UNIVERSITAT JAUME • I

IMPORTANCIA DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS PREVIOS DE LOS ESTUDIANTES PARA EL APRENDIZAJE DE LA DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN LAS TITULACIONES DE MAESTRO EN LA UNIVERSITAT JAUME I

TESIS DOCTORAL

Presentada por: Manuel Alcalde Esteban

Dirigida por: Dra. María Reina Ferrández Berrueco

ÀREA DE DIDÀCTICA DE LA MATEMÀTICA
DEPARTAMENT D'EDUCACIÓ, UNIVERSITAT JAUME I
Castelló de la Plana, 2.010

AGRADECIMIENTOS

Quisiera desde estas líneas dejar constancia de mi agradecimiento a todas las personas que han contribuido, de alguna manera, a que pudiera realizar el trabajo que aquí se expone.

A mi directora, la Doctora D.ª María Reina Ferrández Berrueco, por todo lo que ha hecho, sin cuya ayuda esta tesis doctoral no habría sido posible.

A mis compañeros de Área en la Universitat Jaume I (UJI), particularmente a Inmaculada Pérez Serrano y Gil Lorenzo Valentín.

A mis compañeros del Departament d'Educació, y a los dos equipos directivos del mismo en el periodo de realización de la tesis, así como a las compañeras de administración del Departament, por la ayuda y las facilidades ofrecidas para que pudiera llevarla a término.

A los estudiantes de la Diplomatura de Maestro de la UJI de la promoción 2.001 a 2.004, muy especialmente a los asistentes al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* impartido en septiembre de 2.002, sin cuyos datos «matemáticos» no habría sido posible esta tesis.

A la UJI por las posibilidades otorgadas para poder desarrollar este trabajo.

Al departamento de Mètodes d'Investigació i Diagnòstic en Educació de la Universitat de València-Estudi General, en particular a quienes ocuparon su dirección en el año sabático que allí realicé, Dr. D. José

González Such y Dra. D.ª Natividad Orellana Alonso, y muy especialmente al Dr. D. Jesús M. Jornet Meliá investigador principal del Proyecto AVACO.

A mi familia y a los amigos que me han animado en este camino.

A todos, y que me disculpen los que no he citado, a todos, muchas gracias.

A mis padres Germán y Rufi,

a mi hermana Gloria,

a mis hijos María y David,

y a Tere.

ÍNDICE

ANEXOS (en CD adjunto)

INTRODUCCIÓN

Quien presenta esta tesis doctoral es profesor del Área de Didáctica de la Matemática en la Universitat Jaume I desde la creación de la UJI, desarrollando su labor docente en la Diplomatura de Maestro, comprobando personalmente en los últimos años la insatisfactoria preparación matemática con que llegan a la universidad los futuros maestros y conociendo sus malos resultados en las asignaturas de didáctica de la matemática, razones por las que presentó un proyecto a la convocatoria de *Projectes de millora educativa* del curso 2.001-2.002, dentro del programa de *Formació Permanent del Professorat* de la *Unitat de Suport Educatiu* (USE) de la UJI, para conocer el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI.

Este proyecto se reformó bajo la dirección de la Dra. María Reina Ferrández Berrueco y se presentó en el año 2.003 como Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado al que pertenece esta tesis doctoral, siendo entonces cuando con la Dra. Ferrández procedimos al planteamiento y diseño de la investigación que nos permita conocer la «Importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la Didáctica de la Matemática en las titulaciones de Maestro en la UJI».

La redacción de la tesis doctoral se ha estructurado en cuatro partes y ocho capítulos que resumimos a continuación.

En la Primera Parte (capítulos 1, 2 y 3) hacemos una fundamentación teórica sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Presentaremos en el Capítulo 1 los Principios para una educación matemática de calidad y las acciones y responsabilidades para su realización por las diferentes partes del sistema educativo.

En el Capítulo 2 nos interesaremos por el alumno como sujeto cognitivo que ha de aprender matemáticas, veremos qué es aprender contenidos matemáticos y nos aproximaremos a teorías generales del aprendizaje aplicables al de las matemáticas y a teorías específicamente interesadas por el aprendizaje de las matemáticas.

Mostraremos en el Capítulo 3 los contenidos curriculares de matemáticas de Educación Primaria en el momento de iniciar esta investigación (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502), que orientaban los programas y los contenidos de las asignaturas de didáctica de la matemática, y en el momento actual (Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, pp. 30.110-30.401). También analizaremos las concepciones psicológicas, las teorías de aprendizaje vistas en el capítulo anterior, que sugieren ambos decretos sobre el aprendizaje de las matemáticas.

Con la Segunda Parte (capítulos 4, 5, 6 y 7) presentaremos el Estudio Empírico.

El Capítulo 4 contextualizará la tesis doctoral en la UJI, veremos cuáles son las asignaturas de didáctica de la matemática de las titulaciones de Maestro en la UJI, durante los cursos 2.001 a 2.004, qué contenidos se trabajaban en ellas y cómo, consecuencia de los contenidos matemáticos de Educación Primaria del Capítulo 3 y las teorías de aprendizaje del Capítulo 2.

El planteamiento teórico del Estudio Empírico lo haremos en el Capítulo 5. Presentaremos el problema del bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro, los objetivos que perseguimos y las hipótesis que formulamos, así como el diseño, los instrumentos aplicados (las pruebas de conocimientos) y la metodología utilizada.

