

Universidad de Cantabria

Tesis Doctoral

FORMACIÓN DE IMÁGENES EN ÓPTICA ADAPTATIVA

Vidal Fernández Canales

Capítulo 2

FORMACIÓN DE IMÁGENES A TRAVÉS DE LA ATMÓSFERA

Las inhomogeneidades atmosféricas varían en tiempos característicos de pocos milisegundos. Por tanto, para que las condiciones de la atmósfera no varíen durante la toma de una fotografía astronómica, el tiempo de exposición debe ser de este orden. En tales circunstancias, las imágenes presentan un patrón de interferencias de aspecto granulado, denominado moteado interferencial o *speckle*. Si se toma una serie de imágenes, el patrón de interferencias es distinto en todas ellas, ya que este patrón cambia con el tiempo al variar el estado de la atmósfera. En el primer apartado de este capítulo se describe la estadística de la intensidad luminosa en este tipo de imágenes.

Por otra parte, en una fotografía astronómica convencional, el tiempo de exposición excede de un segundo y la imagen ya no es aleatoria sino un promedio de las imágenes de

corta exposición que se denomina imagen de larga exposición. Estudiaremos esta clase de imágenes en el segundo apartado. Sus propiedades fueron explicadas por Hufnagel y Stanley (1964) y Fried (1965,1966).

2.1 Imagen de corta exposición

2.2.1 Relación objeto-imagen

Sea $o(\vec{\beta})$ la distribución de intensidad del objeto en función de la dirección de observación $\vec{\beta}$ en el cielo e $i(\vec{\beta})$ la distribución de intensidad en la imagen instantánea. La relación entre las distribuciones de intensidad de objeto e imagen es lineal porque los objetos astronómicos son totalmente incoherentes (Roddier 1981). Se asume además la invariancia frente a traslaciones, lo que implica que las perturbaciones instantáneas del frente de onda son idénticas para todas las direcciones del frente de onda. Esta condición sólo se cumple si las capas turbulentas se hallan muy cerca de la pupila del telescopio, pero es evidente que esto no sucede en el caso de la atmósfera. Así que sólo se puede asumir la invariancia frente a traslaciones para objetos de pequeñas dimensiones angulares (ver figura 2.1), lo que supone un campo de visión limitado denominado la zona isoplanática. Las estimaciones teóricas y experimentales muestran que en las imágenes astronómicas la zona isoplanática es del orden de unos pocos segundos de arco. En estas condiciones la imagen se relaciona con la distribución del objeto por una convolución:

$$i(\vec{\beta}) = o(\vec{\beta}) * s(\vec{\beta}) \quad (2.1)$$

donde $s(\vec{\beta})$ es la imagen de un punto o función de ensanchamiento de punto (*PSF*) instantánea. Esta ecuación se puede expresar como un producto en el espacio de Fourier:

$$I(\vec{f}) = O(\vec{f}) S(\vec{f}) \quad (2.2)$$

El vector \vec{f} tiene dimensiones de inversa de ángulo y, por tanto, debe ser expresado en rad^{-1} ; $S(\vec{f})$ es la función de transferencia óptica (*OTF*) instantánea del sistema global: atmósfera y telescopio.

