Universitat Jaume I

Departament de Matemàtiques

La topología de Bohr para grupos topológicos abelianos

Memoria presentada por Sergio Macario Vives, para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas, elaborada bajo la dirección del Dr. Salvador Hernández Muñoz.

Castelló, junio de 2002

Agradecimientos

Aquesta memòria vull dedicar-la als meus pares, que malauradament ja no podran gaudir-la. Aquestes línies, escrites en la llengua que ells m'ensenyaren a estimar, constitueixen el meu petit homenatge.

A les meves germanes, Silvia i Rosamari, que m'han fet costat en tot moment, els bons i els dolents.

Als meus companys del Departament de Matemàtiques, amb qui he compartit tantes bones estones. Voldria destacar, d'entre tots, a Jorge, per la seva disposició a debatre algunes qüestions que, sens dubte, han millorat aquesta tesi i a Ximo, per la seva lectura crítica i pels bons moments que hem gaudit tots dos al llarg d'aquestos anys.

Finalment, vull expressar el meu agraïment al meu director de tesi, Salvador Hernández. Per la seva dedicació a la direcció d'aquesta tesi, que mai hagués estat possible sense el seu empenyorament i, sobretot, per la confiança que ha demostrat tenir en mi i que s'ha traduït en aquesta memòria, que m'enorgulleix poder presentar per deixar constància d'haver estat un dels seus deixebles. I si he pogut treure fruit de la seva qualitat científica, més encara m'afalaga haver gaudit de la seva qualitat humana.

A la memoria de mis padres.

Índice general

Introducción

Esta memoria se enmarca dentro del contexto general de los grupos topológicos y, más concretamente, de los grupos topológicos abelianos.

La idea de una teoría general de grupos continuos se remonta a Sophus Lie, que desarrolló su teoría en la década 1874–1884. El trabajo de Lie es el orígen común de la teoría moderna de los grupos de Lie y de la teoría general de los grupos topológicos. Sin embargo, las consideraciones topológicas, que hoy en día resultan esenciales en ambas teorías, no forman parte de su trabajo. Hilbert fue el primero en introducir un punto de vista topológico en la teoría de los grupos continuos. Precisamente en su famosa lista de 23 problemas (1900, International Congress of Mathematics), el Quinto Problema impulsó investigaciones en torno a los grupos topológicos[1]. Con el auge de la topología como una disciplina fundamental de la matemática, fue inevitable que se aplicara al

[1]En lenguaje moderno el Quinto Problema indagaba si cualquier grupo topológico localmente euclidiano puede dotarse de una estructura de variedad analítica de forma que adquiera estructura de grupo de Lie. En 1929 von Neumann usando integración sobre grupos generales compactos, que él mismo había introducido, fue capaz de resolver el Quinto Problema para grupos compactos. En 1934 Pontryagin lo resolvió para grupos abelianos localmente compactos usando la teoría de caracteres introducida por él.

estudio de algunas cuestiones que habían surgido con la teoría de Lie de grupos continuos. Otto Schreier (1925) fue el primero en establecer los fundamentos de la teoría moderna de grupos topológicos, aunque un poco antes, en 1924, Hermannn Weyl había introducido ya, de manera informal, consideraciones topológicas en la teoría de la estructura y representación de grupos de Lie semisimples[2]. En su trabajo con F. Peter (1927), Weyl proporcionó un notable impulso al desarrollo de los aspectos topológicos de las teorías matemáticas relacionadas con los grupos continuos, a saber: la topología de los grupos de Lie, el desarrollo general de los grupos topológicos en conjunción con el Quinto Problema de Hilbert y el desarrollo del Análisis Armónico sobre grupos.

Es precisamente en el desarrollo del Análisis Armónico donde se encuentra el origen de la topología de Bohr[3]. El conocido teorema de Peter–Weyl (1927) establece que, para grupos de Lie compactos, el conjunto de las representaciones unitarias irreducibles (que en este caso son exactamente las de dimensión finita)[4] separa los puntos del grupo y a partir de ellas pueden construirse todas las representaciones unitarias y un sistema completo de funciones ortogonales del grupo. Ello permite obtener la serie de Fourier de una función del grupo en términos de las representaciones unitarias de dimensión finita.

En 1932 A. Haar introduce una medida sobre grupos, llamada posterior-

[2]Del artículo de T. Hawkins "Weyl and the topology of continuous groups" en [59].

[3]Puede consultarse la introducción de [34] para una exposición más detallada de dicha relación.

[4]Una representación unitaria T de un grupo G es un homomorfismo de grupos de G en el grupo de operadores unitarios de un espacio de Hilbert E. Es irreducible si los únicos subespacios cerrados que son invariantes bajo $T(g)$, para cada $g \in G$, son los triviales. Cuando el espacio de Hilbert es de dimensión finita, la representación se dice finito dimensional.

mente la *medida de Haar*, que permite definir sobre grupos localmente compactos una integral análoga a la de Lebesgue. Esta medida fue utilizada por von Neumann y por Pontryagin en 1934 y por A. Weil en 1940 para construir una teoría abstracta de análisis armónico conmutativo.

En el ámbito de los grupos abelianos las representaciones unitarias irreducibles son exactamente los homomorfismos (de grupo) en la circunferencia unidad del plano complejo $\mathbb{T}$, llamados caracteres. La idea de Pontryagin fue dar estructura de grupo al conjunto de tales caracteres y observar que dado un grupo G discreto y numerable, o bien, compacto y separable, cada elemento de G determina un carácter continuo sobre el grupo de caracteres continuos de G (llamado grupo dual, $G^\frown$), estableciéndose entonces una correspondencia entre el grupo G y el grupo bidual $G^{\frown\frown}$. La teoría de la dualidad se origina al demostrar Pontryagin que esta correspondencia es un isomorfismo topológico. Resulta, pues, que el dual de un grupo compacto y separable es un grupo discreto y numerable, cuyo dual es de nuevo un grupo compacto y separable isomorfo topológicamente al grupo de partida. Van Kampen (1935) extendió la dualidad de Pontryagin a la clase de los grupos abelianos localmente compactos, utilizando una nueva topología sobre el dual $G^\frown$ (la topología compacto–abierta) que coincidía con la definida por Pontryagin para el dual de un grupo compacto y separable o para el dual de un grupo discreto y numerable. Esta teoría de dualidad es el punto de encuentro entre el Análisis Armónico y la topología de Bohr.

En 1924 el interés de H. Bohr en caracterizar qué funciones pueden representarse por una serie de Dirichlet le llevó a formular una teoría de funciones casi periódicas[5]. La dualidad de Pontryagin–van Kampen aplicada a la recta real $\mathbb{R}$ permite obtener una correspondencia biunívoca entre las funciones continuas con valores complejos definidas sobre $(\mathbb{R}\widehat{\ }_d)\widehat{\ }$ y una cierta familia de funciones continuas sobre $\mathbb{R}$, que son precisamente las funciones casi periódicas introducidas por Bohr. De hecho, los homomorfismos continuos de $(\mathbb{R}, +)$ en $\mathbb{T}$ son las funciones $x \mapsto \mathrm{e}^{\mathbf{i}\lambda x}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, que Bohr prueba que forman un sistema ortonormal maximal del espacio de funciones casi periódicas[6]. La topología menos fina para la cual estos homomorfismos son continuos es una topología estrictamente menos fina que la topología euclídea de $\mathbb{R}$ y es conocida como la *topología de Bohr*.

En 1927, Bochner formula una caracterización de las funciones complejas, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$, casi periódicas como aquellas funciones continuas cuyo conjunto de trasladados $\{f(x + a) \ : \ a \in R\}$ tiene clausura compacta en la métrica uniforme. Este resultado es usado en 1934 por J. von Neumann como punto de partida para establecer una teoría de las funciones casi periódicas para grupos topológicos en general, introduciendo la clase de los grupos maximalmente casi–periódicos[7].

A. Weil[8] demuestra en 1935 que cuando G es un grupo maximalmente casi–periódico (en el sentido de von Neuman), es posible sumergir el grupo G en un grupo compacto bG de tal manera que las funciones casi periódicas de G

[5]Véase, por ejemplo, [11] para un definición rigurosa de función casi–periódica.

[6]El trabajo de Bohr sobre funciones casi periódicas se desarrolla en sus tres artículos [14], [15] y [16].

[7]Véase [100].

[8]En C.R. Acad. Sci. Paris **200**, pp. 38–40 (1935), o véase también su monografía [102]

coinciden con las restricciones de funciones continuas de bG. La utilidad de esta construcción reside en que, en general, es mucho más cómodo y sencillo tratar con grupos compactos. Weil llamó a bG "groupe compact attaché à G ". El nombre de compactación de Bohr parece que fue introducido por Anzai y Kakutani en dos artículos del año 1943 [2, 3] donde se construye bG cuando G es localmente compacto y abeliano. Alfsen y Holm en [1] generalizan el término de compactación de Bohr en el contexto de grupos topológicos arbitrarios. Así, cada grupo topológico G tiene asociado un grupo compacto bG, llamado compactación de Bohr de G, y un homomorfismo continuo b de G sobre un subgrupo denso de bG caracterizados por la siguiente propiedad universal[9]: dado cualquier homomorfismo continuo h de G en un grupo compacto K, existe siempre un homomorfismo continuo $\bar{h}$ de bG en K tal que $h = \bar{h} \circ b$.

Para los grupos abelianos maximalmente casi–periódicos es relativamente sencillo describir la compactación y la topología de Bohr del grupo. Por ser el grupo abeliano, para cada $e_G \neq x \in G$, existe un carácter continuo χ tal que $\chi(x) \neq 1$. Si se denota por $G^{\frown}$ el grupo de los caracteres continuos de G; es decir, homomorfismos continuos de G en el toro de dimensión uno $\mathbb{T}$, entonces G^+ (o sea, G con la topología inducida por su compactación de Bohr) es un subgrupo del grupo producto $P = \mathbb{T}^{G^{\frown}}$ y $bG = cl_P G$.

La dualidad de Pontryagin-van Kampen ha sido extendida posteriormente a clases más generales de grupos topológicos (abelianos y no abelianos). El caso no abeliano tiene características específicas debido, principalmente, a que el "dual" de un grupo no commutativo ya no es un grupo y es necesario

[9]Véase [54] (V.§4), donde se hace un estudio detallado de bG y de sus propiedades.

utilizar estructuras menos conocidas para su estudio. La primera extensión de la teoría se debe a Kaplan [61, 62] que entre 1948 y 1950 prueba que la clase de los grupos Pontryagin-reflexivos es cerrada para productos arbitrarios y sumas directas; además propone el problema de la caracterización de los grupos topológicos abelianos que satisfacen la dualidad de Pontryagin (es decir, que son Pontryagin–reflexivos). Smith [84] en 1952 demuestra que el grupo aditivo de un espacio de Banach o de un espacio localmente convexo y reflexivo es Pontryagin-reflexivo utilizando la teoría de dualidad de los espacios vectoriales topológicos. Posteriormente se han dedicado muchos trabajos a resolver esta cuestion, pueden citarse, como ejemplo, las contribuciones de Banaszczyk[10], Venkatamaran[11] y Kye[12]. En estos dos últimos ejemplos lo que se caracteriza es la Pontryagin-semirreflexividad de los grupos considerados. En esta misma línea cabe citar también los resultados de Pestov [73] y de Galindo y Hernández [37] para grupos abelianos libres, de Hernández y Uspenskiĭ [51] para funciones reales continuas y el de Hernández [47][13].

[10]En [10] se da un impulso notable a la teoría con el estudio de la dualidad para los grupos nucleares.

[11]En respuesta a la cuestión propuesta por Kaplan presenta en [99] una caracterización de los grupos que satisfacen la dualidad de Pontryagin, aunque esta caracterización es muy técnica, lo que limita su aplicabilidad, y contiene una proposición errónea que resulta ser irremediable.

[12]Obtiene en [65] una caracterización mejor para la clase de los grupos aditivos de los espacios localmente convexos, pero también esta caracterización es incompleta ya que, de nuevo, contiene una proposición errónea similar a la dada por Venkatamaran.

[13]Donde, utilizando técnicas de dualidad, obtiene una caracterización de la Pontryagin–reflexividad para grupos localmente quasi–convexos, indicando además donde se encuentra exactamente el error en las caracterizaciones de Venkatamaran y Kye.

En el contexto de los grupos abelianos localmente compactos se encuentran muchos resultados que describen su estructura topológica[14]. La cuestión de la relación entre las propiedades topológicas de un grupo abeliano localmente compacto y las propiedades topológicas de su compactación de Bohr tiene numerosos antecedentes. Glicksberg [39] demuestra que todo grupo abeliano localmente compacto respeta la compacidad[15] en el sentido de que un subconjunto A de G es compacto en G si, y sólo si, A es compacto en G^+. Recientemente, Trigos-Arrieta [87] ha demostrado que también se preserva la pseudocompacidad y la propiedad de Lindelöf. También en [89] Trigos-Arrieta caracteriza cuándo G^+ es un grupo normal. Hughes [55] prueba una generalización del teorema de Glicksberg a grupos localmente compactos (no necesariamente abelianos). En [25] se obtiene una generalización del teorema de Glicksberg al considerar, sobre un grupo abeliano localmente compacto G, la topología inducida por el grupo bG/N, siendo N un subgrupo metrizable y cerrado de bG. Banaszczyk y Martín–Peinador obtienen en [8] que todo grupo nuclear respeta la compacidad. Galindo extiende este resultado en [35] al probar que todo grupo nuclear completo respeta fuertemente la compacidad.

Más recientemente, en [22] Comfort, Hernández y Trigos-Arrieta han obtenido algunos resultados en esta línea. Por ejemplo, se ha determinado exactamente cuándo G^+ es (hereditariamente) realcompacto. Se prueba que todo subgrupo cerrado de G está C-sumergido en G^+; en el caso en que G es discreto cada función continua definida sobre un subgrupo arbitrario con rango en un espacio completamente metrizable se extiende continuamente al grupo

[14]En el texto de Hewitt-Ross [52] puede encontrarse un estudio extenso de esta materia.
[15]Terminología introducida por Trigos–Arrieta en [88].

G^+. Estos resultados resuelven diversas de las cuestiones propuestas por van Douwen en [95]. Otra contribución reciente es [46], donde Hernández prueba que la dimensión de un grupo abeliano localmente compacto es una propiedad invariante al pasar a la topología de Bohr, resolviendo así una cuestión planteada por Tkačenko.

Desde el punto de vista de la topología general, puede afirmarse que el trabajo fundamental en el cual se basan todos los estudios posteriores en relación con la compactación y la topología de Bohr es el de Comfort y Ross en [24], donde se caracterizan las topologías de grupo totalmente acotadas como las generadas por un subgrupo de caracteres del grupo. Posteriormente ha habido numerosos avances en esa dirección, hasta llegar al trabajo de van Douwen [95], donde se investiga en profundidad la topología de Bohr de un grupo abeliano discreto. El trabajo de van Douwen contiene una extensa lista de problemas abiertos que a lo largo de los últimos años ha representado un importante estímulo para el estudio de la compactación de Bohr.

Merece la pena destacar que las cuestiones comentadas anteriormente sobre grupos abelianos localmente compactos pueden plantearse en el contexto general de los grupos abelianos maximalmente casi–periódicos, donde están, en gran parte, sin resolver. De especial interés son las clases de los grupos localmente compactos maximalmente casi–periódicos y abelianos maximalmente casi–periódicos. En esta línea cabe señalar las contribuciones de Bichteler [12], Corson y Glicksberg [27], Hughes [55], Moran [67], Remus y Trigos-Arrieta [75] y Galindo y Hernández [36].

En principio pueden citarse dos amplias clases de grupos donde aún quedan muchos problemas abiertos: la de los grupos abelianos maximalmente casi–

periódicos y la de los grupos maximalmente casi–periódicos. Las dificultades que surgen al trabajar con la topología de Bohr hacen necesario considerar por separado el caso abeliano y el no abeliano.

La clase de los grupos abelianos maximalmente casi–periódicos contiene a la mayoría de los grupos abelianos que aparecen en la literatura matemàtica. Por ejemplo, los grupos abelianos localmente compactos, los grupos libres y los grupos aditivos de espacios vectoriales localmente convexos son grupos abelianos maximalmente casi–periódicos.

Los objetivos principales de esta memoria se vertebran, pues, alrededor de la compactación de Bohr de un grupo abeliano maximalmente casi–periódico.

El **primer capítulo** resume la mayor parte de los resultados de la Teoría de Grupos Topológicos que se utilizarán a lo largo de esta memoria y presenta la notación que se va a utilizar, que no es unánime en la literatura científica sobre esta materia. Los principales textos que se han seguido son los de Hewitt y Ross [52], Engelking [31], Bourbaki [17] y Banaszczyk [10].

El **segundo capítulo**[16] está dedicado al estudio del concepto de *grupos en dualidad*, introducido por Varopoulos y, en particular, a la *dualización* de ciertas propiedades topológicas en las topologías débiles de la dualidad.

El punto de partida lo constituye el teorema de Comfort y Ross en [24] que establece que toda topología totalmente acotada sobre un grupo abeliano G es una topología débil generada por un subgrupo de caracteres de G. El concepto

[16] Los resultados de este capítulo pueden encontrarse en [49].

de topología débil (también llamada de convergencia puntual) enlaza de forma natural con el concepto de grupos en dualidad introducido por Varopoulos en [97] y que resulta ser una traslación de la dualidad de espacios vectoriales topológicos al contexto de los grupos topológicos abelianos.

En la primera sección se introduce dicho concepto, así como las topologías débiles asociadas a dicha dualidad. El teorema de Comfort y Ross implica, de hecho, que cualquier topología totalmente acotada es, en realidad, una topología débil.

Por tanto, a cada dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$ se le asocian dos topologías canónicas sobre G y G', respectivamente. La topología $w(G, G')$ sobre G es la topología débil generada por todos los elementos en G' considerados como homomorfismos continuos en $\mathbb{T}$. La topología $w(G', G)$ se define de forma similar. Ambas topologías son totalmente acotadas y compatibles[17] con la dualidad dada. Más aún, la topología débil $w(G, G^\frown)$ de la dualidad $\langle G, G^\frown \rangle$ coincide con la topología de Bohr de G.

En la siguiente sección se hace un estudio del comportamiento de dichas topologías, obteniendo que la clase de grupos totalmente acotados es cerrada para productos, subgrupos y cocientes.

En el contexto de los espacios de Banach, Corson [26] estudia las propiedades topológicas de un espacio de Banach con su topología débil, motivado por el teorema de Eberlein-Šmulian, que prueba la equivalencia entre diversos

[17] Una topología τ sobre G se dice compatible con la dualidad $\langle G, G' \rangle$ si $(G, \tau)^\frown = G'$.

tipos de compacidad débil y por un teorema de Banach que caracteriza la reflexividad en términos de la compacidad débil de la bola unidad. Corson obtiene, entre otros resultados, una caracterización de la débil-realcompacidad (en el sentido de Hewitt) de un espacio de Banach, en términos del comportamiento de ciertos funcionales sobre el espacio dual. Más tarde, Valdivia [94] extiende este resultado para espacios vectoriales topológicos localmente convexos. También las técnicas de la teoría de anillos de funciones continuas se han utilizado con anterioridad para estudiar la estructura topológica de un grupo topológico. Por ejemplo, Arhangel'skii [5] y Uspenskiĭ [91] han demostrado que G es realcompacto si, y sólo si, $C_p(G)$ tiene "functional tightness"numerable[18]. Es un resultado análogo al de Corson con $C_p(X)$ en el papel de espacio dual. También debe destacarse, en este contexto, la contribución de Comfort, Hernández y Trigos-Arrieta [22] al obtener una caracterización de cuando el grupo G^+ es realcompacto.

Con estos antecedentes, la última sección se dedica al estudio de la dualización[19] de propiedades topológicas. En particular, se obtienen propiedades duales de la separabilidad, la realcompacidad y la realcompacidad hereditaria.

Varopoulos demuestra en [98] que para grupos localmente compactos, los homomorfismos $f : G \longrightarrow G'$ sucesionalmente continuos son continuos si el

[18]Dado un número cardinal α, una aplicación $f : X \longrightarrow Y$ entre espacios topológicos se dice α–continua si es continua sobre cada subconjunto de A de X de cardinalidad $|A| \leq \alpha$. El *functional tightness* de un espacio topológico X se define entonces como el cardinal infinito más pequeño α tal que cada función real sobre X α–continua es continua.

[19]Dos propiedades topológicas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ son duales cuando para cada dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$ se verifica que $(G, w(G, G'))$ satisface $\mathcal{P}$ si, y sólo si, $(G', w(G', G))$ satisface $\mathcal{Q}$.

cardinal de G no es Ulam–medible[20]. Utilizando un recíproco al teorema de Varopoulos para grupos compactos que Comfort y Remus obtienen en [23] y la caracterización de Comfort, Hernández y Trigos-Arrieta hallada en [22] de cuando el grupo G^+ es realcompacto, se demuestra fácilmente que un grupo discreto, en su topología de Bohr, es realcompacto, si, y sólo si, los homomorfismos sucesionalmente continuos sobre el dual son continuos. Sin embargo, esta caracterización ya no se mantiene para grupos más generales.

El principal resultado de esta sección lo constituye, pues, una caracterización de la realcompacidad, en términos semejantes a las mencionadas anteriormente, para la topología débil $w(G, H)$ de una dualidad $\langle G, H \rangle$ de grupos abelianos. Curiosamente, la realcompacidad hereditaria resulta ser la propiedad dual de la separabilidad.

El objetivo del **tercer capítulo** es investigar las propiedades de un grupo topológico que permanecen invariantes al pasar a la topologia heredada de la compactación de Bohr.

En cada grupo abeliano maximalmente casi–periódico pueden considerarse definidas dos topologías: la original y la topología débil de la dualidad $\langle G, G^\frown \rangle$ que resulta ser la topología de Bohr de G. El grupo G provisto de esta topología se denotará por $(G, \sigma(G^\frown))$. La topología de $(G, \sigma(G^\frown))$ es una topología de grupo totalmente acotada y menos fina que la topología original y la compleción de $(G, \sigma(G^\frown))$, es la compactación de Bohr de G.

[20]Un cardinal κ se dice Ulam–medible si existe una medida $\{0, 1\}$–valuada numerablemente aditiva μ sobre κ tal que $\mu(\kappa) = 1$ y $\mu(\{\xi\}) = 0$ para cada $\xi < \kappa$.

En relación con la transformada de Fourier de un grupo topológico, Helson introduce en [45] la noción de conjunto de interpolación[21]. En [42, 43, 44] Hartman y Ryll-Nardzewski estudian el problema de la interpolación de funciones por medio de funciones casi periódicas en grupos abelianos localmente compactos. Prueban que tales grupos contienen un conjunto de interpolación o conjunto I_0[22]. Ya que toda función casi–periódica puede extenderse a bG, se tiene que el problema de determinar los conjuntos de interpolación se reduce al problema de calcular los subconjuntos discretos que son C^*–sumergidos en bG. Para el caso particular de los grupos abelianos discretos, van Douwen consigue un notable avance al probar la existencia de conjuntos discretos C^*–sumergidos en bG y C–sumergidos en G^+ en situaciones muy generales. Además, van Douwen extiende su resultado a la recta real pero deja sin resolver el problema para el caso general de un grupo abeliano localmente compacto. Galindo y Hernández estudian en [36] la existencia de conjuntos de interpolación en grupos con acotaciones separadas, relacionándolo además con el problema de respetar la compacidad.

Diversos autores han considerado el problema de la preservación de la compacidad al pasar a la topología de Bohr del grupo; no obstante el problema está lejos de resolverse en el marco general de los grupos abelianos maximalmente casi–periódicos.

En relación con esto, Remus y Trigos-Arrieta han demostrado en [75] que no

[21]Un conjunto $A \subseteq G^\frown$ se dice de interpolación cuando para cada $f \in C_0(G^\frown)$ existe $g \in L^1(G)$ tal que $\hat{g}(\gamma) = f(\gamma)$, para todo $\gamma \in A$.

[22]Un subconjunto E de G se llama I_0 cuando toda función acotada definida sobre E es la restricción de una función casi–periódica en G.

es cierto que todo grupo abeliano maximalmente casi–periódico que satisface la dualidad de Pontryagin respete la compacidad, corrigiendo un resultado erróneo de la literatura sobre este problema. Sin embargo, no está del todo claro cómo están relacionadas estas propiedades. En esta línea, uno de los mejores resultados conocidos puede ser deducido del Teorema 1 de [27] y es debido a Corson y Glicksberg. La prueba de este resultado es incompleta como observó Namioka en [70], que probó un resultado un poco más débil que el del teorema de Corson y Glicksberg. Hughes [55], sin embargo, obtuvo este teorema de forma independiente. Su prueba nunca apareció publicada; pero, recientemente, Troallic ha obtenido un resultado más fuerte en [90]. Todos estos resultados mencionados anteriormente obtienen condiciones suficientes para asegurar la preservación de la compacidad. Obtener condiciones necesarias parece ser mucho más difícil.

Así, el tercer capítulo[23] está dedicado a estudiar este problema. Para ello, se introduce el concepto de *g–grupo* que viene a ser un grupo donde se verifica un análogo al teorema de Grothendieck sobre la complección de espacios vectoriales topológicos localmente convexos[24]. Se demuestra que la clase de los g–grupos completos está contenida en la clase de los grupos Pontryagin–semirreflexivos y contiene un amplio espectro de clases generales de grupos abelianos. En particular, los grupos abelianos localmente compactos y los grupos aditivos de espacios vectoriales localmente convexos son g–grupos. La clase de los g–grupos es cerrada para los productos arbitrarios y subgrupos dual-

[23]Los resultados de este capítulo se han desarrollado a partir de [50].

[24]Véase también [19], donde se hace un estudio de la relación entre el teorema de Grothendieck y la BB–reflexividad.

mente inmersos y dualmente cerrados, lo que permite deducir que la clase de los g–grupos también contiene a los grupos nucleares. Como se verá, esto permite unificar resultados obtenidos separadamente por diversos autores para los grupos localmente compactos y los grupos nucleares, respectivamente.

En la siguiente sección se caracteriza la preservación de la compacidad al pasar a la topología de Bohr para los g–grupos completos. Su demostración se basa en el hecho de que todo g–grupo completo es un μ–espacio en su topología de Bohr, resultado éste que generaliza y unifica resultados previos de Valdivia y Trigos–Arrieta para espacios vectoriales localmente convexos quasi–completos y grupos localmente compactos, respectivamente. De hecho, el teorema en cuestión permite demostrar que, en la clase de los g–grupos completos, la preservación de la compacidad equivale a la preservación de otras propiedades como compacidad numerable, pseudocompacidad y acotación funcional; obteniendo además que su preservación al pasar a la topología de Bohr es equivalente a la existencia en cada subconjunto no totalmente acotado de un subconjunto infinito, discreto y C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$.

Finalmente, el **cuarto capítulo**[25] se dedica a profundizar en el estudio de la preservación de la compacidad en el caso de los grupos metrizables.

Los grupos metrizables y Pontryagin–reflexivos son g–grupos completos y, por tanto, la preservación de la compacidad en ellos es consecuencia de los resultados del capítulo anterior. Sin embargo, en la primera sección se obtiene, para ellos, una caracterización mucho más práctica de la preservación de la

[25] Los resultados de este capítulo se encuentran en [50] y [48].

compacidad. La idea de la demostración se encuentra en el lema de Rosenthal–Dor, caracterizando los espacios de Banach que contienen una copia de ℓ^1, que puede transcribirse como que dada una sucesión $\{f_n\}$, de funciones continuas sobre un compacto K, sin subsucesiones puntualmente convergentes, existe una subsucesión infinita, que puede denotarse de nuevo, sin pérdida de generalidad, por $\{f_n\}$, de forma que cada subsucesión suya, $\{f_{n_k}\}$ está separada de su complemento en la subsucesión[26]. Con esta interpretación se puede deducir que un grupo metrizable y Pontryagin–reflexivo G preserva la compacidad si, y sólo si, cada subconjunto no totalmente acotado contiene un subconjunto infinito, discreto y C^*–sumergido en bG.

Además se consigue caracterizar también cuándo un grupo de esas características, cuyos subgrupos separables tienen clausura en $(G, \sigma(G^\frown))$ de cardinalidad menor que $2^{\mathfrak{c}}$, respeta fuertemente la compacidad[27] en términos similares a los anteriores.

En la siguiente sección se aborda el estudio de la preservación de la compacidad en el caso particular de los grupos aditivos de los espacios de Banach. La clase de los grupos aditivos de espacios de Banach se encuentra en la intersección entre la clase de los grupos metrizables y Pontryagin–reflexivos y la clase de los g–grupos completos. Por tanto, dicha clase es susceptible de verificar las caracterizaciones halladas en la primera sección de este capítulo y en la última sección del capítulo anterior. Pero aún hay más, como la topología débil y la topología de Bohr de un espacio de Banach comparten la

[26]Es decir, existen dos intervalos I_1 e I_2 y existe $x \in K$ tal que $f_p(x) \in I_1$ si $p \in \{n_k\}_{k<\omega}$ y $f_p(x) \in I_2$ si $p \neq n_k$, para todo $k < \omega$.