En el Capítulo 6 ofreceremos los resultados del Estudio Empírico por medio del Estudio Descriptivo de las medidas realizadas a los estudiantes de Maestro de la UJI en conocimientos matemáticos y también en rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática con los instrumentos explicados en el Capítulo 5.

Con el Capítulo 7 completaremos la presentación de los resultados del Estudio Empírico a través del Estudio Inferencial practicado a los datos obtenidos en el Capítulo 6, para cada uno de los objetivos e hipótesis formulados en el Capítulo 5.

La Tercera Parte la constituye el Capítulo 8. Haremos la recapitulación del trabajo presentado, revisaremos los objetivos marcados y las hipótesis planteadas mediante los principales resultados obtenidos, describiremos cuáles son las principales aportaciones y repercusiones de esta tesis doctoral, enunciaremos posibles líneas de mejora y plantearemos futuros temas de investigación.

La Cuarta Parte son las referencias bibliográficas necesarias para las secciones o partes teóricas.

Por último pedir disculpas por las limitaciones, de fondo y de forma, ajenas a la voluntad de los responsables de esta tesis doctoral, y por la extensión, hemos intentado hacer buena la frase «el tiempo es oro», procurando ser concisos y breves al tiempo que claros, principalmente claros.

Queriendo armonizar concisión, brevedad y claridad, hemos hecho síntesis parciales en los apartados o en los capítulos con la finalidad de reducir los resultados a las ideas principales y en el último capítulo sintetizamos de forma global todos los resultados de manera que facilite la lectura de las conclusiones.

PRIMERA PARTE: FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

Capítulo 1: PRINCIPIOS PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

El National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), organización profesional de los Estados Unidos de América, publicó en el año 2.000 *Principles and standards for school mathematics*[1] con la intención de que fuera un recurso y una guía para la educación matemática, desde Educación Infantil de 4 años hasta Segundo de Bachillerato inclusive, de los ciudadanos del siglo XXI.

Dicen sus autores que:

> Las decisiones que toman los profesores, los administradores escolares y otros profesionales de la educación, respecto a los contenidos y el carácter de las matemáticas escolares, tienen consecuencias importantes para los estudiantes y para la sociedad. Estas decisiones deberían basarse en una guía profesional sólida. *Principios y Estándares* pretende proporcionar esta guía. Los Principios describen las características particulares de una educación matemática de gran calidad. Los Estándares describen los contenidos y procesos matemáticos que deberían aprender los estudiantes. Juntos, constituyen una propuesta para guiar a los educadores en sus esfuerzos por la continua mejora de la enseñanza de las matemáticas en las clases, en las escuelas y en los sistemas educativos.
>
> NCTM, 2.000, p. 11

[1] La versión española *Principios y Estándares para la Educación Matemática* -en adelante *Principios y Estándares*-, fue publicada en el año 2.003.

Dicho libro presenta un dictamen colectivo alcanzando la mejor comprensión actual de los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y también de los factores contextuales que los configuran. Su elaboración refleja un compromiso para continuar la discusión y la reflexión, por lo que este documento debe verse como parte de un trabajo progresivo que puede ayudar a tomar decisiones en cuanto a desarrollar programas excelentes de matemáticas, y no como una prescripción para ser impuesta (NCTM, 2.000).

A continuación vamos a presentar los Principios y en el apartado 1.2. las acciones y las responsabilidades de cada una de las partes del sistema educativo para su realización, pero la confección de esta obra "basada en décadas de investigación y práctica, y perfeccionado en un amplio proceso de colaboraciones, críticas y revisiones" (NCTM, 2.000, p. 374) complica enormemente la intención de presentar una breve síntesis, por lo que no vamos a hacer constantes referencias al texto, indicando solamente las citas literales.

1.1. PRINCIPIOS PARA LAS MATEMÁTICAS ESCOLARES

Los Principios son enunciados que reflejan disposiciones básicas fundamentales para una educación matemática de calidad, aunque no son exclusivos de las matemáticas escolares están profundamente entrelazados en sus programas. No se refieren a contenidos o procesos matemáticos específicos y, por tanto, son completamente diferentes de los Estándares.

Los seis Principios plantean los temas siguientes:

- *Igualdad*, altas expectativas y fuerte apoyo para todos los estudiantes.

- *Currículo*, centrado en matemáticas importantes y bien articulado en los diferentes niveles.
- *Enseñanza*, efectiva para que los alumnos aprendan bien.
- *Aprendizaje*, de las matemáticas comprendiéndolas y construyéndolas activamente.
- *Evaluación*, para apoyar el aprendizaje y proporcionar información útil.
- *Tecnología*, esencial, influye en las matemáticas que se enseñan y potencia el aprendizaje.

Los Principios pueden inspirar los desarrollos curriculares, la selección de materiales, la programación de lecciones o unidades didácticas, las evaluaciones, la adscripción de alumnos y profesores a las clases, las decisiones para la enseñanza en las aulas y los planes de perfeccionamiento y desarrollo profesional del profesorado, pero su poder como guías y herramientas para tomar decisiones deriva de su interacción y utilización conjunta por los responsables educativos para desarrollar programas de matemáticas de gran calidad:

> *Todos* los estudiantes deben acceder cada año a un *currículo* coherente y estimulante, *enseñado* por profesores de matemáticas competentes y bien considerados. Además, el *aprendizaje* y aprovechamiento de los alumnos deberían ser *evaluados* e informados de manera que se señalen las áreas que requieran una inmediata atención adicional. La *tecnología* puede ayudar a alcanzar la igualdad y debe ser asequible para todos los estudiantes. [La cursiva es nuestra]
>
> NCTM, 2.000, p. 12

1.1.1. EL PRINCIPIO DE IGUALDAD

«La excelencia en la educación matemática requiere igualdad: grandes expectativas y sólido apoyo para todos los estudiantes» (NCTM, 2.000, p. 12).