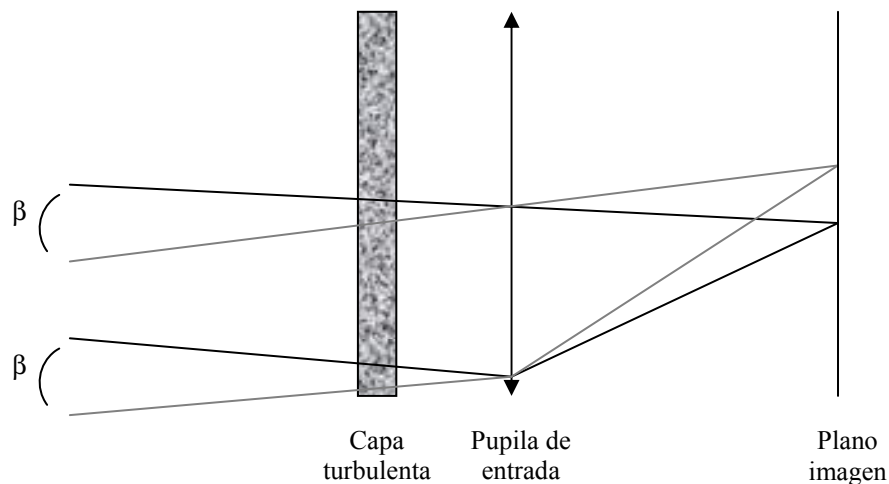


Figura 2.1 Si el objeto tiene unas dimensiones angulares suficientemente pequeñas o si la turbulencia se localiza cerca de la pupila del telescopio, se puede considerar que todos los haces que llegan a un punto de la pupila han atravesado las mismas zonas de la atmósfera. Las aberraciones asociadas son isoplanáticas.

2.1.2 Estadística de la intensidad luminosa

Las imágenes de corta exposición presentan un aspecto granulado propio del moteado interferencial o *speckle*. Por tanto, describiremos estas imágenes siguiendo el modelo desarrollado por Goodman (1984, 1985) para las propiedades estadísticas de patrones de *speckle*.

Sea un objeto puntual cuya luz, que se considera perfectamente monocromática y polarizada, atraviesa la atmósfera y llega a la pupila del telescopio. El diámetro de este se considera mucho mayor que el parámetro de Fried. Como aproximación se considera que

la atmósfera está compuesta por una capa con multitud de celdas incorreladas de diámetro r_0 . Esta capa es una pantalla de fase, es decir, no cambia la amplitud de la onda sino sólo su fase. El telescopio forma la imagen en el plano focal. La intensidad luminosa en este plano se obtiene de la amplitud compleja del campo, que resulta de la suma de contribuciones de gran número de áreas elementales en el frente de onda:

$$A(\vec{r}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| e^{i\phi_k} \quad (2.3)$$

donde N es el número de contribuciones (*fasores*), proporcional a $(D/r_0)^2$, $|\alpha_k|/N$ es la amplitud y ϕ_k la fase de la celda k . Se ha escogido esta normalización para que se cumpla el teorema de Parseval. Es interesante observar que la suma de estos *fasores* con el fin de obtener la amplitud compleja es un proceso idéntico al del camino aleatorio en el plano como se demuestra en la figura 2.2. Se considera que los *fasores* cumplen las siguientes propiedades:

- 1) La amplitud y la fase de cada *fasor* son estadísticamente independientes entre sí e independientes de la amplitud o fase de cualquier otro *fasor*.
- 2) Las fases están uniformemente distribuidas en el intervalo $(-\pi, \pi)$. Esto significa que las variaciones de fase que introduce la atmósfera son en general muy superiores a 2π , con lo que al trasladarlas al intervalo $(-\pi, \pi)$ la distribución es uniforme.

La parte real y la imaginaria de la amplitud compleja son:

$$\begin{aligned} A_r(\vec{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \cos \phi_k \\ A_i(\vec{r}) &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |\alpha_k| \operatorname{sen} \phi_k \end{aligned} \quad (2.4)$$

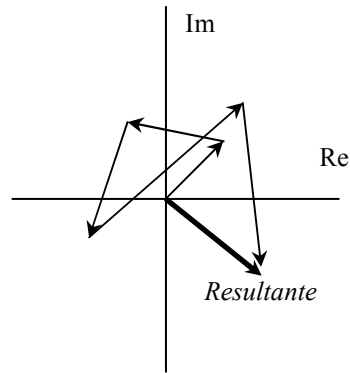


Figura 2.2 La suma de las contribuciones de las distintas celdas en la atmósfera para dar el campo total puede interpretarse como un camino aleatorio en el plano complejo.