[27]Una variación del problema introducida por Comfort, Trigos–Arrieta y Wu en [25].

misma colección de subconjuntos compactos (ver [75]), el problema de caracterizar la preservación de la compacidad en los grupos aditivos de los espacios de Banach es equivalente a caracterizar los espacios de Banach cuyos subconjuntos débilmente compactos son compactos para la topología de la norma. Por el teorema de Eberlein-Šmulian, es suficiente caracterizar los espacios de Banach cuyas sucesiones débilmente convergentes son convergentes en norma. Ahora bien, un espacio de Banach se dice que tiene la propiedad de *Schur* si las sucesiones débilmente convergentes son convergentes para la norma[28]. ℓ^1 verifica esta propiedad y por tanto preserva la compacidad. En [76] Remus y Trigos–Arrieta estudian la preservación de la compacidad en el contexto de los grupos aditivos de los espacios localmente convexos y prueban que cada espacio de Banach que preserva la compacidad debe contener una copia de ℓ^1 sumergida en él. Sin embargo, la sola presencia de ℓ^1 no es suficiente para garantizar la preservación de la compacidad, hecho que ponen de relieve con varios ejemplos estos mismos autores, pero es más, J. Bourgain demuestra la existencia de espacios de Banach que no preservan compacidad a pesar de que todos sus subespacios cerrados contienen una copia de ℓ^1. El problema, como se verá, radica en dónde deben estar situadas las copias de ℓ^1.

Así, el principal resultado de esta sección lo constituye una caracterización de en qué condiciones el grupo aditivo de un espacio de Banach respeta la compacidad, mediante diversas propiedades, de las cuales cabe resaltar que la preservación de la compacidad (o, equivalentemente, la propiedad de Schur) es equivalente a la existencia de una copia de ℓ^1 en cada subespacio cerrado

[28] Resultado demostrado por Schur para ℓ^1 en 1910.

generado por una sucesión básica[29], pero de forma que la base de unidades de ℓ^1 es una subsucesión de dicha sucesión básica.

En [18] Bourgain extiende el concepto de funciones equivalentes a la base de unidades de ℓ^1 para un sistema de funciones $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$. Con este concepto el lema de Rosenthal–Dor puede extenderse a otras clases de grupos (metrizables) y a ello se dedica la última sección de este capítulo. Se obtiene entonces, para la clase de los g–grupos completos y metrizables, una caracterización de la preservación de la compacidad semejante a la obtenida en la sección anterior para grupos aditivos de espacios de Banach. Incluso las hipótesis de completitud y metrizabilidad son suavizadas por la de ser Čech–completo.

Estos resultados relacionan la preservación de la compacidad con la existencia de subconjuntos discretos, C–sumergidos en $(G, \sigma(G^\frown))$ y C^*–sumergidos en bG. Y este hecho conecta con un resultado de van Douwen obtenido en [95] para grupos abelianos discretos: dado un subconjunto infinito A de un grupo abeliano discreto G, existe un subconjunto infinito B de A tal que $|B| = |A|$, B es discreto, C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$ y C^*–sumergido en bG. Los resultados anteriores permiten obtener el teorema de van Douwen para g–grupos Čech–completos y, en particular, para los grupos nucleares, complementando de este modo los trabajos de Banaszczyk y Martín–Peinador [8, 10], que obtienen para grupos nucleares varios resultados de grupos localmente compactos.

---

[29]Una sucesión $\{x_n\}$ en un espacio de Banach se dice básica si para cada $x \in cl(lin\{x_n\})$ se verifica que existe una única sucesión de escalares $\{a_n\}$ tales que $x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$.

Capítulo 1

Preliminares

La mayoría de los resultados de este capítulo se encuentran en el libro de Hewitt y Ross [52] y en el de Bourbaki [17].

Salvo que se diga lo contrario, todos los grupos que aparecen en esta memoria son grupos abelianos y de Hausdorff y, por tanto, espacios de Tychonoff (i.e., espacios completamente regulares y de Hausdorff).

1.1. Grupos topológicos

Los grupos topológicos son espacios homogéneos, por lo que su topología viene determinada por la familia de entornos de la identidad, utilizándose el símbolo $\mathcal{N}_0(G)$ para denotarla.

Como es habitual, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ designarán los grupos de los números reales, complejos, enteros y racionales, respectivamente. A $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ se les considerará dotados de su topología natural, euclídea, mientras que $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ estarán dotados de la topología heredada de $\mathbb{R}$. Se denotará por $\mathbb{T}$ el grupo del círculo; es decir, el conjunto de números complejos de módulo unidad con la operación de multiplicación de complejos y dotado de la topología que hereda de $\mathbb{C}$.

El cardinal de un conjunto A será denotado por $|A|$. El cardinal de $\mathbb{N}$ se denotará por $\aleph_0$. El *peso* de un grupo topológico (G,τ) se define como

$$wt(G,\tau) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| \ : \mathcal{B} \text{ es base de abiertos de } G \ \}$$

El *peso local* se define como

$$wt(G,\{g\}) = \text{mín}\{|\mathcal{B}| \ : \mathcal{B} \text{ es base de abiertos de } g \ \}$$

Por otra parte, el *carácter de densidad* de (G,τ) se define

$$d(G,\tau) = \text{mín}\{|H| \ : \ H \text{ es denso en } G \ \}$$

.

De estas definiciones se deduce que un grupo G es metrizable si, y sólo si, $wt(G,\{e\}) = \aleph_0$. G es separable si, y sólo si, $d(G,\tau) = \aleph_0$

Las operaciones de productos y cocientes entre grupos permiten obtener nuevos grupos a partir de éstos. Así, si $\{G_i\}_{i\in I}$ es una familia de grupos topológicos, se define sobre el producto cartesiano $\prod_{i\in I} G_i$ una estructura de grupo definiendo $(x_i)\cdot(y_i) = (x_i \cdot y_i)$ y se le dota de la *topología producto* que es la topología menos fina que hace continuas a las proyecciones $p_i : \prod_{i\in I} G_i \longrightarrow G_i$ y que resulta ser una topología compatible con la estructura de grupo. Una base de entornos para esta topología viene dada por los conjuntos de la forma $\prod_{i\in I} U_i$ donde $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$, para cada $i \in I$ y $U_i \neq G_i$ sólo para un número finito de índices $i \in I$.

El subconjunto de $\prod_{i\in I} G_i$ formado por aquellos elementos que sólo tienen un número finito de componentes distintas del neutro, es un subgrupo de $\prod_{i\in I} G_i$ llamado *suma directa* de $\{G_i\}_{i\in I}$, y denotado por $\bigoplus_{i\in I} G_i$. En esta memoria se le considerará dotado de la topología *asterisco*, cuya base de entornos está formada por

$$\sum_{i\in I}^{*} U_i = \{(g_i) \in \bigoplus_{i\in I} G_i \ : \ \sum_{i\in I}(1/n_{U_i}(g_i)) < 1\}$$

donde $n_{U_i}(g_i) = \sup\{n \ : \ kg_i \in U_i \text{ para } k = 1, 2, \ldots, n\ \}$ y $U_i \in \mathcal{N}_0(G_i)$ para cada $i \in I$.

Por otra parte, si (G, τ) es un grupo topológico y H es un subgrupo normal de G, se define sobre el cociente G/H una estructura de grupo con la operación $(xH)\cdot(yH) = (x\cdot y)H$. Si $\pi : G \longrightarrow G/H$ es la proyección canónica, se define la topología cociente cuya base de abiertos viene dada por los conjuntos V tales que $\pi^{-1}(V)$ es un abierto de G. Esta topología es compatible con la estructura de grupo de G/H y lo convierte en un grupo topológico. El grupo cociente es Hausdorff si, y sólo si, el subgrupo H es cerrado. El grupo cociente G/H es discreto si, y sólo si, H es un subgrupo abierto.

Todo grupo topológico abeliano (G, τ) admite una complección $(\overline{G}, \overline{\tau})$ ([17, III §3, Teorema 2]) y una base de entornos para ésta la forman la clausura en $\overline{G}$ de entornos de G. Además, todo homomorfismo continuo $\chi : G \longrightarrow G'$, siendo G' un grupo topológico completo, se extiende de forma única a un homomorfismo $\overline{\chi} : \overline{G} \longrightarrow G'$ ([17, III §3 Proposición 8]).

Un subconjunto A de un grupo topológico abeliano se dice *totalmente aco-*

tado si para cada entorno $U \in \mathcal{N}_0(G)$ existe un subconjunto finito F de G de forma que

$$A \subseteq F + U = \bigcup_{x \in F} (x + U)$$

El grupo G se dice totalmente acotado cuando él mismo es un subconjunto totalmente acotado.

Todo grupo totalmente acotado es un subgrupo denso de un grupo compacto, que además es único salvo isomorfismos, y que es conocido como la complección de Weil (véase [101]).

1.2. Grupos duales

Se llama *carácter* sobre un grupo abeliano G a cualquier homomorfismo de grupo entre G y $\mathbb{T}$. El conjunto de caracteres se representará habitualmente por $Hom(G, \mathbb{T})$.

Dado un grupo topológico abeliano (G, τ) se considera el grupo de homomorfismos continuos de G en $\mathbb{T}$ que denotaremos por $G^\frown$. Este grupo es dotado con la topología compacto–abierta, τ_{co}; es decir, la topología cuya base de entornos del neutro viene dada por

$$U(K, \epsilon) := \{\gamma \in Hom(G, \mathbb{T}) \ : \ |\gamma(x) - 1| < \epsilon \text{ para todo } x \in K \}$$

donde $\epsilon > 0$ y K recorre los compactos de (G, τ). La topología τ_{co} es conocida también como la topología de convergencia uniforme sobre los compactos de (G, τ). El grupo $(G^\frown, \tau_{co})$ se llama *grupo dual* de (G, τ).

Si se reitera el proceso; es decir, si se considera el grupo de homomorfismos continuos de $(G^{\frown}, \tau_{co})$ en $\mathbb{T}$, dotado de la correspondiente topología compacto–abierta, se obtiene el grupo *bidual* que se denotará por $(G^{\frown\frown}, \tau_{co})$.

Todo grupo abeliano puede sumergirse en su bidual mediante un homomorfismo natural llamado *evaluación*

$$\alpha_G : G \longrightarrow G^{\frown\frown}$$

definido por $\alpha_G(g)(\gamma) = \gamma(g)$, para todo $\gamma \in G^{\frown}$.

Cuando α_G es un isomorfismo (algebraico) el grupo G se dice *semirreflexivo*. El grupo G se dice *reflexivo* cuando α_G es un isomorfismo topológico. También se dice que G satisface la dualidad de Pontryagin (véase el Teorema 1.3.1 más adelante).

Por grupo abeliano *maximalmente casi-periódico* (en el sentido de von Neumann) se entenderá un grupo abeliano G cuyo grupo de caracteres continuos $G^{\frown}$ separa puntos de G; es decir, para cada $g \in G$ distinto del elemento neutro existe un carácter continuo $\gamma \in G^{\frown}$ tal que $\gamma(g) \neq 1$.

Una propiedad característica de los grupos abelianos maximalmente casi-periódicos es que el homomorfismo evaluación es inyectivo.

Además, si G es un grupo abeliano maximalmente casi–periódico, entonces su dual $G^{\frown}$ también lo es, puesto que G y, por tanto, $\alpha_G(G) \subseteq G^{\frown\frown}$, siempre separa puntos de $G^{\frown}$.

Las siguientes definiciones pueden encontrarse en [71, §3].

Definición 1 *Un subgrupo H de un grupo topológico abeliano G se dice* dualmente sumergido *si todo carácter continuo $\gamma : H \longrightarrow \mathbb{T}$ se extiende a un carácter continuo $\overline{\gamma} : G \longrightarrow \mathbb{T}$.*

Dado un subgrupo H de G se define el *anulador* de H como

$$An(H) = H^{\perp} = \{\gamma \in G^{\frown} \ : \ \gamma(h) = 1, \quad \text{para todo } h \in H \ \}$$

Definición 2 *Un subgrupo H de un grupo topológico abeliano G se dice* dualmente cerrado *si dado $g \notin H$ existe un carácter continuo $\gamma \in G^{\frown}$, de forma que $\gamma \in An(H)$ y $\gamma(g) \neq 1$.*

Las operaciones básicas con grupos tienen un buen comportamiento frente al dual.

Proposición 1.2.1

1. *Si H es un subgrupo dualmente inmerso y dualmente cerrado de un grupo topológico abeliano maximalmente casi periódico (G, τ), entonces $H^{\frown}$ es isomorfo (algebraicamente) al grupo cociente $G^{\frown}/An(H)$ (véase [10, p. 135]).*

2. *Si H es un subgrupo cerrado de un grupo topológico abeliano (G, τ), entonces $(G/H)^{\frown}$ es isomorfo (algebraicamente) a $An(H)$ [10, p. 135]).*

3. *Sea $\{(G_i, \tau_i)\}_{i \in I}$ una familia de grupos topológicos abelianos entonces $(\prod_{i \in I} G_i)^{\frown}$ es isomorfo topológicamente a la suma directa $\bigoplus_{i \in I} G_i{}^{\frown}$ dotada de la topología asterisco (Kaplan [61])*

4. *Si $\bigoplus_{i \in I} G_i{}^{\frown}$ es dotada de la topología asterisco, entonces $\left(\bigoplus_{i \in I} G_i\right)^{\frown}$ es isomorfo topológicamente a $\prod_{i \in I} G_i{}^{\frown}$ (Kaplan [61])*

Como los grupos topológicos son espacios homogéneos, un homomorfismo $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$ es continuo si, y sólamente si, χ es continuo en el neutro de G; es decir, si dado $\epsilon > 0$ existe $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que $|\chi(g) - 1| < \epsilon$, para todo $g \in U$. Una familia de caracteres E se dice un *equicontinuo* si el correspondiente entorno U es el mismo para cada elemento de la familia; es decir,

Definición 3 *Sea (G, τ) un grupo topológico abeliano. Un subconjunto E de $G^\frown$ se dice un* equicontinuo *si para cada $\epsilon > 0$ existe un entorno $U \in \mathcal{N}_0(G)$ tal que*

$$|\chi(U) - 1| < \epsilon, \qquad \textit{para todo } \chi \in E$$

Sean G y H dos grupos topológicos abelianos y $\psi : G \longrightarrow H$ un homomorfismo continuo entre ellos. Se define el *homomorfismo dual* $\psi^\frown : H^\frown \longrightarrow G^\frown$ por la fórmula

$$\psi^\frown(\chi)(g) = \chi(\psi(g), \quad \text{para todo } \chi \in H^\frown \text{ y } g \in G$$

1.3. Grupos localmente compactos

Pontryagin [74] demuestra que el dual de un grupo compacto es discreto y van Kampen [96] extiende este resultado, probando que el dual de un grupo abeliano localmente compacto es de nuevo un grupo localmente compacto. Es más, el teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen establece que todo grupo abeliano localmente compacto puede verse, en realidad, como un grupo dual.

Teorema 1.3.1 (Pontryagin-van Kampen) *Si G es un grupo localmente compacto y abeliano, entonces la aplicación evaluación $\alpha_G : G \longrightarrow G^{\wedge\wedge}$ es un isomorfismo topológico.*

Este resultado constituye la base del Análisis Armónico abstracto y tiene una importancia fundamental en el estudio de la estructura de los grupos localmente compactos y abelianos.

Como consecuencia del teorema de dualidad de Pontryagin-van Kampen se obtienen los siguientes resultados

Teorema 1.3.2

1. *El grupo dual de un grupo compacto es discreto y el grupo dual de un grupo discreto es compacto.*

2. *Todo subgrupo de un grupo localmente compacto y abeliano G está dualmente sumergido.*

3. *Todo subgrupo cerrado de un grupo localmente compacto y abeliano G es dualmente cerrado.*

4. *Todo grupo localmente compacto y abeliano es un grupo abeliano maximalmente casi periódico.*

En particular, (véase [52]) se tiene que

Proposición 1.3.3

1. $\mathbb{R}^{\wedge} = \mathbb{R}$

2. $\mathbb{Z}^{\wedge} = \mathbb{T}$

3. $\mathbb{T}^{\wedge} = \mathbb{Z}$

1.4. Grupos localmente quasi–convexos

La mayoría de los resultados de esta sección pueden consultarse en el libro de Banaszczyk [10]

Definición 4 *Sea* (G, τ) *un grupo topológico abeliano. Dado un subconjunto* A *de* G*, llamaremos* polar *de* A *(en* $G^\frown$ *) a*

$A^\triangleright = \{\chi \in G^\frown \ : \ \Re(\chi(g)) \geq 0, \ \textit{para todo } g \in A \ \}$

Análogamente, definiremos el prepolar *de* $B \subset G^\frown$ *en* G *a*

$B^\triangleleft = \{g \in G \ : \ \Re(\chi(g)) \geq 0, \ \textit{para todo } \chi \in G^\frown \ \}$

Definición 5 *Sea* (G, τ) *un grupo topológico abeliano. Un subconjunto* A *de* G *se dice* quasi–convexo *si dado* $g \notin A$ *existe un carácter continuo* $\chi \in G^\frown$ *de forma que* $\Re(\chi(g)) < 0$ *y* $\Re(\chi(a)) \geq 0$*, para todo* $a \in A$*.*

Dado un subconjunto A de G se denotará por $Q(A)$ al menor subconjunto quasi–convexo que contiene a A y se le llamará *envoltura quasi–convexa* de A.

Nótese que el polar de cada subconjunto A de G es siempre un subconjunto quasi–convexo de $G^\frown$ para las topologías de convergencia puntual, convergencia precompacta (esto es, de convergencia uniforme sobre los totalmente acotados) y compacto–abierta. Por otra parte, es trivial que el prepolar de cualquier subconjunto B de $G^\frown$ es quasi–convexo en (G, τ). Por tanto, $Q(A) = (A^\triangleright)^\triangleleft$.

Cabe destacar que si H es un subgrupo de G, entonces $H^\triangleright = An(H)$. Además, el subgrupo H es un conjunto quasi–convexo si, y sólo si, es dualmente cerrado.

Definición 6 *Un grupo topológico abeliano* (G, τ) *es* localmente quasi-convexo *si admite una base de entornos del neutro formada por conjuntos quasi–convexos.*

Proposición 1.4.1

1. *El dual de cualquier grupo abeliano es localmente quasi–convexo*
2. *Todo grupo reflexivo es localmente quasi–convexo*
3. *Todo grupo localmente compacto abeliano es localmente quasi–convexo.*
4. *Todo grupo aditivo de un espacio vectorial localmente convexo es localmente quasi–convexo.*
5. *Todo grupo abeliano localmente quasi–convexo es un grupo abeliano maximalmente casi periódico.*

La quasi–convexidad local se hereda para subgrupos y productos, aunque no para cocientes.

Proposición 1.4.2

1. *Los subgrupos de grupos localmente quasi–convexos son localmente quasi–convexos.*
2. *El producto arbitrario de grupos localmente quasi–convexos es localmente quasi–convexo.*
3. *Los cocientes de grupos localmente quasi–convexos no son, en general, localmente quasi–convexos. Como ejemplo, un espacio de Banach X contiene un subgrupo Y discreto y débilmente denso ([81]), entonces el cociente X/Y es no trivial y verifica que su dual $(X/Y)^\frown = \{0\}$ (véase [10, Proposition 2.5]), por lo que no puede ser localmente quasi–convexo (Proposición 1.4.1).*

Lema 1.4.3 *Un carácter χ de un grupo topológico abeliano G, es continuo si, y sólo si, $\chi \in U^{\triangleright}$ para algún entorno del neutro U.*

Esto permite probar que

Proposición 1.4.4 *Dado un grupo topológico abeliano (G, τ), un subconjunto $E \subseteq G^{\frown}$ es un equicontinuo si, y sólo si, $E \subseteq U^{\triangleright}$ para algún entorno del neutro $U \in \mathcal{N}_0(G)$.*

Proposición 1.4.5 *Si U es un entorno de la identidad de un grupo topológico abeliano G, entonces su polar $U^{\triangleright}$ es compacto en $G^{\frown}$ para las topologías de convergencia precompacta, puntual y compacto-abierta.*

1.5. Grupos nucleares

Los grupos nucleares forman la clase más pequeña de grupos topológicos abelianos que contiene los grupos localmente compactos y los grupos aditivos de espacios vectoriales localmente convexos nucleares y es cerrada para subgrupos, cocientes Hausdorff y productos arbitrarios. El interés aquí es que, desde el punto de vista de los caracteres continuos, heredan muchas propiedades de los grupos localmente compactos. La definición de grupo nuclear podría simplificarse diciendo que es un cociente Hausdorff de subgrupos de grupos vectoriales nucleares. La definición intrínseca de grupo nuclear es, sin embargo, bastante complicada.

Definición 7 *Un grupo abeliano Hausdorff G se dice* **nuclear** *si satisface la siguiente condición:*

Dados un entorno del neutro arbitrario, $U \in N_0(G)$, $c > 0$ y $m = 1, 2, \ldots$ existen: un espacio vectorial E, dos subconjuntos simétricos y convexos X e Y de E con

$$d_k(X, Y) \leq ck^{-m} \qquad (k = 1, 2, ...),$$

un subgrupo K de E y un homomorfismo $\phi : K \longrightarrow G$ tales que

$$\phi(K \cap X) \in N_0(G) \qquad y \qquad \phi(K \cap Y) \subset U$$

donde $d_k(X, Y) = \inf\limits_{L s.e.v. E} d(X, Y; L)$ y $d(X, Y; L) = \inf\{t > 0 \ : \ X \subset tY + L\}$

Afortunadamente, no se necesitará emplear la definición anterior en esta memoria y sólo se utilizarán algunas propiedades de los grupos nucleares que se resumen a continuación.

Proposición 1.5.1 *Los grupos nucleares son localmente quasi–convexos*

Banaszczyk demuestra que la complección de un grupo nuclear metrizable es también un grupo nuclear. Aussenhofer, en [6, (Corollary 21.4)], elimina la hipótesis de metrizabilidad

Proposición 1.5.2 (Aussenhofer) *La complección de un grupo nuclear es un grupo nuclear*

Este resultado es consecuencia de un teorema de estructura para grupos nucleares que se obtiene igualmente en [6, (Theorem 21.3)]

Teorema 1.5.3 (Aussenhofer) *Cada grupo nuclear G puede ser sumergido en un producto de grupos nucleares metrizables y completos, de forma que la imagen de G está dualmente sumergida. Si además G es completo entonces la imagen es dualmente cerrada.*

Además,

Proposición 1.5.4 *Si G es un grupo nuclear metrizable, su dual $G^\frown$ también es nuclear. Si además G es completo, entonces G es reflexivo.*

Nota 1 *Se demuestra en [10] una condición más fuerte: todo grupo nuclear metrizable y completo es fuertemente reflexivo. En [6] se obtiene que las hipótesis de la proposición anterior pueden cambiarse por la de ser G Cěch–completo.*

1.6. La topología de Bohr

Cada grupo topológico G, no necesariamente abeliano, tiene asociado un grupo compacto de Hausdorff bG (llamado la compactación de Bohr) y un homomorfismo continuo b de G en un subgrupo denso de bG caracterizado por la siguiente propiedad universal: para cada homomorfismo h de G en un grupo compacto K, existe un homomorfismo continuo h^b de bG en K tal que $h = h^b \circ b$. La descripción de la compactación de Bohr es, en general, muy difícil. Sin embargo, para grupos abelianos la teoría de la dualidad permite identificarla con el dual del grupo $G^\frown$ dotado de la topología discreta; es decir

$bG \cong (G^\frown{}_d)^\frown = Hom(G^\frown, \mathbb{T})$. En el caso de ser G maximalmente casi periódico y abeliano, la aplicación b es uno a uno y entonces la topología que G hereda de bG se llama la topología de Bohr de G. Puesto que se verifica que $bG \cong Hom(G^\frown, \mathbb{T})$, resulta que la topología de Bohr coincide con la topología de convergencia puntual sobre los elementos de $G^\frown$ y una base de entornos viene dada por

$$U(F, \epsilon) := \{x \in G \ : \ |\gamma(x) - 1| < \epsilon \text{ para todo } \gamma \in F \ \}$$

donde $\epsilon > 0$ y F recorre los subconjuntos finitos de $G^\frown$.

Cuando un grupo abeliano maximalmente casi–periódico G es dotado con esta topología, se le denota generalmente como G^+. Para remarcar la noción de convergencia puntual, a dicha topología se la denotará a lo largo de esta memoria como $\sigma(G, G^\frown)$ o simplemente como $\sigma(G^\frown)$. Por tanto, $G^+ = (G, \sigma(G, G^\frown))$.

Comfort y Ross prueban en [24] (véase el Teorema 2.1.1 en esta misma memoria) que toda topología totalmente acotada es una topología de convergencia puntual sobre un subgrupo de caracteres de G. En consecuencia, la topología de Bohr de un grupo G, siendo la topología de convergencia puntual sobre la familia de caracteres continuos de G, es totalmente acotada y el grupo G puede ser sumergido como un subgrupo denso de un grupo compacto (su compleción de Weil). La unicidad de dicha compleción permite que se identifique con la compactación de Bohr del grupo G. Dado que todo carácter continuo $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$ es una aplicación uniformemente continua, se deduce entonces que

Proposición 1.6.1 *Todo carácter continuo $\chi : G \longrightarrow \mathbb{T}$ se extiende de forma única a un homomorfismo continuo $\chi^b : bG \longrightarrow \mathbb{T}$.*

Se resumen a continuación algunos hechos básicos referidos al comportamiento de la topología de Bohr en subgrupos y cocientes

Proposición 1.6.2 *Sea G un grupo topológico abeliano maximalmente casi periódico. Entonces*

1. *La topología de Bohr de G es una topología localmente quasi–convexa (Banaszczyk [10]).*
2. *Todo subgrupo dualmente cerrado de G es cerrado para la topología de Bohr.*
3. *Si H es un subgrupo dualmente sumergido del grupo G, entonces la topología de Bohr de H coincide con la topología que H hereda de G^+.*
4. *Si H es un subgrupo dualmente cerrado y dualmente sumergido de G, entonces los grupos $(G/H)^+$ y G^+/H^+ son topológicamente isomorfos.*

Capítulo 2

Topologías débiles

2.1. Introducción

En el lenguaje de las categorías, se dice que una categoría $\mathcal{C}$ admite una dualidad cuando existe otra categoría $\mathcal{D}$ y un par de functores contravariantes (A, B) definidos entre ellas, tales que los functores AB y BA son equivalentes al functor identidad correspondiente. Uno de los ejemplos más conocidos lo constituye la teoría de la dualidad de Pontryagin–van Kampen. Esta teoría se podría resumir en que tomando $A = B = \widehat{\ }$, el functor dual sobre la categoría $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{L}$ de los grupos abelianos localmente compactos, se obtiene que (A, B) define una dualidad entre las categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$.

En este capítulo, se considerará una dualidad que también opera sobre una sola categoría; la categoría $\mathcal{T}_A$ formada por los grupos topológicos abelianos totalmente acotados y los homomorfismos continuos definidos entre ellos. De esta forma, a cada grupo G en $\mathcal{T}_A$ se le asocia otro grupo G' (el grupo dual) que también pertenece a la categoría $\mathcal{T}_A$.

El punto de partida lo constituye la teoría de la dualidad de Pontryagin–van Kampen y la noción de grupos en dualidad, introducida por Varopoulos en [97] que resulta ser una traslación al contexto de los grupos topológicos abelianos, de lo que sucede para los espacios vectoriales topológicos localmente convexos.

Definición 8 (Varopoulos) *Sean G y G' dos grupos topológicos abelianos. Se dice que $\alpha = \langle G, G' \rangle$ es una dualidad si existe una aplicación*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times F \to \mathbb{T}$$

verificando

a) $\langle g \cdot g', h \rangle = \langle g, h \rangle \cdot \langle g', h \rangle$, *para todo* $g, g' \in G$, $h \in G'$;

b) $\langle g, h \cdot h' \rangle = \langle g, h \rangle \cdot \langle g, h' \rangle$, *para todo* $g \in G$, $h, h' \in G'$;

y además cumpliendo

i) si $g \neq e_G$, *existe* $h \in G'$ *tal que* $\langle g, h \rangle \neq 1$;

ii) si $h \neq e'_G$, *existe* $g \in G$ *tal que* $\langle g, h \rangle \neq 1$.