La Constitución española de 1.978 (BOE de 29 de diciembre de 1.978) en sus artículos 14 y 27, y el Estatuto de Autonomía de la Comunidad Valenciana (BOE de 10 de julio de 1.982) en sus artículos 2 y 35, establecen el derecho de igualdad ante la ley y el derecho de educación, respectivamente. Este principio desarrolla ambos derechos fundamentales pues establece como objetivo que todos los alumnos deben tener oportunidades para estudiar matemáticas y apoyo para aprenderlas, independientemente de sus características y circunstancias personales.

Existe una creencia extendida en la sociedad, y también en parte del profesorado, de que sólo algunos estudiantes son capaces de aprender matemáticas. La generalización del aprendizaje matemático conduce algunas veces a bajas expectativas para demasiados estudiantes. Las grandes expectativas pueden alcanzarse en parte con programas cuyos contenidos interesen a los alumnos y les convenzan de la importancia y la utilidad del estudio de las matemáticas para su porvenir.

Los sistemas educativos están obligados a asegurar que todos los estudiantes participen en un programa de matemáticas excelente y equitativo, que proporcione un fuerte apoyo para su aprendizaje, y que debería considerar los conocimientos previos, las capacidades intelectuales y los intereses personales. Por consiguiente tienen que atender las necesidades matemáticas individuales de todos los alumnos sin entorpecer el aprendizaje de otros: aquellos que prometen mucho en matemáticas y muestran un profundo interés en el estudio de matemáticas avanzadas, necesitan las oportunidades adecuadas para alcanzar sus propósitos y, aquellos que tienen dificultades especiales de aprendizaje en matemáticas, deben tener el apoyo de los profesores y del personal de educación especial.

Así lo establecen en el caso de la Educación Primaria el Real Decreto 1.513/2.006, de 7 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas de la Educación Primaria (BOE núm. 293, de 8 de diciembre de 2.006, pp. 43.053-43.102), en sus artículos 13.2, 13.6 y 14.2, y el Decreto 111/2.007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana (*Diari Oficial de la*

Comunitat Valenciana, Núm. 5.562 de 24 de julio de 2.007, pp. 30.110-30.401), en su artículo 12.2, y en el caso de la Enseñanza Secundaria Obligatoria el Real Decreto 1.631/2.006, de 29 de diciembre, por el que se establecen las enseñanzas mínimas correspondientes a la Educación Secundaria Obligatoria (BOE núm. 5, de 5 de enero de 2.007, pp. 677-773), en sus artículos 12.3, 12.7 y 17, y el Decreto 112/2.007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana (*Diari Oficial de la Comunitat Valenciana*, Núm. 5.562 de 24 de julio de 2.007, pp. 30.402-30.587), en sus artículos 12.2 y 15.2.

Todos los alumnos deberían tener una base común de matemáticas, tanto los que entren en el mundo laboral al terminar la Educación Secundaria Obligatoria (ESO), como los que prosigan estudios de matemáticas o ciencias.

Los equipos directivos educativos se enfrentan a decisiones difíciles respecto al agrupamiento del alumnado, sobre si se le debe ofrecer una enseñanza de las matemáticas en grupos homogéneos o heterogéneos. Los alumnos pueden aprender eficazmente la asignatura en grupos heterogéneos, si se desarrollan las estructuras para proporcionar un apoyo apropiado y diferenciado a la diversidad. Las formas de organización que excluyen a ciertos grupos de alumnos de un programa de matemáticas estimulante y de tipo comprensivo, deberían descartarse. Se deberían potenciar y aunar todos los esfuerzos en el sentido de asegurar que todos los alumnos sean bien atendidos.

En el sistema educativo español, en 4.º de ESO, curso de finalización de la escolarización obligatoria, los alumnos pueden elegir entre dos niveles de contenidos matemáticos con un mismo tronco común. Las Matemáticas A tienen un carácter terminal, pensadas para estudiantes que van a ingresar al finalizar la ESO en el mundo laboral o para aquellos que van a seguir en Ciclos Formativos de Grado Medio, mientras que las Matemáticas B tienen un carácter de continuidad, pensadas para estudiantes que van a cursar Bachillerato Científico-técnico o Sanitario.

Las Tecnologías de la Información y Comunicación (TIC) pueden contribuir a alcanzar la igualdad en la clase. Por ejemplo, las herramientas y entornos tecnológicos pueden proporcionar oportunidades a todos los alumnos para explorar contenidos matemáticos complejos; pueden aportar programas tutoriales estructurados para aquellos alumnos que necesiten enseñanza complementaria y ejercitación en las tareas, o a través de la red pueden conectar a alumnos de comunidades rurales a oportunidades educativas o recursos intelectuales a los que no tienen fácil acceso.

Además, dada la atracción de los niños y adolescentes por los juegos con aplicaciones de la informática (juegos digitales, videojuegos), la tecnología puede ser eficaz para atraer a los estudiantes que se desentienden de las matemáticas cuando el enfoque no es tecnológico.

