40 polinomios corregidos. Se aprecia que la distribución de la fase sin corrección es uniforme; en los otros dos casos se compara la curva con una gaussiana de varianza  $\Delta_j$ . Se comprueba que la fase sigue una distribución gaussiana cuya anchura se obtiene de la fórmula de Noll y decrece al aumentar la corrección. En la figura 5.4 se representa la varianza de las fases (que se relaciona con la anchura del histograma) en función del grado de corrección. Se compara con el valor teórico de la tabla (4.2). Sólo existen mínimas diferencias para altos grados de corrección que se eliminan utilizando mayor número de modos en la simulación.

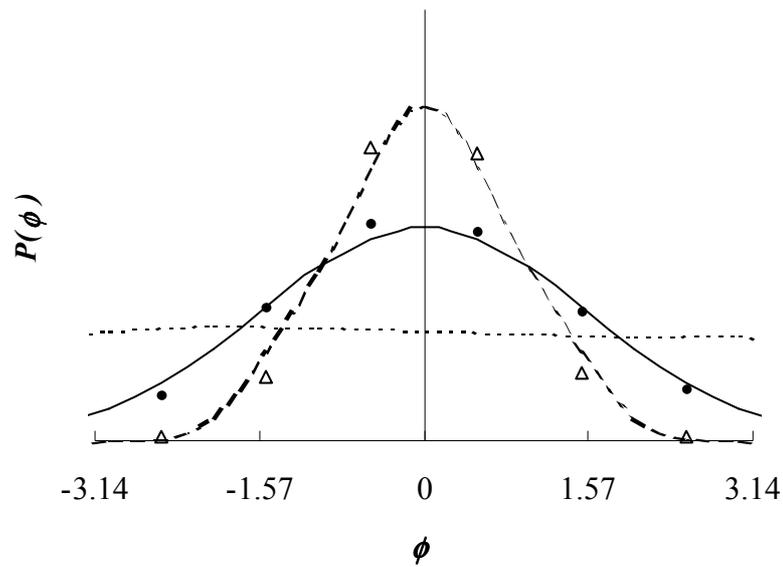


Figura 5.3 Histograma normalizado (*PDF*) de la fase en un punto cualquiera<sup>1</sup> del frente de onda para 0 (línea discontinua trazo corto), 9 (puntos) y 40 (triángulos) polinomios corregidos. Se presentan para comparación una gaussiana de varianza  $\Delta_9$  (línea continua) y una gaussiana de varianza  $\Delta_{40}$  (línea discontinua trazo largo).

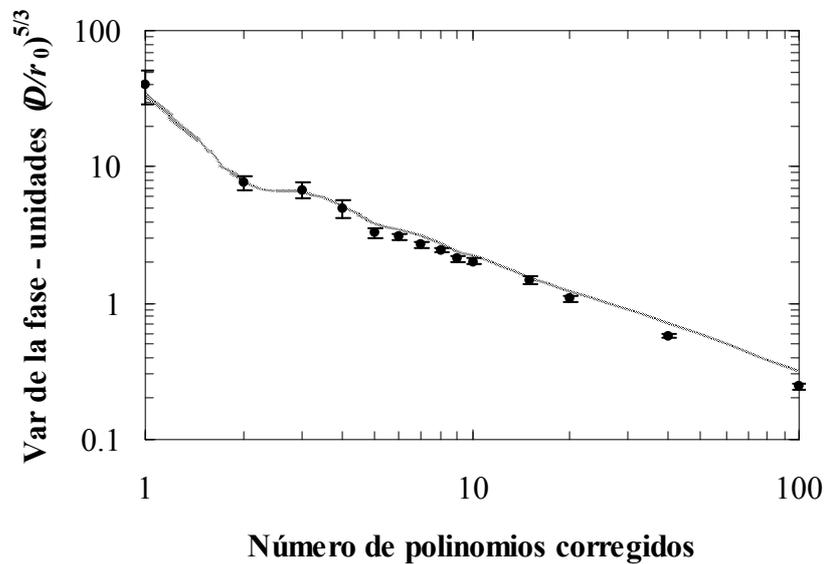


Figura 5.4 Varianza de las fases en función del grado de corrección (puntos). Se compara con el valor teórico de Noll (línea discontinua) -tabla (4.2)-.

<sup>1</sup> Se asume la estacionariedad del frente de onda: todos los puntos son equivalentes.