Sus promedios estadísticos resultan:

$$\begin{aligned}\langle A_r(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_k| \cos \phi_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_k| \rangle \langle \cos \phi_k \rangle = 0 \\ \langle A_i(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_k| \sin \phi_k \rangle = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_k| \rangle \langle \sin \phi_k \rangle = 0\end{aligned}\quad (2.5)$$

La primera condición se ha usado para calcular por separado los promedios de la amplitud y de la fase. De la segunda se deduce que los promedios de las funciones seno y coseno se anulan. De forma análoga se pueden obtener:

$$\begin{aligned}\langle A_r^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_m| |\alpha_k| \rangle \langle \cos \phi_k \cos \phi_m \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \frac{\langle |\alpha_k|^2 \rangle}{2} \\ \langle A_i^2(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_m| |\alpha_k| \rangle \langle \sin \phi_k \sin \phi_m \rangle = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \frac{\langle |\alpha_k|^2 \rangle}{2} \\ \langle A_r(\vec{r}) A_i(\vec{r}) \rangle &= \frac{1}{N^2} \sum_{m=1}^N \sum_{k=1}^N \langle |\alpha_m| |\alpha_k| \rangle \langle \cos \phi_k \sin \phi_m \rangle = 0\end{aligned}\quad (2.6)$$

Así que la parte real y la imaginaria de la amplitud compleja tienen promedio nulo, idénticas varianzas y están incorreladas. Es de destacar que los segundos términos no dependen del vector de posición: todos los puntos del plano imagen son equivalentes.

Como se ha supuesto que el número de celdas es muy grande ($D \gg r_0$) la parte real y la imaginaria son la suma de un gran número de variables aleatorias, como expresan las ecuaciones (2.4). Aplicando el teorema del límite central (Middleton 1960) ambas son variables aleatorias asintóticamente gaussianas. Usando las ecuaciones (2.5) y (2.6), la función densidad de probabilidad conjunta de las partes real e imaginaria del campo se aproxima asintóticamente a:

$$p_{r,i}(A_r, A_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{A_r^2 + A_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.7)$$

donde:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{k=1}^N \frac{\langle |\alpha_k|^2 \rangle}{2} \quad (2.8)$$

Esta función densidad de probabilidad se conoce generalmente como una función densidad circular gaussiana. En consecuencia, el *fásor* A es una variable aleatoria compleja gaussiana circular.

Si se considera que la amplitud del frente de onda no varía al atravesar la atmósfera todos los α_k son iguales; aunque la normalización que propone Goodman parece más sencilla en este caso, la normalización que se ha elegido conserva la energía en el plano imagen.

La intensidad I y la fase θ del campo resultante están relacionados con la parte real y la parte imaginaria de la amplitud compleja por la transformación:

$$\begin{aligned} A_r &= \sqrt{I} \cos\theta \\ A_i &= \sqrt{I} \sen\theta \end{aligned} \quad (2.9)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} I &= A_r^2 + A_i^2 \\ \theta &= \tan^{-1} \frac{A_r}{A_i} \end{aligned} \quad (2.10)$$

La función densidad de probabilidad conjunta de I y θ , se expresa a partir de la función densidad de las partes real e imaginaria, siguiendo las técnicas habituales de transformación de variables aleatorias (Davenport y Root 1958):

$$p_{I,\theta}(I, \theta) = p_{r,i}(\sqrt{I} \cos \theta, \sqrt{I} \sin \theta) \|J\| \quad (2.11)$$

donde $\| \cdot \|$ representa el módulo del determinante y $\|J\|$ es el jacobiano de la transformación:

$$\|J\| = \begin{vmatrix} \frac{\partial A_r}{\partial I} & \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial A_i}{\partial I} & \frac{\partial A_i}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \quad (2.12)$$

Sustituyendo (2.7) en (2.11) se encuentra que:

$$p_{I,\theta}(I, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) & I \geq 0 \\ & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (2.13)$$

La función densidad marginal de la intensidad es:

$$p_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{I,\theta}(I, \theta) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) & I \geq 0 \\ 0 & I < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

De igual manera, la función densidad marginal de la fase es:

$$p_{\theta}(\theta) = \int_0^{\infty} p_{I,\theta}(I, \theta) dI = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases} \quad (2.15)$$

La intensidad en cualquier punto de la imagen en un patrón de *speckle* sigue una distribución exponencial negativa, mientras la fase obedece una estadística uniforme. Además ambas son estadísticamente independientes, puesto que:

$$p_{I,\theta}(I, \theta) = p_I(I) p_{\theta}(\theta) \quad (2.16)$$

Los momentos de la intensidad presentan especial interés. Pueden hallarse de:

$$\langle I^n \rangle = n! (2\sigma^2)^n = n! \langle I \rangle^n \quad (2.17)$$

El contraste en la imagen se define como la desviación típica dividida por el valor medio. Usando (2.17) junto con esta definición se puede comprobar que el contraste en un patrón de *speckle* es la unidad.