Definición 9 (Varopoulos) *Una topología τ sobre un grupo G se dice compatible con la dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$ si $(G, \tau)\widehat{\ } = G'$.*

Las condiciones (i) y (ii) garantizan que G separa los puntos de G' y G' los separa de G. En definitiva, si $\alpha = \langle G, G' \rangle$ es una dualidad, queda definida automáticamente otra dualidad $\beta = \langle G', G \rangle$.

Si $\langle G, G' \rangle$ es una dualidad pueden definirse las aplicaciones "evaluaciones"

$$\alpha_G : G \longrightarrow Hom(G', \mathbb{T}) \qquad \text{y} \qquad \alpha_{G'} : G' \longrightarrow Hom(G, \mathbb{T})$$

definidas por $\alpha_G(g)(g') = \langle g, g' \rangle = \alpha_{G'}(g')(g)$, para todo $g \in G$, $g' \in G'$. Las condiciones (a) y (b) implican que G y G' son algebraicamente isomorfos, via las aplicaciones evaluaciones, a subgrupos de $Hom(G', \mathbb{T})$ y $Hom(G, \mathbb{T})$, respectivamente.

Dada una dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$, se pueden asociar a ella dos topologías débiles canónicas definidas sobre G y G', respectivamente. La topología $w(G, G')$ sobre G es la topología débil generada por todos los elementos de G' considerados como homomorfismos continuos de G sobre $\mathbb{T}$. La topología débil $w(G', G)$ sobre G' se define de forma similar para la dualidad $\langle G', G \rangle$.

La importancia de las topologías débiles en el estudio de los grupos abelianos totalmente acotados radica en el siguiente resultado de Comfort y Ross que puede encontrarse en [24]

Teorema 2.1.1 (Comfort y Ross) *Un grupo topológico abeliano y Hausdorff (G, τ) es totalmente acotado si, y sólo si, existe un subgrupo G' de $Hom(G, \mathbb{T})$ tal que (G, τ) es topológicamente isomorfo a $(G, w(G, G'))$.*

Como consecuencia de este teorema se tiene que cada grupo abeliano totalmente acotado y Hausdorff (G, τ) tiene asociado un grupo G' tal que $\langle G, G' \rangle$ forma una dualidad. Además, el grupo abeliano totalmente acotado $(G', w(G', G))$ es el *grupo dual* asociado a (G, τ). Más aún, el grupo dual asociado a $(G', w(G', G))$ coincide con $(G, w(G, G')) = (G, \tau)$. Por tanto, tomando $\mathcal{C} = \mathcal{D} = \mathcal{T}_A$, la categoría de los grupos abelianos totalmente acotados, y $A = B = \widehat{\ }$, el functor dual que asocia a cada grupo abeliano totalmente acotado, (G, τ) el grupo dual $(G', w(G', G))$, se obtiene que (A, B) define una dualidad de $\mathcal{T}_A$ en sí misma.

En el resto del capítulo, se asumirá que cada grupo abeliano totalmente acotado está dado en la forma $(G, w(G', G))$ donde $\langle G, G' \rangle$ forma una dualidad, que a la vista del teorema 2.1.1 no supone ninguna pérdida de generalidad.

Dada una dualidad $\langle G, G' \rangle$, ambas topologías débiles, $w(G, G')$ y $w(G', G)$ son totalmente acotadas y compatibles con la dualidad dada, por tanto las completaciones de $(G, w(G, G'))$ y $(G', w(G', G))$ son grupos compactos denotados por $b(G, G')$ y $b(G', G)$, respectivamente (véase [97]).

El estudio de las topologías débiles tiene numerosos precedentes en la literatura científica. H. H. Corson, en [26], estudia las propiedades topológicas de los espacios de Banach dotados con la topología débil. Valdivia [94], Wheeler [104] y Wilansky [105], entre otros, extienden el trabajo de Corson con el estudio de la topología débil de los espacios vectoriales localmente convexos. Finalmente, Arhangel'skii [5] y otros miembros de la escuela de Moscú, han investigado en profundidad la relación entre las propiedades topológicas de un espacio topológico X y el comportamiento de su anillo de funciones reales continuas, $C_p(X)$, dotado con la topología de convergencia puntual.

En todas estas investigaciones se establecen relaciones entre propiedades del espacio X, dotado de su topología débil y propiedades del espacio dual X' de homomorfismos continuos (en el caso de espacios dotados con estructura algebraica) o propiedades del espacio $C_p(X)$ de funciones reales continuas (para el caso de espacios topológicos).

Definición 10 *Se dice que dos propiedades topológicas $\mathcal{P}$ y $\mathcal{Q}$ están en* dualidad *cuando para cada dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$ se verifica que $(G, w(G, G'))$ satisface $\mathcal{P}$ si, y sólo si, $(G', w(G', G))$ satisface $\mathcal{Q}$.*

El objetivo que se persigue es la identificación de pares de propiedades duales o, más exactamente, se buscará la propiedad dual de algunas propiedades topológicas específicas, como la compacidad, la realcompacidad y la separabilidad.

2.2. Topologías débiles

En esta sección se considerará una dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$ y se describirán las propiedades básicas de los grupos $(G, w(G, G'))$. Con objeto de hacer esta memoria lo más autocontenida posible, se incluye en esta sección la demostración de muchos resultados que son, en su mayoría, conocidos.

En primer lugar, se tiene el conocido resultado de Kakutani (cf. [60])

Teorema 2.2.1 (Kakutani) *Para cada dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$, se tiene que $|b(G, G')| = 2^{|G'|}$ (respectivamente, $|b(G', G)| = 2^{|G|}$).*

Demostración. Puesto que $b(G, G')$ es el grupo dual (en el sentido de Pontryagin) del grupo discreto G', se obtiene que $|G'|$ coincide con el peso de este grupo compacto. Basta aplicar ahora [52, (24.47)]. $\square$

Teorema 2.2.2 *Dada una dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$, G admite $2^{2^{|G|}}$ topologías de grupo totalmente acotadas. Análogamente, sobre G' se pueden definir $2^{2^{|G'|}}$ topologías totalmente acotadas.*

Demostración. Dado un grupo abeliano arbitrario H de cardinalidad α, se tiene que H contiene 2^{α} subgrupos distintos (véase [33, (16.3) y (16.1)]). De aquí que, $b(G, G')$ contiene $2^{2^{|G|}}$ subgrupos distintos y, aplicando el Teorema 2.1.1, cada uno de ellos define sobre G una topología de grupo totalmente acotada. Para G' basta considerar la dualidad $\langle G', G \rangle$. $\square$

En relación con este último resultado, cabe preguntarse cuán distintas son estas topologías sobre un grupo abeliano arbitrario. La respuesta a esta pregunta no es conocida en general; sin embargo, en algunos casos la repuesta es sorprendentemente simple

Teorema 2.2.3 (Sierpińsky) *Sean $\alpha_1 = \langle G_1, G_1' \rangle$ y $\alpha_2 = \langle G_2, G_2' \rangle$ dos dualidades tales que $|G_i| = |G_i'| = \aleph_0$ para $i = 1, 2$. Entonces, $(G_1, w(G_1, G_1'))$ y $(G_2, w(G_2, G_2'))$ son homeomorfos como espacios topológicos.*

Demostración. En la Proposición 2.3.2 se verá que ambos espacios topológicos son metrizables. Por otra parte, Sierpińsky demuestra en [82] que cada espacio metrizable, numerable y denso en sí mismo, es homeomorfo al conjunto de los racionales dotado de la topología usual. □

Siendo la topología débil $w(G, G')$ una topología de convergencia puntual sobre los elementos de G', una base de entornos para dicha topología viene dada por

$$U(F, \epsilon) = \{g' \in G' \ : \ |\langle g, g' \rangle - 1| < \epsilon$$

donde $\epsilon > 0$ y F recorre los subconjuntos finitos de G'.

Por otra parte, se define el *polar* de un subconjunto A de G en la dualidad $\alpha = \langle G, G' \rangle$ como

$$A_\alpha^\triangleright = \{g' \in G' \ : \ \Re(\langle g, g' \rangle) \geq 0, \text{ para todo } g \in A \ \}$$

Se escribirá simplemente $A^\triangleright$ si no hay confusión respecto de la dualidad. Análogamente, si B es un subconjunto de G', se define el polar de B en G como

$$B^\triangleleft = \{g \in G \ : \ \Re(\langle g, g' \rangle) \geq 0, \text{ para todo } g' \in B \ \}$$

El polar de cualquier conjunto siempre es un conjunto quasi–convexo para la correspondiente topología débil.

Lema 2.2.4 *Sea $\langle G, G' \rangle$ una dualidad. El polar de cualquier subconjunto A de G es un conjunto quasi–convexo en la topología $w(G', G)$.*

Demostración. Sea $g' \notin A^{\triangleright}$. Entonces, existe un $g \in A$ con $\Re(\langle g, g' \rangle) < 0$. Basta observar que $g \in G = (G', w(G', G))^{\frown}$ para deducir el resultado. □

Como consecuencia de esto se obtiene que todo grupo abeliano totalmente acotado es localmente quasi–convexo

Proposición 2.2.5 *Dada una dualidad $\langle G, G' \rangle$, la topología $w(G, G')$ es localmente quasi–convexa.*

Demostración. Baste observar para ello que la topología $w(G, G')$ tiene una base de entornos formada por conjuntos de la forma

$$F^{\triangleleft} := \{g \in G \ : \ \Re(\langle g, g' \rangle) \geq 0, \text{ para todo } g' \in F \ \}$$

siendo F un subconjunto finito de G', que son quasi–convexos por el lema anterior.

Obsérvese , en primer lugar que, para $\epsilon < 1$, $U(F, \epsilon) \subset F^{\triangleleft}$ y, por tanto, $F^{\triangleleft}$ es un entorno del neutro en G.

Sea, pues, $U(F, \epsilon) \in \mathcal{N}_0(G)$. Determinamos un número natural m tal que $\dfrac{\sqrt{2}}{m} < \epsilon$. Sea

$$A = F^m := \{g'_1 \cdot g'_2 \cdot \ldots \cdot g'_m \ : \ g'_i \in F \ \}$$

el cual es un conjunto finito. Sólo resta probar que $A^{\triangleleft} \subset U(F,\epsilon)$. La prueba de esto se basa en la siguiente propiedad de los números complejos de módulo unidad:

$$\Re(z) \geq 0 \ \wedge\ \Re(z^m) \geq 0 \quad \Rightarrow \quad |z-1| \leq \frac{\sqrt{2}}{m}$$

Sean $g \in A^{\triangleleft}$ y $g' \in F$. Sea $z = \langle g, g' \rangle$, entonces

$$z^m = \langle g, g' \rangle^m = \langle g, g'^{\,m} \rangle$$

y puesto que $g'^{\,m} \in F^m = A$ se deduce $\Re(z^m) \geq 0$ de donde

$$|z-1| \leq \frac{\sqrt{2}}{m} < \epsilon$$

y esto significa que $g \in U(F,\epsilon)$, o sea, $A^{\triangleleft} \subset U(F,\epsilon)$ y la proposición queda demostrada. □

Las topologías débiles tienen un buen comportamiento frente a las operaciones usuales de la teoría de conjuntos; es decir, se heredan para subgrupos, cocientes y productos. El dual de un subgrupo H de $(G, w(G,G'))$ puede identificarse con $G'/An(H)$ y el dual de un cociente G/H con $An(H)$.

Proposición 2.2.6 *Sea $\langle G, G' \rangle$ una dualidad y sea H un subgrupo de G. Entonces la topología heredada por H de $(G, w(G,G'))$ coincide con la topología débil de la dualidad $\langle H, G'/An(H) \rangle$.*

Demostración. Es una consecuencia inmediata del hecho de que

$$\langle \gamma, h \rangle = \langle \gamma + An(H), h \rangle$$

□

Proposición 2.2.7 *Sea $\langle G, G'\rangle$ una dualidad y sea H un subgrupo de G. Entonces, la topología cociente de G/H, cuando G y H tienen las topologías débiles respectivas, $w(G, G')$ y $w(H, G'/An(H))$, coincide con la topología débil de la dualidad $\langle G/H, An(H)\rangle$.*

Demostración. En primer lugar, obsérvese que los siguientes grupos compactos, $K_1 = b(G, G')/b(H, G'/H^{\perp})$ y $K_2 = b(G/H, H^{\perp})$, son isomorfos topológicamente y de forma canónica, puesto que ambos son grupos compactos con el mismo dual $H^{\perp}$. Por otra parte, el subgrupo G/H hereda la topología cociente $w(G, G')/w(H, G'/H^{\perp})$ de K_1 y la topología débil $w(G/H, H^{\perp})$ de K_2. En definitiva, $(G/H, w(G, G')/w(H, G'/H^{\perp}))$ es topológicamente isomorfo a $(G/H, w(G/H, H^{\perp}))$. □

Proposición 2.2.8 *Supongamos que para cada $\alpha \in \Lambda$ tenemos una dualidad $\langle G_\alpha, G'_\alpha\rangle$. Entonces, la topología producto de $\prod_{\alpha\in\Lambda}(G_\alpha, w(G_\alpha, G'_\alpha))$ coincide con la topología débil de la dualidad $\langle \prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G'_\alpha\rangle$.*

Demostración. La topología débil $w(\prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha, \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G'_\alpha)$ hace continuas las proyecciones canónicas $\pi_\alpha : \prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha \longrightarrow G_\alpha$, puesto que cada red convergente es convergente coordenada a coordenada; por tanto, la topología producto es menos fina que la topología débil. Por otra parte, el grupo dual de $\prod_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$, con la topología producto, es $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G'_\alpha$ y, en consecuencia, la topología débil es menos fina que la topología producto, lo que concluye la prueba. □

Nota 2 *Las topologías débiles no se preservan, en general, al tomar sumas directas $\bigoplus_{\alpha\in\Lambda} G_\alpha$. Basta observar para ello que dicha propiedad no es cierta siquiera para espacios vectoriales topológicos localmente convexos (véase, por ejemplo, [77, p. 99]).*

A continuación se incluyen otros resultados básicos

Proposición 2.2.9 *Si* $\langle G, G'_1\rangle$ *y* $\langle G, G'_2\rangle$ *son dos dualidades entonces,*

$$w(G_1, G'_1) \preceq w(G_2, G'_2) \quad \Leftrightarrow \quad G'_1 \subseteq G'_2$$

Demostración. Supóngase, para empezar, que $w(G_1, G'_1) \preceq w(G_2, G'_2)$ y sea $h \in G'_1 = (G_1, w(G_1, G'_1)^\frown$. Entonces, h es un homomorfismo de G en $\mathbb{T}$ $w(G_1, G'_1)$–continuo y aplicando que $w(G_1, G'_1) \preceq w(G_2, G'_2)$ resulta que h es también $w(G_2, G'_2)$–continuo, es decir $h \in G'_2$. Siendo h un elemento genérico de G'_1 queda demostrado que $G'_1 \subseteq G'_2$.

Recíprocamente, supóngase ahora que $G'_1 \subseteq G'_2$. Puesto que $w(G_1, G'_1)$ y $w(G_2, G'_2)$ son las topologías de convergencia puntual sobre los elementos de G'_1 y G'_2 respectivamente, es fácil deducir que toda red $w(G_2, G'_2)$–convergente es también $w(G_1, G'_1)$–convergente y por tanto $w(G_1, G'_1) \preceq w(G_2, G'_2)$. □

El siguiente resultado, que permite caracterizar los subgrupos densos de $(G, w(G, G'))$, está basado en el hecho de que un subgrupo es denso si, y sólo si, su anulador (en su dual G') es el grupo trivial $\{1\}$.

Proposición 2.2.10 *Sea* $\langle G, G'\rangle$ *una dualidad y sea* L *un subgrupo de* G*. Entonces,*

$$L \text{ es denso en } (G, w(G, G')) \qquad \Leftrightarrow \qquad L \text{ separa los puntos de } G'$$

Demostración. Supóngase que L es denso en $(G, w(G, G'))$ y sea $\gamma \in G'$, $\gamma \neq 1$. Como L es denso en $(G, w(G, G'))$, se tiene que $\gamma \notin An_{G'}(L)$; es decir, debe existir un $g \in L$ tal que $\gamma(g) \neq 1$. Recíprocamente, si L no fuera denso en $(G, w(G, G'))$ entonces sus compactaciones $bL \subsetneq bG$. Como $(bL)^\frown = G'/An(L)$

y $(bG)\widehat{\ } = G'$, se sigue que $An(L) \neq \{1\}$; es decir, que L no separa los puntos de G'. □

Lema 2.2.11 *Si $(G, w(G, G'))$ es compacto, entonces ningún subgrupo propio de G' separa los puntos de G.*

Demostración. Por la teoría de dualidad de Pontryagin–van Kampen, se tiene que $(G, w(G, G'))\widehat{\ } = G'$. Supóngase, pues, que existe un subgrupo H' de G' que separa los puntos de G. Entonces, $(G, w(G, H'))$ es también un grupo topológico Hausdorff y, en consecuencia, las topologías $w(G, G')$ y $w(G, H')$ coinciden. Ahora, si $H' \neq G'$, entonces $G'/H' \neq \{0\}$ y, por tanto, $Hom(G'/H', \mathbb{T})$ no es el grupo trivial. Aplicando de nuevo, la teoría de la dualidad de Pontryagin–van Kampen al grupo discreto G'/H', resulta que el anulador de H' en G no es el grupo trivial tampoco. Pero esto contradice la hipótesis inicial hecha sobre H'. Por tanto, H' no puede ser un subgrupo propio de G'. □

2.3. Propiedades duales

Como se indicó en la introducción, el objetivo es dualizar las propiedades topológicas de $(G, w(G, G'))$ en $(G', w(G', G))$. Aunque algunas de ellas son conocidas o consecuencia inmediata de resultados conocidos, son incluidas para resaltar el hecho de que los métodos de dualidad constituyen una herramienta importante en el estudio de la teoría de grupos.

Naturalmente, cabe esperar que esto no siempre sea posible y así, en ocasiones, la caracterización de la propiedad en $(G, w(G, G'))$ vendrá dada por el comportamiento de G' en otra topología distinta de $w(G', G)$, aunque aún en ese caso, se intentará situarla respecto de esta última.

Un resultado clásico de la teoría de grupos establece que el grupo (G,τ) es compacto si, y sólo si, su grupo dual $(G^\frown,\tau_{co})$ es discreto. En el caso de considerar las topologías débiles se tiene

Proposición 2.3.1 *Sea $\langle G,G'\rangle$ una dualidad. Entonces,*

$$(G,w(G,G')) \text{ es compacto} \quad \Leftrightarrow \quad w(G',G) \text{ es maximal}$$

donde el término maximal hace referencia a que no existe una topología totalmente acotada sobre G' más fina.

Demostración. Supóngase, para empezar, que $(G,w(G,G'))$ es compacto. Sea η una topología totalmente acotada sobre $G^\frown$, con $\eta \succeq w(G',G)$. Por la caracterización de Comfort y Ross (Teorema 2.1.1) de las topologías totalmente acotadas, existe un subgrupo $L \subseteq Hom(G',\mathbb{T})$ tal que $\eta = w(G',L)$. Por la Proposición 2.2.9, se verifica que $L \supseteq G$. Entonces,

$$G \subseteq L \subseteq Hom(G',\mathbb{T}) = bG$$

y, siendo $(G,w(G,G'))$ compacto, se deduce que $G = bG$, lo cual implica que $G = L$; es decir, $w(G',G) = w(G',L) = \eta$.

Recíprocamente, supóngase que $(G,w(G,G'))$ no fuese compacto. Considérese la compactación de Bohr bG de G, que contiene a $(G,w(G,G'))$ como subgrupo topológico propio. Existe, pues, $p \in bG \setminus G$. Pero, entonces, $w(G',G\cup\{p\})$ es una topología totalmente acotada sobre G' más fina que $w(G',G)$, por lo que esta última no es maximal. □

Es un hecho conocido que si un grupo topológico abeliano (G,τ) es metrizable, su dual $(G^\frown,w(G^\frown,G))$ es σ–compacto. En el caso de la topología débil se puede precisar un poco más.

Proposición 2.3.2 *Sea $\langle G, G' \rangle$ una dualidad. Entonces,*

$$(G, w(G, G')) \text{ es metrizable} \qquad \Leftrightarrow \qquad (G', w(G', G)) \text{ es numerable}$$

Demostración. Si $(G, w(G, G'))$ es metrizable entonces su complección $b(G, G')$ es un grupo métrico y compacto. De nuevo, la teoría de Pontryagin–van Kampen lleva a que $G' = b(G, G')^\frown$ es numerable.

Recíprocamente, supóngase que G' es numerable. Es suficiente probar que e_G admite una base de entornos numerable para la topología $w(G, G')$.

Como G' es numerable se pueden ordenar sus elementos en una sucesión $\{\gamma_n\}_{n<\omega}$. Se define, para cada $n < \omega$ el conjunto

$$U_n := \{x \in G \ : \ |\gamma_j(x) - 1| < \frac{1}{n}, \ j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$$

Cada U_n es un entorno de e_G para la topología $w(G, G')$ y sólo resta probar que el conjunto de todos ellos forma una base de entornos.

Para ello, sea U un $w(G, G')$–entorno de e_G. Puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que

$$U = \{x \in G \ : \ |\gamma_{i_j}(x) - 1| < \epsilon, \ j \in \{1, 2, \dots, s\}\}$$

Dado este $\epsilon > 0$ se determina un $n < \omega$ tal que $\frac{1}{n} < \epsilon$ y $\{i_1, i_2, \dots, i_s\} \subseteq \{1, 2, \dots, n\}$.

Es una mera comprobación que, entonces, se verifica $U_n \subseteq U$, por lo que efectivamente, el conjunto $\{U_n \ : \ n < \omega\}$ es base de entornos para $w(G, G')$. $\square$

Otra propiedad interesante es la de la separabilidad. En el contexto de los espacios de Banach, la separabilidad de la topología débil es equivalente a la metrizabilidad de la bola unidad del espacio dual para la topología débil estrella (el espacio dual nunca es metrizable para la topología débil estrella, salvo el caso trivial de dimensión finita). Por otra parte, para espacios vectoriales topológicos localmente convexos, la separabilidad (en una topología cualquiera), como caso particular de espacio generado por una cantidad numerable de débil–compactos y absolutamente convexos, implica la existencia en el espacio dual de una topología metrizable menos fina que la topología de Mackey (la de convergencia uniforme sobre los débil–compactos y absolutamente convexos), como puede verse en [56].

Para grupos, igual que para espacios localmente convexos, la separabilidad de (G,τ) implica la metrizabilidad de los equicontinuos del dual para la topología $w(G^\frown, G)$.

Proposición 2.3.3 *Si (G,τ) es un grupo topológico separable, entonces los equicontinuos de $G^\frown$ son metrizables para la topología $w(G^\frown, G)$.*

Demostración. Sea H un subgrupo numerable y denso en G. Puesto que H es denso, separa los puntos de $G^\frown$ y así, $\langle G^\frown, H\rangle$ es una dualidad. Como H es numerable, la topología $w(G^\frown, H)$ es metrizable (Proposición 2.3.2). Sólo falta probar que la topologías $w(G^\frown, G)$ y $w(G^\frown, H)$ coinciden sobre los equicontinuos de $G^\frown$. Sea, pues, E un equicontinuo de $G^\frown$. Aplicando las Proposiciones 1.4.4 y 1.4.5, existe un τ-entorno U del neutro tal que $E \subseteq U^\triangleright$ y $U^\triangleright$ es $w(G^\frown, G)$–compacto. Como $H \subseteq G$ se deduce de la Proposición 2.2.9 que $w(G^\frown, H) \preceq w(G^\frown, G)$ y, por tanto, ambas coinciden sobre $U^\triangleright$ y, en definitiva, sobre E. $\square$

Para las topologías débiles, la separabilidad queda caracterizada por

Proposición 2.3.4 *Sea $\langle G, G' \rangle$ una dualidad. Entonces,*

$$(G, w(G, G')) \text{ es separable } \Leftrightarrow \begin{cases} G' \text{ posee una topología metrizable} \\ \text{totalmente acotada y menos fina} \\ \text{que } w(G', G) \end{cases}$$

Demostración. Supóngase que $(G, w(G, G'))$ es separable. Sea L un subgrupo de G denso y numerable y considérese sobre G' la topología $w(G', L)$. Es una topología totalmente acotada (Teorema 2.1.1) y, por la Proposición 2.2.9, menos fina que $w(G', G)$. Por otra parte, aplicando la Proposición 2.2.10, L separa los puntos de G' y, en consecuencia, $\langle L, G' \rangle$ forman una dualidad. Basta ahora aplicar la Proposición 2.3.2 para concluir que $(G', w(G', L))$ es metrizable.

Recíprocamente, sea τ_m una topología sobre G', totalmente acotada, metrizable y menos fina que $w(G', G)$. De nuevo por el Teorema 2.1.1, existe un subgrupo L de $Hom(G', \mathbb{T})$ tal que $\tau_m = w(G', L)$. Siendo $w(G', L)$ menos fina que $w(G', G)$, resulta que L es subgrupo de G. Por otra parte, $\langle G', L \rangle$ forma una dualidad y $(G', w(G', L))$ es metrizable, por lo que, aplicando de nuevo la Proposición 2.3.2, resulta que L es numerable. Finalmente, L es denso en $(G, w(G, G'))$ porque separa los puntos de G' (Proposición 2.2.10). □

Uno de los primeros en estudiar la topología débil, para espacios de Banach, fue H.H. Corson. En [26] caracteriza cuándo un espacio de Banach es débil–realcompacto en términos del comportamiento de ciertos funcionales sobre el espacio dual. Más tarde, Valdivia [94] y Wheeler [104] generalizan este resultado para espacios vectoriales topológicos localmente convexos. Arhangel'skii [5] y Uspenskiĭ [91] caracterizan la realcompacidad de un espacio topológico X en términos similares a los anteriores, utilizando el anillo de funciones continuas sobre X con la topología de convergencia puntual, en el papel de espacio dual.

Utilizando la terminología de [105], un espacio vectorial topológico X se dice un *espacio de Mazur* si cada funcional lineal sucesionalmente continuo es continuo. La razón de tal denominación se debe, probablemente, a que fue S. Mazur el primero en abordar ese problema, demostrando que para un espacio discreto X, $\mathbb{R}^X$ goza de tal propiedad si, y sólo si, cada medida $\{0,1\}$–valuada sobre X que es 0 en los puntos es también 0 sobre X. Aunque Mazur aseguró que el resultado anterior también era válido para X métrico y $C_p(X)$ en vez de $\mathbb{R}^X$, su prueba nunca fue publicada. J. Isbell afirma en [58] que V.Pták lo demostró en 1956, aunque fue finalmente S. Mrówka [69] quién publicó la prueba

Teorema 2.3.5 (Mrówka, 1957) *Para un espacio completamente regular X, el espacio $C_p(X)$ es un espacio de Mazur si, y sólo si, X es realcompacto.*

Para encontrar las referencias básicas sobre este problema y otras generalizaciones del concepto de espacio de Mazur puede consultarse [57].

Tanto en este resultado de Mrówka, como en los citados anteriormente de Corson, Wheeler, Arhangel'skii y Uspenskiĭ se establece una relación entre la débil–realcompacidad y la equivalencia entre homomorfismos sucesionalmente continuos y homomorfismos continuos sobre el espacio dual. Sobre ambas propiedades pueden encontrarse abundantes referencias en la literatura científica.

Por ejemplo, respecto de la equivalencia entre homomorfismos sucesionalmente continuos y homomorfismos continuos, hay que destacar el conocido teorema de Varopoulos para grupos localmente compactos

Teorema 2.3.6 (Varopoulos, [98]) *Sean G y G' dos grupos localmente compactos y $f : G \longrightarrow G'$ un homomorfismo algebraico. Supongamos que se satisfacen las condiciones*

1. *f es sucesionalmente continuo,*

2. *La cardinalidad de G es tal que no existe ningún ultrafiltro libre sobre G con la propiedad de la intersección numerable.*

Entonces, f es continuo.

La condición (b) es, actualmente, equivalente a decir que el cardinal de G no es Ulam–medible:

Definición 11 *Un cardinal κ se dice Ulam–medible si existe una medida $\{0,1\}$–valuada numerablemente aditiva μ sobre κ tal que*

$$\mu(\kappa) = 1 \qquad y \qquad \mu(\{\xi\}) = 0 \text{ para cada } \xi < \kappa$$

Comfort y Remus obtienen en [23] un recíproco al teorema de Varopoulos para grupos compactos y Uspenskiĭ [92] lo prueba para grupos localmente compactos.