En conclusión, para generalizar el modelo de pantalla de fase de Goodman al caso de frentes de onda parcialmente corregidos se ha introducido una modificación esencial: la distribución de la fase ya no es uniforme en el intervalo  $(-\pi, \pi)$  sino una gaussiana cuya anchura depende del grado de corrección. Además es importante destacar que también se considera que varía el tamaño de las celdas coherentes. En el caso de la atmósfera sin corregir su diámetro es igual al parámetro de Fried  $r_0$ , mientras en el nuevo modelo es  $\rho_c$ , cuyo valor será estimado en el capítulo siguiente. Por último, en el modelo de formación de imágenes se escoge una normalización distinta de la de Goodman, con el fin de que se conserve la energía en el plano imagen, como se explicó en el segundo capítulo. Este cambio en la normalización se debe a que Goodman considera sistemas infinitos, mientras que los telescopios terrestres son sistemas de abertura finita.

Por último cabe señalar que este modelo se podría generalizar con facilidad al caso de que se considerasen las fluctuaciones de amplitud. La pantalla de fase se convertiría en una pantalla absorbente y desfasadora, compuesta de celdas con coeficiente de absorción y desfase independientes entre sí y con los del resto de celdas. La estadística de la fase sería idéntica y habría que desarrollar (u obtener indirectamente) la estadística de la amplitud del frente de onda corregido.

## **5.2 Función de estructura en corrección parcial**

La función de estructura es el segundo momento de las fluctuaciones de la fase; por tanto, dado que la fase sigue una distribución gaussiana de media nula, la función de estructura especifica por completo la estadística espacial de la fase (Fried 1965). De su estudio se deriva en este trabajo un modelo muy útil para predecir las características de las imágenes parcialmente compensadas.

### 5.2.1 Longitud de correlación

El comportamiento de la función de estructura en corrección parcial, calculada a partir de frentes de onda parcialmente corregidos obtenidos por simulación, se explicó brevemente en el apartado 4.3. Un análisis similar se encuentra en otras referencias (Conan 1995, Roddier N. 1990). En la figura 4.8 se puede observar que tras la corrección la función de estructura se comporta a distancias pequeñas como la función de estructura sin corregir, es decir, obedece a una ley  $r^{5/3}$ .

A largas distancias las fases ya no están correladas. Según (4.19) cuando la función de autocorrelación se anula, la función de estructura satura a un valor constante  $2\Delta_j$ . Por tanto, se puede definir la longitud de correlación a partir de la función de estructura. La longitud de correlación de la fase  $l_c$  es la distancia en la que la función de estructura abandona su crecimiento potencial y alcanza un valor igual al doble del promedio de la varianza residual del frente de onda:

$$D_\phi(r=l_c) = 2\Delta_j \quad (5.3)$$

Se puede deducir de trabajos previos (Valley y Wandzura 1979) que la longitud de correlación que se ha definido no depende de las condiciones de la atmósfera y está completamente definida por el número de polinomios corregidos (en unidades del diámetro del telescopio  $D$ ). Los resultados de la simulación confirman este resultado (Conan 1995). La figura 5.5 muestra la función de estructura en distintas condiciones atmosféricas pero para un número fijo de 21 polinomios corregidos. Como se observa la distancia en la que satura la función de estructura es siempre la misma. Para comprobar este resultado en cualquier grado de corrección, en la figura 5.6 se muestra la longitud de correlación obtenida de la función de estructura en función del número de modos corregidos en distintas condiciones atmosféricas. Se aprecia que la longitud de correlación es independiente de  $r_0$ , sea cual sea el grado de corrección. En la figura 5.7 se obtiene un ajuste de la longitud de correlación en función del grado de corrección:

$$l_c \approx 0.286 j^{-0.362} D \quad (5.4)$$

La ventaja de esta expresión es que se obtiene la longitud de correlación de forma teórica en función del número  $j$  de polinomios corregidos y del diámetro  $D$  del telescopio, y es válida sean cuales sean las condiciones atmosféricas.

