

UNIVERSIDAD DE SANTANDER

ESCUELA TECNICA SUPERIOR DE INGENIEROS DE  
CAMINOS, CANALES Y PUERTOS

T E S I S D O C T O R A L

ANALISIS ESTADISTICO DE LA RESISTENCIA DE TENDONES  
DE PUENTES ATIRANTADOS Y ESTRUCTURAS SIMILARES

PRESENTADA POR: Agustín Ascorbe Salcedo

DIRIGIDA POR : Enrique Castillo Ron

SANTANDER, JUNIO 1983

## **RESUMEN**

En este trabajo se deduce, mediante un modelo teórico, la resistencia a fatiga de tendones de gran longitud en puentes atirantados a partir de la resistencia a fatiga de probetas de pequeño tamaño.

El trabajo parte de los avances realizados por Andrä/Saul que son los primeros en advertir al calculista sobre la influencia de la longitud del tendón en la resistencia a fatiga, si bien anteriormente Fischer ya había analizado dicha influencia sobre la resistencia estática. Sin embargo, Fischer y Andrä/Saul caen en una arbitrariedad consistente en proponer el ajuste de los datos obtenidos en el laboratorio mediante una ley normal y, a partir de ahí, deducir la ley para el tendón de longitud real, basándose en la hipótesis de independencia.

En este trabajo se presenta, en primer lugar, un método que elimina dicha arbitrariedad y permite obtener, a partir de los resultados de los ensayos de laboratorio, la longitud a la que corresponde una ley normal.

A continuación, se presenta un modelo de Box-Jenkins que, por permitir prescindir de la hipótesis de independencia, generaliza los modelos existentes para el estudio estadístico de la influencia de la longitud en la resistencia de los tendones. La gran incidencia de la hipótesis de independencia, puesta de manifiesto en algunos ejemplos, acon

sejan contrastarla en la práctica, lo cual puede realizarse mediante una metodología que se explica en este trabajo.

Seguidamente se estudia la influencia de la ley de cargas en la resistencia de un tendón de longitud dada y se presenta un modelo, también basado en la metodología de Box-Jenkins, que se aplica a varios casos de leyes de cargas comparándolos con la ley uniforme.

Después se analiza la influencia del número de cables en la resistencia estática de un tendón. Un tendón real suele estar constituido por grupos de alambres o cables, por lo que es necesario analizar la relación existente entre las resistencias a fatiga de éstos y aquellos. Ello se debe fundamentalmente a que ensayos de tendones múltiples requieren unas máquinas muy potentes y son caros, y los resultados en los que tiene uno que basarse para deducir su resistencia se refieren a tendones simples, formados por un solo elemento.

El trabajo concluye con el estudio de la rotura progresiva a fatiga de un tendón múltiple. Para ello se adoptan dos hipótesis de acumulación de daño diferentes y se aplica la teoría asintótica al caso de elementos de longitud muy grande y al de tendones de gran número de elementos, tanto para la zona de vida finita como para la de durancia.

## **AGRADECIMIENTOS**

Quisiera dejar constancia de mi más sincero agradecimiento a las personas que han hecho posible la realización de este trabajo.

En primer lugar al Profesor Enrique Castillo, no sólo por haber dirigido esta tesis, sino también por su especial dedicación a la misma y la ayuda que en todo momento me ha proporcionado.

A los profesores Alfonso Fernández Canteli y Eduardo Mora, por su colaboración en gran parte de este trabajo.

A D. Agustín Manrique por la labor realizada en la delineación de las figuras. A D. Joaquín San Román por su eficaz labor de mecanografía.

Al personal del Centro de Cálculo de la Universidad de Santander.

A la Fundación Leonardo Torres Quevedo, por haber financiado parte de este trabajo.

Finalmente, y de modo muy especial, a mis padres, por haberse sacrificado por mí durante gran parte de su vida.

## **LISTA DE SIMBOLOS**

AR(p)	proceso autorregresivo de orden p.
ARMA(p,q)	proceso de media móvil y autorregresivo de orden (p,q).
ARIMA(p,d,q)	proceso de media móvil integrado y autorregresivo de orden (p,d,q).
$a_t$	variables aleatorias independientes $N(0, \sigma_a^2)$ .
$a_n, A_m$	constantes de normalización.
B	operador lineal ( $B \bar{z}_t = \bar{z}_{t-1}$ ).
$b_i$	constantes autorregresivas del modelo ARMA(p,q).
$b_n, B_m$	constantes de normalización.
C( )	función de autocovarianza.
Cov( )	covarianza.
$c_i$	constantes de media móvil del modelo ARMA(p,q). estimador de $\gamma_k$ .
$C_j^k$	coeficientes de la función de distribución de $R_m^*$ .
$c_n^*, c_n, C_m^*$	constantes de normalización.
D	índice, equivalente al de Miner, pero en escala logarítmica.
d	orden de no estacionariedad del proceso ARIMA(p,d,q).
$d_n, d_n^*$	constantes de normalización.
E( )	esperanza matemática.
$e_t$	salida del filtro de media móvil.
F( )	función de distribución.

$f(\ )$	función de densidad.
$g(\Delta\sigma)$	media de la distribución de $\log n_i$ en rotura.
$g(x, l)$	ley de variación de las tensiones <u>uni</u> tarias.
$g(x_1, x_2, \dots, x_n)$	función de densidad del estadístico de orden $m$ ( $X_1, X_2, \dots, X_m$ ).
$H(x)$	límite de $H_n(a_n + b_n x)$ .
$H_n(x)$	función de distribución de $Z_n$ .
$H_{1,\gamma} H_{2,\gamma} H_{3,0}$	distribuciones límite de $Z_n$ , cuando $n \rightarrow \infty$ .
$h(\Delta\sigma)$	desviación típica de la distribución de $\log n_i$ en rotura.
$h(l)$	ley de tensiones unitaria (por <u>elemen</u> to) tipo.
$L$	longitud de un tendón real.
$L_e$	longitud de ensayo de un tendón.
$L_0$	longitud de referencia de un tendón.
$L(x)$	límite de $L_n(c_n + d_n x)$ .
$L_n(x)$	función de distribución de $W_n$ .
$L_{1,\gamma} L_{2,\gamma} L_{3,0}$	distribuciones límites de $W_{n_1}$ cuando $n \rightarrow \infty$ .
$M, M_i$	número de Miner.
$m$	número de elementos de un tendón.
$MA(q)$	proceso de media móvil de orden $q$ .
$\max$	máximo de.
$\min$	mínimo de.

$m( )$	función de valor medio.
$N$	número de ciclos. número de realizaciones de una serie temporal.
$N_i, n_i$	número de ciclos hasta rotura.
$N_{(k)}$	estadístico de orden $k$ de los $N_i$ .
$N_{(k)}^{\Delta\sigma_i}$	estadístico de orden $k$ de los valores $N_i$ correspondientes, en el nivel $\Delta\sigma_i$ .
$N_f(k)$	número de ciclos asociados al debilitamiento admisible del tendón.
$n_e$	número de subelementos, de longitud igual a la de ensayo, de que está compuesto el tendón real.
$n_0$	número de subelementos, de longitud $L_e$ , que componen el tendón de referencia.
$n$	número de subelementos, de longitud igual a la de la referencia, de que consta el tendón real.
$p, p'$	probabilidades.
prob	probabilidad de.
$p$	orden del proceso autorregresivo.
$q$	orden del proceso de media móvil.
$R( )$	función de autocorrelación.
$R$	conjunto de los números reales. matriz de covarianzas.
$R_n^*$	resistencia unitaria, por elemento,

	en el caso de rotura progresiva estática.
$R_n$	resistencia del tendón real.
$r_i$	resistencia del subelemento $i$ -ésimo.
$r_i^j$	logaritmo del número de ciclos hasta rotura, del subelemento $i$ -ésimo, del cable $j$ .
$S$	operador definido como $\nabla^{-1}$ .
$S(\ )$	función de densidad espectral.
$U_i$	valor dado por $\{\log N_i - g(\Delta\sigma_1)\} / h(\Delta\sigma_1)$
$U_{(k)}$	estadístico de orden de los $\log N_{(k)}^{\Delta\sigma_j}$ , normalizado.
$V(\ )$	varianza de.
$v$	coeficiente de variación ( $\sigma/\mu$ ).
$W_n$	mínimo de $X_1, X_2, \dots, X_n$ .
$w_t$	salida del filtro autorregresivo.
$x(\ )$	función que se representa un proceso estocástico.
$X_1, X_2, \dots, X_n$	variables aleatorias básicas.
$X_{k:n}, X_{(k)}$	estadístico de orden $k$ de los $X_j$ .
$x$	factor de proporcionalidad de $h(l)$ .
	resistencia (tensión o número de ciclos).
$x^*$	valor adimensional igual a $x/\sigma$ .
$Z$	conjunto de los números enteros.
$Z_n$	máximo de $X_1, X_2, \dots, X_n$
$z_i, z_i^j$	desviaciones de $r_i$ y $r_i^j$ respecto de $\mu$ .
$\bar{z}$	estimador de la media de los $z_t$ .

$z_i^*$	valor adimensional igual a $z_i/\sigma$ .
$\alpha(F)$	$\inf\{x : F(x) > 0\}$
$\gamma, \gamma_k$	función de autocovarianza.
$\nabla$	operador equivalente a $(1-B)$ .
$\xi$	suceso elemental.
$\Sigma$	suma.
$\phi(\cdot), \phi_i$	operador autorregresivo.
$\psi(\cdot), \psi_i$	operador autorregresivo generalizado.
$\psi(\cdot), \psi_i$	filtro general lineal.
$\theta(\cdot), \theta_i$	operador de media móvil.
$\mu$	nivel del proceso.
	media de una distribución normal.
$\mu^*$	valor adimensional igual a $\mu/\sigma$ .
$\pi(\cdot), \pi_i$	filtro general lineal.
$\pi$	producto, pi.
$\rho_k$	función de autocorrelación.
$\sigma$	desviación típica de una distribución normal.
$\sigma_a$	desviación típica de la variable $z_i$ .
$\sigma_z$	desviación típica de los valores $z_t$ .
$\Delta\sigma, \Delta\sigma_i$	incremento de la variación de tensión.
$\omega(F)$	$\sup\{x:F(x) < 1\}$ .

## **LISTA DE FIGURAS**

## LISTA DE FIGURAS

## CAPITULO I

- Figura 1. Representación de las curvas de Wöhler
- Figura 2. Ilustración del método Up-and-Down....
- Figura 3. Representación del ensayo escalonado para un solo elemento.....
- Figura 4. Resultados de un ensayo con el método de Prot.....
- Figura 5. Curvas de resistencia normalizada, dadas por Gabriel para tendones de un cable en paralelo y longitud  $n \cdot l$  ( $l$  es la longitud de ensayo). Se dan las curvas para diferentes valores de la probabilidad  $p$  de supervivencia.....
- Figura 6. Distribución del número de ciclos  $n_I$  hasta rotura para un nivel de tensiones determinado.....
- Figura 7. Curvas de isoprobabilidad (curvas de Wöhler) en la hipótesis de que coinciden con las de isodaño.....
- Figura 8. Función de valor medio  $m(t)$  de un proceso estocástico.....
- Figura 9. Generación de un proceso ARIMA a partir del ruido blanco  $a_t$  mediante tres operaciones de filtrado.....

Figura 10. Función de autocorrelación de un pro  
ceso estocástico.....

Figura 11. Regiones admisibles para los paramétro  
s y los valores  $\rho_1$  y  $\rho_2$  en los mo  
delos AR(2), MA(2) y ARMA(1,1).....

## CAPITULO II

- Figura 1. Funciones de densidad de  $R_n$  para distintos valores de  $n_e/n_0$ .....
- Figura 2. Funciones de distribución de  $R_n$ , en papel probabilístico normal, para distintos valores de  $n_e/n_0$ .....
- Figura 3. Variación de algunos percentiles de  $R_n$  en función de la longitud del tendón...
- Figura 4. Variación de la media de la resistencia de un tendón de longitud  $L = L_0 n_e/n_0$ ...
- Figura 5. Variación de la desviación típica de la resistencia de un tendón de longitud  $L = L_0 n_e/n_0$ .....
- Figura 6. Organigrama del proceso gráfico de determinación de la longitud de referencia.....
- Figura 7. Construcción gráfica para la determinación de la longitud de referencia...
- Figura 8. Gráfico auxiliar para la demostración de los teoremas 1 y 2.....
- Figura 9. Ajuste de una ley normal a los datos del ensayo, por el método modificado de Deubelbeiss.....
- Figura 10. Construcción gráfica, sobre un ejemplo concreto, para la determinación de la longitud de referencia.....

Figuras 11 y 12. Funciones de distribución obtenidas mediante simulación, de la -  
resistencia, según distintos mo-  
delos ARMA(p,q) y diversas longitu  
des del tendón.....

## CAPITULO III

- Figura 1. Ley de tensiones  $g(x,l)$  para un tendón de longitud  $L$ .....
- Figura 2. Ley trapezoidal  $h(l)$  de tensiones, utilizada en la simulación, para los casos de dependencia e independencia....
- Figura 3. Funciones de distribución de la resistencia del tendón, obtenidas por simulación, para distintos tipos de ley trapezoidal. Caso de independencia....
- Figura 4. Funciones de distribución de la resistencia del tendón, obtenidas por simulación, para distintos tipos de ley trapezoidal. Caso de dependencia.....

## CAPITULO IV

Figura 1. Representación gráfica de los resultados de la simulación en el caso de independencia.

Figura 2. Representación gráfica de los resultados de la simulación en el caso de dependencia. Se da la curva envolvente.

Figura 3. Ilustración gráfica, para el caso de independencia, de los resultados obtenidos por Gabriel suponiendo un material elastoplástico ideal con elongación ilimitada.

## CAPITULO V

- Figura 1. Representación esquemática de un tendón formado por  $m$  elementos.
- Figura 2. Esquema de la variación del nivel de tensiones y del número de ciclos hasta el debilitamiento admisible del tendón.
- Figura 3. Ilustración de la hipótesis de acumulación de daño.
- Figura 4. Curvas de  $c_n$  y  $d_n$  en escala vertical logarítmica.
- Figura 5. Funciones de distribución asintóticas de los estadísticos de orden  $1, 2, \dots, 20$ , para un número muy grande de cables ( $m \rightarrow \infty$ ).
- Figura 6. Representación de las condiciones de compatibilidad para  $g(\Delta\sigma)$  y  $h(\Delta\sigma)$ .
- Figura 7. Obtención de las probabilidades de fallo de los cables  $1, 2, \dots, \frac{m}{20}$ -ésimo, si la probabilidad de fallo del último de ellos es un 5%.

## **LISTA DE TABLAS**

## LISTA DE TABLAS

## CAPITULO I

- Tabla 1. Distribución de los elementos de ensayo en el método Probit.....
- Tabla 2. Cuadro de resultados numéricos para el análisis en el método Up and Down.....
- Tabla 3. Ilustración de un ensayo con el método de la escalera con respuesta transformada.....
- Tabla 4. Resultados del ensayo UDTR, con las respuestas transformadas tipo U o tipo D..
- Tabla 5. Definición, en el ensayo UDTR, de distintas respuestas tipo D y U.....

## CAPITULO II

- Tabla 1. Resumen de los modelos utilizados en la simulación. Se dan los parámetros de distintos modelos.....

## CAPITULO IV

- Tabla 1. Resumen de los modelos utilizados en la simulación.....

# INDICE

	<u>Pág.</u>
RESUMEN.....	I
AGRADECIMIENTOS.....	IV
LISTA DE SIMBOLOS.....	VI
LISTA DE FIGURAS.....	XII
LISTA DE TABLAS.....	XX
INDICE.....	XXII
CAPITULO I.- Estado del conocimiento.....	1
1.1. Introducción.....	2
1.1.1. Ensayos de fatiga.....	2
1.1.1.1. Objetivos de los ensayos de fatiga.	2
1.1.1.2. Métodos de los ensayos de fatiga...	4
1.1.1.2.1. Ensayos estándar (amplitud cons	
tante).....	6
1.1.1.2.1.1. Un único elemento para cada	
nivel de tensiones.....	6
1.1.1.2.1.2. Un grupo de elementos para	
cada nivel de tensiones....	7
1.1.1.2.2. Ensayos de respuesta (amplitud	
constante).....	8
1.1.1.2.2.1. Método de Probit.....	8
1.1.1.2.2.2. Método de la escalera	
(staircase) o Up and Down..	9
1.1.1.2.2.3. Método de la escalera modi-	
ficado.....	13
1.1.1.2.2.3. Método de la escalera con	
respuesta transformada.....	14

1.1.1.2.3. Ensayos con incremento de amplitud.	15
1.1.1.2.3.1. Método escalonado.....	15
1.1.1.2.3.2. Método Prot.....	18
1.1.1.3. Metodología de análisis.....	19
1.1.1.3.1. Ensayo Up and Down.....	19
1.1.1.3.2. Método de la escalera modificado...	23
1.1.1.3.3. Método de la escalera con respuesta transformada (UDTR).....	25
1.2. Trabajos de Andrä/Saul y Fischer.....	28
1.3. Hipótesis de acumulación de daño.....	30
1.4. Teorías estadísticas necesarias para el desarrollo del trabajo.....	36
1.4.1. Procesos estocásticos.....	36
1.4.1.1. Definición.....	36
1.4.1.2. Distribuciones de primero y segundo orden.....	36
1.4.1.3. Funciones de valor medio, de autocovarianza y de autocorrelación.....	38
1.4.1.4. Procesos estocásticos estacionarios...	40
1.4.1.5. Función de densidad espectral de un proceso estacionario.....	42
1.4.1.6. Series temporales. Modelos generales..	44
1.4.1.6.1. Modelo autorregresivo.....	45
1.4.1.6.2. Modelo de media móvil.....	47
1.4.1.6.3. Modelo mixto autorregresivo y de media móvil.....	48
1.4.1.6.4. Modelo no estacionario.....	48

1.4.2. Series temporales estacionarias en sentido amplio.....	52
1.4.2.1. Funciones de valor medio y covarianza de una serie.....	52
1.4.2.2. Modelo general lineal.....	55
1.4.2.2.1. Función generatriz de autocovarianza.....	56
1.4.2.2.2. Condiciones de estacionariedad e invertibilidad.....	57
1.4.2.3. Procesos autorregresivos AR(p).....	57
1.4.2.4. Procesos de media móvil MA(q).....	58
1.4.2.5. Procesos autorregresivos y de media móvil ARMA(p,q).....	60
1.4.3. Estadística de valores extremos.....	63
1.4.3.1. Caso de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuídas..	65
1.4.3.1.1. Límites de las distribuciones de extremos.....	69
1.4.3.2. Convergencia débil para variables independientes e idénticamente distribuídas.....	72
1.4.3.2.1. Distribuciones límites para el máximo y el mínimo: condiciones suficientes.....	73
1.4.3.2.2. Otras posibilidades para las constantes de normalización.....	78
1.4.3.2.3. Distribución normal $N(0,1)$ .....	81

1.4.3.2.4.	Distribución logarítmico normal...	82
1.4.3.2.5.	Convergencia débil para los extremos k-ésimos.....	83
1.4.3.2.6.	Distribución normal.....	85
1.4.3.2.7.	Velocidad de convergencia.....	85
1.4.3.3.	Convergencia débil de extremos en el caso general.....	88
1.4.3.3.1.	Sucesiones Gaussianas estacionarias.....	89
1.4.3.3.2.	Distribución asintótica de los extremos k-ésimos.....	92

CAPITULO 2.- Influencia de la longitud en la resistencia a fatiga de un elemento.....		94
2.1.	Introducción.....	94
2.2.	Caso de independencia.....	97
2.2.1.	Modelo matemático.....	97
2.2.2.	Utilización del modelo.....	106
2.2.3.	Ejemplo de aplicación.....	114
2.2.4.	Conclusiones.....	118
2.3.	Caso de independencia.....	120
2.3.1.	Modelo matemático.....	120
2.3.2.	Estimación práctica de los parámetros.....	123
2.3.3.	Comparación con el modelo de independencia	125
2.3.4.	Conclusiones.....	130

CAPITULO III.- Influencia de la ley de tensiones en.	
la resistencia a fatiga de un elemen-	
to.....	132
3.1. Introducción.....	133
3.2. Modelo matemático.....	134
3.2.1. Caso de independencia.....	136
3.2.2. Caso de dependencia.....	138
3.3. Estudio de la influencia de la ley tensional.	139
3.4. Conclusiones.....	143
CAPITULO IV.- Análisis de la rotura progresiva está-	
tica de un tendón formado por elemen-	
tos paralelos.....	144
4.1. Introducción.....	145
4.2. Modelo matemático.....	145
4.2.1. Caso de independencia.....	148
4.2.2. Caso de dependencia.....	152
4.3. Análisis de la influencia del número de ele-	
mentos.....	153
CAPITULO V.- Análisis de la rotura progresiva a fati	
ga de un tendón formado por elementos -	
paralelos.....	158
5.1. Introducción.....	159
5.2. Modelo matemático.....	160

5.3. Soluciones asintóticas.....	172
5.3.1. Elementos muy largos.....	172
5.3.2. Gran número de elementos.....	175
5.4. Condiciones de compatibilidad.....	180
5.5. Ejemplo de aplicación.....	182
5.6. Conclusiones.....	184
APENDICE I.- Organigramas y programas de ordenador	185
PROGRAMA 1. "ACERO" Cálculo de las funciones de distribución de la resistencia a fa tiga de un elemento de longitud. Se supone ley de tensiones de tipo tra pezoidal.	
Organigrama.....	186
Programa.....	190
PROGRAMA 2. "TE2" Dibujo en el plotter de una familia de funciones de distribu ción, papel probabilístico normal.	
Organigrama.....	193
Programa.....	199
PROGRAMA 3. "TE3" Programa que calcula la fun ción de distribución de la resis tencia de un tendón en el caso de rotura progresiva estática.	
Programa.....	201
PROGRAMA 4. "TE11" Programa que obtiene, me diante simulación, la distribu	

	ción de la resistencia a fatiga de un tendón compuesto por NCAB elementos de longitud $N_1$ veces la de referencia.	
	Organigrama.....	202
	Programa.....	205
PROGRAMA 5.	"AUTO" Subrutina de TE11 que obtiene la función de autocorrelación del proceso ARMA(p,q) de Box-Jenkins, utilizado.	
	Organigrama.....	208
	Programa.....	212
PROGRAMA 6.	"SIMUL" Subrutina de TE11 que lleva a cabo la simulación.	
	Organigrama.....	213
	Programa.....	220
PROGRAMA 7.	"ORDEN" Subrutina de TE11 que ordena de menor a mayor las componentes de un vector.	
	Organigrama.....	222
	Programa.....	223
PROGRAMA 8.	"INDEP9" Programa para el cálculo de las funciones de distribución exactas y asintóticas ( $n \rightarrow \infty$ y $m \rightarrow \infty$ ) de los estadísticos de orden k de una muestra de una población de mínimos de N valores de la ley $N(0,1)$ .	
	Organigrama.....	224
	Programa.....	229

PROGRAMA 9. "INDEP1" Subrutina de INDEP9 que dibuja funciones de distribución, representán- dolas mediante un número del 1 al 5.	
Organigrama.....	231
Programa.....	233
APENDICE 2.- Bibliografía.....	234

# CAPITULO I

ESTADO DEL CONOCIMIENTO

## 1.1.- INTRODUCCION

### 1.1.1.- ENSAYOS DE FATIGA

#### 1.1.1.1.- OBJETIVOS DE LOS ENSAYOS DE FATIGA

Los objetivos de los ensayos de fatiga, de un material o elemento dado, son dos. El primero de ellos es la estimación de la relación existente entre la amplitud del intervalo de tensión y el numero de ciclos hasta que se produzca el fallo. El segundo objetivo es la comparación de las propiedades de fatiga de dos o más materiales.

Con objeto de asegurar la fiabilidad de las estimaciones, la muestra sobre la que se van a tener los resultados de los ensayos a fatiga, debe estar escogida aleatoriamente de una población de elementos posibles, y ensayada conforme a métodos universalmente aceptados. Los principales métodos de ensayo son:

A.- Ensayos estándar (amplitud constante o método de Wöhler clásico).

1.- Un único elemento para cada nivel de tensiones.

2.- Un grupo de elementos para cada nivel de tensiones.

B.- Ensayos de respuesta (amplitud constante).

- 1.- Método Probit.
- 2.- Método de la escalera (staircase).
- 3.- Método de la escalera modificado.
- 4.- Método de la escalera con respuesta trans formada.

C.- Ensayos con incremento de amplitud.

- 1.- Método escalonado.
- 2.- Método Prot.

Los objetivos del análisis estadístico son:

- Estimar algunas propiedades de fatiga de un material, junto con medidas de su fiabilidad.
- Proporcionar métodos objetivos para determinar si dos o más grupos de datos provienen o no de poblaciones semejantes.

La teoría estadística da también información sobre:

- El uso más eficiente de un número limitado de elementos a ensayar.
- El número de elementos necesarios para tener un

determinado grado de confianza en los resultados.

-La planificación óptima de una serie de ensayos.

### 1.1.1.2.- METODOS DE ENSAYO

Hasta hace poco sólo había un método aceptado para la realización de el laboratorio de ensayos de fatiga. Dicho ensayo estándar, descrito en el STP91 (ASTM) hace uso de un único elemento para cada nivel de tensiones. Sin embargo, dicho método no da una información adecuada de muchos de los objetivos que se persiguen en los ensayos de fatiga. Por ello se han ido introduciendo una serie de métodos, para la realización de ensayos de fatiga, que resultan más significativos y cada uno de los cuales tiene ciertas ventajas respecto a los otros.

Uno de los principales objetivos de los ensayos a fatiga es el de determinar las llamadas curvas de Wöhler o curvas S-N, que son aquellas que representan la relación entre la amplitud de tensión y el número de ciclos aplicados para una probabilidad de supervivencia del P%. Por lo tanto, existirá una curva para cada valor de P. (ver figura 1).

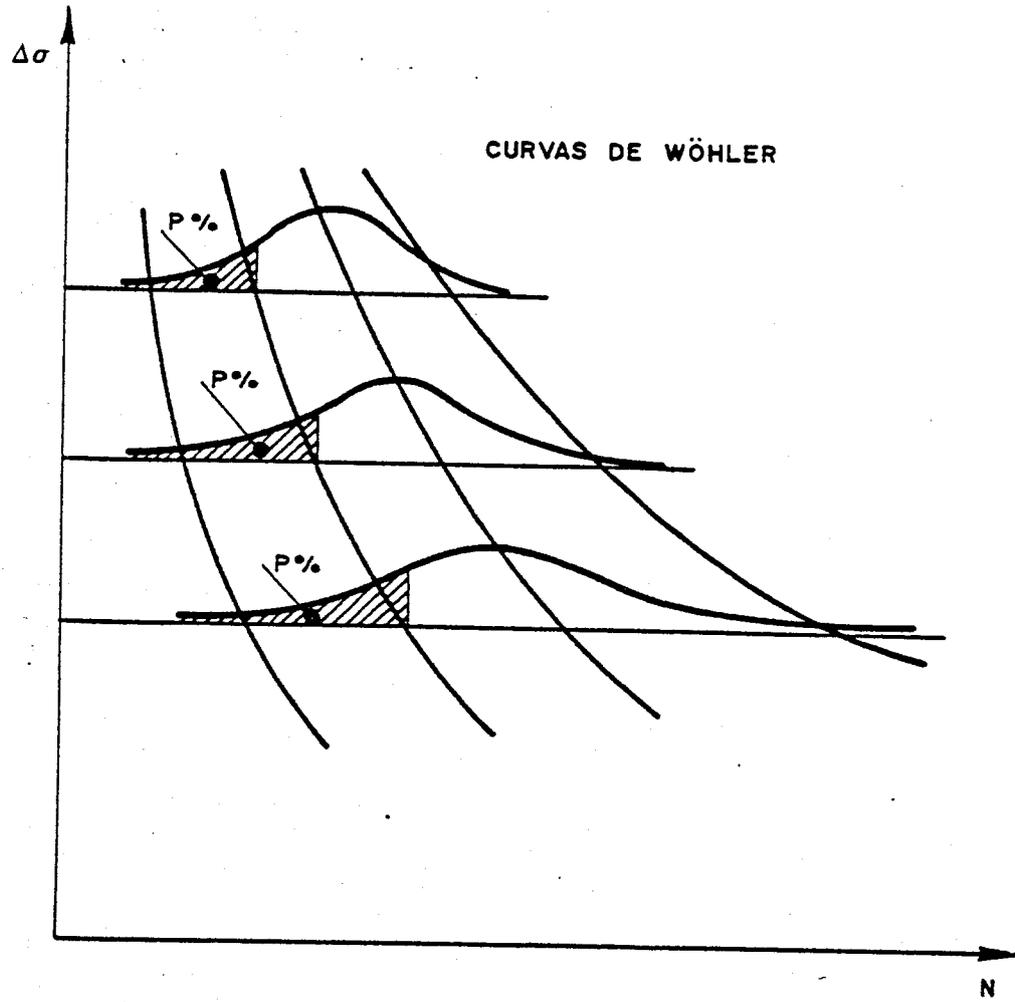


FIGURA 1

La elección del método de ensayo depende el objeto del mismo y del número de elementos disponibles. Si se pretende determinar la curva S-N los ensayos estándar (A) son los más convenientes. Para determinar la tensión de fatiga en la zona de larga vida o el límite de fatiga los ensayos de respuesta (B) o los de incremento de amplitud (C) son los recomendados. Los últimos se utilizan también para comparar las propiedades de fatiga en la zona de larga vida de diferentes materiales o métodos de elaboración distintos.

#### 1.1.1.2.1.- ENSAYOS ESTANDAR (AMPLITUD CONSTANTE)

##### 1.1.1.2.1.1.- CASO DE UN UNICO ELEMENTO PARA CADA NIVEL DE TENSIONES

En el método estándar cada elemento es sometido a una serie de ciclos de amplitud de tensión constante hasta que se produce la rotura. Los diferentes niveles deben cubrir un rango de tensiones que va desde los valores altos (para los que el fallo se produce en un número limitado de ciclos) hasta valores bajos (en los que el fallo no se produce, o se produce, es después de un número muy grande de ciclos). Si el interés primordial es la zona de larga vida (para N grande) de la curva S-N (a menudo llamada límite de fatiga) se tiene, a priori, una idea apro

ximada de dicho valor para el material a ensayar. En este caso, el primer nivel de tensiones elegido es un poco mayor que el límite de fatiga estimado. Dependiendo del resultado del primer ensayo, los siguientes se harán a un nivel mayor o menor que ese valor, hasta que se alcance un nivel de tensiones en el que el elemento no falle, para el número de ciclos aplicado. Cuando nos acerquemos al límite de fatiga habrá que ensayar algunos elementos a niveles de tensión mayores, para producir fallos, con objeto de tener datos con los que estimar el límite de fatiga.

Este método de ensayo es utilizado cuando sólo se puede hacer uso de un número relativamente pequeño de elementos, lo que ocurre cuando son caros o su suministro es limitado.

#### 1.1.1.2.1.2.- CASO DE UN GRUPO DE ELEMENTOS PARA CADA NIVEL DE TENSIONES

El ensayo estándar con un solo elemento para cada nivel de tensiones da para información de la variabilidad del material y del procedimiento de ensayo. Por ello es conveniente ensayar un mínimo de 4 elementos por grupo, siendo preferible un número de 10 o más para tener idea de la forma de la distribución de los valores de fatiga.

Para la determinación de las curvas S-N para cada porcentaje de supervivencia se deberán ensayar 3 ó más niveles diferentes. Para el límite de fatiga se ensayan grupos a niveles próximos al mismo. Para obtener el mismo grado de precisión en toda la curva S-N se deben ensayar más elementos en la zona de vida larga que en la de vida corta, debido a la mayor dispersión de los resultados.

#### 1.1.1.2.2.- ENSAYOS DE RESPUESTA (AMPLITUD CONSTANTE)

Se denomina curva de respuesta, para N ciclos, a la curva que da los valores del porcentaje de supervivencia para distintos niveles de variación de tensiones, donde N es un número fijado previamente.

##### 1.1.1.2.2.1.- METODO PROBIT

En el método Probit se ensayan uno o más grupos de elementos para un número fijo de ciclos, en 4 ó 5 niveles distribuidos alrededor de la tensión que nos interesa. Es válido para estimar la resistencia a fatiga para un porcentaje p de supervivencia. En el caso del límite de fatiga del material ( $p = 50\%$ ), al menos dos niveles de tensiones, para N ciclos, estarán por debajo del 50% y otros dos por encima. Sería conveniente un quinto nivel

que produzca un 50% de supervivencias.

Cada grupo tendrá al menos 5 elementos, siendo el total de los mismos a ensayar de 50, como mínimo. La distribución del número total de ensayos dependerá de la finalidad del mismo. La distribución de los elementos, entre los diferentes niveles de tensiones impuesta de forma que los valores de los porcentajes de supervivencia observados tengan aproximadamente el mismo peso, condición necesaria para ajustar la curva de respuesta por el método de los mínimos cuadrados. Esta distribución facilita, además, el cálculo de los límites de confianza en las curvas de respuesta.

TABLA 1.- DISTRIBUCION DE LOS ELEMENTOS DE ENSAYO

% de supervivencia esperado	Tamaño relativo del grupo
25 a 75	1
15 a 20, 80 a 85	1.5
10, 90	2
5, 95	3
2, 98	5

### 1.1.1.2.2.2.- METODO DE LA ESCALERA (STAIRCASE) O UP AND DOWN

Es una variación del método Probit. En el método

up-and-down (UD) los elementos se ensayan secuencialmente. El primero se ensaya a un nivel de tensiones igual al estimado para la resistencia media a fatiga, para un número de ciclos N establecido a hasta que falle si lo hace antes de ese número de ciclos. Si falla el siguiente se ensaya a un nivel de tensiones un poco menor y si no falla a un nivel algo mayor, y así sucesivamente.

En la figura 2 se observan los resultados de un ensayo UD. Los elementos están numerados por orden cronológico. El número de ciclos es constante, salvo que se produzca antes el fallo. En la propia figura se ve el nivel de tensiones que se debería usar en el siguiente ensayo.

La selección del incremento de tensiones es muy importante. Todos los ensayos, UD se deberían hacer a tres niveles de tensiones, de modo que aproximadamente un 50% de los elementos sobreviva en el nivel medio, un 70% lo haga en el nivel más bajo y un 30% lo haga en el más alto. Hay que elegir adecuadamente el nivel inicial de tensiones. Sino se tienen datos del mismo material o de otro similar, se realizan unos ensayos preliminares, cuyos resultados se desecharán en el análisis hasta conseguir el primer par de resultados distintos. Así, por ejemplo, en el gráfico de la figura 2 se desecharán los resultados de los elementos 1, 2 y 3.

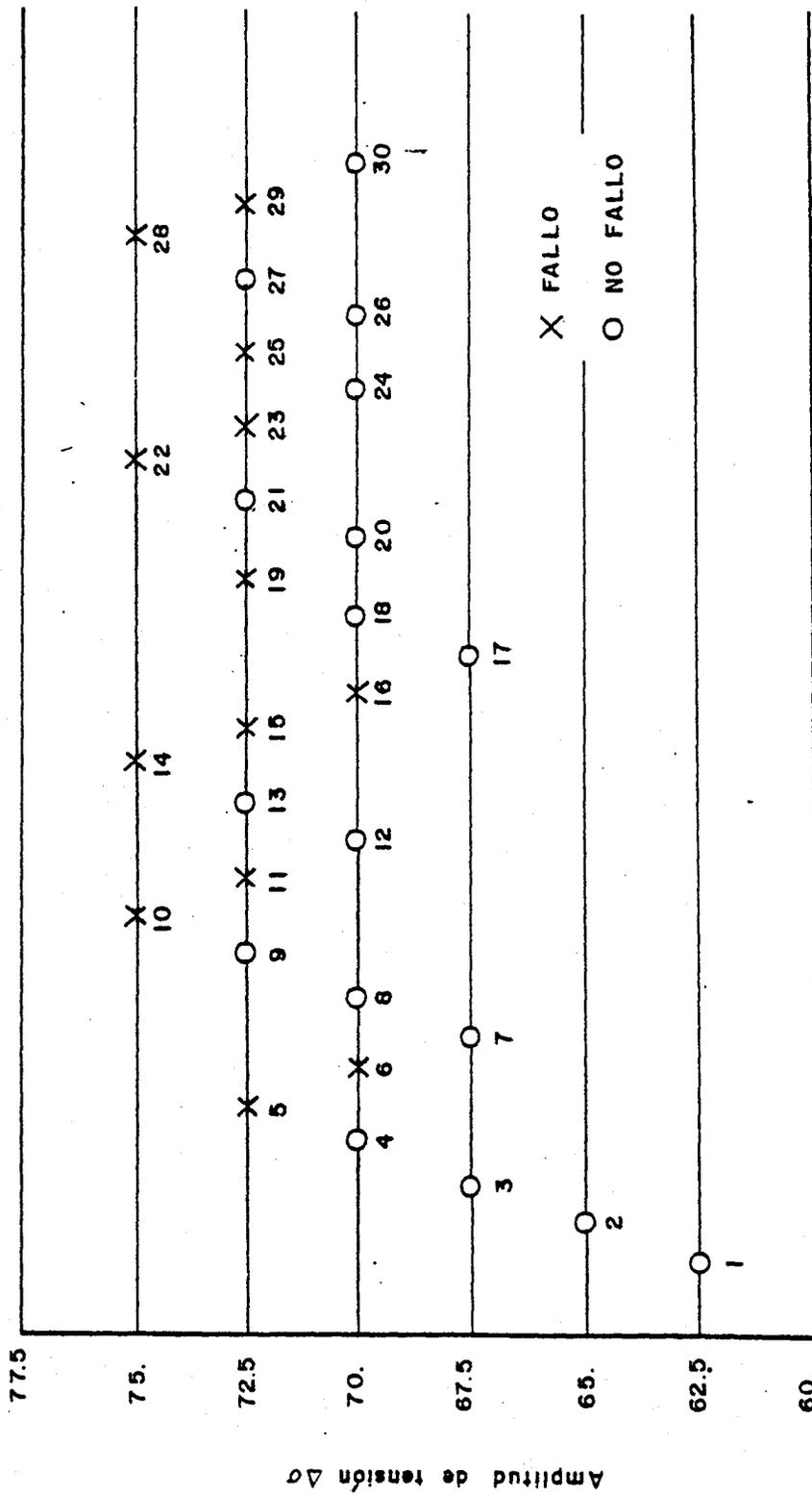


FIGURA 2

Las ventajas que tiene el método de la escalera son:

- Concentra automáticamente los ensayos alrededor de la media.
- Necesita del orden del 30 al 40% menos elementos que otros métodos.
- El análisis estadístico es bastante sencillo.

El inconveniente que tiene es que, al ser ensayados consecutivamente los elementos, el tiempo total del ensayo es mayor.

En general, se deberían ensayar un mínimo de 30 elementos ya que, como se verá posteriormente, se van a utilizar a lo sumo la mitad de los resultados para el cálculo de la resistencia a fatiga.

Si los datos obtenidos por este método los analizamos mediante los métodos de la curva de respuesta, los resultados muestran un sesgo, debido a la naturaleza de la sucesión de datos en el up-and-down. Si el principal interés se centra en la estimación de la curva de respuesta -antes que en la resistencia media- para N ciclos, el método UD no es un procedimiento eficiente.

### 1.1.1.2.2.3.- METODO DE LA ESCALERA MODIFICADO

El tiempo necesario para completar el ensayo en el método de la escalera, puede ser reducido dividiendo un programa de ensayos por el método up-and-down en otros más cortos, independientes y que se llevan acabo simultáneamente. Este tratamiento es conocido como el método de la escalera modificado. En él, el número total de elementos  $T$ , se divide en  $r$  grupos de  $n$ . Cada grupo es ensayado como un programa UD, con un gráfico diferente para cada uno de ellos. De este modo pueden utilizar a la vez varias máquinas. En el método modificado, como en cualquier otro ensayo en el que los elementos de un grupo - sean ensayados en más de una máquina, se deberá hacer una comprobación para determinar si las máquinas dan resultados significativamente diferentes. Si esto no ocurre, los datos se pueden reunir para el análisis estadístico.

### 1.1.1.2.2.4.- METODO DE LA ESCALERA CON RESPUESTA TRANSFORMADA

El método de ensayo up-and-down permite calcular, para un número fijo de ciclos  $N$ , el nivel de tensiones -  $L_{1/2}$  que tiene un 50% de probabilidad de fallo.

Wetherill (1963) se planteó la estimación del ni

vel de tensiones  $L_p$  que tiene una probabilidad  $p$  de fallo. Para  $L_{1/2}$ , si los diferentes niveles de tensiones en que se ensayan los elementos estaban igualmente espaciados se tiene el método up-and-down, propuesto por Dixon y Mood (1948) y explicado en el apartado 1.1.1.2.2.2. Wetherill propuso una modificación del método anterior, para el cálculo de  $L_{1/2}$ . Esta consiste en que al llegar al  $K$ -ésimo par de resultados opuestos, la separación entre niveles de tensiones se reduce a la mitad y se reanuda la sucesión de ensayos al nivel más cercano al valor estimado de  $L_{1/2}$ .

Para estimar  $L_p$  ( $p > 1/2$ ) se utiliza el UDTR (método Up and Down con respuesta transformada). Se parte de una serie de niveles equidistantes y determinados de antemano. Después de cada ensayo se estima la proporción  $p'$  de respuestas positivas (fallos) al nivel usado en el ensayo último, calculando sólo los ensayos medios desde el último cambio de nivel. Si  $p' > p$  y  $p'$  se estima a partir de  $n_0$  ensayos o más, se bajará al nivel inmediatamente inferior. Si  $p' < p$  se sube al nivel superior y si  $p' = p$  no se cambia de nivel. Para estimar  $L_p$ , para  $p < 1/2$ , se estiman las proporciones de respuesta negativa (no fallo); las situaciones  $p > 1/2$  y  $p < 1/2$  son simétricas.

Una división de niveles, reduciéndolos a la mitad, no es posible en el UDTR, salvo que se disponga de un método de estimación muy sencillo.

### 1.1.1.2.3.- ENSAYOS CON INCREMENTO DE AMPLITUD DEL INTERVALO DE TENSIONES

#### 1.1.1.2.3.1.- METODO ESCALONADO

En muchos casos los métodos Probit y Up-and-Down requieren más elementos de los que hay disponibles. Cuando sólo se disponen de pocos para determinar el límite de fatiga parece lógico ensayar cada elemento hasta que se produzca la rotura.

El método consiste en ensayar cada elemento a varios niveles de tensiones para un número grande de ciclos, por ejemplo  $10^7$ . Si las curvas de respuesta típica del material están disponibles el ensayo comienza al nivel correspondiente al porcentaje del 90% de supervivencia. Para cada ensayo completado con éxito, el nivel de tensión se incrementa en una cantidad correspondiente a una disminución de 5% de la probabilidad de supervivencia y se repite el ensayo hasta que se produzca el fallo del elemento. Si la curva de respuesta no está disponible el ensayo comenzará a un nivel de tensión correspondiente al 70% del límite de fatiga estimado, siendo los incrementos aproximadamente iguales al 5% del mismo.

Antes, este método no era considerado como una técnica aceptable por que las resistencias a fatiga de

algunos materiales se veían incrementadas de un modo gratuito al aplicarles tensiones a niveles inferiores a los límites de fatiga, mientras que las de otros podían verse disminuídas por dañarse debido a bajas tensiones. Posteriormente se observó que los daños debidos a bajas tensiones no afecta sensiblemente al límite de fatiga verdadero de algunas aleaciones, muchas de ellas de acero y otras de materiales no férricos. Para aquellos materiales en los que no se da ni el falso aumento ni el daño a bajas tensiones, es posible estimar la resistencia a fatiga de cada elemento ensayándolo a niveles de tensión cada vez más altos hasta la rotura.

En la figura 3 se representa el ensayo escalonado para un único elemento.

La resistencia a fatiga correspondiente al valor  $N$ , para cada elemento, puede ser estimada de esta manera. El principal inconveniente de este método es que los elementos son probados inicialmente a un nivel de tensión bajo, de modo que no se produzca el fallo. Como consecuencia se necesitan varios niveles de tensiones antes de que aquél se produzca.

Antes de que la técnica escalonada pueda ser utilizada con seguridad se debe conocer el efecto de aumento y daño debidos a bajas tensiones. Algunos aceros ten-

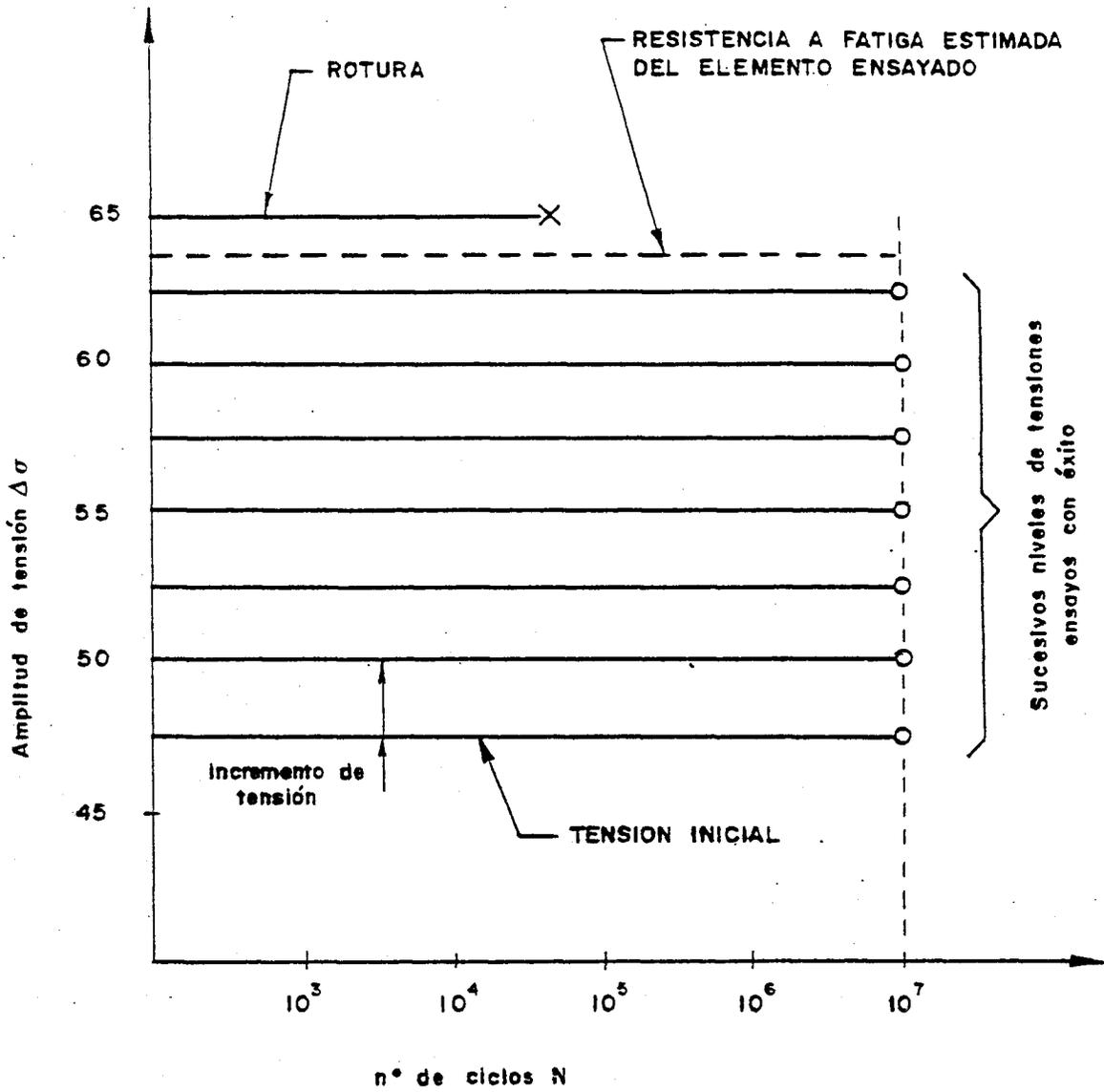


FIGURA 3

drán aumentados artificialmente sus límites de fatiga, por los efectos anteriormente citados, mientras que otros, pueden resultar dañados a causa de dichos efectos y causarán fallos prematuros.

Aunque los ensayos escalonados se hayan hecho con un elemento sólo, se necesitan 4 ó más para estimar la resistencia media a fatiga. Una muestra mayor dará más precisión en las estimaciones de la media y de la variabilidad de la resistencia a fatiga.

#### 1.1.1.2.3.2.- METODO PROT

Este método debido a Marcel Prot (1945) es un método rápido que estima el límite de fatiga de un material. Usándolo, se puede obtener una buena estimación en un tiempo menor que el necesario para otros métodos, aunque con una mayor incertidumbre que en ellos. El uso de esta técnica se limita no sólo a aquellos materiales que no sean sensibles al efecto del aumento gratuito del límite de fatiga, sino también aquellos que tengan un límite de fatiga. En contraste con el método escalonado se aconsejan como mínimo 20 elementos a ensayar, para obtener datos necesarios para el análisis Prot, ya que normalmente se encuentra bastante dispersión en las tensiones de rotura.

En el método Prot, el ensayo de un elemento comienza con una tensión del 60-70% del límite de fatiga estimado y la tensión se va aumentando proporcionalmente. Un conjunto de elementos son ensayados a la misma proporción de carga (tensión/número de ciclos) hasta que falla cada uno de ellos. Se emplearán al menos 3 proporciones de carga distintas para establecer y comprobar la relación lineal existente entre la tensión y la potencia de la proporción de carga. Dicha relación es necesaria para el análisis - Prot. La proporción más baja debe ser tan pequeña como sea posible y la más alta será suficientemente baja para que el elemento no falle por fractura (sin rotura). El tipo de datos observados se muestran en la figura 4.

Para proporciones de carga constantes todos los puntos obtenidos en una proporción dada deberían fallar en la misma línea recta. Pequeñas variaciones en la proporción de carga o variaciones en la velocidad del ensayo pueden causar dispersiones como las de la figura 4.

### 1.1.1.3.- METODOLOGIA DE ANALISIS

#### 1.1.1.3.1.- ENSAYO UP AND DOWN

Para poder aplicar el análisis posterior se deben cumplir las siguientes condiciones:

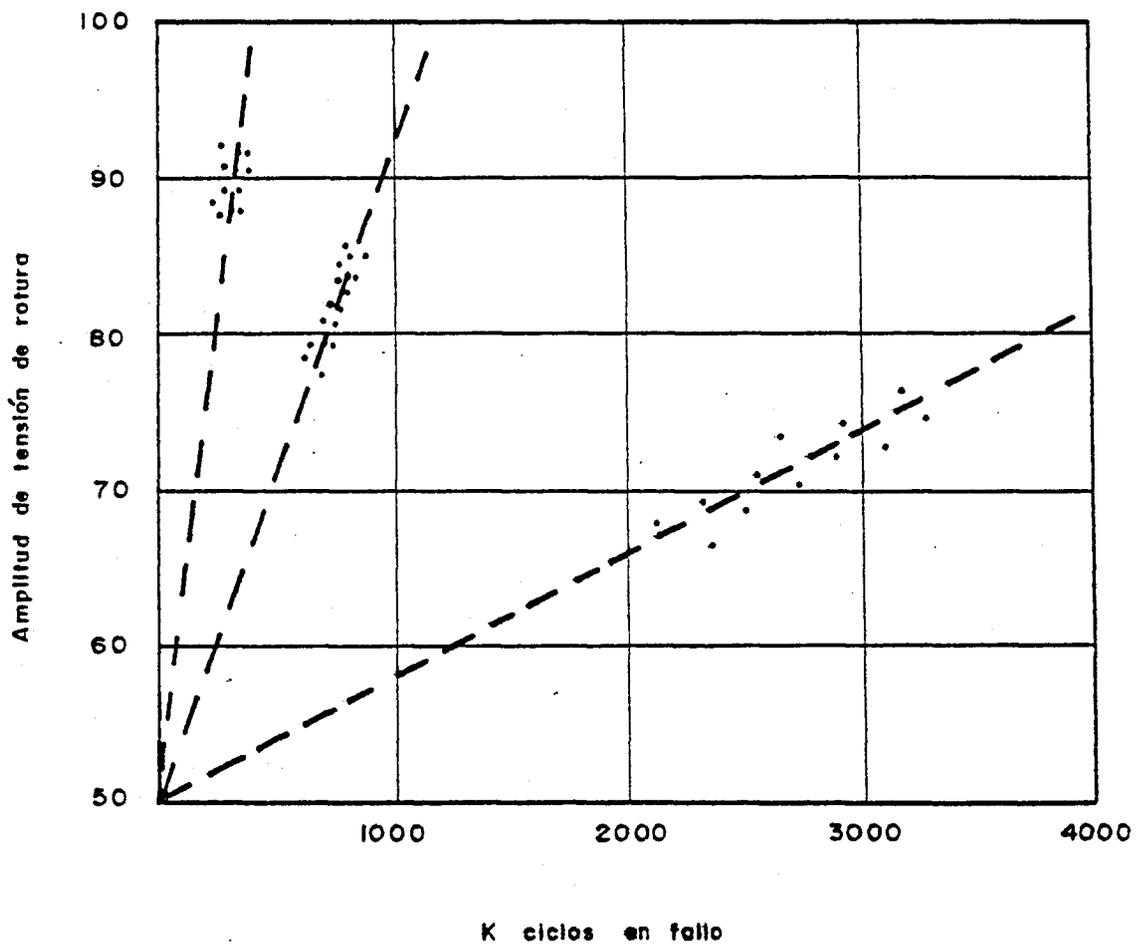


FIGURA 4

-La variable que se analiza ha de estar normalmente distribuida. En la práctica, esto ocurre pocas veces por lo que, se transforma en otra normalmente distribuida. Si no se conoce la forma de la distribución el propio ensayo nos proporcionará los datos para determinarla. Salvo que se asegura la normalidad de la distribución, este no es un buen método para estimar los valores extremos.

-El tamaño de la muestra deberá ser grande, si el análisis que se describe va a ser aplicado.

-Si el análisis es sencillo se debe estimar aproximadamente la desviación típica. El intervalo entre niveles de tensión debe ser aproximadamente igual a una desviación típica. Esta condición se satisface suficientemente si el intervalo es menor que dos veces la desviación típica.

Una vez efectuado el ensayo se mira cuáles son los sucesos menos frecuentes, los fallos o los no fallos. En el análisis sólo se utilizan los sucesos menos frecuentes.

Posteriormente se numeran los distintos niveles y se confecciona un cuadro como el que se ve en la tabla 2.

TABLA 2.

Tensión	i	$N_i$	$i \cdot N_i$	$i^2 \cdot N_i$
-----	---	---	-----	-----
-----	---	---	-----	-----
-----	---	---	-----	-----
$S_2$	2	$N_2$	$2N_2$	$4N_2$
$S_1$	1	$N_1$	$N_1$	$N_1$
$S_0$	0	$N_0$	0	0
		N	A	B

donde

$i = 0$  es asignado a la tensión más baja  $S_0$  para la que se produce el suceso menos frecuente;

$i = 1$  es asignado al nivel de tensiones  $S_0 + d$ , etc.;

$N_i$  es el número de sucesos menos frecuentes en el nivel correspondiente;

$$A = \sum i \cdot N_i; \quad B = \sum i^2 \cdot N_i \quad \text{y} \quad N = \sum N_i$$

La estimación de la resistencia media a fatiga,  $\mu$  (que llamaremos  $m$ ) viene dada por:

$$m = S_0 + d \left( \frac{A}{N} \pm \frac{1}{2} \right) \quad (1)$$

donde el signo opcional es "-" si el suceso menos frecuente es el fallo y "+" en caso contrario.