Por otra parte, Comfort, Hernández y Trigos-Arrieta [22] han estudiado la realcompacidad para la topología de Bohr, obteniendo

Teorema 2.3.7 (Comfort, Hernández, Trigos-Arrieta)

1. *Sea G un grupo abeliano discreto. Entonces, $(G, w(G, G^\frown))$ es realcompacto si, y sólo si, $|G|$ no es Ulam–medible.*

2. *Sea G un grupo abeliano localmente compacto. Entonces,* $(G, w(G, G^\frown))$ *es realcompacto si, y sólo si,* $\kappa(G)$ *no es Ulam–medible; siendo*

$$\kappa(G) = \text{mín}\{|\mathcal{F}| \ : \ G = \cup\mathcal{F}, \ \textit{cada } F \in \mathcal{F} \textit{ es compacto}\}$$

De estos resultados puede deducirse, como se verá a continuación, que un grupo discreto en su topología de Bohr, es realcompacto si, y sólo si, los homomorfismos sucesionalmente continuos sobre el dual son continuos. Previamente, y por analogía con los espacios vectoriales topológicos, se dará la siguiente definición

Definición 12 *Sea (G, τ) un grupo topológico. Diremos que G es un* grupo de Mazur *si los homomorfismos $f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ sucesionalmente continuos son continuos.*

Proposición 2.3.8 *Sea (G, τ) un grupo abeliano discreto. Entonces,*

$$(G, w(G, G^\frown)) \textit{ es realcompacto } \Leftrightarrow \ (G^\frown, w(G^\frown, G)) \textit{ es Mazur}$$

Demostración. Si $(G, w(G, G^\frown))$ es realcompacto entonces, aplicando el Teorema 2.3.7, resulta que $|G|$ no es Ulam–medible y, por tanto tampoco lo es $|G^\frown|$. Ahora $G^\frown$ es compacto (en la topología compacto–abierta y, entonces, también para $w(G^\frown, G)$) y el teorema de Varopoulos se aplica para obtener la conclusión.

Recíprocamente, siendo $(G^\frown, w(G^\frown, G))$ compacto y Mazur, se deduce del teorema de Comfort y Remus [23] que $|G^\frown|$ no es Ulam–medible, luego tampoco lo es $|G|$ y de nuevo, el Teorema 2.3.7 nos lleva al resultado deseado. □

Naturalmente, este resultado ya no se mantiene para grupos más generales: si se considera la dualidad $\langle \ell^\infty, m\rangle$ donde m denota el espacio dual de ℓ^∞ para la topología de la norma. $(\ell^\infty, w(\ell^\infty, m))$ es realcompacto [26] y, sin embargo, $(m, w(m, \ell^\infty))$ no es Mazur (véase [105]).

No obstante, puede obtenerse una caracterización de la débil–realcompacidad para grupos, similar a la obtenida por los autores mencionados anteriormente y que constituye el principal resultado de esta sección. Previamente, se necesitará precisar la notación:

Definición 13 *Sea G un grupo topológico y sea κ un cardinal. Un homomorfismo $f : G \longrightarrow \mathbb{T}$ se dirá κ–*continuo *si es continuo sobre cada subconjunto A de G de cardinalidad $|A| \le \kappa$.*

En el caso particular de $\kappa = \aleph_0$ el homomorfismo f se dirá numerablemente continuo.

Teorema 2.3.9 *Sea $\langle G, G'\rangle$ una dualidad. Entonces,*

$$(G, w(G,G')) \text{ es realcompacto } \Leftrightarrow \begin{cases} \text{todo homomorfismo } f : G' \longrightarrow \mathbb{T} \\ \text{numerablemente continuo es continuo} \end{cases}$$

Demostración. Supóngase que $(G, w(G, G'))$ es realcompacto y considérese $f \in Hom(G', \mathbb{T})$, $w(G', G)$–continua en los subconjuntos numerables de G'. Entonces f está en la G_δ–clausura de G en $Hom(G', \mathbb{T})$.

En efecto, sea V un G_δ en $b(G, G') = Hom(G', \mathbb{T})$ con $f \in V$. Por una parte,

$$V = \bigcap_{n<\omega} O_n, \qquad \text{con } O_n \text{ abierto de } bG$$

y puede suponerse que para cada $n < \omega$

$$O_n = \{x \in bG \ : \ |x(\phi_j^n) - 1| < \epsilon_n,\ \phi_j^n \in G', j = 1, 2, \ldots, k_n\}$$

Entonces, $S = \{\phi_j^n \ : \ j = 1, 2, \ldots, k_n, \ n < \omega\}$ es un subconjunto numerable de G'. Como el subgrupo generado por S, $\langle S \rangle$, también es numerable, resulta que f es $w(G', G)$–continua sobre $\langle S \rangle$ y, en consecuencia, también sobre su clausura $L = cl_{w(G',G)}(\langle S \rangle)$.

Ahora, siendo L un subgrupo topológico del grupo compacto $b(G', G)$, existe un homomorfismo continuo $\gamma \in Hom(G', \mathbb{T})$ que extiende a $f_{|_L}$. Es decir,

$$\gamma_{|_L} = f_{|_L} \tag{*}$$

Como $\gamma_{|_{G'}} \in G$ sólo resta probar que $\gamma_{|_{G'}} \in V$. Para ello, basta tener en cuenta que

$$|\gamma_{|_{G'}}(\phi_j^n) - 1| = |f(\phi_j^n) - 1| < \epsilon_n, \qquad \text{para todo } j = 1, 2, \ldots k_n$$

lo cual implica

$$\gamma_{|_{G'}} \in O_n, \qquad \text{para todo } n < \omega$$

es decir,

$$\gamma_{|_{G'}} \in \bigcap_{n<\omega} O_n = V$$

Por tanto, $\gamma_{|_{G'}} \in V \cap G'$, de donde se deduce que f está en la G_δ–clausura de G en $Hom(G', \mathbb{T})$ que coincide con G, puesto que éste es $w(G, G')$–realcompacto.

Recíprocamente, supóngase ahora que todo homomorfismo de G' en $\mathbb{T}$ numerablemente continuo es continuo. Para probar que $(G, w(G, G'))$ es realcompacto, y teniendo en cuenta que su complección $b(G, G') = Hom(G', \mathbb{T})$ es un Oz–espacio (véase [13] y [80] o también [22]), bastará probar que $(G, w(G, G'))$ es G_δ–cerrado en $Hom(G', \mathbb{T})$.

Sea, entonces, ϕ un elemento de la G_δ–clausura de $(G, w(G, G'))$ en $Hom(G', \mathbb{T})$. Entonces la restricción de ϕ sobre cada conjunto numerable es continua. Para ello, sea S un subconjunto numerable de G'. Entonces, el conjunto

$$V = \{\psi \in bG \ : \ \psi_{|S} = \phi_{|S}\}$$

es un G_δ que contiene a ϕ. Existe, por tanto, $\psi \in V \cap G$; es decir, $\psi \in G$ y

$$\psi_{|S} = \phi_{|S}$$

Como $G = (G', w(G', G))\widehat{}$, resulta que $\psi_{|S}$ es $w(G)$–continua.

Por tanto, ϕ es $w(G', G)$–continua sobre S y, por hipótesis, es $w(G', G)$–continua sobre G'; es decir, $\phi \in G$ y queda probado el teorema.

$\square$

Definición 14 *Sea (G, τ) un grupo topológico y sea κ un cardinal. Un homomorfismo f se dirá estrictamente κ–continuo si para cada subconjunto conjunto A de cardinalidad $|A| \leq \kappa$ existe un homomorfismo continuo $g : G \longrightarrow \mathbb{T}$ tal que $f_{|A} = g_{|A}$.*

Nota 3 *Está claro que todo homomorfismo estrictamente κ–continuo es κ–continuo. Pero ambas nociones no son equivalentes.*

Revisando con atención la demostración anterior, se observa que lo que realmente se ha probado es la equivalencia

$$G \text{ es } w(G, G')\text{–realcompacto} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{todo homomorfismo } f : G' \longrightarrow \mathbb{T} \\ \text{estrictamente } \aleph_0\text{–continuo es continuo} \end{array} \right.$$

y por tanto, si $(G, w(G, G'))$ es realcompacto, los homomorfismos sobre G' $\aleph_0$–continuos y estrictamente $\aleph_0$–continuos son los mismos.

Resulta curioso observar que la caracterización de la realcompacidad hereditaria es la propiedad dual de la separabilidad.

Teorema 2.3.10 *Sea $\alpha = \langle G, G' \rangle$ una dualidad. Entonces son equivalentes*

(i) $(G, w(G, G'))$ *es hereditariamente realcompacto;*

(ii) G' *admite una topología metrizable, totalmente acotada y menos fina que* $w(G', G)$*;*

(iii) $(G', w(G', G))$ *es separable.*

Demostración. La equivalencia entre (ii) y (iii) es la Proposición 2.3.4. Para ver que (i) implica (iii), supóngase que $(G, w(G.G'))$ es hereditariamente realcompacto. Entonces, como $b(G, G')$ es un Oz–espacio, se tiene que $\{0_G\}$ es un $\mathcal{G}_\delta$ de $(G, w(G, G'))$ (véase [22]). Por tanto, existe una familia numerable de entornos abiertos de la identidad, $\{U : n\}_{n<\omega}$ en $(G, w(G, G'))$ de forma que $\{0_G\} = \bigcap_{n<\omega} U_n$.

Para cada $n < \omega$ se determina un subconjunto finito $\{g'_{n_1}, g'_{n_2}, \ldots, g'_{n_{m(n)}}\} \subset G'$ y un número positivo ϵ_n tales que

$$N(\{g'_{n_1}, g'_{n_2}, \ldots, g'_{n_{m(n)}}\}, \epsilon_n) \subseteq U_n$$

Se define, ahora, H' como el subgrupo de G' algebraicamente generado por

$$\bigcup_{n<\omega} \{g'_{n_1}, g'_{n_2}, \ldots, g'_{n_{m(n)}}\}$$

H' es numerable y separa los puntos de G. Aplicando la Proposición 2.2.10 se obtiene que H' es $w(G', G)$–denso en G'.

Para finalizar, se demostrará que (iii) implica (i). Para ello, sea H' un subgrupo numerable y $w(G', G)$–denso en G'. Entonces, H' separa los puntos de G y, en consecuencia, $(G, w(G, H'))$ es metrizable y, por tanto, hereditariamente realcompacto. La función identidad

$$id : (G, w(G, G')) \longrightarrow (G, w(G, H'))$$

es una función continua, lo cual implica que $(G, w(G, G'))$ es también hereditariamente realcompacto [38, (8.18)]. $\square$

Del hecho de que todo homomorfismo $\aleph_0$–continuo es sucesionalmente continuo se deduce el siguiente corolario

Corolario 2.3.11 *Sea $\langle G, G'\rangle$ una dualidad. Si $(G, w(G, G'))$ es un grupo de Mazur, entonces $(G', w(G', G))$ es realcompacto*

Por otra parte, si denotamos por G^s el conjunto de homomorfismos de G en $\mathbb{T}$ que son sucesionalmente $w(G, G')$–continuos, se tiene que

$$G' \subseteq G^s \subseteq Hom(G, \mathbb{T})$$

de donde se deduce

Proposición 2.3.12 *Sea $\langle G, G'\rangle$ una dualidad. Entonces, $(G, w(G, G'))$ es un grupo de Mazur si, y sólo si, la topología $w(G, G')$ es maximal entre las topologías totalmente acotadas con las mismas sucesiones convergentes.*

Demostración. Supóngase que $(G, w(G, G'))$ es un grupo de Mazur y sea τ una topología totalmente acotada, con las mismas sucesiones convergentes que $w(G, G')$. Por el teorema de Comfort y Ross (véase el Teorema 2.1.1), $\tau = w(G, L)$, con $L \subseteq Hom(G, \mathbb{T})$. Se necesita probar que $w(G, G') \succeq w(G, L)$ y por la Proposición 2.2.9 es suficiente ver que $G' \supseteq L$.

Sea $f \in L$, para probar que $f \in G'$ basta obtener que f es un homorfismo sucesionalmente $w(G, G')$–continuo. Para ello, si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en G $w(G, G')$–convergente al neutro de G, entonces, puesto que $w(G, L)$ y $w(G, G')$ tienen las mismas sucesiones convergentes, $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en G $w(G, L)$–convergente al neutro de G y, siendo f $w(G, L)$–continua, se tiene que

$$f(x_n) \longrightarrow 1$$

Por último, aplicando que $(G, w(G, G'))$ es Mazur, se concluye que f es $w(G, G')$–continua; esto es, $f \in G'$.

Recíprocamente, si $(G, w(G, G')))$ no fuera Mazur, la topología $w(G, G')$ no sería maximal en los términos del enunciado, puesto que $w(G, G^s)$ sería una topología totalmente acotada, más fina (estrictamente) que $w(G, G')$ y con las mismas sucesiones convergentes. Sólo esta última parte requiere, quizás, ser vista con mayor detalle. Para ello, si $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en G $w(G, G')$–convergente al neutro de G, entonces para cada elemento $f \in G^s$ se tiene que $f(x_n) \longrightarrow 1$; es decir, $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión en G $w(G, G^s)$–convergente al neutro de G. □

La propiedad de ser $(G, w(G, G')$ un grupo de Mazur, no queda caracterizada *dualmente*, puesto que la propiedad equivalente hallada en esta proposición es para la propia topología $w(G, G')$. A la vista de la Proposición 2.3.1 y el Corolario 2.3.11 se tienen las siguientes implicaciones para una dualidad $\langle G, G' \rangle$

$$G' \text{ compacto } \Rightarrow G \text{ Mazur } \Rightarrow G' \text{ realcompacto}$$

donde todos los grupos se consideran dotados con su correspondiente topología débil. Queda, entonces, como cuestión abierta, encontrar una propiedad dual de la propiedad de ser un grupo Mazur.

Capítulo 3

Preservación de la compacidad

3.1. Introducción

Glicksberg demuestra en [39] que en todo grupo abeliano localmente compacto (G, τ) los subconjuntos compactos y los subconjuntos compactos para la topología de Bohr son los mismos, generalizando un resultado previo de Leptin [66] para grupos discretos. Usando la terminología introducida por Trigos–Arrieta en [88], el teorema de Glicksberg puede enunciarse diciendo que todo grupo abeliano localmente compacto *respeta la compacidad.* Trigos–Arrieta estudia, además, la preservación de otras propiedades topológicas para grupos abelianos localmente compactos. Su investigación se apoya en el teorema de dualidad de Pontryagin–van Kampen (véase el Teorema 1.3.1, en esta misma memoria) y en los teoremas de estructura de los grupos abelianos localmente compactos. Es precisamente a partir de la introducción de los métodos de dualidad por Comfort y Ross en [24], cuando el problema de extender el teorema de Glicksberg a otras clases de grupos ha tenido un notable resurgimiento (véanse [8], [36], [55], [68], [75], [86]). Galindo y Hernández ponen de relieve en [36] que el problema de la preservación de la compacidad en la topología de Bohr está íntimamente ligado con el trabajo de van Douwen [95], donde se investiga con profundidad la topología de Bohr de un grupo abeliano discreto. Sin embargo, no se conoce ningún criterio general para distinguir a los grupos con esta propiedad. De hecho, aunque se han encontrado varias condiciones suficientes para garantizar la preservación de la compacidad para amplias familias de grupos, parece mucho más difícil hallar condiciones necesarias. El objetivo en este capítulo es, precisamente, determinar propiedades necesarias y suficientes para la preservación de la compacidad al pasar de la topología de Bohr a la topología original del grupo.

Dado que puede decirse que la preservación de la compacidad al pasar de la topología de Bohr a la topología original envuelve un principio de "acotación uniforme", tan familiar en el Análisis Funcional, la estrategia a seguir será la de extender y unificar los métodos de dualidad que se verifican en los grupos abelianos localmente compactos y los espacios vectoriales localmente convexos a varias clases de grupos topológicos abelianos maximalmente casi-periódicos. Naturalmente, en este proceso se presentan algunas dificultades que deben ser tenidas en cuenta. Por ejemplo, el Teorema de Grothendiek [41], caracterizando la complección de un espacio vectorial topológico localmente convexo, no tiene una traslación fácil, incluso para grupos localmente quasi-convexos (véase [19]). Por ello, para aplicar satisfactoriamente los métodos de dualidad a este contexto más amplio, se introducirá, en la sección 3.2, la noción de "g–grupo", que permitirá obtener una variante del teorema de complección de

Grothendieck[1]. En la Sección 3.3 se probará que cada g–grupo completo es un μ–espacio topológico en su topología de Bohr y se aplicará este resultado para caracterizar la preservación de la compacidad por la existencia de subconjuntos especiales discretos y C–sumergidos. Más aún, se demostrará que para g–grupos completos la preservación de las propiedades de compacidad, compacidad numerable, pseudocompacidad y acotación funcional son todas equivalentes.

3.2. g–Grupos

Sea (X, τ) un espacio vectorial localmente convexo. Por el teorema de Grothendieck [41], la compleción, $\overline{X}$, de (X, τ) es el conjunto de homomorfismos lineales $f : X' \longrightarrow \mathbb{R}$ cuyas restricciones a los equicontinuos de X' son $\sigma(X', X)$–continuas.

Considerando el grupo topológico aditivo (X, τ), resulta que, por medio de la aplicación exponencial, $\phi \mapsto exp(2\pi i\phi)$, $X^\frown$ es isomorfo topológicamente al grupo X' cuando ambos están dotados de la topología compacto–abierta (véase, por ejemplo, [84] o [53]).

La identificación, como grupos topológicos, de estos espacios, que además tienen los mismos equicontinuos, tanto como dual de un espacio vectorial como dual de un grupo, permite obtener que la compleción de (X, τ) es topológicamente isomorfa al grupo de homomorfismos $\phi : X^\frown \longrightarrow \mathbb{T}$ cuyas restricciones a los equicontinuos de $X^\frown$ son $\sigma(X^\frown, X)$–continuas.

Sin embargo, el teorema de Grothendieck, caracterizando la compleción de

[1]Precisamente la “g”de g–grupo es por Grothendieck.

un espacio vectorial localmente convexo, no es válido para grupos topológicos en general; ni siquiera para la clase de los grupos localmente quasi–convexos (véase el Ejemplo 2), aunque la clase de los grupos que sí lo verifica es muy amplia, como se irá viendo a lo largo de esta sección.

La topología de Bohr de un grupo topológico (G, τ) coincide con la topología débil de la dualidad $\langle G, G^\frown \rangle$. En este capítulo se denotará a dicha topología por $\sigma(G^\frown)$ y, análogamente, $\sigma(G)$ representará la topología débil de la dualidad $\langle G^\frown, G \rangle$.

Sea (G, τ) un grupo localmente quasi-convexo y sea $\mathcal{E}$ el conjunto de todos los equicontinuos de $G^\frown$. Se define por

$$\widetilde{G} := \{\varkappa \in Hom(G^\frown, \mathbb{T}) : \ \varkappa \text{ es } \sigma(G^\frown)\text{–continua sobre cada } E \in \mathcal{E} \ \}$$

Es claro que $\widetilde{G}$ es un subgrupo de $Hom(G^\frown, \mathbb{T}) = bG$, conteniendo a G como subgrupo. Rigurosamente hablando, contiene a la imagen de G por la evaluación $\alpha_G : G \longrightarrow bG$.

Dotamos a $\widetilde{G}$ de la topología $\widetilde{\tau}$ cuya base de entornos viene dada por

$$\{ \ E^{\triangleright}_{\widetilde{G}} \ : \ E \in \mathcal{E} \ \}$$

donde

$$E^{\triangleright}_{\widetilde{G}} = \{\varkappa \in \widetilde{G} \ : \ \Re(\varkappa(\gamma)) \geq 0, \quad \forall \gamma \in E\}$$

es decir, el polar en $\widetilde{G} \subset Hom(G^\frown, \mathbb{T})$ de E.

Es fácil ver que $\widetilde{\tau}$ es una topología de grupo. Es más, es una topología localmente quasi-convexa de acuerdo con la definición dada en el capítulo 1.

Lema 3.2.1 $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$ *es un grupo topológico localmente quasi-convexo.*

Demostración. En efecto, por [21], basta verificar que la familia

$$\mathcal{E} = \{E \; : \; E \text{ es un equicontinuo de } G^{\frown} \}$$

cumple las dos condiciones siguientes:

- Si $E_1, E_2 \in \mathcal{E}$, entonces existe $E_3 \in \mathcal{E}$ con $E_1 \cup E_2 \subseteq E_3$.
- Para $E \in \mathcal{E}$ y $n < \omega$, existe $F \in \mathcal{E}$ con $E^{(n)} \subseteq F$, donde $E^{(n)} = \{y^n \; : \; y \in E\}$.

Y es una mera comprobación que si E_1, E_2 y E son equicontinuos entonces también lo son $E_1 \cup E_2$ y $E^{(n)}$.

En consecuencia,

$$\{E^{\triangleright}_{\widetilde{G}} \; : \; E \in \mathcal{E} \}$$

es un sistema fundamental de entornos para una topología localmente quasi–convexa $\widetilde{\tau}$.

□

El hecho de que cada tal E sea equicontinuo implica, finalmente, que $\widetilde{\tau}_{|G} = \tau$; esto es, G es un subgrupo topológico de $\widetilde{G}$.

Lema 3.2.2 (G, τ) *es un subgrupo topológico de* $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$

Demostración. Es suficiente probar que $\widetilde{\tau}_{|G} = \tau$. Para ello, sea U un entorno quasi–convexo cualquiera en G. Entonces, $U^{\triangleright}$ es un equicontinuo en $G^{\frown}$ y entonces, $(U^{\triangleright})^{\triangleright}_{\widetilde{G}}$ es un entorno en $\widetilde{G}$. Basta probar ahora que

$$U = (U^{\triangleright})^{\triangleright}_{\widetilde{G}} \cap G$$

En efecto, a partir de que

$$(U^{\triangleright})^{\triangleright}_{\widetilde{G}} = \{\psi \in \widetilde{G} \ : \ \Re(\psi(\gamma)) \geq 0, \quad \forall \gamma \in U^{\triangleright}\}$$

se tiene que

$$(U^{\triangleright})^{\triangleright}_{\widetilde{G}} \cap G = (U^{\triangleright})^{\triangleleft}_{G} = U$$

□

También resulta sencillo probar que $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$ es un grupo completo, particularizando un resultado más general que puede encontrarse en [17, X.1.6]: Sea X un espacio topológico y sea $\mathcal{E}$ una familia de subconjuntos de X. Sea Y un espacio uniforme completo. Entonces, el conjunto de aplicaciones de X en Y cuyas restricciones a los conjuntos de $\mathcal{E}$ son continuas, es un espacio completo para la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos de $\mathcal{E}$.

Lema 3.2.3 $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$ *es un grupo topológico completo*

Demostración. Basta tomar en el resultado de Bourbaki [17] mencionado anteriormente, $X = (G^{\frown}, \sigma(G))$, $Y = \mathbb{T}$ y la familia $\mathcal{E}$ de equicontinuos de $G^{\frown}$. Finalmente, sólo resta observar que $Hom(G^{\frown}, T)$ es cerrado en $\mathbb{T}^{G^{\frown}}$.

□

Como G es subgrupo topológico de $\widetilde{G}$ y éste es completo, entonces $\widetilde{G}$ contiene a la complección de (G, τ). En el caso de coincidir se obtiene lo que se llamará un *g–grupo*:

Definición 15 *Dado un grupo topológico abeliano localmente quasi-convexo* (G, τ)*, se llama* **g–extensión** *de* G *a* $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$*. Cuando* $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$ *coincide con la complección,* $\overline{G}$*, de* (G, τ) *se dice que* (G, τ) *es un* **g–grupo***.*

La g–extensión de un grupo (G, τ) también contiene al grupo bidual $G^{\wedge\wedge}$ como subgrupo (algebraico):

Lema 3.2.4 $G^{\wedge\wedge}$ *es subgrupo de* $\widetilde{G}$.

Demostración. Sea $\psi \in G^{\wedge\wedge}$. Por tanto, $\psi : G^{\wedge} \longrightarrow \mathbb{T}$ es continua para la topología compacto-abierta de $G^{\wedge}$. Sea E un equicontinuo de $G^{\wedge}$, entonces sobre E coinciden la topología de convergencia puntual $\sigma(G)$ y la topología de convergencia uniforme sobre los totalmente acotados de G, en particular la topología compacto-abierta; así que ψ es $\sigma(G)$–continua sobre E y queda probado que $\psi \in \widetilde{G}$. □

Por otra parte, como ya se ha dicho antes, también

$$G \subseteq \overline{G} \subseteq \widetilde{G}$$

Así, en el caso de ser G un g–grupo completo, resulta que $G = \widetilde{G}$ y en este caso, por el lema 3.2.4, también

$$G = G^{\wedge\wedge}$$

es decir, el grupo G es semirreflexivo. En consecuencia, la clase de los g–grupos completos está contenida en la clase de los grupos semirreflexivos. Este hecho produce un primer ejemplo de grupo que no es g–grupo:

Ejemplo 1 *Si* $G = A(X)$*, el grupo libre sobre* X*, con* X *compacto y conexo entonces* G *es completo y no semirreflexivo, por lo que* G *no es g–grupo.*

Sin embargo, la clase de los g–grupos contiene un espectro muy amplio de grupos topológicos, como se irá viendo a lo largo de esta sección; aunque ya puede avanzarse que contiene a los grupos abelianos localmente compactos, los grupos aditivos de espacios localmente convexos y a los grupos nucleares (Teorema 3.2.15) entre otros.

El hecho de que todo grupo localmente compacto y abeliano es g–grupo puede demostrarse a partir del siguiente lema

Lema 3.2.5 *Sea* (G, τ) *un grupo topológico abeliano localmente quasi–convexo y reflexivo. Entonces, todo compacto de* $(G^\frown, \tau_{co})$ *es un equicontinuo.*

Demostración. Sea K un compacto de $(G^\frown, \tau_{co})$. Entonces su polar en $G = G^{\frown\frown}$ es un entorno del neutro. Y como $K \subseteq (K^\triangleleft)^\triangleright$, se deduce que K es un equicontinuo. □

Ahora resulta sencillo probar que todo grupo localmente compacto y abeliano es g–grupo:

Proposición 3.2.6 *Todo grupo localmente compacto y abeliano es g–grupo.*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo abeliano localmente compacto y sea $\phi \in \widetilde{G}$. Entonces $\phi : G^\frown \longrightarrow \mathbb{T}$ es $\sigma(G)$–continuo en los equicontinuos de $G^\frown$. Pero como G es reflexivo, se cumple que $\sigma(G) = \sigma(G^\frown, G^{\frown\frown})$. Y además, por el lema anterior, ϕ es $\sigma(G^\frown, G^{\frown\frown})$–continua en el entorno compacto del neutro de $G^\frown$. Por tanto, es $\sigma(G^\frown, G^{\frown\frown})$–continua en $G^\frown$; esto es, $\phi \in G^{\frown\frown} = G$. Y se concluye que $\widetilde{G} = G$ y G es g–grupo. □

Es más, todo grupo localmente quasi-convexo, metrizable y reflexivo es g–grupo.

Proposición 3.2.7 *Todo grupo abeliano localmente quasi-convexo, metrizable y reflexivo es g–grupo:*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo abeliano, metrizable y reflexivo. Chasco demuestra en [20] que G es completo, por lo que bastará demostrar que todo elemento de la g–extensión es un elemento de G.

Siendo metrizable, $G^\frown$ es un k–espacio (Chasco [20]) y, en particular un k–grupo para la topología compacto–abierta. Además, existe una base numerable de entornos de la identidad, llámese $\{U_n \ : \ n < \omega\}$ y entonces, si $K_n = U_n^\triangleleft$ resulta que $G^\frown = \bigcup_{n<\omega} K_n$, donde cada K_n es $\sigma(G)$–compacto (y además un equicontinuo). También la metrizabilidad de G implica, por el teorema de Ascoli, que cada compacto de $G^\frown$ está contenido en alguno de los conjuntos K_n.

Sea, ahora, $\varkappa \in Hom(G^\frown, \mathbb{T})$ tal que es $\sigma(G)$–continuo sobre cada equicontinuo de $G^\frown$. Teniendo en cuenta que G es reflexivo, se tiene que $\sigma(G) = \sigma(G^\frown, G^{\frown\frown})$. Por tanto, resulta que $\varkappa$ es débil–continua sobre cada K_n y, siendo menos fina que la topología compacto–abierta, resulta ser continua también para esta última. En definitiva, $\varkappa$ es continua en cada compacto de $G^\frown$ y por tanto es continua en $G^\frown$; es decir, está en $G^{\frown\frown} = G$.