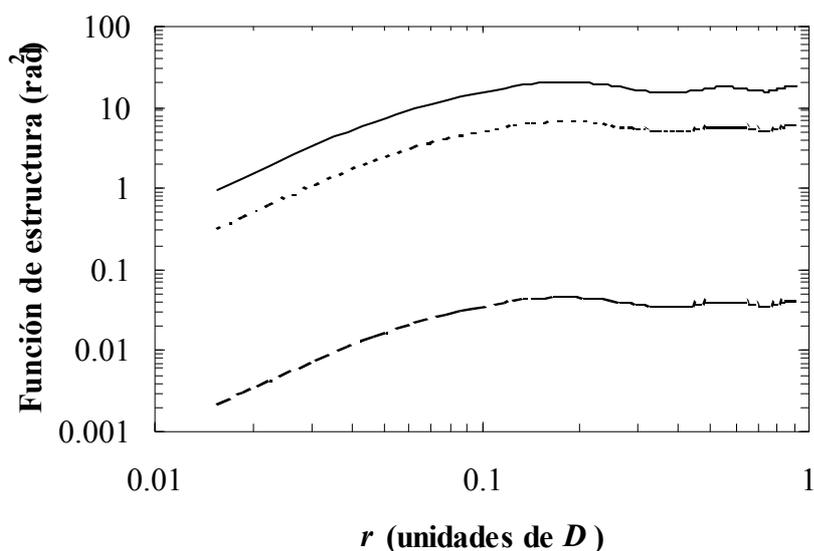


Figura 5.5 Función de estructura para un número fijo de 21 polinomios corregidos en distintas condiciones atmosféricas:  $D/r_0=1$  (línea discontinua trazo largo), 20 (línea discontinua trazo corto) y 38.4 (línea continua).

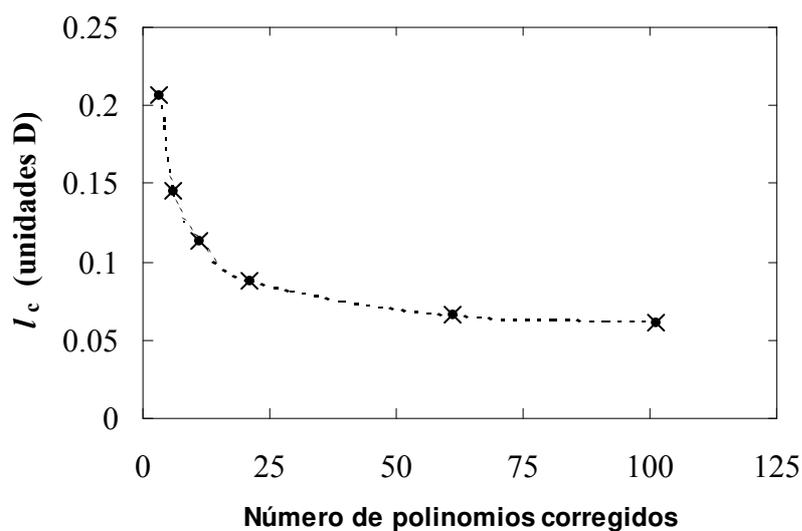


Figura 5.6 Longitud de correlación en función del grado de corrección en distintas condiciones atmosféricas:  $D/r_0=1$  (equis), 20 (puntos) y 38.4 (línea discontinua).

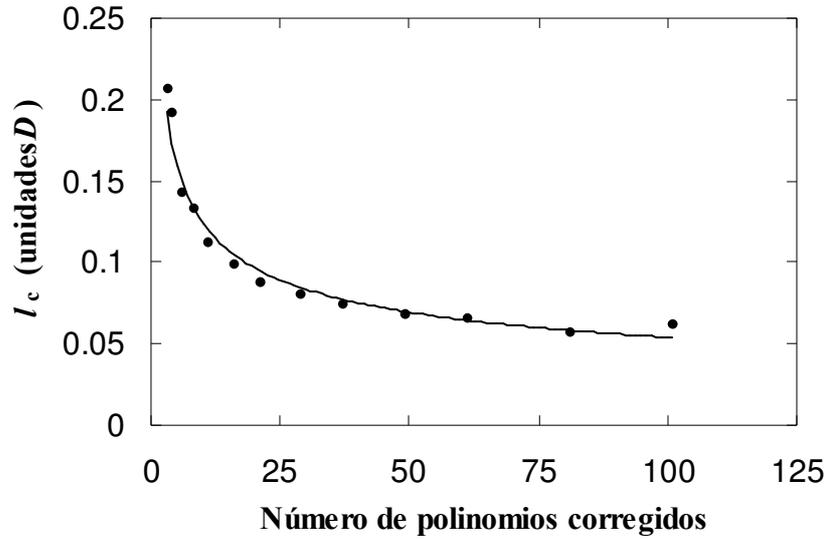


Figura 5.7 Longitud de correlación en función del grado de corrección. Simulación (puntos) y ajuste  $l_c \approx 0.286 j^{-0.362} D$  (línea continua).