El estimador S de la desviación standard  $\sigma$ , es:

$$S = 1.620 \sqrt{\left(\frac{NB-A^2}{N^2} + 0.29\right)} \quad (2)$$

Así por ejemplo, en el caso de la figura 2 el suceso menos frecuente es el fallo, con 13 resultados, por 14 resultados de no fallo. No se consideran los resultados 1, 2 y 3.

Tensión	i	$N_i$	$i N_i$	$i^2 N_i$
75	2	4	8	16
72.5	1	7	7	7
70	0	2	0	0
		<u>N=13</u>	<u>A=15</u>	<u>B=23</u>

La resistencia media a fatiga tiene un valor estimado de:

$$m = 70 + 2.5\left(\frac{15}{13} - \frac{1}{2}\right) = 71.63$$

El valor estimado para la desviación standard es:

$$S = 1.620 \cdot 2.5 \left(\frac{13 \cdot 23 - 15^2}{13^2} + 0.29\right) = 2.95$$

### 1.1.1.3.2.- METODO DE LA ESCALERA MODIFICADO

Para muestras de tamaño menores que 15 se comien

za el método staircase como antes, pero usando un escalón  $d$  igual a dos veces el incremento de tensión seleccionado, hasta que se produce el primer par de resultados opuestos (fallo y no fallo). A partir de ese momento se utiliza un escalón  $d$  igual al incremento de tensión seleccionado.

En el análisis se ignoran los elementos ensayados hasta conseguir la primera pareja de resultados opuestos. Se hace  $n$  igual al número de elementos ensayados, comenzando con el primer par fallo-nofallo. Sea  $C$  igual a la suma de las tensiones usadas en los  $n-1$  últimos ensayos más la tensión que habría sido utilizada en el ensayo  $n+1$ , si éste se hubiera efectuado. Entonces:

$$m = \frac{C}{n} \quad (3)$$

donde  $m$  es el estimador de la resistencia media a fatiga.

Si el número de elementos  $T$  es mayor de 30 y se di fice el ensayo total en varios más pequeños, lo que se de be hacer es agrupar los  $T$  elementos en  $r$  grupos de  $n$  elementos cada uno, de modo que  $r \cdot n = T$ . Cada grupo se trata como un programa staircase sencillo. La mejor estimación de  $m$  para todo el grupo de  $T$  elementos es:

$$\bar{m} = \frac{\sum m_i}{r} \quad (4)$$

### 1.1.1.3.3.- METODO DE LA ESCALERA CON RESPUESTA TRANSFORMADA

Para explicar la metodología de análisis en el UDTR se considera un caso en el que  $n_0 = 3$  y  $p > 0.67$ . En primer lugar, se definen las posibles respuestas agrupándolas en dos tipos U o D, según que haya que aumentar el nivel de tensiones o haya que disminuirlo. Dicha definición sería, en este caso, la siguiente:

Respuesta tipo U (o) , (x o) y (x x o)

Respuesta tipo D (x x x)

donde x representa fallo y o no fallo.

El primer nivel de ensayo es arbitrario. A partir del primer ensayo el nivel de tensiones no cambia hasta que se obtenga una respuesta tipo U o tipo D.

La tabla 3 ilustra los resultados de este ejemplo.

TABLA 3

Ensayo n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Cambio n°	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-	2
Nivel 3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
2	x	x	x	-	-	-	-	-	-	x	x	x
1	-	-	-	x	x	x	-	x	o	-	-	-
0	-	-	-	-	-	-	o	-	-	-	-	-

Apartir de esta tabla se construye otra en que los grupos de ensayo se representan, según corresponda, mediante una U o una D.

TABLA 4

Cambio nº	1	2
Nivel 3	- - -	- - -
2	D - -	- D
1	- D -	U -
0	- - U	- -

A los resultados de esta tabla se les aplica en el análisis UD, que corresponde a una probabilidad F del 50% de supervivencia.

En la tabla 5 se definen, para unos valores de  $n_0$  determinados, las distintas respuestas tipo D ó U, de modo que a la probabilidad  $F = 0.5$  del UD le corresponda una probabilidad  $p$  de fallo se mira en la tabla cuál es la estrategia a utilizar en el ensayo.

TABLA 5.

TIPO DE RESPUESTA		TRANSFORMACION P	
$n_0$	U	D	
2	xx	xo,o	$F = p^2$ 0.701
2	xxx	xxo,xo,o	$F = p^3$ 0.7940
3	xxx,xxox	xxxoo,xo,o	$F = p^3(2-p)$ 0.7336
4	xxxx	xxxxo,xxo,xo,o	$F = p^4$ 0.8409
4	xxxx,xxxox	xxxxoo,xxo,xo,o	$F = p^4(2-p)$ 0.8041
5	xxxxx	xxxxxo,xxxxo,xxo,xo,o	$F = p^5$ 0.8705
5	xxxxx,xxxox	xxxxxo,xxxxxo,xxo,xo,o	$F = p^5(2-p)$ 0.8460
6	xxxxxx	xxxxxox, etc.	$F = p^6$ 0.8908
7	xxxxxxx	xxxxxxxo, etc.	$F = p^7$ 0.9056
8	xxxxxxxx	xxxxxxxxo, etc.	$F = p^8$ 0.9171
9	xxxxxxxxx	xxxxxxxxxo, etc.	$F = p^9$ 0.9260
10	xxxxxxxxxx	xxxxxxxxxox, etc.	$F = p^{10}$ 0.9330
14	xxxxxxxxxxx	xxxxxxxxxxxo, etc.	$F = p^{14}$ 0.9516

## 1.2.- TRABAJOS DE ANDRÄ/SAUL Y FISCHER

Los trabajos de Fischer y Andrä/Saul, están orientados al cálculo de la resistencia a fatiga de un cable de longitud  $n \cdot l$ , siendo  $l$  la longitud de ensayo y  $n = 1, 3, 10, \dots, 10000$ . Estos autores suponen que la distribución de las resistencias, para el cable de longitud  $l$ , se ajusta a una ley normal, a partir de la cual obtienen las distribuciones de resistencias para cables de mayor longitud.

Gabriel estudia, para un tendón constituido por  $m$  cables en paralelo, la influencia de la longitud de los mismos y la influencia del número de ellos, según se puede observar en la figura 5.

La hipótesis que utiliza consiste en que la resistencia total del tendón es igual a la suma de las resistencias de los  $m$  cables. El comportamiento de cada cable lo supone constituido por una rama elástica y otra plástica.

Para el caso de un tendón de longitud igual a la de ensayo, al seguir la resistencia  $r_i$  de cada cable una ley normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , la resistencia total  $R$  seguirá una ley normal  $N(m \mu, m \sigma^2)$ .

$$R = \sum_{i=1}^m r_i \quad \rightarrow \quad N(m \mu, m \sigma^2)$$

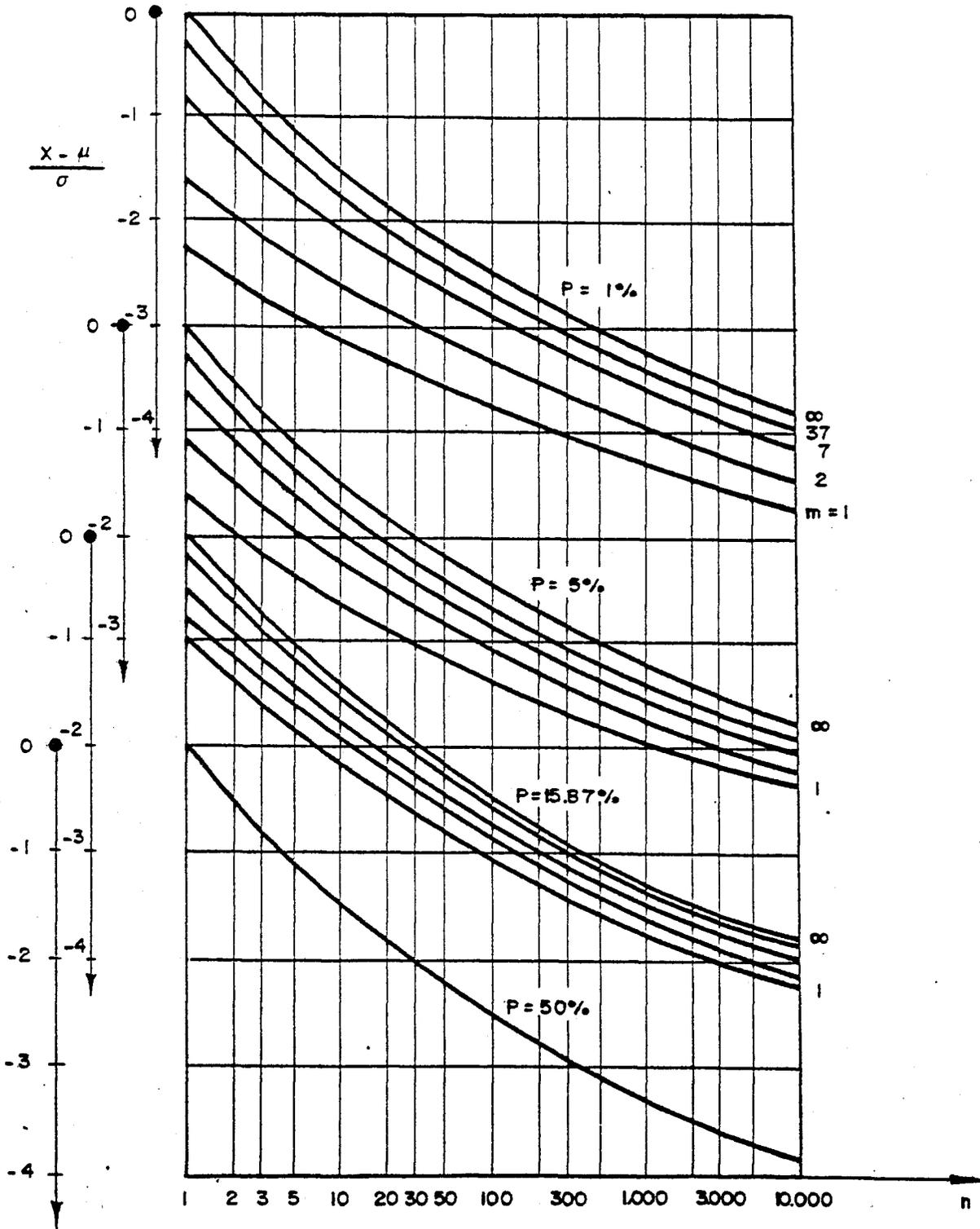


FIGURA 5

### 1.3.- HIPOTESIS DE ACUMULACION DE DAÑO

El concepto de acumulación de daño, debido a Miner, mantiene que el daño se puede expresar en términos del número de ciclos aplicados a un nivel de tensiones dividido por el número de ellos necesario para producir el fallo en el mismo nivel de tensiones. Si la suma de estos daños, para distintos niveles, suma 1 se produce el fallo del elemento.

El número de Miner  $M$ , para cada nivel de tensiones, viene definido por:

$$M_i = \frac{n_i}{N_i} \quad (5)$$

donde

$n_i$  es el número de ciclos hasta rotura del ensayo  $i$ -ésimo.

$N_i$  es un valor representativo del número de ciclos hasta rotura para  $n$  ensayos. Normalmente viene dado por la mediana.

El número de Miner, en rotura, es una variable estadística, con una distribución aproximadamente logarítmico normal, que puede ser usada para determinar la probabilidad de fallo.

Si en la figura 6 el eje de abscisas estuviera en escala logarítmica, la distribución de  $M$  tendría forma normal y, por tanto, los valores de la media y de la mediana coincidirían.

Debido a la hipótesis de acumulación de daño, si se quiere ensayar un elemento a un nivel de tensiones  $\Delta\sigma_B$  después de haberlo sometido a  $n_A$  ciclos en el nivel de tensiones  $\Delta\sigma_A$ , el número de ciclos equivalentes a  $n_A$  en el nivel  $\Delta\sigma_B$  es  $n_B$  que viene dado por:

$$\frac{n_A}{N_A} = \frac{n_B}{N_B} \quad (6)$$

siendo  $N_A$  y  $N_B$  los valores característicos (valores medianos) para cada nivel. Si se tienen determinados los valores  $N_I$ , para los diferentes niveles, estableciendo la igualdad del número de Miner entre los distintos niveles obtenemos los valores  $n_i$  que nos dan las curvas de isodaño. Por esta razón la curva de Wöhler del 50% de probabilidad de supervivencia es una curva de isodaño.

De este modo, al moverse, a través de las curvas de isodaño se puede hallar el número de ciclos equivalente a uno dado al seguir ensayando el elemento a otro nivel de tensiones  $\Delta\sigma$ .

Otra hipótesis de acumulación de daño está basa

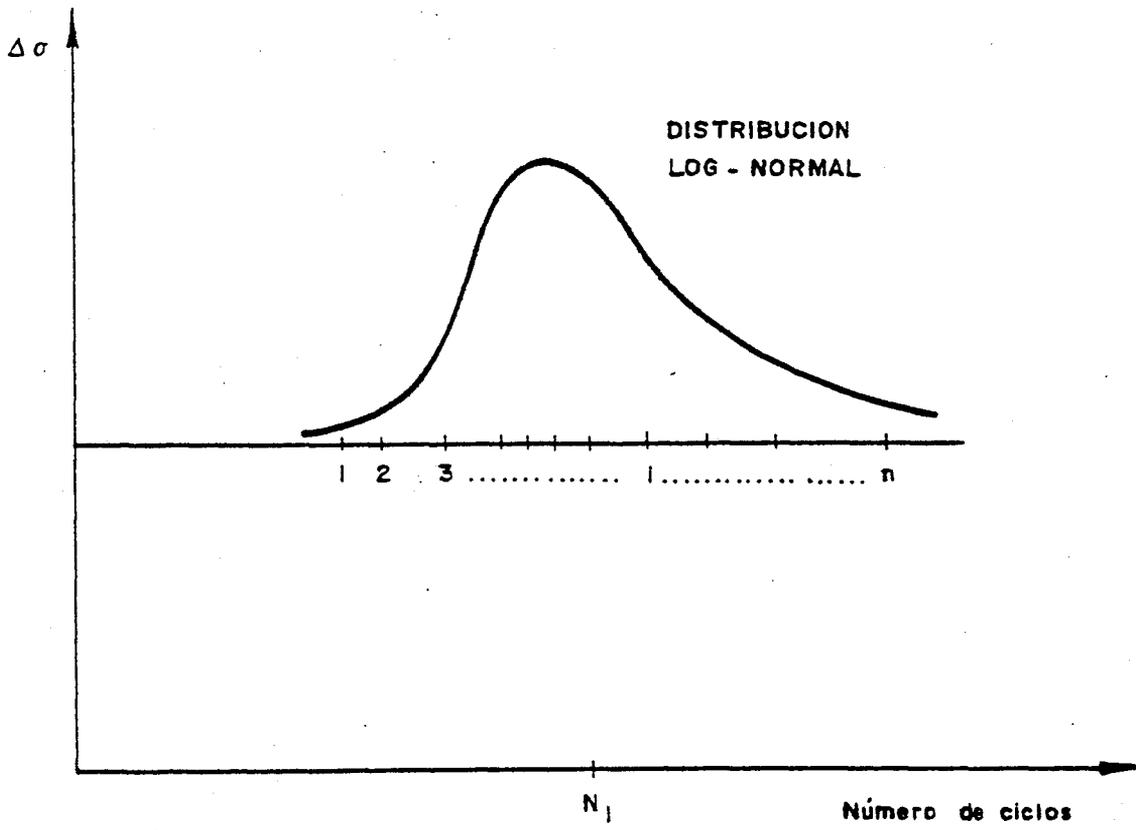


FIGURA 6

da en las curvas de isoprobabilidad (curvas de Wöhler). Para hallar el número de ciclos equivalente a uno dado, al cambiar el nivel de tensiones  $\Delta\sigma$ , habrá que moverse a través de las curvas de isoprobabilidad. Dichas curvas se hallan determinando, para cada  $\Delta\sigma$ , el número de ciclos que da una probabilidad  $p$  de fallo. Esto es posible ya que la distribución de los  $N_i$  de rotura se sabe que sigue una ley logarítmico normal, para cada nivel de tensiones  $\Delta\sigma$ .

Las curvas de Wöhler se suelen representar en escala horizontal logarítmica, tal como se muestra en la figura 7. Por ello se define un nuevo índice  $D$ , paralelamente al número de Miner, pero como cociente de logaritmos, es decir:

$$D = \frac{\log n_I}{\log N_I} \quad (7)$$

Las curvas de isodaño se determinan de una forma análoga a como se obtienen en la escala normal.

Para que las curvas de isoprobabilidad y las curvas de isodaño, en escala logarítmica, coincidan (Fernández Canteli 1981) debe ocurrir que:

$$\frac{\log n_1}{\log N_1} = \frac{\log n_2}{\log N_2} \quad (8)$$

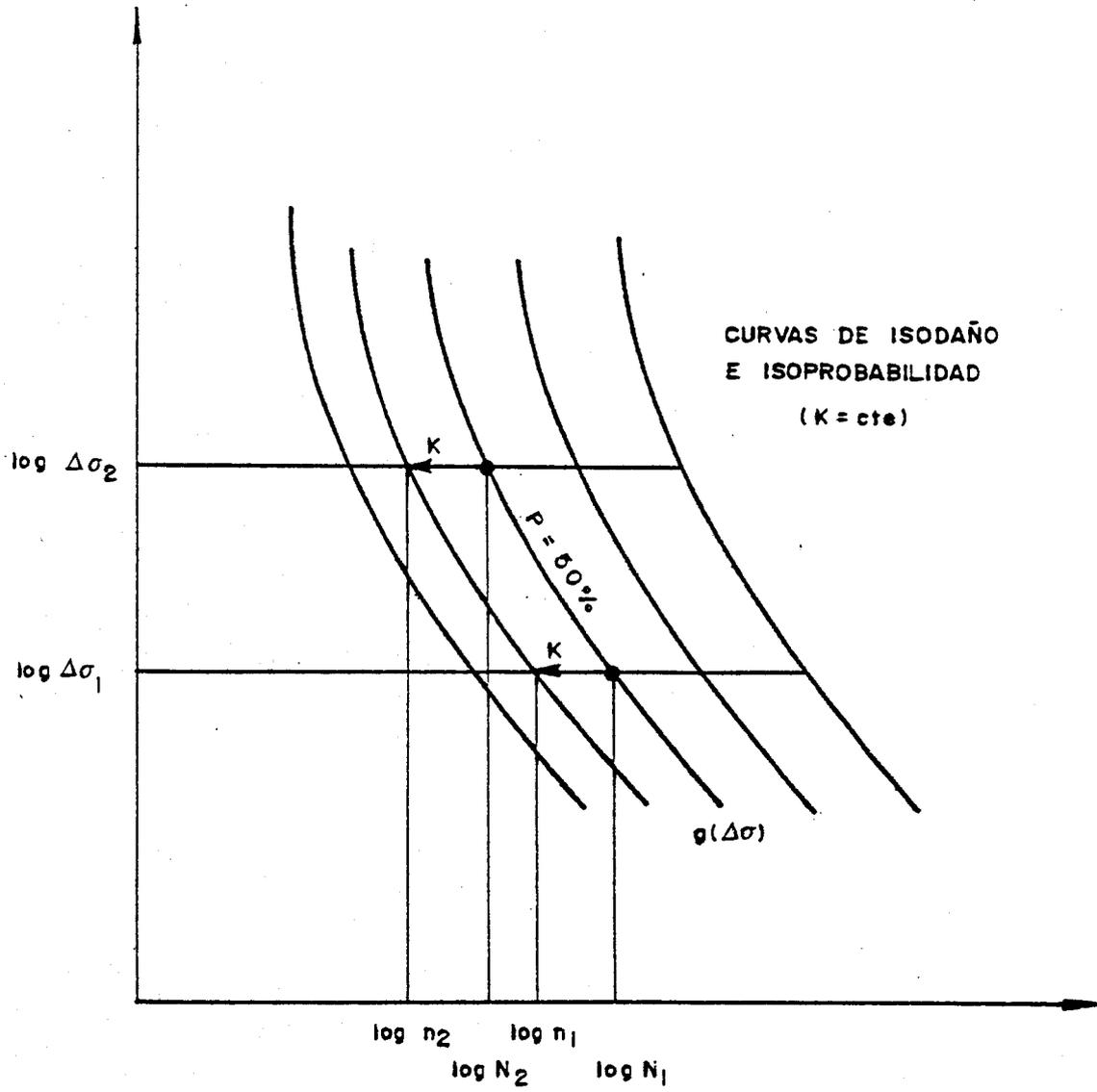


FIGURA 7

donde los valores  $n_1$ ,  $N_1$ ,  $n_2$  y  $N_2$  son los representados en la figura 7.

En primer lugar, se denotarán por  $g(\Delta\sigma)$  y  $h(\Delta\sigma)$  los valores de la media y de la desviación típica de las distribuciones de  $\log n_i$ , en rotura, para cada nivel de tensiones  $\Delta\sigma$ . Dichas distribuciones, según se ha visto anteriormente, siguen leyes normales.

La igualdad (8) se puede escribir como:

$$\frac{g(\Delta\sigma_1) + k h(\Delta\sigma_1)}{g(\Delta\sigma_1)} = \frac{g(\Delta\sigma_2) + k h(\Delta\sigma_2)}{g(\Delta\sigma_2)} \quad (9)$$

Desarrollando la fórmula anterior se obtiene que

$$k h(\Delta\sigma_1) g(\Delta\sigma_2) = k h(\Delta\sigma_2) g(\Delta\sigma_1) \quad (10)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{h(\Delta\sigma_2)}{g(\Delta\sigma_2)} = \frac{h(\Delta\sigma_1)}{g(\Delta\sigma_1)} \quad (11)$$

Esta relación representa la igualdad de los coeficientes de variación de las distribuciones para diferentes valores de  $\Delta\sigma$ . En la representación gráfica esta condición se traduce en la equidistancia de las curvas de isoprobabilidad o isodaño (curvas de Wöhler). Por tanto, si una de ellas es una línea recta, lo habrán de ser todas.

## 1.4.- TEORIAS ESTADISTICAS NECESARIAS PARA EL DESARROLLO DEL TRABAJO

### 1.4.1.- PROCESOS ESTOCASTICOS

#### 1.4.1.1.- DEFINICION

Los modelos que reproducen el comportamiento de un fenómeno físico pueden ser de dos tipos: deterministas y probabilistas. Los primeros basados en leyes físicas, permiten calcular los valores de las cantidades que dependen del tiempo de una manera casi exacta. Si el fenómeno viene afectado por una serie de factores desconocidos no se puede obtener un modelo determinista que con siga reproducir el comportamiento futuro. En este caso se utilizará un modelo probabilista o modelo estocástico.

Se denominará proceso estocástico a la aplicación que hace corresponder a cada suceso elemental  $\xi$  una función  $X(t, \xi)$ , donde  $t$  es una variable determinista. Normalmente  $t$  suele ser la variable tiempo, pero puede ser cualquier otra como el espacio, por ejemplo.

La función  $X(t, \xi)$ , que se denota por  $X(t)$ , re presenta, para  $t$  fijo una variable aleatoria, y para  $\xi$  fi jo representa una función, que es una realización del pro ceso.

#### 1.4.1.2.- DISTRIBUCIONES DE PRIMERO Y SEGUNDO ORDEN

Según se ha visto anteriormente, para  $t$  fijo la

función  $X(t)$  es una variable aleatoria. Se define la función de distribución de primer orden  $F(x;t)$  de un proceso estocástico como la función de distribución de la variable  $X(t)$ , es decir:

$$F(x;t) = \text{Prob.}\{X(t) \leq x\} \quad \{12\}$$

Si la variable  $X(t)$  es de tipo continuo se puede obtener la función de densidad  $f(x;t)$ :

$$f(x;t) = \frac{\partial F(x;t)}{\partial x} \quad \{13\}$$

La función de distribución de segundo orden se define como la función de distribución de la variable bi dimensional  $(X(t_1), X(t_2))$ , para dos instantes  $t_1$  y  $t_2$

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \text{Prob.}\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \quad \{14\}$$

Dicha función de distribución dependerá, generalmente, de  $t_1$  y de  $t_2$ . Si las variables  $X(t)$  son de tipo continuo la función densidad viene dada por:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \quad \{15\}$$

Análogamente se definen las funciones de distribución de orden  $n$  de un proceso estocástico.

### 1.4.1.3.- FUNCIONES DE VALOR MEDIO, DE AUTOCOVARIANZA Y DE AUTOCORRELACION

Las funciones de valor medio, de autocovarianza y de autocorrelación hacen, en un proceso estocástico, un papel similar al de la media y la varianza en una variable aleatoria.

La función de valor medio  $m(t)$  de un proceso se define como la esperanza matemática de la variable aleatoria  $X(t)$

$$m(t) = E\{X(t)\} \quad \{16\}$$

En la figura 8 se ve el sentido físico de la función de valor medio.

La función de autocovarianza  $C(t_1, t_2)$  se define como la covarianza de la variable aleatoria bidimensional  $(X(t_1), X(t_2))$ , o sea:

$$\begin{aligned} C(t_1, t_2) &= \text{Cov}\{X(t_1), X(t_2)\} = \\ &= E\{(X(t_1) - m(t_1)) \cdot (X(t_2) - m(t_2))\} \end{aligned} \quad \{17\}$$

Asimismo, la función de autocorrelación del proceso  $X(t)$  se define como el coeficiente de correlación de las variables  $X(t_1)$  y  $X(t_2)$ , y se denota por  $R(t_1, t_2)$ .

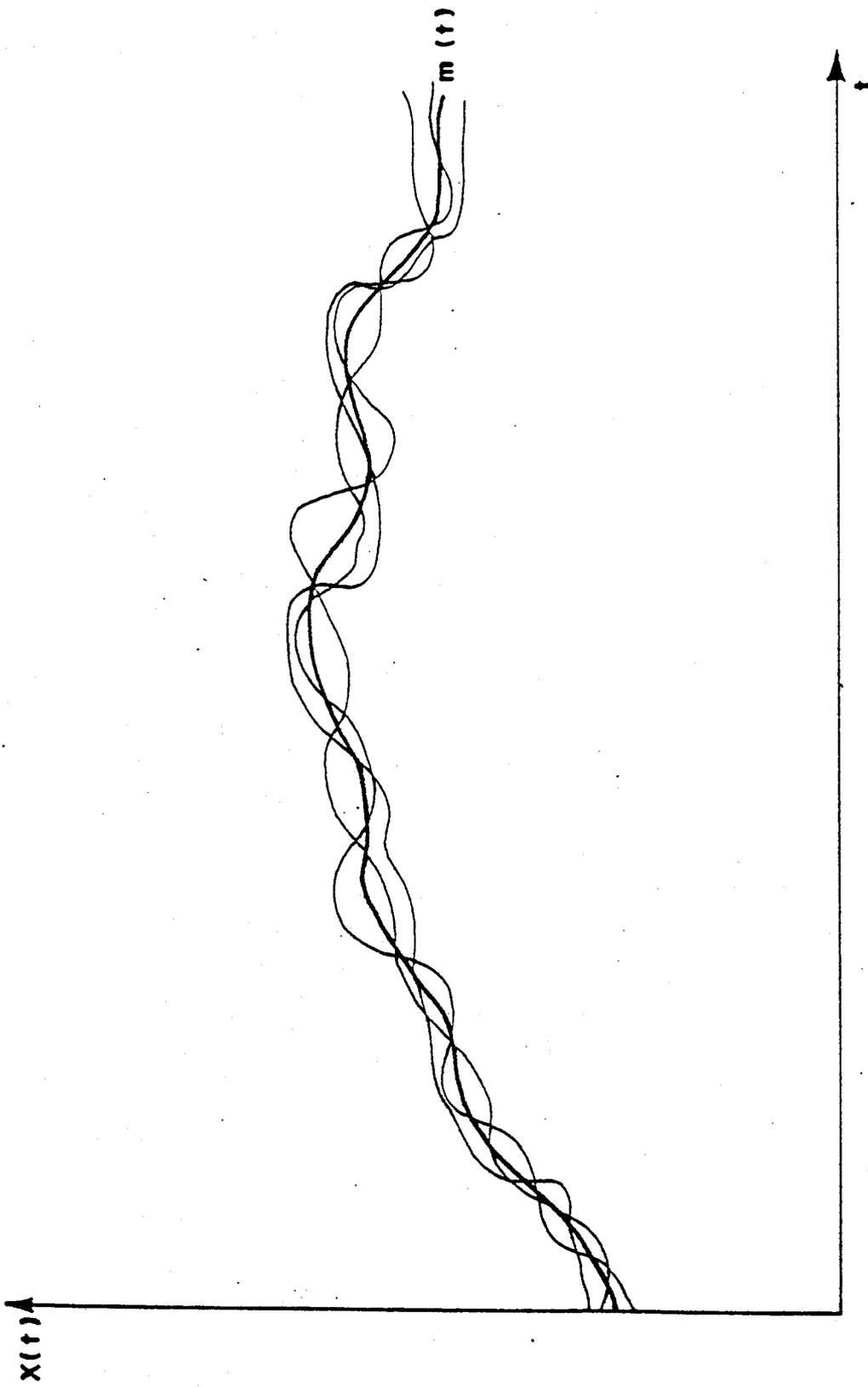


FIGURA 8

$$R(t_1, t_2) = \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1) C(t_2, t_2)}} \quad \{18\}$$

Al igual que una variable aleatoria normal que da determinada con su media y su varianza, lo mismo les ocurre con las funciones de valor medio y de covarianza a los procesos estocásticos tales que, para todo  $n$  y cualesquiera  $t_i$ , las variables aleatorias  $n$ -dimensionales  $(X(t_1), X(t_2), \dots, X(t_n))$  se distribuyen según leyes normales  $n$ -dimensionales. Dichos procesos se denominan procesos normales.

#### 1.4.1.4.- PROCESOS ESTOCASTICOS ESTACIONARIOS

Un proceso estocástico se dice que es estacionario en sentido estricto si las funciones de distribución de cualquier orden  $n$  finito no dependen del origen de tiempos, o sea:

$$\begin{aligned} F(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1 + \varepsilon, t_2 + \varepsilon, \dots, t_n + \varepsilon) &= \\ &= F(x_1, x_2, \dots, x_n ; t_1, t_2, \dots, t_n) \quad \{19\} \end{aligned}$$

para cualquier  $t_1, t_2, \dots, t_n$  y  $\varepsilon$ .

Cuando  $n \leq K$  se dice que el proceso es estacionario

rio de orden K.

Para la distribución de orden 1 se tiene que:

$$F(x_1; t_1) = F(x_1 ; t_1 + \epsilon) \quad \{20\}$$

para cualquier  $\epsilon$ , lo cual sólo es posible (Papoulis 1965) si la función de distribución es independiente del tiempo

$$F(x; t) = F(x) \quad \{21\}$$

Se puede demostrar fácilmente que la función de valor medio y la varianza resultan ser constantes  $m$  y  $\sigma_z^2$  respectivamente. Por lo tanto, esto se da para procesos estacionarios de orden mayor o igual que 1.

Si el proceso es estacionario de orden mayor o igual que 2, se debe cumplir para la función de distribución de orden 2 que

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F(x_1, x_2; t_1 + \epsilon, t_2 + \epsilon) \quad \{22\}$$

para cualquier  $\epsilon$ .

Esta relación sólo se cumple (Papoulis) si la función de distribución de 2º orden depende solamente de

la diferencia  $t_2 - t_1$ , o sea:

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = F'(x_1, x_2; \tau) \quad \{23\}$$

siendo  $\tau = t_2 - t_1$ .

De aquí se deduce que la función de autocovarianza depende solamente de  $\tau$  y, por la misma razón, la función de autocorrelación también, al ser las varianzas  $\sigma^2$  constantes.

$$\begin{aligned} R(t_1, t_2) &= \frac{C(t_1, t_2)}{\sqrt{C(t_1, t_1) \cdot C(t_2, t_2)}} = \\ &= \frac{C(\tau)}{\sigma^2} = R(\tau) \quad \{24\} \end{aligned}$$

Se dice que un proceso estacionario lo es en sentido amplio cuando es estacionario de orden 2. Si un proceso normal es estacionario en sentido amplio, también lo es en sentido estricto.

#### 1.4.1.5.- FUNCION DE DENSIDAD ESPECTRAL DE UN PROCESO ESTACIONARIO

Se define la función de densidad espectral de un proceso estacionario como:

$$S(f) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) \cdot e^{-f\tau i} \cdot d\tau \quad \{25\}$$

lo que indica que  $S(f)$  es la transformada de Fourier de  $C(\tau)$  y, por tanto:

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) e^{f\tau i} \cdot df \quad \{26\}$$

Al ser  $C(\tau)$  una función real y simétrica respecto al origen, la función  $S(f)$  también lo debe ser y, por tanto:

$$S(f) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} C(\tau) \cos(f\tau) d\tau \quad \{27\}$$

$$C(\tau) = 2 \int_0^{\infty} S(f) \cos(f\tau) df \quad \{28\}$$

$S(f)$  resulta ser mayor o igual que 0 y por tanto tiene las mismas propiedades que una función de densidad, salvo la de que su integral vale 1. Si se normaliza con  $C(0) = \sigma^2$ , ya cumple que el valor de su integral sea 1.

Si el conjunto es discreto:

$$S(f) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} C(\tau) \cos f\tau \quad \{29\}$$

y resulta:

$$C(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} S(f) \cos f\tau df \quad \{30\}$$

### 1.4.1.6.- SERIES TEMPORALES, MODELOS GENERALES

Una serie temporal es un proceso estocástico - continuo en tiempo discreto, es decir, las variables aleatorias  $X(t)$ ;  $t \in T$  son continuas, mientras que  $T$  es un conjunto discreto. Generalmente los elementos  $t$  de  $T$  serán iguales a:

$$t = t_0 + \tau \cdot \Delta t \quad \{31\}$$

donde  $\tau \in \mathbb{Z}$ .

Una realización del modelo es, por tanto, un conjunto de valores  $z_t$ .

Los modelos estocásticos que se van a emplear están basados en que en una serie temporal los sucesivos valores de una realización son muy dependientes los unos de los otros y puede considerarse que son generados a partir de un conjunto de variables aleatorias e independientes  $a_t$ . Comúnmente, dichas variables aleatorias se suponen normales de media 0 y varianza  $\sigma_a^2$ .

A la sucesión  $a_t$  se le denomina ruido blanco del proceso. Sea  $B$  un operador tal que:

$$Bz_t = z_{t-1}; \quad B^m z_t = z_{t-m}, \quad \{32\}$$

entonces la generación de  $z_t$  a partir del ruido blanco se realiza mediante un "filtro lineal" de modo que:

$$z_t = \mu + \psi(B) a_t = \mu + a_t + \psi_1 a_{t-1} + \psi_2 a_{t-2} + \dots \quad \{33\}$$

donde  $\mu$  es un parámetro que determina el nivel del proceso y  $\psi(B)$  definido por:

$$\psi(B) = 1 + \psi_1 B + \psi_2 B^2 + \dots \quad \{34\}$$

es un operador lineal llamado función de paso del filtro. La sucesión  $\psi_i$  puede ser finita o, infinita y convergente, en cuyo caso se dice que el filtro es estable y el proceso estacionario. De este modo  $\mu$  es la media sobre la que fluctúa el proceso. En otro caso, el proceso no es estacionario y  $\mu$  no representa la media sino un punto de referencia del nivel del proceso.

#### 1.4.1.6.1.- MODELO AUTORREGRESIVO

En este modelo el valor actual del proceso viene expresado como una combinación lineal finita de los anteriores valores del proceso más una variable  $a_t$ . Si se denomina  $z_t, z_{t-1}, \dots$  a los valores del proceso para valores de  $t$  igualmente espaciados  $t, t-1, t-2, \dots$  y  $\bar{z}_t, \bar{z}_{t-1}, \dots$  a sus desviaciones respecto a  $\mu$  ( $\bar{z}_t = z_t - \mu$ ), entonces:

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \phi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t \quad \{35\}$$

se denomina proceso autorregresivo (AR) de orden p. Se llama autorregresivo debido a que un modelo lineal

$$\bar{z} = \phi_1 \bar{x}_1 + \phi_2 \bar{x}_2 + \dots + \phi_p \bar{x}_p + a \quad \{36\}$$

que relaciona una variable dependiente z con un conjunto de variables independientes  $x_i$  más un término de error a se dice que es un modelo de regresión.

Se define como operador autorregresivo de orden p a:

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \dots - \phi_p B^p \quad \{37\}$$

y, de este modo, el modelo autorregresivo se escribe como:

$$\phi(B) \bar{z}_t = a_t$$

Dicho modelo contiene p+2 parámetros, que son  $\mu_1$ ,  $\phi_1$ ,  $\phi_2, \dots, \phi_p$  y  $\sigma_a^2$ , que se deben estimar a partir de los datos. El modelo es un caso del modelo de filtro lineal - dado por la fórmula {33}. Eliminando  $\bar{z}_{t-1}$  de {35} sustituyéndolo por:

$$\bar{z}_{t-1} = \phi_1 \bar{z}_{t-2} + \phi_2 \bar{z}_{t-3} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p-1} + a_{t-1}$$

y continuando con esta operación para  $\bar{z}_{t-2}$ , etc., se obtiene finalmente una serie infinita de términos  $a_{t-i}$ .

Se tiene que  $\phi(B)\bar{z}_t = a_t$  lo cual es equivalente a  $\bar{z}_t = \psi(B)a_t$  con  $\psi(B) = \phi^{-1}(B)$ . Los procesos autorregresivos pueden ser estacionarios o no. Si lo son hay que elegir  $\phi$  de modo que  $\psi_1, \psi_2, \dots$  en  $\psi(B) = \phi^{-1}$  den lugar a una serie convergente.

#### 1.4.1.6.2.- MODELO DE MEDIA MOVIL

En este modelo el valor  $\bar{z}_t$ , desviación de  $z_t$  - respecto de  $\mu$ , se expresa como linealmente dependiente de un número  $q$  finito de variables  $a_{t-i}$  anteriores. Así:

$$\bar{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \{39\}$$

Se denomina proceso de media móvil (MA) de orden  $q$ . Los pesos  $1, -\theta_1, -\theta_2, \dots, -\theta_q$  no necesitan sumar 1 ni tienen que ser positivos.

Se define como operador de media móvil de orden  $q$  a:

$$\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \dots - \theta_q B^q \quad \{40\}$$

Así, el modelo de media móvil se escribe como

$$\bar{z}_t = \theta(B)a_t \quad \{41\}$$

y contiene  $q+2$  parámetros  $\mu, \theta_1, \dots, \theta_q$  y  $\sigma_a^2$  que deben ser estimados a partir de los datos.

#### 1.4.1.6.3.- MODELO MIXTO AUTORREGRESIVO Y DE MEDIA MOVIL

Con objeto de conseguir mayor flexibilidad en la estimación de las series temporales se utiliza un modelo que incluye una parte autorregresiva y otra de media móvil. El modelo mixto tiene la estructura:

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \{42\}$$

ó

$$\phi(B)\bar{z}_t = \theta(B)a_t \quad \{43\}$$

que utiliza  $p+q+2$  parámetros  $\mu, \phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_q$  y  $\sigma_a^2$  que habrá que estimar a partir de los datos. El proceso se denomina autorregresivo y de media móvil ARMA de orden  $(p,q)$ .

#### 1.4.1.6.4.- MODELO NO ESTACIONARIO

Muchas series que se quieren ajustar mediante un proceso estocástico no siguen un comportamiento es-

tacionario y no varían alrededor de una media fija. Sin embargo, sí que pueden tener un comportamiento homogéneo y similar. Este comportamiento puede ser representado - por un operador autorregresivo generalizado  $\psi(B)$  en el cual uno o más de los ceros del polinomio  $\psi(B)$  es un 1. Así el operador queda:

$$\psi(B) = \phi(B) (1-B)^d \quad \{44\}$$

donde  $\phi(B)$  es un operador estacionario. Un modelo general no estacionario correspondiente al operador  $\psi(B)$  es:

$$\psi(B) z_t = \phi(B) (1-B)^d z_t = \theta(B) a_t \quad \{45\}$$

o, de otra forma,

$$\phi(B) w_t = \theta(B) a_t \quad \{46\}$$

donde

$$w_t = \nabla^d z_t \quad \{47\}$$

El operador  $\nabla$  es equivalente a  $1-B$ . En la práctica,  $d$  toma valores de 0,1 y como mucho 2. El proceso definido por {46} y {47} proporciona un modelo para describir series temporales estacionarias y no estacionarias, y es llamado proceso ARIMA de media móvil integra

do y autorregresivo de orden  $(p,d,q)$ .

El proceso viene definido por:

$$w_t = \phi w_t + \dots + \phi_p w_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-p} \quad \{48\}$$

donde  $w_t$  viene dado por {47}. Si se reemplaza  $w_t$  por  $z_t - \mu$ , cuando  $d = 0$ , incluye los anteriores modelos AR(p), MA(q) y ARMA(p,q).

Si se define el operador S como  $\nabla^{-1}$  de modo que

$$\nabla^{-1} z_t = S z_t = \sum_{j=0}^{\infty} z_{t-j} \quad \{49\}$$

entonces  $z_t = S^d w_t$  y un proceso de media móvil integrado y autorregresivo ARMA puede decirse que se genera a partir de un ruido blanco  $a_t$  mediante tres operaciones de filtrado, como se muestra en la figura 9. En el primer filtro la entrada es  $a_t$  y la salida  $e_t$ .

$$e_t = \theta(B) a_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \{50\}$$

En el segundo filtro la entrada es  $e_t$  y la salida  $w_t$ .

$$w_t = \phi^{-1}(B) e_t = \phi_1 w_{t-1} + \dots + \phi_p w_{t-p} + e_t$$

Finalmente el tercer filtro tiene como entrada  $w_t$  y como salida  $z_t$ , aplicando el operador  $S^d$ .

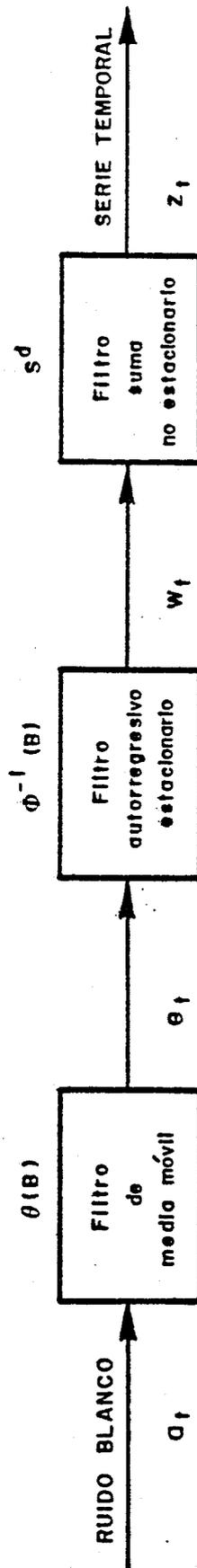


FIGURA 9

## 1.4.2.- SERIES TEMPORALES ESTACIONARIAS EN SENTIDO AMPLIO

### 1.4.2.1.- FUNCIONES DE VALOR MEDIO Y DE COVARIANZA DE UNA SERIE

La función de valor medio es constante y se va a denotar por  $\mu$ . La función de autocovarianza, que sólo depende de  $\tau$ , y que se va a denominar  $\gamma$  vale:

$$\gamma_k = \text{Cov}\{z_t, z_{t+k}\} = E\{(z_t - \mu)(z_{t+k} - \mu)\} ; k \in Z \quad \{52\}$$

La función de autocorrelación vale:

$$\rho_k = \frac{E\{(z_t - \mu) \cdot (z_{t+k} - \mu)\}}{\sqrt{E\{(z_t - \mu)^2\} \cdot E\{(z_{t+k} - \mu)^2\}}} \quad \{53\}$$

Puesto que la varianza  $\sigma_z^2 = \gamma_0$  es constante, la expresión anterior queda de la forma siguiente:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad \{54\}$$

La función de autocorrelación  $\rho_k$  es simétrica respecto a  $k=0$ , tomando en ese punto el valor 1, según se puede observar en la figura 10. Por ello al representarla, se suele dibujar para  $k \geq 0$ .

Las series temporales normales, en que las funciones de distribución de cualquier orden son normales, quedan determinadas por sus funciones de valor medio y de covarianza.

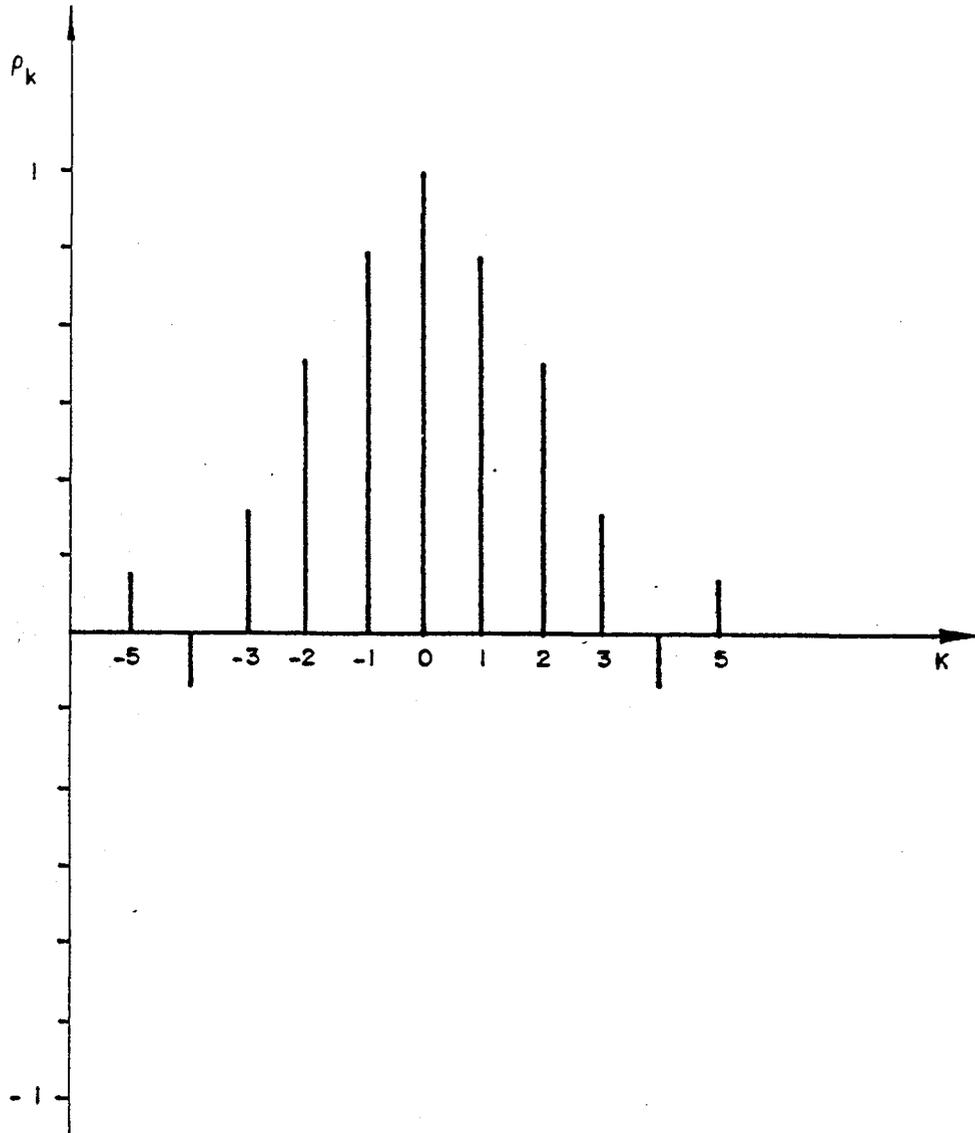


FIGURA 10

Para estimar los valores de la función de valor medio y de la función de autocorrelación a partir de una observación  $z_1, z_2, \dots, z_N$  de  $N$  valores se han propuesto diversos estimadores, siendo los más satisfactorios los siguientes:

$$\text{-Media } \mu: \quad \bar{z} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z_t \quad \{55\}$$

$$\text{-Función de autocorrelación: } \rho_k = \frac{C_k}{C_0} \quad \{56\}$$

donde  $C_k$  es el estimador de la autocovarianza  $\gamma_k$  y vale:

$$C_k = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N-k} (z_t - \bar{z})(z_{t-k} - \bar{z}) \quad \{57\}$$

En la práctica, para estimar la función de autocorrelación,  $N$  ha de valer como mínimo 50 con lo cual se podrán calcular los  $r_k$  no excediendo  $k$  de  $N/4$ .

En la identificación de modelos es necesario saber si a partir de un determinado  $k$  los sucesivos valores de  $\rho_k$  se hacen o no cero. Para saberlo es necesario conocer la varianza de  $r_k$ . Bartlett dio, para procesos estacionarios y gaussianos, una aproximación de  $\text{Var}\{r_k\}$

$$\text{Var}\{r_k\} \approx \frac{1}{N} \sum_{S=-\infty}^{\infty} \{\rho_S^2 + \rho_{S+k} \cdot \rho_{S-k} - 4\rho_k \cdot \rho_S \cdot \rho_{S-k} + 2\rho_S^2 \cdot \rho_k^2\} \quad \{58\}$$

Si  $\rho_k$  se anula para  $S > q$  resulta:

$$\text{Var}\{r_k\} = \frac{1}{N} \{1 + 2 \cdot \sum_{S=1}^q \rho_S^2\}; \quad K > q \quad \{59\}$$

Para utilizar la fórmula {59} en la práctica, se sustituye  $\rho_S$  por  $r_S$ . Bartlett dio otra expresión para calcular la covarianza de  $r_k$  y  $r_{k+t}$

$$\text{Cov}\{r_k, r_{k+t}\} = \frac{1}{N} \sum_{S=-\infty}^{\infty} \rho_S \cdot \rho_{S+t}$$

Entre valores próximos a  $r_k$  pueden haber fuertes correlaciones, por lo que hay que tener cuidado al interpretar las correlaciones individualmente. A veces se distorsiona la forma de la función de autocorrelación.

#### 1.4.2.2.- MODELO GENERAL LINEAL

El modelo general lineal {33} es:

$$\bar{z}_t = a_t + \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j \cdot a_{t-j} = a_t + \psi_1 \cdot a_{t-1} + \psi_2 \cdot a_{t-2} + \dots$$

donde  $\bar{z}_t = z_t - \mu$  es la desviación del proceso respecto a la media, por tratarse de un proceso estacionario. El ruido blanco  $a_t$  consiste en una serie de variables aleatorias independientes de media nula y varianza  $\sigma_a^2$ . Por lo tanto, al estar las distintas  $a_t$  incorreladas, su función de autocorrelación  $E\{a_t, a_{t+k}\}$  vale  $\sigma_a^2$  si  $k \neq 0$  y cero en otro caso.

El modelo se puede poner también como  $\bar{z}_t = \psi(B) a_t$  o como  $\pi(B)\bar{z}_t = a_t$  donde el operador  $\pi(B)$  se define de una forma análoga a  $\psi(B)$ . Resulta además que:

$$\pi(B) \psi(B) = 1 \quad \{60\}$$

#### 1.4.2.2.1.- FUNCION GENERATRIZ DE AUTOCOVARIANZA

Para un modelo lineal la función de autocovarianza es:

$$\gamma_k = E(z_t, z_{t+k}) = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \cdot \psi_{j+k} \quad \{61\}$$

y su varianza

$$\gamma_0 = \sigma_z^2 = \sigma_a^2 \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j^2 \quad \{62\}$$

La serie  $\psi_j^2$  sera convergente si la varianza  $\sigma_z^2$  es finita. La función generatriz de autocovarianza se define como:

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \cdot B^k \quad \{63\}$$

que también se puede poner de la forma siguiente:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B) \psi(B^{-1}) \quad \{64\}$$

#### 1.4.2.2.2.- CONDICIONES DE ESTACIONARIEDAD E INVERTIBILIDAD

Para que un proceso lineal sea estacionario las condiciones de estacionariedad equivalen a que la serie  $\psi(B)$ , función generatriz de los pesos  $\psi$ , sea convergente para  $|B| \leq 1$ .

La condición de invertibilidad, que consiste en que la serie  $\pi(B) = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \cdot B^j$  sea convergente para  $|B| < 1$ , junto a la de estacionariedad son condiciones necesarias y suficientes, si fijamos  $\sigma_a$ , para obtener unicidad de representación en los modelos lineales ARMA, con una función de autocovarianza dada.

#### 1.4.2.3.- PROCESOS AUTORREGRESIVOS AR(p)

Los procesos autorregresivos AR(p) tienen la expresión siguiente:

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \phi_2 \bar{z}_{t-2} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t \quad \{65\}$$

son invertibles y, estacionarios si los ceros de  $\phi(B)$  están fuera del círculo unidad.

La función de autocovarianza se obtiene tomando esperanzas de la expresión {65} multiplicada por  $\bar{z}_{t+k}$ .

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p}; \quad k > 0 \quad \{66\}$$

y la función de autocorrelación resulta:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \{67\}$$

que es equivalente a:

$$\phi(B) \rho_k = 0 \quad \{68\}$$

La función de autocorrelación es una mezcla de exponenciales y sinusoidales amortiguadas.

Para determinar el orden de un proceso AR a ajustar a una serie dada se emplea la función de autocorrelación parcial que tiene un número finito de términos no nulos, mientras que la función de autocorrelación tiene un número infinito de ellos.

#### 1.4.2.4.- PROCESOS DE MEDIA MOVIL MA(q)

El modelo que se utiliza es del tipo:

$$\bar{z}_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q} \quad \{69\}$$

Los procesos son invertibles y, estacionarios si los ceros de  $\theta(B)$  están fuera del círculo unidad.

La función de autocovarianza del proceso es, tomando esperanzas de los productos  $\bar{z}_t \cdot \bar{z}_{t+k}$

$$\gamma_k = E\{(a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-q})(a_{t-k} - \theta_1 a_{t-k-1} - \dots - \theta_q a_{t-k-q})\} \quad \{70\}$$

Por lo tanto la varianza del proceso es:

$$\gamma_0 = (1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2) \sigma_a^2 \quad \{71\}$$

y

$$\gamma_k = \begin{cases} (-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \theta_2 \theta_{k+2} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q) \sigma_a^2 & k=1, 2, \dots, q \\ 0 & k > q \end{cases} \quad \{72\}$$

La función de autocorrelación queda:

$$\rho_k = \frac{-\theta_k + \theta_1 \theta_{k+1} + \dots + \theta_{q-k} \theta_q}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \dots + \theta_q^2} \quad \{73\}$$

para valores de K comprendidos entre 1 y q, siendo cero para valores de K mayores que q.

1.4.2.5.- PROCESOS AUTORREGRESIVOS Y DE MEDIA MOVIL ARMA(p,q)

Los procesos ARMA(p,q) a utilizar tienen la forma siguiente:

$$\bar{z}_t = \phi_1 \bar{z}_{t-1} + \dots + \phi_p \bar{z}_{t-p} + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \dots - \theta_q a_{t-k} \quad \{74\}$$

La función de autocovarianza se obtiene como en los casos anteriores:

$$\begin{aligned} \gamma_k = & \phi_1 \gamma_{k-1} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \theta_1 \gamma_{za}(k-1) - \dots - \\ & - \theta_q \gamma_{za}(k-q) \end{aligned} \quad \{75\}$$

donde  $\gamma_{za}(k)$  es igual a  $E(\bar{z}_{t+k} \cdot a_t)$  y, por tanto, vale 0 para  $k > 0$  y distinto de cero si  $k \leq 0$ .