□

La reflexividad es esencial en el resultado anterior, debido a que Aussenhofer [6] ha encontrado un ejemplo de un grupo localmente quasi-convexo, metrizable y completo que no es un g–grupo:

Ejemplo 2 (Aussenhofer) *Sea $H = L^2_{\mathbb{Z}}([0,1])$ el subgrupo de $G = L^2([0,1])$ que consiste de las funciones de cuadrado integrable y con valores enteros casi por todas partes. Aussenhofer ha demostrado, en [6], que H es un grupo localmente quasi–convexo, completo y metrizable pero no reflexivo. De hecho, se demuestra que la evaluación α_H de H en su bidual $H^{\frown\frown}$ no es sobre, puesto* *que H y G tienen el mismo grupo de caracteres. Por tanto, no es semirreflexivo y, en consecuencia, no puede ser g–grupo.*

Ejemplo 3 *Si G es un grupo compacto, entonces $C(G,\mathbb{T})$, dotado de la topología compacto–abierta, es un g–grupo. Basta observar para ello que $C(G,\mathbb{T})$ es localmente quasi–convexo, metrizable, completo y reflexivo (consúltese [6] para los detalles) y aplicar la Proposición 3.2.7.*

Para probar que un grupo localmente quasi-convexo (G,τ) es un g–grupo, se necesita demostrar que todo elemento de $\widetilde{G}$ está contenido en la complección $\overline{G}$. El estudio de los g–grupos se podrá reducir al caso completo (como se verá en la Proposición 3.2.11), por lo que en definitiva, la metodología habitual será demostrar que todo elemento de $\widetilde{G}$ es un elemento de G o, hablando propiamente, que coincide con la evaluación de un elemento de G.

A continuación, se sintetizan algunos hechos evidentes que se utilizarán en varias demostraciones posteriores:

Lema 3.2.8 *Sean X, Y dos grupos topológicos localmente quasi-convexos y $f : X \longrightarrow Y$ un homomorfismo continuo. Entonces, el homomorfismo dual $f^\frown : Y^\frown \longrightarrow X^\frown$ verifica*

1. *$f^\frown$ es continua para las topologías $\sigma(Y)$ y $\sigma(X)$;*
2. *$f^\frown$ transforma equicontinuos de $Y^\frown$ en equicontinuos de $X^\frown$*
3. *Si (Z,τ) es otro grupo topológico cualquiera y $g : X^\frown \longrightarrow (Z,\tau)$ es una aplicación continua para las topologías $\sigma(X)$ y τ; entonces $g \circ f^\frown$ es continua para las topologías $\sigma(Y)$ y τ. En particular, si g es continua*

en los equicontinuos de $X^\frown$ entonces $g \circ f^\frown$ es $\sigma(Y)$–continua en los equicontinuos de $Y^\frown$.

Demostración.

1. Sea $\{\gamma_\delta\}_{\delta \in D}$ una red en $Y^\frown$que converge a $\gamma \in Y^\frown$para la topología $\sigma(Y)$. Se debe demostrar que $f^\frown(\gamma_\delta)$ converge a $f^\frown(\gamma)$ para la topología $\sigma(X)$. Para ello, sea $x \in X$.

   Entonces, $f(x) \in Y$ y se tiene que

   $$\gamma_\delta(f(x)) \text{ converge a } \gamma(f(x))$$

   Ahora, teniendo en cuenta que

   $$f^\frown(\gamma_\delta)(x) = \gamma_\delta(f(x)) \text{ y } f^\frown(\gamma)(x) = \gamma(f(x))$$

   se concluye que

   $$f^\frown(\gamma_\delta)(x) \text{ converge a } f^\frown(\gamma)(x)$$

   Queda así probada la continuidad de $f^\frown$, para las topologías débiles respectivas.

2. Sea $E \subset Y^\frown$un equicontinuo. Entonces existe un entorno del neutro, U, en Y, tal que $E \subset U^\triangleright$. Ahora, siendo f continua, $f^{-1}(U)$ es un entorno del origen en X y será suficiente probar que $f^\frown(E) \subset (f^{-1}(U))^\triangleright$.

   Sean, pues, $\gamma \in E$ y $x \in f^{-1}(U)$. Entonces, se tiene

   $$\Re\,[f^\frown(\gamma)(x)] = \Re\,[\gamma(f(x))] \geq 0$$

porque $\gamma \in U^{\triangleright}$ y $f(x) \in U$, por tanto

$$f^{\frown}(\gamma) \in \left(f^{-1}(U)\right)^{\triangleright}$$

y se obtiene la conclusión deseada.

3. Es inmediata a partir de la anterior.

□

Por otra parte, dado que la complección de un grupo va a desempeñar un papel importante en la noción de g–grupo, no estará de más establecer algunas propiedades y hechos básicos referentes a ella:

Lema 3.2.9 *Sea (G, τ) un grupo topológico abeliano y sea $(\overline{G}, \overline{\tau})$ su complección. Entonces,*

1. *$G^{\frown}$ es isomorfo $\overline{G}^{\frown}$.*
2. *Los equicontinuos de $G^{\frown}$, considerado como dual de G o como dual de $\overline{G}$, son los mismos.*

Demostración.

1. Puesto que todo carácter continuo $\gamma : G \longrightarrow \mathbb{T}$ es uniformemente continuo, se puede extender a un carácter $\overline{\gamma} : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{T}$. Se puede, entonces, definir un homomorfismo $\Phi : G^{\frown} \longrightarrow \overline{G}^{\frown}$ por $\Phi(\gamma) = \overline{\gamma}$, el cual es biyectivo.
2. Por el apartado anterior, se puede identificar $\overline{G}^{\frown} = G^{\frown}$. Si E es un equicontinuo de $G^{\frown}$, como dual de G, entonces existe U entorno en G tal

que $E \subseteq U^{\triangleright}$. Por otra parte, $U = G \cap V$, con V entorno en $\overline{G}$ y $E \subseteq V^{\triangleright}$. Para ello, si $\gamma \in E$ y $g \in V$ existe una red $\{g_\delta\}_{\delta \in D}$ en G convergente a g. Puede suponerse que $\{g_\delta\}_{\delta \in D} \subset U$ y entonces para cada δ, $\Re(\gamma(g_\delta)) \geq 0$; de donde se deduce, por continuidad, que $\Re(\gamma(g)) \geq 0$; es decir $\gamma \in V^{\triangleright}$.

El recíproco es aún más sencillo. Si E es un equicontinuo de $G^\frown$, como dual de $\overline{G}$, entonces, existe un entorno V en $\overline{G}$ tal que $E \subseteq V^{\triangleright}$ y, en consecuencia, $E \subseteq (V \cap G)^{\triangleright}$, de donde E es también un equicontinuo de $G^\frown$ como dual de G.

□

Una consecuencia inmediata del resultado anterior es que para un grupo localmente quasi–convexo G coinciden $\widetilde{G}$ y $\widetilde{\overline{G}}$.

Lema 3.2.10 *Sea* (G, τ) *un grupo abeliano localmente quasi–convexo y sea* $\overline{G}$ *su complección, entonces coinciden sus g–extensiones respectivas, es decir,*

$$\widetilde{G} = \widetilde{\overline{G}}$$

Demostración. Es evidente a partir del hecho de que pueden identificarse los duales $G^\frown = \overline{G}^\frown$ y de que los equicontinuos, como dual de G y como dual de $\overline{G}$, coinciden.

Sea $\phi \in \widetilde{G} \subset Hom(G^\frown, \mathbb{T})$ y sea E un equicontinuo de $G^\frown$. Hay que demostrar que ϕ es $\sigma(\overline{G})$–continua sobre E. Para ello, sea $\{\gamma_\delta\}_{\delta \in D}$ una red en E $\sigma(G^\frown, \overline{G})$–convergente a $\gamma \in E$. Obviamente también es $\sigma(G^\frown, G)$–convergente a γ y en consecuencia

$$\phi(\gamma_\delta) \longrightarrow \phi(\gamma)$$

y así, $\phi \in \widetilde{\widetilde{G}}$.

Recíprocamente, sea $\phi \in \widetilde{\overline{G}}$; es decir, $\phi : G^\frown \longrightarrow \mathbb{T}$, $\sigma(G^\frown, \overline{G})$–continua en los equicontinuos de $G^\frown$. Se debe probar que ϕ es $\sigma(G^\frown, G)$–continua en los equicontinuos de $G^\frown$.

Sea, pues, E un equicontinuo de $G^\frown$ y $\{\gamma_\delta\}_{\delta\in D}$ una red en E $\sigma(G)$–convergente a $\gamma \in E$. Entonces, dicha red también es $\sigma(G^\frown, \overline{G})$–convergente en E. En efecto, si $g \in \overline{G} \subseteq \widetilde{G}$, g es $\sigma(G^\frown, G)$–continua en E; por lo que

$$\gamma_\delta(g) \longrightarrow \gamma(g)$$

Pero, ahora, E es un equicontinuo (respecto de $\overline{G}$) y se acaba de probar que $\{\gamma_\delta\}_{\delta\in D}$ es una red en E $\sigma(G^\frown, \overline{G})$–convergente a $\gamma \in E$. Por tanto,

$$\phi(\gamma_\delta) \longrightarrow \phi(\gamma)$$

y así, $\phi \in \widetilde{G}$.

Además coinciden también topológicamente, puesto que sus topologías respectivas tienen la misma base de entornos. $\square$

El estudio de los g–grupos puede reducirse al caso completo, puesto que como se demuestra en la siguiente proposición, un grupo G es g–grupo si, y sólamente si, su complección $\overline{G}$ lo es.

Proposición 3.2.11 *Un grupo topológico abeliano localmente quasi–convexo (G, τ) es g–grupo si, y sólo si, su complección $(\overline{G}, \overline{\tau})$ es g–grupo.*

Demostración. Si G es g–grupo, entonces el Lema 3.2.10 implica que $\overline{G} = \widetilde{G} = \widetilde{\overline{G}}$; es decir, que $\overline{G}$ es g–grupo.

Recíprocamente, puesto que $\widetilde{G} = \widetilde{\widetilde{G}}$ y, siendo $\overline{G}$ g–grupo, se tiene además que $\overline{G} = \widetilde{\overline{G}}$, se concluye que $\overline{G} = \widetilde{G}$; es decir, que G es g–grupo.

$\square$

Una consecuencia inmediata de este resultado es

Corolario 3.2.12 *Sea (G, τ) un grupo topológico abeliano. Entonces G dotado de su topología de Bohr es un g–grupo y su g–extensión coincide con su compactación de Bohr bG.*

Demostración. El grupo $(G, \sigma(G^\frown))$ es un grupo totalmente acotado y localmente quasi–convexo. Su complección, $b(G, G^\frown)$ es entonces un grupo compacto y por la Proposición 3.2.6 es un g–grupo. Basta aplicar ahora la Proposición 3.2.11 para obtener que $(G, \sigma(G^\frown))$ es también un g–grupo. La segunda parte es ahora inmediata. $\square$

La propiedad de ser g–grupo no es hereditaria para subgrupos. Por ejemplo $L^2_{\mathbb{Z}}([0,1])$ no es g–grupo (Ejemplo 2) y es un subgrupo (cerrado) de $L^2([0,1])$ que, siendo localmente convexo, sí lo es. Sin embargo, si es hereditaria para subgrupos dualmente cerrados y dualmente inmersos.

Proposición 3.2.13 *Sea (G, τ) un g–grupo y H un subgrupo dualmente cerrado y dualmente inmerso en G. Entonces, H también es g–grupo.*

Demostración. Sea $i : H \to G$ la inmersión canónica y consideremos $i^\frown : H^\frown \to G^\frown$.

Por la proposición anterior puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que tanto G como H son completos. Entonces, para probar que H es g–grupo, será suficiente demostrar que dado $\phi \in \widetilde{H}$ existe un $h \in H$ tal que $\phi = \alpha_H(h)$.

Sea, pues, $\phi \in \widetilde{H}$. Entonces $\phi : H^\frown \to \mathbb{T}$ es $\sigma(H^\frown, H)$-continua sobre los equicontinuos de $H^\frown$.

Por el lema 3.2.8, $\phi \circ i^\frown$ es $\sigma(G)$-continua sobre los equicontinuos de $G^\frown$; es decir, $\phi \circ i^\frown \in \widetilde{G} = G$. Por tanto, existe $g \in G$ tal que $\phi \circ i^\frown = \alpha_G(g)$.

Ahora, si $g \notin H$ existe $\varkappa \in G^\frown$ con $\varkappa(g) \neq 1$ y $\varkappa \in An(G)$. Pero entonces,

$$\varkappa(g) = \alpha_G(g)(\varkappa) = \phi \circ i^\frown(\varkappa) = \phi(\varkappa \circ i) = 1$$

y se contradice con la elección de $\varkappa$. Por tanto, $g \in H$.

Finalmente, sólo queda probar que $\phi = \alpha_H(g)$. En efecto, sea $\varkappa \in H^\frown$ Entonces, por ser H dualmente inmerso en G, existe un $\overline{\varkappa} \in G^\frown$ que extiende a $\varkappa$. Ahora,

$$\alpha_H(g)(\varkappa) = \alpha_G(g)(\overline{\varkappa}) = \phi \circ i^\frown(\overline{\varkappa}) = \phi(\overline{\varkappa} \circ i^\frown) = \phi(\varkappa)$$

y la proposición queda demostrada. □

También se tiene que el producto arbitrario de g–grupos es g–grupo. Por la Proposición 3.2.11, se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que todos los grupos son completos.

Proposición 3.2.14 *Sea $G = \prod_{i\in I} G_i$, donde cada G_i es un g–grupo completo. Entonces G es un g–grupo (completo).*

Demostración. Sea $\pi_i : G \longrightarrow G_i$ la correspondiente proyección y sea $\widehat{\pi_i}$ su aplicación dual.

Sea $\phi \in Hom(G^\frown, \mathbb{T})$ tal que su restricción a cada equicontinuo de $G^\frown$ es $\sigma(G)$–continua. La prueba estará completa cuando se identifique ϕ con un elemento de G.

En primer lugar, se afirma que, para cada $i \in A$, $\phi \circ \widehat{\pi_i} \in \widetilde{G}_i$.

Para ver esto, sea E_i un equicontinuo de $G_i\widehat{\ }$. Aplicando el Lema 3.2.8 (b), se deduce que $\pi_i\widehat{\ }(E_i)$ es un equicontinuo de $G\widehat{\ }$. Por tanto,

$$\phi_{|_{\pi_i\widehat{\ }(E_i)}} \text{ es } \sigma(G)\text{–continua}$$

Aplicando el apartado (c) del Lema 3.2.8, se obtiene que

$$\phi \circ \pi_i\widehat{\ }_{|_{E_i}} \text{ es } \sigma(G_i)\text{–continua}$$

Se concluye, entonces, que $\phi \circ \widehat{\pi_i} \in \widetilde{G}_i = G_i$; es decir, existe un $g_i \in G_i$ tal que $\phi \circ \widehat{\pi_i} = \alpha_{G_i}(g_i)$.

Sea ahora $g = (g_i)_{i \in I}$ y se comprobará que $\phi = \alpha_G(g)$.

Para ello, se identifica el dual de G con $\bigoplus_{i \in I} G_i$, y se considera $(\gamma_i)_{i \in I} \in G\widehat{\ }$

Se afirma que: si $(\gamma_i)_{i \in I} \in G\widehat{\ }$ entonces $(\gamma_i)_{i \in I} = \prod_{i \in I} \pi_i\widehat{\ }(\gamma_i)$

En efecto, si $h = (h_i)_{i \in I} \in G$ entonces,

$$\begin{aligned}
(\gamma_i)_{i \in I}(h) &= \prod_{i \in I} \gamma_i(h_i) \\
&= \prod_{i \in I} \gamma_i(\pi_i(h)) \\
&= \prod_{i \in A} \pi_i\widehat{\ }(\gamma_i)(h)
\end{aligned}$$

lo cual prueba la afirmación.

Y finalmente, si $(\gamma_i)_{i \in I} \in G\widehat{\ }$ entonces

$$
\begin{aligned}
\phi\left((\gamma_i)_{i\in I}\right) &= \phi\left(\prod_{i\in I} \pi_i{}^\frown(\gamma_i)\right) \\
&= \prod_{i\in I} \left(\phi \circ \pi_i{}^\frown\right)(\gamma_i) \\
&= \prod_{i\in I} \alpha_{G_i}(g_i)(\gamma_i) \\
&= \prod_{i\in I} \gamma_i(g_i) = \alpha_G(g)\left((\gamma_i)_{i\in A}\right)
\end{aligned}
$$

con lo cual queda demostrado que $\phi = \alpha_G(g)$; es decir, G es g–grupo. □

Se dan ya las condiciones para probar que todo grupo nuclear es g–grupo:

Teorema 3.2.15 *Si (G,τ) es un grupo nuclear, entonces (G,τ) es un g–grupo.*

Demostración. La complección de un grupo nuclear es un grupo nuclear ([6] Corollary 21.4), por lo que puede suponerse, sin pérdida de generalidad, que G es completo. También, en [6], Aussenhofer ha demostrado que un tal grupo es subgrupo de un producto de grupos nucleares metrizables. Además, siendo G completo está dualmente sumergido y es dualmente cerrado en tal producto. Por otra parte, todo grupo nuclear metrizable es reflexivo [10] y, por tanto, se deduce de Proposición 3.2.7 que todo grupo nuclear metrizable y completo es g–grupo. En definitiva, G es un subgrupo dualmente sumergido y dualmente cerrado de un producto de g–grupos completos. Basta aplicar los resultados anteriores para obtener que G es un g–grupo. □

Lo que resta de esta sección está dedicado a profundizar en el estudio de la g–extensión de un grupo. Se tiene que $G \subseteq \widetilde{G} \subseteq bG = Hom(G^\frown, \mathbb{T})$. ¿Cómo está situado G en su g–extensión? Se empezará estudiando qué ocurre con la topología heredada de bG

Lema 3.2.16 *Sea (G,τ) un grupo topológico abeliano localmente quasi–convexo y $(\widetilde{G},\widetilde{\tau})$ su g–extensión. Entonces,*

1. *$\langle G^\frown, \widetilde{G}\rangle$ forman una dualidad.*
2. *$b\tau_{|_{\widetilde{G}}} = w(\widetilde{G}, G^\frown)$*
3. *$w(\widetilde{G}, G^\frown) \preceq \widetilde{\tau}$*

Demostración.

1. Dado que $\widetilde{G} \subset Hom(G^\frown, \mathbb{T})$, está claro que $G^\frown$ separa puntos de $\widetilde{G}$. Por otro lado, G separa puntos de $G^\frown$ y $G \subset \widetilde{G}$ por lo que $\widetilde{G}$ separa puntos de $G^\frown$. Por tanto se cumplen todos los requisitos para que $\widetilde{G}$ y $G^\frown$ estén en dualidad.

2. Dado que $bG = Hom(G^\frown, \mathbb{T})$ provisto de la topología de convergencia puntual sobre $G^\frown$, entonces la topología heredada por $\widetilde{G} \subset bG$ es, precisamente, $\sigma(\widetilde{G}, G^\frown)$.

3. Sea $\{z_\delta\}_{\delta\in D}$ una red en $\widetilde{G}$ convergente a 1 para la topología $\widetilde{\tau}$. Entonces, dado que para cada $\gamma \in G^\frown$, $\{\gamma\}$ es un equicontinuo de $G^\frown$, se tiene que $\gamma(z_\delta)$ converge a $\gamma(1) = 1$. Es decir, la red es $\sigma(\widetilde{G}, G^\frown)$–convergente a 1, lo que prueba el resultado.

$\square$

El siguiente resultado prueba que G está dualmente inmerso en $\widetilde{G}$.

Proposición 3.2.17 (G, τ) *es un subgrupo dualmente inmerso en* $(\widetilde{G}, \widetilde{\tau})$.

Demostración. Sea $\psi : G \to \mathbb{T}$ un carácter continuo. Definimos

$$\widetilde{\psi} : \widetilde{G} \to \mathbb{T}$$

por $\widetilde{\psi}(\varkappa) = \varkappa(\psi)$ para todo $\varkappa \in \widetilde{G}$.

Está claro que $\widetilde{\psi}$ extiende a ψ. Falta sólo probar que $\widetilde{\psi}$ es $\widetilde{\tau}$–continua.

En efecto, sea $\{\gamma_\delta\}_{\delta \in D}$ una red $\widetilde{\tau}$–convergente a γ en $\widetilde{G}$. Como $\widetilde{\tau}$ es la topología de convergencia uniforme sobre los equicontinuos de $G^\frown$ y $\{\psi\}$ es un equicontinuo, se deduce que

$$\gamma_\delta(\psi) \longrightarrow \gamma(\psi)$$

es decir,

$$\widetilde{\psi}(\gamma_\delta) \longrightarrow \widetilde{\psi}(\gamma)$$

y la continuidad de ψ queda probada. □

Nota 4 *La proposición anterior permite construir una aplicación*

$$\Psi : G^\frown \longrightarrow \widetilde{G}^\frown$$

definida por $\Psi(\gamma) := \widetilde{\gamma}$*; esto es, todo carácter continuo de* G *se extiende a un carácter continuo de* $\widetilde{G}$.

Además, la aplicación Ψ *es inyectiva: para ello, si* $\gamma, \psi \in G^\frown$ *con* $\widetilde{\gamma} = \widetilde{\psi}$, *entonces para cada* $g \in G \subseteq \widetilde{G}$ *se tiene que*

$$\gamma(g) = g(\widetilde{\gamma}) = g(\widetilde{\psi}) = \psi(g)$$

es decir, $\gamma = \psi$.

No se sabe si esta aplicación Ψ *es continua (para las topologías compacto–abiertas).*

Si G es g–grupo, $\widetilde{G}$ es la complección de G y por tanto, la citada extensión de caracteres es única, por ser G denso en $\overline{G}$. De hecho, si G no es g–grupo, entonces G no es denso en $\widetilde{G}$

Lema 3.2.18 *(G, τ) es g–grupo si, y sólo si, G es denso en $\widetilde{G}$*

Demostración. Claramente, el hecho de ser g–grupo implica la densidad de G en $\widetilde{G} = \overline{G}$. Recíprocamente, si G es denso en $\widetilde{G}$, entonces dada la cadena de subgrupos topológicos:

$$G \subset \overline{G} \subset \widetilde{G}$$

se deduce que

$$\widetilde{G} = cl_{\widetilde{G}}(G) = cl_{\overline{G}}(G) = \overline{G}$$

lo cual implica que G es g–grupo $\square$

No obstante, G siempre es denso en $\widetilde{G}$ para la topología $w(\widetilde{G}, G^\frown)$.

Lema 3.2.19 *G es $w(\widetilde{G}, G^\frown)$–denso en $\widetilde{G}$*

Demostración. Por el Lema 3.2.16, $\langle G^\frown, \widetilde{G}\rangle$ forman una dualidad. Por otra parte, $G \subseteq \widetilde{G}$ y G separa puntos de $G^\frown$, por lo que, aplicando la Proposición 2.2.10, resulta que G es $w(\widetilde{G}, G^\frown)$–denso en $\widetilde{G}$. $\square$

Nota 5 *Si $\gamma \in G^\frown$, existe $\overline{\gamma} : bG \longrightarrow \mathbb{T}$ $b\tau$–continua, que extiende a γ. Entonces, $\overline{\gamma}_{|_{\widetilde{G}}}$ es $b\tau_{|_{\widetilde{G}}}$–continua y, por el lema 3.2.16, $\widetilde{\tau}$–continua. Es decir, es una extensión de γ a $\widetilde{G}^\frown$. De hecho, esta extensión coincide con la extensión $\widetilde{\gamma}$ definida en la Proposición 3.2.17, puesto que dicha $\widetilde{\gamma}$ es $\sigma(\widetilde{G}, G^\frown)$–continua y G es $\sigma(\widetilde{G}, G^\frown)$–denso en $\widetilde{G}$.*

De la Proposición 3.2.17 se deduce que $G^\wedge$ puede sumergirse como subgrupo (algebraico) de $\widetilde{G}^\wedge$ mediante la aplicación Ψ definida en la Nota 4. El conjunto imagen $\Psi(G^\wedge)$ es $w(\widetilde{G}^\wedge, \widetilde{G})$–denso en $\widetilde{G}^\wedge$.

Lema 3.2.20 $\Psi(G^\wedge)$ *es* $w(\widetilde{G}^\wedge, \widetilde{G})$*–denso en* $\widetilde{G}^\wedge$

Demostración. Nótese que $\Psi(G^\wedge) = \{\widetilde{\gamma} \,:\, \gamma \in G^\wedge\}$ separa puntos de $\widetilde{G}$. En efecto, si $\phi \in \widetilde{G}$ y $\phi \neq 1$ entonces existe $\gamma \in G^\wedge$ tal que $\phi(\gamma) \neq 1$ y, por tanto,

$$\widetilde{\gamma}(\phi) = \phi(\gamma) \neq 1$$

Aplicando entonces la Proposición 2.2.10 a la dualidad $\langle \widetilde{G}, \widetilde{G}^\wedge \rangle$ resulta que $\Psi(G^\wedge)$ es $w(\widetilde{G}^\wedge, \widetilde{G})$–denso en $\widetilde{G}^\wedge$ $\square$

Dado un grupo topológico localmente quasi–convexo, G, se ha construido un nuevo grupo localmente quasi–convexo, $\widetilde{G}$. Repitiendo el proceso, se obtendría un nuevo grupo $\widetilde{\widetilde{G}}$ y así sucesivamente, se obtendría una cadena

$$G \subseteq \widetilde{G} \subseteq \widetilde{\widetilde{G}} \subseteq \ldots$$

Por otra parte, está claro que si G es un g–grupo, entonces $\widetilde{G} = \overline{G}$ es g–grupo y esto significaría que $\widetilde{G} = \widetilde{\widetilde{G}}$. Es decir, la cadena anterior se estabilizaría en $\widetilde{G}$.

Sin embargo, el recíproco no es cierto; es decir, el hecho de ser $\widetilde{G}$ un g–grupo no implica necesariamente que G lo sea.

Lema 3.2.21 *Sea* (G, τ) *un grupo abeliano localmente quasi–convexo y sea* H *un subgrupo tal que* $H^\wedge$ *y* $G^\wedge$ *son isomorfos. Entonces,* $\widetilde{H} \subseteq \widetilde{G}$.

Demostración. Sea $\psi \in \widetilde{H}$, entonces $\psi : H^{\frown} \longrightarrow \mathbb{T}$ es $\sigma(H^{\frown}, H)$–continua en los equicontinuos de $H^{\frown}$. Ahora bien, identificando $H^{\frown} = G^{\frown}$, se tiene $\psi : G^{\frown} \longrightarrow \mathbb{T}$ y cada equicontinuo $E \in G^{\frown}$ es un equicontinuo en $H^{\frown}$. Entonces es una mera comprobación que ψ $\sigma(G^{\frown}, G)$–continua en cada equicontinuo E de $G^{\frown}$, por lo que $\psi \in \widetilde{G}$. □

Proposición 3.2.22 *Sea (G, τ) un g–grupo completo y reflexivo y sea H un subgrupo de G tal que $H^{\frown} \equiv G^{\frown}$. Entonces, $\widetilde{H} = G$.*

Demostración. Aplicando el lema anterior se obtiene que $\widetilde{H} \subset \widetilde{G} = G$. Por otra parte, $G = G^{\frown\frown} = H^{\frown\frown} \subset \widetilde{H}$. De ambas inclusiones resulta que $\widetilde{H} = G$. □

Esta proposición permite encontrar un ejemplo de grupo G, que no es g–grupo, cuya g–extensión $\widetilde{G}$ sí lo es.

Ejemplo 4 *Sea $H = L^2_{\mathbb{Z}}[0,1]$ que es un subgrupo (cerrado) de $G = L^2[0,1]$. H y G tienen el mismo dual (Aussenhofer [6]). Aplicando la proposición anterior se tiene que $\widetilde{H} = G$. Resulta entonces que H no es g–grupo (véase el Ejemplo 2) pero $\widetilde{H}$ sí lo es.*

3.3. Preservación de la compacidad en los g–grupos

Como se ha comentado en la introducción, el objetivo principal de este capítulo es el de encontrar condiciones necesarias y suficientes para la preservación de la compacidad en los grupos topológicos. Se utilizará la terminología introducida por Trigos–Arrieta en [88]:

Definición 16 *Sea* (G, τ) *un grupo topológico abeliano y sea* $\mathcal{P}$ *una propiedad topológica. Se dice que* G respeta *(o preserva) la propiedad* $\mathcal{P}$ *si los subconjuntos de* G *con la propiedad* $\mathcal{P}$ *son los mismos para la topología* τ *y para la topología de Bohr de* (G, τ)*.*

El clásico resultado de Glicksberg [39] puede enunciarse ahora diciendo que todo grupo localmente compacto y abeliano respeta la compacidad.

En esta sección se obtienen los principales resultados de este capítulo, caracterizando en el Teorema 3.3.5 la propiedad de respetar la compacidad en la topología de Bohr para la clase de grupos topológicos abelianos introducidos en la sección anterior, los g–grupos, que contienen a los grupos abelianos localmente compactos y a los grupos nucleares, entre otros. Este resultado engloba, pues, el teorema de Glicksberg y además generaliza los resultados obtenidos por Banaszczyk y Martín-Peinador [9] para grupos nucleares. La clave de la demostración se encuentra en el Teorema 3.3.4, donde se demuestra que todo g–grupo completo es un μ–espacio en su topología de Bohr y que generaliza también resultados previos de Valdivia [93] para espacios localmente convexos y de Trigos–Arrieta [87] para grupos abelianos localmente compactos.