> Es importante que todos los estudiantes tengan oportunidades de usar la tecnología en forma adecuada para acceder a ideas matemáticas interesantes e importantes. El acceso a la tecnología no debe convertirse en otro componente de la desigualdad educativa.
>
> NCTM, 2.000, p. 14

Para lograr la igualdad es necesario un justo reparto de los recursos humanos y materiales en los centros y en las aulas. Los materiales curriculares, los programas complementarios especiales y la eficaz gestión de los medios públicos juegan, sin duda, un importante papel, pero probablemente más necesario e importante es el desarrollo profesional del profesorado. Los docentes necesitan ayuda para conocer las necesidades de los alumnos que proceden de comunidades o culturales distintas, de los que tienen discapacidades o de los que poseen un especial talento para y gran interés por las matemáticas. “Para acomodar, de forma efectiva y sensible, las diferencias entre los estudiantes, los profesores necesitan comprender y afrontar las creencias e inclinaciones de aquéllos” (NCTM, 2.000, p.15)

1.1.2. EL PRINCIPIO CURRICULAR

«Un currículo es algo más que una colección de actividades: tiene que ser coherente, estar centrado en matemáticas importantes y bien articulado a través de los diferentes niveles» (NCTM, 2.000, p.15).

El currículo de matemáticas escolares determina lo que los estudiantes pueden aprender y, en gran parte, lo que realmente aprenden. Si es coherente organiza e integra ideas matemáticas importantes para que los alumnos puedan ver cómo se conectan entre sí y se construyen unas sobre otras, lo que facilitará y aumentará la comprensión de los contenidos y su aplicación. Las conexiones entre los distintos bloques temáticos deberían destacarse, tanto en el currículo como en las lecciones y en los materiales de enseñanza.

Debería centrarse en contenidos merecedores de la atención y el tiempo que le dedican los estudiantes. Las ideas matemáticas se consideran importantes porque:

- son útiles para desarrollar otros contenidos matemáticos, como por ejemplo las nociones de valor posicional, de equivalencia
- permiten relacionar diferentes áreas matemáticas, como las nociones de proporcionalidad, función
- posibilitan que los estudiantes aumenten el aprecio por las matemáticas como disciplina y como creación humana, sería el caso de la simetría y la generalización, que ayudan a profundizar en la naturaleza y belleza de las matemáticas
- o porque se utilizan en la resolución de problemas en matemáticas y en otros campos, como las ecuaciones y sistemas.

La vigencia del currículo es limitada por la posibilidad de estar configurado por diferentes ideas matemáticas importantes o, también, por cambiar con el tiempo la consideración de importantes de algunos contenidos debido a su utilidad y a nuevas demandas. Por ejemplo, "la recursión, la iteración y la comparación de algoritmos están recibiendo mayor atención en las matemáticas escolares debido a su creciente relevancia y utilidad en el mundo de la tecnología" (NCTM, 2.000, p.16).

El aprendizaje matemático consiste en acumular ideas, para reconocer la ocasión en que utilizarlas y aplicarlas, y construir nuevos conocimientos cada vez más profundos y perfeccionados. El currículo debería estar bien articulado para que los profesores sepan qué matemáticas han estudiado sus alumnos en los niveles anteriores, con qué profundidad de tratamiento y, qué debe realzarse en los cursos siguientes y hasta qué grado de rigor. Así se evitará la duplicación de esfuerzos y la revisión constante y los profesores podrán conducir a sus alumnos a niveles superiores en complejidad y profundidad de conocimiento. Por ejemplo, en Educación Infantil los niños aprenden las cifras. En el Primer Ciclo de Educación Primaria se les enseña las decenas y centenas, en el Segundo Ciclo las unidades y decenas de millar y, fracciones y decimales sencillos, y ya en el Tercer Ciclo de Primaria llegan a saber leer y escribir cualquier número natural, en fracciones y decimales progresan hasta las milésimas y se introducen en los números enteros. En el Primer Ciclo de ESO profundizan en los números enteros, conocen los decimales exactos y periódicos y el concepto de nombre racional, para en el Segundo Ciclo aprender los números reales. Finalmente en Bachillerato trabajan los números complejos.

La confección y selección del currículo y de los materiales requiere un proceso de colaboración a largo plazo de profesores y administradores. Los docentes necesitan un tiempo para familiarizarse con él y descubrir sus virtudes y defectos, deben prepararse para trabajar con nuevos documentos educativos y sólo entonces, pueden desarrollar los conocimientos necesarios para trabajar bien con los materiales.

Los profesores y los administradores deberían informar y consultar a los miembros de la comunidad sobre las decisiones que se refieran a currículos y materiales pedagógicos, deberían también ayudar a las familias a comprender los objetivos y contenidos de los mimos, y las elecciones relativas a los recursos didácticos deberían basarse en un acuerdo común sobre los objetivos de la educación matemática.

Los autores de diseños curriculares y de materiales educativos deberían utilizar la investigación en el trabajo por poner en práctica sus ideas y

> ... a través de las evaluaciones y el estudio de las dificultades curriculares, y de las discusiones de las ideas de dichos documentos, la comunidad de educación matemática puede continuar desarrollando una base de conocimiento que sirva de guía a la educación matemática escolar.
>
> NCTM, 2.000, p. 376

1.1.3. EL PRINCIPIO DE ENSEÑANZA

«Una enseñanza eficaz requiere conocer lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender; y luego estimularlos y ayudarlos para que lo aprendan bien» (NCTM, 2.000, p. 17).