La estadística exponencial negativa ha sido comprobada experimentalmente en procesos que implican un camino aleatorio equivalente al *speckle* en el plano complejo. Para el propio caso del *speckle* los experimentos de Condie (1966), Dainty (1970) y McKechnie (1974) han confirmado esta estadística exponencial negativa; la gráfica correspondiente a este último experimento se muestra en la figura 2.3.

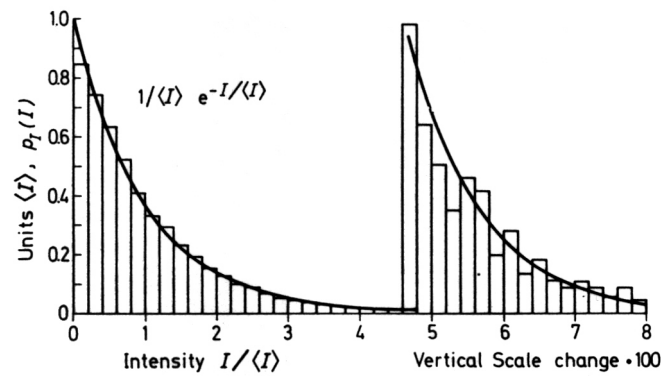


Figura 2.3 Histograma del experimento de McKechnie: 23000 medidas de la intensidad en un patrón de *speckle*. La línea continua representa una distribución exponencial negativa.

2.1.3 Estadística de la intensidad en presencia de un fondo coherente

En el caso que se va a analizar a continuación, a las contribuciones de las celdas en la atmósfera se suma un *fasor* constante; las conclusiones que se obtienen tendrán gran importancia en los capítulos en que se estudie la estadística de imágenes parcialmente corregidas.

Se suponen las siguientes condiciones:

- 1) El patrón de *speckle* está perfectamente polarizado, y el campo obedece una estadística compleja circular gaussiana.
- 2) El fondo coherente es constante y su estado de polarización es el mismo que el del patrón de *speckle*.

De nuevo se puede interpretar el patrón de *speckle* como un camino aleatorio en el plano complejo, como se muestra en la figura 2.4. A él se suma un *fasor* de intensidad constante I_s y fase fija que tomaremos como cero sin pérdida de generalidad. El único cambio que esta suma provoca en la estadística del patrón de *speckle* es variar el promedio de la parte real de la amplitud. Por tanto la función densidad de probabilidad conjunta de la partes real e imaginaria del campo queda:

$$p_{r,i}(A_r, A_i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(A_r - \sqrt{I_s})^2 + A_i^2}{2\sigma^2}\right) \quad (2.18)$$

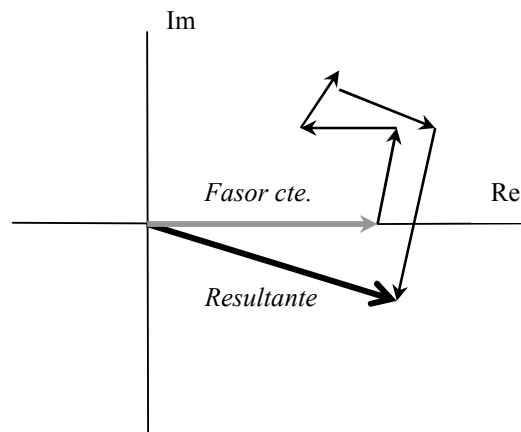


Figura 2.4 La suma del patrón de speckle y un fondo coherente representada como un camino aleatorio.