Para  $k > q+1$  resulta:

$$\gamma_k = \phi_1 \gamma_{k-1} + \phi_2 \gamma_{k-2} + \dots + \phi_p \gamma_{k-p} \quad \{76\}$$

y la función de correlación

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \dots + \phi_p \rho_{k-p} \quad \{77\}$$

o

$$\phi(B) \rho_k = 0$$

Los valores  $\rho_i$  ( $i \leq q$ ) se calculan a partir de -  
{75} y dependen de  $\phi_k$  y  $\theta_j$ . Luego, los siguientes valo-  
res se obtienen mediante los  $p$  valores  $\rho_q, \rho_{q-1}, \dots, \rho_{p-q+1}$   
y la ecuación {77}.

Si  $p < q$  la función de autocorrelación consiste  
en una mezcla de exponenciales y sinusoidales amortigua-  
das, cuya naturaleza queda determinada con el polinomio  
 $\phi(B)$  y los valores iniciales. Si  $p \geq q$  hay  $p-q+1$  valores  
iniciales  $(\rho_0, \rho_1, \dots, \rho_{p-q})$  que no siguen el comportamien-  
to general. Estos hechos son útiles para identificar los  
procesos mixtos ARMA.

En la figura 11 se pueden observar las regiones  
admisibles para los parámetros y los valores de  $\rho_1$  y  $\rho_2$   
en los modelos AR(2), MA(2) y ARMA(1,1), condicionados a  
la estacionariedad y a la invertibilidad.

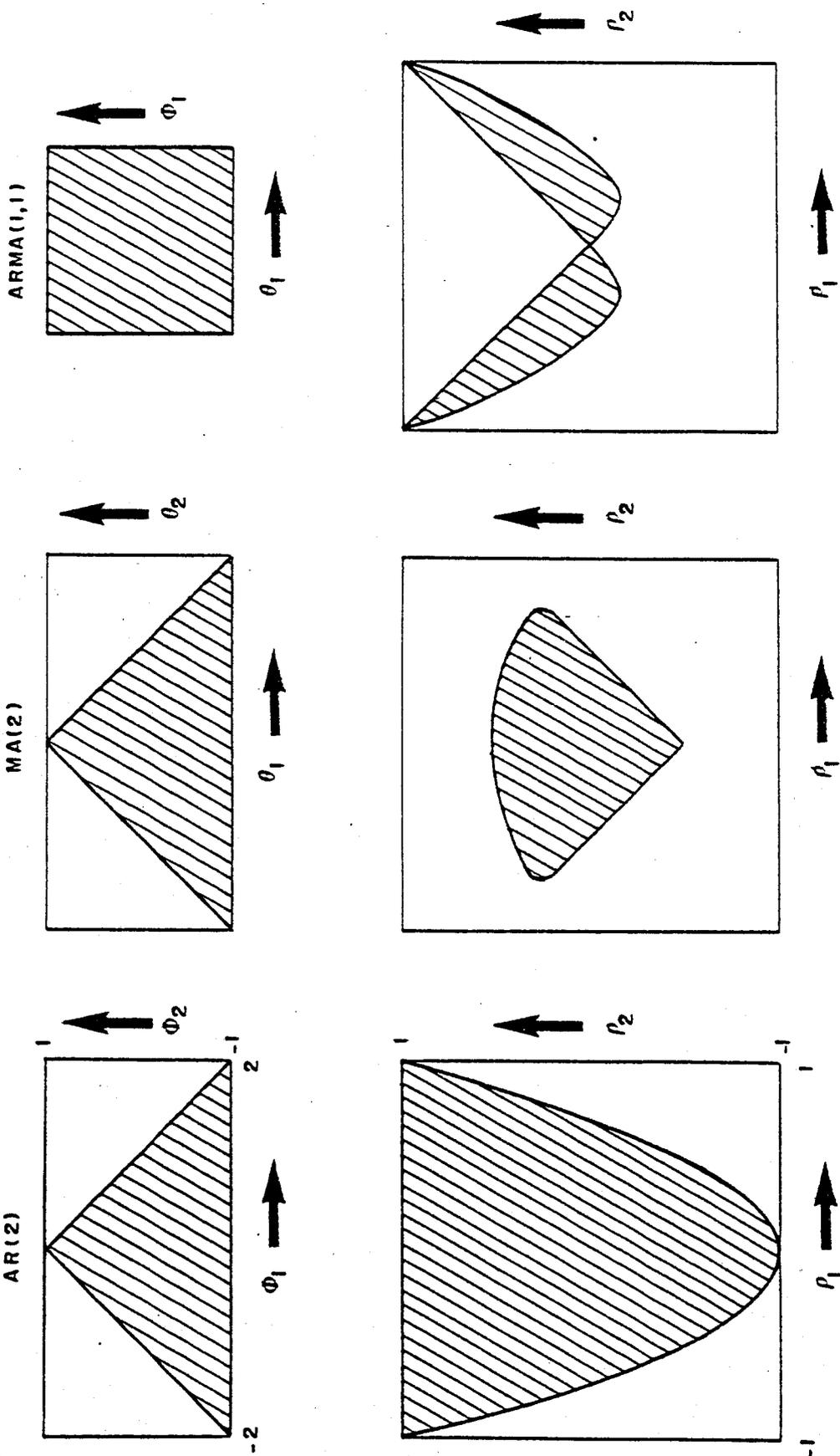


FIGURA 11

### 1.4.3.- ESTADISTICA DE VALORES EXTREMOS

Se introduce la problemática de los valores extremos mediante un ejemplo sencillo:

En un pabellón de deportes supóngase que la iluminación falla cuando dejan de lucir  $K$  de los  $n$  puntos de luz existentes. Para poder determinar cuando va a fallar la iluminación hay que conocer el comportamiento - del  $K$ -ésimo punto de luz que falla.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$   $n$  variables aleatorias, que en el ejemplo anterior representarían el comportamiento de cada uno de los  $n$  puntos de luz, y  $x_1, x_2, \dots, x_n$   $n$  valores tomados por cada una de las variables aleatorias. Sea,

$$x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)} \quad \{78\}$$

el conjunto de valores ordenados. A la función  $X_{(k)}$  que toma el valor  $x_{(k)}$  se le llama estadístico de orden  $k$ . Puesto que  $X_j$  sin ordenar son variables aleatorias, los estadísticos de orden, que resultan de ordenar  $x_j$  también lo son.

En determinadas aplicaciones prácticas interesa conocer el comportamiento de los estadísticos de orden  $k$  y en particular el comportamiento del máximo y el mí-

nimo, que se denotarán por  $Z_n$  y  $W_n$

$$Z_n = \text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \{79\}$$

$$W_n = \text{mín}(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad \{80\}$$

Las distribuciones correspondientes de los estadísticos de órdenes 1 y n se representan por

$$H_n(x) = P(Z_n < x) \quad \{81\}$$

y

$$L_n(x) = P(W_n < x) \quad \{82\}$$

respectivamente.

Cuando el número n se haga muy grande las distribuciones de los estadísticos de orden degeneran, salvo - que se normalicen con constantes que dependan del número n. El objeto de la teoría asintótica es hallar condiciones para la existencia de estas distribuciones no degeneradas. Por otro lado se pretenden determinar las mismas y las constantes de normalización.

Para el caso de  $n \rightarrow +\infty$  resultaría, que, siendo  $a_n$  y  $b_n > 0$  constantes de normalización,

$$\lim P\left(\frac{Z_n - a_n}{b_n} < z\right) = \lim H_n(a_n + b_n z) = H(z) \quad \{83\}$$

y, siendo  $c_n$  y  $d_n > 0$  otras constantes de normalización,

$$\lim P\left(\frac{W_n - c_n}{d_n} < z\right) = \lim L_n(c_n + d_n z) = L(z) \quad \{84\}$$

Si se considera el conjunto de variables aleatorias  $-X_1, -X_2, \dots, -X_n$  la distribución del mínimo

$$\text{mín}(-X_1, -X_2, \dots, -X_n)$$

tiene el mismo tratamiento que la distribución del máximo de  $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$\text{máx}(X_1, X_2, \dots, X_n)$$

Por lo tanto, queda de manifiesto que todo cuanto se diga respecto a la distribución del máximo  $Z_n$  tiene su correspondencia en la distribución del mínimo  $W_n$  y viceversa. Lo mismo ocurre con los estadísticos de orden  $k$  y  $n-k+1$ .

#### 1.4.3.1.- CASO DE VARIABLES ALEATORIAS INDEPENDIENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS

En el caso de que las variables aleatorias sean independientes y estén idénticamente distribuidas (i.i.d.) con función de distribución

$$F(x) = P(x_j < x) \quad \{86\}$$

las fórmulas {81} y {82} se convierten en

$$P(Z_n < x) = H_n(x) = F^n(x) \quad \{86\}$$

y

$$P(W_n \geq x) = 1 - L_n(x) = (1 - F(x))^n \quad \{87\}$$

Los dos lemas siguientes son dos acotaciones que se utilizarán en los teoremas posteriores. Tanto los lemas, como los teoremas de este apartado 1,4,3, se hallan demostrados en el libro "The Asymptotic Theory of Extreme Order Statistics", cuyo autor es J. Galambos.

LEMA 1.- Para cualquier  $z$ ,  $0 < z < \frac{1}{2}$ , se tiene

$$e^{-nz} - (1-z)^n \{ \exp(2nz^2) - 1 \} < (1-z)^n < e^{-nz} \quad \{88\}$$

La desigualdad {88} sigue cumpliéndose si  $0 < z < 1$ .

LEMA 2.- Sea  $n \geq 1$  un número entero. Entonces, para cualquier entero  $S \geq 0$ , resulta

$$\sum_{k=0}^{2S+1} (-1)^k \binom{n}{k} z^k < (1-z)^n < \sum_{k=S}^{2S} (-1)^k \binom{n}{k} z^k \quad \{89\}$$

Los dos teoremas siguientes suponen sendas acotaciones interesantes de las distribuciones del máximo y -

del mínimo. El error cometido en la evaluación de las -  
distribuciones depende de  $n$  y al aumentar  $n$  se va haciendo  
do más pequeño.

TEOREMA 1.- Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatori  
as i.i.d. con función de distribución  $F(x)$ . Sea  $x$  tal  
que cumpla

$$1 - F(x) < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \{90\}$$

Entonces, para  $n \geq 1$ ,

$$T(x) - 4n\{1 - F(x)\}^2 F^n(x) < P(Z_n < x) < T(x) \quad \{91\}$$

donde

$$T(x) = \exp\{-n(1 - F(x))\} \quad \{92\}$$

TEOREMA 2.- Sean  $X_1, X_2, \dots, X_n$  variables aleatori  
as i.i.d. con función distribución  $F(x)$ . Sea  $x$  tal que

$$F(x) < \frac{1}{2\sqrt{n}} \quad \{93\}$$

Entonces, para  $n \geq 1$ ,

$$U(x) - 4n F^2(x) \{1 - F(x)\}^n < P(W_n \geq x) < U(x) \quad \{94\}$$

donde

$$U(x) = \exp\{-n F(x)\} \quad \{95\}$$

Para el cálculo de  $a_n$  y  $b_n$ ,  $c_n$  y  $d_n$ , y las distribuciones límite, resultan útiles los corolarios 1 y 2.

COROLARIO 1.- Supóngase que existen sucesiones  $a_n$  y  $b_n > 0$  de números reales tales que, para cualquier valor de  $y$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ , existe el límite

$$\lim n\{1 - F(a_n + b_n y)\} = u(y) \quad \{96\}$$

Entonces, para  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Z_n < a_n + b_n y) = \exp\{-u(y)\} \quad \{97\}$$

COROLARIO 2.- Supóngase que existen sucesiones  $c_n$  y  $d_n > 0$  de números reales tales que, para cualquier valor de  $y$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ , existe el límite

$$\lim nF(c_n + d_n y) = w(y) \quad \{98\}$$

Entonces, para  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(W_n < c_n + d_n y) = 1 - \exp\{-w(y)\} \quad \{99\}$$

El teorema que viene a continuación supone otra acotación de la distribución  $P(Z_n < x)$ . Para la distribución del mínimo existe un teorema análogo.

TEOREMA 3.- Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias i.i.d. Se define  $S_{k,n}(x)$  como

$$S_{k,n}(x) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \sum P(X_{i_1} > x, X_{i_2} > x, \dots, X_{i_k} > x) & k \geq 1 \end{cases} \quad \{100\}$$

Entonces, para cualquier número real  $x$  y para cualquier entero  $S \geq 0$ ,

$$\sum_{k=0}^{2S+1} (-1)^k S_{k,n}(x) \leq P(Z_n < x) \leq \sum_{k=0}^{2S} (-1)^k S_{k,n}(x) \quad \{101\}$$

La importancia de este teorema es que se sigue cumpliendo aun en el caso de que la sucesión  $X_j$  no sea de variables independientes.

#### 1.4.3.1.1.- LIMITES DE LAS DISTRIBUCIONES DE EXTREMOS

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  un conjunto de variables aleatorias. Si se ordenan en forma de sucesión no decreciente se tiene que

$$X_{1:n} \leq X_{2:n} \leq \dots \leq X_{n:n} \quad \{102\}$$

De este modo el estadístico de orden  $K$  viene expresado como  $X_{k:n}$ . A los estadísticos de orden  $K$  y  $n-k+1$  se les denomina también extremos  $k$ -ésimos inferior y superior respectivamente. Si  $n$  aumenta indefinidamente el estadístico de orden  $K$  sigue teniendo todo su sentido.

Sean

$$A_j(x) = \{X_j \geq x\} \quad \text{y} \quad B_j(x) = \{X_j < x\} \quad \{103\}$$

Entonces para los estadísticos de orden  $k$  y  $n-k+1$

$$\{X_j \geq x\} = \{a \text{ lo sumo ocurren } k-1 \text{ de } B_j(x), 1 \leq j \leq n\} \quad \{104\}$$

$$\{X_j < x\} = \{a \text{ lo sumo ocurren } k-1 \text{ de } A_j(x), 1 \leq j \leq n\} \quad \{105\}$$

Si se denota por  $v_n(A, x)$  y  $v_n(B, x)$  al número de  $A_j(x)$  y  $B_j(x)$  para los que  $x_j \geq x$  y  $X_j < x$ , respectivamente, entonces las distribuciones de  $X_{k:n}$  y  $X_{n-k+1:n}$  vienen dadas por

$$P(X_{k:n} \geq x) = \sum_{t=0}^{k-1} P(v_n(B, x) = t) \quad \{106\}$$

y por

$$P(X_{n-k+1:n} < x) = \sum_{t=0}^{k-1} P(v_n(A, x) = t) \quad \{107\}$$

Si  $K$  es fijo y  $n$  tiende a  $+\infty$  el número de términos del sumatorio es fijo.

Sea  $C_1, C_2, \dots, C_n$  un conjunto de sucesos y  $v_n = v_n(C)$  el número de los mismos que ocurre. Se define  $S_{0,n} = 1$  y, para  $K \geq 1$ ,

$$S_{k,n} = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(C_{i_1}, C_{i_2}, \dots, C_{i_k}) \quad \{108\}$$

Si  $k > n$  entonces se dice que  $S_{k,n}$  es cero.

Esta definición de  $S_{k,n}$  se va a utilizar en el teorema 4, que da un valor exacto de  $P(v_n = t)$  para poder trabajar con {106} y {107}.

TEOREMA 4.- Sean  $n \geq 1$  y  $0 < t < n$  dos números enteros. Entonces

$$P(v_n = t) = \sum_{h=0}^{n-t} (-1)^h \binom{k+t}{t} S_{k+t,n} \quad \{109\}$$

Además, para cualquier valor entero  $S \geq 0$ ,

$$\sum_{k=0}^{2S+1} (-1)^k \binom{k+t}{t} S_{k+t,n} + \frac{2S+2}{n-t} \binom{2S+t+2}{t} S_{2S+t+2,n} \leq$$

$$< P(v_n = t) < \sum_{k=0}^{2S} (-1)^k \binom{k+t}{t} S_{k+t,n} - \frac{2S+1}{n-t} \binom{2S+t+1}{t} S_{2S+t+1,n}$$

### 1.4.3.2.- CONVERGENCIA DEBIL PARA VARIABLES INDEPENDIENTES E IDENTICAMENTE DISTRIBUIDAS

Una sucesión  $U_n$  de variables aleatorias, o sus funciones de distribución  $R_n(x)$ , se dice que converge débilmente si, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , existe el límite  $\lim R_n(x) = R(x)$  en todos los puntos  $x$  de continuidad de  $R(x)$ . El problema que se plantea aquí es el de encontrar condiciones para  $F(x)$  bajo las cuales  $Z_n$  (o  $W_n$ ) puedan ser normalizadas por constantes  $a_n$  y  $b_n > 0$  de modo que

$$\frac{Z_n - a_n}{b_n} \quad \text{y} \quad \frac{W_n - c_n}{d_n}$$

converjan débilmente a distribuciones no degeneradas.

Según lo anterior, para una sucesión  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de variables i.i.d. los límites, en sentido de convergencia débil, de las distribuciones del máximo y del mínimo son, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim F^n(a_n + b_n x) = H(x) \quad \{111\}$$

y

$$\lim \{1 - F(c_n + d_n x)\}^n = 1 - L(x) \quad \{112\}$$

Además, se definen  $\alpha(F)$  y  $\omega(F)$  mediante

$$\alpha(F) = \inf\{x : F(x) > 0\} \quad \{113\}$$

y

$$\omega(F) = \sup\{x : F(x) < 1\} \quad \{114\}$$

Evidentemente  $\alpha(F)$  es  $-\infty$  ó finito, y  $\omega(F)$  es finito ó  $+\infty$ .

### 1.4.3.2.1.- DISTRIBUCIONES LIMITES PARA EL MAXIMO Y EL MINIMOS: CONDICIONES SUFICIENTES

Los siguientes teoremas sirven para, dada un función de distribución  $F(x_j)$  de una sucesión de variables i.i.d., saber qué distribución límite tiene (para  $Z_n$  ó  $W_n$ ) si verifica unas determinadas condiciones. Los teoremas dan además las constantes de normalización.

TEOREMA 5.- Sea  $\omega(F) = +\infty$ . Supóngase que existe una constante  $\gamma > 0$  tal que, para todo  $x$ , cuando  $t \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim \frac{1 - F(tx)}{1 - F(t)} = x^{-\gamma} \quad \{115\}$$

Entonces existe una sucesión  $b_n > 0$  tal que, para  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Z_n < b_n x) = H_{1,\gamma}(x) \quad \{116\}$$

donde

$$H_{1,\gamma}(x) = \begin{cases} \exp(-x^{-\gamma}) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \{117\}$$

La constante de normalización  $b_n$  se puede elegir como

$$b_n = \inf\{x : 1-F(x) \leq \frac{1}{n}\} \quad \{118\}$$

TEOREMA 6.- Sea  $\omega(F)$  un valor finito. Supóngase que la función de distribución  $F^*(x) = F(\omega(F) - \frac{1}{x})$ ,  $x > 0$ , satisface la condición {115}. Entonces existen sucesiones  $a_n$  y  $b_n > 0$  tales que, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Z_n < a_n + b_n x) = H_{2,\gamma}(x) \quad \{119\}$$

donde

$$H_{2,\gamma} = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \exp(-(-x)^\gamma) & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \{120\}$$

Las constantes de normalización pueden elegirse como

$$a_n = \omega(F) \quad \{121\}$$

y

$$b_n = \omega(F) - \inf\{x : 1-F(x) \leq \frac{1}{n}\} \quad \{122\}$$

TEOREMA 7.- Supóngase que, para un número a finito,

$$\int_a^{\omega(F)} (1-F(y)) dy < +\infty \quad \{123\}$$

Para  $\alpha(F) < t < \omega(F)$ , se define

$$R(t) = (1-F(t))^{-1} \cdot \int_t^{\omega(F)} (1-F(y)) dy \quad \{124\}$$

Supóngase que, para cualquier valor real  $x$ , cuando  $t \rightarrow \omega(F)$ ,

$$\lim \frac{1-F(t+x) R(t)}{1-F(t)} = e^{-x} \quad \{125\}$$

Entonces existen sucesiones  $a_n$  y  $b_n > 0$  tales que, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Z_n < a_n + b_n x) = H_{3,0}(x) \quad \{126\}$$

donde

$$H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x}), \quad -\infty < x < +\infty \quad \{127\}$$

Las constantes de normalización se pueden elegir como

$$a_n = \inf\{x: 1-F(x) < \frac{1}{n}\} \quad \{128\}$$

y

$$b_n = R(a_n) \quad \{129\}$$

Estos tres teoremas agotan las posibilidades para la existencia de distribución asintótica del máximo de un

conjunto de variables i.i.d. Si  $F(x)$  no entra dentro de uno de estos teoremas, entonces no existen constantes de normalización que hagan que {111} se verifique. Si se cumple {111} las constantes  $a_n$  y  $b_n$  no son únicas.

En relación con la distribución del mínimo los teoremas se convierten en

TEOREMA 8.- Sea  $\alpha(F) = -\infty$ . Supóngase que existe una constante  $\gamma > 0$  tal que, para todo  $x > 0$ , cuando  $t \rightarrow -\infty$ ,

$$\lim \frac{F(tx)}{F(t)} = x^{-\gamma} \quad \{130\}$$

Entonces existe una sucesión  $d_n > 0$  tal que, cuando  $n \rightarrow -\infty$ ,

$$\lim P(W_n < d_n \cdot x) = L_{1,\gamma}(x) \quad \{131\}$$

donde

$$L_{1,\gamma} = \begin{cases} 1 - \exp(-(-x)^{-\gamma}) & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad \{132\}$$

La constante de normalización  $d_n$  puede elegirse como

$$d_n = \sup\{x : F(x) < \frac{1}{n}\} \quad \{133\}$$

TEOREMA 9.- Sea  $\alpha(F)$  un valor finito. Supóngase que la distribución  $F^*(x) = F(\alpha(F) - \frac{1}{x})$ ,  $x > 0$ , verifica la condición {130}. Entonces existen sucesiones  $c_n$  y  $d_n > 0$  tales que, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(W_n < c_n + d_n x) = L_{2,\gamma}(x) \quad \{134\}$$

donde

$$L_{2,\gamma}(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-x^\gamma) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \quad \{135\}$$

Las constantes de normalización se pueden elegir como

$$c_n = \alpha(F) \quad \{136\}$$

y

$$d_n = \sup\{x : F(x) < \frac{1}{n}\} - \alpha(F) \quad \{137\}$$

TEOREMA 10.- Supóngase que, para un valor a finito,

$$\int_{\alpha(F)}^a F(y) dy < +\infty \quad \{138\}$$

Para  $t > \alpha(F)$  se define

$$r(t) = \frac{1}{F(t)} \int_{\alpha(F)}^t F(y) dy \quad \{139\}$$

Supóngase que, para cualquier valor real  $x$ , cuando  $t \rightarrow \alpha(F)$ ,

$$\lim \frac{F(t+x r(t))}{F(t)} = e^x \quad \{140\}$$

Entonces existen sucesiones  $c_n$  y  $d_n > 0$  tales que, cuando  $n \rightarrow -\infty$ ,

$$\lim P(W_n < c_n + d_n x) = L_{3,0}(x), \quad \{141\}$$

donde

$$L_{3,0}(x) = 1 - \exp(-e^x), \quad -\infty < x < +\infty \quad \{142\}$$

Las constantes de normalización se pueden elegir como

$$c_n = \sup\{x : F(x) < \frac{1}{n}\} \quad \{143\}$$

y

$$d_n = r(c_n) \quad \{144\}$$

#### 1.4.3.2.2.- OTRAS POSIBILIDADES PARA LAS CONSTANTES DE NORMALIZACION

Las constantes de normalización  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  y  $d_n$ ,

utilizadas en los teoremas anteriores, no son únicas, como se va a ver a continuación.

Sea  $Y_n$  una sucesión de variables aleatorias y su póngase que, con constantes  $C_n$  y  $D_n > 0$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Y_n < C_n + D_n x) = G(x) \quad \{145\}$$

para todos los puntos en que  $G(x)$  es continua, siendo  $G(x)$  una función de distribución no degenerada. Escribiendo

$$P(Y_n < C_n + D_n x) = P\left(\frac{Y_n}{D_n} - \frac{C_n}{D_n} < x\right) \quad \{146\}$$

se ve que, si  $D_n \rightarrow +\infty$ , al cambiar  $C_n$  por  $C_n^*$  que verifique que  $C_n/D_n \rightarrow 0$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ , no se modifica el límite - {145}. Análogamente, se puede cambiar  $D_n$  por  $D_n^*$  que debe verificar que  $D_n^*/D_n \rightarrow 1$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ .

LEMA 3.- Sea  $Y_n$  una sucesión de variables aleatorias. Sean  $C_n$  y  $D_n > 0$  dos sucesiones de números reales que verifiquen {145}. Sean  $C_n^*$  y  $D_n^* > 0$  dos sucesiones de números reales que satisfagan, para  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim \frac{C_n - C_n^*}{D_n} = 0 \quad \{147\}$$

y

$$\lim \frac{D_n}{D_n^*} = 1 \quad \{148\}$$

Entonces se cumple {145}, para todos los puntos en que  $G(x)$  sea continua, cuando  $C_n$  y/o  $D_n$  se sustituyen por  $C_n^*$  y/o  $D_n^*$ , respectivamente.

Los dos teoremas siguientes se refieren a la estructura de las constantes de normalización  $a_n$  y  $b_n$  en el primer caso y  $c_n$  y  $d_n$  en el segundo.

TEOREMA 11.- Sean  $a_n$  y  $b_n > 0$  dos sucesiones de números reales tales que satisfagan la expresión {83}. - Entonces, para un número entero  $m \geq 1$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ , existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim \frac{a_{nm} - a_n}{b_n} = A_m \quad \{149\}$$

$$\lim \frac{b_{nm}}{b_n} = B_m > 0 \quad \{150\}$$

Además

$$H(x) = H^m(A_m + B_m x) \quad \{151\}$$

TEOREMA 12.- Sean  $c_n$  y  $d_n$  dos sucesiones de números reales que verifican {84}. Entonces, para un número entero  $m \geq 1$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ , existen y son finitos los siguientes límites

$$\lim \frac{c_{nm} - c_n}{d_b} = A_m^* \quad \{152\}$$

$$\lim \frac{d_{nm}}{d_n} = B_m^* \neq 0 \quad \{153\}$$

Además

$$1 - L(x) = \{1 - L(A_m^* + B_m^* x)\}^m \quad \{154\}$$

### 1.4.3.2.3.- DISTRIBUCION NORMAL N(0,1)

La distribución normal

$$F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^x e^{-y^2/2} dy \quad \{155\}$$

donde  $y$  es arbitrario, verifica las condiciones del teorema 7 por lo que, con las constantes de normalización

$$a_n = (2 \log n)^{1/2} - \frac{\frac{1}{2}(\log \log n + \log 4\pi)}{(2 \log n)^{1/2}} \quad \{156\}$$

$$b_n = (2 \log n)^{-1/2} \quad \{157\}$$

$(Z_n - a_n)/b_n$  converge débilmente a  $H_{3,0}(x)$ .

Como la distribución normal  $F(x)$  es simétrica - respecto a cero, se pueden utilizar las constantes  $c_n = -a_n$

y  $d_n = b_n$  para la convergencia de  $(W_n - c_n)/d_n$ .

#### 1.4.3.2.4.- DISTRIBUCION LOGARITMICO-NORMAL

Si  $X > 0$  y  $\log X$  sigue una ley normal, entonces se dice que  $X$  tiene una distribución logarítmico-normal. Así

$$F(x) = (2\pi)^{-1/2} \int_{-\infty}^{\log x} e^{-u^2/2} du, \quad x > 0 \quad \{158\}$$

Para las constantes definidas en {156} y {157}, que se denotan por  $a_n^*$  y  $b_n^*$ , se tiene que, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$P(\log Z_n < a_n^* + b_n^* x) \rightarrow \exp(-e^{-x}) \quad \{159\}$$

Si desarrollamos  $\exp(a_n^* + b_n^* x)$  en serie de Taylor, para  $|v| < 1$ ,

$$\begin{aligned} \exp(a_n^* + b_n^* x) &= \exp(a_n^*) \{1 + b_n^* x + v(b_n^* x)^2\} = \\ &= \exp(a_n^*) + b_n^* \exp(a_n^*) (1 + v b_n^* x) x \end{aligned}$$

Cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $1 + v b_n^* x \rightarrow 1$  y además, por el lema 3,

$$\lim P(Z_n < \exp(a_n^* + b_n^* x)) = \lim P(Z_n < a_n + b_n x)$$

con

$$a_n = \exp(a_n^*) \text{ y } b_n = b_n^* \exp(a_n^*)$$

La distribución límite es  $\exp(-e^{-x})$ . Análogamente, para el mínimo,

$$\lim P(W_n < c_n + d_n x) = 1 - \exp(-e^x) \quad \{161\}$$

donde

$$c_n = \exp(-a_n^*) \text{ y } b_n = b_n^* \exp(-a_n^*)$$

#### 1.4.3.2.5.- CONVERGENCIA DEBIL PARA LOS EXTREMOS K-ESIMOS

Las funciones de distribución de los estadísticos de orden  $k$  y  $n-k+1$ ,  $X_{k:n}$  y  $X_{n-k+1:n}$  son:

$$P(X_{k:n} \geq z) = \sum_{t=0}^{k-1} \binom{n}{t} \{F(z)\}^t \{1-F(z)\}^{n-t} \quad \{162\}$$

y

$$P(X_{n-k+1:n} < z) = \sum_{t=0}^{k-1} \binom{n}{t} \{1-F(z)\}^t \{F(z)\}^{n-t} \quad \{163\}$$

Como  $k$  es fijo, la cuestión de la existencia y de la forma de las distribuciones límites de los estadísticos de orden  $k$  y  $n-k+1$  se reducen a las del máximo y el mínimo, según se expresa en los siguientes teoremas.

TEOREMA 13.- Para sucesiones  $a_n$  y  $b_n > 0$  de números reales, y para un número entero  $k > 1$  fijo, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$F_{n-k+1:n}(a_n + b_n x) = P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) \quad \{164\}$$

converge débilmente a una función de distribución  $H^{(k)}(x)$  no degenerada si, y sólo si,

$$H_n(a_n + b_n x) = F_{n:n}(a_n + b_n x) \quad \{165\}$$

converge débilmente a una función de distribución  $H(x)$  no degenerada. Si  $H^{(k)}(x)$  existe, entonces, para  $\alpha(H) < x < \omega(H)$ ,

$$H^{(k)}(x) = H(x) \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} \left\{ \log \frac{1}{H(x)} \right\}^t \quad \{166\}$$

donde  $H(x)$  es del tipo  $H_{1,\gamma}(x)$ ,  $H_{2,\gamma}(x)$  ó  $H_{3,0}(x)$ .

TEOREMA 14.- Para sucesiones  $c_n$  y  $d_n > 0$  de números reales, y para un número entero  $k > 1$  fijo, cuando  $n \rightarrow +\infty$

$$F_{k:n}(c_n + d_n x) = P(X_{k:n} < c_n + d_n x) \quad \{167\}$$

converge débilmente a una función de distribución  $L^{(k)}(x)$  no degenerada si, y solo si,

$$L_n(c_n + d_n x) = F_{1:n}(c_n + d_n x) \quad \{168\}$$

converge débilmente a una función de distribución  $L(x)$  no degenerada. Si  $L^{(k)}(x)$  existe, entonces, para  $\alpha(L) < x < \omega(L)$ ,

$$L^{(k)}(x) = 1 - \{1 - L(x)\}^{\sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} \{-\log(1 - L(x))\}^t} \quad \{169\}$$

donde  $L(x)$  es del tipo  $L_{1,\gamma}(x)$ ,  $L_{2,\gamma}(x)$  ó  $L_{3,0}(x)$ .

#### 1.4.3.2.6.- DISTRIBUCION NORMAL

Para la distribución normal definida en {155}, con las constantes de normalización  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$  y  $d_n$  definidas a continuación, se pueden aplicar los teoremas 13 y 14. Resulta que, para  $k \geq 1$  fijo, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = \exp(-e^{-x})^{\sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} e^{-tx}} \quad \{170\}$$

y

$$\lim P(X_{k:n} < c_n + d_n x) = 1 - \exp(-e^x)^{\sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} e^{tx}} \quad \{171\}$$

#### 1.4.3.2.7.- VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

Al estimar el error cometido en la sustitución de las distribuciones de extremos exactas por sus formas

límites, dichas estimaciones sirven para determinar el tamaño de la muestra requerido para la aplicación de la teoría asintótica cuando las observaciones sean independientes. Se supone que la distribución  $F(x)$  de la población ha sido elegida correctamente. Por lo tanto, los errores son debidos al paso al límite cuando el tamaño de la muestra aumenta indefinidamente.

Sea  $E_n$  uno de los extremos del conjunto  $X_j$  i.i.d. Si  $F(x)$  es la función de distribución de  $X_j$  y, cuando  $n \rightarrow +\infty$ , con constantes de normalización  $a_n$  y  $b_n > 0$ , existe el límite

$$\lim P(E_n < a_n + b_n x) = R(x) \quad \{172\}$$

entonces el error cometido viene dado por

$$A_n(x) = A_n(x; E_n, a_n, b_n) = P(E_n < a_n + b_n x) - R(x) \quad \{173\}$$

Para acotarlo se utilizan los teoremas siguientes.

TEOREMA 15.- Sea  $H(x)$  una de las posibles distribuciones de valores extremos para el máximo de un conjunto de variables aleatorias  $X_j$  i.i.d. con función de distribución  $F(x)$ . Dadas dos sucesiones  $a_n$  y  $b_n > 0$  de números reales, sea

$$Z_n(x) = n\{1 - F(a_n + b_n x)\} \quad \{174\}$$

Y, para todo  $x$  que haga  $H(x) > 0$ ,

$$\rho_n(x) = Z_n(x) + \log H(x) \quad \{175\}$$

Entonces, si  $x$  hace  $H(x) > 0$  y  $Z_n(x)/n \leq \frac{1}{2}$ ,

$$\begin{aligned} |P(Z_n < a_n + b_n x) - H(x)| < H(x) \{r_{1,n}(x) + \\ + r_{2,n}(x) + r_{1,n}(x) r_{2,n}(x)\} \quad \{176\} \end{aligned}$$

donde

$$r_{1,n}(x) = \frac{2Z_n^2(x)}{n} + \frac{2Z_n^4(x)}{n^2} \cdot \frac{1}{1-q} \quad \{177\}$$

$$r_{2,n}(x) = |\rho_n(x)| + \frac{\rho_n^2(x)}{2} \cdot \frac{1}{1-s} \quad \{178\}$$

con  $q < 1$  y  $s < 1$  tales que  $\frac{2}{3} Z_n^2(x)/n < q$  y  $\frac{1}{3} |\rho_n(x)| < s$ .

TEOREMA 16.- Sea  $L(x)$  una de las distribuciones de valores extremos para el mínimo de un conjunto de variables  $X_j$  i.i.d. con función de distribución  $F(x)$ . Dadas dos sucesiones  $c_n$  y  $d_n > 0$  de números reales, sea

$$Z_n(x) = n F(c_n + d_n x) \quad \{179\}$$

y, para  $x$  tal que  $L(x) < 1$ ,

$$\rho_n(x) = Z_n(x) + \log(1 - L(x)) \quad \{180\}$$

Si  $x$  hace  $L(x) < 1$  y  $Z_n(x)/n \leq \frac{1}{2}$ , entonces

$$\begin{aligned} |P(W_n < c_n + d_n x) - L(x)| &\leq (1 - L(x)) \{r_{1,n}(x) + r_{2,n}(x) + \\ &+ r_{1,n}(x) r_{2,n}(x)\} \quad \{181\} \end{aligned}$$

donde  $r_{1,n}(x)$  y  $r_{2,n}(x)$  vienen definidos por {177} y {178} respectivamente.

Las estimaciones de la velocidad de convergencia de las distribuciones límites de los estadísticos de orden  $k$  y  $n-k+1$  se pueden reducir a los casos del máximo y del mínimo.

### 1.4.3.3.- CONVERGENCIA DEBIL DE EXTREMOS EN EL CASO GENERAL

Hasta ahora se ha supuesto que las variables aleatorias  $X_j$ ,  $1 < j \leq n$ , son independientes y tienen idéntica función de distribución. En muchas aplicaciones prácticas esto no ocurre pues el conjunto de factores a los que hacen referencia las variables  $X_j$  son dependientes unos de otros.

A continuación se van a estudiar otros tipos de sucesiones de variables aleatorias  $X_j$  que no sean independientes y con idéntica función de distribución.

### 1.4.3.3.1.- SUCESIONES GAUSSIANAS ESTACIONARIAS

Sea  $X_1, X_2, \dots, X_n$  una sucesión estacionaria de variables aleatorias. Supóngase además que, para todo  $n \geq 1$ , la distribución del vector  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  es normal de medias  $E(X_j) = 0$  y varianzas  $V(X_j) = 1$ . Esto significa que  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  tiene una función de densidad de la forma

$$f_n(x) = f_n(x; R) = \frac{|R|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \exp\left(-\frac{1}{2} x R^{-1} x'\right) \quad \{184\}$$

donde  $R$  es una matriz cuadrada de orden  $n$  definida positiva cuyo término  $r(i, j) = E(X_i X_j)$ ,  $|R|$  es su determinante,  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $x'$  es el traspuesto de  $x$ . Por la hipótesis de estacionariedad resultará que  $r(i, j) = r_m$ , donde  $m = |i - j|$  y por la hipótesis de los dos primeros momentos resulta  $r(j, j) = 1$ , con  $j \geq 1$ .

Una sucesión finita que verifica todo lo anteriormente dicho se dice que es Gaussiana. Una sucesión infinita  $X_1, X_2, \dots$  es Gaussiana si, para todo  $n \geq 1$ ,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  es Gaussiana. Una subsecuencia de una sucesión -

Gaussiana también lo es.

Los teoremas siguientes dan la distribución asintótica de  $Z_n$  bajo distintas hipótesis del valor  $r_m$ . Por simetría de  $f_n(x)$  los resultados son válidos también para  $W_n$ .

TEOREMA 17.- Sea  $Z_n(r)$  el máximo de una sucesión Gaussiana  $X_1, X_2, \dots, X_n$  de media cero, varianza unidad y correlación constante  $r = r(n)$ . Sean

$$b_n = (2 \log n)^{-1/2} \quad \{185\}$$

$$a_n = \frac{1}{b_n} - \frac{1}{2} b_n (\log \log n + \log 4\pi) \quad \{186\}$$

Si, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $r(n) \log n$  converge a un valor finito  $\tau$ , entonces  $(Z_n(r) - a_n)/b_n$  tiene una distribución  $H(x)$  límite. Si  $\tau = 0$ ,  $H(x) = H_{3,0}(x) = \exp(-e^{-x})$ , mientras que, para  $\tau > 0$ ,  $H(x)$  es la convolución de  $H_{3,0}(x+\tau)$  y  $\Phi(x(2\tau)^{-1/2})$ , donde  $\Phi(x)$  es la función de distribución normal  $N(0,1)$ .

Por otra parte, si  $r(n) \log n \rightarrow +\infty$ , entonces, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Z_n(r) < a_n(1-r)^{1/2} + x r^{1/2}) = \Phi(x) \quad \{187\}$$

Este teorema muestra que la forma límite de  $Z_n(r)$ , normalizada adecuadamente, depende de la relación entre  $r(n)$  y  $\log n$ .

TEOREMA 18.- Sea  $X_1, X_2, \dots$  una sucesión Gaussiana estacionaria con media cero y varianza unidad. Supóngase que las correlaciones  $r_m = E(X_j X_{j+m})$  verifican que  $r_m \log m \rightarrow 0$ , cuando  $m \rightarrow +\infty$ . Entonces, para  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$P(Z_n < a_n + b_n x) \rightarrow H_{3,0}(x) \quad \{188\}$$

donde  $a_n$  y  $b_n$  están definidas en {186} y {185}, respectivamente.

TEOREMA 19.- Supóngase que  $r_m \log m$  tiende a un valor  $\tau$  finito y positivo. Entonces, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,  $(Z_n - a_n)/b_n$  tiene una distribución límite  $H(x)$  que es la convolución de  $H_{3,0}(x)$  y  $\Phi(x(2\tau)^{-1/2})$ .

TEOREMA 20.- Supóngase que, cuando  $m \rightarrow +\infty$ ,  $r_m$  es decreciente y  $r_m (\log m)^{1/3}$  tiende a cero, aunque  $r_m \log m$  aumente y tienda a  $+\infty$ . Entonces, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(Z_n < (1-r_n)^{1/2} \cdot a_n + x \cdot r_n^{1/2}) = \Phi(x) \quad \{189\}$$

### 1.4.3.3.2.- DISTRIBUCION ASINTOTICA DE LOS EXTREMOS

#### K-ESIMOS

El teorema siguiente da un criterio que garantiza la existencia de constantes de normalización para las que todos los extremos, inferiores y superiores, tienen distribuciones límites.

TEOREMA 21.- Sean las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  y las sucesiones  $a_n$  y  $b_n > 0$  de números reales tales que, para un número entero  $j \geq 1$  fijo, existe y es finito en un intervalo  $(\alpha, \omega)$  el límite

$$\lim S_j (a_n + b_n x) = u_j(x) \quad \{190\}$$

donde

$$S_j(x) = \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq n} P(X_{i_1} \leq x, X_{i_2} \leq x, \dots, X_{i_j} \leq x) \quad \{191\}$$

Supóngase que converge la serie

$$U_t(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k \binom{k+t}{t} u_{k+t}(x), \quad \alpha < x < \omega \quad \{192\}$$

Entonces, para  $\alpha < x < \omega$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = \sum_{t=0}^{K-1} U_t(x) \quad \{193\}$$

Este teorema tiene el siguiente corolario:

COROLARIO 3.- Supóngase que  $u_j(x) = u^j(x)/j!$ , siendo  $u(x) \geq 0$ . Entonces la serie para  $U_t(x)$  converge para todo  $x$  que haga  $u(x)$  finito. Además, cuando  $n \rightarrow +\infty$ ,

$$\lim P(X_{n-k+1:n} < a_n + b_n x) = e^{-u(x)} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{u^t(x)}{t!} \quad \{194\}$$

Para el estadístico de orden  $k$ ,  $X_{k:n}$ , existen un teorema y corolario correspondientes.

## CAPITULO II

INFLUENCIA DE LA LONGITUD EN

LA RESISTENCIA A FATIGA DE

UN ELEMENTO

## 2.1.- INTRODUCCION

En los puentes de tendones atirantados oblicuos, en cuyo cálculo aparece la resistencia a fatiga de los tendones como aspecto determinante, pueden presentarse longitudes del tendón de hasta varios cientos de metros. Los resultados obtenidos en los ensayos de fatiga, que sirven de base para el cálculo, están referidos a probetas que en el caso normal no sobrepasan los 2 metros de longitud; incluso para tendones de alambres paralelos, se vienen utilizando habitualmente, como probetas, alambres de 200 milímetros de longitud, por condiciones de máquina y economía de ensayo.

Ante la imposibilidad física de ensayar longitudes reales del tendón, se impone la necesidad de deducir unas fórmulas teóricas que permitan extrapolar hasta longitudes reales los resultados obtenidos para las longitudes reducidas del ensayo.

La significación de este parámetro en el cálculo a fatiga merece una especial atención. Andrä/Saul son los primeros en advertir al calculista sobre la influencia de la longitud del tendón en la resistencia a fatiga, aunque anteriormente Fischer ya había analizado dicha influencia sobre la resistencia estática.

Birkenmaier/Narayanan menosprecian el factor longitud, alegando que en la cola inferior las funciones de distribución de las resistencias asociadas a distintas longitudes son prácticamente coincidentes. Sin embargo, esto no es correcto pues, si bien es cierto que la diferencia entre los valores que toma la función de distribución para dos longitudes arbitrarias distintas tiende a cero a medida que nos acercamos al mínimo de las resistencias, su cociente, que representa la razón de verosimilitudes, y que juega un papel decisivo, puede alcanzar valores extremos (muy altos o muy bajos).

Fischer y Andrä/Saul sugieren ajustar los datos obtenidos en laboratorio mediante una ley normal y deducir la ley correspondiente a la longitud real mediante un modelo de mínimos basado en la hipótesis de independencia. Esto implica que la resistencia no sigue una ley normal para longitudes diferentes de la de ensayo, por lo que si otro laboratorio eligiera otra longitud, los resultados de ambos diferirán aun en el caso de utilizar materiales idénticos. Ello pone de manifiesto que existe una arbitrariedad de partida al asignar la ley normal precisamente a la longitud elegida para el ensayo, lo que sugiere inmediatamente la necesidad de eliminar esta inconsistencia, siendo éste el objetivo del presente capítulo.

En la actualidad, cuando se extiende esta solución estructural para puentes de grandes luces y cuando las propiedades de fatiga de los materiales comienzan a ser mejor conocidas, se impone la consideración de este factor para un cálculo fiable. La aplicación del modelo matemático aquí descrito se extiende a los tendones de alambres paralelos y de cables paralelos de 7 alambres para la primera rotura. No se trata aquí el problema de redundancia (reserva adicional hasta el debilitamiento de la sección hasta un límite fijado) ni el caso de cables cerrados, para los que se supone que la longitud de probeta no influye en los resultados de la resistencia a fatiga.

## 2.2.- CASO DE INDEPENDENCIA

Como se verá en la hipótesis 3 vamos a estudiar el caso en que las resistencias de los distintos tendones de longitud de ensayo  $L_e$  son independientes entre sí.

### 2.2.1.- MODELO MATEMATICO

En el desarrollo del presente modelo nos basaremos en las hipótesis de Fischer y Andrä/Saul, es decir:

HIPOTESIS 1.- Un tendón de longitud real  $L$  se supone

compuesto por  $n_e$  tendones de longitud de ensayo  $L_e$ :

$$L = n_e \cdot L_e \quad \{1\}$$

HIPOTESIS 2.- La rotura del tendón real se asimila a la rotura del primero de los tendones de ensayo. Por tanto, la resistencia del tendón real,  $R_n$ , vendrá dada por el mínimo de las resistencias de los tendones de ensayo

$$R_n = \min(r_1, r_2, \dots, r_{n_e}) \quad \{2\}$$

donde  $r_i$  representa la resistencia del tendón de ensayo  $i$ -ésimo.

HIPOTESIS 3.- La resistencia de los diferentes tendones de ensayo son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas con función de distribución  $F_e(x)$ .

Implícitamente se suponía allí adicionalmente que

HIPOTESIS 4.- La resistencia estática o a fatiga de un tendón constituido por un número "m"

de elementos paralelos, ya sean alambres o cables de 7 alambres, puede quedar referida de algùn modo a la de un elemento de longitud dada. Por esta razón en este apartado se emplea siempre el término - tendón de longitud de ensayo  $L_e$ , aún cuando en el laboratorio comúnmente se someta a prueba un elemento aislado de longitud  $L_e$ .

El estudio del problema considerando las resistencias de los distintos alambres, o cables de 7 alambres, se aborda en los capítulos 4 y 5.

Como consecuencia de las hipótesis anteriores la función de distribución de la resistencia del tendón - real, será la conjunta de los distintos tendones, y viene dada por

$$F_n(x) = 1 - (1 - F_e(x))^n \quad \{3\}$$

En el caso particular de que  $F_e(x)$  sea la función de distribución de la ley normal, es decir:

$$F_e(x) = F_{N(\mu, \sigma^2)}(x) \quad \{4\}$$

el modelo que se obtiene sustituyendo en {3}, es el dado

por los autores anteriormente mencionados

$$F_n(x) = 1 - (1 - F_{N(\mu, \sigma^2)}(x))^{n_e} \quad \{5\}$$

La expresión {5} pone de manifiesto que las resistencias sólo siguen la ley normal para el caso  $n_e = 1$ , longitud igual a la de ensayo. Ello se debe a que la familia normal no es estable frente a mínimos. Ahora bien, en vez de asociar arbitrariamente la ley normal a una longitud de tendón  $L_e$  se puede asociar a una longitud desconocida  $L_0$ , denominada de referencia, tal que

$$L_0 = n_0 L_e \quad \{6\}$$

con lo que resultaría, a partir de {3}, para  $n_e = n_0$

$$F_e(x) = 1 - (1 - F_{N(\mu, \sigma^2)}(x))^{1/n_0} \quad \{7\}$$

y la función de distribución de la resistencia del tendón de longitud real  $L$  vendría dada por

$$F_n(x) = 1 - (1 - F_{N(\mu, \sigma^2)}(x))^{n_e/n_0} \quad \{8\}$$

en vez de la dada por la función {5}.

De esta forma la resistencia de un tendón con longitud de ensayo  $L_e$  no sería normal, y existiría una lon-

gitud  $L_0$  con resistencia asociada normal.

En la figura 1 se representan las funciones de densidad de la resistencia  $R_n$  correspondientes a distintos valores de  $n_e/n_0$ , incluyendo valores mayores y menores que la unidad, mientras que la figura 2 da, en papel probabilístico normal, las funciones de distribución asociadas. Esto muestra cómo al ensayar con un tendón de longitud menor que la de referencia la función de distribución de los datos es convexa, mientras que para longitudes mayores es cóncava.

En la figura 3 se expone cómo varían algunos percentiles representativos de la resistencia  $R_n$  en función de la longitud del tendón. Las figuras 4 y 5 muestran cómo varían la media y la desviación típica de la resistencia de un tendón de longitud  $L = L_0 \cdot n_e/n_0$ , en función de  $n_e/n_0$ . La diferencia entre la media y la mediana (curva del 50% de probabilidad de la figura 3) es despreciable.

Aunque el modelo, en apariencia, puede pensarse - que solamente es válido para valores de  $n_e$  y  $n_0$  naturales, tiene también sentido para valores reales positivos.