### 5.2.2 Parámetro generalizado de Fried

La función de estructura se comporta a distancias pequeñas como la función de estructura sin corregir, es decir, obedece a una ley  $r^{5/3}$ . Por analogía con el caso de atmósfera sin compensar (1.11), la función de estructura se escribe:

$$D_\phi(r) = 6.88 \left( \frac{r}{\rho_0} \right)^{5/3} \quad (5.5)$$

En este trabajo se define  $\rho_0$  como el parámetro generalizado de Fried, porque se demostrará que desempeña en corrección parcial el mismo papel que  $r_0$  en el caso de corrección nula. Permitirá determinar el diámetro de las áreas coherentes en el frente de onda compensado y estimar el tamaño del halo de *speckle* en la imagen.

Este parámetro se puede relacionar con la varianza residual del frente de onda y con la longitud de correlación combinando (5.5) y (5.3):

$$6.88 \left( \frac{l_c}{\rho_0} \right)^{5/3} = 2\Delta_j \quad (5.6)$$

Tanto la longitud de correlación como la varianza promedio del frente de onda se conocen teóricamente. Por tanto, se puede hallar el parámetro generalizado de Fried, introduciendo (4.4) y (5.4) en (5.6):

$$\rho_0 = \left( \frac{3.44}{\Delta_j} \right)^{3/5} l_c \approx \left( \frac{3.44}{\text{coef}(j)} \right)^{3/5} 0.286 j^{-0.362} r_0 \quad (5.7)$$

La figura 5.8 muestra una serie de valores de  $\rho_0$  obtenidos directamente de ajustar la función de estructura para distintos grados de corrección; se comparan con los obtenidos de la expresión aproximada (5.7). Ambas series coinciden con gran precisión salvo que el número de polinomios corregidos sea muy bajo ( $j < 4$ ). Esto se debe a problemas en el ajuste de la longitud de correlación que tiende a infinito para 1 ó 0 polinomios corregidos.

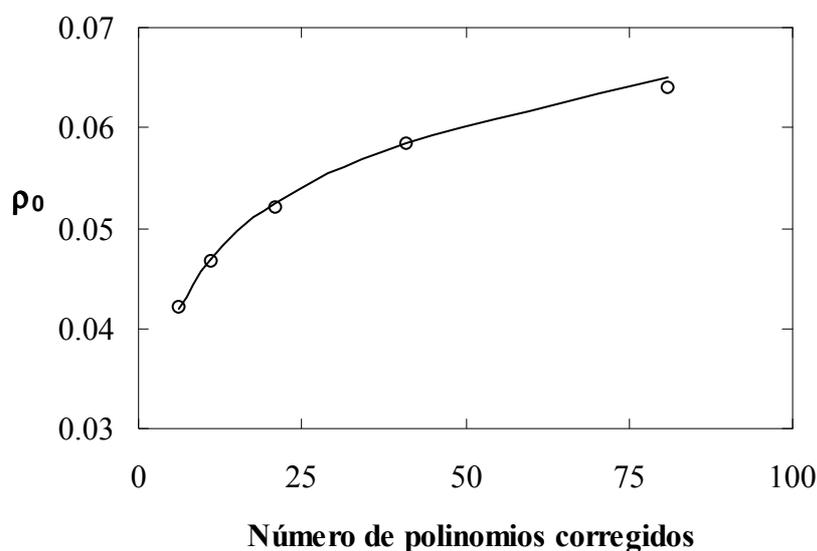


Figura 5.8 Parámetro generalizado de Fried en función del grado de corrección. Se comparan los puntos obtenidos de ajustar la función de estructura simulada (puntos) con la expresión aproximada (5.7) (línea continua). Condiciones de atmósfera:  $r_0=1/38.4$ .

Por tanto, el parámetro generalizado de Fried, que describe la primera parte de la función de estructura, se puede hallar teóricamente de (5.7), a partir del grado de corrección que se aplica y del estado de la atmósfera.