Gran parte de los conocimientos matemáticos que aprenden los estudiantes son debidos a experiencias que les proporcionan los profesores y su actitud hacia la asignatura está determinada por la intervención de los docentes, por tanto la enseñanza que reciben es de capital importancia y, para mejorar la educación matemática de todos los estudiantes es necesaria una enseñanza eficaz.

Enseñar bien matemáticas no es fácil y casi nadie nacemos sabiéndolo, pero sí hay datos que dicen como conseguir ser profesores eficaces.

> Para ser eficaces, los profesores deben conocer y entender profundamente las matemáticas que enseñan y ser capaces de hacer uso de ese conocimiento con flexibilidad. Necesitan comprender a sus alumnos; confiar en ellos, como aprendices de matemáticas y como seres humanos, y ser cuidadosos al elegir

> y utilizar las estrategias pedagógicas y de evaluación[2]. Además, la eficacia docente requiere reflexión y esfuerzos continuos para conseguir mejorarla.
>
> NCTM, 2.000, p.17

El conocimiento matemático que necesitan los profesores está integrado por:

- un conocimiento profundo de las matemáticas fundamentales (Ma, 1.999), como por ejemplo saber que la sustracción de números naturales puede ser la cuantificación, de quitar algunos elementos en un conjunto, de la comparación de dos conjuntos distintos o de cuánto le falta a un conjunto para constituir otro mayor;
- conocer las diferentes representaciones de un concepto, la potencialidad y debilidad de cada una y cómo se relacionan entre sí;
- conocimiento profundo y flexible respecto a los objetivos curriculares y las ideas fundamentales en cada nivel de enseñanza;
- conocer también, qué ideas crean dificultad frecuentemente a los alumnos;
- conocimiento sobre cómo pueden presentarse eficazmente estas ideas y las formas en que pueden ayudar a superar las concepciones erróneas más comunes y, por último,
- conocimiento en cuanto a la forma de evaluar el aprendizaje.

Esta cualificación matemática ayudará al profesorado: a valorar correctamente el currículo; a hacer preguntas para saber lo que conocen ya los alumnos, pues estos aprenden conectando ideas nuevas a conocimientos anteriores; a planificar lecciones que pongan de manifiesto este conocimiento previo, así podrán luego diseñar experiencias y lecciones que respondan a este conocimiento y se basen en él, y además, a responder a las preguntas de los alumnos.

Los profesores también necesitan conocimientos pedagógicos que les ayudarán a comprender de qué manera aprenden matemáticas los alumnos, a seleccionar y usar materiales curriculares apropiados y les instruirán en el uso de técnicas de enseñanza oportunas y en la organización y dirección de

[2] National Commision on Teaching and America's Future (1.996), citado por NCTM (2.000)

la clase. Asimismo deberán aprender a conjugar clases planificadas y preparadas, y la toma continua de decisiones que tiene lugar cuando, inevitablemente, profesores y alumnos se encuentran ante contenidos y dificultades imprevistos, lo que pone de manifiesto la importancia de la práctica docente para la adquisición de muchos de estos conocimientos.

Para una educación matemática eficaz se deberían realizar tareas útiles para introducir conceptos matemáticos importantes, pero además las decisiones que tomen los profesores, las actitudes que muestren, deben propiciar un ambiente de clase que motive y atraiga los alumnos hacia la asignatura, de esta manera los estudiantes se animarán a pensar, preguntar, formular conjeturas, resolver problemas, argumentar y con ello podrán construir el conocimiento matemático.

Si se eligen y plantean bien las tareas pueden picar la curiosidad de los alumnos y conseguir que se impliquen en el trabajo, correspondiendo entonces al profesor decidir cómo ayudarles sin sustituirles en su proceso de pensamiento, es decir, sin eliminar el reto. Estos trabajos pueden estar conectados a la vida cotidiana de los alumnos o surgir de contextos puramente matemáticos.

La eficacia docente requiere de los profesores esfuerzos continuados para aprender y mejorar. Tienen que seguir adquiriendo conocimientos nuevos o complementarios sobre matemáticas y pedagogía, beneficiarse de las relaciones con estudiantes (observarles, escuchar con atención sus ideas y explicaciones) y colegas y comprometerse en un continuo desarrollo profesional y en la reflexión constante.

Para mejorar su labor, los profesores tienen que ser capaces de analizar lo que ellos y sus alumnos hacen y cómo afectan estas actuaciones al aprendizaje. La mayoría del profesorado trabaja en un relativo aislamiento, con poco apoyo para la innovación y reducidos o nulos incentivos para mejorar su práctica. Colaborar regularmente con compañeros de profesión para observar, analizar y discutir sobre la docencia y sobre el pensamiento de los alumnos, es una manera poderosa, y poco aprovechada, de desarrollo profesional.