El modelo presentado sigue mostrando la arbitrariedad de suponer que existe una longitud cuya resistencia asociada se distribuye según una ley normal, si bien deja

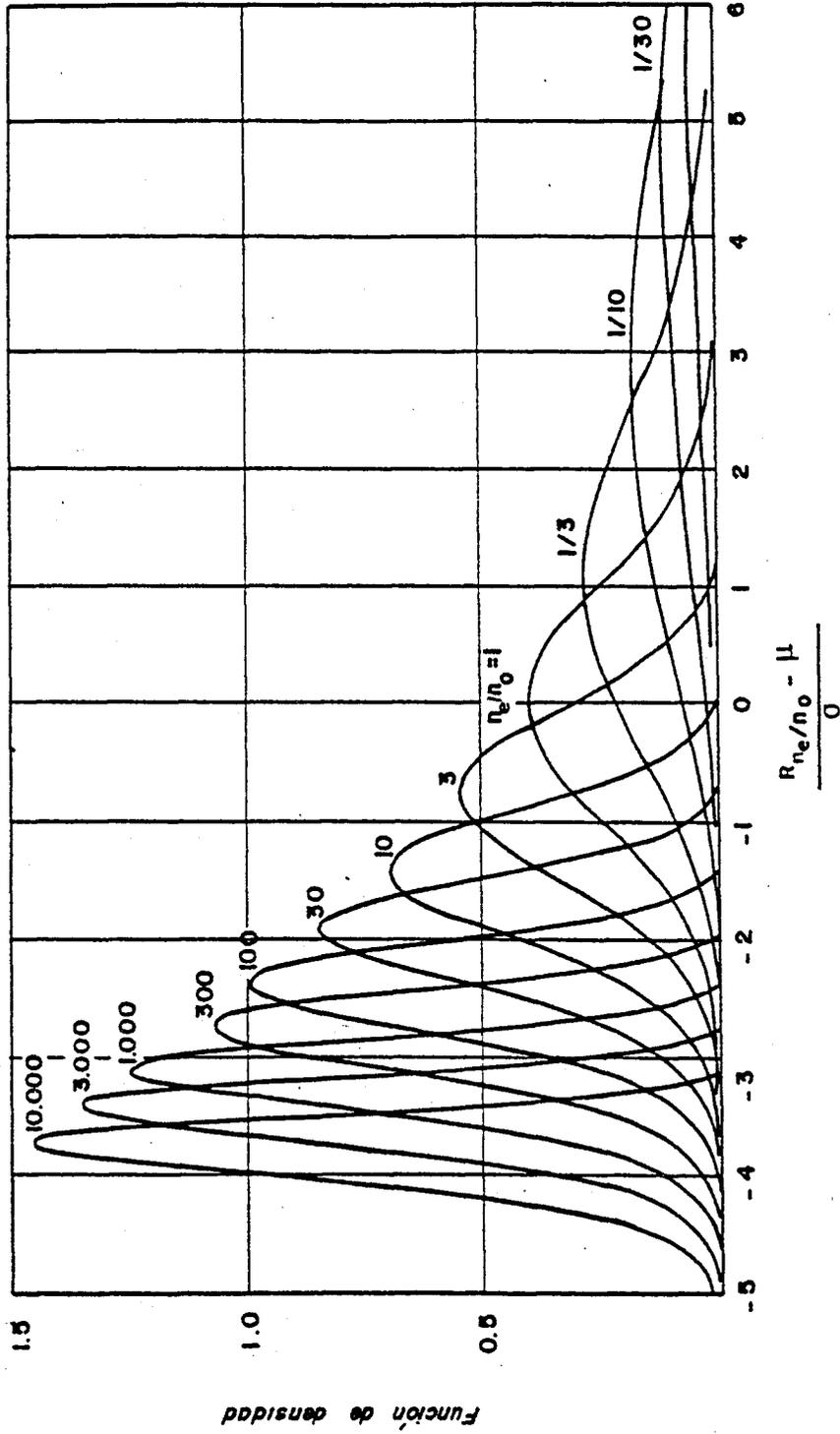


FIGURA 1

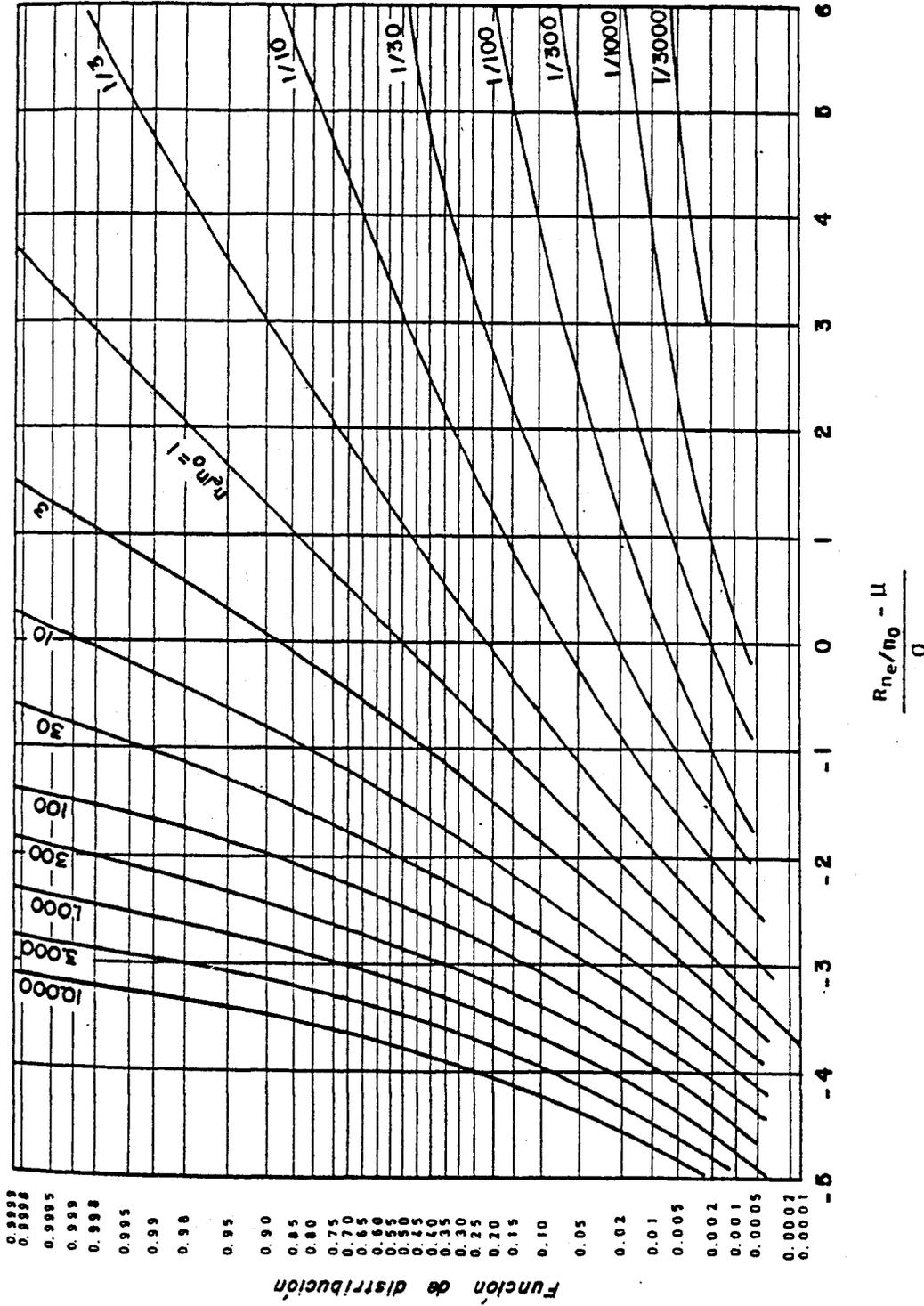


FIGURA 2

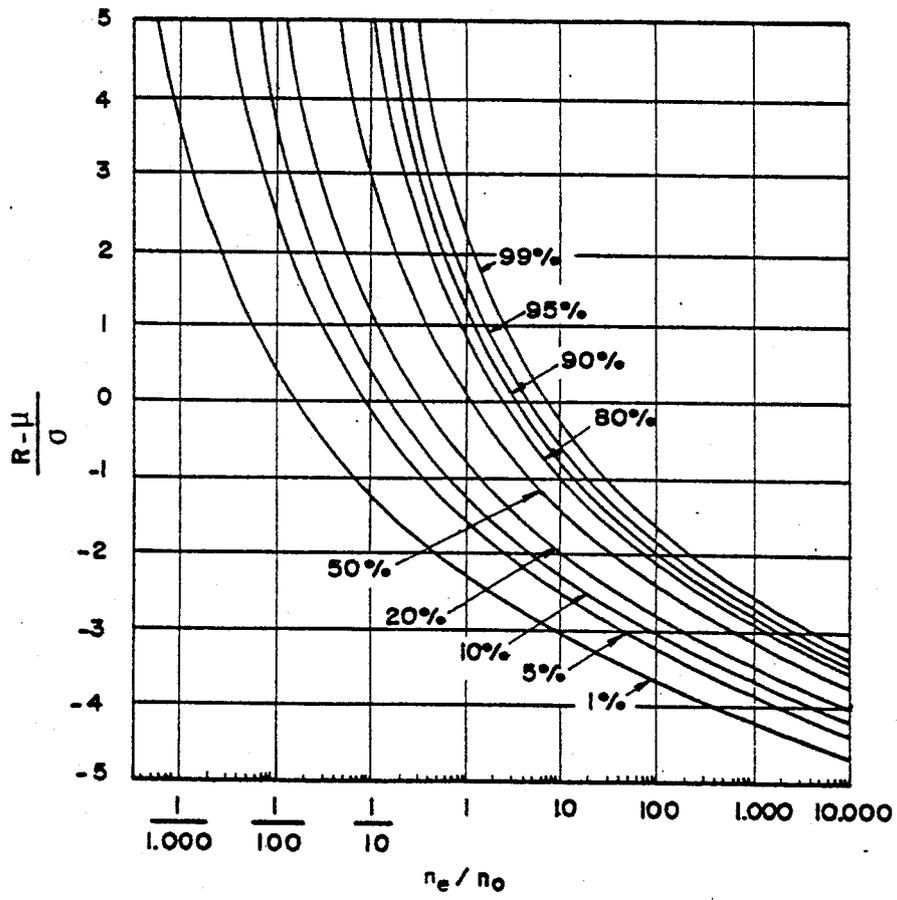


FIGURA 3

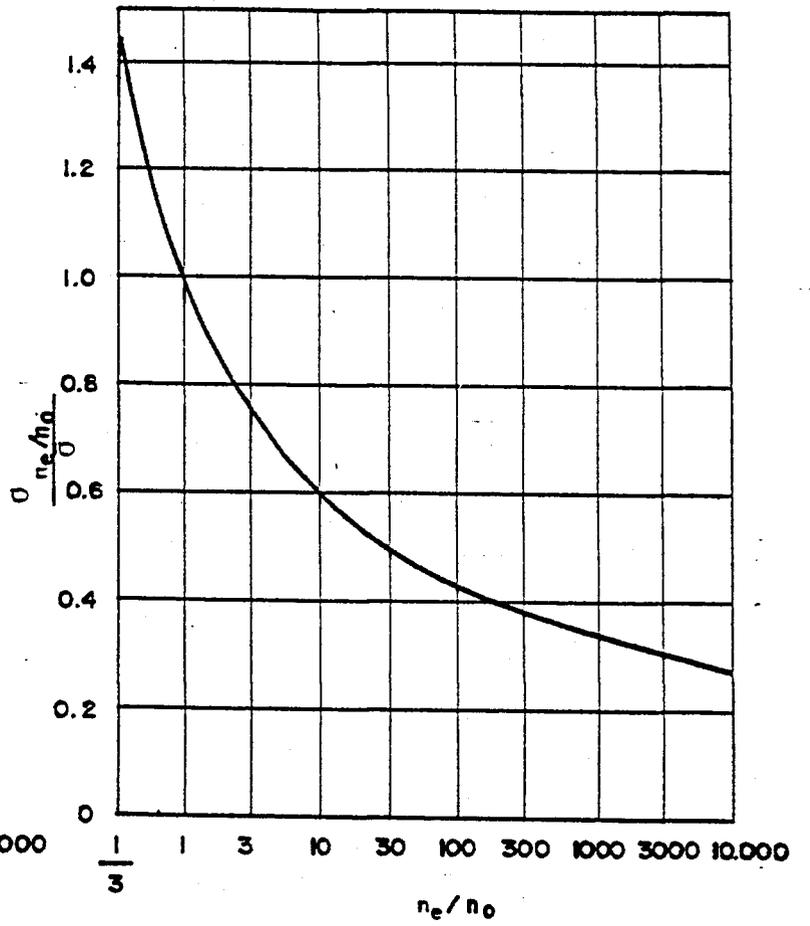
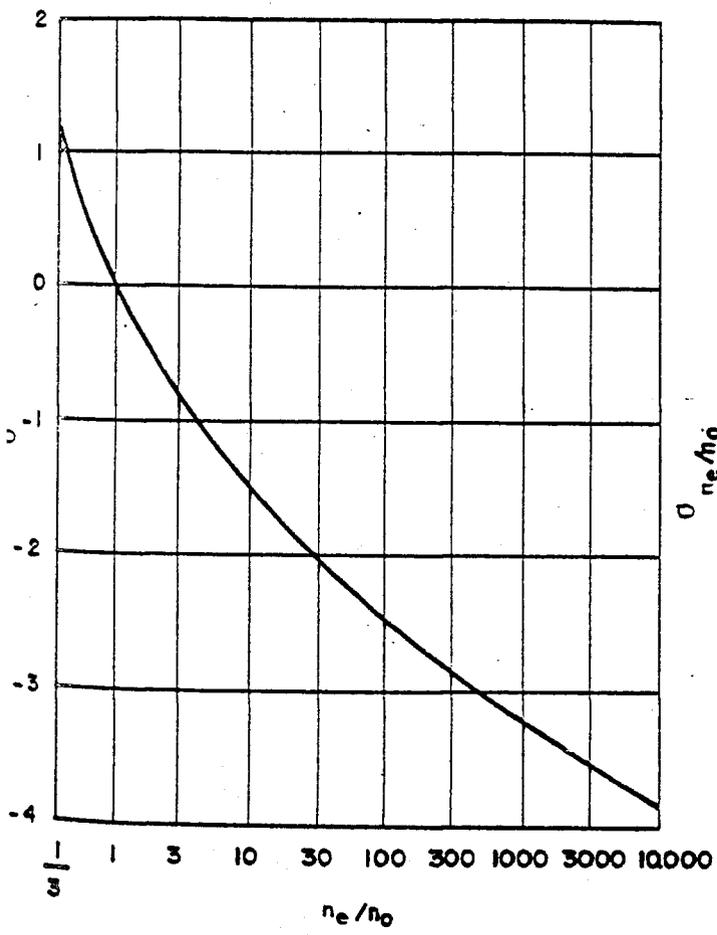


FIGURA 4 Y 5

como grado de libertad la longitud (longitud de referencia  $L_0$ ) a la que dicha ley va asociada.

## 2.2.2.- UTILIZACION DEL MODELO

En este apartado se describe cómo se realiza la estimación de la longitud de referencia  $L_0$  a partir de una longitud de ensayo  $L_e$ , así como de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  de su distribución normal asociada y cómo se determina la resistencia características (correspondiente al percentil 5%) para la longitud del tendón real.

El proceso gráfico que se utiliza se describe a continuación y se ilustra en el organigrama de la figura 6.

- 1.- Se dibuja la función de distribución empírica  $D_e$  (ver figura 7), de las resistencias obtenidas para la longitud de ensayo  $L_e$ .
- 2.- Si la curvatura de dicha función es nula, es decir, si ésta es una línea recta, la longitud de referencia  $L_0$  coincide con la longitud de ensayo  $L_e$ .
- 3.- En caso contrario se traslada la curva A co-

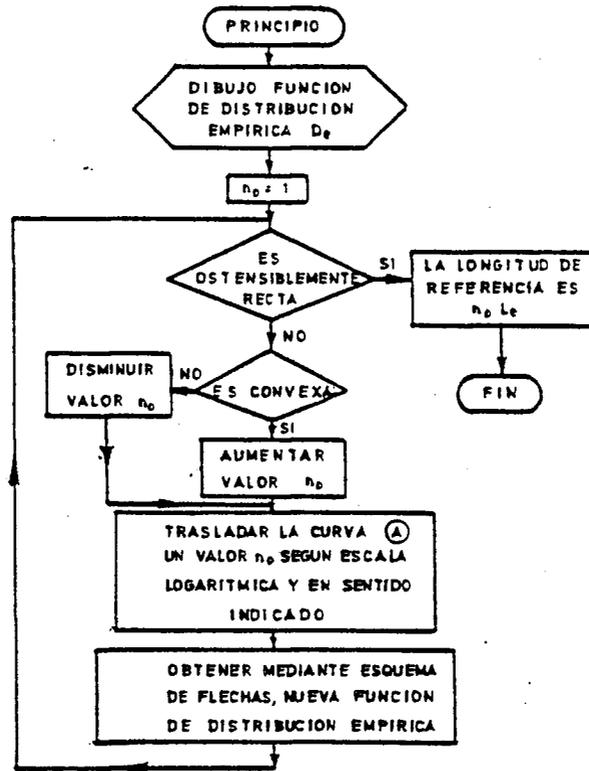


FIGURA 6

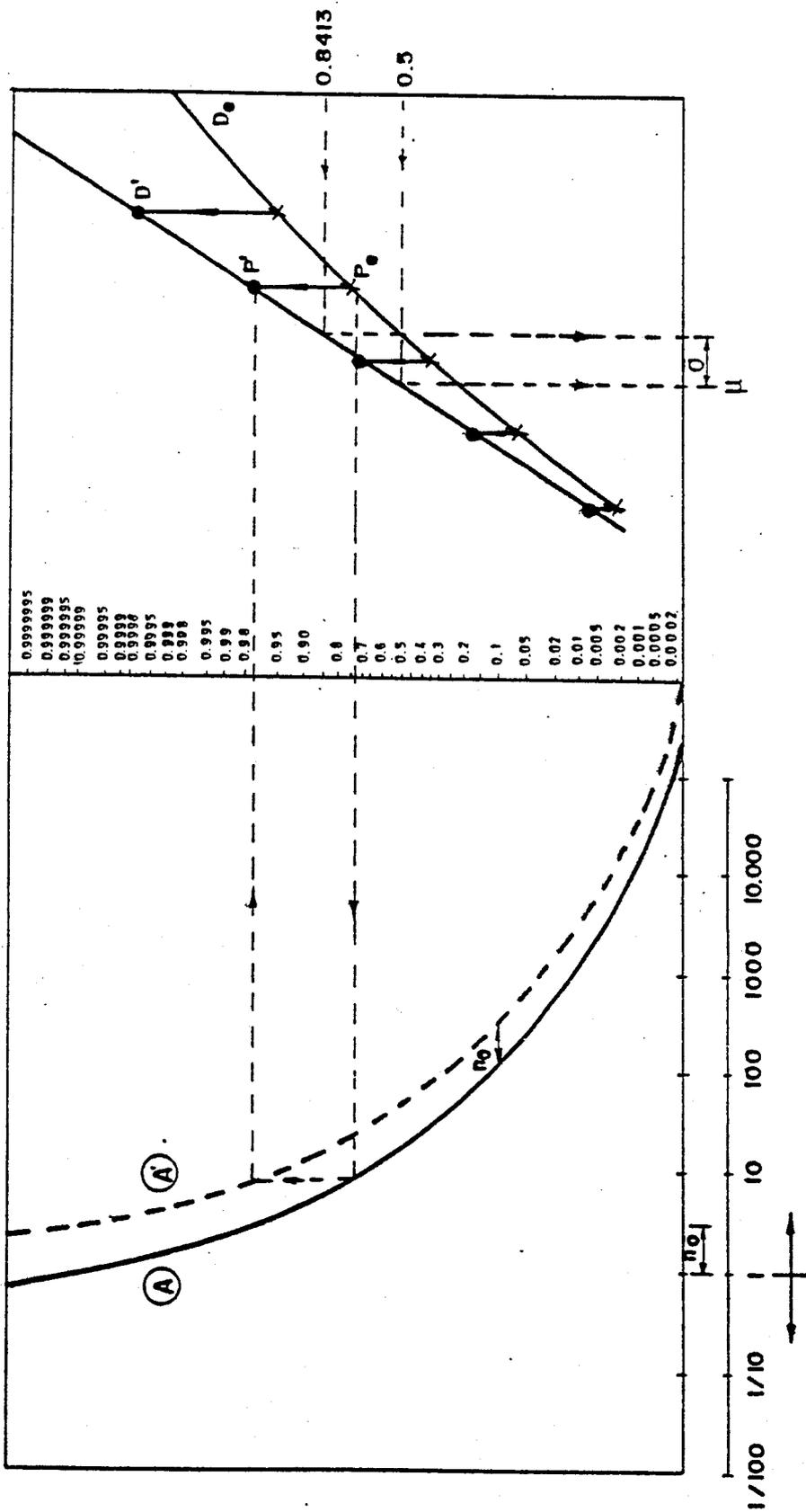


FIGURA 7

respondiente al valor  $P_e$ , hacia la derecha o hacia la izquierda, según  $D_e$  presente convexidad o concavidad, respectivamente, una longitud  $n_0$  medida en la escala logarítmica que se indica en la parte inferior de la figura 7, obteniéndose la curva de trazos  $A'$ .

- 4.- Cada punto de  $D_e$  se proyecta de acuerdo con el esquema indicado con flechas, que convierte el punto  $P_e$  en  $P'$ . De este modo se obtiene una nueva función de distribución empírica  $D'$ .

Si esta nueva función es recta la longitud de referencia es  $n_0 \cdot L_e$ , y si no lo fuera, se repite el proceso con valores de  $n_0$  mayores o menores, según que  $D'$  sea convexa o cóncava, respectivamente, hasta conseguir la linealidad de la distribución empírica. La longitud de referencia es  $n_0 \cdot L_e$ , siendo  $n_0$  el valor que consigue dicha linealidad.

- 5.- Se determinan  $\mu$  y  $\sigma$  por lectura directa entrando, como es conocido, con probabilidades 0.50 y 0.8413 en el papel probabilístico normal.
- 6.- La determinación de la resistencia característica  $R_{n_e/n_0}$  (50%) de un tendón de longitud

$L = n_e \cdot L_e = L_0 \cdot n_e/n_0$  se realiza entrando en ordenadas de la figura 2 con el valor 0.05.

En el proceso anterior se han utilizado unas curvas, como base del método. Los teoremas que se enuncian a continuación justifican la utilización de dichas curvas y la validez del método.

TEOREMA 1.- Sea la familia de curvas de ecuación

$$Y = \pi^{-1}\{1 - (1-u)^n\} \quad \{9\}$$

donde  $u$  es el parámetro. Todas las curvas de esta familia, en escala logarítmica para  $n$ , proceden de una de ellas, por traslación según el eje  $\pi$ .

Demostración: Sean dos curvas de esta familia, con parámetros  $u_1$  y  $u_2$ ,

$$Y = \pi^{-1}\{1 - (1-u_1)^{n_1}\} \quad \{10\}$$

$$Y = \pi^{-1}\{1 - (1-u_2)^{n_2}\} \quad \{11\}$$

Despejando  $n_1$  y  $n_2$  y tomando logaritmos resulta:

$$\log n_1 = \log \log\{1 - \pi(y)\} \cdot \log \log(1-u_1) \quad \{12\}$$

$$\log n_2 = \log \log\{1 - \pi(y) \cdot \log \log(1-u_2)\} \quad \{13\}$$

y despejando resulta

$$\log n_1 - \log n_2 = \log \log(1 - u_1) - \log \log(1-u_2) \quad \{14\}$$

que es independiente de  $Y$ , como queríamos demostrar.

Además se tiene, de {14}, que

$$\frac{n_1}{n_2} = \frac{\log(1-u_2)}{\log(1-u_1)} \quad \{15\}$$

TEOREMA 2.- El método de construcción gráfico indicado es válido. Ello equivale a demostrar (figura 8) que  $n^* = n^{**} = n_1$ .

Demostración. En efecto, si las curvas ② y ① de la figura 8 pertenecen a la familia {9} resulta:

$$\pi^{-1}\{F_2(x)\} = \pi^{-1}\{1 - (1-u_2)^{n^*}\} \quad \{16\}$$

$$\pi^{-1}\{F_1(x)\} = \pi^{-1}\{1 - (1-u_1)^{n^{**}}\} \quad \{17\}$$

$$\pi^{-1}\{F_1(x)\} = \pi^{-1}\{1 - (1-u_2)^{n_2}\} \quad \{18\}$$

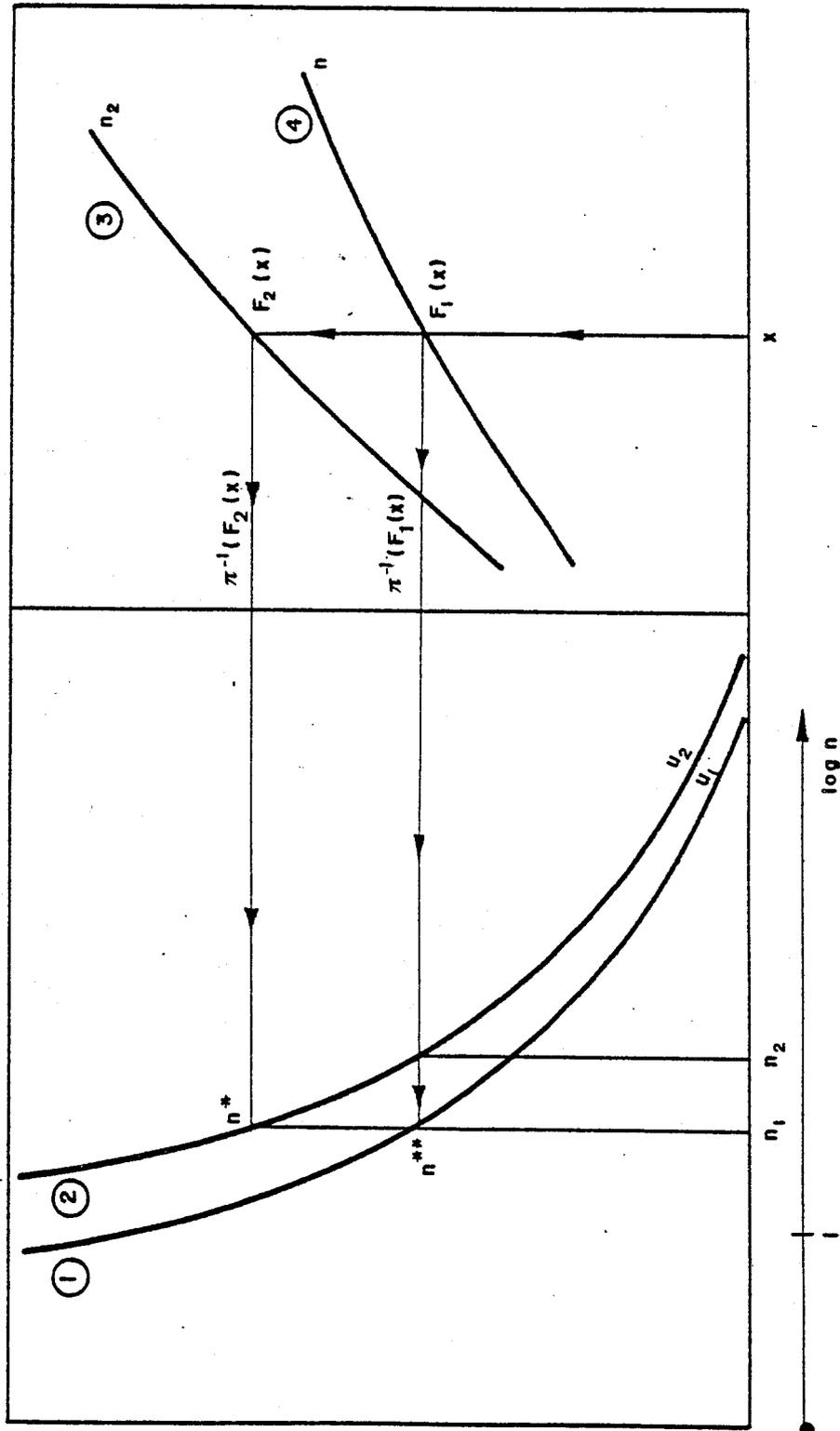


FIGURA 8

Además, por responder las funciones ③ y ④ a la ecuación {5}, resulta que:

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \pi^{-1} \{1 - (1 - F_1(x))^{n_1}\} \quad \{19\}$$

$$\frac{x-\mu}{\sigma} = \pi^{-1} \{1 - (1 - F_2(x))^{n_2}\} \quad \{20\}$$

de donde

$$\{1 - F_1(x)\}^{n_1} = \{1 - F_2(x)\}^{n_2} \quad \{21\}$$

Por otra parte, de {16} y {18} se obtiene

$$\{1 - F_2(x)\}^{1/n_2} = \{1 - F_1(x)\}^{1/n_1} \quad \{22\}$$

y, de {17} y {5}, se tiene

$$\log(1-u_1) = \frac{1}{n^{**}} \log\{1 - F_1(x)\} = \frac{n_2}{n_1} \log(1-u_2) \quad \{23\}$$

De {15} y {10}, se obtiene

$$\frac{1}{n^{**}} \log\{1 - F_1(x)\} = \frac{1}{n_1} \log\{1 - F_1(x)\} \quad \{24\}$$

de donde

$$n^{**} = n_1 \quad \{25\}$$

Además, de {21} y {22} resulta

$$\{1-F_1(x)\}^{n_1} = \{\{1-F_1(x)\}^{n^*/n_2}\}^{n_2} \quad \{26\}$$

de donde

$$n_1 = n^*$$

tal y como queríamos demostrar.

### 2.2.3.- EJEMPLO DE APLICACION

Andrä/Saul presentan un ejemplo de aplicación de su modelo utilizando los resultados de resistencia a fatiga de 357 probetas de alambre pretensado de 7 mm. de diámetro y de longitud  $L_e = 200$  milímetros con un  $\sigma_{\text{máx.}}$  constante de 800 Newtons por milímetro cuadrado. La serie fue planificada según el método "up and down" y su media y desviación típica, evaluadas de acuerdo con el método modificado de Deubelbeiss, arrojaron los siguientes valores.

$$\bar{x} = 456 \text{ N/mm}^2.$$

$$s = 56 \text{ N/mm}^2.$$

El método señalado, que agrupa los resultados según unos niveles de intervalo de variación determinados, propone el ajuste de una ley normal a los datos obtenidos, tal como se muestra en la figura 9.

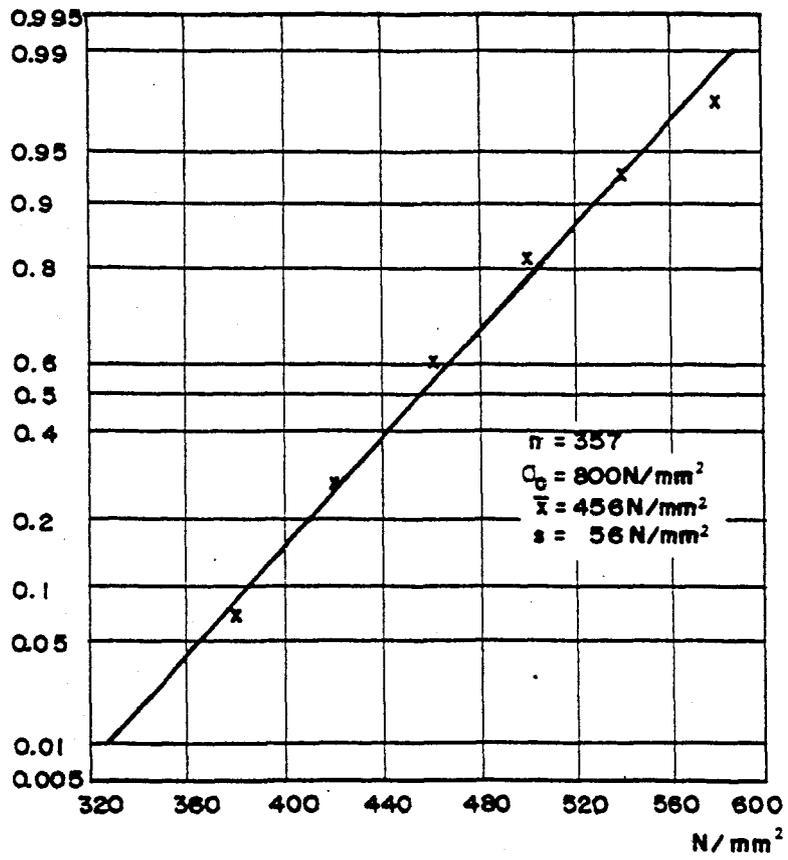


FIGURA 9

Aplicando el método propuesto por los autores arriba mencionados se llega a un valor de la resistencia característica del 5% de  $224 \text{ N/mm}^2$ . para tendones de 600 m.

En la figura 10 se aplica el método propuesto en el presente capítulo a la estimación de  $\mu$ ,  $\sigma$ ,  $n_0$  y  $R_{n_e/n_0}$  (5%) para este mismo ejemplo, obteniéndose los siguientes resultados:

$$n_0 = 20$$

$$L_0 = 4000 \text{ mm.}$$

$$\mu = 368 \text{ N/mm}^2.$$

$$\sigma = 17 \text{ N/mm}^2.$$

$$R_{n_e/n_0} (5\%) = 311 \text{ N/mm}^2.$$

Como puede observarse, esta resistencia característica es considerablemente superior a la calculada por Andrä/Saul, lo que pone de manifiesto la repercusión de la arbitrariedad en la elección de la longitud de referencia, es decir, a la que se atribuye la ley normal.

El mismo método sería aplicable al cálculo de la resistencia estática característica. Sin embargo, su efecto es poco apreciable debido a que en este último caso los coeficientes de variación de las resistencias son pequeños.

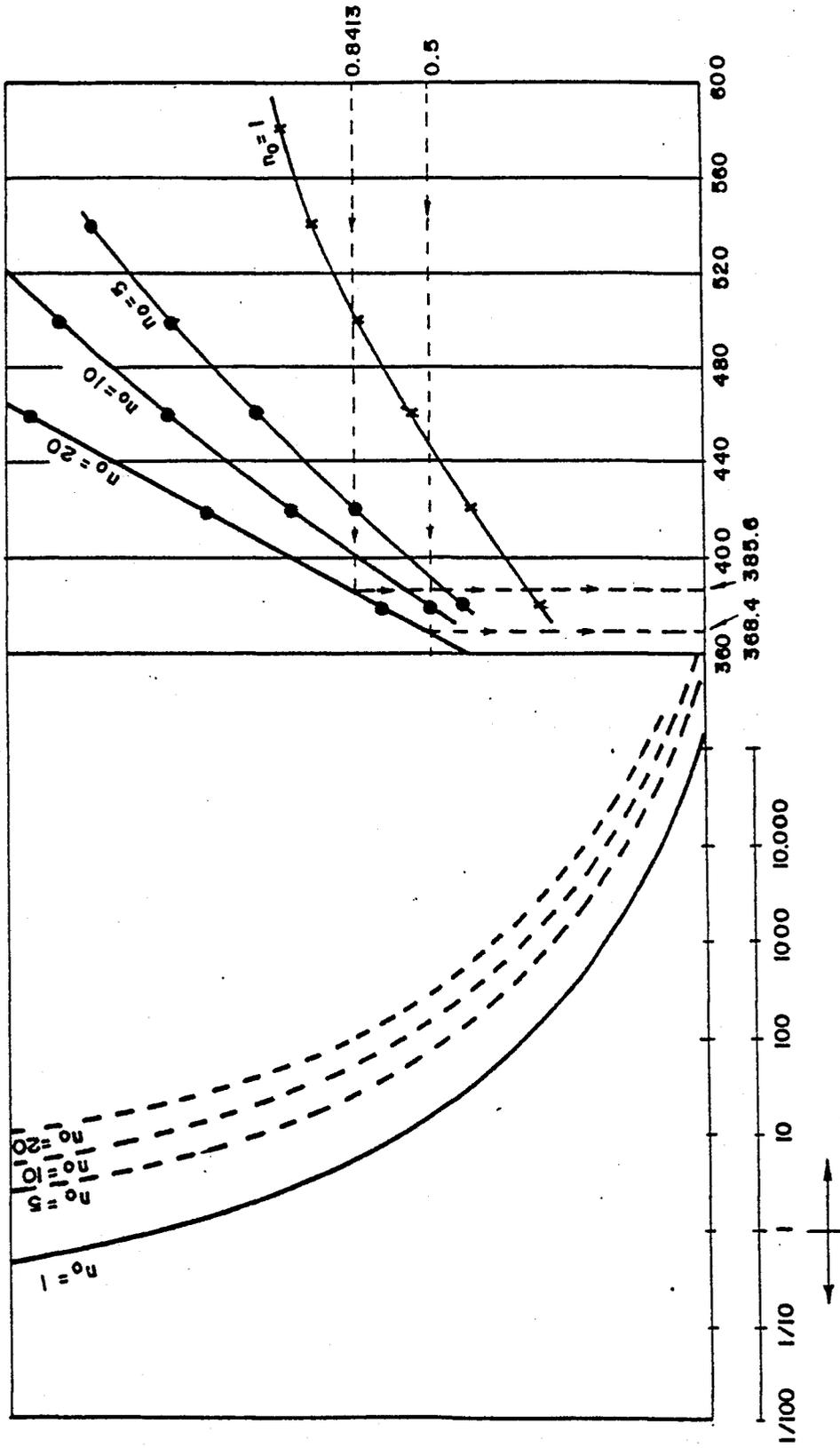


FIGURA 10

## 2.2.4.- CONCLUSIONES

Las conclusiones más importantes que se derivan son, en primer lugar, la manifestación de la arbitrariedad al suponer que la resistencia a fatiga del tendón de ensayo sigue una ley normal que conduce a estimaciones incorrectas de la resistencia característica. Por ello se hace necesario determinar previamente una longitud de referencia del tendón que se define como aquella cuya resistencia a fatiga mejor se ajusta a una ley normal.

En segundo lugar, hay que hacer notar que el método propuesto permite obtener la longitud de referencia gráficamente. Una forma de mejorar esta estimación puede hacerse mediante el método de máxima verosimilitud o el método de los mínimos cuadrados.

En el método de los mínimos cuadrados hay que minimizar la expresión

$$\sum_{i=1}^n \{ \pi^{-1} \{ 1 - (1 - F_e(x_i))^{\pi_0} \} - (Ax_i + B) \}^2 \quad [27]$$

donde A y B son los coeficientes de la recta que representa, en papel probabilístico normal (tal que como se muestra en la figura 8), la distribución normal  $N(\mu, \sigma^2)$ . Los valores  $\mu$  y  $\sigma$  se obtienen, una vez dibujada dicha recta, entrando con probabilidades 0.50 y 0.8413, respectivamente.

Por último destacaremos que la longitud del tendón real tiene una influencia decisiva en su resistencia a fatiga, no así en la resistencia estática: en ambos casos - consecuencia de la magnitud del coeficiente de variación del tendón de longitud de referencia.

Si hallamos la resistencia característica de dos cables de longitudes 3 y 300 veces la de referencia, respectivamente, a partir de la figura 2, se obtienen

$$\frac{R_3 - \mu}{\sigma} = -2.14 \quad \{28\}$$

y

$$\frac{R_{300} - \mu}{\sigma} = -3.57 \quad \{29\}$$

por lo que

$$R_3 = \mu - 2.14\sigma = \mu(1 - 2.14v) \quad \{30\}$$

y

$$R_{300} = \mu - 3.57\sigma = \mu(1 - 3.57v) \quad \{31\}$$

La influencia depende del coeficiente de variación  $v = \frac{\sigma}{\mu}$ . Como en la resistencia estática dicho coeficiente es muy pequeño, la influencia de la longitud es, asimismo, pequeña.

## 2.3.- CASO DE DEPENDENCIA

Existen motivos para plantear una duda razonable sobre la validez de la hipótesis de independencia de las resistencias de los diferentes subelementos del tendón de longitud real  $L$ , por lo que es aconsejable el análisis de su influencia. Motivo para dudar de la validez de la hipótesis es que si una zona del cable está debilitada también lo estarán las zonas adyacentes, debido al proceso de fabricación del cable.

En este apartado se desarrolla un modelo que permite dicho análisis y que incluye como caso particular, el de independencia.

El estudio se limita a la relación entre la resistencia de un elemento de longitud de ensayo  $L_e$  (o en su caso del de longitud de referencia  $L_0$ ) y la resistencia de un elemento de longitud real  $L$ , no tratándose la relación entre la resistencia de un elemento aislado y la del tendón constituido por  $m$  elementos paralelos de igual longitud.

### 2.3.1.- MODELO MATEMATICO

El desarrollo del presente modelo se basa en las hipótesis siguientes:

HIPOTESIS 1.- Un elemento de longitud real  $L$  se supone compuesto por  $n$  subelementos de longitud de referencia  $L_0$

$$L = n \cdot L_0 \quad \{32\}$$

HIPOTESIS 2.- La rotura del elemento real se asimila a la primera rotura en los  $n$  subelementos de referencia. Por tanto, la resistencia  $R_n$  del elemento vendrá dada por el mínimo de las resistencias de los subelementos de referencia.

$$R_n = \min(r_1, r_2, \dots, r_n) \quad \{33\}$$

donde  $r_i$  representa la resistencia del subelemento de referencia  $i$ -ésimo.

HIPOTESIS 3.- Las resistencias  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de los diferentes subelementos de referencia son variables aleatorias normalmente distribuidas, con media  $\mu$  y desviación típica  $\sigma$ , que satisfacen el siguiente modelo ARMA(p,q) de Box-Jenkins:

$$z_t = b_1 z_{t-1} + \dots + b_p z_{t-p} + a_t - c_1 a_{t-1} - \dots - c_q a_{t-q}$$

{34}

donde

$$z_t = r_t - E(r_t) \quad \{35\}$$

y  $b_1, b_2, \dots, b_p, c_1, c_2, \dots, c_q$  son -  
constantes que se suponen conocidas y  
las  $a_i$  son variables aleatorias indepen-  
dientes con distribución normal de me-  
dia  $\mu$  y desviación típica  $\sigma_a$ .

Este valor de  $\sigma_a$  es función de  $\sigma$  y de los demás  
parámetros que aparecen en la expresión {34}.

La determinación de la función de autocorrelación  
de  $z$  y la relación que liga  $\sigma$  con  $\sigma_a$  exigen la resolución  
del sistema:

$$\begin{aligned} \gamma_k = & b_1 \gamma_{k-1} + \dots + b_p \gamma_{k-p} + \gamma_{za}(k) - \\ & - c_1 \gamma_{za}(k-1) - \dots - c_q \gamma_{za}(k-q); \quad \{36\} \\ & k = 0, 1, \dots, p \end{aligned}$$

donde

$$\gamma_k = E(z_t \cdot z_{t-k}) \quad \{37\}$$

es la función de autocorrelación de  $z$ , y

$$\gamma_{za}(k) = E(z_{k-t} \cdot a_t) \quad \{38\}$$

es la función de covarianza cruzada de  $z$  y  $a$ , que se obtiene mediante las siguientes relaciones

$$\gamma_{za}(k) = 0 \quad ; \quad k > 0$$

$$\gamma_{za}(0) = \sigma_a^2 \quad \{39\}$$

$$\gamma_{za}(k) = \sum_{i=1}^{\min(-k,p)} b_i \cdot \gamma_{za}(k+i) - c_{-k} \sigma_a^2$$

$$-q < k < 0$$

Una vez conocida  $\gamma_0$  puede obtenerse  $\sigma_a$  en función de  $\sigma$  a partir de la expresión

$$\gamma_0 = \sigma^2 \quad \{40\}$$

### 2.3.2.- ESTIMACION PRACTICA DE LOS PARAMETROS

El primer paso para la estimación del modelo consiste en la obtención de la longitud de referencia y de los valores  $\mu$  y  $\sigma$ . Dada la complejidad analítica del desarrollo matemático, el modelo elaborado no permite la determinación simultánea de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  y de las constantes  $b_i$  y  $c_i$ . Por ello debe recurrirse, en primer lugar, a la búsqueda de la longitud de referencia que sigue la ley normal.

El modelo descrito en el apartado 2.2.1, basado en la hipótesis de independencia, puede utilizarse para dicha determinación siempre que se garantice dicha hipótesis para la resistencia de las probetas a ensayar en laboratorio. Esta independencia se consigue, para los modelos cuya función de autocorrelación se amortigua, como aquí parece ser el caso, seleccionando - probetas extraídas de tramos de elementos suficientemente alejados.

La función de autocorrelación se amortigua, ya que la influencia que la resistencia de un tramo pueda tener en otros adyacentes disminuye cuanto más lejos estén.

Una vez determinada esta longitud se cortan de un rollo  $k$  elementos con esa longitud de referencia, numerándolos correlativamente, y se determinan sus resistencias

$$r_1, r_2, \dots, r_k$$

Estos valores se toman como una realización de la serie temporal, y con ellos se estiman los parámetros  $b_i$  ( $i=1,2,\dots,p$ ) y  $c_j$  ( $j=1,2,\dots,q$ ) mediante programas de ordenador adecuados (WMTS-1, BMDP, etc.).

### 2.3.3.- COMPARACION CON EL MODELO DE INDEPENDENCIA

Con objeto de mostrar, la influencia de los parámetros del modelo en la función de distribución de la variable aleatoria  $R_n$ , se ha obtenido ésta por simulación de 20.000 elementos de longitudes 3, 10, 30 y 100 veces la longitud de referencia para los modelos que se resumen en la tabla 1 mediante el método de Montecarlo. Para el caso de elementos con longitud de referencia  $L_0$  la distribución es la ley normal  $N(\mu, \sigma^2)$  en todos los casos.

TABLA 1.

MODELO	p	q	$b_1$	$b_2$	$c_1$	$c_2$	$\sigma_a$ ( $\sigma=1$ )
1	0	0	-	-	-	-	1
2	1	0	1	-	-	-	0
3	1	1	0.95	-	0.10	-	0.345
4	2	0	-0.5	-0.5	-	-	0.816
5	0	2	-	-	-1	-0.8	0.615
6	1	1	0.9	-	0.15	-	0.502

Las funciones de distribución obtenidas se muestran en las figuras 11 y 12. En línea de trazos se presenta el caso de independencia, de cuya simple observación se deduce la considerable influencia del modelo elegido (valores

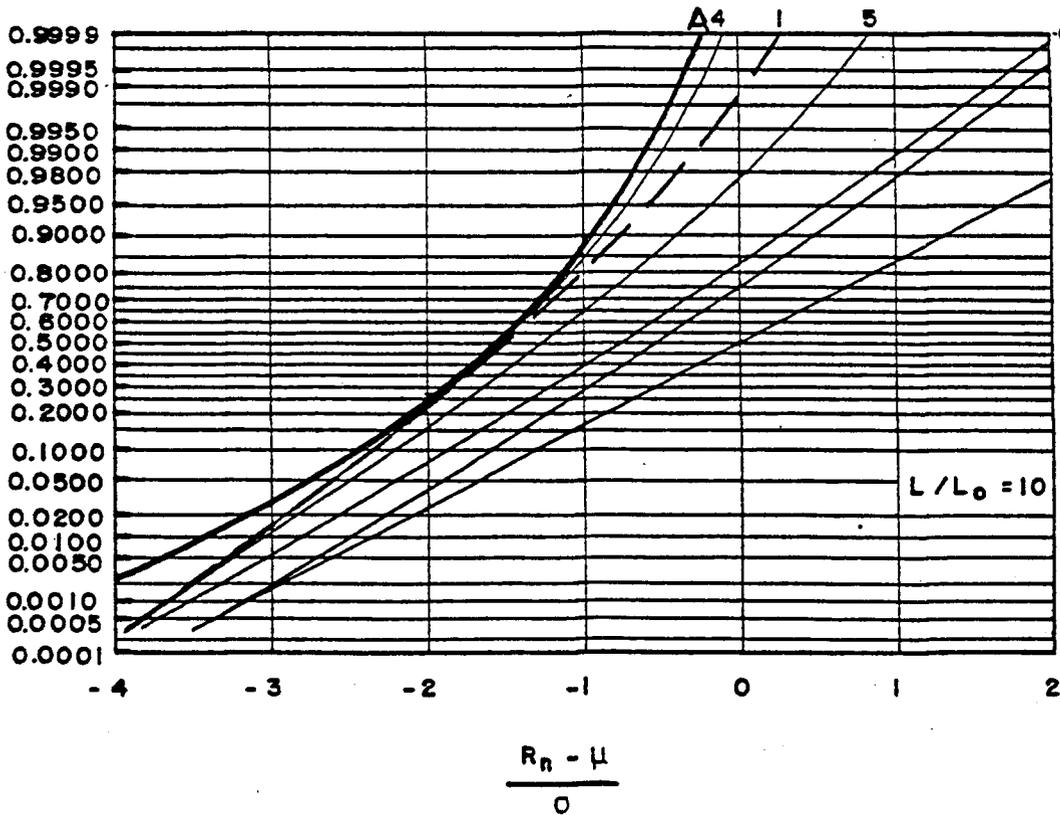
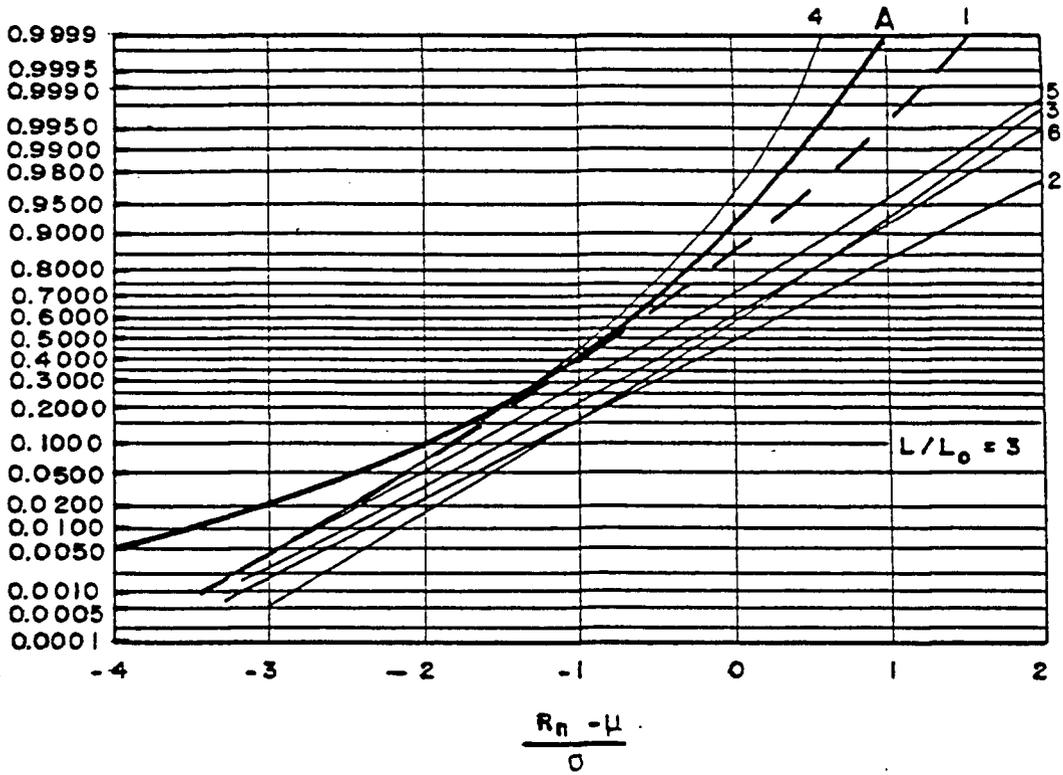


FIGURA 11

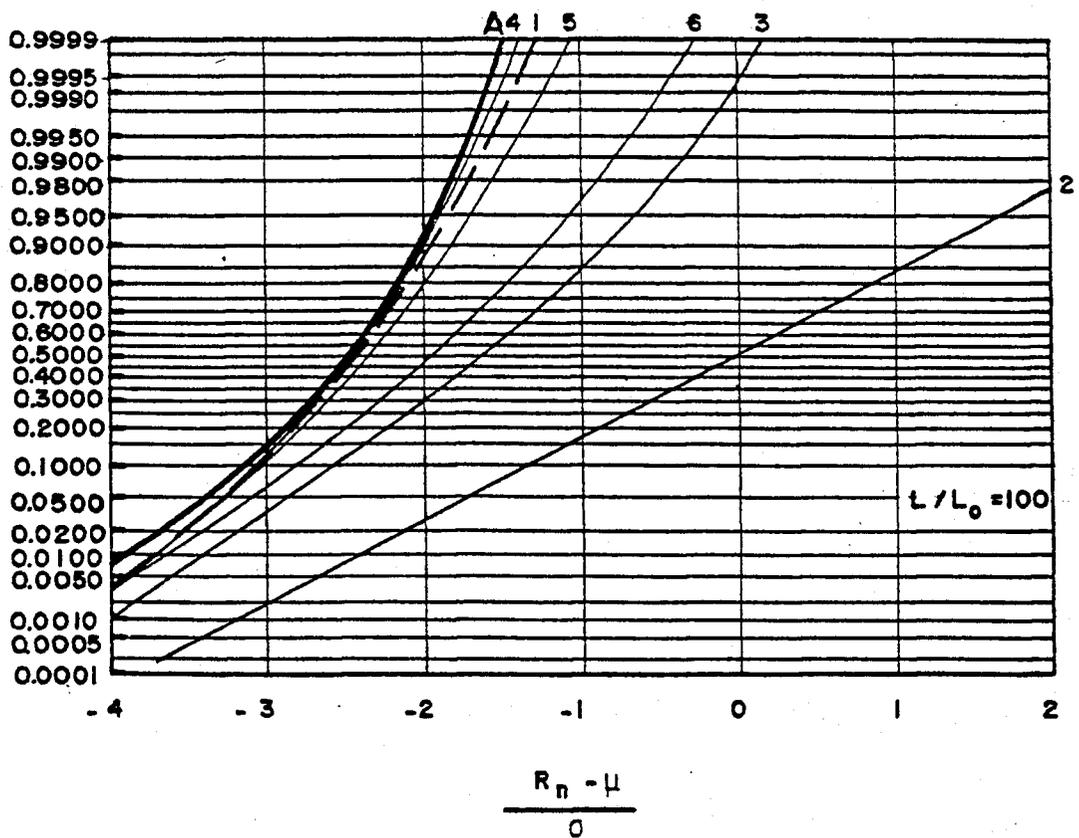
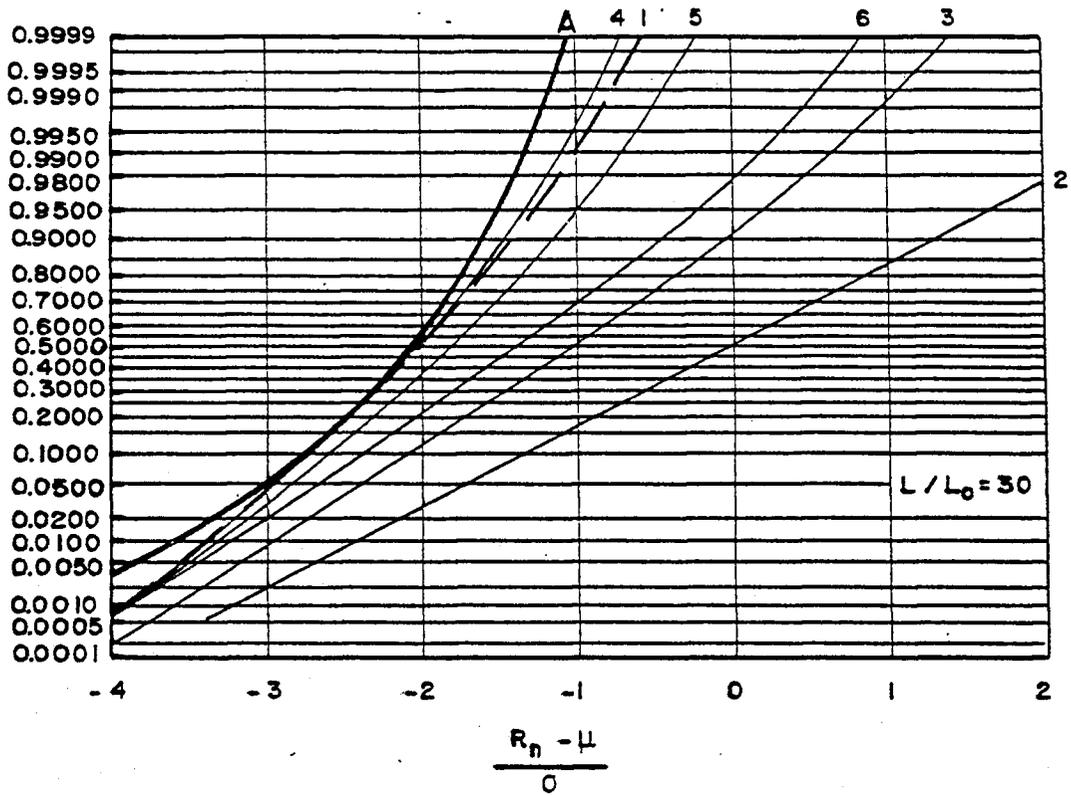


FIGURA 12

de  $p$  y  $q$ ) y de los parámetros (constantes  $b_i$  y  $c_j$ ). Ello sugiere una cuidadosa selección de  $p$  y  $q$  y correcta estimación de los parámetros a utilizar.

Sin embargo, para valores altos de  $L/L_0$ , la solución converge a la del caso de independencia, siempre - que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_n \cdot \log n = 0 \quad \{41\}$$

Esto sucede en los casos de los modelos 1,3,4,5 y 6, y no se verifica en el caso del modelo 2.

En el modelo 2, AR(1),  $\rho_n = \phi_1^n$  para  $n \geq 0$ . Como  $\phi_1 = 1$ , el límite {41} no tiende a cero. En el modelo de media móvil puro MA(2) sólo existe un número finito de valores de  $\rho_n$  distintos de cero, lo cual lleva a que el límite {41} sea nulo por serlo  $\gamma_n$ .

En los modelos 6 y 7, ARMA(1,1), resulta que  $\gamma_n = \phi_1 \gamma_{n-1}$ ,  $n \geq 2$ . Esto equivale a

$$\gamma_n = \phi_1 \gamma_{n-1} = \phi_1^2 \gamma_{n-2} = \phi_1^3 \gamma_{n-3} = \dots \quad \{42\}$$

Cuando  $n$  tiende a infinito es una potencia de  $n$  y el límite {41} es, por tanto, cero, ya que  $|\phi_1| < 1$ .

Por último, en el modelo 4, AR(2), la forma general de  $\rho_n = A_1 G_1^n + A_2 G_2^n$ , siendo  $G_1^{-1}$  y  $G_2^{-1}$  las raíces del polinomio característico

$$\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 = 0 \quad \{43\}$$

que deben estar fuera del círculo unidad por lo que  $|G_1| < 1$  y  $|G_2| < 1$  y el límite {41} es cero.

La función de distribución asintótica, cuando  $n \rightarrow \infty$ , es (Galambos, 1978)

$$\frac{F_{R_n - \mu}}{\sigma} (x) = 1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{x - c_n}{d_n}\right)\right\} \quad \{44\}$$

donde los valores de las constantes de normalización,  $c_n$  y  $d_n > 0$ , son

$$d_n = (2 \log n)^{-1/2} \quad \{45\}$$

y

$$c_n = -\frac{1}{d_n} + \frac{1}{2} d_n \{\log(\log n) + \log 4\pi\} \quad \{46\}$$

Las curvas correspondientes a la expresión {44} se muestran en las figuras 11 y 12, con trazo grueso y distintivo A.

## 2.3.4.- CONCLUSIONES

Las conclusiones más importantes de este apartado en el que se ha estudiado el caso de dependencia se resumen a continuación.

En primer lugar, diremos que la metodología de - Box-Jenkins para series temporales sirve como base para el estudio de la influencia de la longitud en la resistencia de elementos (cables o alambres) paralelos en puentes atirantados y obras de semejantes características (puentes colgantes, cubiertas suspendidas, estructuras off-shore ancladas, etc.), permitiendo una generalización del modelo de independencia.

Los ejemplos relacionados muestran que los resultados para modelos de dependencia pueden diferir ostensiblemente de los obtenidos hasta ahora mediante utilización de la hipótesis de independencia. Ello sugiere un contraste experimental de esta hipótesis mediante la metodología propuesta en este apartado 2.3.

La determinación de la función de distribución de la variable aleatoria  $R_n$  definida en {30} presenta graves dificultades analíticas (H.A. David) y aún no ha sido resuelta. Por ello, es necesario utilizar un método de simulación.

Es importante señalar que el método de independencia del apartado 2.2 es un caso particular del modelo anterior para  $p=0$  y  $q=0$ .