### 5.2.3 Función de estructura aproximada

La longitud de correlación, la varianza residual del frente de onda y el parámetro generalizado de Fried se pueden hallar teóricamente a partir del diámetro del telescopio, las condiciones de la atmósfera y el grado de corrección. Con estos parámetros se puede obtener un modelo aproximado de la función de estructura; para distancias menores que la longitud de correlación la función de estructura sigue una ley  $r^{5/3}$  caracterizada por  $\rho_0$ ; a partir de  $l_c$ , su valor es constante e igual a  $2\Delta_j$ :

$$D_\phi(r) = \begin{cases} 6.88 \left( \frac{r}{\rho_0} \right)^{5/3} & r < l_c \\ 2\Delta_j & r > l_c \end{cases} \quad (5.8)$$

Si se introduce (5.7) en esta ecuación, la función de estructura aproximada sólo depende de la varianza residual, que se puede hallar de forma teórica a partir del número de polinomios corregidos y de las condiciones de la atmósfera utilizando (4.4). Este modelo funciona muy bien para distancias pequeñas, aunque no recoge las fluctuaciones de la función de estructura para grandes distancias, como se observa en la figura 5.9. De la función de estructura se puede derivar la función de transferencia óptica y la función imagen de un punto y predecir correctamente muchas características de la imagen, como se demuestra posteriormente.

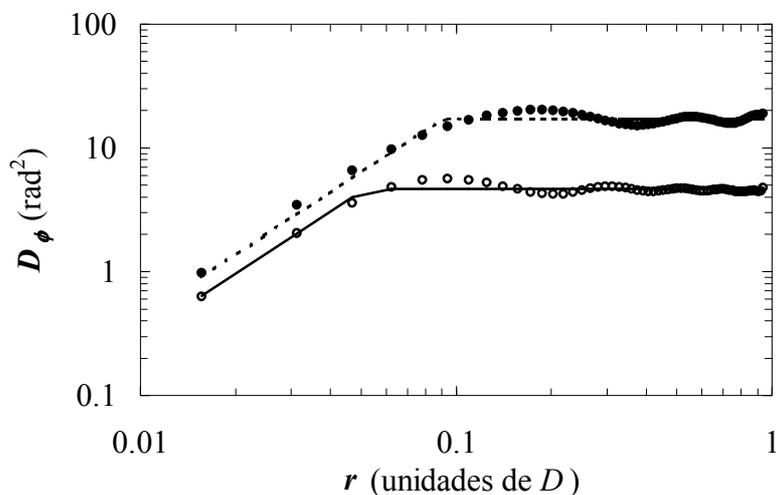


Figura 5.9 Comparación entre la función de estructura simulada y el modelo descrito en (5.8) para  $D/r_0=38.4$ . La línea continua representa el modelo para 21 polinomios corregidos, las circunferencias la función simulada con ese grado de corrección; la línea discontinua el modelo para 81 polinomios corregidos, y los puntos la función simulada con ese grado de corrección.

### 5.3 Modelo de la función de transferencia óptica

En el capítulo 2 se describió la formación de imágenes astronómicas en telescopios sin sistemas de óptica adaptativa. Se explicó que la función de transferencia óptica se puede expresar como el producto de una función de transferencia correspondiente al telescopio y otra correspondiente a la atmósfera. Cuando se dispone de un sistema de óptica adaptativa, la *FTO* se puede descomponer en una función correspondiente al telescopio por otra que corresponde al conjunto atmósfera + sistema de óptica adaptativa (como en el modelo de la pantalla de fase, se podría interpretar que el efecto del sistema de óptica adaptativa es cambiar las propiedades del medio que atraviesa el frente de onda). El modelo descrito para la función de estructura permite predecir una forma aproximada de

la función de transferencia óptica del conjunto; si se introduce la función de estructura (5.8) en la expresión análoga a (2.37) se obtiene:

$$FTO_{\text{sis}}(r) = \exp\left(-\frac{1}{2}D_{\phi}(r)\right) = \begin{cases} \exp\left(-3.44\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{5/3}\right) & r < l_c \\ \exp(-\Delta_j) & r > l_c \end{cases} \quad (5.9)$$

La función de transferencia global es el producto de (5.9) por la función de transferencia del telescopio  $T(r)$  (2.36):

$$FTO(r) = \begin{cases} T(r) \exp\left(-3.44\left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{5/3}\right) & r < l_c \\ T(r) \exp(-\Delta_j) & r > l_c \end{cases} \quad (5.10)$$

La dependencia del modelo de función de transferencia con el grado de corrección queda de manifiesto a través de la dependencia de la varianza residual (4.4) y del parámetro generalizado de Fried (5.7). En la figura 5.10 se muestra la comparación entre la función de transferencia simulada y la expresión (5.10) para  $D/r_0=38.4$  y 81 polinomios corregidos. Se aprecia que a pesar de su simplicidad el modelo describe de forma bastante exacta el comportamiento de la  $FTO$ .