Aplicando el conocido cambio de variables, la función densidad de probabilidad conjunta de la intensidad y fase resulta:

$$p_{I,\theta}(I, \theta) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{I + I_s - 2\sqrt{I I_s} \cos \theta}{2\sigma^2}\right) & I \geq 0 \\ & -\pi \leq \theta \leq \pi \\ 0 & \text{en los demás casos} \end{cases} \quad (2.19)$$

La función densidad de probabilidad marginal de la intensidad se calcula integrando la función densidad conjunta respecto a la fase:

$$p_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{I,\theta}(I, \theta) d\theta = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I+I_s}{2\sigma^2}\right) I_0\left(\frac{\sqrt{II_s}}{\sigma^2}\right) & I \geq 0 \\ 0 & I < 0 \end{cases} \quad (2.20)$$

donde I_0 es la función modificada de Bessel de primera especie, orden cero (Dainty 1972, Goodman 1984). La función densidad se denomina Rician modificada. En la figura 2.5 se muestra esta función densidad para varios valores del cociente $I_s/2\sigma^2$. Se puede comprobar como evoluciona desde la exponencial propia del speckle cuando el *fasor* constante es nulo hacia una función de corte gaussiano.

El promedio y varianza de la intensidad son de especial interés. Se pueden obtener de la función densidad de probabilidad:

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= I_s + 2\sigma^2 \\ \sigma_I^2 &= 4\sigma^2 I_s + (2\sigma^2)^2 \end{aligned} \quad (2.21)$$

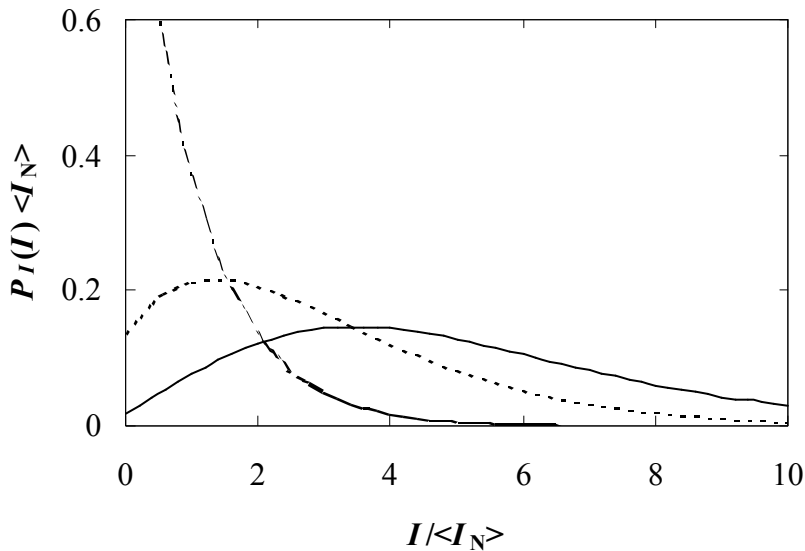


Figura 2.5 Función densidad de probabilidad marginal de la intensidad en el caso de la suma de un patrón de *speckle* y un fondo coherente. Línea discontinua y puntos: $I_s/2\sigma^2=0$, línea discontinua: $I_s/2\sigma^2=2$, línea continua: $I_s/2\sigma^2=4$.

Por fin el contraste C de la imagen es igual a:

$$C = \frac{\sqrt{1 + \frac{I_s}{\sigma^2}}}{1 + \frac{I_s}{2\sigma^2}} \quad (2.22)$$