> La investigación indica que los profesores son más capaces de ayudar a sus alumnos a aprender matemáticas cuando tienen oportunidades de trabajar juntos para mejorar su práctica, tiempo para reflexionar y un fuerte apoyo de sus colegas y otros profesionales cualificados.
>
> NCTM, 2.000, p. 377

Por tanto, las jornadas laborales de los docentes y su distribución horaria deberían reorganizarse de manera que permitan y apoyen su perfeccionamiento, como ya se viene haciendo en algunos países

> En Japón y China, las jornadas de trabajo de los profesores incluyen tiempo para reunirse con sus alumnos, con el fin de analizar las últimas lecciones y programar las próximas (Ma, 1.999; Stigler y Hiebert, 1.999). Durante este «estudio de la lección», los profesores la programan, la enseñan ante la presencia de colegas, la revisan con la colaboración de éstos, enseñan la lección revisada, evalúan y reflexionan de nuevo, e intercambian los resultados por escrito. Parte de la planificación incluye predecir lo que harán los grupos de estudiantes cuando se les presenten determinados problemas y tareas. El progresivo análisis de la práctica se elabora, por tanto, dentro de la institución educativa, no se trata de una tarea añadida que los profesores tienen que organizar por sí mismos.
>
> NCTM, 2.000, p. 377

El profesorado necesita confianza, respeto y paciencia por parte de los padres y de la administración en el desempeño de su labor, pero sobre todo cuando trabajan para desarrollar, analizar y perfeccionar su práctica.

La formación inicial es la base de la enseñanza de las matemáticas, pero sólo proporciona una pequeña parte de lo que el profesorado necesita conocer y comprender en el ejercicio de su carrera, pero debe "preparar a los profesores para aprender de su propia práctica, de sus alumnos, de los materiales curriculares, de sus colegas y de otros expertos" (NCTM, 2.000, p. 377).

1.1.4. EL PRINCIPIO DE APRENDIZAJE

«Los estudiantes deben aprender matemáticas comprendiéndolas, y construir activamente nuevos conocimientos a partir de la experiencia y de los conocimientos previos» (NCTM, 2.000, p. 20).

Aprender matemáticas es para *Principios y Estándares* un aprendizaje en el que se comprende lo aprendido. Aprender sin comprender ha sido un resultado frecuente de la enseñanza de las matemáticas, desde por lo menos, los años treinta del siglo pasado, y fue objeto de una gran cantidad de discusiones e investigaciones por parte de psicólogos y educadores durante años[3].

"Ser competente en un campo complejo como el matemático supone tener habilidad para usar los conocimientos con flexibilidad, y aplicar con propiedad lo aprendido en un contexto, a otro contexto" (NCTM, 2.000, p. 21). Las investigaciones de finales del siglo XX realizadas por psicólogos y educadores sobre el aprendizaje de disciplinas complejas como las matemáticas, han demostrado que la comprensión conceptual es un componente fundamental en el conocimiento y la actividad de las personas competentes, junto con el conocimiento factual y la destreza con los procedimientos (Bransford, Brown y Cocking, 1.999).

La asociación de estos tres elementos los hace poderosamente útiles. Los estudiantes que memorizan hechos o procedimientos sin comprenderlos, frecuentemente no están seguros de cuándo o cómo utilizar lo que saben, y tal aprendizaje es muchas veces bastante frágil (Bransford, Brown y Cocking, op. cit.). Aprender con comprensión hace también más fácil el aprendizaje posterior. Cuando los estudiantes conectan de forma significativa y bien fundamentada los nuevos conocimientos a los ya existentes: las matemáticas cobran más sentido y se recuerdan y aplican

[3] P.e. Brownell (1.947), Skemp (1.976), Hiebert y Carpenter (1.992) citados por NCTM (2.000)

más fácilmente (Schoenfeld, 1.988a) y, son más fácilmente asequibles para su empleo en situaciones nuevas (Skemp, 1.976).

Vivimos en un mundo cada día más tecnológico que hace que los cambios se sucedan con mayor rapidez. Hechos o procedimientos matemáticos que se consideraban fundamentales dejan de serlo, como por ejemplo la mayoría de los procedimientos aritméticos y algebraicos que constituían el núcleo del currículo de matemáticas pueden ser ahora efectuados con la calculadora de bolsillo, por lo que la comprensión de conceptos y la flexibilidad para razonar son requisitos imprescindibles para enfrentarse con nuevos problemas y contextos y alcanzar una vida satisfactoria, sana y exitosa tanto en lo profesional, en lo público, como en lo privado.

Aprender comprendiendo facilita la consecución de objetivos matemáticos como propiciar la autonomía de aprendizaje. Cuando se plantean a los alumnos tareas bien elegidas, llegan a confiar en su habilidad, trabajan con ahínco para resolver un problema complicado o para entender un concepto complejo, son flexibles al explorar ideas matemáticas y ensayar soluciones alternativas, experimentan un especial sentimiento de Iogro, Io que conduce a una buena disposición para continuar y ampliar su compromiso con las matemáticas. El aprendizaje efectivo supone reconocer la importancia de reflexionar sobre las ideas propias y aprender de los errores.

Desde temprana edad, los niños se interesan por las ideas matemáticas y a través de las experiencias diarias van formando gradualmente ideas informales sobre cantidades, números, patrones, formas, tamaños y datos, y muchas de estas ideas son correctas y estables. Así, de manera totalmente natural, aprenden muchos conceptos matemáticos, incluso antes de entrar a la escuela[4]. Por tanto los programas de matemáticas deberían potenciar su natural deseo de entender aquello que se les pide que aprendan. Los estudiantes de todas Ias edades poseen un considerable talento básico a partir del cual construyen nuevos

[4] Gelman y Gallistel (1.978), Resnick (1.987) citados por NCTM (2.000)

conocimientos, incluyendo las ideas desarrolladas en clase y las adquiridas en la experiencia diaria (Bransford, Brown y Cocking, 1.999), utilizando una técnica que se establece pronto y se repite, aunque frecuentemente de forma menos obvia, durante todos los años de escolaridad (Steffe, 1.994).