## CAPITULO III

INFLUENCIA DE LA LEY DE TEN-  
SIONES EN LA RESISTENCIA A  
FATIGA DE UN ELEMENTO

### 3.1.- INTRODUCCION

Fischer y Andrä/Saul estudian la influencia de la longitud de un tendón en la función de distribución de su resistencia a fatiga para el caso de ley de tracciones - uniforme, suponiendo que las resistencias de los diferentes elementos longitudinales son variables aleatorias independientes. En el capítulo 2 se discuten algunas hipótesis utilizadas por ellos y se extiende el modelo al caso de resistencias correladas, utilizando un modelo de Box-Jenkins y suponiendo también ley de tensiones uniforme.

Sin embargo en algunos casos prácticos la ley tensional no es uniforme. Así sucede, por ejemplo, en tendones de pretensado, en estructuras para las que el peso propio tiene una cierta importancia, en tendones cuya sollicitación se modifica por causas imprevistas (roturas locales, imperfecciones de construcción o fabricación,..), etc.

El objeto de este capítulo es extender el modelo anterior al caso de sollicitaciones no uniformes, con el propósito de analizar su influencia en la función de distribución de su resistencia.

### 3.2.- MODELO MATEMATICO

El modelo que se propone en este trabajo, en cuanto a las características resistentes, responde a las mismas hipótesis utilizadas en el apartado 2.3 del capítulo anterior.

HIPOTESIS 1.- Un tendón de longitud real  $L$  se supone - compuesto por  $n$  subelementos de longitud de referencia  $L_0$ .

$$L = n L_0 \quad \{1\}$$

HIPOTESIS 2.- La rotura del tendón de longitud  $L$  se produce al romper el primero de los subelementos de referencia que lo componen.

HIPOTESIS 3.- Las resistencias  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de los tendones de referencias son variables aleatorias que siguen un modelo ARMA(p,q) de Box-Jenkins.

$$z_t = b z_{t-1} + \dots + b_p z_{t-p} + a_t - c_1 a_{t-1} - \dots - c_q a_{t-q} \quad \{2\}$$

donde

$$z_t = r_t - \mu \quad \{3\}$$

siendo

$$\mu = E(r_t) \quad \{4\}$$

y  $a_i$ ,  $i \in z$  variables aleatorias independientes con distribución normal  $N(0, \sigma_a^2)$ .

HIPOTESIS 4.- La variación de la ley tensional obedece a la expresión (ver figura 1)

$$g(x,l) = x \cdot h(l); \quad 0 \leq l \leq L, \quad x \in R \quad \{5\}$$

donde  $l$  es la abscisa de un punto genérico del tendón,  $h(l)$  es una ley continua no necesariamente uniforme y  $x$  es un factor de proporcionalidad.

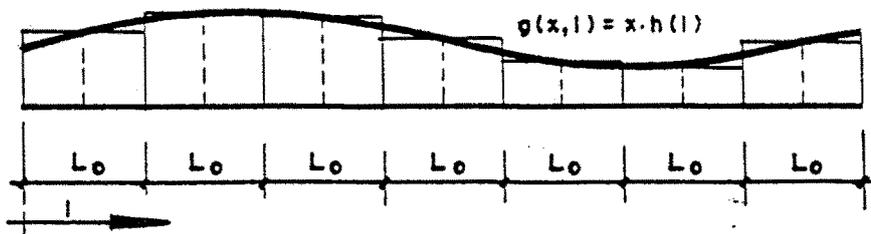


FIGURA 1

Para el caso de rotura estática  $g(x,l)$  es la ley tensional y  $x > 0$ , mientras que, para rotura por fatiga,  $g(x,l)$  representa el incremento de tensiones pudiendo -

tomar  $x$  valores positivos y negativos.

### 3.2.1.- CASO DE INDEPENDENCIA

En el caso de independencia, que corresponde al modelo ARMA(0,0), puede obtenerse la expresión analítica de la función de distribución del factor  $x$ , en rotura, como sigue.

Supongamos el tendón dividido en tramos de longitud  $\Delta L$ , tal como se muestra en la figura 1. Anteriormente hemos visto que, la probabilidad de que no se produzca la rotura en un tramo de esa longitud al someterlo a una tensión  $x$  es:

$$1 - F_{\Delta L}(x) = \{1 - F_{L_0}(x)\}^{\Delta L/L_0} \quad \{6\}$$

y, por tanto, la probabilidad de que no se produzca la rotura de un tendón de longitud  $L$ , al someterlo a la ley de tensiones (5), resulta:

$$1 - F_L(x) = \prod_{l=\frac{\Delta L}{2}}^{L-\frac{\Delta L}{2}} \{1 - F_{\Delta L}(x h(l))\} = \prod_{l=\frac{\Delta L}{2}}^{L-\frac{\Delta L}{2}} \{1 - F_{L_0}(x h(l))\}^{\frac{\Delta L}{L_0}} \quad \{7\}$$

Tomando logaritmos queda:

$$\text{Log}\{1-F_L(x)\} = \sum_{l=\frac{\Delta l}{2}}^{L-\frac{\Delta l}{2}} \text{Log}\{1-F_{L_0}(x \cdot h(l))\} \quad \{8\}$$

Finalmente, pasando al límite, cuando  $\Delta l \rightarrow 0$ , resulta:

$$\text{Log}\{1-F_L(x)\} = \int_0^L \frac{\text{Log}\{1-F_{L_0}(x \cdot h(l))\}}{L_0} dl \quad \{9\}$$

y, despejando  $F_L(x)$ , resulta:

$$\begin{aligned} F_L(x) &= 1 - \exp\left\{\int_0^L \frac{\text{Log}\{1-F_{L_0}(x \cdot h(l))\}}{L_0} dl\right\} = \\ &= 1 - \exp\left\{\int_0^L \frac{\text{Log}\{1-F_{N(0,1)}\left(\frac{xh(l)-\mu}{\sigma}\right)\}}{L_0} dl\right\} = \\ &= 1 - \exp\left\{\int_0^L \frac{\text{Log}\{1-F_{N(0,1)}(x^*h(l)-\mu^*)\}}{L_0} dl\right\} \end{aligned} \quad \{10\}$$

donde

$$\begin{aligned} x^* &= x/\sigma \\ \mu^* &= \mu/\sigma \end{aligned} \quad \{11\}$$

Para el caso particular de carga uniforme, es de-

cir, si  $h(1) = 1$  se tiene

$$F_L(x) = 1 - \{1 - F_{L_0}(x)\}^{L/L_0} \quad \{12\}$$

que es precisamente la expresión dada en el apartado 2.2.

### 3.2.2.- CASO DE DEPENDENCIA

En el caso de dependencia el desarrollo analítico es muy complicado por lo que resulta obligado el uso de técnicas de simulación. Para ello debe tenerse en cuenta que el factor de proporcionalidad vale:

$$x = \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{r_i}{h_i(i-1/2)L_0} \right\} \quad \{13\}$$

donde  $r_1, r_2, \dots, r_n$  son las variables aleatorias a las que se hace referencia en la hipótesis tercera.

La expresión {13} implica además que la ley de tensiones se ha discretizado mediante funciones constantes a trozos de longitud la de referencia  $L_0$  (ver figura 1).

De {13} y {3} resulta:

$$x = \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{z_i + \mu}{h\left\{\left(i + \frac{1}{2}\right)L_0\right\}} \right\} \quad \{14\}$$

y, dividiendo por  $\sigma$ , se obtiene:

$$x^* = \frac{x}{\sigma} = \min_{i=1,2,\dots,n} \left\{ \frac{z_i^* + \mu^*}{h\left\{\left(i + \frac{1}{2}\right)L_0\right\}} \right\} \quad \{15\}$$

donde

$$z_i^* = \frac{z_i}{\sigma} ; \quad i \in Z$$

es una variable aleatoria  $N(0,1)$ .

La expresión {14} es la que se utiliza directamente en la simulación.

### 3.3.- ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DE LA LEY TENSIONAL

Con objeto de analizar la influencia de la ley tensional en la resistencia de un tendón, se ha aplicado el modelo anterior a los casos siguientes:

CASO 1.- Modelo de independencia

$$z_t = a_t$$

CASO 2.- Modelo de dependencia

$$z_t = 0.50z_{t-1} + 0.25z_{t-2} + a_t$$

Para ambos casos se han supuesto leyes de tensiones trapezoidales, como las de la figura 2, es decir:

$$h(l) = 1-e + \frac{2e \cdot l}{L}$$

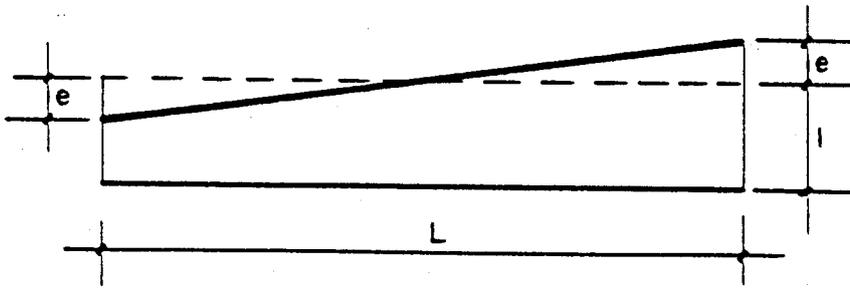


FIGURA 2

Los resultados obtenidos, para valores de  $e = 0$ ,  $0.2$ ,  $0.5$  y diferentes relaciones  $L/L_0$ , tomando un valor  $\mu^* = 21.65$ , obtenido del ejemplo de aplicación del apartado 2.2.3, se muestran en las figuras 3 y 4, para los casos 1 y 2, respectivamente.

En ellos puede comprobarse que las variaciones, con respecto a la ley uniforme, de la carga promedio  $x$ , que se puede alcanzar en las situaciones analizadas, para una probabilidad  $0.05$ , son del orden de 5 desviaciones típicas. Por otra parte, esta influencia de la ley

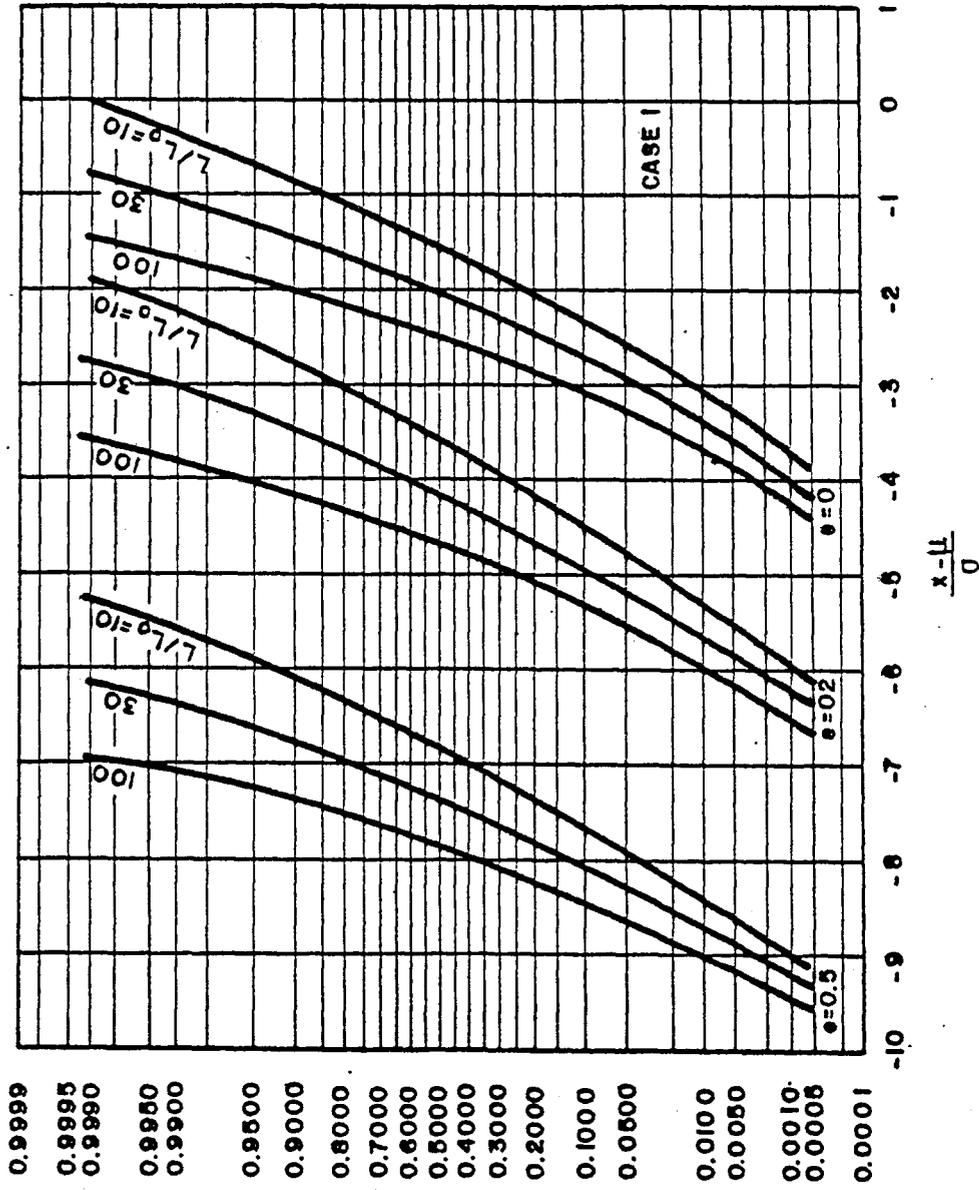


FIGURA 3

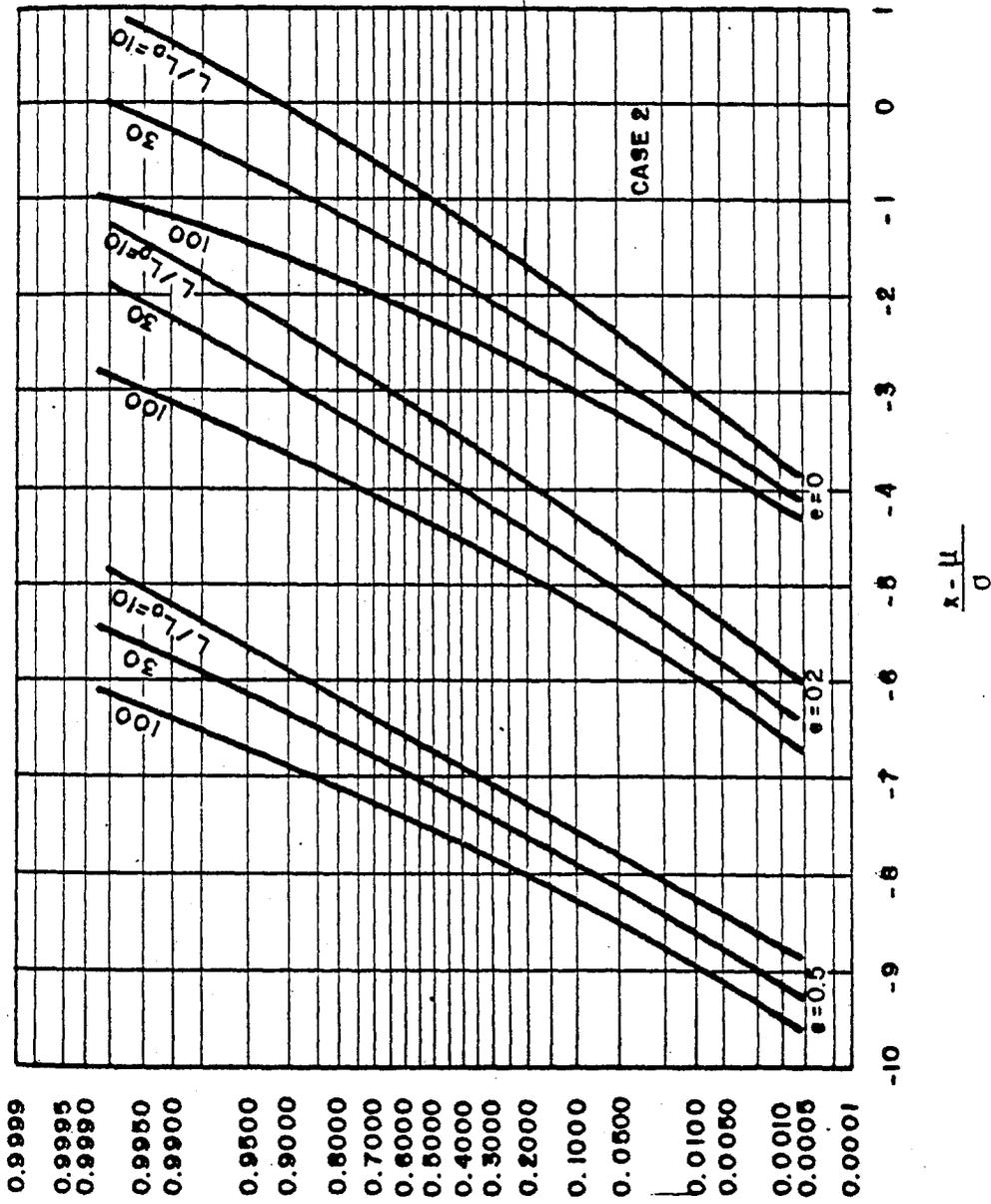


FIGURA 4

de cargas en el valor  $x$  depende del coeficiente de varia  
ción ( $V = 1/\mu^*$ ).

### 3.4.- CONCLUSIONES

Las conclusiones más importantes del capítulo se  
resumen a continuación.

El modelo de Box-Jenkins permite analizar la in-  
fluencia de la ley de tensiones en la resistencia de un -  
tendón. Para el caso de independencia, la función de dis  
tribución de dicha resistencia se da analíticamente, mientr  
as que para el caso de dependencia, hay que utilizar -  
técnicas de simulación.

El efecto de la ley de tensiones en la resistencia  
puede tener suficiente importancia como para no poder des  
preciarse. Los ejemplos presentados así lo demuestran.

## CAPITULO IV

ANALISIS DE LA ROTURA PROGRE-

SIVA ESTATICA DE UN TENDON

FORMADO POR ELEMENTOS PARA-

LE LOS

#### 4.1.- INTRODUCCION

En la actualidad un gran número de estructuras utilizan tendones compuestos por elementos paralelos como principal elemento de soporte. La presencia de varios elementos en el tendón debe ser considerada en el cálculo de su resistencia a fatiga.

El enorme coste de los ensayos de tendones múltiples y la necesidad de equipos de ensayo de gran capacidad lleva al desarrollo de modelos que permitan estimar la resistencia de tendones múltiples de longitud  $L$  a partir de muestras de elementos simples de longitud de ensayo  $L_e$  reducida.

El objeto de este capítulo es la obtención de la función de distribución de la resistencia para un tendón múltiple a partir de la de un elemento.

#### 4.2.- MODELO MATEMATICO

El modelo desarrollado en el presente capítulo está basado en las siguientes hipótesis:

HIPOTESIS 1.- El tendón está constituido por  $m$  elementos paralelos de longitud  $L$ .

HIPOTESIS 2.- Un elemento se considera compuesto de  $n$  subelementos de longitud  $L_0$  - (longitud de referencia).

HIPOTESIS 3.- La rotura del elemento se asocia a la primera rotura que aparece entre los  $n$  subelementos, esto es, a la mínima resistencia.

HIPOTESIS 4.- Las resistencias  $r_1, r_2, \dots, r_n$  de los subelementos son variables aleatorias que siguen un modelo ARMA(p,q) de Box-Jenkins.

$$z_t = b_1 z_{t-1} + \dots + b_p z_{t-p} + a_t - c_1 a_{t-1} - \dots - c_q a_{t-q} \quad \{1\}$$

donde:

$$z_t = r_t - \mu ; \quad \mu = E(r_t) \quad \{2\}$$

y  $a_i (i \in z)$  son variables aleatorias independientes con distribución normal  $N(0, \sigma_a^2)$ .

HIPOTESIS 5.- El material es elástico ideal con rotura frágil sin elongación plástica.

Sean  $X_1, X_2, \dots, X_m$  las resistencias de los  $m$  elementos ordenados de modo creciente.

Mientras la fuerza total  $P$ , a la que está sometido el tendón, aumenta y no se produce el fallo en los elementos, la fuerza que soporta cada uno de ellos se supone igual a  $P/m$ . Tan pronto como  $P$  alcanza el valor de  $m X_1$ , se produce la rotura del primer elemento. Como consecuencia, se produce una redistribución de las fuerzas, de modo que cada uno de los elementos restantes soporta una carga igual a  $P/(m-1)$ . Si  $X_2$  es menor que este valor romperá el segundo elemento sin que aumente  $P$ , y si no,  $P$  puede aumentar hasta el valor  $(m-1)X_2$  para el que se produce la rotura del segundo elemento. Después hay una nueva redistribución de las fuerzas entre los elementos restantes, soportando cada uno  $P/(m-2)$ . El proceso continúa análogamente a como se ha descrito arriba.

Por lo tanto, la resistencia total viene dada por

$R_m$ ,

$$R_m = m \cdot R_m^* = \text{máx} (m X_1, (m-1)X_2, (m-2)X_3, \dots, X_m) \quad \{3\}$$

donde  $R_m^*$  es la resistencia unitaria, esto es, por elemento.

La función de distribución correspondiente toma la forma

$$F_{R_m^*}(u) = \text{Prob}(R_m^* \leq u) = \text{Prob}\left\{\max\left(X_1, \frac{m-1}{m} X_2, \frac{m-2}{m} X_3, \dots, \frac{1}{m} X_m\right) \leq u\right\} \quad \{4\}$$

A continuación, se determina la función de distribución de  $R_m^*$  suponiendo conocida la función de distribución de un elemento de longitud de referencia  $L_0$ .

#### 4.2.1.- CASO DE INDEPENDENCIA

En el caso de independencia, es decir, cuando los parámetros del modelo ARMA son ambos iguales a cero, la función de distribución  $F(x)$  de la resistencias de un elemento de longitud  $L$  es, según se ha visto en capítulos anteriores,

$$F(x) = 1 - (1 - F_{N(\mu, \sigma^2)}(x))^n = 1 - (1 - F_{N(0,1)}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right))^n \quad \{5\}$$

La función de densidad conjunta del estadístico de orden  $m$   $(X_1, X_2, \dots, X_m)$  viene dada por:

$$g(x_1, x_2, \dots, x_m) = \begin{cases} m! \prod_{i=1}^m f(x_i) & \text{si } x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \{6\}$$

donde  $f(x)$  es la función de densidad de la resistencia de

un elemento. Por lo tanto, de {4}, tenemos:

$$F_{R_m^*}(u) = \int_A m! \prod_{i=1}^m f(x_i) dx \quad \{7\}$$

donde  $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$  y  $A$ , de acuerdo con {4} y {6}, es la región definida por

$$\begin{aligned} x_1 &\leq u \\ x_2 &\leq \mu/(m-1) \\ &\vdots \\ &x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_m \\ &\vdots \\ x_m &\leq \mu u \end{aligned} \quad \{8\}$$

Consecuentemente, la expresión {7} se convierte en:

$$F_{R_m^*}(u) = \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \int_{x_2}^{\frac{\mu}{m-2}} \dots \int_{x_{m-2}}^{\frac{\mu}{2}} \int_{x_{m-1}}^{\mu} m! \prod_{i=1}^m f(x_i) dx_m dx_{m-1} \dots dx_1 \quad \{9\}$$

Vamos a ver qué expresión tiene  $F_{R_m^*}(u)$ .

$$\begin{aligned} F_{R_m^*}(u) &= \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \dots \int_{x_{m-2}}^{\frac{\mu}{2}} m! \left\{ \prod_{i=1}^{m+1} f(x_i) (F(\mu) - F(x_{m-1})) \right\} dx_{m-1} \dots \\ &\dots dx_1 = \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \dots \int_{x_{m-3}}^{\frac{\mu}{3}} m! \left\{ \prod_{i=1}^{m-2} f(x_i) \right\} \left\{ F\left(\frac{\mu}{2}\right) - F(x_{m-2}) \right\} F(\mu) - \\ &- \frac{F^2\left(\frac{\mu}{2}\right)}{2} + \frac{F^2(x_{m-2})}{2} \Big\} dx_{m-2} \dots dx_1 = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \dots \int_{x_{m-4}}^{\frac{\mu}{4}} m! \left\{ \prod_{i=1}^{m-3} f(x_i) \right\} \left\{ (F(\mu) F(\frac{\mu}{2})) - \right. \\
 &\quad - \frac{F^2(\frac{\mu}{2})}{2} (F(\frac{\mu}{3}) - F(x_{m-3})) - \frac{F(\mu)}{2} (F^2(\frac{\mu}{3}) - \\
 &\quad - F^2(x_{m-3})) - \frac{F^3(\frac{\mu}{3})}{3!} + \left. \frac{F^3(x_{m-3})}{3!} \right\} dx_{m-3} \dots dx_1 = \\
 &= \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \dots \int_{x_{m-4}}^{\frac{\mu}{4}} m! \left\{ \prod_{i=1}^{m-3} f(x_i) \right\} \left\{ (F(\mu) F(\frac{\mu}{2}) F(\frac{\mu}{3}) - \right. \\
 &\quad - \frac{F^2(\frac{\mu}{2}) F(\frac{\mu}{3})}{2!} - \frac{F(\mu) F^2(\frac{\mu}{3})}{2} - \frac{F^3(\frac{\mu}{3})}{3!} ) - \\
 &\quad - (F(\mu) F(\frac{\mu}{2}) - \frac{F^2(\frac{\mu}{2})}{2}) F(x_{m-3}) + \frac{F(\mu)}{2} F^2(x_{m-3}) + \\
 &\quad + \left. \frac{1}{3!} F^3(x_{m-3}) \right\} dx_{m-3} \dots dx_1 \tag{10}
 \end{aligned}$$

Si seguimos integrando vemos que, en el paso  $k$ -ésimo,

$$\begin{aligned}
 F_{R_m}^*(u) &= \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \dots \int_{x_{m-k}}^{\frac{\mu}{k}} m! \left\{ \prod_{i=1}^{m-k+1} f(x_i) \right\} \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} C_j^k F^j(x_{m-k+1}) \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot dx_{m-k+1} \dots dx_1 \tag{11}
 \end{aligned}$$

El siguiente paso nos daría

$$F_{R_m^*}(u) = \int_{-\infty}^u \int_{x_1}^{\frac{\mu}{m-1}} \dots \int_{x_{m-k+1}}^{\frac{\mu}{k+1}} m! \left\{ \prod_{i=1}^{m-k} f(x_i) \right\} \\ \left\{ \sum_{j=0}^{k-1} C_j^k \frac{F^{j+1}(\frac{\mu}{k}) - F^{j+1}(x_{m-k})}{j+1} \right\} \cdot dx_{m-k} \dots dx_1 \quad \{12\}$$

Igualando la función subintegral de la expresión {12} a la de la expresión {11}, para  $k = k+1$ , resulta que:

$$\sum_{j=1}^{k-1} C_j^k \frac{F^{j+1}(\frac{\mu}{k})}{j+1} - \sum_{j=1}^k C_{j-1}^k \frac{F^j(x_{m-k})}{j} \quad \{13\}$$

ha de ser igual a

$$\sum_{j=0}^k C_j^{k+1} F^j(x_{m-k}) \quad \{14\}$$

De aquí se obtiene que

$$C_0^{k+1} = k \cdot \sum_{j=0}^{k-1} C_j^k \frac{F^{j+1}(\frac{\mu}{k})}{j+1} \quad \{15\}$$

y

$$C_j^{k+1} = -k \frac{C_{j-1}^k}{j} \quad j = 1, \dots, k \quad \{16\}$$

El factor  $k$  existente en la expresión {15} y {16} es debido a que se ha introducido el factorial de  $m$ , de la expresión {9}, dentro de los coeficientes  $C_j^{k+1}$ .

Debemos señalar que el valor  $C_0^1$  es igual a 1, siempre.

A nosotros nos interesa llegar al final, es decir, hacer  $k = n$ .

$$F_{R_n^*}(u) = \sum_{j=0}^n C_j^{m+1} \cdot F^j(-\infty) = C_0^{m+1} \quad \{17\}$$

La expresión anterior es la expresión del resultado que se buscaba.

#### 4.2.2.- CASO DE DEPENDENCIA

El tratamiento analítico, en el caso de dependencia, es inabordable, por lo que se debe recurrir a técnicas de simulación. Dicho esto, debemos tener en cuenta que las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  vienen definidas por

$$X_i = \min(r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \{18\}$$

donde  $r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i$  son las resistencias de los  $n$  subele

mentos del elemento  $i$ -ésimo, los cuales deben satisfacer la ecuación {2}, esto es,

$$r_j^i = z_j^i + \mu ; \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \{19\}$$

Como resultado de la hipótesis 4, resulta:

$$X_i = \min(r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i) = \mu + \min(z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i) \{20\}$$

y llamando

$$X_i^i = \min(z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \{21\}$$

se obtiene que

$$R_M^* = \max\left\{ (X_1^i + \mu), \frac{m-1}{m}(X_2^i + \mu), \frac{m-2}{2}(X_3^i + \mu), \dots, \frac{1}{m}(X_m^i + \mu) \right\} \{22\}$$

#### 4.3.- ANALISIS DE LA INFLUENCIA DEL NUMERO DE ELEMENTOS

Para ilustrar la influencia del número de elementos en la función de distribución de la resistencia, para  $n=1$  se ha aplicado el modelo anterior mediante simulación de los casos dados en la tabla 1.

Como coeficiente de variación de la resistencia es tática se ha cogido un valor de 0.046, arbitrario. Los resultados de los casos estudiados vienen dados en las figuras 1 y 2, mientras que la figura 3 muestra los resultados obtenidos por Gabriel, para el caso de independencia suponiendo un material elasto-plástico ideal con elongación ilimitada.

TABLA 1

CASO	p	q	$b_1$	$b_2$	$n = \frac{L}{L_0}$	m
1	0	0	-	-	1	1,5,10,20,50
2	2	0	0.5	0.25	1	1,5,10,20,50

El caso 1 es el modelo de independencia y el caso 2 es un modelo de dependencia ARMA(2,0).

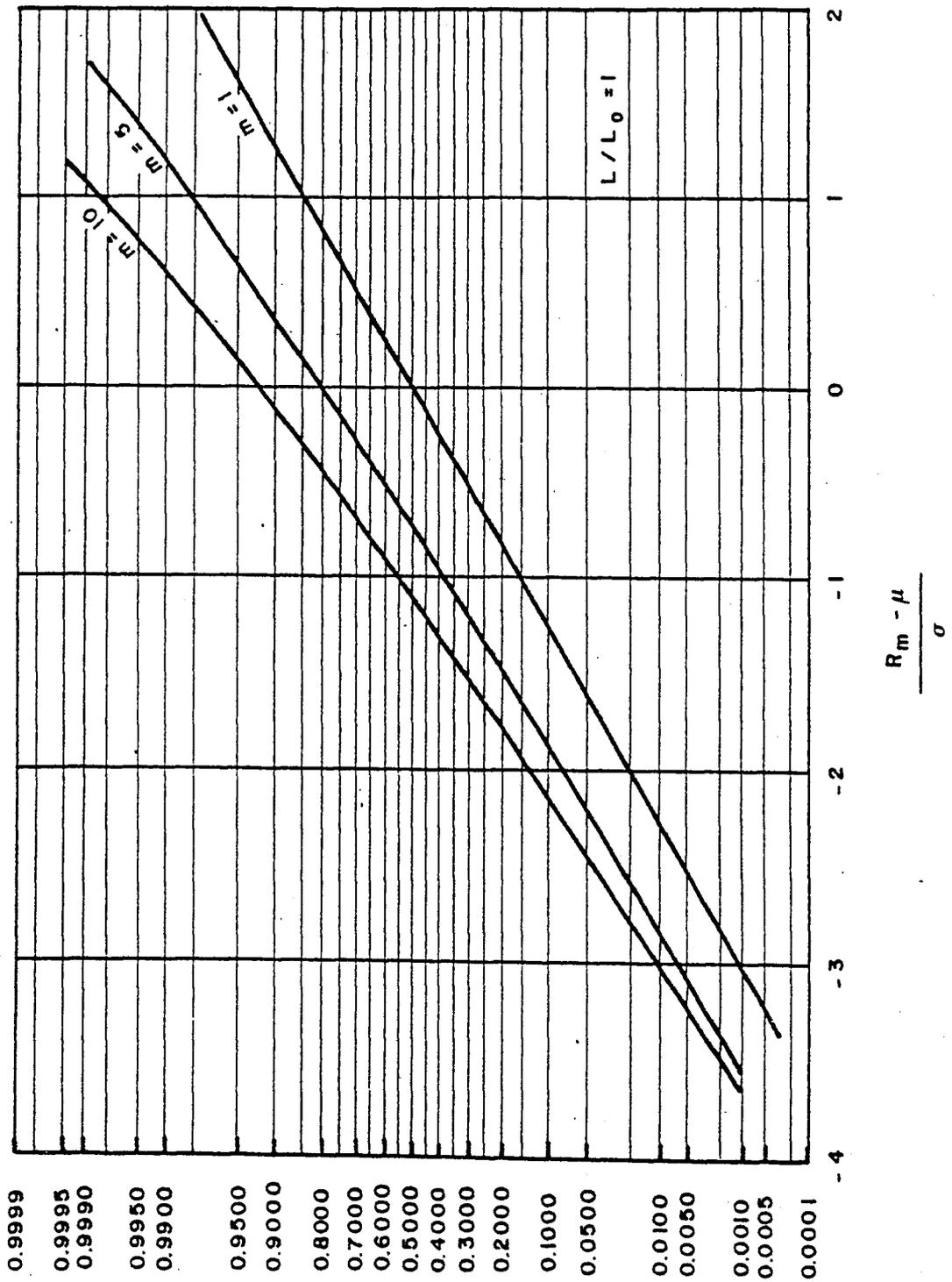


FIGURA 1

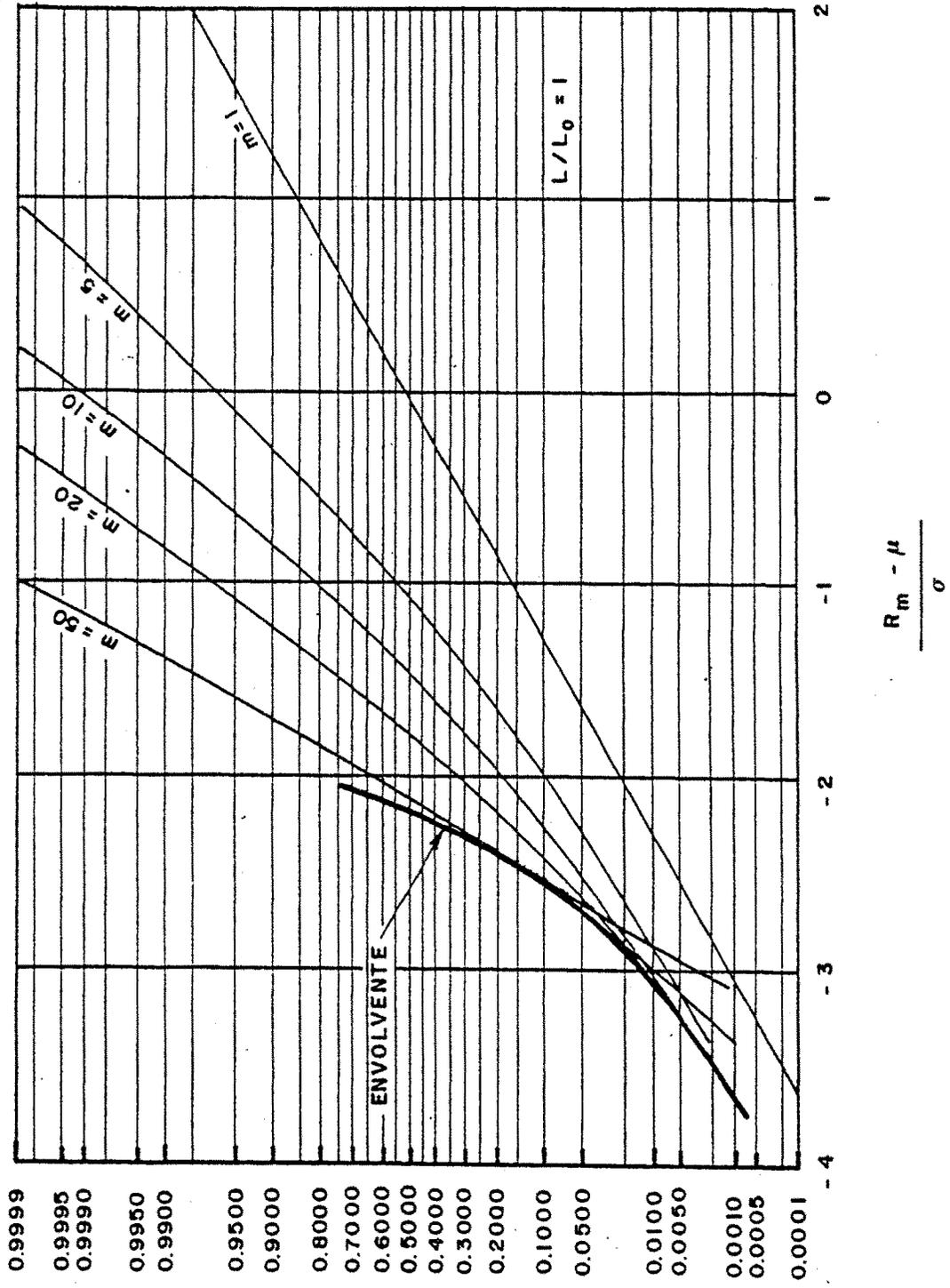


FIGURA 2

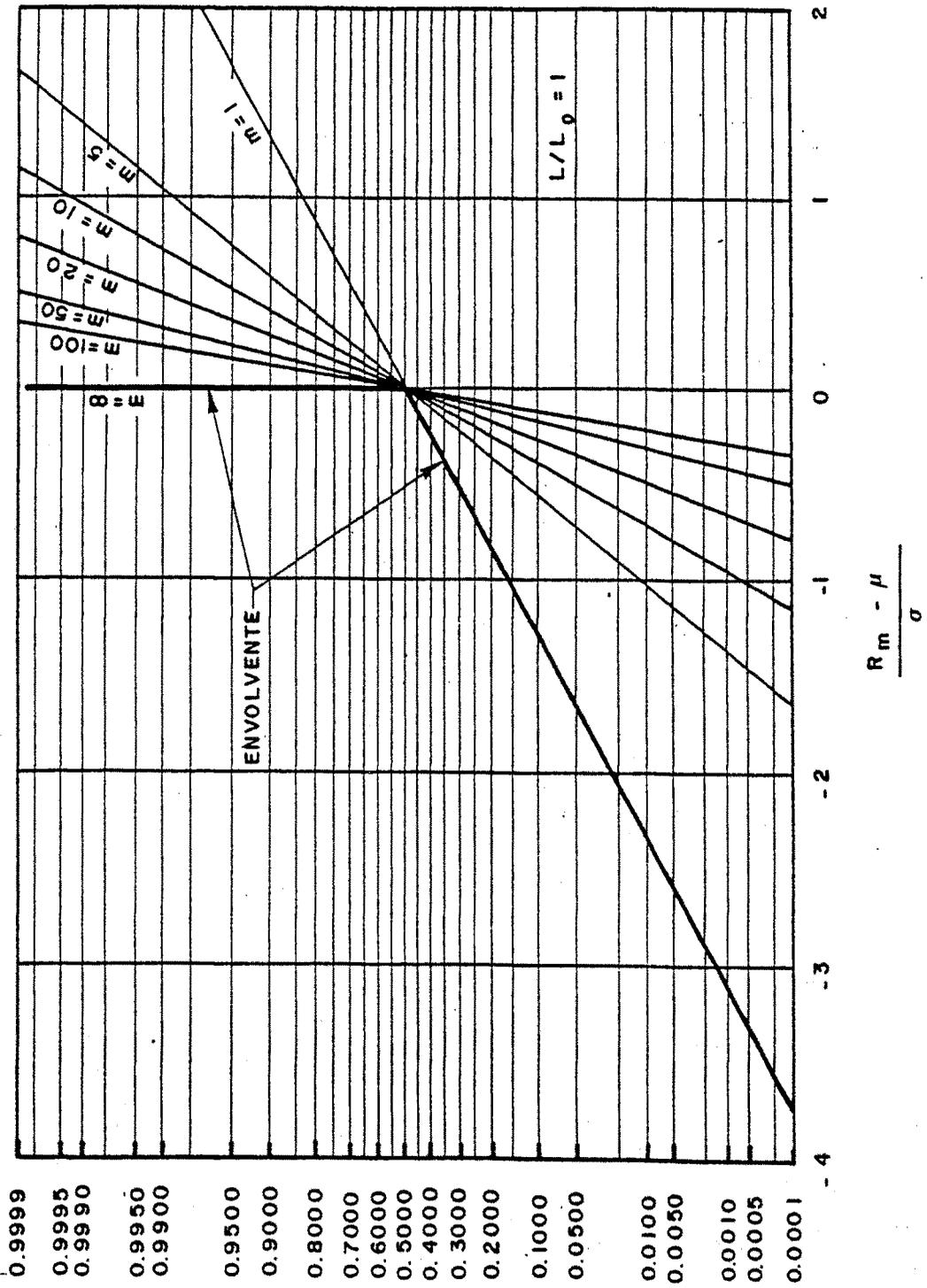


FIGURA 3

# CAPITULO V

ANALISIS DE LA ROTURA PROGRESIVA

A FATIGA DE UN TENDON FORMADO

POR ELEMENTOS PARALELOS

## 5.1.- INTRODUCCION

En la actualidad los grandes tendones se componen de gran cantidad de elementos paralelos (alambres o cables de 7 alambres) llegando a longitudes de hasta varios cientos de metros y siendo la solución favorita para el soporte de puentes colgantes y estructuras similares.

La literatura especializada (Hajdin, Andrä) presenta la resistencia a fatiga del tendón como el criterio que debe regir para el diseño de tales estructuras. Es por ello, por lo que resulta esencial el conocimiento de su comportamiento estadístico bajo fatiga.

En este capítulo se obtiene la función de distribución del número de ciclos hasta rotura en la zona de vida finita de la curva de Wöhler (curva S-N) de un tendón múltiple a partir de la función de distribución del número de ciclos hasta rotura para un elemento de longitud de referencia  $L_0$  que sigue una distribución logarítmico-normal. Se considera una hipótesis de acumulación de daño para ver el progresivo debilitamiento de la sección como resultado de las roturas sucesivas de los elementos simples.

También se estudia en este capítulo la función de

distribución del incremento de tensión para la zona de endurancia de la curva S-N.

## 5.2.- MODELO MATEMATICO

El presente modelo se basa en las hipótesis que se exponen a continuación:

HIPOTESIS 1.- El tendón está compuesto por  $m$  elementos paralelos (cables o alambres), de igual longitud  $L$ .

HIPOTESIS 2.- Se considera que la rotura de los elementos se produce debido a la fatiga, por lo que se excluye la rotura estática. Esto implica que los incrementos de la variación de tensión han de ser pequeños respecto a la resistencia estática para que rompa cada elemento o un número suficientemente grande de elementos en el tendón.

HIPOTESIS 3.- Cada elemento, de longitud real  $L$ , se supone compuesto de  $n$  subelementos de longitud de referencia  $L_0$

$$L = n L_0 \quad \{1\}$$

HIPOTESIS 4.- La rotura de un elemento se asocia con la primera rotura que aparece en los subelementos, esto es, con el mínimo número de ciclos hasta rotura - por fatiga.

HIPOTESIS 5.- Los logaritmos del número de ciclos hasta rotura  $r_1, r_2, \dots, r_n$  para los diferentes subelementos de longitud  $L_0$ , cuando están sometidos a una variación de tensiones  $\Delta\sigma$  dada, son - variables aleatorias que siguen un modelo estacionario ARMA(p,q) de Box-Jenkins

$$z_t = b_1 z_{t-1} + \dots + b_p z_{t-p} + a_t - c_1 a_{t-1} - \dots - c_q a_{t-q} \quad \{2\}$$

donde

$$z_t = r_t - \mu ; \quad \mu = E(t) \quad \{3\}$$

y  $a_i$  son variables aleatorias independientes con distribución normal  $N(0, \sigma_a^2)$ . Esto implica que las varia

bles aleatorias  $z_t$  son normales  $N(0, \sigma_z^2)$ , estando  $\sigma_t$  relacionada con  $\sigma_a$ .

HIPOTESIS 6.- Como una información básica sobre el material, se supone conocida la curva S-N para un subelemento de longitud de referencia  $L_0$ . Esta curva viene definida por la media..

$$\mu_{\log N} = g(\Delta\sigma) \quad \{4\}$$

y por la desviación típica

$$\sigma_{\log N} = h(\Delta\sigma) \quad \{5\}$$

como funciones del incremento de tensión  $\Delta\sigma$ .

HIPOTESIS 7.- Como consecuencia de la rotura sucesiva de los elementos, la variación de tensión  $\Delta\sigma$  aumenta progresivamente, siempre que la carga total aplicada  $P$  permanezca constante (control de cargas), como ocurre en los tendones de las estructuras reales. Puesto que la curva S-N corresponde a ensayos de un sólo paso se necesita una

hipótesis de acumulación de daño.

En el capítulo se estudiarán dos hipótesis diferentes de acumulación de daño. Se supone que el daño acumulado en los elementos se transfiere al nuevo nivel de tensiones de tal modo que la probabilidad de rotura o el número de Miner permanezcan inalterados.

HIPOTESIS 8.- Los números de ciclos hasta rotura, para los diferentes elementos se suponen variables aleatorias independientes o cuasi independientes.

HIPOTESIS 9.- La función de autocorrelación  $\rho_n$ , del proceso  $z_t$ , satisface la siguiente relación:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n \log n) = 0 \quad \{6\}$$

HIPOTESIS 10.- Se desprecia el efecto dinámico debido a aumento momentáneo de la tensión en el resto de los elementos, cuando uno de ellos falla.

HIPOTESIS 11.- Se considera que se alcanza la resistencia total del tendón cuando falla el elemento k-ésimo.

La figura 1 es una representación esquemática de un sistema con  $m$  elementos de longitud  $L$  sometido a un nivel de tensiones  $\Delta\sigma$ , y el número de ciclos hasta rotura  $N_{(1)}$ ,  $N_{(2)}$ , ...,  $N_{(m)}$  ordenados de modo creciente.

Mientras aumenta el número de ciclos y no se produce la rotura de ningún elemento, el nivel de tensión en cada elemento es  $\Delta\sigma$ . Tan pronto como el número de ciclos alcanza el valor  $N_{(1)}$  falla el primer elemento y se produce una redistribución de tensiones en el resto de los elementos, de modo que el nuevo nivel de tensiones  $\Delta\sigma_1(\frac{m}{m-1})$ . De acuerdo con la hipótesis de acumulación de daño el proceso continúa como si el tendón hubiera estado sometido desde el principio a un nivel de tensiones  $\Delta\sigma_1(\frac{m}{m-1})$  durante un número de ciclos equivalente (ver figura 2). Este proceso se repite hasta que se alcanza un nivel de tensiones  $\Delta\sigma_1(\frac{m}{m-k+1})$ , correspondiente a la rotura del k-ésimo elemento.

De acuerdo con la hipótesis 7, si la probabilidad de rotura permanece inalterada, al pasar del nivel de tensiones  $\Delta\sigma_j$  al nivel  $\Delta\sigma_1$ , la conversión del número de ciclos viene dada por (ver figura 2).

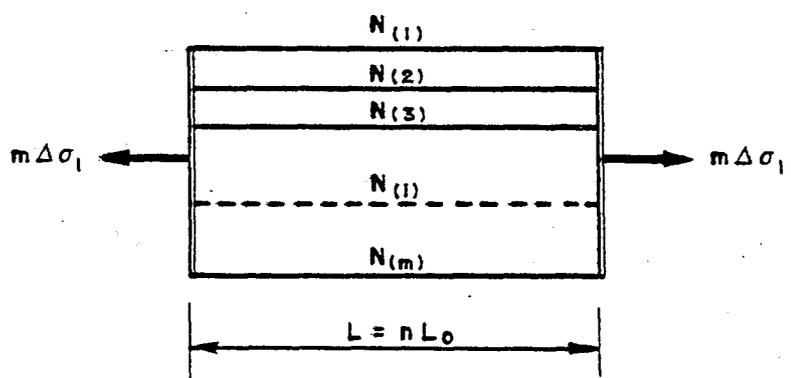


FIGURA 1

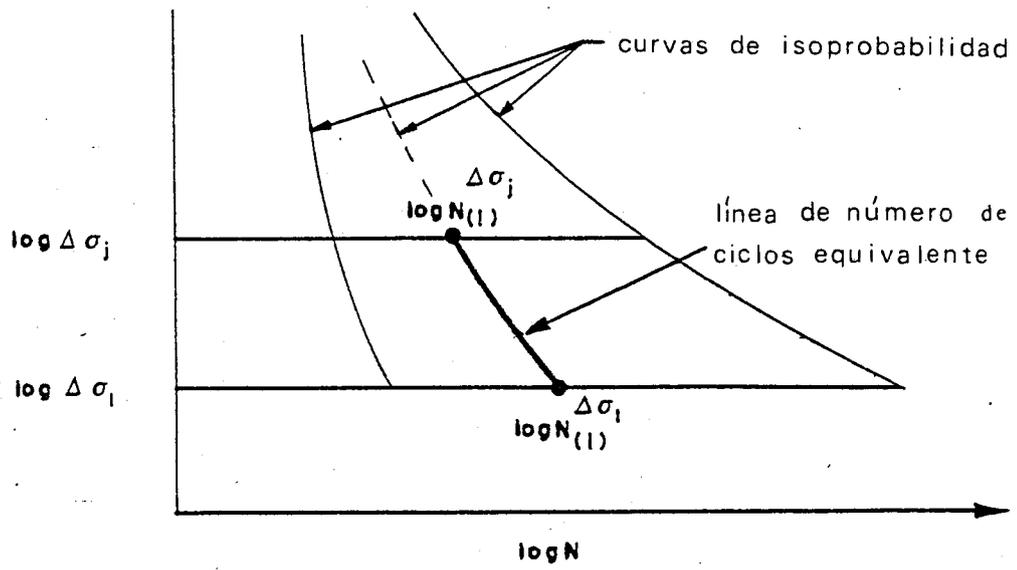


FIGURA 2

$$\frac{\log N_{(1)}^{\Delta\sigma_1} - g(\Delta\sigma_1)}{h(\Delta\sigma_1)} = \frac{\log N_{(1)}^{\Delta\sigma_j} - g(\Delta\sigma_j)}{h(\Delta\sigma_j)} \quad \{7\}$$

donde las parejas  $(N_{(1)}^{\Delta\sigma_1}, \Delta\sigma_1)$  y  $(N_{(1)}^{\Delta\sigma_j}, \Delta\sigma_j)$  corresponden al mismo nivel de daño,  $l=1,2,\dots,m$ , y

$$\Delta\sigma_j = \frac{m}{m-j+1} \Delta\sigma_1 \quad \{8\}$$

El número de ciclos asociado al debilitamiento admisible del tendón viene dado por (ver figura 3).

$$N_{f(k)} = N_{(1)} + \sum_{j=2}^k (N_{(j)}^{\Delta\sigma_j} - N_{(j-1)}^{\Delta\sigma_j}) \quad \{9\}$$

De la expresión {7} se tiene que, para  $l=j$ ,

$$\log N_{(j)}^{\Delta\sigma_j} = \frac{h(\Delta\sigma_j)}{h(\Delta\sigma_1)} \{ \log N_{(j)}^{\Delta\sigma_1} - g(\Delta\sigma_1) \} + g(\Delta\sigma_j) \quad \{10\}$$

que al tomar antilogaritmos resulta

$$N_{(j)}^{\Delta\sigma_j} = \{ N_{(j)}^{\Delta\sigma_1} \}^{\frac{h(\Delta\sigma_j)}{h(\Delta\sigma_1)}} \cdot \exp \left\{ -g(\Delta\sigma_1) \frac{h(\Delta\sigma_j)}{h(\Delta\sigma_1)} + g(\Delta\sigma_j) \right\} \quad \{11\}$$

Llamando

$$B_j = \frac{h(\Delta\sigma_j)}{h(\Delta\sigma_1)} \quad \{12\}$$

$$A_j = \exp\{g(\Delta\sigma_j) - B_j \cdot g(\Delta\sigma_1)\} \quad \{13\}$$

la expresión {8} se convierte en

$$N_{f(k)}^* = N_{(1)} + \sum_{j=2}^k A_j \{(N_{ij})^{B_j} - (N_{(j-1)})^{B_{j-1}}\} \quad \{14\}$$

Si, por el contrario, al pasar del nivel de tensiones  $\Delta\sigma_j$  al nivel  $\Delta\sigma_1$  el número de Miner permanece inalterado la conversión del número de ciclos viene dada por:

$$\frac{N_{(1)}^{\Delta\sigma_1}}{\exp(g(\Delta\sigma_1))} = \frac{N_{(1)}^{\Delta\sigma_j}}{\exp(g(\Delta\sigma_j))} ; l = 1, 2, \dots, m \quad \{15\}$$

que, para  $l = j$ , resulta:

$$N_{(j)}^{\Delta\sigma_j} = \{\exp(g(\Delta\sigma_j)) - \exp(g(\Delta\sigma_1))\} \cdot N_{(j)}^{\Delta\sigma_1} \quad \{16\}$$

Por lo tanto, llamando  $C_j$  a

$$C_j = \exp(g(\Delta\sigma_j)) - \exp(g(\Delta\sigma_1)), \quad \{17\}$$

la expresión {9} queda de la forma

$$N_{f(k)}^{**} = N_{(1)} + \sum_{j=2}^k C_j (N_{(j)} - N_{(j-1)}) \quad \{18\}$$

Las expresiones {14} y {18} dan el número de ciclos

hasta rotura del tendón como una función del número de ciclos hasta rotura de los elementos que lo componen, para las dos hipótesis de acumulación de daño consideradas. A continuación se referirá dicho número  $N_f(k)$  a los de los subelementos.

El logaritmo del número de ciclos hasta rotura del elemento  $i$ -ésimo viene dado por:

$$\log N_i = \min(r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i) \quad \{19\}$$

donde  $r_1^i, r_2^i, \dots, r_n^i$  son los logaritmos de los números de ciclos hasta rotura de los  $n$  subelementos del elemento  $i$ -ésimo, los cuales deben cumplir la ecuación {3}, - esto es,

$$r_j^i = z_j^i + g(\Delta\sigma_1); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \{20\}$$

Por lo tanto, la ecuación {19} puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \log N_i &= g(\Delta\sigma_1) + \min(z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i) \\ &= g(\Delta\sigma_1) + \sigma_z \cdot \min(z_1'^i, z_2'^i, \dots, z_n'^i) \quad \{21\} \\ &= g(\Delta\sigma_1) + h(\Delta\sigma_1) U_i \end{aligned}$$

donde

$$z_j^i = z_j^i / h(\Delta\sigma_1); \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad j = 1, 2, \dots, n \quad \{22\}$$

representan los valores de la serie temporal estandarizada, y  $U_i$  es

$$U_i = \min(z_1^i, z_2^i, \dots, z_n^i); \quad i = 1, 2, \dots, m \quad \{23\}$$

De la ecuación {21} se tiene lo siguiente:

$$\log N_{(i)} = g(\Delta\sigma_1) + h(\Delta\sigma_1) \cdot U_{(i)} \quad \{24\}$$

que junto a las ecuaciones {14} ó {18} permiten la obtención de la función de distribución de  $N_{f(k)}$ , solamente mediante técnicas numéricas o de simulación. Puesto que estas técnicas pueden ser muy laboriosas, desde un punto de vista práctico interesaría dar una cota inferior y otra superior de  $N_{f(k)}$ . Dichos límites vienen dados (ver figura 3) por:

$$N_{(k)}^{\Delta\sigma_k} \leq N_{f(k)} \leq N_{(k)}^{\Delta\sigma_1} \quad \{25\}$$

La expresión {25} permite estudiar la variable aleatoria por medio del análisis de los estadísticos de orden  $N_{(k)}^{\Delta\sigma_k}$  y  $N_{(k)}^{\Delta\sigma_1}$ , que son mucho más fáciles de tratar.