La función densidad de probabilidad marginal de la fase se obtiene de integrar la función conjunta respecto a la intensidad:

$$p_\theta(\theta) = \int_0^\infty p_{I,\theta}(I, \theta) dI = \begin{cases} \frac{e^{-r}}{2\pi} + \sqrt{\frac{r}{\pi}} \cos \theta \exp(-r \sin^2 \theta) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\sqrt{2r} \cos \theta} \exp(-y^2/2) dy & -\pi \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases} \quad (2.23)$$

donde $r = I_s / 2\sigma^2$. La figura 2.6 muestra esta función densidad marginal para diversos valores de este parámetro. Se observa que cuando el fondo es muy débil, r tiende a cero, y se recupera la fase uniformemente distribuida del patrón de speckle. Cuando el fondo es muy fuerte la función densidad se convierte en un pico alrededor del valor de la fase del *fasor* constante (que se tomó nula). En este caso la función densidad es aproximadamente gaussiana:

$$p_\theta(\theta) \cong \begin{cases} \sqrt{\frac{r}{\pi}} \exp(-r \theta^2) & -\pi \leq \theta < \pi \\ 0 & \text{resto de casos} \end{cases} \quad (2.24)$$

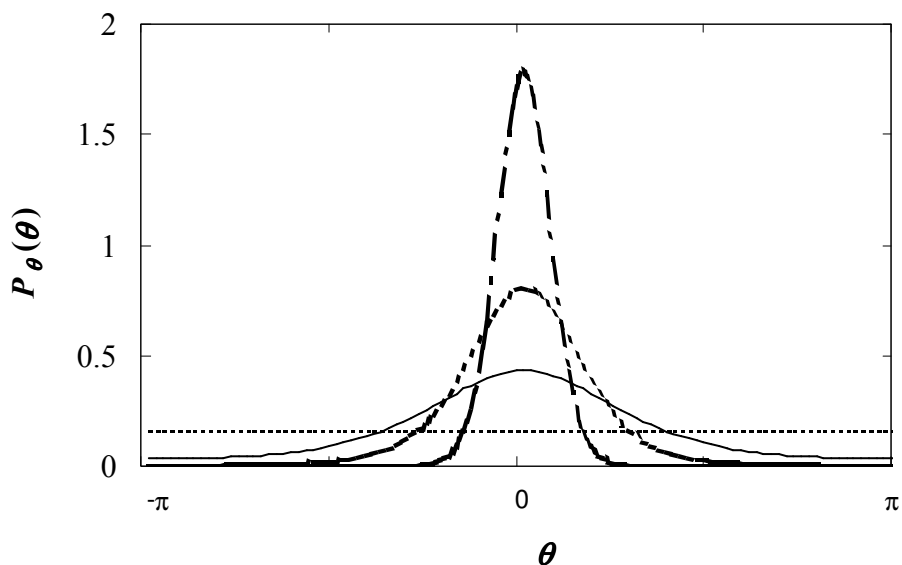


Figura 2.6 Función densidad de probabilidad marginal de la fase en el caso de la suma de un patrón de *speckle* y un fondo coherente. Línea discontinua fina: $I_s/2\sigma^2=0$, línea continua: $I_s/2\sigma^2=0.5$, línea discontinua gruesa: $I_s/2\sigma^2=2$, línea y puntos: $I_s/2\sigma^2=10$.

2.2 Imagen de larga exposición

2.2.1 Relación objeto-imagen

Sea de nuevo $o(\vec{\beta})$ la distribución de intensidad del objeto en función de la dirección $\vec{\beta}$ en el cielo e $i(\vec{\beta})$ la distribución de intensidad en la imagen instantánea. Se considera imagen de larga exposición al promedio estadístico de esta distribución: $\langle i(\vec{\beta}) \rangle$. Se asume de nuevo linealidad e invariancia frente a traslaciones, que en este caso es una condición menos exigente que en corta exposición y significa que el telescopio es isoplanático y que el efecto medio de la turbulencia es el mismo en todo el

campo del telescopio. La imagen de larga exposición se relaciona con la distribución del objeto por una convolución:

$$\langle i(\vec{\beta}) \rangle = o(\vec{\beta}) * \langle s(\vec{\beta}) \rangle \quad (2.25)$$

donde $\langle s(\vec{\beta}) \rangle$ es el promedio de la imagen de un punto. En el espacio de Fourier se convierte en:

$$\langle I(\vec{f}) \rangle = O(\vec{f}) \langle S(\vec{f}) \rangle \quad (2.26)$$

$\langle S(\vec{f}) \rangle$ es la función de transferencia óptica en larga exposición del sistema global: atmósfera y telescopio.