Como también se comentó en la introducción del capítulo, es relativamente sencillo encontrar condiciones suficientes que garantizan la preservación de la compacidad, siendo bastante más difícil demostrar su necesidad.

La idea de la demostración radica en el siguiente lema

Lema 3.3.1 *Sea (G,τ) un grupo topológico abeliano y A un subconjunto no totalmente acotado. Entonces, existen un entorno del neutro U y una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en A de tal forma que*

$$x_n - x_m \notin U, \qquad \text{si } n \neq m$$

Demostración. Si A no es totalmente acotado, existe un entorno U del neutro, de tal forma que para cada subconjunto finito F de G, existe $x_F \in A$ y $x_F \notin F + U$.

Entonces, dado $x_1 \in A$ existe $x_2 \in A$ con $x_1 - x_2 \notin U$. Tomando ahora $F = \{x_1, x_2\}$ existe $x_3 \in A$ con $x_i - x_j \notin U$ si $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$. Iterando el proceso se consigue la sucesión deseada. □

Con la ayuda de este lema y el concepto de conjunto C-sumergido, es relativamente fácil determinar una condición suficiente para que se preserve la compacidad. La definición de C–sumergido puede encontrarse en [38]:

Definición 17 *Un subconjunto A de un grupo topológico (G,τ) se dice C–*sumergido *(en G) si toda función real τ–continua $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función continua $\overline{f} : (G,\tau) \longrightarrow \mathbb{R}$.*

*Cuando toda función continua y acotada $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se extiende a una función continua y acotada $\overline{f} : (G,\tau) \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que A está C^*–*sumergido.

Proposición 3.3.2 *Sea (G,τ) un grupo topológico verificando la propiedad*

> *Cada subconjunto acotado y no totalmente acotado A de G contiene un subconjunto infinito B que es discreto y C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$.*

Entonces, G respeta la compacidad.

Demostración.

Supóngase que A es un subconjunto compacto de $(G, \sigma(G^\frown))$. Por la propiedad citada, A debe ser totalmente acotado en (G, τ).

En caso contrario, aplicando el Lema 3.3.1, se determina un entorno del origen U y una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en A de forma que

$$x_n - x_m \notin U, \quad \text{si } n \neq m$$

Entonces, la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ es no totalmente acotada y, aplicando la propiedad del enunciado, se sigue que existe una subsucesión de ésta, $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$, discreta y C–sumergida en $(G, \sigma(G^\frown))$.

Pero, siendo discreta, la función definida por $f(x_{n_k}) = k$ es continua y se extiende a una función $\overline{f} : (G, \sigma(G^\frown)) \longrightarrow \mathbb{R}$ continua. Y se llega a una contradicción puesto que esta función no es acotada en el compacto A.

Por tanto, A debe ser totalmente acotado en (G, τ).

Entonces, si B es la clausura de A en la complección de (G, τ), se tiene que B es $\overline{\tau}$–compacto y se sigue que $\overline{\tau}_{|B} = \sigma(G^\frown)_{|B}$. Por tanto, A es τ–compacto $\square$

La familia de todos los subconjuntos compactos de un espacio topológico (T, τ) será denotada por $\mathcal{K}(T, \tau)$ ($\mathcal{K}(T)$ si no hay confusión).

Asímismo, dados dos grupos topológicos G y H, se utilizará el símbolo $Hom_\alpha(G, H)$ ($Hom_c(G, H)$, respectivamente) para denotar el subconjunto de $Hom(G, H)$ formado por aquellos homomorfismos que son continuos sobre cada subconjunto de G de cardinalidad menor o igual que α (continuos de G en H, respectivamente).

El siguiente resultado es un lema técnico que proporciona una condición suficiente para garantizar la continuidad de ciertos homomorfismos de grupo:

Lema 3.3.3 *Sean G y H dos grupos topológicos y sea $\psi \in Hom_\alpha(G, H)$. Dado un conjunto $X \subseteq Hom_c(G, H)$, si existe un subconjunto A de X tal que $|A| \leq \alpha$ y ψ pertence a la clausura (en la topología puntual) de A, como subconjunto del producto H^G; entonces ψ es $\sigma(G, X)$–continua sobre cada miembro de $\mathcal{K}(G, \sigma(G, X))$.*

Demostración. Se define $F = A^\perp = \{g \in G \;:\; \phi(g) = e_H, \text{ para todo } \phi \in A\}$. Es claro que F es un subgrupo $\sigma(G, X)$–cerrado de G. Ahora, sea K un subconjunto $\sigma(G, X)$–compacto de G. Sea $\pi : G \to G/F$ la aplicación cociente canónica asociada al espacio G/F. Si sobre G/F se considera la topología débil definida por A, entonces es fácil ver que π es una aplicación de $(G, \sigma(G, X))$ sobre el espacio topológico homogéneo $(G/F, \sigma(G/F, A))$. De aquí, $\pi(K)$ es un subconjunto compacto de $(G/F, \sigma(G/F, A))$, lo cual implica que

$$d(\pi(K)) \leq wt(\pi(K)) = |A| \leq \alpha$$

Por tanto, existe un subconjunto D de K tal que $|D| \leq |A|$ y $\pi(D)$ es denso en $\pi(K)$. Sea L el subgrupo generado por D en G. Como $|L| \leq \alpha$, se tiene que ψ es continua sobre L. Más aún, ψ es también continua sobre $cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ (de hecho, ψ es continua sobre $L \cup \{g\}$, para todo $g \in cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ y por [17, I.57.5], esto implica la continuidad de ψ en $cl_{(G,\sigma(G,X))}L$).

Considérese ahora el diagrama siguiente

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & G/F \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

donde $\widetilde{\psi}$ está definida por $\widetilde{\psi}(\pi(g)) = \psi(g)$.

Obsérvese que $\widetilde{\psi}$ está bien definida, porque si $\pi(g_1) = \pi(g_2)$, para $g_1, g_2 \in G$, entonces $g_1^{-1}g_2 \in F$ y, por tanto, $\phi(g_1^{-1}g_2) = e_H$ para todo $\phi \in A$. Como ψ está en la clausura de $A \subseteq H^G$, se sigue, de ello, que $\psi(g_1^{-1}g_2) = e_H$. Es decir, $\psi(g_1) = \psi(g_2)$.

Para probar que $\widetilde{\psi}$ es continua sobre $\pi(K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L)$, se comprobará que para todo $g \in K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ y para toda red $\{g_\delta\}_{\delta\in\Lambda}$ en $K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ tal que $\{\pi(g_\delta)\}_{\delta\in\Lambda}$ converge a $\pi(g)$, existe una subred $\{g_m\}_{m\in M}$, con $\{\widetilde{\psi}(\pi(g_m))\}_{m\in M}$ convergente a $\widetilde{\psi}(\pi(g))$.

Para ello, supóngase que $\{g_\delta\}_{\delta\in\Lambda}$ es una red en $K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ tal que $\{\pi(g_\delta)\}_{\delta\in\Lambda}$ converge a $\pi(g)$, con g también en $K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L$. Por compacidad, debe existir una subred $\{g_m\}_{m\in M}$ convergente a algún punto $g' \in K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L$. Claramente, la red $\{\pi(g_m)\}_{m\in M}$ debe converger a $\pi(g)$ como subred que es de $\{\pi(g_\delta)\}_{\delta\in\Lambda}$, pero la continuidad de π implica que también converge a $\pi(g')$, así que $g^{-1}g' \in F$ y, en consecuencia, $\psi(g) = \psi(g')$. La continuidad de ψ sobre $cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ proporciona la convergencia de $\{\psi(g_m)\}_{m\in M}$ a $\psi(g) = \psi(g')$. Teniendo en cuenta la definición de $\widetilde{\psi}$, se obtiene la conclusión requerida.

Ahora, el conjunto $K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L$ es compacto en $(G,\sigma(G,X))$ y contiene a D. Como $\pi(D)$ es denso en $\pi(K)$, se sigue que $\pi(K \cap cl_{(G,\sigma(G,X))}L) = \pi(K)$. Por tanto, se ha demostrado la continuidad de $\widetilde{\psi}$ on $\pi(K)$. La conmutatividad del diagrama

$$\begin{tikzcd} K \arrow[rr, "\pi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & \pi(K) \arrow[dl, "\widetilde{\psi}"] \\ & H & \end{tikzcd}$$

implica la continuidad de ψ sobre K, lo que completa la prueba. $\square$

Definición 18 *Un subconjunto A de un espacio topológico X se dice* funcionalmente acotado *cuando $f_{|A}$ es acotado, para cada $f \in C(X)$.*

*El espacio topológico X es un μ–*espacio *cuando cada subconjunto funcionalmente acotado de X es relativamente compacto.*

Valdivia [93] demuestra que los espacios vectoriales localmente convexos quasi–completos son μ–espacios en su topología débil y Trigos–Arrieta [87] lo prueba para grupos abelianos localmente compactos provistos de su topología de Bohr. El siguiente resultado extiende los anteriormente citados a la clase de g–grupos completos, unificando ambas aproximaciones.

Teorema 3.3.4 *Sea (G,τ) g–grupo completo. Entonces el grupo $(G,\sigma(\widehat{G}))$ es un μ–espacio.*

Demostración. Sea A un subconjunto de G que es $\sigma(\widehat{G})$–cerrado y funcionalmente acotado y supóngase, para empezar, que A es $\sigma(\widehat{G})$–numerablemente compacto. Entonces, para cada subconjunto $\sigma(G)$–compacto L de $G^\frown$ consideramos $A_{|_L}$ como subconjunto de $C_p(L, \mathbb{C})$ y, como $A_{|_L}$ es numerablemente compacto, el teorema de Grothendiek [40] implica que $A_{|_L}$ es también compacto. De aquí que si $x \in cl_{bG}A$, se sigue que $x_{|_L} \in A_{|_L}$ y x es $\sigma(G)$–continua sobre L. Como (G, τ) es un g–grupo completo se obtiene que $cl_{bG}A \subseteq G$ de donde se deduce que A es relativamente compacto.

Supóngase ahora que A no es $\sigma(G^\frown)$–numerabemente compacto. Entonces, debe existir alguna sucesión $\{a_n\}_{n<\omega} \subseteq A$ sin puntos de clausura en G. Sea $\psi \in cl_{bG}\{a_n\} \setminus G$. Aplicando de nuevo el Lema 3.3.3, al ser G un g–grupo completo, existe un conjunto numerable $Y \subseteq \widehat{G}$ tal que ψ no es $\sigma(G)$–continua sobre Y. Se define

$$N = \{\phi \in bG \ : \ \phi_{|_Y} \equiv 1 \in \mathbb{T}\}$$

Es claro que N es un subgrupo cerrado y un G_δ–abierto de bG tal que $(\psi + N) \cap G = \emptyset$. Por tanto, puede encontrarse alguna función $\ell \in C(bG)$ tal que $0 \leq \ell \leq 1$, con $\ell > 0$ sobre G y $\ell(\psi) = 0$. De todo ello se deduce que la aplicación $\dfrac{1}{\ell}$ es continua sobre $(G, \sigma(G^\frown))$ y no es acotada sobre $\{a_n\}_{n<\omega}$, puesto que ψ es un punto de clausura de dicha sucesión. Esto contradice la hipótesis inicial sobre la acotación funcional de A y con ello termina la prueba. $\square$

Trigos–Arrieta considera también algunas propiedades relacionadas con la compacidad como, por ejemplo, la pseudocompacidad, la compacidad numerable o la acotación funcional, obteniendo que todas son preservadas por los grupos abelianos localmente compactos. Posteriormente, Banaszczyk y Martín-

Peinador [9] generalizan estos resultados para grupos nucleares arbitrarios. Se demuestra a continuación que para g–grupos completos la preservación de todas esas propiedades es equivalente a la preservación de la compacidad y se proporciona asímismo una caracterización de esta última.

Teorema 3.3.5 *Sea (G, τ) un g–grupo completo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

a) (G, τ) *respeta la compacidad;*

b) (G, τ) *respeta la compacidad numerable;*

c) (G, τ) *respeta la pseudocompacidad;*

d) (G, τ) *respeta la acotación funcional;*

e) Cada subconjunto no totalmente acotado A de G contiene un subconjunto infinito B que es discreto y C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$.

Demostración. Antes de empezar, nótese que, siendo (G, τ) completo, es un espacio realcompacto (y de aquí, un μ–espacio). Por tanto, los grupos (G, τ) y $(G, \sigma(G^\frown))$ son μ–espacios.

(a) (resp. (b) o (c)) implica (d). Sea A un subconjunto funcionalmente acotado de $(G, \sigma(G^\frown))$. Entonces, $B = cl_{(G,\sigma(G^\frown))}A$ es compacto (resp. numerablemente compacto o pseudocompacto). Aplicando (a) (resp. (b) o (c)) se obtiene que B es compacto (resp. numerablemente compacto o pseudocompacto) como subespacio de (G, τ). Ahora bien, B es $\sigma(G^\frown)$–cerrado, por tanto cerrado también en (G, τ). Como la compacidad (resp. compacidad numerable o pseudocompacidad) implica acotación funcional y (G, τ) es un μ–espacio, se sigue que B es siempre τ–compacto. En consecuencia, $A \subseteq B$ es funcionalmente acotado en (G, τ).

(d) implica (e). Sea A un subconjunto no totalmente acotado de (G, τ). Entonces, aplicando el Lema 3.3.1, existe un entorno de la identidad U y una sucesión $\{a_n\}_{n<\omega}$ en A tales que

$$(a_n + U) \cap (a_m + U) = \emptyset, \quad \text{para todo } n \neq m$$

Como (G, τ) es un μ–espacio, se sigue que $\{a_n\}_{n<\omega}$ no puede ser funcionalmente acotado en (G, τ) y, por (d), la sucesión $\{a_n\}_{n<\omega}$ tampoco es un subconjunto funcionalmente acotado de $(G, \sigma(G^\frown))$. Sea $f \in C(G, \sigma(G^\frown))$ tal que $\overline{\lim}_n |f(a_n)| = +\infty$. Si se elige B como una subsucesión $\{a_{n_k}\}_{k<\omega}$ tal que $|f(a_{n_{k+1}})| > |f(a_{n_k})| + 1$, para todo k, se obtiene un subconjunto discreto y C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$.

(e) implica (a) (resp. (b) y (c)). Esta es la condición suficiente vista en la Proposición 3.3.2. (Para las condiciones (b) y (c), basta reemplazar compacto por numerablemente compacto o por pseudocompacto, respectivamente). $\square$

Capítulo 4

Grupos metrizables

4.1. Introducción

El objetivo, en este capítulo, es continuar el estudio de la preservación de la compacidad para grupos abelianos maximalmente casi–periódicos, obteniendo condiciones necesarias y suficientes para dicha propiedad.

Para g–grupos completos la preservación de la compacidad es equivalente a la existencia de ciertos subconjuntos discretos y C–sumergidos convenientemente situados (Teorema 3.3.5). Un grupo metrizable y reflexivo es completo (véase [20]) por lo que si es un grupo localmente quasi–convexo, es un g–grupo completo (Proposición 3.2.7) y se le aplica el resultado anterior. Cuando no es localmente quasi–convexo, la condición descrita aún es suficiente (Proposición 3.3.2) pero se desconoce, en general, si es necesaria. Sin embargo, todavía puede encontrarse una caracterización similar para la preservación de la compacidad.

En [95] van Douwen prueba que si G es un grupo abeliano discreto, entonces cada subconjunto infinito de $(G, \sigma(G^\frown))$ contiene subconjuntos discretos de la misma cardinalidad que son C^*-sumergidos en la compactación de Bohr de G. Aparentemente, este resultado nada tiene que ver con la propiedad de respetar la compacidad pero permite obtener, de nuevo, condiciones suficientes para garantizarla, como se ha puesto de relieve en [36]. Más aún, se demostrará en esta memoria que, para grupos metrizables y reflexivos, la propiedad demostrada por van Douwen para grupos discretos es equivalente a la propiedad de respetar la compacidad; aunque, en general, no se sabe si estas dos propiedades son equivalentes para todos los grupos que satisfacen la dualidad de Pontryagin.

Ese estudio se particulizará después para la clase de los grupos aditivos de espacios de Banach, que se encuentra en la intersección entre la clase de los g–grupos completos y la clase de los grupos metrizables y reflexivos, por lo que se le podrá aplicar ambas caracterizaciones, resolviendo así un problema planteado por Trigos–Arrieta y Remus en [76]. Más aún, con la ayuda de algunos resultados de la teoría de espacios de Banach, se obtendrán otras caracterizaciones de los espacios de Banach que respetan la compacidad o, utilizando una terminología diferente, de los espacios de Banach que satisfacen la *propiedad de Schur*. Para éstos, la preservación de la compacidad será equivalente entonces a la existencia de ciertos subconjuntos discretos, C–sumergidos en $(G, \sigma(G^\frown)$ y C^*–sumergidos en bG. En este estudio juega un papel fundamental la presencia de sucesiones equivalentes a la base de unidades de ℓ^1. Utilizando una extensión de este concepto, dada por Bourgain en [18], se generalizan, en la última sección, estas caracterizaciones a otras clases de grupos demostrando, en particular, que el resultado de van Douwen es cierto para la clase de los grupos nucleares, con lo que se completan los resultados obtenidos por Banaszczyk y Martín–Peinador en [10] y [8], donde se extienden ciertos teoremas de la teoría de grupos abelianos localmente compactos a la clase de grupos nucleares.

4.2. Grupos metrizables

El teorema clásico de Rosenthal [79] caracterizando los espacios de Banach que contienen una copia de ℓ^1 establece que *"dada una sucesión acotada en un espacio de Banach, o bien contiene una subsucesión débil Cauchy o bien contiene una subsucesión equivalente a la base de unidades de ℓ^1"*.

Si X es un espacio de Banach, el teorema de Banach-Alaoglu prueba que la bola unidad del espacio dual, B_{X^*}, es débil–estrella compacta y entonces las sucesiones acotadas en X pueden verse como funciones continuas $x_n \in C(B_{X^*})$ uniformemente acotadas. Decir entonces que no tiene subsucesiones débiles Cauchy equivale a decir que no tiene subsucesiones puntualmente convergentes.

Con este punto de vista se obtiene un lema cuya demostración está implícita en el teorema de Rosenthal, más concretamente en su versión compleja que obtiene Dor en [29] y, sobretodo, a partir de la exposición de J. Farahat en [32] de dicha demostración (véase también [28]).

De aquí en adelante, $C_p(X, \mathbb{C})$ será el espacio de todas las funciones continuas sobre X y $\mathbb{C}$-valuadas, dotado de la topología de convergencia puntual.

Lema 4.2.1 (Rosenthal) *Sea X un espacio compacto y Hausdorff y sea $\{f_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en $C_p(X, \mathbb{C})$ que no contiene ninguna subsucesión puntualmente convergente en $\mathbb{C}^X$. Entonces, existen un conjunto infinito $M \subseteq \omega$ y dos discos cerrados y disjuntos en $\mathbb{C}$, D_1 y D_2, tales que, para todas las subsucesiones $\{f_n : n \in J\}$ de $\{f_n : n \in M\}$ existe $x \in X$ con $f_n(x) \in D_1$, para todo $n \in J$, y $f_n(x) \in D_2$ para todo $n \in M \setminus J$.*

Definición 19 *Se dice que dos subconjuntos A y B en G están* separados por caracteres *si existen dos intervalos, I_0 e I_1, cerrados y disjuntos en $\mathbb{T}$ y un carácter $\chi \in G^\frown$ tales que $\chi(A) \subseteq I_0$ y $\chi(B) \subseteq I_1$.*

Se obtiene ahora el resultado principal de esta sección

Teorema 4.2.2 *Sea G un grupo abeliano maximalmente casi–periódico y metrizable, satisfaciendo la dualidad de Pontryagin; i.e., reflexivo. Entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *G respeta la compacidad.*

2. *Cada subconjunto no totalmente acotado A de G contiene un subconjunto infinito B de forma que cada subconjunto de B está separado por caracteres de su complemento en B.*

3. *Cada subconjunto no totalmente acotado A de G contiene un subconjunto infinito B que es discreto y C^*-sumergido en bG.*

Demostración. Antes de empezar nótese que, como G satisface la dualidad de Pontryagin, la metrizabilidad de G implica que $G^\frown$ es σ-compacto. Esto es, existe una familia numerable de subconjuntos compactos $\{K_p\}_{p<\omega}$ tal que $G^\frown = \bigcup_{p<\omega} K_p$ (véase [71, Theorem 2.5]).

(3) $\Rightarrow$ (1) Considérese un subconjunto A de G que sea compacto en $(G, \sigma(G^\frown))$ y supóngase que no lo sea en G. De la compacidad de A en $(G, \sigma(G^\frown))$, se deduce que A es un subconjunto cerrado de G.

Por otra parte, cualquier grupo abeliano metrizable que satisface la dualidad de Pontryagin es necesariamente completo (véase [20, Theorem 1]). De aquí se sigue que el subconjunto A no puede ser totalmente acotado. Alternativamente, siendo G el grupo dual de $G^\frown$, existe una base de entornos de la identidad formada por conjuntos Bohr-cerrados (véase [10, Proposition 1.3]). Por [36, Corollary 2.1] la complección de G, digamos $\overline{G}$, también es un grupo maximalmente casi-periódico. Por tanto, la compacidad de A en $(G, \sigma(G^\frown))$ implica que A es cerrado como subconjunto de $\overline{G}$ y, en consecuencia, A no es totalmente acotado. Entonces, aplicando el Lema 3.3.1, puede encontrarse un subconjunto infinito numerable $\{x_n\}_{n<\omega} \in A$ y un entorno abierto de la identidad U de forma que

$$(x_n + U) \cap (x_m + U) = \emptyset, \quad \text{para todo } \ n \neq m.$$

Considerando las correspondientes restricciones, puede identificarse A como un subconjunto de $C(K_1, \mathbb{C})$, el espacio de funciones complejas continuas sobre K_1. Es claro que A es también compacto con respecto a la topología que hereda como subconjunto de $C_p(K_1, \mathbb{C})$. Aplicando, ahora, el teorema de Grothendieck [40] o [27, Lemma 4] se deduce que A es sucesionalmente compacto en esa topología. Existe, en consecuencia, una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n<\omega}$ de $\{x_n\}_{n<\omega}$ que converge puntualmente en K_1 a $f_1 \in C(K_1, \mathbb{C}) \cap A$. Siguiendo un razonamiento inductivo puede encontrarse una familia de subsucesiones $\{x_n^{(p)}\}_{n<\omega}$ de $\{x_n\}_{n<\omega}$ tales que:

i) $\{x_n^{(p+1)}\}_{n<\omega}$ es una subsucesión de $\{x_n^{(p)}\}_{n<\omega}$.

ii) La sucesión $\{x_n^{(p)}\}_{n<\omega}$ converge puntualmente en $K_1 \cup \ldots \cup K_p$ a $f_p \in A \cap C(K_1 \cup \ldots \cup K_p, \mathbb{C})$.

Es fácil ver que $(f_{p+1})_{|K_1 \cup \ldots \cup K_p} = f_p$.

Considérese, ahora, la subsucesión $\{x_n^{(n)}\}_{n<\omega}$. Esta sucesión es convergente a f_p en la topología de convergencia puntual sobre $K_1 \cup \ldots \cup K_p$, para todo $p < \omega$. Se define, entonces, la sucesión de conjuntos

$$A_p = \{f \in A : f_{|K_1 \cup \ldots \cup K_p} = f_p\}.$$

Cada A_p es cerrado y no vacío y, además, $A_{p+1} \subseteq A_p$, para todo $p < \omega$. Como A es compacto, existe $f \in A$ tal que $f \in \bigcap_p A_p$. Entonces, es fácil deducir que $\{x_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ converge puntualmente a f sobre $G^\frown$. Por tanto, se concluye que ningún subconjunto infinito de $\{x_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ es discreto y C^*-sumergido en bG, pero esto contradice la afirmación tercera porque, por la construcción realizada, ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n<\omega}$ es totalmente acotada.

(2) $\Rightarrow$ (3) Supóngase, ahora, que puede encontrarse un subconjunto infinito B en cada conjunto no totalmente acotado $A \subseteq G$, de forma que cada subconjunto B_1 de B está separado por caracteres de su complemento $B \setminus B_1$.

Se toma un elemento arbitrario $b \in B$. Los subconjuntos $\{b\}$ y $B \setminus \{b\}$ están separados por caracteres, así que existen dos intervalos cerrados y disjuntos en $\mathbb{T}$, I_0 e I_1, y un carácter continuo $\chi \in G^\frown$ con $\chi(b) \in I_0$ y $\chi(B \setminus \{b\}) \subseteq I_1$. Entonces, $\chi^{-1}(\mathbb{T} \setminus I_1)$ es un entorno de b en $(G, \sigma(G^\frown))$ que corta a B exactamente en el punto b. Esto quiere decir que B es discreto en la topología de Bohr. Para ver, por otra parte, que B es C^*-sumergido en bG es suficiente probar que cada par, B_0 y B_1, de subconjuntos disjuntos de B están completamente separados en bG; esto es, que existe una función real continua $f \in C(bG)$ tal que $0 \leq f \leq 1$, $f(B_0) = \{0\}$ y $f(B_1) = \{1\}$ (véase [38, p.18]). Como B_0 y B_1 están separados por caracteres, pueden encontrarse, de nuevo, dos intervalos cerrados y disjuntos en $\mathbb{T}$, I_0 e I_1, y un carácter $\chi \in G^\frown$ tal que $\chi(B_0) \subseteq I_0$ y

$\chi(B_1) \subseteq I_1$. Sea, ahora, $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(t) = \frac{d(t, I_0)}{d(t, I_0) + d(t, I_1)}.$$

Obviamente, g es continua, $0 \leq g \leq 1$, $g(I_0) = \{0\}$ y $g(I_1) = \{1\}$. Como cada carácter continuo de un grupo se extiende continuamente a la compactación de Bohr de dicho grupo, podemos suponer que χ está definido sobre bG. Que B_0 y B_1 están completamente separados en bG se deduce ahora tomando $f = g \circ \chi$.

(1) $\Rightarrow$ (2) Por último, supóngase que G respeta la compacidad y considérese un subconjunto A de G que es no totalmente acotado. El Lema 3.3.1 permite, de nuevo, obtener una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en A y un entorno abierto de la identidad U en G tales que

$$(x_m + U) \cap (x_n + U) = \emptyset, \text{ para todo } n \neq m \in \omega.$$

En esta situación, debe existir un índice p tal que ninguna subsucesión de $\{x_n\}_{n<\omega}$ converge puntualmente en $C(K_1 \cup \ldots \cup K_p, \mathbb{C})$. En otro caso se razonaría como antes para obtener una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n<\omega}$ de $\{x_n\}_{n<\omega}$ que converge puntualmente sobre $G^\frown$. Entonces, la sucesión $\{x_n^{(1)} - x_{2n}^{(1)}\}_{n<\omega}$ converge puntualmente al elemento identidad de G; es decir, converge en la topología de $(G, \sigma(G^\frown))$. Como G respeta la compacidad, se sigue que la sucesión $\{x_n^{(1)} - x_{2n}^{(1)}\}_{n<\omega}$ debe converger al elemento identidad de G, en la topología original de G, llegando a una contradicción con las suposiciones hechas sobre la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$. Se ha demostrado, por tanto, que la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ no tiene subsucesiones convergentes en $C_p(K_1 \cup \ldots \cup K_p, \mathbb{C})$ y aplicando el Lema 4.2.1 a la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ (vista como un conjunto de funciones continuas sobre $K_1 \cup \ldots \cup K_p$), se obtiene un subconjunto infinito de $\{x_n\}_{n<\omega}$, de forma que cada subconjunto suyo está separado por caracteres de su complemento. Y esto termina la prueba. □

La misma técnica se aplica ahora para caracterizar cuándo un grupo abeliano maximalmente casi–periódico, metrizable y reflexivo *respeta fuertemente la compacidad*, concepto definido por Comfort, Trigos-Arrieta y Wu, que puede encontrarse en [25].

Definición 20 *Se dice que un grupo abeliano maximalmente casi–periódico G* respeta fuertemente la compacidad *si, dados un subgrupo metrizable y cerrado N de la compactación de Bohr, bG, y un subconjunto A de G, el conjunto $A+(N\cap G)$ es compacto en G si, y sólo si, el conjunto $A+N$ es compacto en bG.*

Tomando $N=\{0\}$, se deduce fácilmente que cada grupo que respeta fuertemente la compacidad también respeta la compacidad. En general, el recíproco no es cierto.

El lema siguiente, cuya demostración puede verse en [36], permitirá, junto con el Teorema 4.2.2, obtener una caracterización de los grupos que respetan fuertemente la compacidad en términos parecidos a los obtenidos para grupos que respetan la compacidad.