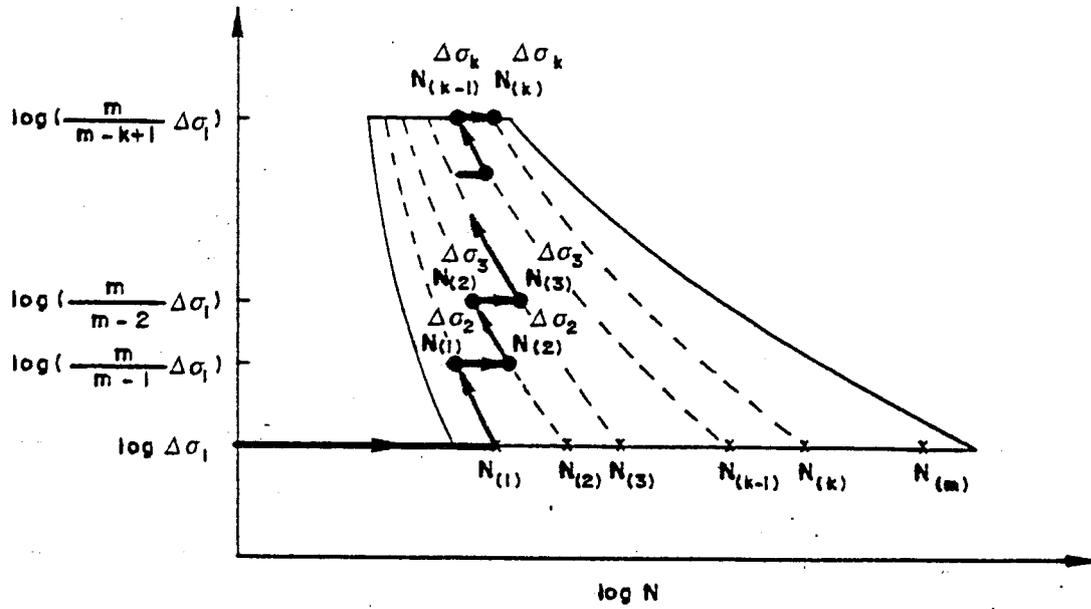


FIGURA 3

### 5.3.- SOLUCIONES ASINTOTICAS

Según lo que se acaba de decir el problema se reduce a calcular la función de distribución correspondiente al estadístico de orden  $k$ ,  $U_{(k)}$ , normalizado, definido por

$$U_{(k)} = \frac{\log N_{(k)}^{\Delta\sigma_j} - g(\Delta\sigma_j)}{h(\Delta\sigma_j)} \quad \{26\}$$

de una muestra de tamaño  $m$  procedente de una población cuya función de distribución asociada es la dada por

$$F_{u_i}(x) = 1 - \{1 - F_{N(0,1)}(x)\}^n \quad \{27\}$$

en el caso de independencia.

En consecuencia, esta distribución depende de dos parámetros  $m$  y  $n$ . Por ello, cabe considerar dos casos asintóticos:

- 1.- Elementos de longitud infinita ( $n \rightarrow \infty$ ).
- 2.- Infinito número de elementos ( $m \rightarrow \infty$ ).

#### 5.3.1.- ELEMENTOS MUY LARGOS

En el caso de elementos muy largos, esto es, cuando  $n \rightarrow \infty$ , la sucesión de funciones de distribución {27}, -

tanto en el caso de independencia (Galambos) como en el de dependencia (Galambos, Leadbetter) converge a la distribución  $L_{3,0}(x)$ , definida por la expresión {142} del Capítulo I, es decir:

$$\frac{u_i - c_n}{d_n} \rightarrow L_{3,0}(x) \quad \{28\}$$

siendo  $c_n$  y  $d_n > 0$  las constantes de normalización cuyos valores son

$$d_n = (2 \log n)^{-1/2} \quad \{29\}$$

$$c_n = -\frac{1}{d_n} + \frac{1}{2} d_n (\log \log n + \log 4n) \quad \{30\}$$

lo cual permite escribir

$$F_{u_i}(x) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x - c_n}{d_n}\right)\right) \quad \{31\}$$

La representación gráfica de las curvas correspondientes a  $c_n$  y  $d_n$  está en la figura 4.

En el caso de independencia, la función de distribución de  $U(x)$  en función de  $F_{u_i}(x)$ , para un valor  $m$  finito es:

$$F_{u(k)}(x) = \sum_{i=k}^m \binom{m}{i} F_{u_j}(x)^i \cdot (1 - F_{u_j}(x))^{m-i} \quad \{32\}$$

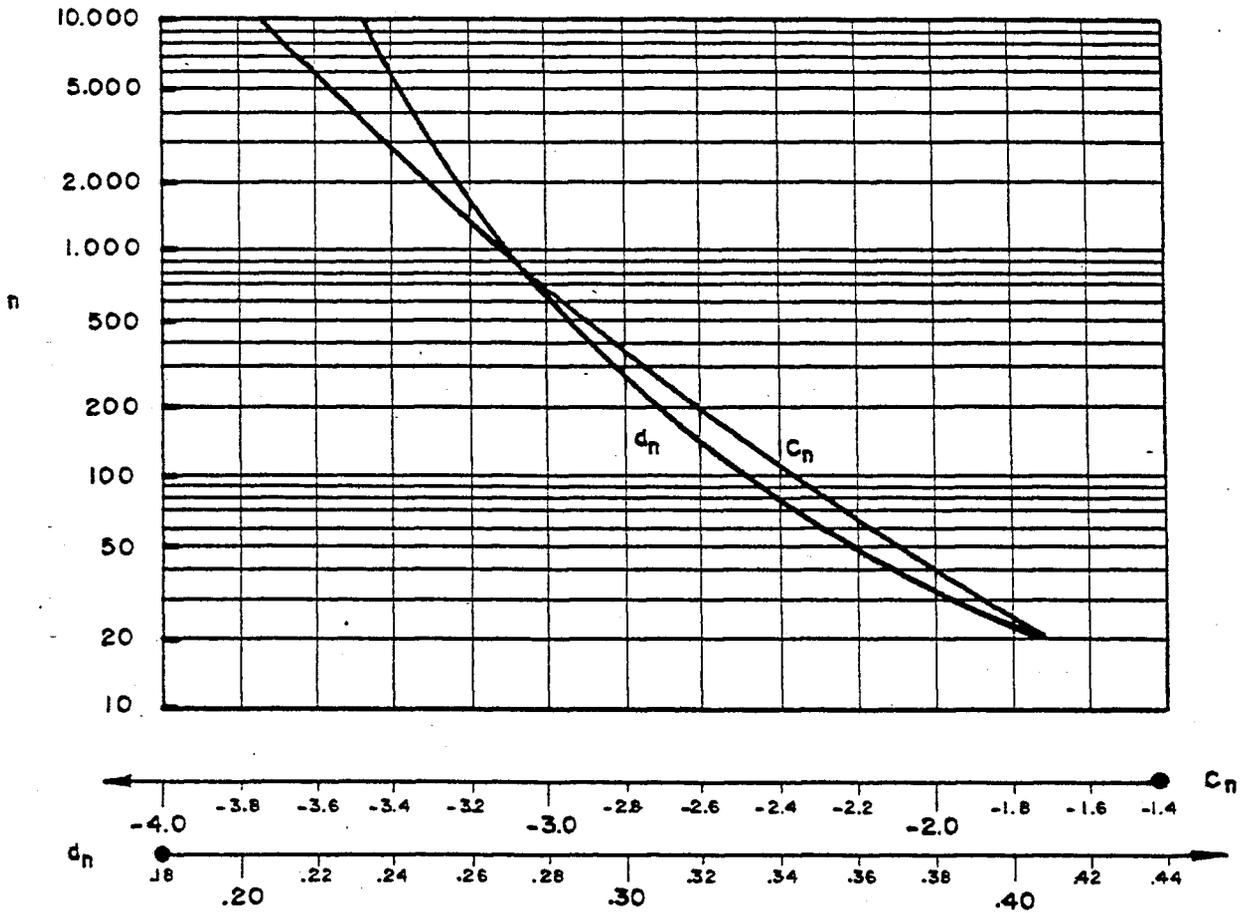


FIGURA 4

de modo que al sustituir en {32} el valor de  $F_{u_j}(x)$  dado en la expresión {31} resulta, para  $n \rightarrow \infty$ ,

$$F_{U(k)} = \sum_{i=k}^m \binom{m}{i} \{1 - \exp(-\exp(\frac{x-c}{d_n}))\}^i \cdot \exp(-(m-i) \exp(\frac{x-c}{d_n}))$$

{33}

Los valores  $N_{(k)}^{\Delta\sigma_k}$  y  $N_{(k)}^{\Delta\sigma_1}$  de la acotación {25} se obtienen sin más que hacer  $j=1$  y  $j=k$ , respectivamente en la expresión {26}.

### 5.3.2.- GRAN NUMERO DE ELEMENTOS

En el caso de que el número de elementos sea muy grande, esto es,  $m \rightarrow \infty$ , los límites dados en {25} convergen a otro único ya que, según la fórmula {14},

$$\Delta\sigma_k = \frac{m}{m-k+1} \Delta\sigma_1$$

que en el caso que nos ocupa tiene como límite el propio valor  $\Delta\sigma_1$ . Ese valor único al que convergen puede ser usado como solución práctica.

Así pues, la función de distribución de

$$U^*(k) = \frac{\log N_{f(k)} - g(\Delta\sigma_1)}{h(\Delta\sigma_1)} \quad \{34\}$$

es la que nos interesa. Aplicando el teorema 14 del Capítulo I, si se puede demostrar que, haciendo  $k=1$  en {34}

$$\frac{F_{\log N_{f(1)} - g(\Delta\sigma_1)}(c_n + d_n x)}{h(\Delta\sigma_1)} = L_n(c_n + d_n x) \quad \{35\}$$

con constantes de normalización  $c_n$  y  $d_n > 0$ , tiende a  $L(x)$  entonces

$$\frac{F_{\log N_{f(k)} - g(\Delta\sigma_1)}(x)}{h(\Delta\sigma_1)} = 1 - \{1-L(x)\} \sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} (-\log(1-L(x)))^t \quad \{36\}$$

En este caso habríamos logrado nuestro objetivo.

El estadístico de orden  $U_{(1)}$ , viene definido por

$$U_{(1)} = \min(U_1, U_2, \dots, U_m) = \min_{j=1, 2, \dots, m} (U_j) \quad \{37\}$$

Como a su vez  $U_j$  viene definido por

$$U_j = \min(z_1^{j}, z_2^{j}, \dots, z_n^{j}) = \min_{i=1, 2, \dots, n} (z_i^{j}) \quad \{38\}$$

resulta que  $U_{(1)}$  es

$$U_{(1)} = \min_{j=1,2,\dots,m} \left( \min_{i=1,2,\dots,m} (z_i^{j'}) \right) = \min_{\substack{j=1,2,\dots,m \\ i=1,2,\dots,n}} (z_i^{j'}) \quad \{39\}$$

El estadístico  $U_{(1)}$  es el mínimo de los mínimos de los números de ciclos hasta rotura de cada elemento, es decir, que es el mínimo de los  $n \cdot m$  subelementos. Equivale, en cuanto a su función de distribución, al estadístico de orden 1 para un cable de longitud  $nm$ . Por tanto su función de distribución vendrá dada, según el apartado anterior, por

$$F_{U_{(1)}}(x) = 1 - \exp\left(-\exp\left(\frac{x - c_{nm}}{d_{nm}}\right)\right) \quad \{40\}$$

donde

$$d_{nm} = 2(\log nm)^{-1/2} \quad \{41\}$$

y

$$c_{nm} = -\frac{1}{d_{nm}} + \frac{1}{2} d_{nm} (\log \log(nm) + \log 4\pi) \quad \{42\}$$

La función de distribución {40} cumple las premisas del teorema 14. Por lo tanto, la función de distribución que se busca es, sustituyendo {40} en {36},

$$F_{\log N_f(k) - g(\Delta\sigma_1)}(x) = \frac{1 - \exp\left\{-\exp\left(\frac{x - c_{nm}}{d_{nm}}\right)\right\}}{h(\Delta\sigma_1)}$$

$$\sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} \exp\left\{t \left(\frac{x - c_{nm}}{d_{nm}}\right)\right\} \quad \{43\}$$

La expresión {43} ha sido representada en la figura 5.

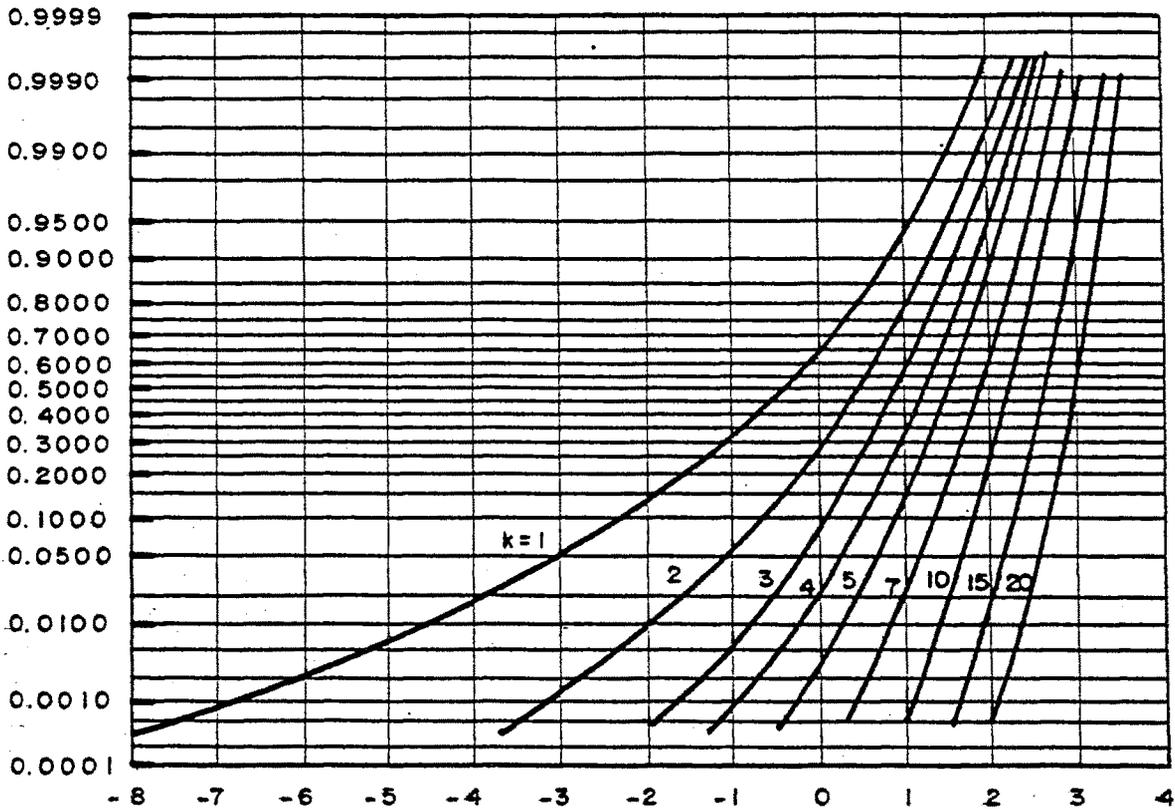
La velocidad de convergencia es muy rápida usando la convergencia de las cotas. A pesar de ello, quizás - puedan obtenerse otros parámetros  $c_n^*$  y  $d_n^*$  que logren una velocidad de convergencia mejor, tal como sugieren Gomes (1979) y Veraverbeke (1976).

Especial relevancia tiene la función distribución en la zona de endurancia de la curva S-N. Desde un punto de vista práctico, la proporción de fallos en un tendón, entendiéndose por tal el fallo de al menos  $k$  de sus elementos, para  $2 \cdot 10^6$  ciclos juega un importante papel.

De la ecuación {43} esta proporción, como función de  $\Delta\sigma$  y de  $k$ , para el caso asintótico, viene dada por

$$P = 1 - \exp\left\{ \exp\left( \frac{\log(2 \cdot 10^6) - g(\Delta\sigma)}{h(\Delta\sigma)} - \frac{c_{nm}}{d_{nm}} \right) \right\}$$

$$\sum_{t=0}^{k-1} \frac{1}{t!} \exp\left\{ t \frac{\log(2 \cdot 10^6) - g(\Delta\sigma)}{h(\Delta\sigma)} - \frac{c_{nm}}{d_{nm}} \right\} \quad \{44\}$$



$$\frac{\frac{\log N_{c(k)} - g(\Delta\sigma_1)}{h(\Delta\sigma_1)} - C_{nm}}{d_{nm}} \quad \text{or} \quad \frac{\frac{\Delta\sigma - \mu}{\sigma} - C_{nm}}{d_{nm}}$$

FIGURA 5

#### 5.4.- CONDICIONES DE COMPATIBILIDAD

Las curvas definidas por las ecuaciones {4} y {5} no pueden elegirse arbitrariamente. En efecto, si, según el Capítulo II, la función de distribución del intervalo de tensiones que produce la rotura después de  $2 \cdot 10^6$  ciclos es normal  $N(\mu, \sigma^2)$ , se deben satisfacer las siguientes relaciones (ver figura 6):

$$F_{N(g(\Delta\sigma), h^2(\Delta\sigma))}(\log 2 \cdot 10^6) = F_{N(\mu, \sigma^2)}(\Delta\sigma) \quad \{45\}$$

que es equivalente a

$$F_{N(0,1)}\left(\frac{\log(2 \cdot 10^6) - g(\Delta\sigma)}{h(\Delta\sigma)}\right) = F_{N(0,1)}\left(\frac{\Delta\sigma - \mu}{\sigma}\right) \quad \{46\}$$

de lo cual se sigue que

$$h(\Delta\sigma) = \frac{\sigma}{\Delta\sigma - \mu} (\log(2 \cdot 10^6) - g(\Delta\sigma)) \quad \{47\}$$

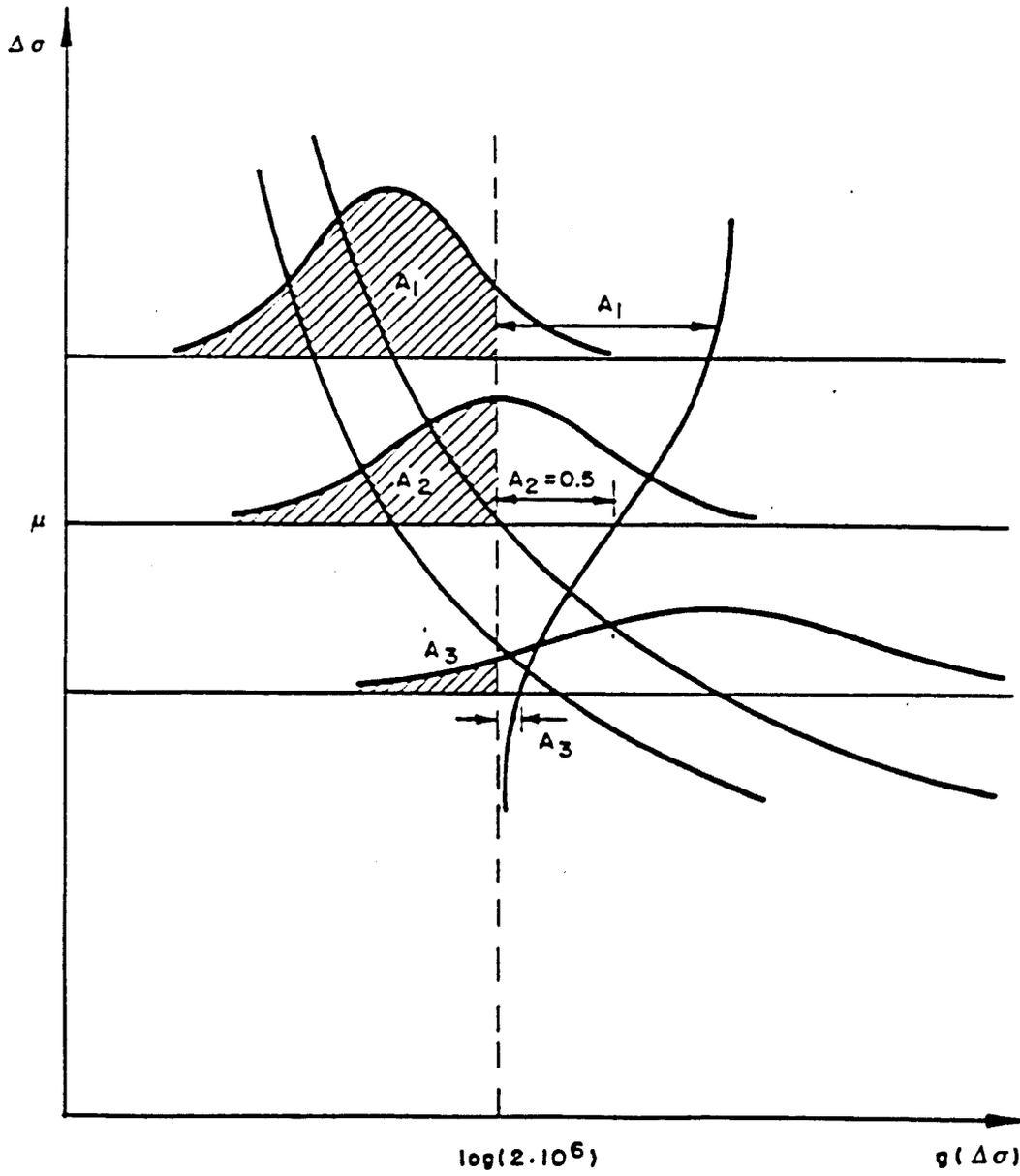


FIGURA 6

### 5.5.- EJEMPLO DE APLICACION

Con el fin de ilustrar los resultados analíticos y su aplicación a casos prácticos se considera un tendón hipotético compuesto por 200 alambres de 7 milímetros de una longitud dada. Si el debilitamiento admitido de la sección es del 5%, es decir, rotura de 10 alambres, y si se supone una probabilidad del 5% de que se produzca este suceso, de acuerdo con la figura 4, correspondería un valor de cálculo

$$\frac{\frac{\Delta\sigma - \mu}{\sigma} - c_{nm}}{d_{nm}} = 1.691$$

Es interesante señalar que para este valor de cálculo del 5% las probabilidades de que rompan 5 cables o menos son muy elevadas (ver figura 7), a saber

k = 1	P = 99.5%
k = 2	P = 97.2%
k = 3	P = 90.7%
k = 4	P = 79.0%
k = 5	P = 63.1%

He aquí la razón por la que al ensayar probetas de tendones de gran número de elementos siempre se producen algunas roturas de alambres, incluso para valores bajos de  $\Delta\sigma$ . No hay que preocuparse, por lo tanto, si al ensa-

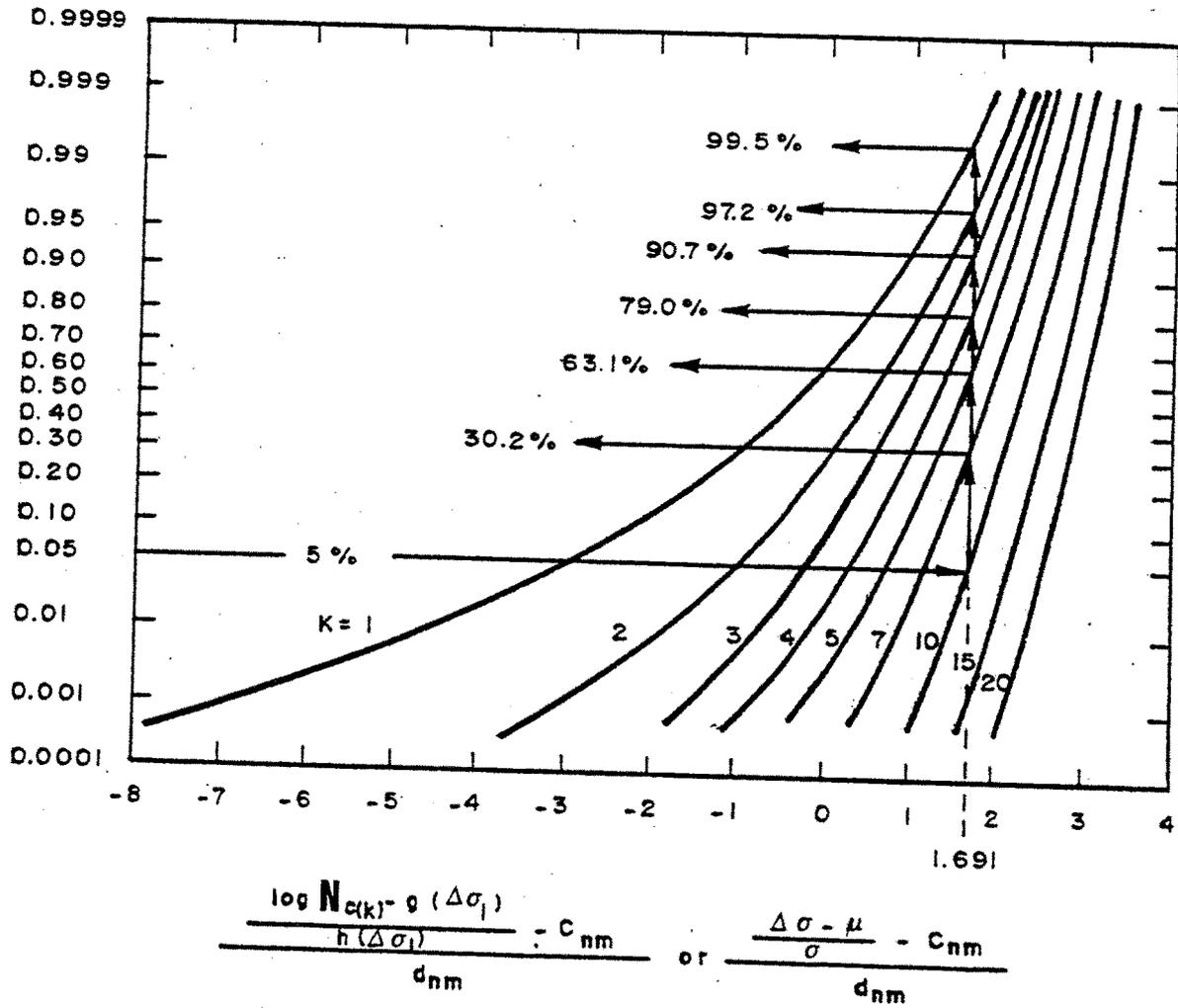


FIGURA 7

yar tendones de muchos elementos, con valores de  $\Delta\sigma$  que para un único elemento representaban una probabilidad de fallo muy pequeña, se producen roturas.

## 5.6.- CONCLUSIONES

En este capítulo se da un modelo para el análisis de la rotura progresiva a fatiga de un tendón múltiple de gran longitud, con dos hipótesis diferentes de acumulación de daño. El modelo permite obtener la función de distribución del número de ciclos hasta rotura mediante técnicas numéricas o de simulación.

También se proporcionan cotas superior e inferior de la solución exacta. Estas cotas demuestran ser de uso práctico con el fin de evitar cálculos.

Cuando el número de elementos aumenta, los dos límites convergen a la solución exacta. Como resultado, la teoría asintótica se puede aplicar fácilmente para obtener una expresión analítica de la función de distribución del número de ciclos hasta rotura en la zona de larga vida o del intervalo de tensiones en la zona de endurancia.

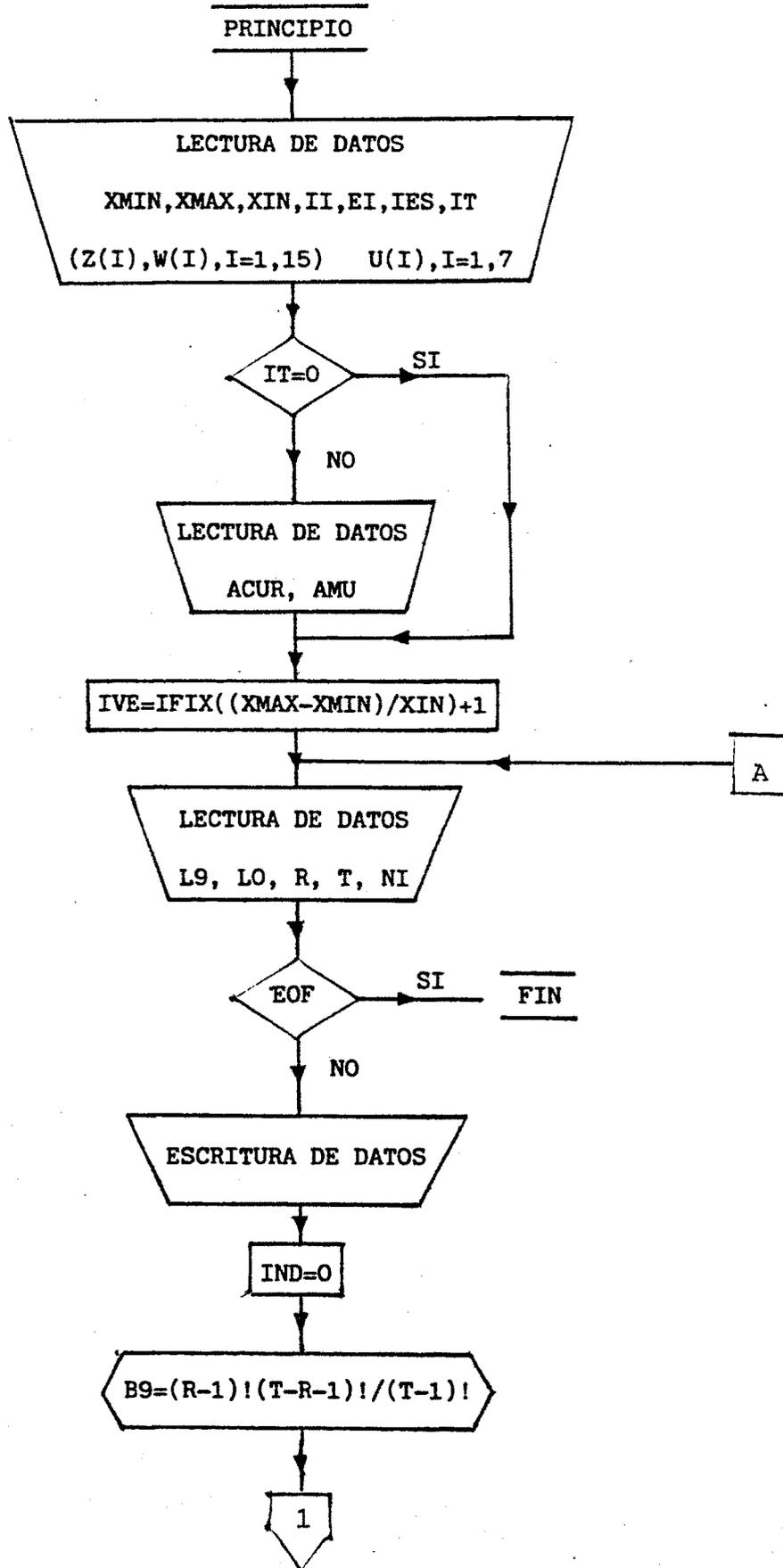
Se dan condiciones de compatibilidad para obtener una función de distribución normal para los subelementos de longitud de referencia  $L_0$ .

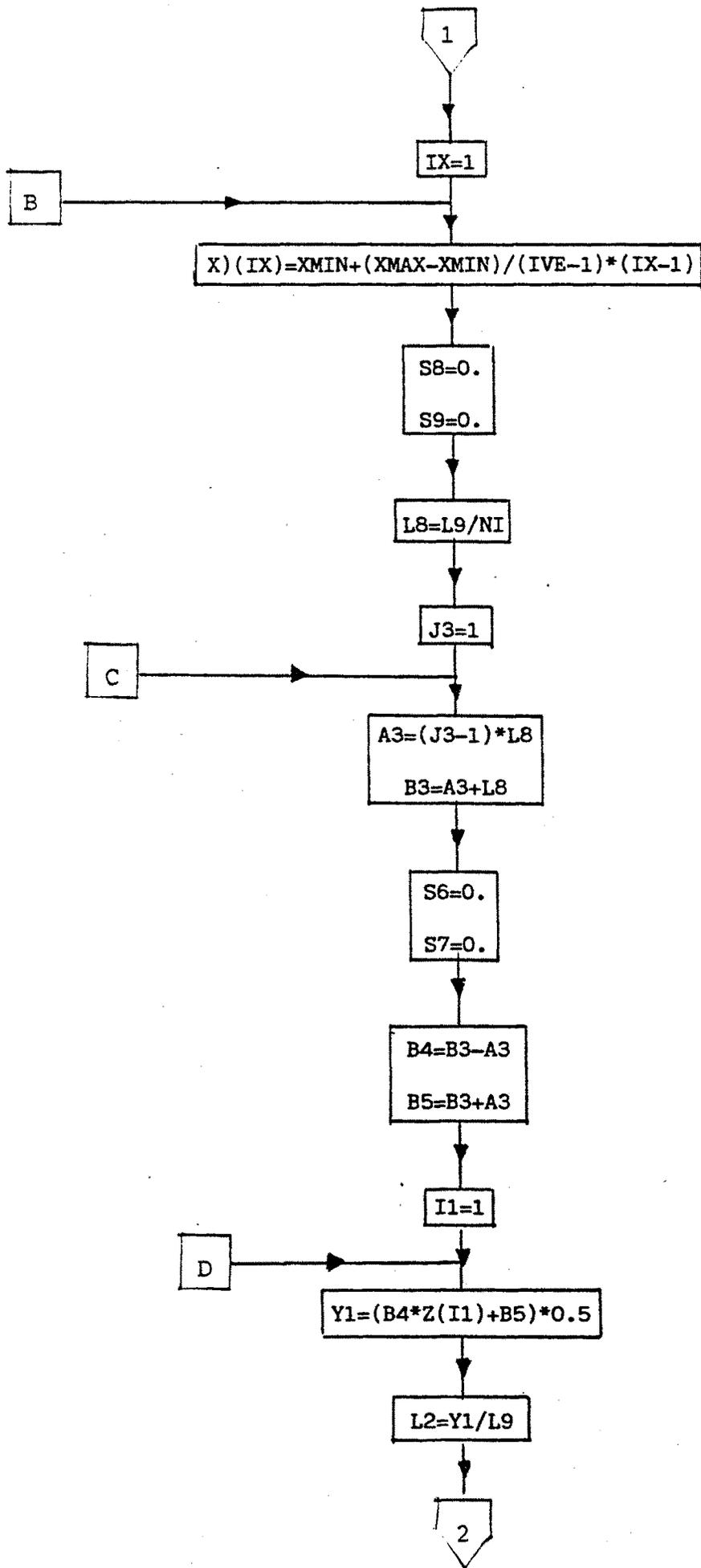
# APENDICE I

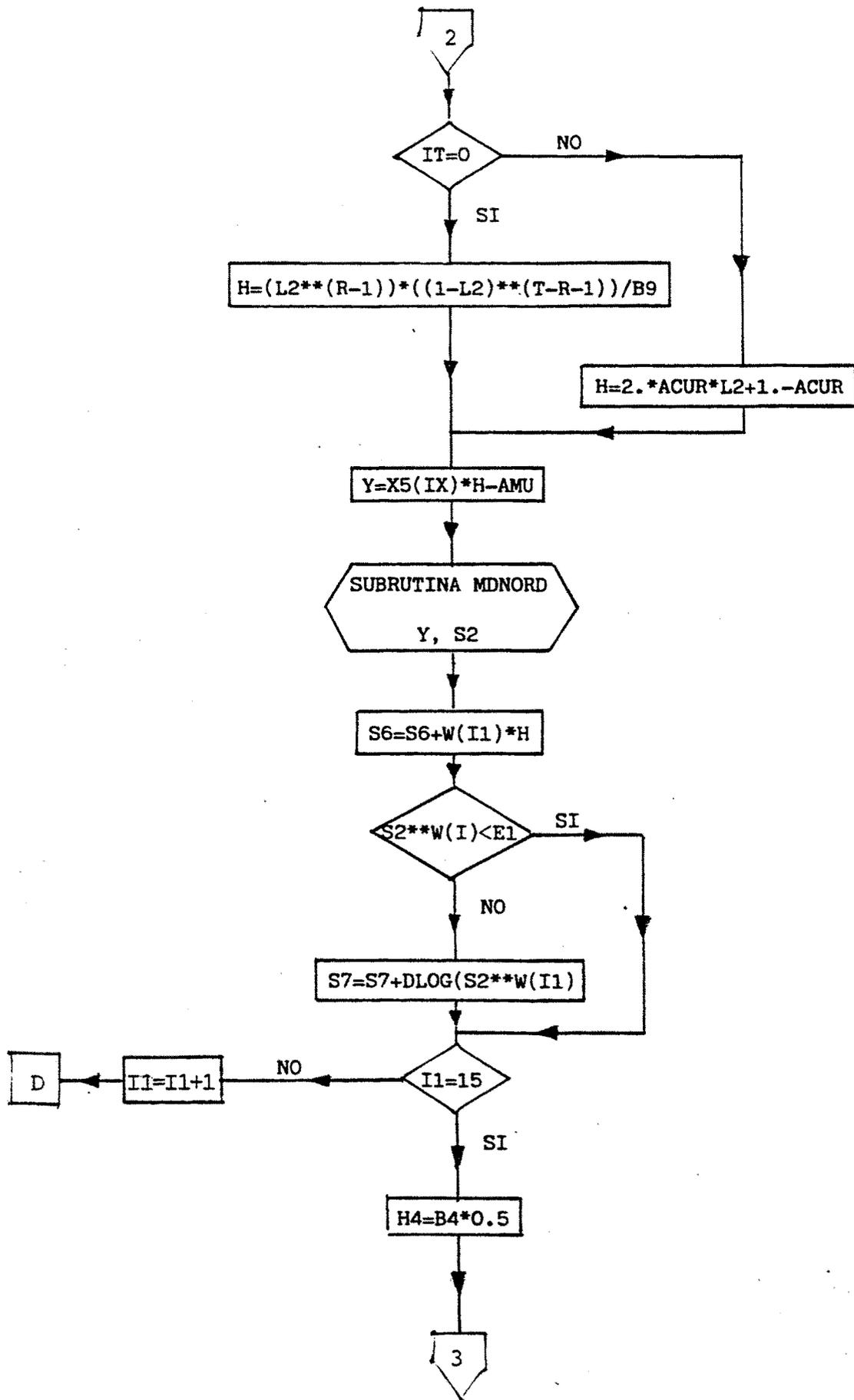
ORGANIGRAMAS Y PROGRAMAS DE

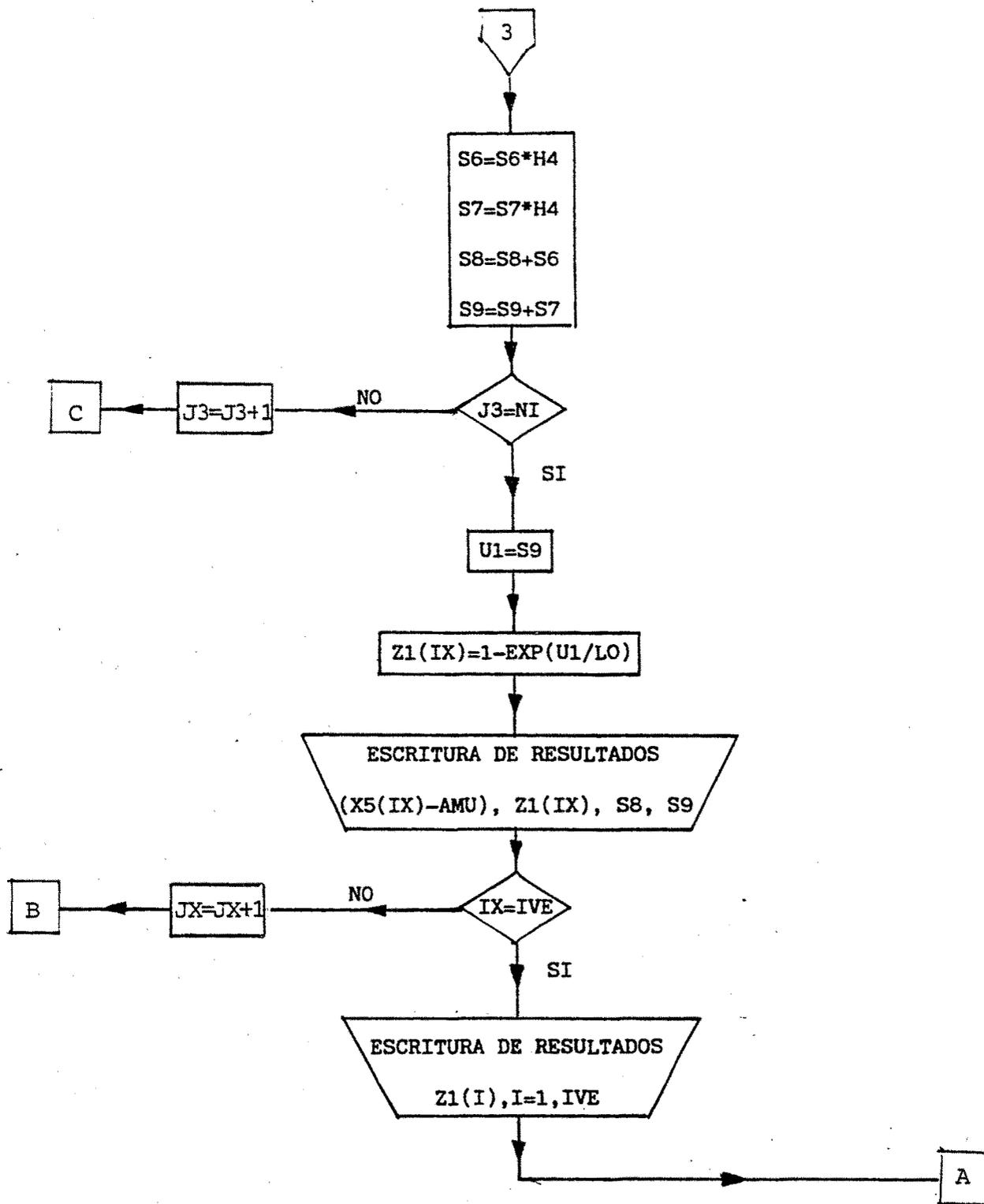
ORDENADOR

ACERO









ACERC

```

1: C*****
2: C*****
3: C*****
4: C*****
5:
6:     COMPILER DOUBLE PRECISION
7:     DIMENSION W(15),Z(15),U(8),Z1(100),X5(100)
8:     REAL L9,LO,L8,L2
9:
10:    OPEN 1,"DACERO"
11:    OPEN 2,"RACERO",ATT="A"
12:    OPEN 3,"DTE2",ATT="A"
13:
14:    READ FREE (1) ((Z(I),W(I)),I=1,8)
15:    READ FREE (1) (U(I),I=1,7)
16:
17:    DO 10 I=9,15
18:    W(I)=W(I-7)
19:    Z(I)=-Z(I-7)
20: 10 CONTINUE
21:
22:    READ FREE (1) XMIN,XMAX,XIN,II,EI,IES,IT
23:    WRITE FREE(2)XMIN,XMAX,XIN,II,EI,IES,IT
24:    IF(IT.EQ.0)GO TO 9872
25:    READ FREE(1)ACUR,AMU
26:    WRITE FREE(2)"ACUR,AMU=">ACUR,AMU
27: 9872 CONTINUE
28:    IVE=IFIX((XMAX-XMIN)/XIN)+1
29: 15 READ FREE (1,END=700) L9,LO,R,T,NI
30:
31:    WRITE FREE (3)L9,LO,IVE,XMIN,XMAX,XIN
32:
33:    IND=0
34: C*****
35: C***** CALCULO DE B(R,T)=(R-1)!(T-R-1)!/(T-1)!
36: C*****
37:    B9=1.
38:    IF(R.LT.2.999) GOTO 30
39:    DO 20 I=2,(IFIX(R)-1)
40:    B9=B9*I
41: 20 CONTINUE
42: 30 IF(T.LT.2.999) GOTO 50
43:    DO 40 I=2,(IFIX(T)-1)
44:    B9=B9/I
45: 40 CONTINUE
46: 50 IF((T-R).LT.2.999) GOTO 70
47:    DO 60 I=2,(IFIX(T-R)-1)
48:    B9=B9*I
49: 60 CONTINUE
50:
51: 70 WRITE(2,3000)R,T,B9
52: 3000 FORMAT(////,5X,"FUNCION H(L) CON BETA(",I1,"",", I1,"")",1X,
53: 1 D14.6////)
54: WRITE (2,3100) L9,LO
55: 3100 FORMAT(5X,"L=",F8.2,5X,"LO=",F8.2,5X,////)
56: WRITE (2,3200)

```

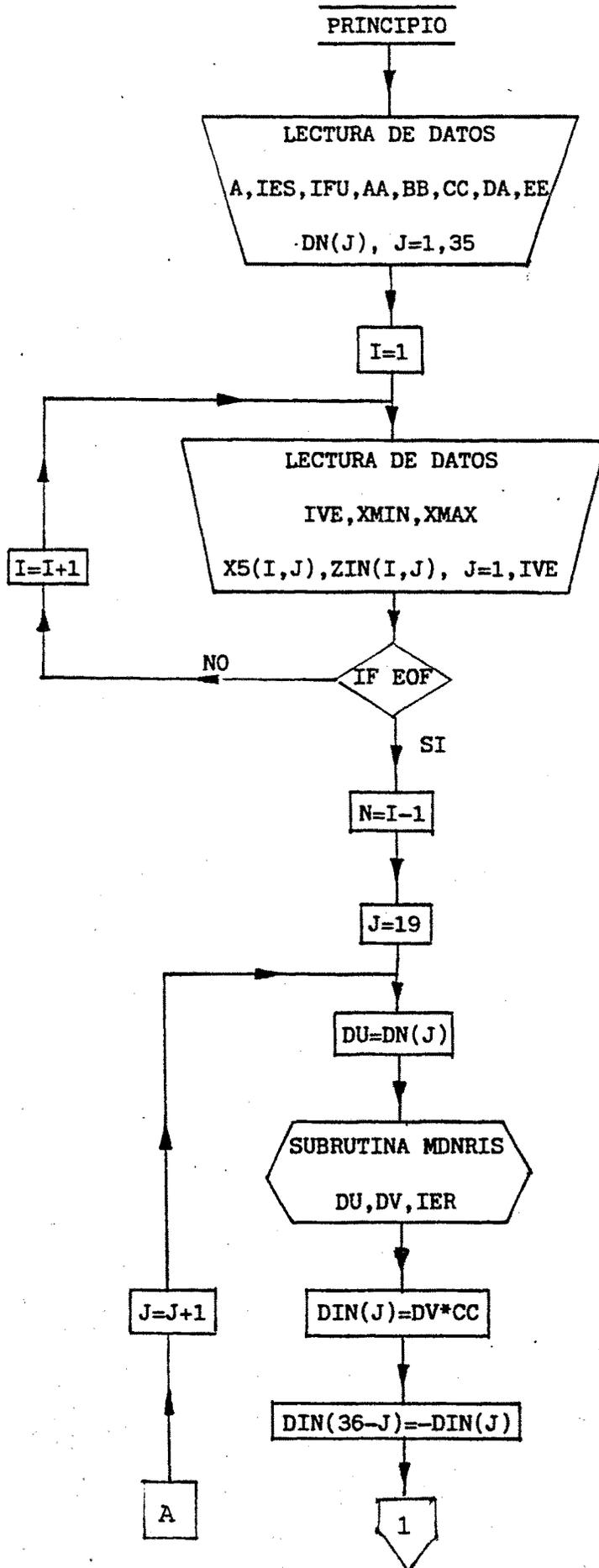
```
7: 3200 FORMAT(10X,"X",10X,"F(X)")
8: WRITE (2,3300)
9: 3300 FORMAT(35("-"),//)
10:
11: C*****
12: L*****
13: C***** PARTE PRINCIPAL DEL PROGRAMA.
14: C*****
15: C*****
16:
17: DO 600 IX=1,IVE
18: X5(IX)=XMIN+(XMAX-XMIN)/((IVE-1)*IX)
19: S8=0.
20: S9=0.
21: L8=L9/NI
22: DO 500 J3=1,NI
23: A3=(J3-1)*L8
24: B3=A3+L8
25: S6=0.
26: S7=0.
27: B4=B3-A3
28: B5=B3+A3
29: DO 400 I1=1,15
30: Y1=(B4*Z(I1)+B5)*0.5
31: L2=Y1/L9
32: IF(IT.NE.0)GOTO 9870
33: H=(L2*(R-1))*((1-L2)*(T-R-1))/B9 ; FUNCION H(L)
34: GOTO 9871
35: 9870 H=2.*ACUR*L2+1.-ACUR
36: 9871 CONTINUE
37: Y=X5(IX)*H-AMU
38:
39: C***** CALCULO DE F(Y)
40: IF (II.EQ.1) GOTO 305
41: CALL MDNCRD(Y,S1)
42: GOTO 300
43: 305 CONTINUE
44:
45: Y1=Y
46: IF(Y.LT.0.) GOTO 100
47: Y=-Y
48: 100 S1=0.
49: IF(Y.LT.U(1)) GOTO 200
50: L=1
51: 120 IF(U(L+1).GE.Y) GOTO 160
52: A=U(L)
53: B=U(L+1)
54: IND=1
55: GOTO 250
56: 140 S1=S1+S
57: L=L+1
58: GOTO 120
59: 160 A=L(L)
60: B=Y
61: IND=2
62: GOTO 250
63: 180 S1=S1+S
64: 200 IF(Y1.LE.0.)GOTO 220
65: S2=S1
```

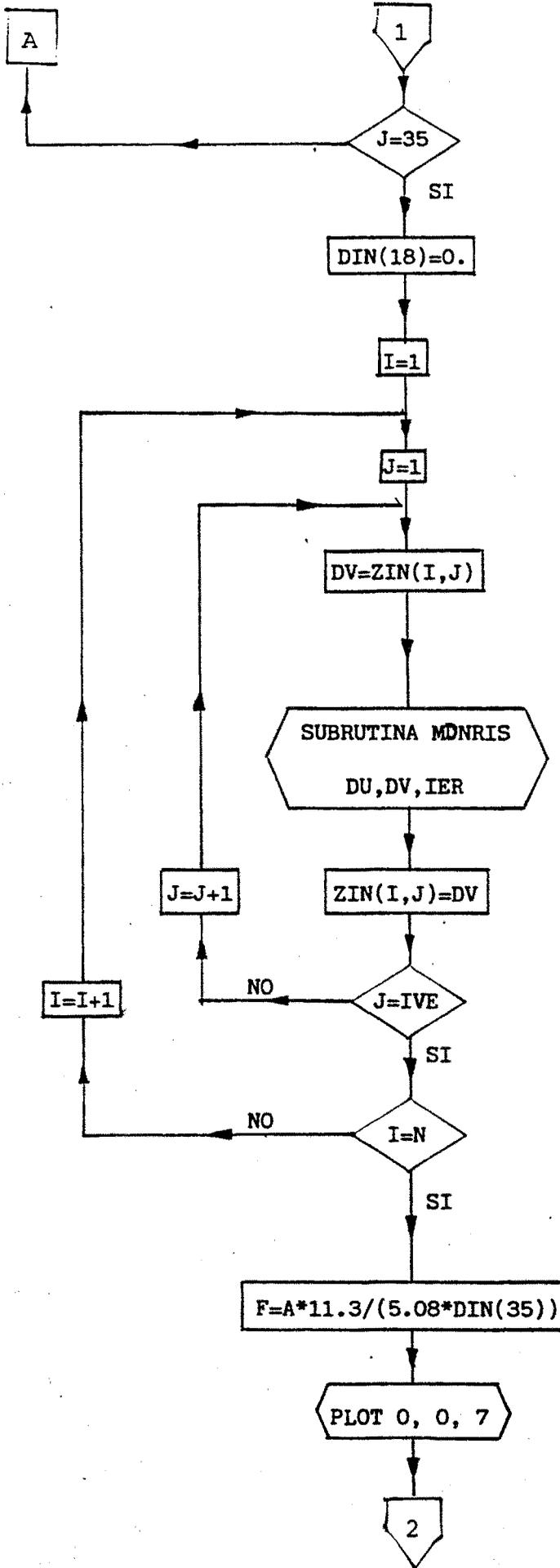
```

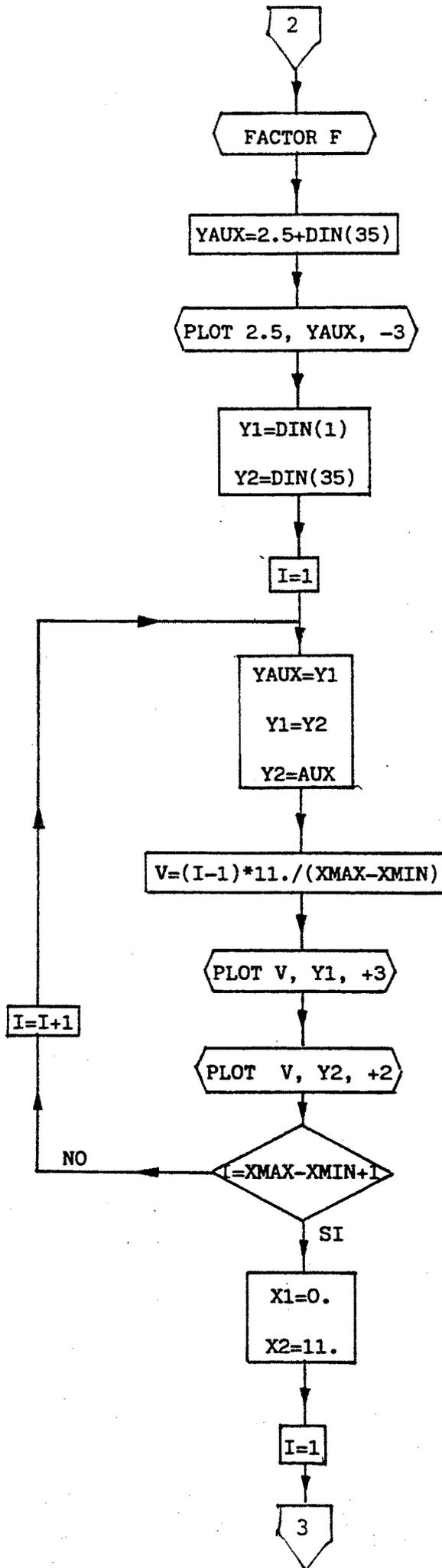
:      S1=1.-S1
:      GO TO 230
: 220   S2=1.-S1
: 280   Y=Y1
:      GOTO 300
: 250   S=C.           ; OBTENCION DE F(Y) ENTRE A Y B.
:      B1=B-A
:      B2=B+A
:      DC 270 I=1,15
:      X=(B1#Z(I)+B2)#0.5
:      F=DEXP(-0.5*(X#2))/DSQRT(2#3.141592654)
:      S=S+F#W(I)
: 270   CONTINUE
:      S=B1#0.5#S
:      IF(IND.EQ.1) GOTO 140
:      GOTO 180
:
: ***** FIN DEL CALCULO DE F(Y).
: *****
: ***** CONTINUA LA OBTENCION DE U1, INTEGRAL DE LOG(1-F(Y))
:
: 300   S6=S6+W(I1)#H
:      IF(S2#W(I1).LT.EI) GOTO 3999
:      S7=S7+DLOG(S2#W(I1))
:      IF(IES.EQ.1) WRITE FREE(2)Y,S2,DLOG(S2#W(I1)),S7
:      GO TO 400
: 3999  IF(IES.EQ.1) WRITE FREE (2)Y,S2,S7
: 400   CONTINUE
:      H4=B4#0.5
:      S6=S6#H4
:      S7=S7#H4
:      S8=S8+S6
:      S9=S9+S7
: 500   CONTINUE
:      U1=S9
:      Z1(IX)=1-DEXP(U1/L0)
:      IF(Z1(IX).LT.0.00000001) Z1(IX)=0.00000001
:      IF(Z1(IX).GT.0.99999999) Z1(IX)=0.99999999
:      WRITE (2,3400) (X5(IX)-AMU),Z1(IX),S8,S9
: 3400  FORMAT(6X,F7.2,3X,F12.10,2E14.6)
: 600   CONTINUE
:      WRITE FREE (3) (Z1(I),I=1,IVE)
:      GOTO 15
:
: 700   CLOSE 1
:      CLOSE 2
:      CLOSE 3
:      STOP
:      END

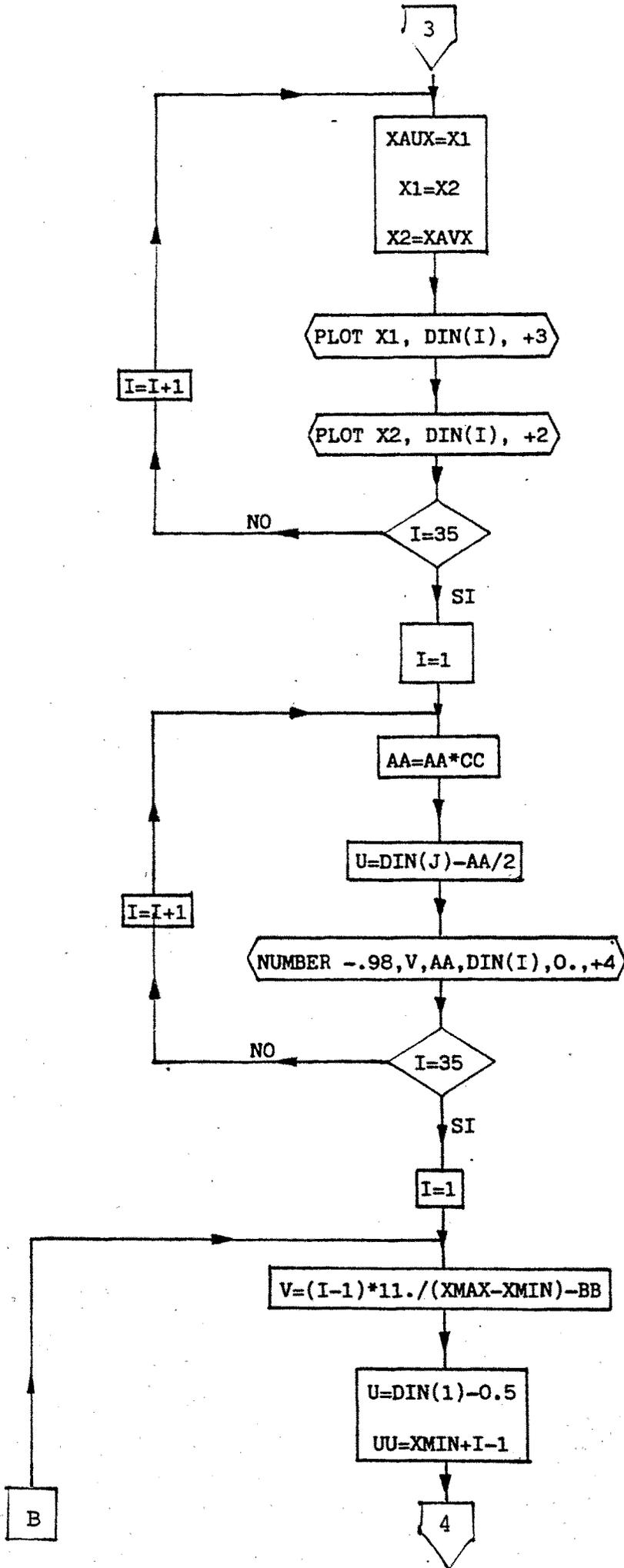
```