2.2.2 Función de transferencia óptica

Se busca la relación entre las propiedades de la atmósfera y la función de transferencia óptica de larga exposición, para poder aplicar a esta las técnicas de deconvolución de la imagen (Goodman 1968). Se observa a través de la atmósfera una fuente puntual monocromática de longitud de onda λ . Sea $\Psi_0(\vec{r})$ la amplitud compleja en la pupila del telescopio y $P_0(\vec{r})$ la función pupila, definida por:

$$P_0(\vec{r}) = \begin{cases} 1 & \vec{r} \text{ en la pupila del telescopio} \\ 0 & \vec{r} \text{ fuera de la pupila del telescopio} \end{cases} \quad (2.27)$$

Para simplificar la notación se define el cambio:

$$\vec{u} = \frac{\vec{r}}{\lambda}; \quad \Psi(\vec{u}) = \Psi_0(\lambda\vec{u}); \quad P(\vec{u}) = P_0(\lambda\vec{u}) \quad (2.28)$$

La función de transferencia óptica es la autocorrelación del producto de la amplitud compleja y la función pupila:

$$S(\vec{f}) = \frac{1}{S_p} \int d\vec{u} \Psi(\vec{u})\Psi^*(\vec{u} + \vec{f}) P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f}) \quad (2.29)$$

donde S_p es la superficie de la pupila del telescopio. La función de transferencia de larga exposición es:

$$\langle S(\vec{f}) \rangle = \frac{1}{S_p} \int d\vec{u} \langle \Psi(\vec{u})\Psi^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle P(\vec{u})P^*(\vec{u} + \vec{f}) \quad (2.30)$$

Este promedio se puede relacionar con la función de estructura de fase introducida en el capítulo anterior y que describe el estado de la atmósfera. Con tal objetivo, se expresa el promedio de la amplitud compleja en función de la fase:

$$\langle \Psi(\vec{u})\Psi^*(\vec{u} + \vec{f}) \rangle = \langle \exp(i[\phi(\vec{u}) - \phi(\vec{u} + \vec{f})]) \rangle \quad (2.31)$$

donde una vez más la atmósfera se considera una pantalla de fase que no afecta a la amplitud de la onda. Una onda que se propaga por la atmósfera, atraviesa múltiples capas con distinto índice de refracción; por tanto, su fase es la suma de un gran número de contribuciones y sigue una estadística gaussiana¹ (Roddier 1981, Lee y Harp 1969, Frieden 1983). Así pues, la expresión a promediar en (2.31) también sigue una estadística gaussiana con media nula, lo que permite expresar el promedio como:

$$\langle \exp(i[\phi(\vec{u}) - \phi(\vec{u} + \vec{f})]) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}\langle |\phi(\vec{u}) - \phi(\vec{u} + \vec{f})|^2 \rangle\right) \quad (2.32)$$

En el segundo término aparece la definición de la función de estructura (1.11). Por tanto, se puede expresar la función de transferencia óptica como:

¹ Esta estadística gaussiana para la fase no se contradice con la estadística uniforme propuesta en 2.1.2 dentro del intervalo $(-\pi, \pi)$; si $D \gg r_0$ la anchura de la gaussiana es mucho mayor que 2π y al trasladarla al intervalo $(-\pi, \pi)$, se obtiene una distribución uniforme.

$$\langle S(\vec{f}) \rangle = \frac{1}{S_p} \int d\vec{u} \exp\left(-\frac{1}{2} D_\phi(\vec{f})\right) P(\vec{u}) P^*(\vec{u} + \vec{f}) \quad (2.33)$$

Todos los puntos de la pupila son equivalentes, por lo que el valor de la función de estructura sólo depende del vector distancia entre puntos \vec{f} , no de los puntos en sí. Por tanto, la función de estructura se puede sacar fuera de la integral:

$$\langle S(\vec{f}) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} D_\phi(\vec{f})\right) \frac{1}{S_p} \int d\vec{u} P(\vec{u}) P^*(\vec{u} + \vec{f}) \quad (2.34)$$