Lema 4.2.3 *Sean G un grupo abeliano maximalmente casi–periódico, A un subconjunto de G y N un subconjunto de bG tales que $A+N$ es compacto en bG. Si F es un subconjunto arbitrario de A, entonces existe $A_0\subseteq A$ con $|A_0|\leq|N|$ tal que*

$$cl_{bG}F\subseteq A_0+N+cl_{(G,\sigma(G^\frown))}(F-F).$$

Corolario 4.2.4 *Sea G un grupo abeliano maximalmente casi–periódico, metrizable y que satisface la dualidad de Pontryagin y tal que la cardinalidad de la clausura en $(G, \sigma(G^\frown))$ de cada uno de sus subgrupos separables es menor que $2^{\mathbf{c}}$. Entonces G respeta fuertemente la compacidad si, y sólo si, G satisface una de las afirmaciones del Teorema 4.2.2 (y, por tanto, todas).*

Demostración. Supóngase que G satisface la afirmación (3) en el Teorema 4.2.2 y considérese un subconjunto A de G y un subconjunto N de bG con $|N| < 2^{\mathbf{c}}$ (obviamente, éste es el caso si N es un subgrupo cerrado y metrizable de bG) tal que $A + N$ es un subconjunto compacto de bG.

Si $A + (N \cap G)$ no es compacto en G, no puede ser totalmente acotado, puesto que $A + (N \cap G)$ es cerrado en el grupo completo G. Puede aplicarse, entonces, la afirmación tercera del Teorema 4.2.2 para obtener un subconjunto infinito numerable F de $A + (N \cap G)$ que es discreto y C^*-sumergido en bG. Ahora, por el Lema 4.2.3, se tiene que

$$cl_{bG}F \subseteq A_0 + N + cl_{(G,\sigma(G^\frown))}(F - F),$$

donde A_0 es un subconjunto de G con cardinalidad

$$|A_0| \leq |N| < 2^{\mathbf{c}}.$$

Como consecuencia, se obtiene que

$$|cl_{bG}F| \leq max\left(|N|,\ cl_{(G,\sigma(G^\frown))}(F - F)\right) < 2^{\mathbf{c}}.$$

Como, por hipótesis, la cardinalidad de $cl_{(G,\sigma(G^\frown))}\langle F\rangle$ es menor que $2^{\mathbf{c}}$, se llega a una contradicción con el hecho de que $cl_{bG}F$ es homeomorfo a βF, la compactación de Stone-Čech de F, cuya cardinalidad es $2^{\mathbf{c}}$. $\square$

4.3. Grupos aditivos de espacios de Banach

En [76], Remus y Trigos–Arrieta estudian la preservación de la compacidad en el contexto de los grupos aditivos de los espacios localmente convexos. Entre otros resultados, prueban que cada espacio de Banach que preserva la compacidad debe contener una copia de ℓ^1 sumergida en él. También exhiben varios ejemplos mostrando que la presencia de ℓ^1 no es equivalente a la preservación de la compacidad. En esta línea, dichos autores proponen el problema de caracterizar la preservación de la compacidad para los grupos aditivos de los espacios de Banach. Como la topología débil y la topología de Bohr de un espacio de Banach comparten la misma colección de subconjuntos compactos (ver [75]), este problema es equivalente a caracterizar los espacios de Banach cuyos subconjuntos débilmente compactos son compactos para la topología de la norma. Por el teorema de Eberlein-Šmulian ([85] y [30]), es suficiente caracterizar los espacios de Banach cuyas sucesiones débilmente convergentes son convergentes en norma. Ahora bien, un espacio de Banach se dice que tiene la propiedad de *Schur* si las sucesiones débilmente convergentes son convergentes para la norma (resultado demostrado por Schur para ℓ^1 en 1910). Se sigue entonces, que el problema planteado por Remus y Trigos-Arrieta es equivalente al de caracterizar los espacios de Banach que gozan de la propiedad de Schur.

Es interesante resaltar que J. Bourgain demuestra la existencia de espacios de Banach que no tienen la propiedad de Schur, aunque todos sus subespacios cerrados contienen una copia de ℓ^1 (véase [MR87f:46030]). Más tarde, Azimi y Hagler [7] dan un ejemplo con una construcción explícita de la base de ℓ^1 dentro de dichos subespacios. El problema radica en dónde deben estar situadas las copias de ℓ^1.

Naturalmente, todo espacio de Banach es un g–grupo completo y por tanto el Teorema 3.3.5 responde al problema de Remus y Trigos–Arrieta. Sin embargo, utilizando las ideas desarrolladas en la sección previa se dan nuevas caracterizaciones que el ejemplo de Bourgain hace díficil que puedan ser refinadas. Para ello, se necesitan las siguientes definiciones

Definición 21 *Sea E un espacio de Banach. Una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ se dice una* base de Schauder *para E si para cada $x \in E$ existe una única sucesión $\{\alpha_n\}_{n<\omega}$ de escalares tales que $x = lim_n \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$. Una* sucesión básica *en E es una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ que es una base de Schauder para su envoltura lineal cerrada.*

y también el siguiente lema que puede encontrarse en [83, Teorema 1.3, p.53]

Lema 4.3.1 *Sea E un espacio de Banach y sea $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en E con $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$. Para que $\{x_n\}_{n<\omega}$ contenga una subsucesión que es una sucesión básica, es necesario y suficiente que satisfaga, al menos, una de las dos condiciones siguientes:*

1. *$\{x_n\}_{n<\omega}$ no es relativamente débil compacto.*
2. *0 es un punto límite débil de $\{x_n\}_{n<\omega}$.*

Dado un subconjunto F de un espacio de Banach E se denotará por $lin\{F\}$ la *envoltura lineal* de F.

Por *base de unidades* de ℓ^1 se entenderá la sucesión de elementos de ℓ^1 $\{e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots\}$, donde e_i es la sucesión que tiene todas sus componentes nulas, salvo la que ocupa la posición i-ésima, que vale 1. Se verifica, entonces, que

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \right\| = \sum_{i=1}^{n} |c_i|$$

para cualesquiera escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $n < \omega$.

Definición 22 *Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach. Una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E se dice* equivalente a la base de unidades de ℓ^1 *si existen dos constantes positivas a y b tales que*

$$a \sum_{i=1}^{n} |c_i| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \right\| \leq b \sum_{i=1}^{n} |c_i|$$

para cualesquiera escalares $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y $n < \omega$.

Cuando esto ocurre, E contiene una copia isomórfica de ℓ^1.

Para un espacio localmente convexo E, E^+ representará el grupo aditivo E dotado de su topología de Bohr.

Lema 4.3.2 *Sea E un espacio localmente convexo y sea F un subespacio cerrado de E. Entonces $Cl_{E^+}F = F^+$, de lo cual se deduce que $Cl_{bE}F = bF$.*

Demostración. Una aplicación del teorema de Hahn-Banach y [84, Lemma 1] demuestran que F es dualmente cerrado y dualmente sumergido en E (véase §1, 1.2 para las definiciones de dualmente cerrado y dualmente sumergido). □

Se demuestra a continuación el principal resultado de esta sección.

Teorema 4.3.3 *Sea E el grupo aditivo de un espacio de Banach infinito dimensional, entonces son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *E respeta la compacidad*

2. *E respeta fuertemente la compacidad*

3. *Para cada sucesión acotada y no totalmente acotada $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ tal que cada subconjunto de ella está separada de su complemento en $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ por caracteres.*

4. *Para cada sucesión acotada y no totalmente acotada $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ que es C^*–sumergida en bE*

5. *Para cada sucesión acotada y no totalmente acotada $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ que es discreta y C–sumergida en E^+*

6. *Para cada sucesión acotada y no totalmente acotada $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ que es discreta y C–sumergida en E^+ y C^*–sumergida en bE*

7. *Para cada sucesión acotada y no totalmente acotada $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ que es equivalente a la base de unidades de ℓ^1 (de aquí que $\ell^1 \hookrightarrow E$).*

8. *Cada subconjunto débilmente compacto de E es compacto en la topología de la norma.*

9. *Para cada sucesión básica $\{x_n\}_{n<\omega}$ en E, que satisface la condición $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$, existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ que es equivalente a la base de unidades de ℓ^1.*

En particular, un espacio de Banach infinito-dimensional, que satisface cualquiera de las afirmaciones anteriores no es reflexivo.

Demostración. Cada subgrupo separable H de un espacio de Banach E está contenido en un subespacio de Banach separable de E. Como cada espacio de Banach es metrizable y satisface la dualidad de Pontryagin [84, Theorem 1] y la cardinalidad de cada espacio de Banach separable es exactamente **c** la equivalencia entre (1), (2), (3) y (4) se deduce directamente del Teorema 4.2.2, del Corolario 4.2.4 y del Lema 4.3.2.

La equivalencia entre (1) y (5) es el Teorema 3.3.5.

(4) y (5) $\Rightarrow$ (6). En efecto, dada una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ acotada y no totalmente acotada en E, aplicando (5) se obtiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k<\omega}$ que es discreta y C–sumergida en E^+. Aplicando ahora (4) a esta subsucesión, se determina una nueva subsucesión $\{x_{n_{k_j}}\}_{j<\omega}$ que es C^*–sumergida en bE. Y por tanto, $\{x_{n_{k_j}}\}_{j<\omega}$ es discreta y C–sumergida en E^+ y C^*–sumergida en bE.

(6) $\Rightarrow$ (4) y (5). Es evidente.

(8)$\Rightarrow$(7). Sea $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión acotada y no totalmente acotada en E. Aplicando el Lema 3.3.1, tomando una subsucesión adecuada si fuese necesario, no hay pérdida de generalidad en suponer que puede encontrarse un número real positivo r de tal forma que

$$\| x_n - x_m \| \geq r, \qquad \text{para todo } n \neq m$$

Se verifica, entonces, que $\{x_n\}_{n<\omega}$ no puede tener una subsucesión débilmente Cauchy. De hecho, si $\{x_n^1\}_{n<\omega}$ es una subsucesión débil Cauchy, entonces $\{x_n^1 - x_{2n}^1\}_{n<\omega}$ converge débilmente a cero en E y la afirmación (8) implica que

$\{x_n^1 - x_{2n}^1\}_{n<\omega}$ converge (en norma) a 0 en E. Pero esto es imposible a causa de la suposición hecha sobre $\{x_n\}_{n<\omega}$.

En consecuencia, puede aplicarse la caracterización de Rosenthal para espacios de Banach que contienen a ℓ^1 [79], obteniendo que $\{x_n\}_{n<\omega}$ debe contener una subsucesión equivalente a la base de unidades de ℓ^1.

(7)⇒(2). Sea N un subgrupo de bE con $|N| < 2^{\mathbf{c}}$ (esto ocurre siempre que N sea metrizable) y sea un subconjunto A de G tal que el conjunto $A + N$ es compacto en bE. Supóngase que $A + (N \bigcap E)$ no es compacto en E. Si $A + (N \bigcap E)$ es acotado en E, entonces puede extraerse de él una sucesión acotada y no totalmente acotada $\{x_n\}_{n<\omega}$. Por la hipótesis (7), existe una subsucesión $\{x_n^1\}_{n<\omega}$, que es equivalente a la base de unidades de ℓ^1. El espacio de Banach generado por $\{x_n^1\}_{n<\omega}$ es isomorfo a ℓ^1. Denotamos por $\{e_n\}_{n<\omega}$ la sucesión $\{x_n^1\}_{n<\omega}$. Como ℓ^1 está sumergido isomórficamente en E, aplicando el Lema 4.3.2, se deduce que $(\ell^1)^+$ es un subgrupo cerrado de E^+ y $b\ell^1$ coincide con $cl_{bE}(lin\,\{e_n\}_{n<\omega})$. Por tanto, del Lema 4.2.3, se sigue que

$$|cl_{bl^1}\left(\{e_n\}_{n<\omega}\right)| = |cl_{bE}\left(\{e_n\}_{n<\omega}\right))| \leq max(|l^1|, |N|) < 2^{\mathbf{c}}. \qquad (*)$$

Por otra parte, para cada subsucesión $\{e_{n_k}\}_{k<\omega}$ de $\{e_n\}_{n<\omega}$, se puede encontrar un elemento φ de ℓ^∞, el dual de ℓ^1, que asigna los elementos de $\{e_{n_k}\}_{k<\omega}$ a cero y los de $\{e_n\} \setminus \{e_{n_k}\}$ a $\frac{1}{2}$. La aplicación $e^{2\pi i\varphi}$ es entonces un carácter que separa $\{e_{n_k}\}_{k<\omega}$ de su complemento en la sucesión. Por ello, $\{e_n\}$ es discreto y C^*–sumergido en $b\ell^1$. Es decir, $cl_{bl^1}(\{e_n\}_{n<\omega})$ es homeomorfo a la compactación de Stone–Čech de los números naturales, lo cual lleva a una contradicción con (*).

Finalmente, si $A + (N \cap E)$ no fuese acotado, como la acotación usual de E (i.e., acotación en norma) es separada, en el sentido de [36], se aplica [36, Lema 4.1] para obtener una sucesión $\{x_n\}_{n<\omega} \subseteq A + (N \cap E)$ que es discreta y C^*-sumergida en bE. De nuevo, se llega a una contradicción al aplicar el Lema 4.2.3 de la misma forma que se había hecho para la base de unidades de ℓ_1. De este modo finaliza la prueba.

(1)⇒(8). Es inmediato a partir del hecho de que la topología débil de un espacio de Banach está situada entre la topología de Bohr y la topología de la norma [75, (1.2)].

(7)⇒(9). Sea $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión básica en E que satisface que $0 < \inf_n \|x_n\| \leq \sup_n \|x_n\| < \infty$. Por el Lema 4.3.1, una de las dos condiciones siguientes debe ser satisfecha:

i) la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ es débilmente convergente a cero;

ii) el conjunto $\{x_n\}_{n<\omega}$ no es relativamente débilmente compacto.

Supóngase que (i) es satisfecha. Entonces, el conjunto $\{x_n\}_{n<\omega}$ no puede ser totalmente acotado para la topología de la norma . En otro caso, existiría una subsucesión convergente en norma a 0 a causa de (i). Pero eso contradiría la elección de $\{x_n\}_{n<\omega}$. Basta aplicar la hipótesis (7) a $\{x_n\}_{n<\omega}$ para obtener el resultado deseado.

De aquí que se pueda asumir que $\{x_n\}_{n<\omega}$ no es relativamente débil compacto. Por tanto, $\{x_n\}_{n<\omega}$ no puede ser tampoco relativamente compacto para la norma. Porque, en ese caso, la clausura de $\{x_n\}_{n<\omega}$ en la topología de la norma sería compacta y, por ello, débil compacta lo que contradiría (ii).

Como E es un espacio de Banach, $\{x_n\}_{n<\omega}$ no puede ser un subconjunto totalmente acotado de E. Tan solo resta aplicar, de nuevo, la hipótesis (7).

(9)⇒(7). Sea $\{x_n\}_{n<\omega}$ una sucesión acotada y no totalmente acotada en E. De nuevo, no existe pérdida de generalidad en suponer que, para algún número real positivo r,

$$\|x_n - x_m\| \geq r, \qquad \text{para todo } n \neq m$$

Esto es, la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ no tiene subsucesiones convergentes y, por tanto, $0 < inf\|x_n\| \leq sup\|x_n\| < \infty$. Si el conjunto $\{x_n\}_{n<\omega}$ no es relativamente débil compacto, entonces se aplica el Lema 4.3.1 y se obtiene una subsucesión $\{x_n^{(1)}\}_{n<\omega}$ que es una sucesión básica en E. Aplicando ahora la hipótesis (9), se consigue el resultado deseado.

Así pues, para finalizar la prueba, es suficiente demostrar que la suposición de que el conjunto $\{x_n\}_{n<\omega}$ es relativamente débil compacto lleva a contradicción. De hecho, por el teorema de Eberlein-Šmulian, la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$ debe contener una subsucesión débilmente convergente $\{x_n^{(1)}\}_{n<\omega}$. Sea x_0 su límite débil. Entonces, $\{x_0 - x_n^{(1)}\}_{n<\omega}$ es débilmente convergente a cero y, por la suposición hecha sobre la sucesión $\{x_n\}_{n<\omega}$, también se cumple que $0 < inf\|x_0 - x_n^{(1)}\| \leq sup\|x_0 - x_n^{(1)}\| < \infty$.

Se sigue, aplicando otra vez el Lema 4.3.1, que existe una subsucesión, $\{x_0 - x_n^{(2)}\}_{n<\omega}$, que es una sucesión básica. Por la hipótesis (9), esta subsucesión debe contener, a su vez, otra subsucesión, $\{x_0 - x_n^{(3)}\}_{n<\omega}$, equivalente a la base de unidades de ℓ^1. Sin embargo, esto es imposible porque $\{x_0 - x_n^{(3)}\}_{n<\omega}$ es débilmente convergente a cero. Y con esto termina la demostración.

Se ha probado que las condiciones (1)–(9) son equivalentes. Por tanto, la última parte del teorema se sigue de la condición (1) y [75, (1.6)]. □

Para concluir se mostrará un ejemplo relacionado con este Teorema 4.3.3.

Ejemplo 5 *Es conocido que el espacio ℓ^∞ no respeta la compacidad a pesar de* *contener una copia de* ℓ^1 *(ver [76]). El Teorema 4.3.3 sirve para comprender qué falla exactamente.*

Consideremos la sucesión (de sucesiones)

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0, ...)$
$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, ...)$
...
$\mathbf{e}_n = (0, ..., 1, ...)$
...

Entonces $\{\mathbf{e}_n\}_{n<\omega}$ *es una sucesión básica cuya envoltura lineal cerrada es* c_0*, el espacio de todas las sucesiones convergentes a* 0*.*

El espacio dual de c_0 *es* ℓ^1*, que es separable, mientras que el espacio dual de* ℓ^1 *es* ℓ^∞*, que no lo es. Es claro entonces que* c_0 *no puede contener ninguna copia de* ℓ^1*. Es decir, la afirmación (9) del Teorema 4.3.3 no es satisfecha.*

4.4. Sucesiones equivalentes a la base de ℓ^1

La presencia de copias de ℓ^1 situadas convenientemente garantiza la preservación de la compacidad en los grupos aditivos de los espacios de Banach (Teorema 4.3.3). Si se quiere generalizar esta caracterización a otras clases de grupos (metrizables) se necesita, en primer lugar, determinar qué significa encontrar una copia de ℓ^1 en ellos y, más concretamente, extender el significado de *equivalente a la base de* ℓ^1.

Definición 23 (Bourgain, [18]) *Se dice que un sistema* $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ *de funciones reales (o complejas)* 1*–acotadas sobre un conjunto* K *es* C–equivalente a la base de $\ell^1(\Lambda)$ *si se verifica que*

$$\sum_{i=1}^{n} |a_{\gamma_i}| \leq C \sup_{x\in K} \left| \sum_{i=1}^{n} a_{\gamma_i} f_{\gamma_i}(x) \right|,$$

para toda sucesión finita de escalares $a_{\gamma_1}, a_{\gamma_2}, \ldots, a_{\gamma_n}$.

Cuando G es un grupo topológico abeliano se dice que $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda} \subseteq G^\frown$ es equivalente a la base de $\ell^1(\Lambda)$ si existen un subconjunto compacto $K \subseteq G$ y una constante C tales que $\{f_\gamma\}_{\gamma\in\Lambda}$ es C–equivalente a la $\ell^1(\Lambda)$–base sobre el conjunto K.

De nuevo hay que tener presente el Lema 4.2.1, que ahora se puede enunciar como

Lema 4.4.1 (Rosenthal) *Sea X un espacio compacto y Hausdorff y sea $\{f_n\}_{n<\omega}$ una sucesión en $C_p(X, \mathbb{C})$ que no contiene ninguna subsucesión puntualmente convergente en $\mathbb{C}^X$. Entonces, existen un conjunto infinito $M \subseteq \omega$ y dos discos cerrados y disjuntos en $\mathbb{C}$, D_1 y D_2, tales que, para todas las subsucesiones $\{f_n : n \in J\}$ de $\{f_n : n \in M\}$ existe $x \in X$ con $f_n(x) \in D_1$, para todo $n \in J$, y $f_n(x) \in D_2$, para todo $n \in M \setminus J$.*

En particular, $\{f_n\}_{n\in J}$ es C–equivalente a la base de ℓ^1.

Para encontrar espacios donde el lema anterior pueda extenderse se necesita el siguiente lema técnico

Lema 4.4.2 *Sea (X,τ) un espacio topológico y sea $\{g_n\}_{n<\omega} \subseteq C(X,\tau)$ tal que es relativamente numerablemente compacto en $\mathbb{C}^X$. Si existe una sucesión $\{K_m\}_{m<\omega}$ de subconjuntos τ–compactos de X tal que para cada ϕ y ψ en $cl_{\mathbb{C}^X}\{g_n\}_{n<\omega}$ con*

$$\phi_{|\bigcup\limits_{n<\omega} K_n} = \psi_{|\bigcup\limits_{n<\omega} K_n}$$

se mantiene que $\phi = \psi$ sobre X entonces, o bien $\{g_n\}_{n<\omega}$ admite una subsucesión puntualmente Cauchy o bien existe un subconjunto τ–compacto K de X y una subsucesión $\{g_{n_j}\}_{j<\omega}$ tales que ésta no contiene subsucesiones puntualmente convergentes en $\mathbb{C}^K$.

Demostración. Sea $D = \bigcup\limits_{n<\omega} K_n$. Dado el conjunto compacto K_1, tomando las correspondientes restricciones, puede considerarse $\{g_n\}_{n<\omega}$ como subconjunto de $C(K_1,\tau)$ y, obviamente, $\{g_n\}_{n<\omega}$ debe ser relativamente numerablemente compacto, como subconjunto de $\mathbb{C}^{K_1}$. En general, se puede considerar que $\{g_n\}_{n<\omega}$ es un subconjunto relativamente numerablemente compacto de $\mathbb{C}^{K_1\cup\cdots\cup K_p}$, para todo $p<\omega$.

Supóngase que $\{g_n\}_{n<\omega}$ no tiene subsucesiones puntualmente Cauchy. Entonces, para algún $p<\omega$, ninguna subsucesión de $\{g_n\}_{n<\omega}$ es puntualmente convergente en $\mathbb{C}^{K_1\cup\cdots\cup K_p}$.

Si no fuera así, usando un argumento inductivo, es posible hallar, para cada $p<\omega$, una subsucesión de $\{g_n\}_{n<\omega}$, que se denotará por $\{g_n^{(p)}\}_{n<\omega}$, tal que

1. $\{g_n^{(p+1)}\}_{n<\omega}$ es una subsucesión de $\{g_n^{(p)}\}_{n<\omega}$, $p<\omega$, y

2. $\{g_n^{(p)}\}_{n<\omega}$ converge puntualmente a $f_p \in \mathbb{C}^{K_1\cup\cdots\cup K_p}$, $p<\omega$.

Además se verifica que ${f_{p+1}}_{|_{K_1\cup\cdots\cup K_p}} = f_p$, para todo $p < \omega$.

Tomando la subsucesión diagonal $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ se obtiene una sucesión que converge puntualmente a f_p on $K_1 \cup \cdots \cup K_p$, para todo $p < \omega$. Se define, entonces, $f : D \to \mathbb{K}$ como $f_{|K_1\cup\cdots\cup K_p} = f_p$, para todo $p < \omega$.

Ahora bien, es claro que $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ converge puntualmente a f sobre D. Por otra parte, $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ es una subsucesión de $\{g_n\}_{n<\omega}$, que es relativamente numerablemente compacto en $\mathbb{C}^X$; así que debe existir algún $g \in \mathbb{C}^X$ que es un punto de clausura de $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$. De aquí que $g(x)$ está en la clausura de $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n<\omega}$, para todo $x \in D$. Pero como $\{g_n^{(n)}(x)\}_{n<\omega}$ también converge a $f(x)$, se deduce que $f(x) = g(x)$ para todo $x \in D$. Por hipótesis, esto significa que g es el único punto de clausura de $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ en $\mathbb{C}^X$. Por tanto, $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ converge puntualmente a g en X. Pero esto contradice la suposición inicial porque, entonces, $\{g_n^{(n)}\}_{n<\omega}$ es una subsucesión de Cauchy de $\{g_n\}_{n<\omega}$.

En definitiva, puede suponerse que existe $p < \omega$ tal que ninguna subsucesión de $\{g_n\}_{n<\omega}$ es puntualmente convergente sobre $\mathbb{C}^{K_1\cup\cdots\cup K_p}$. La prueba se completa tomando $K = K_1 \cup \cdots \cup K_p$. $\square$

Los siguientes corolarios proporcionan varias clases de espacios donde el lema de Rosenthal es cierto. En lo que sigue E representará un espacio vectorial topológico localmente convexo y E' el espacio dual. $\sigma(E, E')$ denotará la topología débil de la dualidad $\langle E, E'\rangle$; es decir, la topología localmente convexa menos fina compatible con la dualidad. Por otra parte, $\tau(E, E')$ denotará la topología de Mackey; es decir, la topología localmente convexa más fina compatible (véase [63]).

Corolario 4.4.3 *Sea (E, τ) un espacio localmente convexo, tal que τ es más fina que una topología vectorial metrizable τ_m. Si $A = \{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión* *acotada de E tal que*

$$cl_{(E'',\sigma(E'',E'))}(A-A)\bigcap((E,\tau_m)')^{\perp}=\{0\}$$

entonces, o bien $\{x_n\}_{n<\omega}$ contiene una subsucesión débilmente Cauchy o bien $\{x_n\}_{n<\omega}$ contiene una subsucesión que no tiene subsucesiones puntualmente convergentes en $\mathbb{C}^{E'}$ y equivalente a la base de ℓ^1.

Demostración. Como τ_m es metrizable y menos fina que τ, se sigue que $(E,\tau_m)' \subseteq (E,\tau)'$ y que $(E,\tau_m)' = \bigcup_{n<\omega} K_n$, siendo K_n $\sigma(E',E)$–compacto para todo $n<\omega$. Por tanto, es suficiente aplicar los Lemas 4.4.1 y 4.4.2 al espacio topológico $(E',\sigma(E',E))$ y a la sucesión de $\sigma(E',E)$–funciones continuas $\{x_n\}_{n<\omega}$. De hecho, como $\{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión acotada, se sigue que es un subconjunto relativamente numerablemente compacto de $(E'',\sigma(E'',E'))$ (véase [64] §23.2 (4)). Por otra parte, supóngase que ϕ y ψ están en $cl_{\mathbb{C}^{E'}}\{x_n\}_{n<\omega}$ con $\phi_{|\cup_{n<\omega}K_n} = \psi_{|\cup_{n<\omega}K_n}$. Entonces,

$$\phi-\psi\in cl_{(E'',\sigma(E'',E'))}(A-A)\bigcap((E,\tau_m)')^{\perp}=\{0\}$$

y, por hipótesis, $\phi=\psi$ sobre E'. □

Como consecuencia, se obtienen nuevos espacios donde el lema de Rosenthal puede ser aplicado. Un espacio localmente convexo (E,τ) se dice de *generación numerablemente débilmente compacta* si contiene una sucesión de subconjuntos compactos y absolutamente convexos $\{K_n\}_{n<\omega}$ cuya unión es densa en E. Ahora, sea (E,τ) un espacio vectorial localmente convexo tal que $(E',\sigma(E',E))$ es de generación numerablemente débilmente compacta. Se demuestra en [56] que $E=(E',\sigma(E',E))'$ contiene una topología metrizable menos fina que la topología Mackey, $\tau(E,E')$. Teniendo en cuenta que el espacio bidual E'' es el mismo para (E, τ) y $(E, \tau(E, E'))$, el Corolario 4.4.3 se aplica para obtener que si $A = \{x_n\}_{n<\omega}$ es una sucesión acotada de E tal que

$$cl_{(E'',\sigma(E'',E'))}(A - A) \bigcap ((E, \tau_m)')^{\perp} = \{0\}$$

entonces, o bien $\{x_n\}_{n<\omega}$ contiene una subsucesión débil Cauchy o bien $\{x_n\}_{n<\omega}$ contiene una subsucesión sin subsucesiones puntualmente convergentes en $\mathbb{C}^{E'}$ y equivalente a la base de ℓ^1.

La misma prueba del Corolario 4.4.3 se aplica al resultado siguiente

Corolario 4.4.4 *Sea (G, τ) un grupo localmente quasi–convexo, tal que τ es más fina que una topología de grupo metrizable τ_m. Si $A = \{x_n\}_{n<\omega}$ es cualquier sucesión de G tal que*

$$cl_{(bG,w(bG,G^\frown))}(A - A) \bigcap ((G, \tau_m)^\frown)^{\perp} = \{0\}$$

entonces, o bien $\{x_n\}_{n<\omega}$ contiene una subsucesión Bohr Cauchy o bien $\{x_n\}_{n<\omega}$ contiene una subsucesión sin subsucesiones puntualmente convergentes en $\mathbb{T}^{G^\frown}$ y equivalente a la base de ℓ^1.