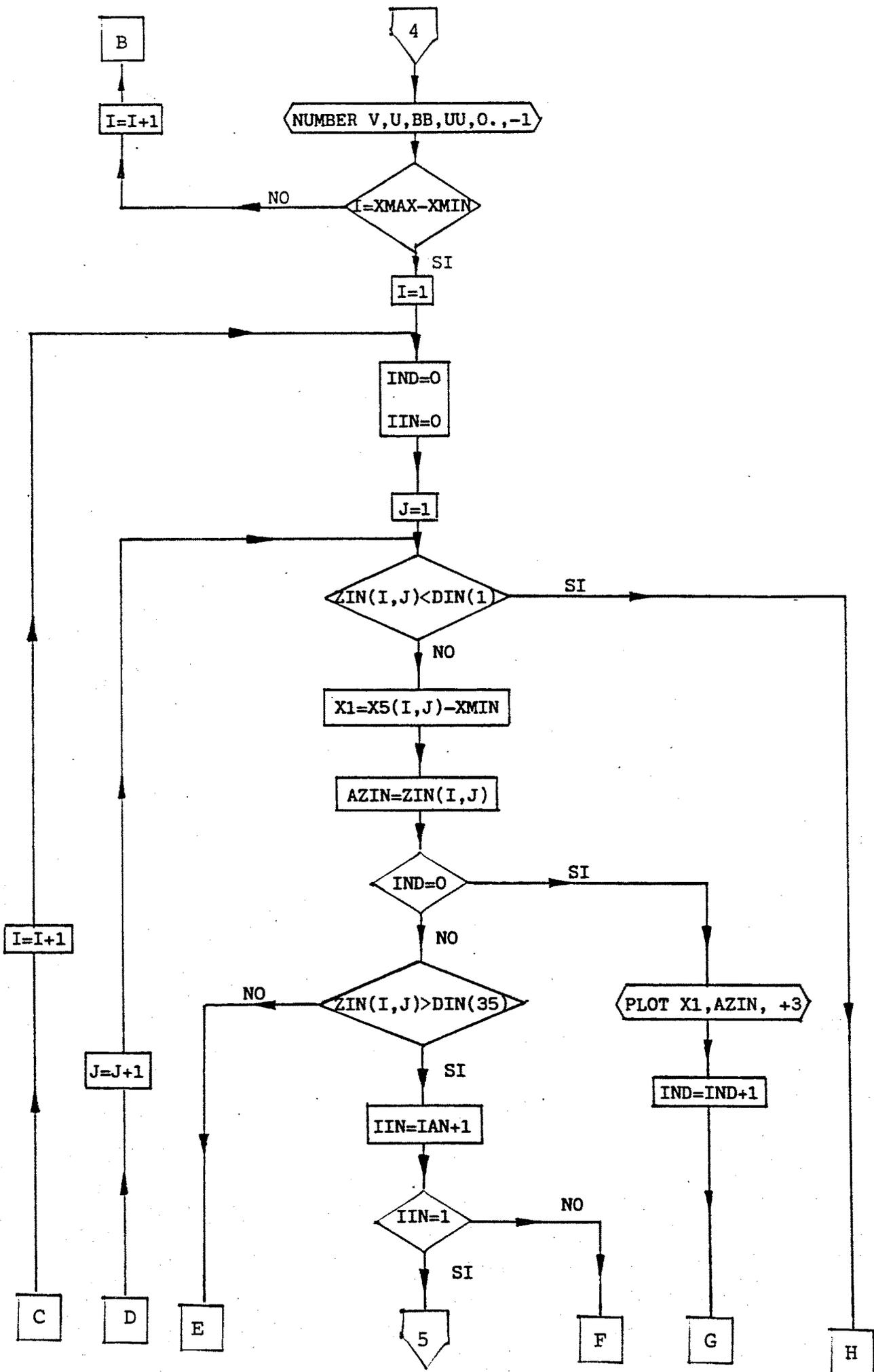
TE2

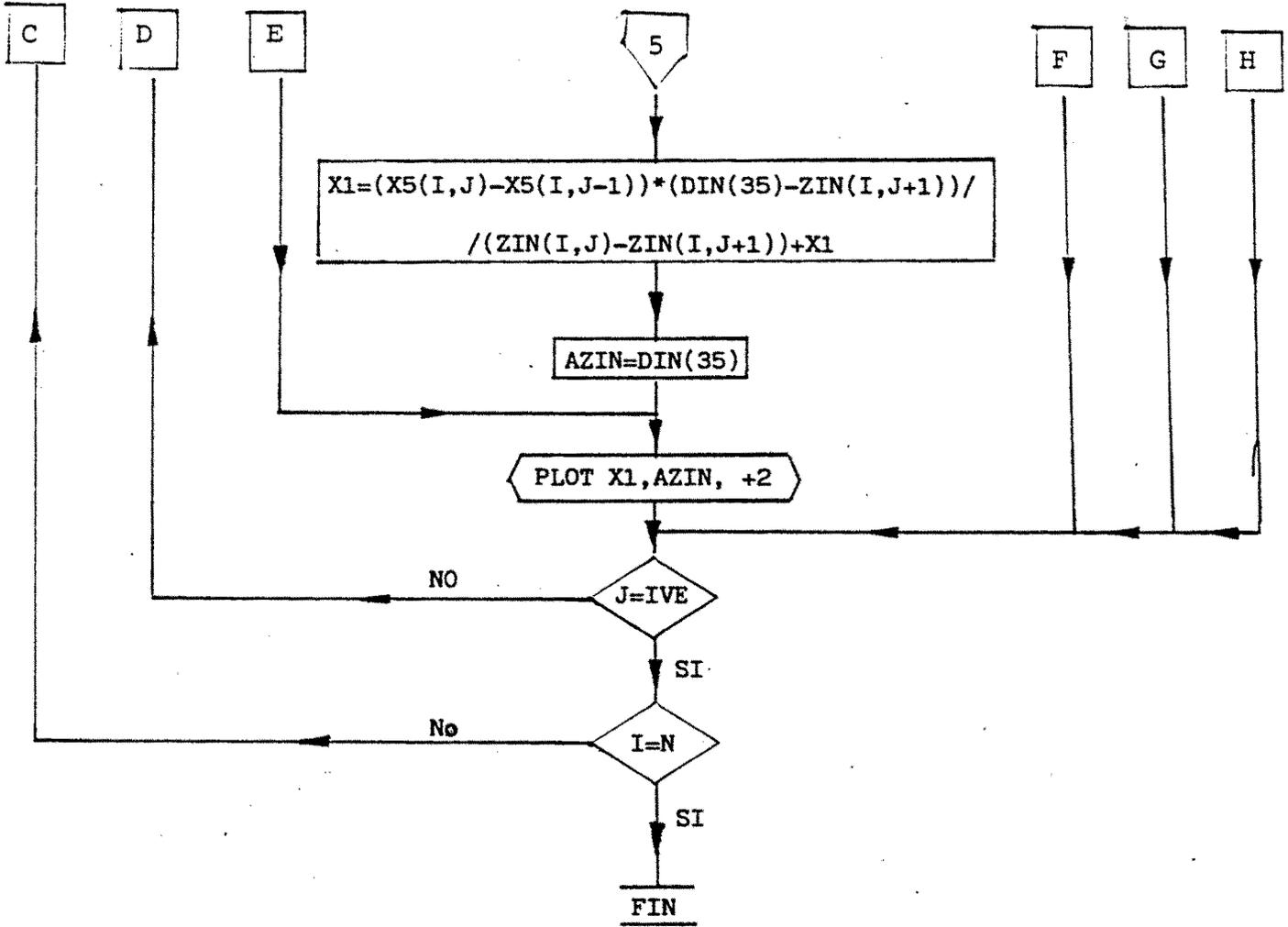












TE2

```
1:      DOUBLE PRECISION ZIN,L9,LO,IVE,XMIN,XMAX,XIN
2:      DIMENSION DN(35),DIN(35),ZIN(25,30),X5(25,30)
3:
4:      OPEN 1,"DEDETE2"
5:      OPEN 2,"DTEZ"
6:      OPEN 3,"INTER",ATT="A"
7:
8:      READ FREE (1) A,IES,IFU,AA,BB,CC,DD,EE
9:      DATA DN/.0001,.0002,.0005,.001,.002,.005,.01,.02,.05,
0:      2  .10,.15,.20,.25,.30,.35,.40,.45,.50,.55,.60,.65,.70,.75,.80,
1:      3  .85,.90,.95,.98,.99,.995,.998,.999,.9995,.9998,.9999/
2:      I=1
3:      10  READ FREE(2,END=30) IVE,XMIN,XMAX
4:      READ FREE (2) (X5(I,J),ZIN(I,J),J=1,IVE)
5:      I=I+1
6:      GOTO 10
7:      30  N=I-1
8:      IF(IES.NE.1) GOTO 32
9:      WRITE FREE (3) A,IVE,XMIN,XMAX,XIN,N
0:      WRITE FREE (3) (DN(I),I=1,35)
1:      WRITE FREE (3) ((ZIN(I,J),J=1,IVE),I=1,N)
2:
3:      32  DO 40 J=1,35
4:      DU=DN(J)
5:      CALL MDNRIS(DU,DV,IER)
6:      DIN(J)=DV*CC
7:      DIN(36-J)=-DIN(J)
8:      40  CONTINUE
9:      DIN(18)=0.
0:      DO 60 I=1,N
1:      DO 50 J=1,IVE
2:      DU=ZIN(I,J)
3:      CALL MDNRIS(DU,DV,IER)
4:      ZIN(I,J)=DV
5:      50  CONTINUE
6:      60  CONTINUE
7:
8:      IF(IES.NE.1) GOTO 62
9:      WRITE FREE (3) (DIN(I),I=1,35)
0:      WRITE FREE (3) ((ZIN(I,J),J=1,IVE),I=1,N)
1:      WRITE FREE (3) "<NL><NL><NL>"
2:
3:      62  F=A*11.3/(5.08*DIN(35))
4:      CALL PLOTS(0,0,7)
5:      IF (IFU.NE.1) GOTO 63
6:      WRITE FREE (3) " F=",F,"  DIN(35)=",DIN(35)
7:      63  CALL FACTOR(F)
8:      YAUX=2.5*DIN(35)
9:      CALL PLOT(2.5,YAUX,-3)
0:      Y1=DIN(1)
1:      Y2=DIN(35)
2:      DO 70 I=1,XMAX-XMIN+1
3:      YAUX=Y1
4:      Y1=Y2
5:      Y2=YAUX
6:      V=(I-1)*11./(XMAX-XMIN)
7:      IF (IFU.NE.1) GOTO 65
8:      WRITE FREE (3) " V=",V,"  Y1=",Y1,"  Y2=",Y2
9:      65  CALL PLOT(V,Y1,+3)
```

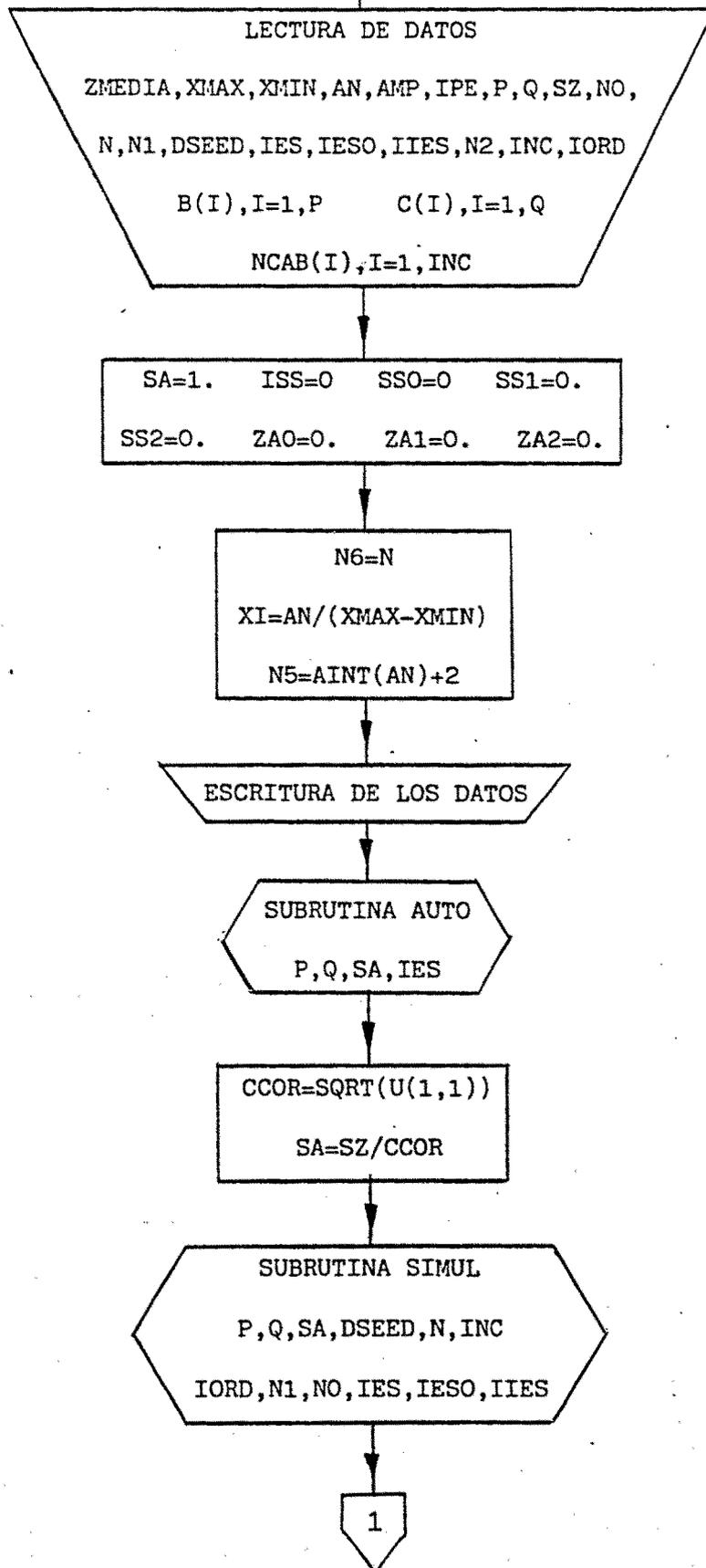
```
00: CALL PLOT(V,Y2,+2)
01: 70 CONTINUE
02: X1=0.
03: X2=11.
04: DO 80 I=1,35
05: XAUX=X1
06: X1=X2
07: X2=XAUX
08: IF (IFU.NE.1) GOTO 75
09: WRITE FREE (3) " X1=",X1," X2=",X2," DIN(I)",DIN(I)
10: 75 CALL PLOT(X1,DIN(I),+3)
11: CALL PLOT(X2,DIN(I),+2)
12: 80 CONTINUE
13: DO 90 I=1,35
14: AA=AA#CC
15: U=DIN(I)-AA/2
16: CALL NUMBER(-.98,U,AA,DN(I),0.,+4)
17: 90 CONTINUE
18: DO 100 I=1,XMAX-XMIN
19: V=(I-1)#11./(XMAX-XMIN)-BB
20: U=DIN(1)-.5
21: UU=XMIN+I-1
22: CALL NUMBER(V,U,BB,UU,0.,-1)
23: 100 CONTINUE
24: DO 200 I=1,N
25: IND=0
26: IIN=0
27: DO 150 J=1,IVE
28: IF(ZIN(I,J).LT.DIN(1)) GOTO 150
29: X1=X5(I,J)-XMIN
30: AZIN=ZIN(I,J)
31: IF(IND.NE.0) GOTO 120
32: IF(IFU.NE.1) GOTO 115
33: WRITE FREE (3) " X1=",X1," AZIN=",AZIN
34: 115 CALL PLOT(X1,AZIN,+3)
35: IND=IND+1
36: GOTO 150
37: 120 IF (ZIN(I,J).GT.DIN(35)) GOTO 121
38: GOTO 124
39: 121 IIN=IIN+1
40: IF(IIN.NE.1) GOTO 150
41: XX=X5(I,J)-X5(I,J-1)
42: X1=XX#(DIN(35)-ZIN(I,J-1))/(ZIN(I,J)-ZIN(I,J-1))+X1
43: AZIN=DIN(35)
44: 124 IF (IFU.NE.1) GOTO 125
45: WRITE FREE (3) " X1=",X1," AZIN=",AZIN
46: 125 CALL PLOT (X1,AZIN,+2)
47: 150 CONTINUE
48: 200 CONTINUE
49:
50: CALL PLOT (0.,0.,999)
51: CLOSE 7
52: CLOSE 1
53: CLOSE 2
54: CLOSE 3
55: STCP
56: END
```

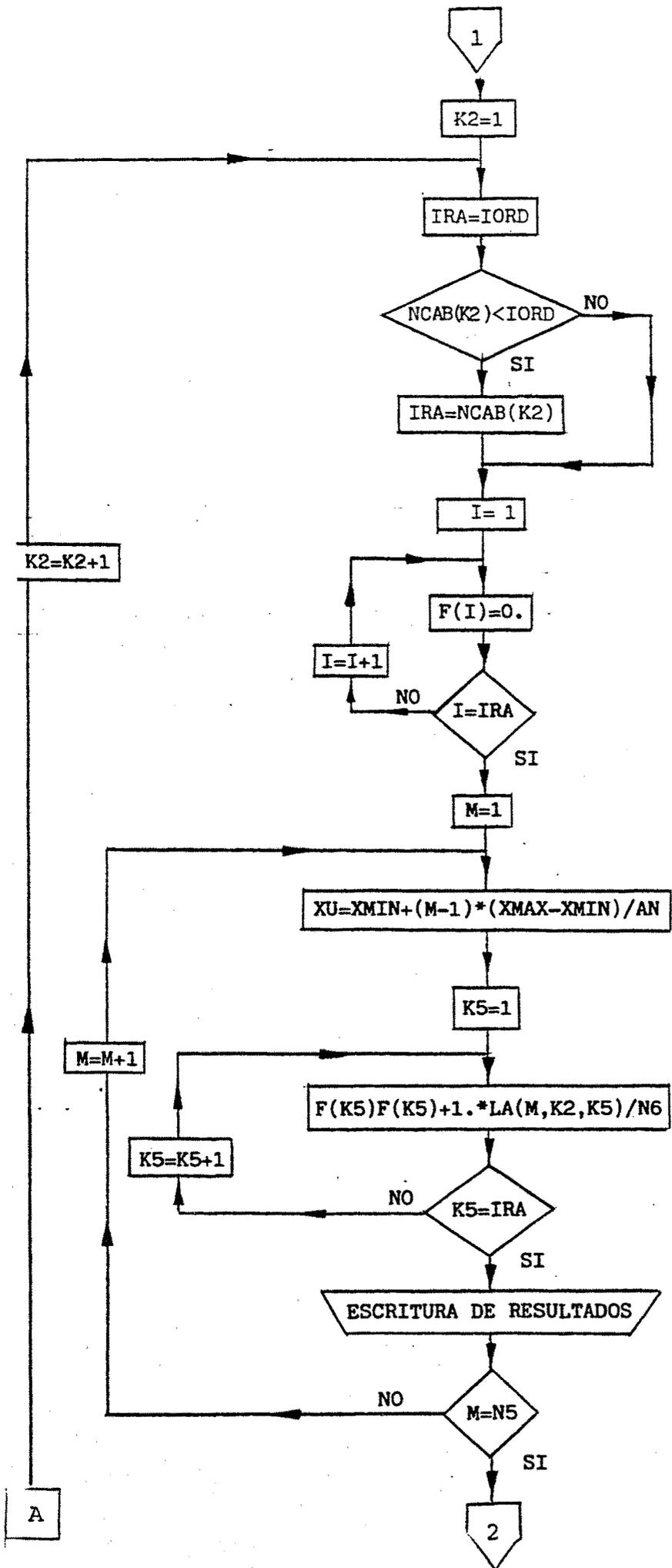
TE3

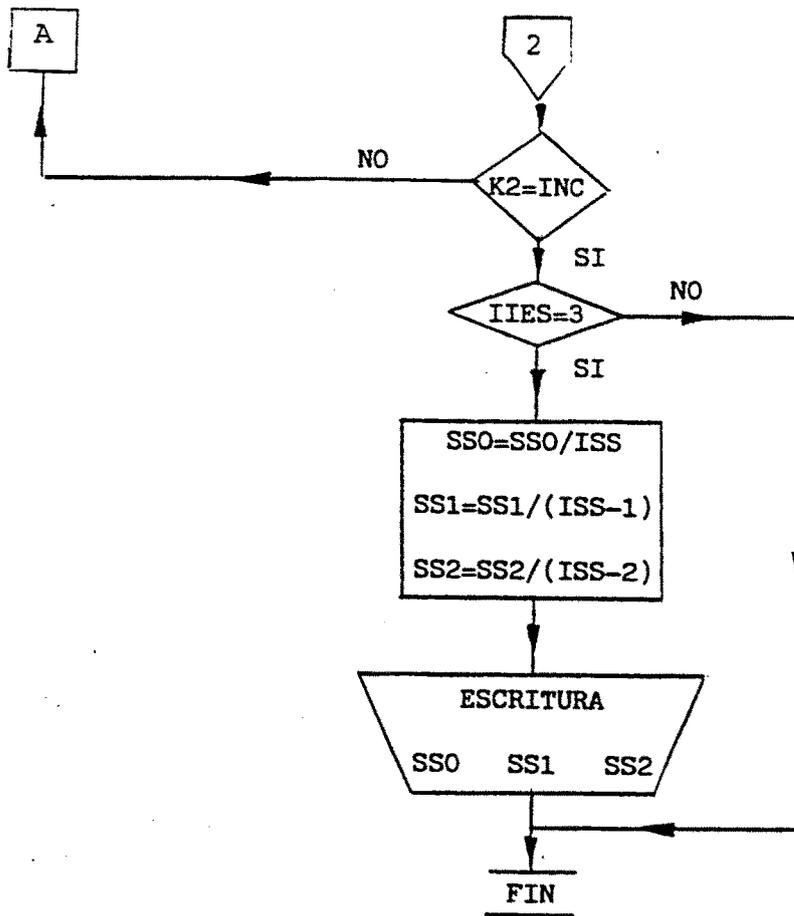
```
1:      COMPILER DOUBLE PRECISION
2:      DIMENSION CO(41),C(41,41)
3:      OPEN 1,"CTE3"
4:      OPEN 2,"RTE3",ATT="AP",LEN=132
5:      READ FREE(1)N1,IES,AM,ALR
6:      WRITE(2,100)N1,IES,AM,ALR
7:      100  FORMAT(" N="15" IES="15" AM="F9.2" ALR="F9.2")
8:      10   READ FREE (1)U
9:      WRITE FREE (2)" U=",U
10:      IF(U.EQ.999.) STOP
11:      DO 7 N=1,N1
12:      AN=N
13:      CO(1)=1
14:      DO 1 K=1,N
15:      AK=K
16:      Y=U*AN/AK
17:      IF(U.LT.0.)Y=U#N
18:      Y=Y-AM
19:      IND=-1
20:      IF(Y.LT.0.) GOTO 2000
21:      IND=1
22:      Y=-Y
23:      2000 CALL MDNORD(Y,F)
24:      IF(IND.LT.0) GOTO 2010
25:      F1=F
26:      F=1.-F1
27:      2010 CONTINUE
28:      F=1-(1-F)**ALR
29:      IF(IES.EQ.1)WRITE FREE (2)Y,F,"*****"
30:      IF(IND.LT.0)GOTO 2040
31:      CO(K+1)=CO(K)*(1.-F1**ALR)
32:      GOTO 2050
33:      2040 CONTINUE
34:      CO(K+1)=CO(K)*F
35:      2050 CONTINUE
36:      IF(K.EQ.1) GOTO 1000
37:      DO 2 J1=1,K-1
38:      AJ1=J1
39:      IF(IND.LT.0) GOTO 2020
40:      CO(K+1)=CO(K+1)+C(J1,K)*(1.-(AJ1+1.)#F1**ALR)/(AJ1+1.)
41:      GOTO 2
42:      2020 CONTINUE
43:      CO(K+1)=CO(K+1)+C(J1,K)*F**((J1+1)/(AJ1+1))
44:      2   CONTINUE
45:      1000 CO(K+1)=CO(K+1)#AK
46:      DO 3 J=1,K
47:      AJ=J
48:      IF(J.EQ.1) GOTO 20
49:      80  C(J,K+1)=-C(J-1,K)/AJ#AK
50:      GOTO 3
51:      20  C(J,K+1)=-CO(K)#AK
52:      3   IF (IES.EQ.1)WRITE FREE (2)J,K+1,C(J,K+1)
53:      1   CONTINUE
54:      200  FORMAT(" K="15" CO="F9.7" U="F3.3")
55:      7   WRITE(2,200)N,CO(N+1),U
56:      GOTO 10
57:      END
```

TE11

PRINCIPIO







TE11

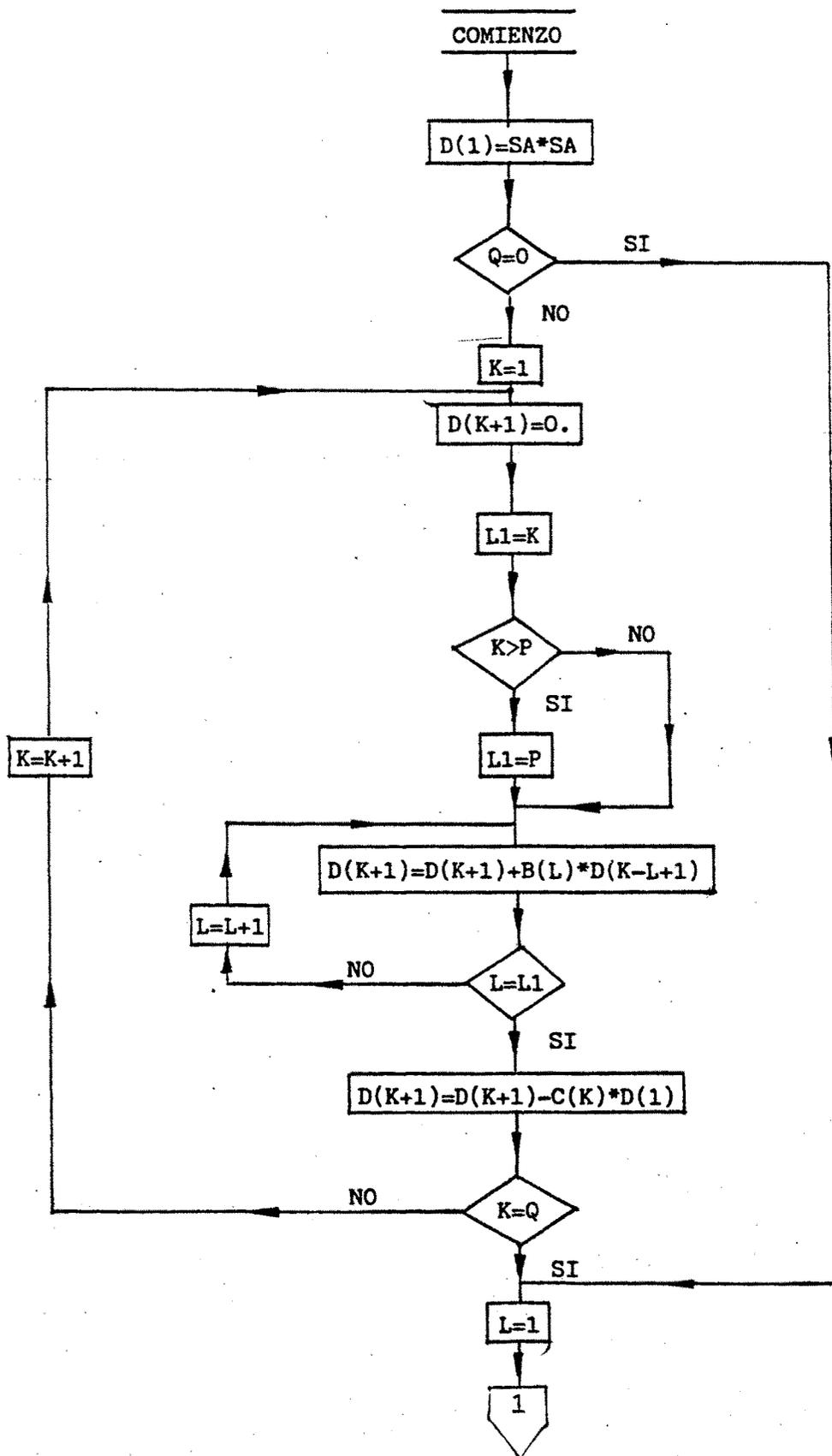
```
1: C ESTE PROGRAMA SIMULA N VECES UNA VARIABLE ALEATORIA QUE ES EL
2: C MINIMO DE N1 VALORES CONSECUTIVOS DE UNA SERIE TEMPORAL QUE
3: C RESPONDE A UN MODELO ARMA(P,Q) SIENDO Z(T) UNA VARIABLE
4: C N(C,SZ=#2). AL INICIALIZAR PARTE DE P VALORES NULOS DE Z(T)
5: C POR LO QUE PARA EVITAR SU INFLUENCIA NO CONSIDERA LOS NO
6: C PRIMEROS VALORES SIMULADOS Y SE QUEDA CON LOS RESTANTES.
7: C - LOS COEFICIENTES AUTOREGRESIVOS SON B(I) CON I=1,P
8: C - LOS COEFICIENTES DE MEDIA MOVIL SON C(I) CON I=1,Q
9: C - DSEED ES UNA VARIABLE QUE TOMA CUALQUIER VALOR. SE UTILIZA
0: C EN LA SIMULACION
1: C - IES ES UNA VARIABLE QUE CONTROLA LA ESCRITURA. SI VALE 1
2: C ESCRIBE SI VALE 0 NO ESCRIBE RESULTADOS INTERMEDIOS.
3: C EL PROGRAMA CALCULA EL VALOR DE SIGMA(A) PARA OBTENER UNA
4: C VARIANZA DE Z(T)=SZ=#2 (VER LIBRO DE BOX-JENKINS).
5:
6: DOUBLE PRECISION DSEED,A1(21,21),U(21,1)
7: DIMENSION A(20),B(20),C(20),D(20),Z(20),R(1)
8: DIMENSION F(10),LA(500,5,5),NCAB(10)
9: INTEGER P,Q,P1
0: COMMON /CK1/D,A1,U
1: COMMON /CK2/Z,R,A,NCAB,LA
2: COMMON /CK3/ZMEDIA,AMP,IPE,N6,XI,XMIN,N5,ZA2,ZA1,
3: 1 ZA0,SS0,SS1,SS2,ISS
4: COMMON /CK4/B,C
5: COMMON /BLOCK/ZM1(100)
6: DATA LA /1250#0/
7:
8: OPEN 1,"DTE11"
9: OPEN 2,"RT1",ATT="AP"
0: OPEN 3,"RT11",ATT="AP"
1:
2: READ FREE(1)ZMEDIA,XMAX,XMIN,AN,AMP,IPE
3: WRITE FREE(2)" ZMEDIA=",ZMEDIA
4: READ FREE(1)P,Q,SZ,NO,N,N1,DSEED,IES,IES0,IIES,N2
5: WRITE(2,1000)P,Q,SZ,NO,N,N1,DSEED,N2
6: 1000 FORMAT(" P="13," Q="13" SZ="F9.3" NO="13" N="15" LONG="13
7: 1 " DSEED="D14.8,1X"N2="13)
8: WRITE FREE (3)"NUMERO DE DATOS SIMULADOS=",N
9: IF(P.EQ.0)GO TO 10
0: READ FREE(1)(B(I),I=1,P)
1: WRITE FREE(2)" COEFICIENTES AUTOREGRESIVOS"
2: WRITE(2,1200)(B(I),I=1,P)
3: 1200 FORMAT(1X,10F10.3)
4: 10 IF(Q.EQ.0)GO TO 20
5: READ FREE(1)(C(I),I=1,Q)
6: WRITE FREE(2)" COEFICIENTES DE MEDIA MOVIL"
7: WRITE(2,1200)(C(I),I=1,Q)
8: 20 READ FREE (1) INC,ICRD
9: READ FREE (1) (NCAB(I),I=1,INC)
0:
1: SA=1.
2: ISS=0
3: SSC=0.
4: SS1=0.
5: SS2=0.
6: ZA0=0.
```

```
1:      ZA1=0.
2:      ZA2=0.
3:      N6=N
4:      XI=AN/(XMAX-XMIN)
5:      N5=AINT(AN)+2
6:
7: C***** SUBROUTINA DE CALCULO DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION
8:
9:      CALL AUTO(P,Q,SA,P1,IES)
10:     WRITE FREE(2)" FUNCION DE AUTOCORRELACION"
11:     CCCR=SQRT(U(1,1))
12:     WRITE FREE(2)(U(I,1)/CCOR,I=1,P1)
13:     SA=SZ/SQRT(U(1,1))
14:     WRITE FREE(2)" SA=",SA
15:     WRITE FREE(2)"XMIN,XMAX",XMIN,XMAX
16:
17: C***** SUBROUTINA DE SIMULACION, SEGUN EL MODELO ARMA(P,Q) DE
18: C***** BOX-JENKINS. LOS RESULTADOS LOS ALMACENA EN LA MATRIZ "LA"
19:
20:     CALL SIMUL(P,Q,SA,DSEED,N,INC,IORD,N1,NO,NZ,IES,IESO,IIES)
21:
22: C***** ESCRITURA DE RESULTADOS
23:
24:     DO 60 K2=1,INC
25:     WRITE(3,1300)NCAB(K2),N1
26:     1300   FORMAT(///1X," NCAB="I3,5X," N1="I5,/)
27:     WRITE(3,1400)
28:     1400   FORMAT(15X,Z)
29:     IRA=IORD
30:     IF(NCAB(K2).LT.IORD) IRA=NCAB(K2)
31:
32:     1500   FORMAT(" ",5X,"R=",I3,5X,Z)
33:     WRITE FREE(3)"<NL><NL>"
34:     DO 30 I=1,IRA
35:     F(I)=0.
36:     30     CONTINUE
37:     DO 50 M=1,N5
38:     XU=XMIN+(M-1)*(XMAX-XMIN)/AN
39:     DO 40 K5=1,IRA
40:     F(K5)=F(K5)+1.*LA(M,K2,K5)/N6
41:     40     CONTINUE
42:     WRITE(3,1600) XU
43:     1600   FORMAT(1X,F9.3,5X,Z)
44:     WRITE(3,1700)((LA(M,K2,K5),F(K5)),K5=1,IRA)
45:     1700   FORMAT(" ",I5,F10.6,Z)
46:     50     CONTINUE
47:     60     CONTINUE
48:
49:     IF(IIES.NE.3) GOTO 70
50:     SS0=SS0/ISS
51:     SS1=SS1/(ISS-1)
52:     SS2=SS2/(ISS-2)
53:     WRITE FREE(3)ISS,"COVARIANZAS",SS0,SS1,SS2
54:     70     CONTINUE
```

```
1:  
2: C##### FIN DEL PROGRAMA  
3:  
4:         CLOSE 1  
5:         CLOSE 2  
6:         CLOSE 3  
7:         STOP  
8:         END
```

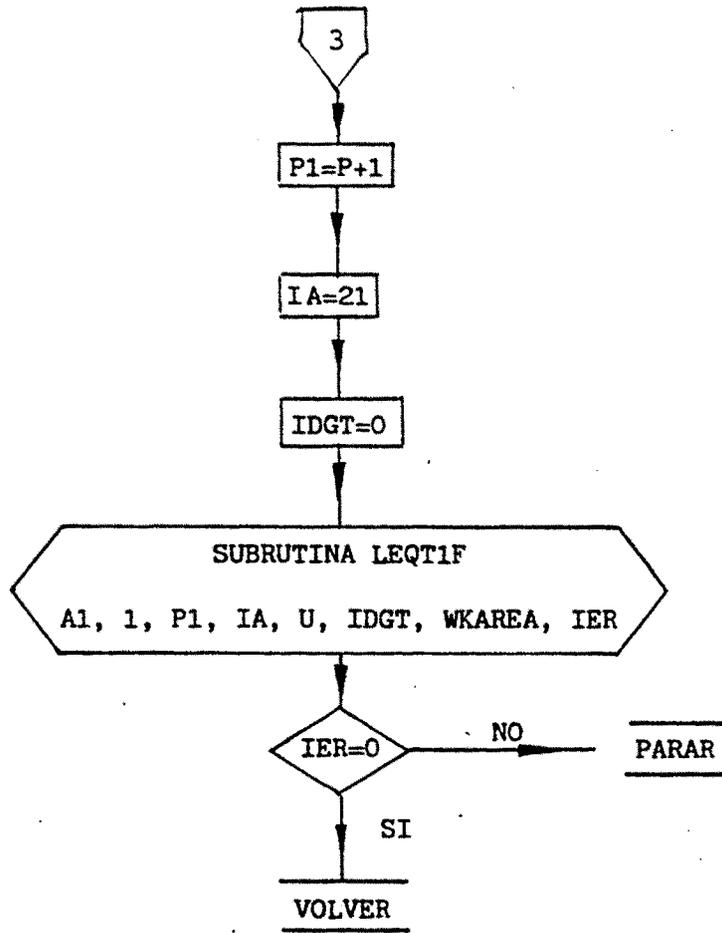
SUBRUTINA AUTO

P, Q, SA, IES







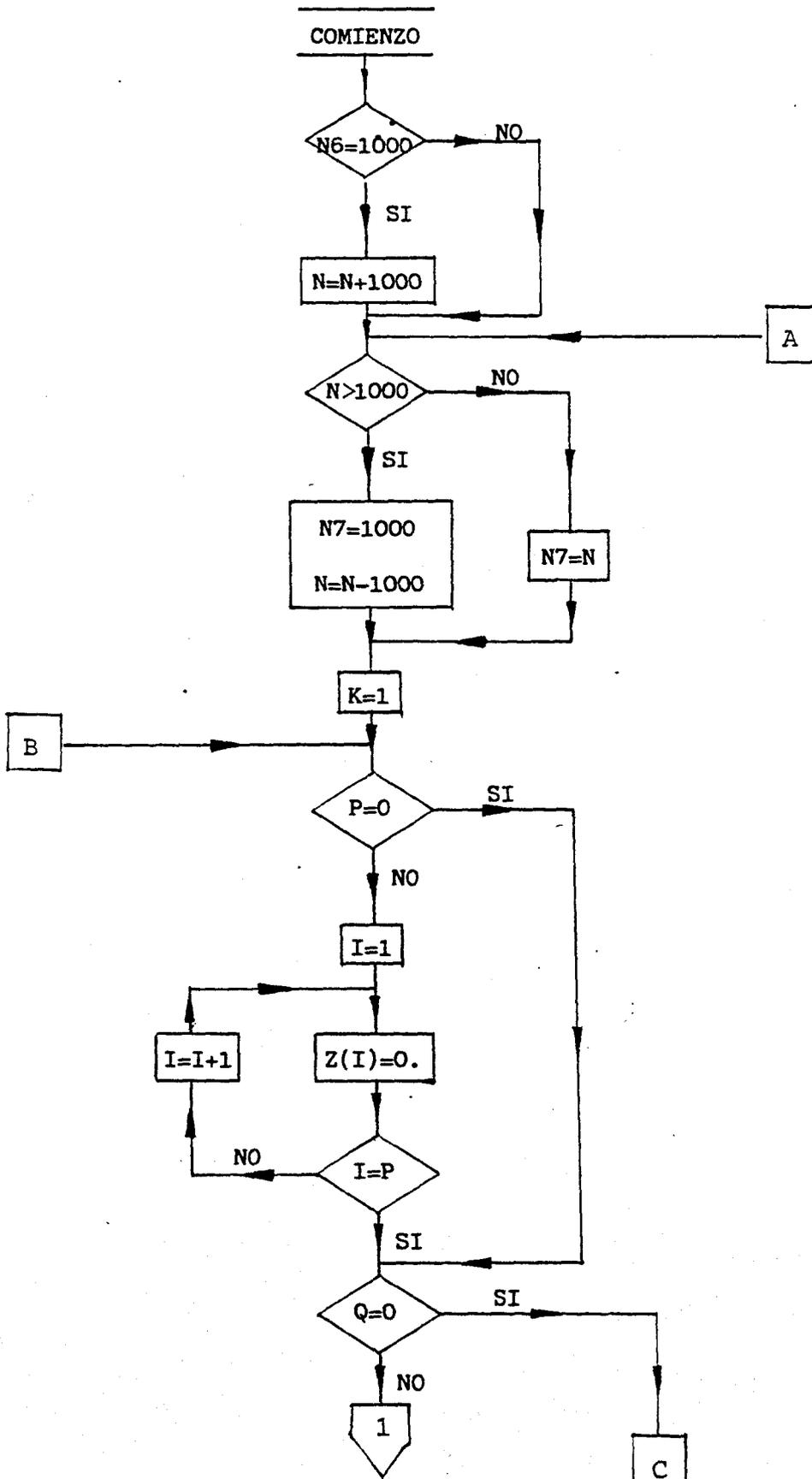


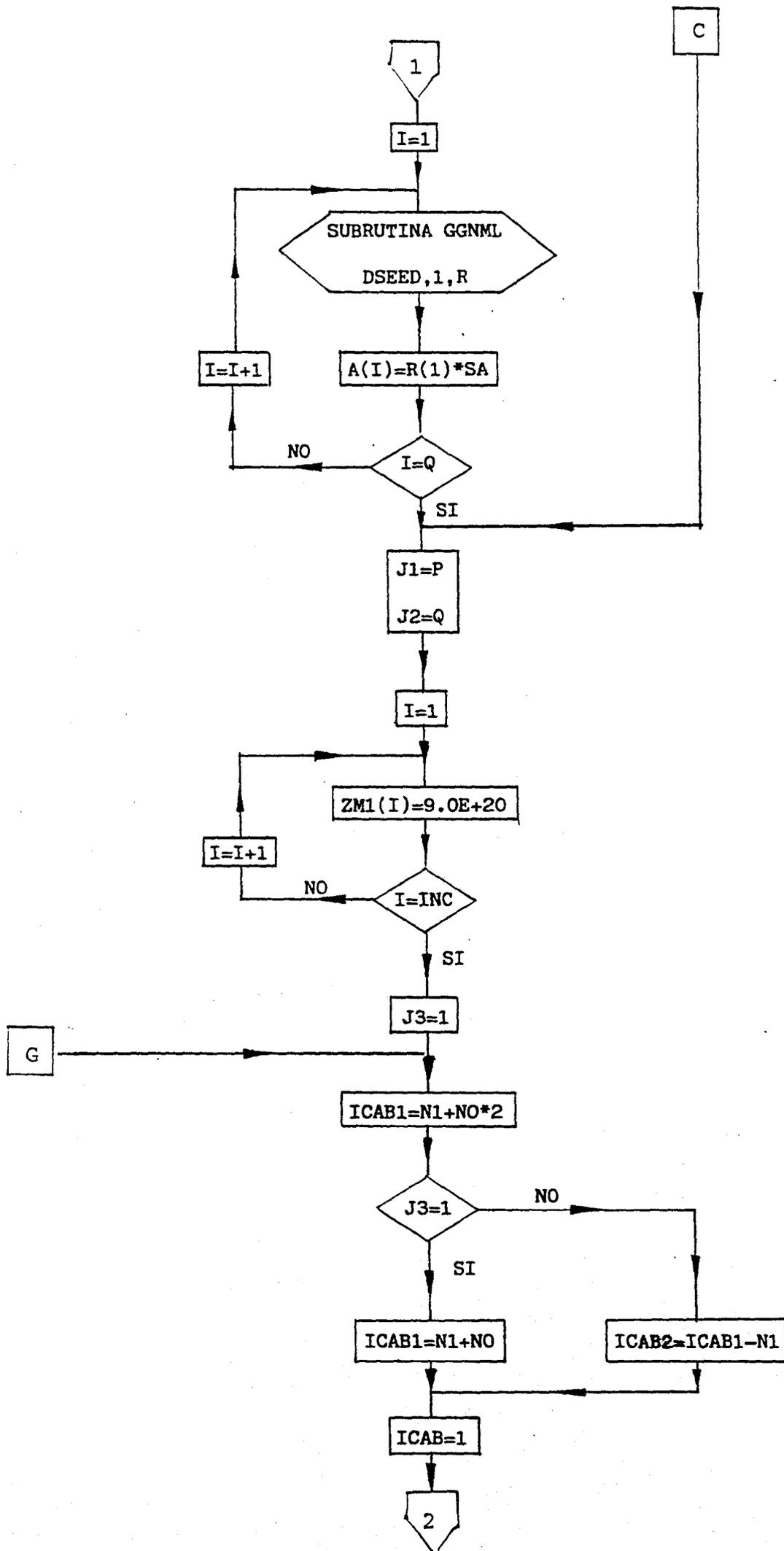
TEIC

```
1: C***** SUBROUTINA DE CALCULO DE LA FUNCION DE AUTOCORRELACION
2:
3: SUBROUTINE AUTO(P,Q,SA,P1,IES)
4:
5: DOUBLE PRECISION A1(21,21),WKAREA(21),U(21,1)
6: INTEGER P,Q,P1
7: COMMON /CK1/D(20),A1,U
8: COMMON /CK4/ B(20),C(20)
9:
10: D(1)=SA*SA
11: IF(IES.EQ.1) WRITE FREE(2)" VALORES DE GAMMA(Z,A)"
12: IF(IES.EQ.1) WRITE FREE(2)0,D(1)
13: IF(Q.EQ.0)GO TO 30
14: DO 20 K=1,Q
15: D(K+1)=0.
16: L1=K
17: IF(K.GT.P)L1=P
18: DO 10 L=1,L1
19: 10 D(K+1)=D(K+1)+B(L)*D(K-L+1)
20: D(K+1)=D(K+1)-C(K)*D(1)
21: IF(IES.EQ.1)WRITE FREE(2)K,D(K+1)
22: 20 CONTINUE
23: 30 DO 40 L=1,P+1
24: DO 40 LJ=1,P+1
25: 40 A1(L,LJ)=0.
26: DO 50 K=0,P
27: A1(K+1,K+1)=-1.
28: DO 50 J=1,P
29: K1=K-J
30: IF(K1.LT.0)K1=-K1
31: 50 A1(K+1,K1+1)=A1(K+1,K1+1)+B(J)
32: DO 70 K=0,P
33: K1=-K+1
34: U(K+1,1)=0.
35: IF(K1.GT.0)U(K+1,1)=-D(K1)
36: IF(Q.EQ.0)GO TO 70
37: DO 60 L=1,Q
38: K1=-K+L+1
39: IF(K1.GT.0)U(K+1,1)=U(K+1,1)+C(L)*D(K1)
40: 60 CONTINUE
41: 70 CONTINUE
42:
43: P1=P+1
44: IF(IES.EQ.1)WRITE FREE(2)((A1(I,J),J=1,P1),I=1,P1)
45: IF(IES.EQ.1)WRITE FREE(2)(U(I,1),I=1,P1)
46: IA=21
47: IDGT=0
48: CALL LEQT1F(A1,1,P1,IA,U,IDGT,WKAREA,IER) ; INVERSION DE "A1"
49: IF(IER.EQ.0)GO TO 80
50: WRITE FREE(2)" ERROR EN SUBROUTINA LEQT1F IER=",IER
51:
52: C***** FIN DE LA SUBROUTINA
53:
54: STOP
55: 80 RETURN
56: END
```

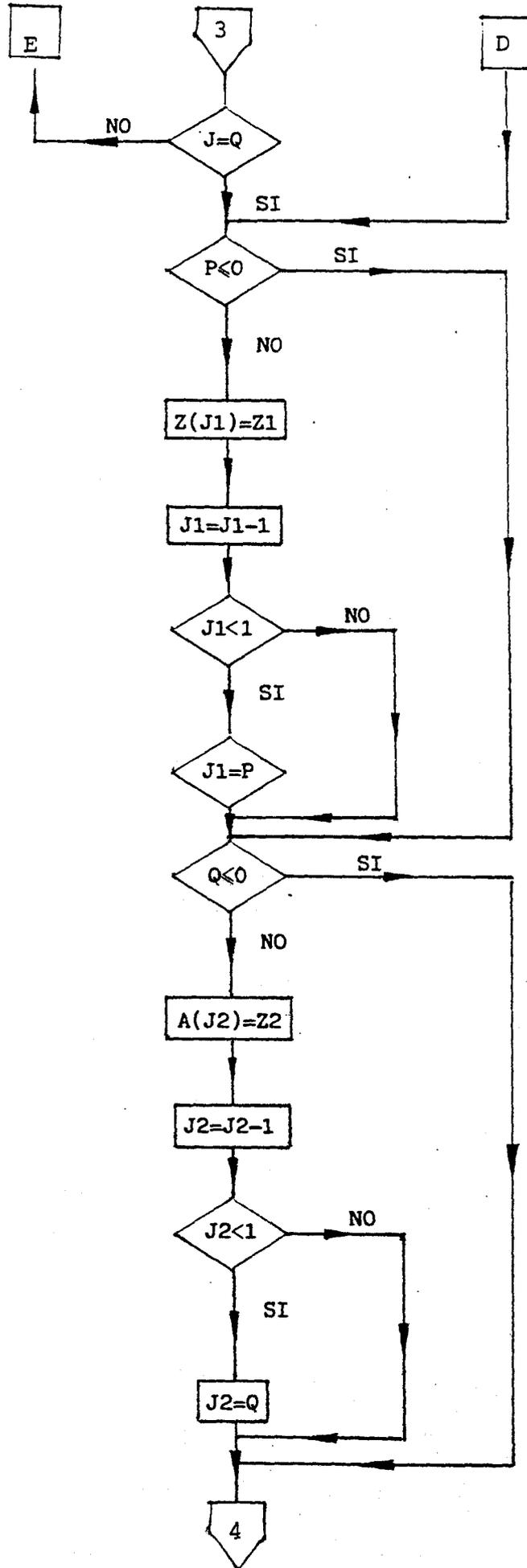
SUBROUTINA SIMUL

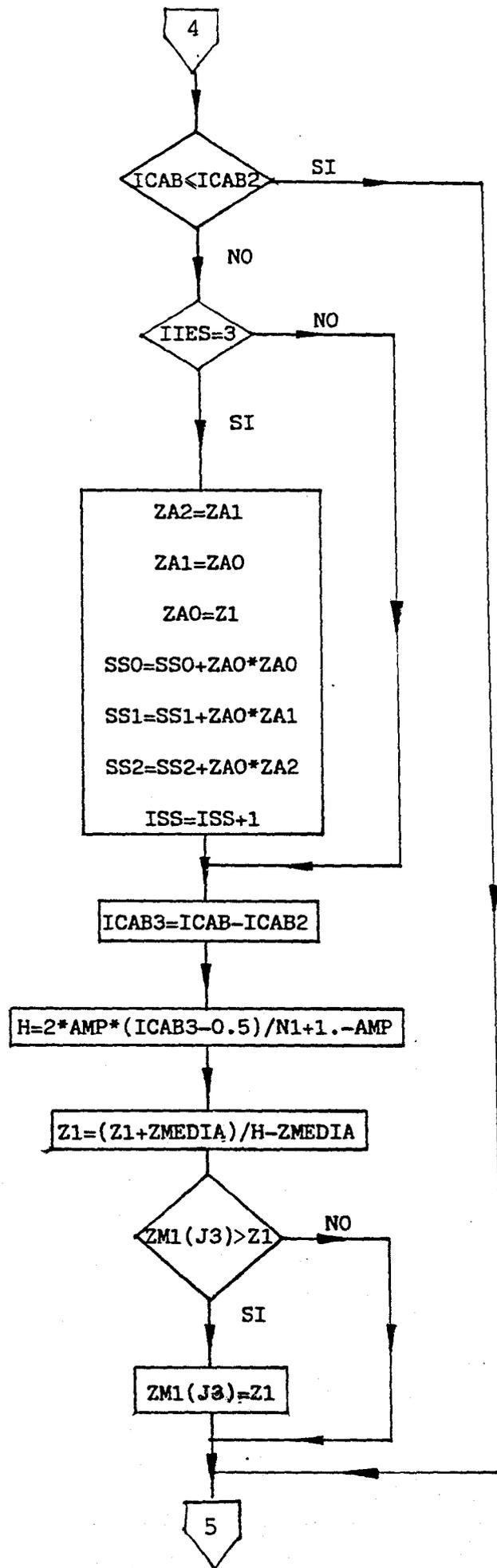
P, Q, SA, DSEED, N, INC, IORD, N1, NO, IES, IESO, IIES