Para distancias menores que la longitud de correlación, la función de transferencia se puede descomponer en un término que representa su caída asintótica y otro que representa el pico sobre dicha asíntota. Si se suma y resta  $\exp(-\Delta_j)$  al término superior en (5.10) resulta:

$$FTO(r) = \begin{cases} T(r) \exp(-\Delta_j) + T(r) \left[ \exp\left(-3.44 \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{5/3}\right) - \exp(-\Delta_j) \right] & r < l_c \\ T(r) \exp(-\Delta_j) & r > l_c \end{cases} \quad (5.11)$$

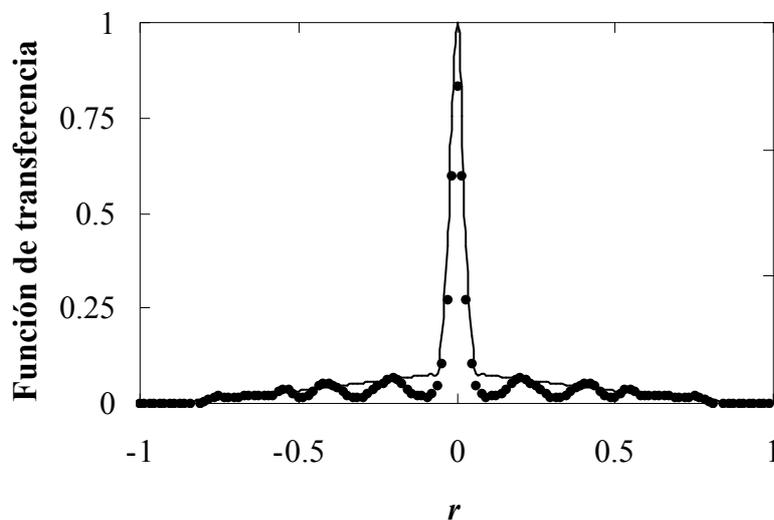


Figura 5.10 Comparación entre la función de transferencia óptica simulada y el modelo descrito en (5.10) para  $D/r_0=38.4$ . La línea continua representa el modelo para 81 polinomios corregidos y los puntos la función simulada con ese grado de corrección.

El primer sumando del término superior es igual al comportamiento asintótico cuando la distancia es mayor que la longitud de correlación (término inferior), mientras que el segundo sumando representa el pico sobre el término anterior. Salvo para grados de corrección muy altos, este segundo término es mucho más estrecho que la función de transferencia del telescopio, y se puede sustituir  $T(r)$  por su valor en el origen  $T(0)=1$ . De esta sustitución se obtiene:

$$FTO(r) = \begin{cases} T(r) \exp(-\Delta_j) + \left[ \exp\left(-3.44 \left(\frac{r}{\rho_0}\right)^{5/3}\right) - \exp(-\Delta_j) \right] & r < l_c \\ T(r) \exp(-\Delta_j) & r > l_c \end{cases} \quad (5.12)$$

El primer sumando es igual a la función de transferencia del telescopio atenuado por la exponencial de la varianza residual del frente de onda; por tanto, si la varianza no se dispara, este sumando conserva información de alta resolución. El segundo sumando se anula para distancias mucho menores y contribuye esencialmente al halo de speckle que rodea la *PSF* en corrección parcial.

## 5.4 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un modelo de la estadística del frente de onda compensado con un sistema de óptica adaptativa. Se ha descrito la función de estructura y se han introducido los conceptos de longitud de correlación y parámetro generalizado de Fried. La longitud de correlación no depende de las condiciones atmosféricas por lo que se ha obtenido un ajuste en función del número de modos corregidos. De esta curva se deduce una expresión teórica del parámetro generalizado de Fried. En capítulos posteriores se analiza la importancia de este parámetro en la comprensión del proceso de formación de imágenes.