Para los g–grupos completos el Teorema 3.3.5 caracteriza la preservación de la compacidad por la existencia, en cada subconjunto no totalmente acotado, de un subconjunto discreto y C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$. Para grupos metrizables y reflexivos, es el Teorema 4.2.2 el que establece la caracterización mediante la existencia de subconjuntos discretos y C^*–sumergidos en bG. Aplicando los resultados anteriores se obtiene, como consecuencia del siguiente teorema, que para g–grupos completos y metrizables pueden unificarse ambos resultados.

Teorema 4.4.5 *Sea (G,τ) un g–grupo y supóngase que τ contiene una topología de grupo metrizable τ_m. El grupo (G,τ) respeta la compacidad si, y sólo si, para cada subconjunto no totalmente acotado A de G con*

$$cl_{(bG,w(bG,G^\frown))}(A-A)\bigcap((G,\tau_m)^\frown)^\perp=\{0\}$$

existe un subconjunto $B\subseteq A$ que es C^*–sumergido en bG. Más aún, B es equivalente a la base de ℓ^1.

Demostración. Supóngase que A no es totalmente acotado en (G,τ) y $cl_{(bG,w(bG,G^\frown))}(A-A)\bigcap((G,\tau_m)^\frown)^\perp=\{0\}$

Entonces, por el Lema 3.3.1, existen una sucesión $\{a_n\}_{n<\omega}\subseteq A$ y un entorno U tales que

$$(a_n+U)\bigcap(a_m+U)=\emptyset,\quad n\neq m$$

Como (G,τ) respeta la compacidad, se sigue que ninguna subsucesión de $\{a_{n_j}\}_{j<\omega}$ es una subsucesión puntualmente de Cauchy. Si no fuera así, se obtendría que $\{a_{n_j}-a_{n_{2j}}\}_{j<\omega}$ es puntualmente convergente a e_G. Por tanto, como el grupo respeta la compacidad, la sucesión $\{a_{n_j}-a_{n_{2j}}\}_{j<\omega}$ también sería τ-convergente, lo cual es imposible. Ahora, se considera $\{a_n\}_{n<\omega}$ como una sucesión de funciones continuas definidas sobre el grupo $(G^\frown,\tau_{co})$. Como G admite una topología metrizable τ_m, menos fina que τ, puede argumentarse como en el Corolario 4.4.3 anterior, reemplazando los espacios vectoriales topológicos $(E,\tau)'$ y $(E,\tau_m)'$ por los grupos topológicos $(G,\tau)^\frown$ y $(G,\tau_m)^\frown$, para verificar que las hipótesis del Lema 4.4.2 se satisfacen. Entonces, es suficiente aplicar de nuevo los Lemas 4.4.2 y 4.4.1 para completar la prueba.

Recíprocamente, supóngase que A es un subconjunto $\sigma(G^\frown)$–compacto de G. Si A es totalmente acotado en (G,τ) entonces $cl_{\overline{G}}A$ es un compacto en la compleción $(\overline{G}, \overline{\tau})$ y A es un subconjunto $\sigma(G^\frown)$–cerrado de bG. De aquí que A es $\sigma(G^\frown)$–cerrado en $\overline{G}$ y, en consecuencia, $A = cl_{\overline{G}}A$ es compacto en (G, τ).

Sólo falta demostrar que la suposición de que A no sea totalmente acotado en (G, τ) lleva a una contradicción. De hecho, si A no es totalmente acotado entonces, para algún entorno U existe una sucesión $\{a_n\}_{n<\omega} \subseteq A$ tal que

$$(a_n + U) \bigcap (a_m + U) = \emptyset, \quad \text{for } n \neq m$$

Como τ_m es una topología Hausdorff sobre G, se sigue que $G \bigcap ((G, \tau_m)^\frown)^\perp = \{0\}$ y por ello, $(A - A) \bigcap ((G, \tau_m)^\frown)^\perp = \{0\}$. Más aún, la compacidad de $A - A$ implica que $cl_{(bG, w(bG, G^\frown))}(A - A) \bigcap ((G, \tau_m)^\frown)^\perp = \{0\}$ Por el Corolario 4.4.4 y teniendo en cuenta la compacidad de A, se obtiene una subsucesión, $\{b_n\}_{n<\omega}$, que converge a algún punto de bG. Por tanto, $\{b_n\}_{n<\omega}$, como subconjunto de G, es no totalmente acotado en (G, τ) pero ninguna subsucesión suya puede ser C^*–sumergida en bG. Esto es una contradicción. □

Corolario 4.4.6 *Sea (G, τ) un g–grupo completo donde τ es una topología de grupo metrizable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G respeta la compacidad;*

2. *Para cada subconjunto no totalmente acotado A de G existe un subconjunto $B \subseteq A$ discreto, C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$ y C^*–sumergido en bG y equivalente a la ℓ^1–base.*

Demostración. La suficiencia se sigue del Teorema 3.3.5.

Para demostrar la necesidad, supóngase que A es no totalmente acotado en (G, τ). Entonces existen una sucesión $\{a_n\}_{n<\omega} \subset A$ y un entorno U del elemento neutro de G tales que

$$(a_n + U) \cap (a_m + U) = \emptyset, \quad n \neq m$$

Como (G, τ) es un g-grupo completo que respeta la compacidad, se sigue del Teorema 3.3.5 que existe una subsucesión $\{b_n\}_{n<\omega}$ de $\{a_n\}_{n<\omega}$ que es discreta y C-sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$. Ahora, se aplica el Teorema 4.4.5 a la a sucesión $\{b_n\}_{n<\omega}$, teniendo en cuenta el hecho de que τ es ya una topología metrizable y, por tanto, el anulador de $(G, \tau)^\frown$ en $(bG, \sigma(bG, G^\frown))$ consiste únicamente del elemento neutro de bG. De aquí se obtiene una subsucesión $\{c_n\}_{n<\omega}$ de $\{b_n\}_{n<\omega}$ que es C^*-sumergida en bG y equivalente a la ℓ^1-base. De esta forma la prueba queda completada. □

Finalmente, las hipótesis de metrizabilidad y completitud pueden suavizarse por la de ser Čech–completo

Definición 24 *Un grupo topológico* (G, τ) *se dice* casi-metrizable *si para cada* $x \in G$ *existe un subconjunto compacto* $K \subset G$ *que contiene a* x *tal que la familia de todos los entornos de* K *tiene una base numerable (véase [78] y [72]; A.V. Arkhangel'skii [4] utiliza el nombre de "espacio de tipo puntualmente numerable").*

El lema siguiente puede encontrarse en [78], Remark 13.19 (c).

Lema 4.4.7 *Un grupo topológico* (G, τ) *es casi–metrizable si, y sólo si, existe un subgrupo compacto* K *tal que* $(G/K, \tau/K)$ *es metrizable.*

Es conocido que cada grupo Čech–completo es casi–metrizable y, recíprocamente, los grupos completos casi–metrizables son Čech–completos (véase [78]).

Más aún , si (G, τ) es un grupo Čech–completo, entonces el grupo $(G/K, \tau/K)$ del lema anterior es metrizable y completo.

Como una consecuencia inmediata de estos resultados, puede verificarse fácilmente que la caracterización dada en el Corolario 4.4.6 se extiende a los grupos casi–metrizables.

Teorema 4.4.8 *Sea (G, τ) un g–grupo Čech–completo. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *G respeta la compacidad;*

2. *Para cada subconjunto no totalmente acotado A de G existe un subconjunto $B \subseteq A$ discreto y C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$, C^*–sumergido en bG y equivalente a la ℓ^1–base.*

Demostración. Nótese que (2) implica (1) está hecho en el Teorema 3.3.5, en la implicación (e) $\Rightarrow$ (a).

Recíprocamente, supóngase que G respeta la compacidad. Si $\pi : G \to G/K$ es la aplicación cociente canónica, con K un subgrupo compacto de G, entonces $A \subseteq G$ es compacto (respectivamente totalmente acotado) si, y sólo si, $\pi(A)$ es compacto (respectivamente totalmente acotado) en G/K. Más aún, como K es compacto, es fácil verificar que G/K también respeta la compacidad. Ahora, si A es un subconjunto no totalmente acotado de G entonces, para algún entorno U, existe una sucesión $\{a_n\}_{n<\omega}$ tal que

$$(a_n + U) \cap (a_m + U) = \emptyset, \quad \text{para todo } n \neq m$$

Cada grupo Čech–completo es completo(véase [78]), por tanto, el Teorema 3.3.5 puede aplicarse a G obteniendo una subsucesión $\{b_n\}_{n<\omega}$, de $\{a_n\}_{n<\omega}$, que es C–sumergida en $(G, \sigma(G^\frown))$. Por otra parte, la sucesión $\{\pi(b_n)\}_{n<\omega}$ es un subconjunto no totalmente acotado de G/K, que es un grupo metrizable que respeta la compacidad, así que contiene a una subsucesión $\{\pi(c_n)\}_{n<\omega}$ que es C^*–sumergida en $b(G/K)$ $(= bG/K)$ y equivalente a la ℓ^1–base. Si se toma un representante c_n de cada clase $\pi(c_n)$ se obtiene $\{c_n\}_{n<\omega}$, una subsucesión de $\{a_n\}_{n<\omega}$, que es C^*–sumergido en bG y equivalente a la ℓ^1–base. □

De todos estos resultados se deduce que la preservación de la compacidad está relacionada con la existencia de subconjuntos discretos que son C–sumergidos en $(G, \sigma(G^\frown))$ y C^*–sumergidos en bG. Estos resultados están conectados con el siguiente teorema de van Douwen [95]

Teorema 4.4.9 (van Douwen) *Sea G un grupo abeliano discreto y sea A un subconjunto infinito de G. Entonces, existe un subconjunto B de A, con $|B| = |A|$, tal que B es discreto y C^*-sumergido en bG y C-sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$.*

Se dice que un grupo (G, τ) *satisface la propiedad de van Douwen* cuando para cada subconjunto no totalmente acotado A de G existe un subconjunto $B \subseteq A$ discreto, C–sumergido en $(G, \sigma(G^\frown))$ y C^*–sumergido en bG. En [36] se prueba, entre otras, que cada grupo localmente compacto y abeliano satisface la propiedad de van Douwen. Banaszczyk y Martín–Peinador han extendido a la clase de los grupos nucleares varios resultados que se verifican para los grupos localmente compactos y abelianos, por ejemplo el teorema de Glicksberg en [8], el teorema de Bochner en [10]. Con los resultados anteriores se puede extender el teorema de van Douwen en la siguiente forma:

Teorema 4.4.10 *Cada grupo nuclear casi–metrizable satisface la propiedad de van Douwen.*

Demostración. Sea (G, τ) un grupo nuclear casi–metrizable. Entonces su complección $(\overline{G}, \overline{\tau})$ es también nuclear (véase [6], Corollary 21.4) y por [8] respeta la compacidad. Así, el Teorema 4.4.8 puede ser aplicado y la prueba está terminada. □

El teorema anterior puede generalizarse, utilizando el resultado de Aussenhofer mencionado en el capítulo 1 como Teorema 1.5.3.

Teorema 4.4.11 *Sea (G, τ) un grupo nuclear. Entonces G satisface la propiedad de van Douwen.*

Demostración. Sea G un grupo nuclear. Por el Teorema 1.5.3, G se sumerge en un producto $\prod_{i \in I} G_i$ de grupos nucleares metrizables y completos. Se identifica, entonces, G con un subgrupo del producto $\prod_{i \in I} G_i$. Sea ahora A un subconjunto no totalmente acotado de G. Debe existir un $i_0 \in I$ de forma que $\pi_{i_0}(A)$ es no totalmente acotado en G_{i_0}, donde π_{i_0} es la correspondiente proyección canónica. Con el Lema 3.3.1 se determina una sucesión $\{b_n\}_{n<\omega} \subset \pi_{i_0}(A)$ no totalmente acotada. Puesto que el grupo G_{i_0} es nuclear, metrizable y completo, entonces se aplica el Teorema 4.4.8 y se deduce la existencia de una subsucesión, que se seguirá denotando por $\{b_n\}_{n<\omega}$, sin pérdida de generalidad, que es discreta, C^*–sumergida en bG_{i_0} y C–sumergida en $(G_{i_0}, \sigma(G_{i_0}\widehat{\ }))$.

Para cada $n < \omega$, se determina un único $a_n \in G$ con $\pi_{i_0}(a_n) = b_n$. Sea ahora una función $f : \{a_n\} \longrightarrow \mathbb{R}$. Se define entonces $g : \{b_n\} \longrightarrow \mathbb{R}$ por $g(b_n) = f(a_n)$.

Si f es continua para la topología $\sigma(G\widehat{\ })$, entonces, siendo $\{b_n\}_{n<\omega}$ discreta, g es continua para $\sigma(G_{i_0}\widehat{\ })$ y, en consecuencia, se extiende a una función $G : G_{i_0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Basta tomar entonces $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F = G \circ \pi_{i_0}$ para obtener que $\{a_n\}$ está C–sumergido en $(G, \sigma(G\widehat{\ }))$.

Si f es continua y acotada para la topología $\sigma(G^\frown)$, entonces g es continua y acotada para $\sigma(G_{i_0}{}^\frown)$ y, en consecuencia, se extiende a una función $G : bG_{i_0} \longrightarrow \mathbb{R}$. Basta tomar entonces $F : G \longrightarrow \mathbb{R}$ como $F = bG \circ \pi^b_{i_0}$ para obtener que $\{a_n\}$ está C^*–sumergida en bG. $\square$

Bibliografía

[1] Erik M. Alfsen and Per Holm. A note on compact representations and almost periodicity in topological groups. *Math. Scand.*, 10:127–136, 1962.

[2] Hirotada Anzai and Shizuo Kakutani. Bohr compactifications of a locally compact Abelian group. I. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 19:476–480, 1943.

[3] Hirotada Anzai and Shizuo Kakutani. Bohr compactifications of a locally compact Abelian group. II. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 19:533–539, 1943.

[4] A. Arhangel′skiĭ. On a class of spaces containing all metric and all locally bicompact spaces. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 151:751–754, 1963.

[5] A. V. Arhangel′skiĭ. Functional tightness, Q-spaces and τ-embeddings. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 24(1):105–120, 1983.

[6] L. Aussenhofer. *Contributions to the duality theory of abelian topological groups and to the theory of nuclear groups.* PhD thesis, Eberhard-Karls Universität Tübingen, 1998.

[7] P. Azimi and J.Ñ. Hagler. Examples of hereditarily l^1 Banach spaces failing the Schur property. *Pacific J. Math.*, 122(2):287–297, 1986.

[8] W. Banaszczyk and E. Martín-Peinador. The Glicksberg theorem on weakly compact sets for nuclear groups. In *Papers on general topology and applications (Amsterdam, 1994)*, pages 34–39. New York Acad. Sci., New York, 1996.

[9] W. Banaszczyk and E. Martín-Peinador. Weakly pseudocompact subsets of nuclear groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 138(2):99–106, 1999.

[10] Wojciech Banaszczyk. *Additive subgroups of topological vector spaces.* Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[11] Christian Berg. Introduction to the almost periodic functions of Bohr. *Mat.-Fys. Medd. Danske Vid. Selsk.*, 42(3):15–24, 1989. The Harald Bohr Centenary (Copenhagen, 1987).

[12] Klaus Bichteler. Locally compact topologies on a group and the corresponding continuous irreducible representations. *Pacific J. Math.*, 31:583–593, 1969.

[13] Robert L. Blair. Spaces in which special sets are z-embedded. *Canad. J. Math.*, 28(4):673–690, 1976.

[14] Harald Bohr. Zur theorie der fast periodischen funktionen I. *Acta Math.*, 45:29–127, 1924.

[15] Harald Bohr. Zur theorie der fast periodischen funktionen II. *Acta Math.*, 46:101–214, 1925.

[16] Harald Bohr. Zur theorie der fast periodischen funktionen III. *Acta Math.*, 47:237–281, 1926.

[17] N. Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale*. Hermann, Paris, 1971.

[18] J. Bourgain. l^1 sequences generated by Sidon sets. *J. London Math. Soc. (2)*, 29(2):283–288, 1984.

[19] M. Bruguera, M. J. Chasco, E. Martín-Peinador, and V. Tarieladze. Completeness properties of locally quasi-convex groups. *Topology Appl.*, 111(1-2):81–93, 2001.

[20] M. J. Chasco. Pontryagin duality for metrizable groups. *Arch. Math. (Basel)*, 70(1):22–28, 1998.

[21] M. J. Chasco, E. Martín-Peinador, and V. Tarieladze. On Mackey topology for groups. *Studia Math.*, 132(3):257–284, 1999.

[22] W. W. Comfort, Salvador Hernández, and F. Javier Trigos-Arrieta. Relating a locally compact abelian group to its Bohr compactification. *Adv. Math.*, 120(2):322–344, 1996.

[23] W. W. Comfort and Dieter Remus. Compact groups of Ulam-measurable cardinality: partial converses to theorems of Arhangel′skiĭ and Varopoulos. *Math. Japon.*, 39(2):203–210, 1994.

[24] W. W. Comfort and K. A. Ross. Topologies induced by groups of characters. *Fund. Math.*, 55:283–291, 1964.

[25] W. W. Comfort, F. Javier Trigos-Arrieta, and Ta Sun Wu. The Bohr compactification, modulo a metrizable subgroup. *Fund. Math.*, 143(2):119–136, 1993.

[26] H. H. Corson. The weak topology of a Banach space. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 101:1–15, 1961.

[27] H. H. Corson and I. Glicksberg. Compactness in Hom(G, H). *Canad. J. Math.*, 22:164–170, 1970.

[28] Joseph Diestel. *Sequences and series in Banach spaces.* Springer-Verlag, New York, 1984.

[29] Leonard E. Dor. On sequences spanning a complex l_1 space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 47:515–516, 1975.

[30] W. F. Eberlein. Weak compactness in Banach spaces. I. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 33, 1947.

[31] Ryszard Engelking. *General topology.* Heldermann Verlag, Berlin, second edition, 1989. Translated from the Polish by the author.

[32] J. Farahat. Espaces de Banach contenant l^1, d'après H. P. Rosenthal. In *Espaces L^p, applications radonifiantes et géométrie des espaces de Banach, Exp. No. 26*, page 6. Centre de Math., École Polytech., Paris, 1974.

[33] László Fuchs. *Infinite abelian groups. Vol. I.* Academic Press, New York, 1970.

[34] J. Galindo. *Acotaciones y topologías débiles sobre grupos abelianos maximalmente casi periódicos.* PhD thesis, Universitat Jaume I, Castelló, 1998.

[35] Jorge Galindo. Structure and analysis on nuclear groups. *Houston J. Math.*, 26(2):315–334, 2000.

[36] Jorge Galindo and Salvador Hernández. The concept of boundedness and the Bohr compactification of a MAP abelian group. *Fund. Math.*, 159(3):195–218, 1999.

[37] Jorge Galindo and Salvador Hernández. Pontryagin-van Kampen reflexivity for free abelian topological groups. *Forum Math.*, 11(4):399–415, 1999.

[38] Leonard Gillman and Meyer Jerison. *Rings of continuous functions.* Springer-Verlag, New York, 1976. Reprint of the 1960 edition, Graduate Texts in Mathematics, No. 43.

[39] Irving Glicksberg. Uniform boundedness for groups. *Canad. J. Math.*, 14:269–276, 1962.

[40] A. Grothendieck. Critères de compacité dans les espaces fonctionnels généraux. *Amer. J. Math.*, 74:168–186, 1952.

[41] Alexandre Grothendieck. Sur la complétion du dual d'un espace vectoriel localement convexe. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 230:605–606, 1950.

[42] S. Hartman and C. Ryll-Nardzewski. Almost periodic extensions of functions. *Colloq. Math.*, 12:23–39, 1964.

[43] S. Hartman and C. Ryll-Nardzewski. Almost periodic extensions of functions. II. *Colloq. Math.*, 15:79–86, 1966.

[44] S. Hartman and C. Ryll-Nardzewski. Almost periodic extensions of functions. III. *Colloq. Math.*, 16:223–224, 1967.

[45] Henry Helson. Fourier transforms on perfect sets. *Studia Math.*, 14:209–213 (1955), 1954.

[46] Salvador Hernández. The dimension of an LCA group in its Bohr topology. *Topology Appl.*, 86(1):63–67, 1998. Special issue on topological groups.

[47] Salvador Hernández. Pontryagin duality for topological abelian groups. *Math. Z.*, 238(3):493–503, 2001.

[48] Salvador Hernández, Jorge Galindo, and Sergio Macario. A characterization of the Schur property by means of the Bohr topology. *Topology Appl.*, 97(1-2):99–108, 1999. Special issue in honor of W. W. Comfort (Curacao, 1996).

[49] Salvador Hernández and Sergio Macario. Dual properties of totally bounded groups. To appear in Archiv der Mathematik.

[50] Salvador Hernández and Sergio Macario. Invariance of compactness for the Bohr topology. *Topology Appl.*, 111(1-2):161–173, 2001.

[51] Salvador Hernández and Vladimir Uspenskiĭ. Pontryagin duality for spaces of continuous functions. *J. Math. Anal. Appl.*, 242(2):135–144, 2000.

[52] Edwin Hewitt and Kenneth A. Ross. *Abstract harmonic analysis. Vol. I.* Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1979.

[53] Edwin Hewitt and H. S. Zuckerman. A group-theoretic method in approximation theory. *Ann. of Math. (2)*, 52:557–567, 1950.

[54] Herbert Heyer. *Dualität lokalkompakter Gruppen.* Springer-Verlag, Berlin, 1970.

[55] Ralph Hughes. Compactness in locally compact groups. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 79:122–123, 1973.

[56] Richard J. Hunter and John Lloyd. Weakly compactly generated locally convex spaces. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 82(1):85–98, 1977.

[57] Miroslav Hušek. Mazur-like topological linear spaces and their products. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 38(1):157–164, 1997.

[58] J. R. Isbell. Mazur's theorem. In *General Topology and its Relations to Modern Analysis and Algebra (Proc. Sympos., Prague, 1961)*, pages 221–225. Academic Press, New York, 1962.

[59] I. M. James, editor. *History of topology.* North-Holland, Amsterdam, 1999.

[60] Shizuo Kakutani. Free topological groups and infinite direct product topological groups. *Proc. Imp. Acad. Tokyo*, 20:595–598, 1944.

[61] Samuel Kaplan. Extensions of the Pontrjagin duality. I. Infinite products. *Duke Math. J.*, 15:649–658, 1948.

[62] Samuel Kaplan. Extensions of the Pontrjagin duality. II. Direct and inverse sequences. *Duke Math. J.*, 17:419–435, 1950.

[63] Gottfried Köthe. *Topological vector spaces. I.* Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.

[64] Gottfried Köthe. *Topological vector spaces. II.* Springer-Verlag, New York, 1979.

[65] Seung-Hyeok Kye. Pontryagin duality in real linear topological spaces. *Chinese J. Math.*, 12(2):129–136, 1984.

[66] Horst Leptin. Abelsche Gruppen mit kompakten Charaktergruppen und Dualitätstheorie gewisser linear topologischer abelscher Gruppen. *Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg*, 19:244–263, 1955.

[67] W. Moran. On almost periodic compactifications of locally compact groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 3:507–512, 1971.

[68] Martin Moskowitz. Uniform boundedness for nonabelian groups. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 97(1):107–110, 1985.

[69] S. Mrówka. On the form of certain functionals. *Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III.*, 5:1061–1067, LXXXVIII, 1957.

[70] I.Ñamioka. Separate continuity and joint continuity. *Pacific J. Math.*, 51:515–531, 1974.

[71] Norman Noble. k-groups and duality. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 151:551–561, 1970.

[72] B. A. Pasynkov. Almost-metrizable topological groups. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 161:281–284, 1965. traducido al inglés en Soviet Math. Dokl. 7 (1966), 404–408].

[73] V. G. Pestov. Free topological abelian groups and Pontryagin's duality. *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.*, (1):3–5, 91, 1986.

[74] L. Pontryagin. The theory of topological conmutative groups. *Annals of Math.*, 35(2):361–388, 1934.

[75] Dieter Remus and F. Javier Trigos-Arrieta. Abelian groups which satisfy Pontryagin duality need not respect compactness. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 117(4):1195–1200, 1993.

[76] Dieter Remus and F. Javier Trigos-Arrieta. Locally convex spaces as subgroups of products of locally compact abelian groups. *Math. Japon.*, 46(2):217–222, 1997.

[77] A. P. Robertson and Wendy Robertson. *Topological vector spaces*. Cambridge University Press, London, second edition, 1973. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 53.

[78] Walter Roelcke and Susanne Dierolf. *Uniform structures on topological groups and their quotients*. McGraw-Hill International Book Co., New York, 1981. Advanced Book Program.

[79] Haskell P. Rosenthal. A characterization of Banach spaces containing l^1. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 71:2411–2413, 1974.

[80] Kenneth A. Ross and Karl Stromberg. Baire sets and Baire measures. *Ark. Mat.*, 6:151–160 (1965), 1965.

[81] S. J. Sidney. Weakly dense subgroups of Banach spaces. *Indiana Univ. Math. J.*, 26(6):981–986, 1977.

[82] W. Sierpińsky. Sur une propieté topologique des ensembles dénomerables denses en soi. *Fund. Math.*, pages 11–16, 1937.

[83] Ivan Singer. *Bases in Banach spaces. II.* Editura Academiei Republicii Socialiste România, Bucharest, 1981.

[84] Marianne Freundlich Smith. The Pontrjagin duality theorem in linear spaces. *Ann. of Math. (2)*, 56:248–253, 1952.

[85] V. Šmulian. Über lineare topologische Räume. *Rec. Math. [Mat. Sbornik] N. S.*, 7 (49), 1940.

[86] L. J. Sulley. On countable inductive limits of locally compact abelian groups. *J. London Math. Soc. (2)*, 5:629–637, 1972.

[87] F. Javier Trigos-Arrieta. Continuity, boundedness, connectedness and the Lindelöf property for topological groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 70(1-2):199–210, 1991.

[88] F. Javier Trigos-Arrieta. *Pseudocompactness on groups.* PhD thesis, Wesleyan University, Middletown, Connecticut, 1991.

[89] F. Javier Trigos-Arrieta. Normality and the weak topology on a locally compact abelian group. In *Papers on general topology and applications (Flushing, NY, 1992)*, pages 290–295. New York Acad. Sci., New York, 1994.

[90] J. P. Troallic. Sequential criteria for equicontinuity and uniformities on topological groups. *Topology Appl.*, 68(1):83–95, 1996.

[91] V. V. Uspenskiĭ. A characterization of realcompactness in terms of the topology of pointwise convergence on the function space. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 24(1):121–126, 1983.

[92] V. V. Uspenskiĭ. Real–valued measurable cardinals and sequentially continuous homomorphisms. 1993. Preprint.

[93] Manuel Valdivia. Some new results on weak compactness. *J. Functional Analysis*, 24(1):1–10, 1977.

[94] Manuel Valdivia. *Topics in locally convex spaces.* North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1982. Notas de Matemática [Mathematical Notes], 85.

[95] Eric K. van Douwen. The maximal totally bounded group topology on G and the biggest minimal G-space, for abelian groups G. *Topology Appl.*, 34(1):69–91, 1990.

[96] E. R. van Kampen. Locally bicompact abelian groups and their character groups. *Annals of Math.*, 36(2):448–463, 1935.

[97] N. Th. Varopoulos. Studies in harmonic analysis. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60:465–516, 1964.

[98] N. Th. Varopoulos. A theorem on the continuity of homomorphisms of locally compact groups. *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 60:449–463, 1964.

[99] Rangachari Venkataraman. A characterization of Pontryagin duality. *Math. Z.*, 149(2):109–119, 1976.

[100] J. von Neumann. Almost periodic functions in a group I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 36:445–492, 1934.

[101] André Weil. *Sur les Espaces à Structure Uniformeet sur la Topologie Générale*. Publ. Math. Univ. Strasbourg. Hermann, Paris, 1937.

[102] André Weil. *L'intègration dans les groupes topologiques et ses applications*. Hermann et Cie., Paris, 1940. [This book has been republished by the author at Princeton, N. J., 1941.].

[103] H. Weyl and F. Peter. Die vollständigkeit der primitiven darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen gruppe. *Math. Ann.*, 97:737–755, 1927. Reprinted in Abhandlungen 3, 58–75.

[104] Robert F. Wheeler. Weak and pointwise compactness in the space of bounded continuous functions. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 266(2):515–530, 1981.

[105] Albert Wilansky. Mazur spaces. *Internat. J. Math. Math. Sci.*, 4(1):39–53, 1981.