Los tipos de experiencias proporcionados por los profesores desempeñan, evidentemente, un papel principal para determinar la amplitud y calidad del aprendizaje de los alumnos. La comprensión de ideas matemáticas puede alcanzarse, a lo largo de los años de escolarización, si se les compromete activamente en tareas y experiencias diseñadas para profundizar y relacionar sus conocimientos. Y puede mejorarse mediante interacciones en el aula, cuando los estudiantes proponen ideas y conjeturas matemáticas, aprenden a evaluar su propio pensamiento y el de los demás, y desarrollan destrezas de razonamiento (Yackel y Hanna, 2.003). El diálogo en clase y la interacción social pueden usarse para el reconocimiento de conexiones entre ideas y para la reorganización del conocimiento (Lampert, 1.986). Cuando los alumnos hablan de sus estrategias informales, los profesores pueden ayudarles a ser conscientes de sus conocimientos informales implícitos y a construir sobre ellos (Lampert, 1.989; Mack, 1.990). Además, en tales contextos, la fluidez en los procedimientos y la comprensión conceptual pueden desarrollarse a través de la resolución de problemas, el razonamiento y el debate.

Para aprender matemáticas comprendiéndolas se necesita tener acceso constante a una enseñanza de gran calidad. “En los niveles elementales [3.º a 5.º de Educación Primaria], los alumnos deberían estudiar matemáticas al menos durante una hora diaria” (NCTM, 2.000, p. 378), con profesores especialistas en matemáticas, lo que debería ser sinónimo de que les gustan y están preparados para enseñarlas bien.

> Todo alumno de los niveles medios y de secundaria [de 6.º de Primaria a Bachillerato] debe estudiar el equivalente a un año completo de matemáticas en cada nivel [...] y debería emplear cada día una cantidad sustancial de tiempo trabajando en matemáticas fuera de la clase, en actividades que vayan desde

> las típicas tareas para casa y los proyectos a la resolución de problemas en el ámbito laboral.
>
> NCTM, 2.000, p. 378

La desconexión del aprendizaje matemático es un gran inconveniente para hacer realidad la visión descrita en *Principios y Estándares*. Demasiados estudiantes se alejan de las matemáticas escolares, lo que crea un serio problema no sólo para sus profesores y para sus padres, sino también para una sociedad que depende cada día más de ciudadanos preparados en destrezas matemáticas. Los alumnos no llegan a involucrarse por diversas razones. A muchos, por ejemplo, les resulta difícil mantener la motivación y el esfuerzo necesarios para aprender lo que puede ser una asignatura retadora, consideran que se enseña de una manera que le quita interés y relevancia al aprendizaje.

Por desgracia la desconexión se refuerza con mucha frecuencia, de forma declarada o sutil, por las acciones y actitudes de los adultos que influyen en los estudiantes. Algunos padres y otras personas con autoridad, y también las influencias sociales como las de los medios de comunicación, transmiten el mensaje de que no se espera que todos tengan éxito en matemáticas y, por tanto, se acepta la separación de las matemáticas escolares. Esta tolerancia social hace menos probable que todos los estudiantes estén motivados para mantener el esfuerzo necesario para aprender matemáticas, lo que hace más difícil, si cabe, el trabajo del profesorado. También algunos profesores creen que muchos alumnos no pueden aprender matemáticas, lo cual refuerza la creencia de éstos de que no pueden aprenderlas, y los conduce a desconectarse más.

Este círculo vicioso que afecta profundamente a las matemáticas escolares, siendo especialmente frecuente en los niveles medios y en la escuela secundaria, se tiene que romper

> Muchos profesores han llegado a la conclusión de que si enseñan la asignatura de forma semejante a las que se presentan en *Principios y Estándares* –por ejemplo, abordando los temas tradicionales de manera que se enfatice la

comprensión conceptual y la resolución de problemas- muchos de los alumnos aparentemente desinteresados pueden llegar a sentirse atraídos.

NCTM, 2.000, p. 379

1.1.5. EL PRINCIPIO DE EVALUACIÓN

«La evaluación debería apoyar el aprendizaje de matemáticas importantes y proporcionar información útil tanto a profesores como a alumnos» (NCTM, 2.000, p. 23).

Si la evaluación consiste en un examen al final del período de enseñanza para certificar las adquisiciones de los alumnos se está desaprovechando otros propósitos importantes que tiene; debería constituir una parte integral de la enseñanza, una parte habitual, que informe al profesorado y le sirva de guía para la mejor toma de decisiones, y que informe al alumnado de su proceso educativo, es decir, no sólo debería hacerse a los alumnos, sino también para los alumnos.

Cuando la evaluación es una parte integral de la práctica de la clase, utilizada continuamente por los profesores para recabar información sobre el progreso de sus alumnos y para diagnosticar la enseñanza y el aprendizaje, produce una mejora del aprendizaje de todos los estudiantes, tanto en los de alto rendimiento como en los de bajo rendimiento, como comprobaron BIack y Wiliam (1.998) al revisar alrededor de 250 estudios de investigación.

Una buena evaluación puede enriquecer el aprendizaje de diversas formas: las actividades propuestas en la evaluación deberían ser coherentes con las realizadas en clase e incluso, a veces, alguna ya vista en el aula, deberían ser justificación de la atención prestada y del tiempo empleado por los alumnos, con todo ello se transmite un mensaje a los estudiantes respecto a qué clase de conocimiento matemático y qué capacidades se evalúan, que podría influir en las decisiones que tomen los alumnos sobre cómo estudiar y dónde conviene esforzarse; la utilización de técnicas de evaluación como las observaciones, las conversaciones y las entrevistas, o los diarios interactivos, probablemente consiguen que los alumnos aprendan al expresar sus ideas y al contestar las preguntas que se les formulan.