A partir de estas magnitudes se ha ofrecido un modelo aproximado de la función de estructura y de la función de transferencia óptica. La figura 5.11 resume gráficamente el modelo presentado: se calculan teóricamente el parámetro generalizado de Fried y la varianza residual; de ellos se derivan la función de estructura y la *FTO*. En el siguiente capítulo se extiende este modelo al plano imagen.

Requisitos: diámetro del telescopio, parámetro de Fried y número de modos corregidos.

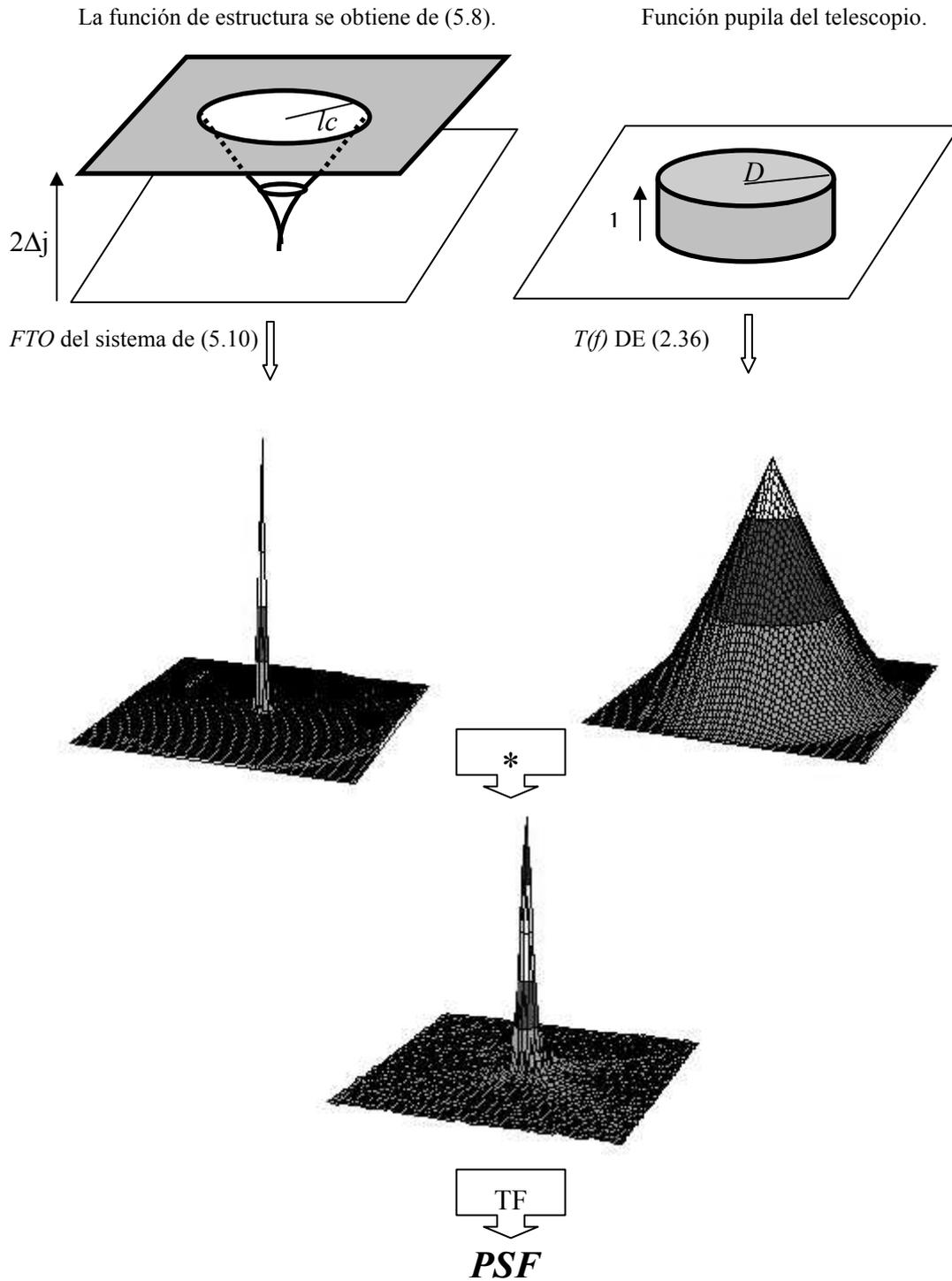


Figura 5.11 Resumen gráfico del modelo de la función de estructura y de la función de transferencia óptica.