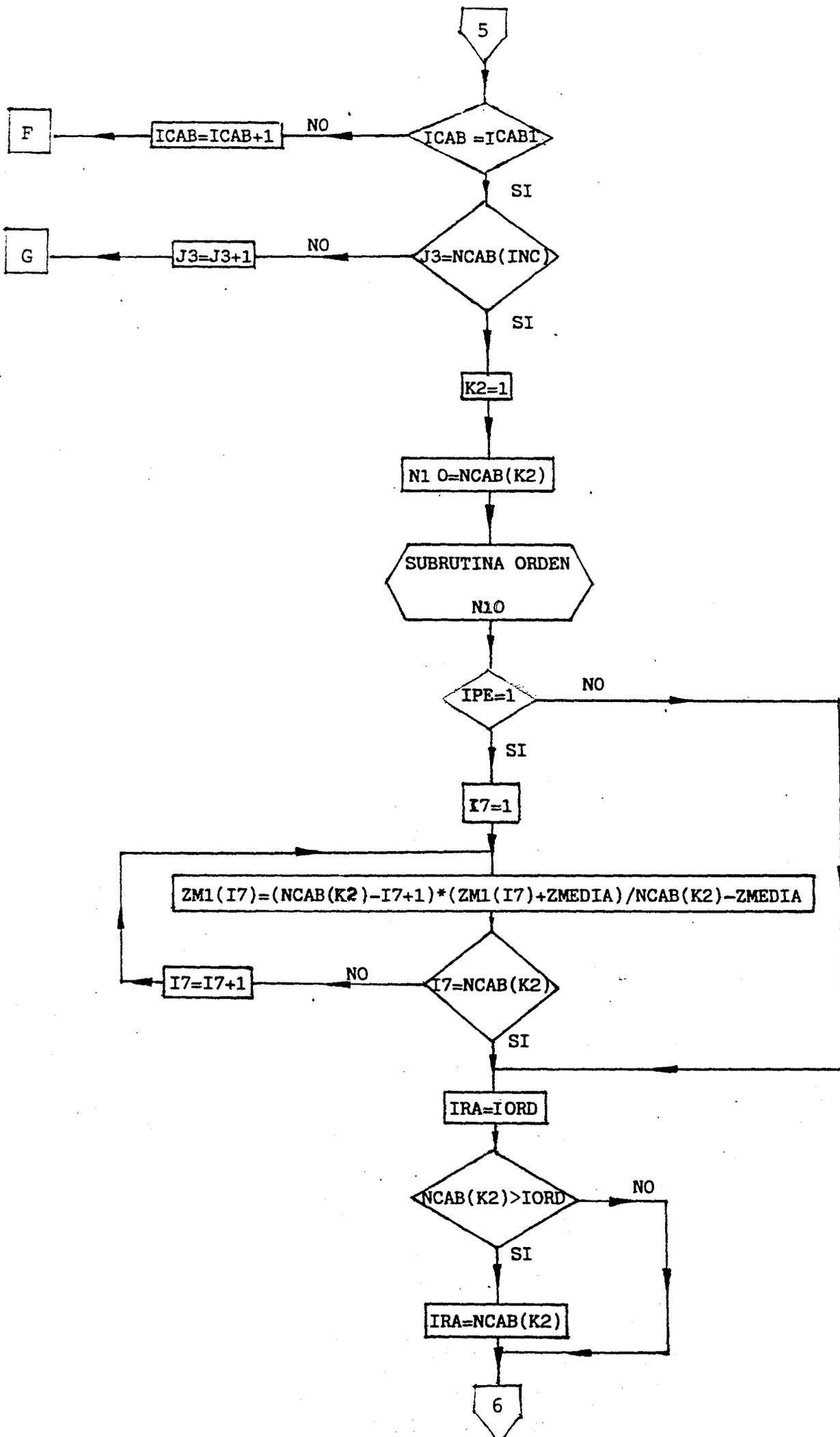


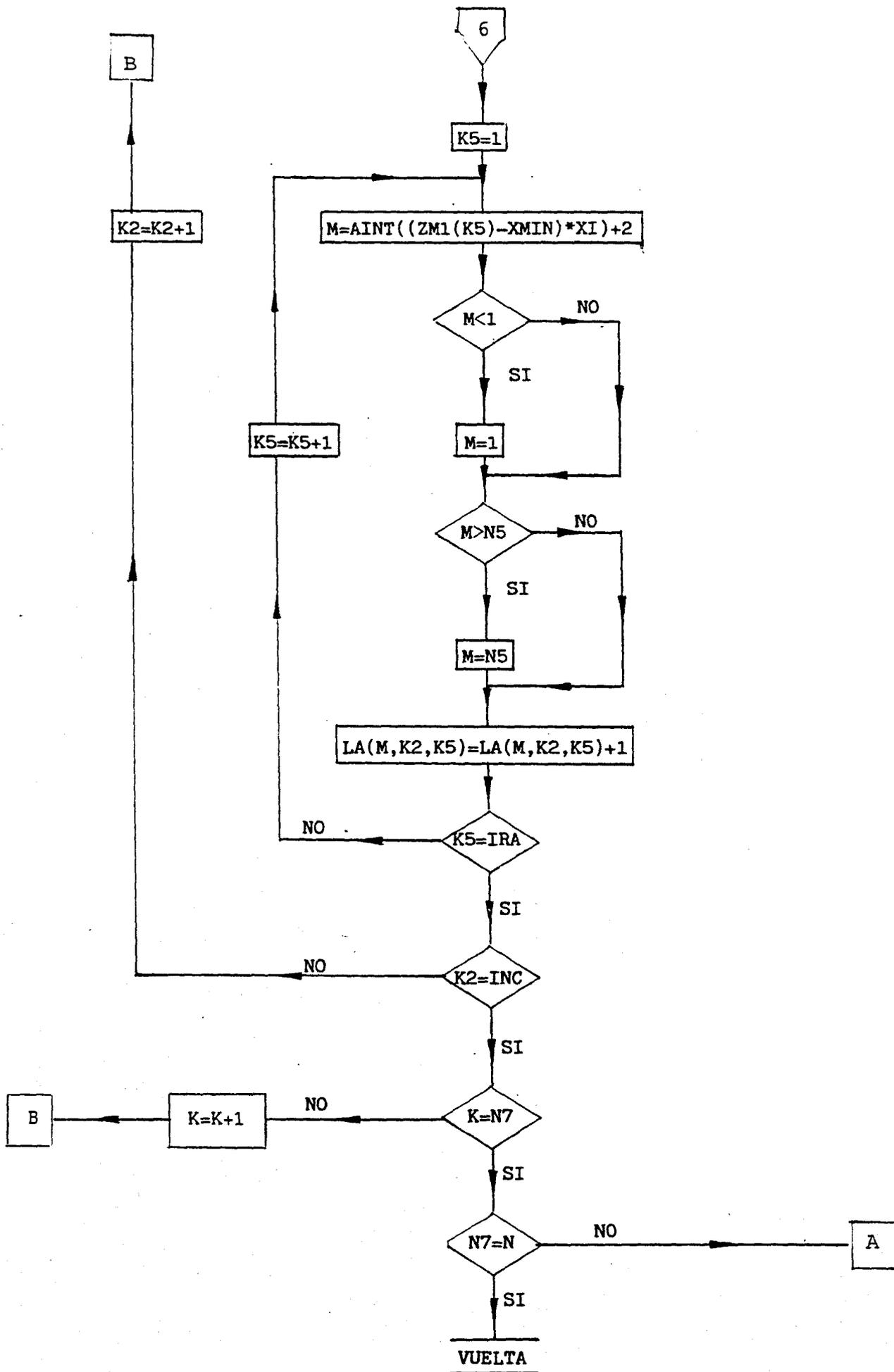












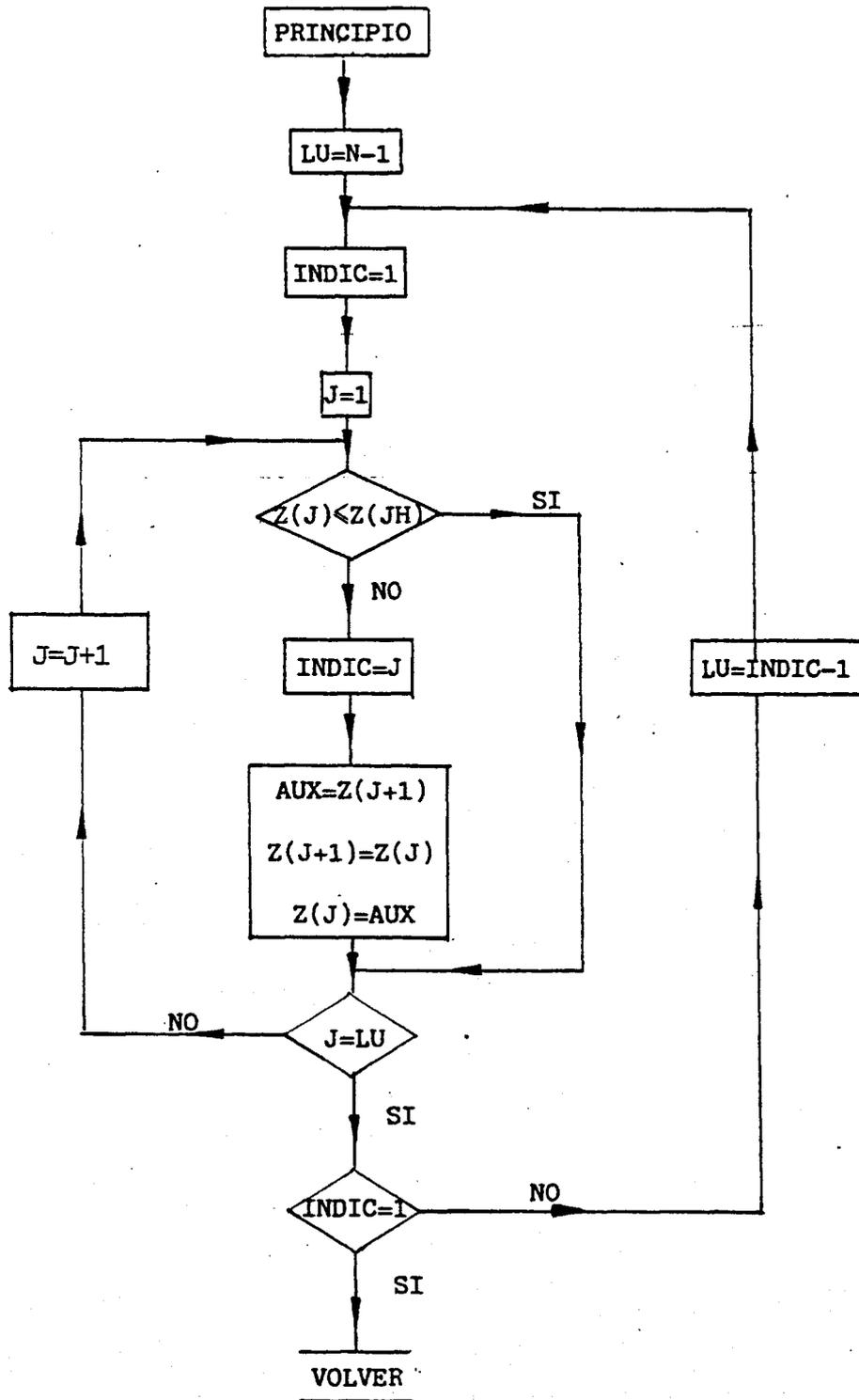
TE12

```
1: C##### SUBROUTINA DE SIMULACION, SEGUN MODELO ARMA(P,Q) DE BOX-JENKINS
2:
3: SUBROUTINE SIMUL(P,Q,SA,DSEED,N,INC,ICRD,N1,NO,N2,IES,IESO,IES)
4:
5: DOUBLE PRECISION DSEED
6: INTEGER P,Q
7: COMMON /CK2/Z(20),R(1),A(20),NCAB(10),LA(500,5,5)
8: COMMON /BLOCK/ZM1(100)
9: COMMON /CK3/ZMEDIA,AMP,IPE,N6,XI,XMIN,N5,ZA2,ZA1,
10: 1 ZAO,SSO,SS1,SS2,ISS
11: COMMON /CK4/B(20),C(20)
12:
13: IF ((N6/1000.-INT(N6/1000.)).GT.0.00001)GOTO 10
14: N=N+1000
15: 10 IF(N.GT.1000)GO TO 20
16: N7=N
17: GO TO 30
18: 20 N7=1000
19: N=N-1000
20:
21: 30 DO 220 K=1,N7
22: IF(P.EQ.0)GO TO 50
23: DO 40 I=1,P
24: 40 Z(I)=0.
25: 50 IF(Q.EQ.0)GO TO 70
26: DO 60 I=1,Q
27: CALL GGNML(DSEED,I,R)
28: 60 A(I)=R(1)*SA
29: 70 J1=P
30: J2=Q
31: DO 80 I=1,NCAB(INC)
32: ZM1(I)=9.0E+20
33: 80 CONTINUE
34: DO 190 J3=1,NCAB(INC)
35: ICAB1=N1+NO*N2
36: IF(J3.EQ.1)ICAB1=N1+NO
37: ICAB2=ICAB1-N1
38: DO 190 ICAB=1,ICAB1
39: IF(IES.EQ.0)GO TO 90
40: WRITE(2,1000)(Z(J4),J4=1,P)
41: WRITE(2,1000)(A(J4),J4=1,Q)
42: 1000 FORMAT(1X,10F10.3)
43: 90 CALL GGNML(DSEED,I,R)
44: Z1=R(1)*SA
45: Z2=Z1
46: IF(P.EQ.0)GO TO 120
47: DO 110 J=1,P
48: IF(J+J1.GT.P) GO TO 100
49: Z1=Z1+B(J)*Z(J1+J)
50: GO TO 110
51: 100 Z1=Z1+B(J)*Z(J1+J-P)
52: 110 CONTINUE
53: 120 IF(Q.EQ.0)GO TO 150
54: DO 140 J=1,Q
55: IF(J+J2.GT.0)GO TO 130
```

```
56:      Z1=Z1-C(J)*A(J2+J)
57:      GO TO 140
58: 130    Z1=Z1-C(J)*A(J2+J-0)
59: 140    CONTINUE
60: 150    IF(P.LE.0) GOTO 160
61:      Z(J1)=Z1
62:      J1=J1-1
63:      IF(J1.LT.1)J1=P
64: 160    IF(Q.LE.0) GOTO 170
65:      A(J2)=Z2
66:      J2=J2-1
67:      IF(J2.LT.1)J2=Q
68: 170    IF(ICAB.LE.ICAB2) GOTO 190
69:      IF(IIES.NE.3) GOTO 180
70:      Z42=Z41
71:      Z41=Z40
72:      Z40=Z1
73:      S50=S50+Z40*Z40
74:      S51=S51+Z40*Z41
75:      S52=S52+Z40*Z42
76:      ISS=ISS+1
77: 180    CONTINUE
78:      ICAB3=ICAB-ICAB2
79:      H=Z*AMP*(ICAB3-.5)/N1+1.-AMP
80:      Z1=(Z1+ZMEDIA)/H-ZMEDIA
81:      IF(ZM1(J3).GT.Z1) ZM1(J3)=Z1
82: 190    CONTINUE
83:      DO 210 K2=1,INC
84:      N10=NCAB(K2)
85:      CALL ORDEN(N10) ;ORDENACION DE NCAB(K2) VALORES
86:      IF(IPE.NE.1) GOTO 13
87:      DO 12 I7=1,NCAB(K2)
88:      ZM1(I7)=(NCAB(K2)-I7+1)*(ZM1(I7)+ZMEDIA)/NCAB(K2)-ZMEDIA
89: 12    CONTINUE
90:      CALL ORDEN(N10)
91: 13    IRA=IORD
92:      IF(NCAB(K2).LT.IORD) IRA=NCAB(K2)
93:      DO 200 K5=1,IRA
94:      M=AIWT((ZM1(K5)-XMIN)*X1)+2
95:      IF(IESD.EQ.1) WRITE FREE(3) M,ZM1(K5)
96:      IF(*.LT.1)*M=1
97:      IF(M.GT.N5)M=N5
98:      LA(M,K2,K5)=LA(M,K2,K5)+1
99: 200    CONTINUE
00: 210    CONTINUE
01: 220    CONTINUE
02:      IF(N7.EQ.N)GO TO 230
03:      GO TO 10
04:
05: C***** FIN DE LA SUBROUTINA
06:
07: 230    RETURN
08:      END
```

SUBROUTINA ORDEN

N

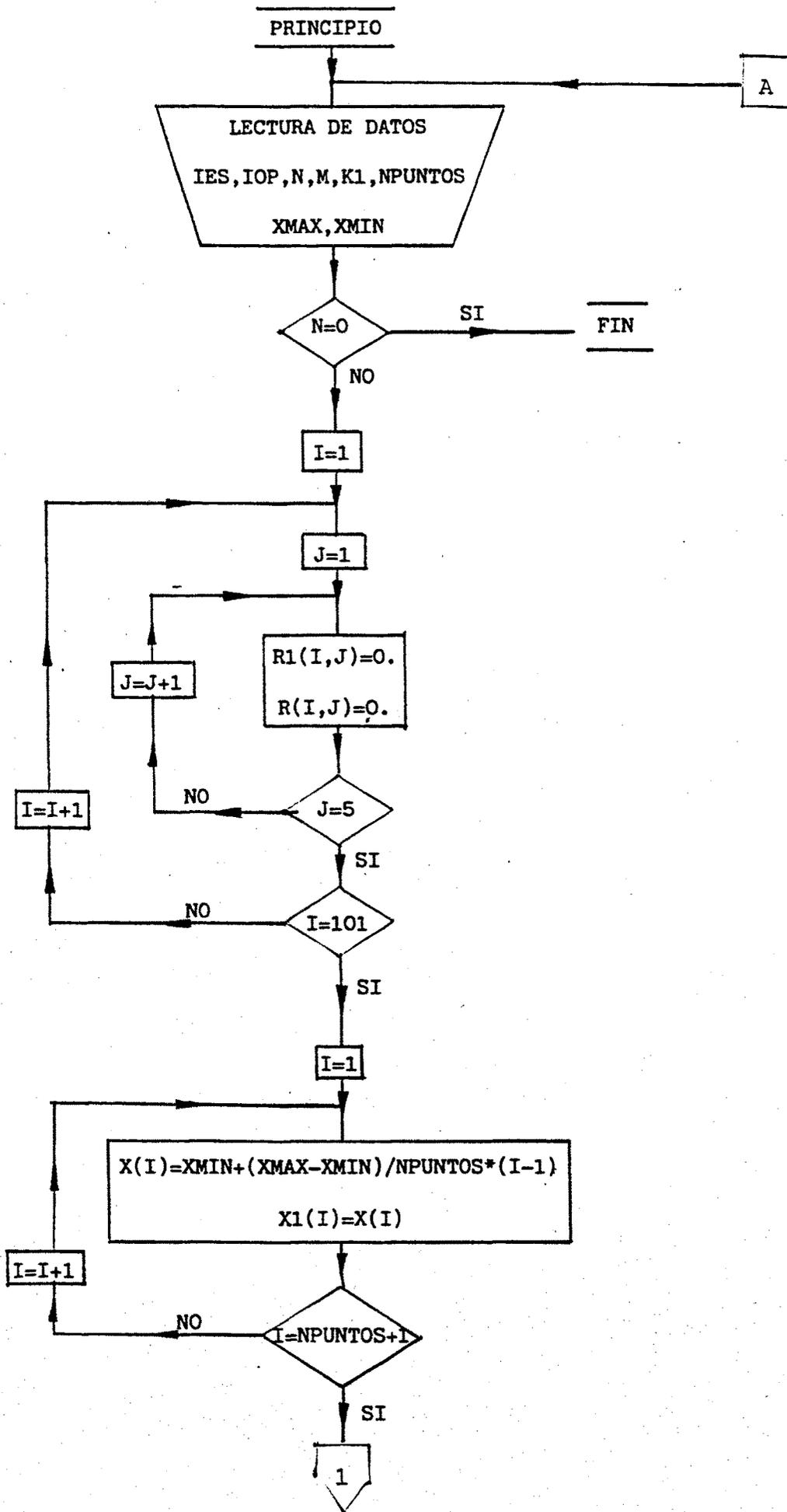


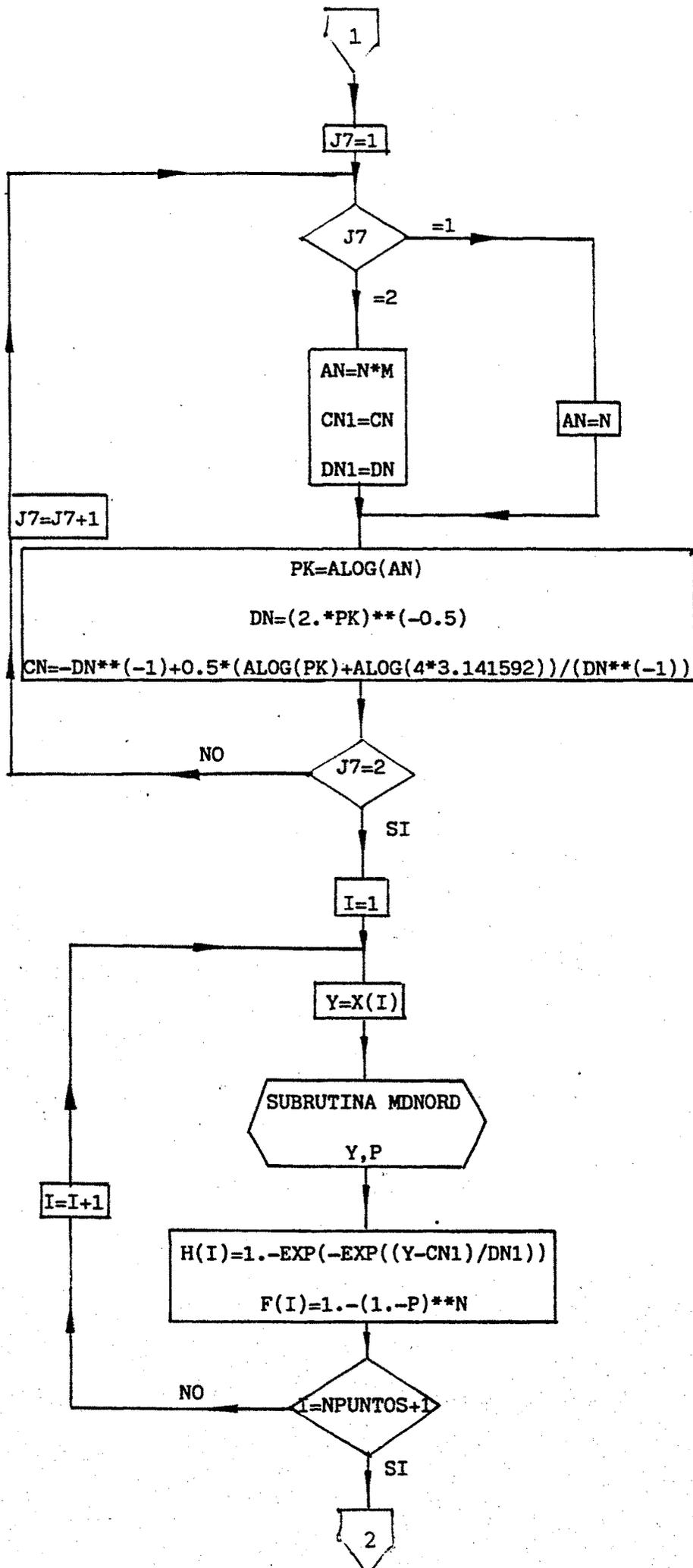
ADS FORTRAN 5, VERSION 6.13 -- THURSDAY, JUNE 9, 1983 10:25:41 AM

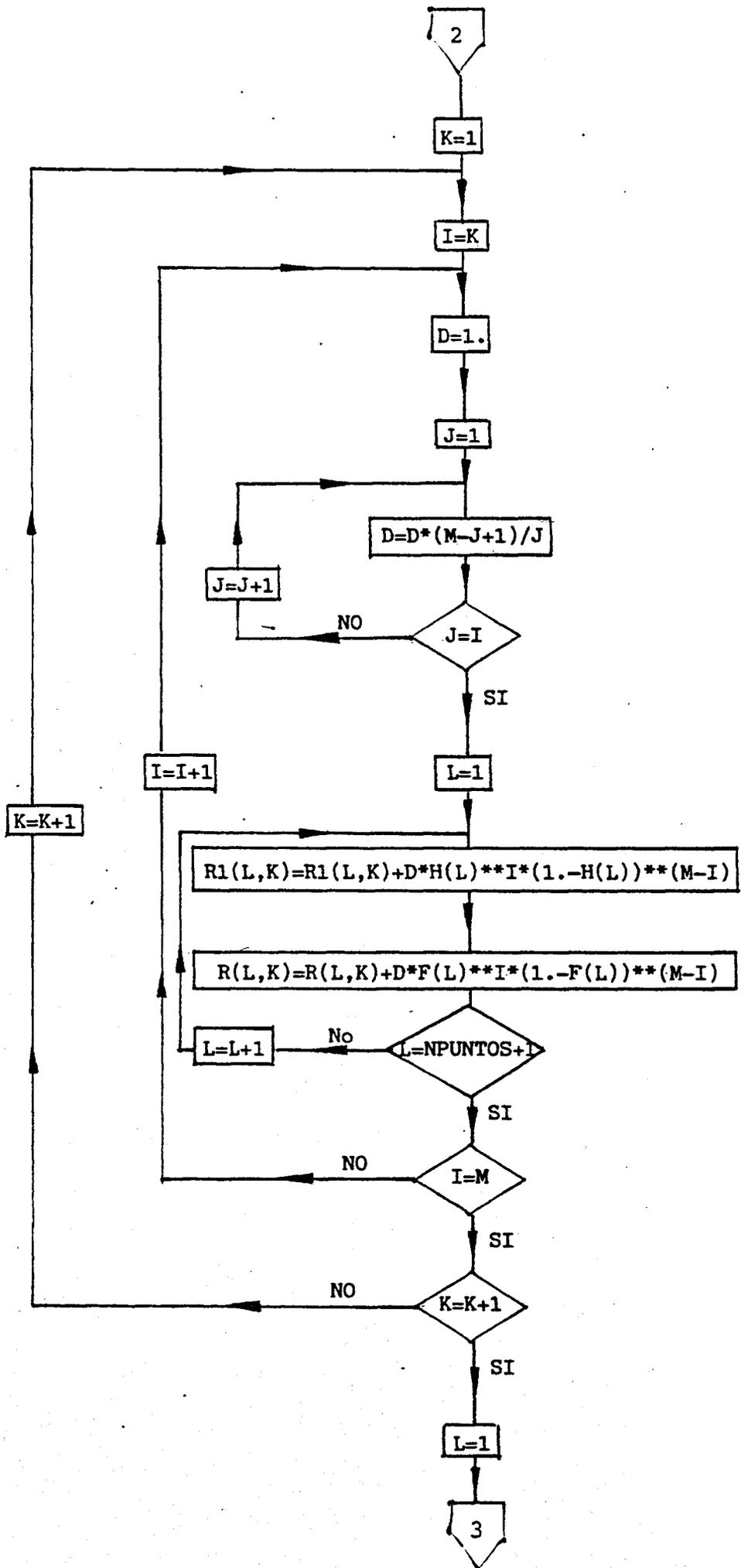
TE13

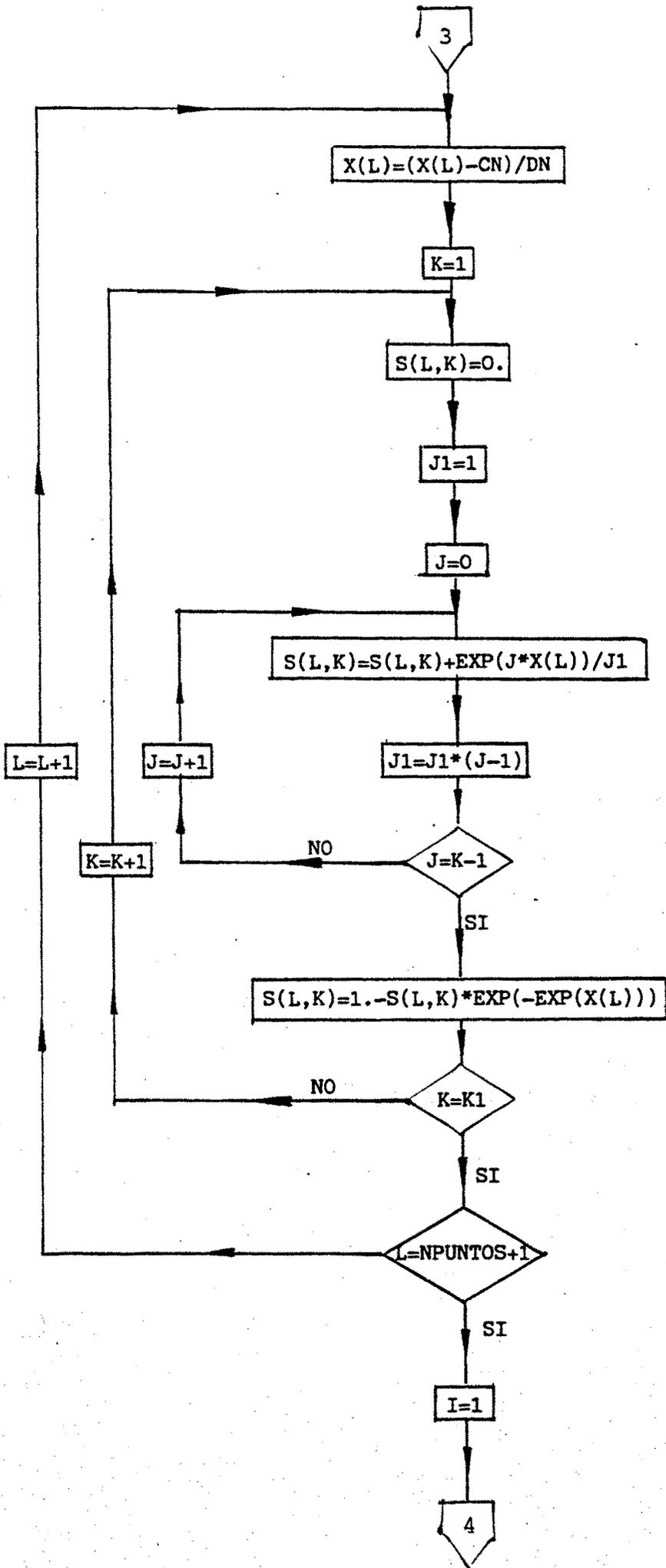
```
1: C***** SUBROUTINA DE ORDENACION DE LAS N PRIMERAS
2: C***** COMPONENTES DEL VECTOR "Z"
3:
4: SUBROUTINE ORDEN(N)
5:
6: COMMON /BLOCK/Z(100)
7:
8: LU=N-1
9: 10 INDIC=1
10: DO 20 J=1,LU
11: IF(Z(J)-LE-Z(J+1)) GOTO 20
12: INDIC=J
13: AUX=Z(J+1)
14: Z(J+1)=Z(J)
15: Z(J)=AUX
16: 20 CONTINUE
17: IF(INDIC.EQ.1) GOTO 30
18: LU=INDIC-1
19: GOTO 10
20: 30 CONTINUE
21:
22: RETURN
23: END
```

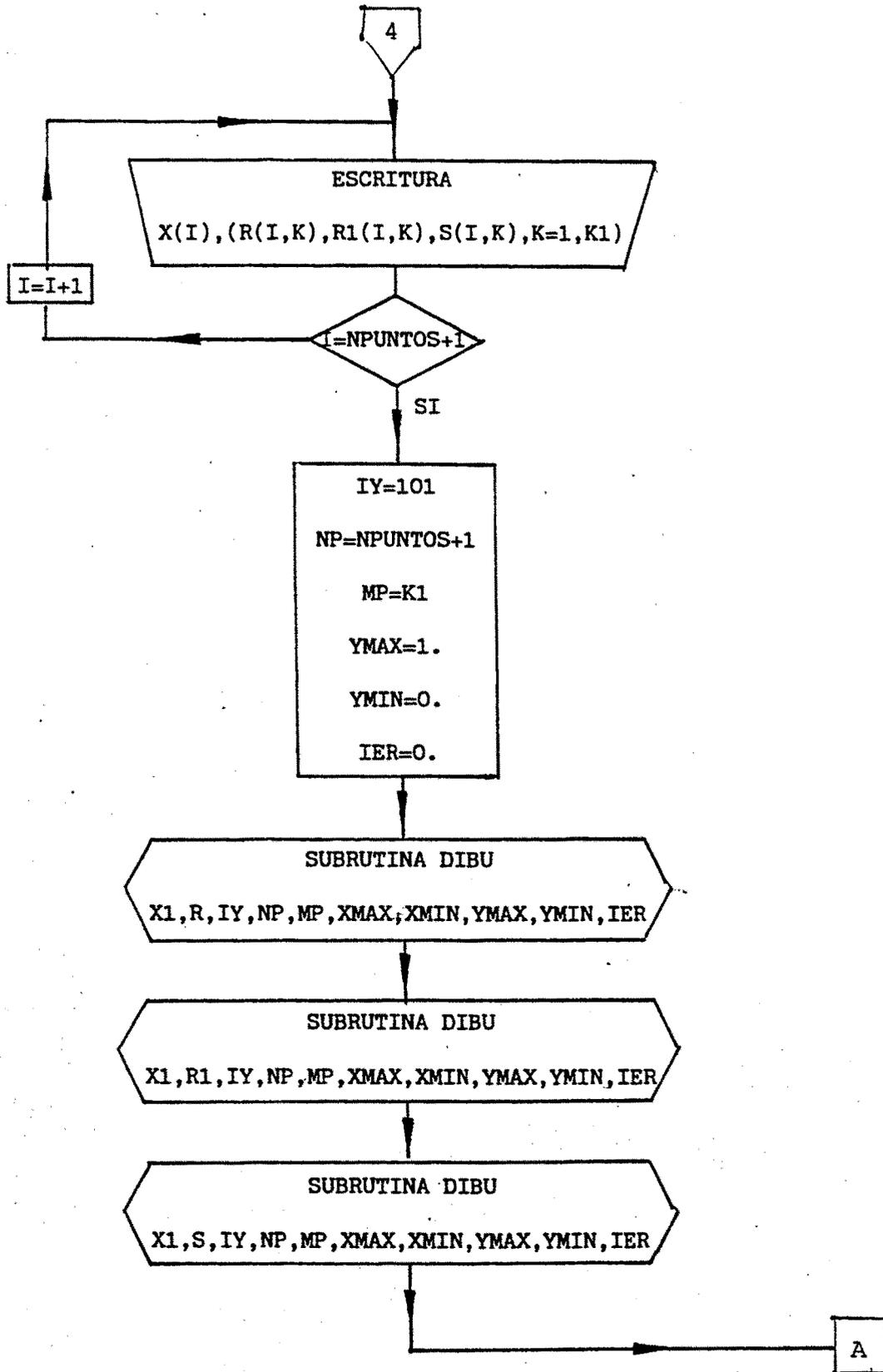
INDEP9











INDEP9

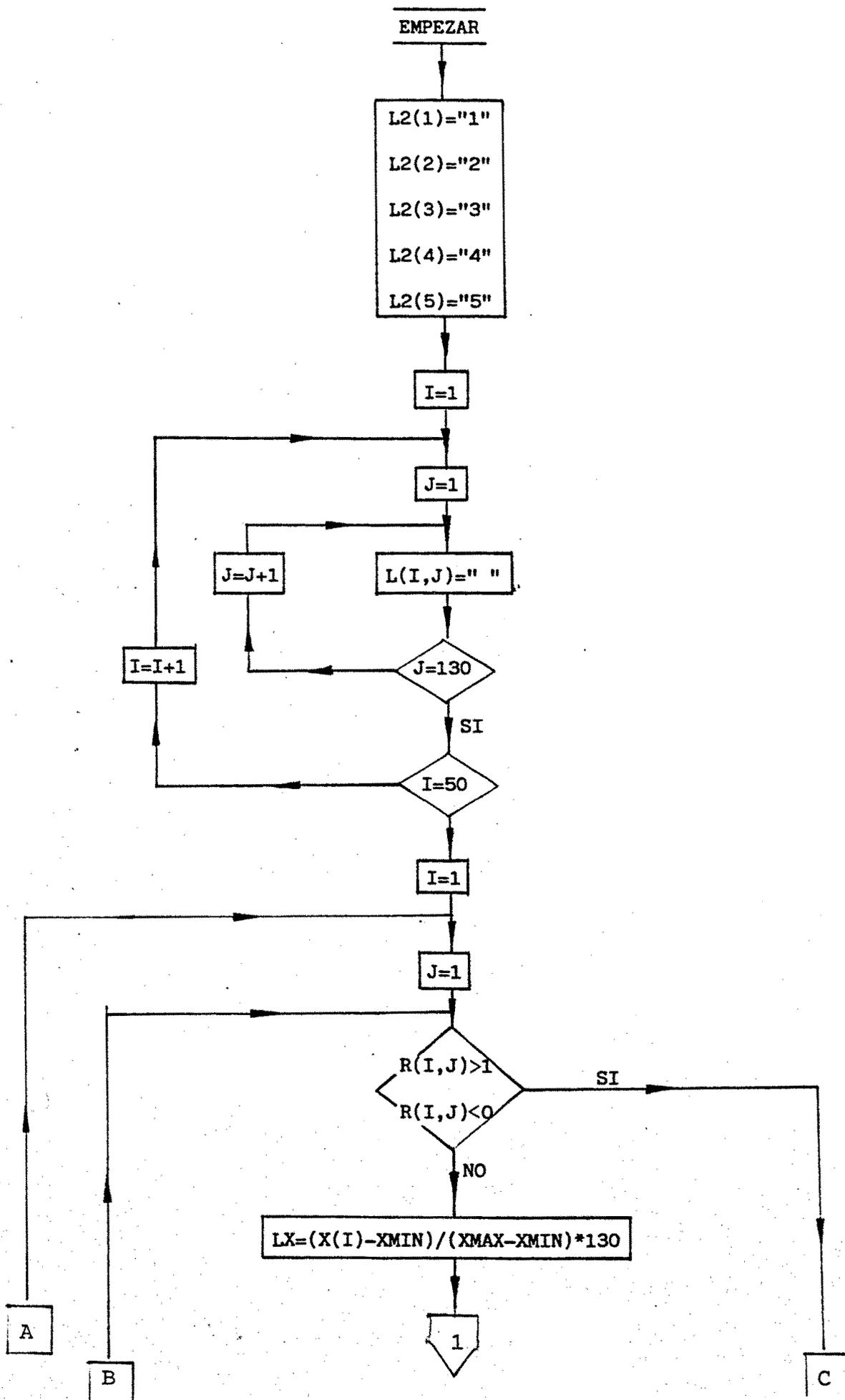
```

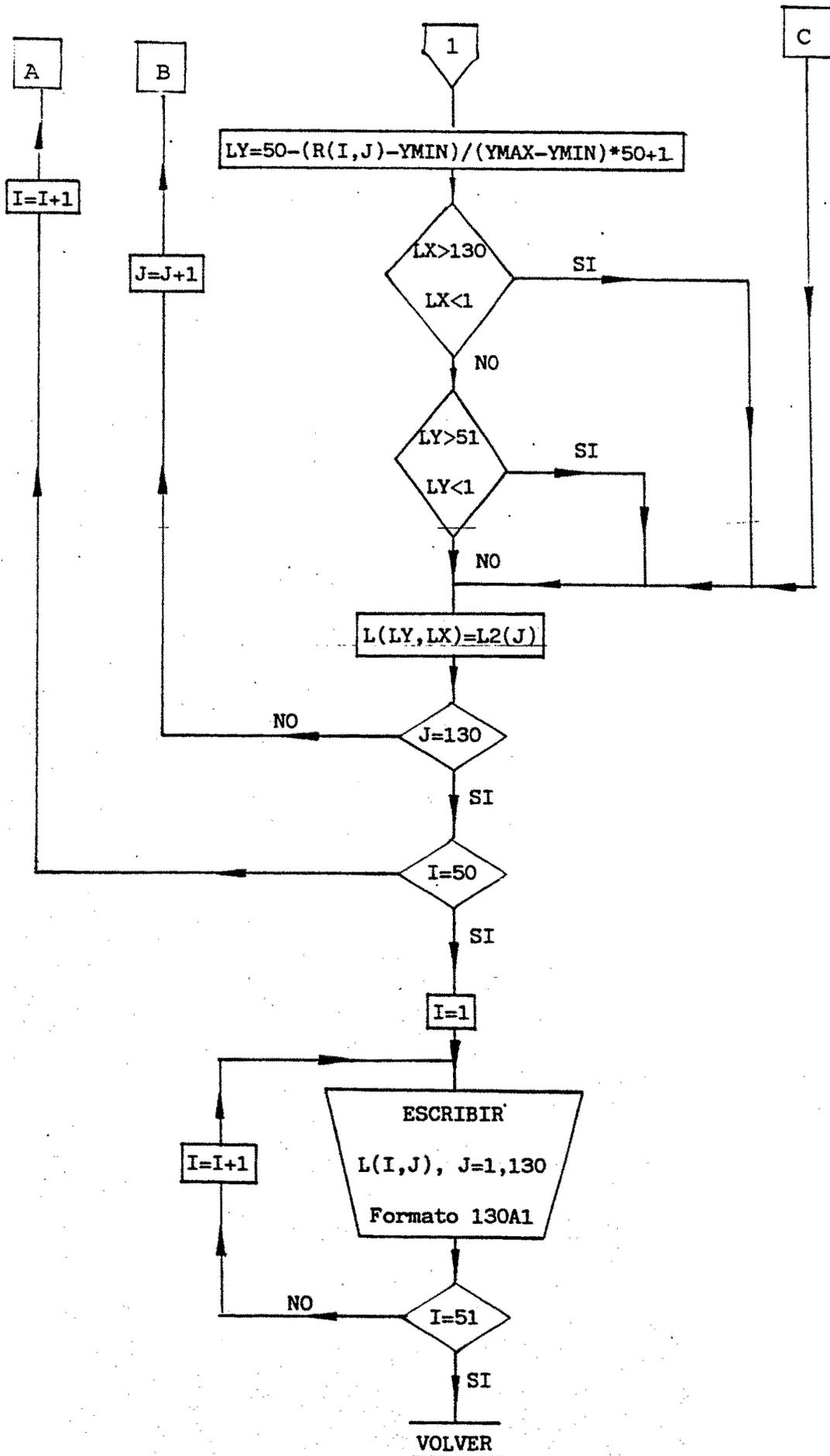
1: C      PROGRAMA PARA CALCULO DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION
2: C      EXACTAS Y ASINTOTICAS (N TENDIENDO A INFINITO) DE LOS
3: C      ESTADISTICOS DE ORDEN K DESDE 1 A K1 DE UNA MUESTRA DE
4: C      UNA POBLACION DE MINIMOS DE N VALORES DE LA LEY N(0,1).
5: C      TAMBIEN SE CALCULAN LA FUNCION DE DISTRIBUCION ASINTO-
6: C      TICA EN EL CASO DE M TENDIENDO A INFINITO.
7: C      N      = NUMERO DE SUBELEMENTOS
8: C      M      = NUMERO DE CABLES
9: C      X      = VALOR DE LA VARIABLE ALEATORIA
10: C     R      = FUNCION DE DISTRIBUCION
11:
12:      COMPILER DOUBLE PRECISION
13:      DIMENSION X(101),F(101),R(101,5),H(101),S(101,5),R1(101,5)
14:      DIMENSION X1(101)
15:
16:      OPEN 1,"DIND"
17:      OPEN 2,"RTP",ATT="AP",LEN=132
18:
19: 2200  READ FREE (1)IES, IOP, N, M, K1, NPUNTOS, XMAX, XMIN
20:      IF (N.EQ.0) STOP
21:      WRITE(2,300) N, M
22: 300   FORMAT(/" N="I3" M="I3)
23:
24: C***** CASO DE N --> INFINITO. SOLUCION EXACTA Y APROXIMADA.
25:
26:      DO 2210 I=1,101
27:      DO 2210 J=1,5
28:      R1(I,J)=0.
29: 2210  R(I,J)=0.
30:      DO 80 I=1, NPUNTOS+1
31:      X(I)=XMIN+(XMAX-XMIN)/NPUNTOS*(I-1)
32: 80    X1(I)=X(I)
33:      DO 306 J7=1,2
34:      GOTO(307,308) J7
35: 307   AN=N
36:      GOTO 309
37: 308   AN=N#M
38:      CN1=CN
39:      DN1=DN
40: 309   PK=ALOG(AN)
41:      CN=- (2.#PK)##0.5+0.5*(ALOG(PK)+ALOG(4#3.141592) )/(2.#PK)##0.5
42:      DN=(2.#PK)##(-0.5)
43: 306   CONTINUE
44:      IF (IES.EQ.1) WRITE FREE(2)"CN1, DN1, CN, DN", CN1, DN1, CN, DN
45:      DO 1 I=1, NPUNTOS+1
46:      Y=X(I)
47:      CALL MDNORD(Y,P)
48:      H(I)=1.-EXP(-EXP((Y-CN1)/DN1))
49: 1     F(I)=1.- (1.-P)##N
50:      DO 2 K=1, K1
51:      DO 4 I=K, M
52:      D=1.
53:      DO 5 J=1, I
54: 5     D=D*(M-J+1)/J
55:      IF (IES.EQ.1) WRITE(2,200) M, I, D
56: 200  FORMAT(1X, ("I3", "I3")="F15.0)

```

```
57:      DD 6 L=1, NPUNTOS+1
58:      R1(L,K)=R1(L,K)+D#H(L)#I#(1.-H(L))#(M-I)
59:      6      R(L,K)=R(L,K)+D#F(L)#I#(1.-F(L))#(M-I)
60:      4      CONTINUE
61:      2      CONTINUE
62:
63:      C***** CASO DE M --> INFINITO.
64:
65:      DD 90 L=1, NPUNTOS+1
66:      X(L)=(X(L)-CN)/CN
67:      DD 91 K=1, K1
68:      S(L,K)=0.
69:      J1=1
70:      DO 92 J=0, K-1
71:      S(L,K)=S(L,K)+EXP(J#X(L))/J1
72:      92      J1=J1#(J+1)
73:      91      S(L,K)=1.-S(L,K)#EXP(-EXP(X(L)))
74:      90      CONTINUE
75:
76:      C***** DIBUJO DE LAS FUNCIONES DE DISTRIBUCION
77:
78:      DD 7 I=1, NPUNTOS+1
79:      7      WRITE(2, 100) X1(I), (R(I,K), R1(I,K), S(I,K), K=1, K1)
80:      100    FORMAT(1X, F6.2, 5(1X, 3F8.5))
81:      IY=101
82:      NP=NPUNTOS+1
83:      MP=K1
84:      YMAX=1.
85:      YMIN=0.
86:      IER=0
87:      CALL DIBU(X1, R, IY, NP, MP, XMAX, XMIN, YMAX, YMIN, IER)
88:      CALL DIBU(X1, R1, IY, NP, MP, XMAX, XMIN, YMAX, YMIN, IER)
89:      CALL DIBU(X1, S, IY, NP, MP, XMAX, XMIN, YMAX, YMIN, IER)
90:      GO TO 2200
91:
92:      C***** FIN DEL PROGRAMA
93:
94:      END
```

DIBU





INDEP1

```

1:  C      SUBROUTINA QUE DIBUJA HASTA UN MAXIMO DE FUNCIONES DE
2:  C      DISTRIBUCION, CADA UNA DE ELLAS REPRESENTADA MEDIANTE
3:  C      UN NUMERO DEL 1 AL 5.
4:
5:  SUBROUTINE DIBU(X,R,IY,N,M,XMAX,XMIN,YMAX,YMIN,IER)
6:
7:  COMPILER DOUBLE PRECISION
8:  DIMENSION X(IY),R(IY,M)
9:  DIMENSION L(51,130)
10: DIMENSION L2(5)
11:
12:      L2(1)="1"
13:      L2(2)="2"
14:      L2(3)="3"
15:      L2(4)="4"
16:      L2(5)="5"
17:
18:      WRITE(2,200)
19: 200  FORMAT(1H1)
20:
21:      DO 1 I=1,50
22:      DO 1 J=1,130
23: 1    L(I,J)=" "
24:      DO 2 I=1,N
25:      DO 2 J=1,M
26:      IF(R(I,J).GT.1..OR.R(I,J).LT.0.)GO TO 2
27:      LX=(X(I)-XMIN)/(XMAX-XMIN)*130
28:      LY=50-(R(I,J)-YMIN)/(YMAX-YMIN)*50+1
29:      IF(LX.GT.130..OR.LX.LT.1)GO TO 2
30:      IF(LY.GT.51..OR.LY.LT.1)GO TO 2
31:      L(LY,LX)=L2(J)
32: 2    CONTINUE
33:
34:      DO 3 I=1,51
35: 3    WRITE(2,100)(L(I,J),J=1,130)
36: 100  FORMAT(1X,130A1)
37:
38:      RETURN
39:      END

```

## APENDICE II

### BIBLIOGRAFIA

- ANDRA, W., SAUL, R. (1974). *Versuche mit Bündeln aus parallelen Drähten und Lintzen für die Nordbrücke Mannheim-Ludwigshafen und das Zeltdach in München. Bautechnik 1/10/11.*
- ANDRA, W., SAUL, R. (1979). *Die Festigkeit insbesondere Dauerfestigkeit langer Paralleldrahtbündel. Die Bautechnik; Pag. 128 y sig.*
- ASTM. (1963). *A guide for fatigue testing and the statistical analysis of fatigue data.*
- BARTLETT, M.S. (1955) *Stochastic Processes. Cambridge University Press. Cambridge. McGraw-Hill Ltd.*
- BIRKENMAIER, M., NARAYANAN, R. (1982). *Fatigue Resistance of Large High Tensile Steel Stay Tendons. IABSE Colloquium. Fatigue of Steel and Concrete Structures. Lausanne Pag. 663 y sig.*
- BMDP. *Estatistical Software [1981]. University of California Press. Pag. 639-660.*
- BOX, G.E.P., JENKINS, G.M. (1976). *Time series Analysis, Forecasting and Control. Holden-day. San Francisco.*
- BROWNLEE, K.A., HODGES, K, A, JR. and MURRAY ROSENBLAT. (1953). *The Up-and-Down method with small samples. Journal of the ASA. Pg. 262-277.*

- CASTILLO, E. (1978). *Introducción a la estadística aplicada TOMO I.*
- DAVID, H.A. (1980). *Order Statistics.* John Wiley and Sons.
- DEUBELBEISS, E. (1974). *Dauerfestigkeit sversuche mit einem modifiziertem Treppenstufen verfahren.* *Material prüf.* Pag. 240 y sig.
- DIXON, W.J., MOOD, A.M.A. *Method for obtaining and Analyzing Sensitivity Data.* *Journal of ASA,* 43. Pag. 109-126.
- FERNANDEZ CANTELI, A. (1981). *Tesis doctoral. Criterios de normalización de ensayos de fatigas en armaduras activos y pasivos de hormigón armado y pretensado.* Universidad de Madrid.
- FERNANDEZ CANTELI, A. (1982). *Statistical Interpretation of the Miner-number using an Index of Probability of Total Damage.* IABSE. *Colloquium Fatigue of Steel and Concrete Structures.* Lausanne.
- FISCHER, P. (1966). *Einfluss von Probenlänge, Dehngeschwindigkeit und Draht durchmesser auf die Bruchlast und Bruchdehnung beim Zugversuch and Drähten.* *Dräht-Welt,* 52 Pag. 61 y sig.
- GALAMBOS, J. (1978). *"The Assymptotic theory of extreme order statistics".* New York.
- GALAMBOS, J. (1981). *Extreme Value Theory in Applied Probability.* *Math Scientist,* 6. Pag. B-26.

- GALAMBOS, J. (1981). *Failure Time Distributions: Estimates and - Asymptotic Results. Statistical Distributions in Scientific Work, Vol 5. Pag 309-317.*
- GABRIEL, K. *Zugglieder aus Gebündelten und Verseilten Drähten.*
- GOMES, M.I. (1979). *Rates of Convergence in Extreme Value Theory. Rev. Univ. Santander 2, II.*
- HAJDIN, N. (1976). *Vergleich zwischen den Paralleldrahtseilen und verschlossenen Seilen am Beispiel der Eisenbahnschräg seilbrücke über die Save in Belgrad. IVBH-Vor bericht zum 1u. Kongress in Tokyo.*
- LEADBETTER, M.R., LINGREN, G., ROOTZEN, H. (1978). *Conditions for the convergence in distribution of maxima of stationary normal - processes. Stochastic Processes and their Applications 8.*
- LEONHARDT, F. (1974). *Latest developments of cable-stayed bridges for long spans: Bygningsstatistiske Meddelelser 45, No. 4.*
- MINER, M.A. (1945). *Cumulative damage, in fatigue. Journal of Applied Mechanics. Vol. 12. Pag. 159-164.*
- PAPOYLIS, A. (1965). *Probability, Random Variables and Stochastic Processes. McGraw-Hill Ltd.*

- TIAGO DE OLIVEIRA, J. (1975-76). *Introduction to Stochastic Processes*. *Gaz. Mat.* 155/156.
  
- TIAO, G.C., BOX, G.E.P., GRUPE, M.R., HUNDAK, G.B., BELL, W.R., CHANG, J. I. *The Wisconsin Multiple Time Series (WMTS). Program. User's Guide.*
  
- VERAVERBEKE, N., TEUGLES, J.L. (1976). *The exponential range of convergence of the distribution of the maximum of a random walk.* *Journal of Applied Probability*, 13.
  
- WETHERILL, G.B., CHEN, H., VASUDEVA, R.B. (1966) *Sequential estimation of quantal response curves: A new method of estimation.* *Biometrika* 53,3 and 4. Pag. 439-454.