Esto constituye un resultado fundamental: la función de transferencia en larga exposición para el sistema global, compuesto de atmósfera y telescopio, es el producto de una función de transferencia del telescopio por una función de transferencia de la atmósfera:

$$\langle S(\vec{f}) \rangle = B(\vec{f}) T(\vec{f}) \quad (2.35)$$

donde $T(\vec{f})$ es la función de transferencia del telescopio en ausencia de turbulencia:

$$T(\vec{f}) = \frac{1}{S_p} \int d\vec{u} P(\vec{u}) P^*(\vec{u} + \vec{f}) \quad (2.36)$$

y $B(\vec{f})$ la función de transferencia de la atmósfera:

$$B(\vec{f}) = \exp\left(-\frac{1}{2} D_\phi(\vec{f})\right) \quad (2.37)$$

2.2.3 Poder resolutivo

Se define el poder resolutivo siguiendo el criterio de Strehl (O'Neill 1963) como la integral de la función de transferencia óptica:

$$R = \int d\vec{f} B(\vec{f}) T(\vec{f}) \quad (2.38)$$

El poder resolutivo está limitado por la atmósfera o por el telescopio dependiendo de la anchura relativa de las respectivas funciones de transferencia. Para un telescopio de diámetro D pequeño, $T(\vec{f})$ es más estrecha que $B(\vec{f})$ y los efectos de la atmósfera son despreciables. El poder resolutivo queda:

$$R \cong R_D = \int d\vec{f} T(\vec{f}) = \frac{\pi}{4} \left(\frac{D}{\lambda} \right)^2 \quad (2.39)$$

Para un telescopio de gran apertura, la atmósfera es la que limita el poder resolutivo:

$$R \cong R_\infty = \int d\vec{f} B(\vec{f}) = \int d\vec{f} \exp\left(-\frac{1}{2} D_\phi(\vec{f})\right) \quad (2.40)$$

Una medida muy útil del grado de la turbulencia fue introducido por Fried (1966). Se busca el tamaño D_x del telescopio que en ausencia de turbulencia ofrece el poder resolutivo R_∞ , el máximo que permiten las condiciones atmosféricas:

$$R_\infty = \int d\vec{f} \exp\left(-\frac{1}{2} D_\phi(\vec{f})\right) = \int d\vec{f} T_x(\vec{f}) \quad (2.41)$$

Sustituyendo (1.11) en la primera integral y (2.39) en la segunda se obtiene que el tamaño D_x del telescopio que ofrece dicho poder resolutivo es precisamente el parámetro de Fried r_0 que se introdujo en el capítulo anterior:

$$R_{\infty} = \frac{\pi}{4} \left(\frac{r_0}{\lambda} \right)^2 \quad (2.42)$$

El parámetro de Fried es de gran utilidad pues permite describir el estado de la atmósfera y su influencia en la calidad de las imágenes a través de un único parámetro. Un valor grande de r_0 significa buenas condiciones de observación. Un valor pequeño se traduce en malas condiciones de atmósfera y grandes distorsiones en los frentes de onda. El telescopio limita el poder resolutivo si el diámetro del telescopio es menor que el parámetro de Fried. En caso contrario, es la atmósfera la que marca el máximo poder resolutivo.

Los observatorios astronómicos se sitúan en lugares en los que la atmósfera es especialmente tranquila y homogénea. Aun así, es difícil que el parámetro de Fried sea mayor de 20 cm en uno de estos observatorios. Por tanto, la atmósfera impone que, aun en las mejores condiciones de observación, la resolución no supere el límite difraccional de un telescopio de 20 cm (medio segundo de arco aproximadamente). Cualquiera que sea la apertura del telescopio, no se podrá superar este límite impuesto por la atmósfera. Este hecho evidencia la necesidad de corregir las aberraciones en las imágenes astronómicas, sobre todo en las captadas con los grandes telescopios de varios metros de diámetro que podrían ofrecer resoluciones muy superiores (centésimas de segundo de arco). En el siguiente capítulo se describen los sistemas de óptica adaptativa, cuyo objetivo es compensar a tiempo real las perturbaciones que la turbulencia atmosférica introduce en los frentes de onda que la atraviesan.