El análisis de la valoración asignada a las tareas de evaluación y de los resultados puede ayudar también a los alumnos a fijar objetivos, asumir la responsabilidad del propio aprendizaje y llegar a ser aprendices más independientes. Por ejemplo, las puntuaciones asignadas a cada cuestión y las instrucciones para realizar la prueba evaluatoria, que sirven de ayuda a los profesores para analizar y describir las respuestas de sus alumnos a tareas complejas y determinar sus niveles de conocimiento, pueden ayudar también a los estudiantes a comprender las características de una respuesta completa y correcta. Análogamente, los debates en el aula en los que los alumnos presentan y evalúan diferentes enfoques en la resolución de problemas, pueden aclarar su idea de la diferencia entre una respuesta excelente y una mediocre. Por medio de la propuesta de buenas tareas y la discusión pública de los criterios para la corrección de las respuestas, los profesores pueden cultivar tanto la disposición como la capacidad del alumnado para implicarse en la autoevaluación de sus trabajos y reflexionar sobre las ideas propuestas por otros, hecho importante pues Wilson y Kenney (2.003) observaron que la autoevaluación y la evaluación entre iguales tiene un impacto positivo en el aprendizaje.

Los profesores deberían tener una idea clara de lo que se debe enseñar y aprender, y la evaluación debería estar en consonancia con dicha idea, reflejando las matemáticas que todos los estudiantes necesitan conocer y son capaces de hacer, centrándose en su comprensión y en las destrezas procedimentales.

> Decisiones relativas a cuándo y cómo repasar los conocimientos previos, cómo analizar un concepto difícil o cómo adaptar las tareas para los alumnos con problemas de aprendizaje o para los que necesitan ampliar, se basan en inferencias sobre lo que los alumnos saben y lo que necesitan aprender. La evaluación es una primera fuente de datos sobre los que se

> basan estas inferencias, y las decisiones que tomen los profesores serán tan buenas como lo sean aquéllos.
>
> NCTM, 2.000, p. 23

La utilización casi exclusiva del examen tradicional como medio de evaluación puede dar una idea incompleta y tal vez distorsionada del rendimiento de los alumnos, pues proporciona un único punto de vista sobre lo que los alumnos hacen en una situación muy particular (con frecuencia trabajar individualmente en tareas con un tiempo limitado para realizarlas). Reuniendo datos de una variedad de fuentes, es más probable que el profesor obtenga una imagen más exacta de lo que cada alumno sabe y es capaz de hacer, (aunque ello sea menos directo que promediar calificaciones de exámenes) y tome decisiones acertadas al respecto.

Entre las técnicas de evaluación que pueden utilizar los profesores tenemos: las cuestiones de respuesta simple o donde hay que elegir una respuesta entre varias, que sirven para averiguar si los alumnos saben aplicar procedimientos; las tareas donde hay que elaborar la respuesta o las tareas prácticas, donde pueden mostrar mejor su capacidad para aplicar las matemáticas en situaciones complejas o nuevas; las observaciones y conversaciones en clase, que pueden proporcionar puntos de vista sobre el pensamiento de los estudiantes; los diarios de clase y los cuadernos de trabajo, por medio de los cuales los profesores pueden seguir los cambios en el pensamiento y el razonamiento de los estudiantes a través del tiempo.

Al seleccionar los métodos de evaluación, los profesores deberían considerar la edad, la experiencia y las necesidades especiales de los alumnos, deberían asegurarse de que todos tengan oportunidad para demostrar clara y totalmente lo que saben y pueden hacer. Por ejemplo, ante la cantidad de inmigrantes que están llegando a las aulas deberían usar un lenguaje enriquecido y técnicas bilingües para ayudar a los que están aprendiendo el idioma. Sin embargo, a pesar de todas estas precauciones los alumnos y los padres podrían encontrar algunos de estos métodos poco habituales en la clase de matemáticas, por lo que los profesores necesitan el apoyo de la administración educativa para que alumnos y padres comprendan la utilidad y propósito de estos planteamientos para la mejora de la enseñanza de las matemáticas.

Para obtener el máximo rendimiento de la evaluación, los profesores necesitan superar la consideración simplista de tarea «correcta o incorrecta», y centrarse en cómo piensan los alumnos al hacer las tareas, deberían hacer esfuerzos para identificar las ideas válidas de los estudiantes -sobre las que puede basarse un posterior progreso- más que centrarse únicamente en los errores o conceptos falsos. Cuando está bien hecha, la evaluación que ayuda al profesorado en la toma de decisiones sobre contenidos o formas de enseñanza (frecuentemente llamada «evaluación formativa»), puede usarse también para juzgar los logros de los alumnos («evaluación sumativa»). En ambos casos el conocimiento de los profesores es determinante para reunir información útil y extraer inferencias válidas: los profesores tienen que tener muy claros sus objetivos matemáticos, entender lo que sus alumnos piensan acerca de las matemáticas, tener un buen control de los posibles significados de la evaluación de conocimientos y ser hábiles al interpretar la información proveniente de múltiples fuentes. “Para que los profesores alcancen la necesaria formación al respecto, la evaluación debe convertirse en el foco principal de su preparación y desarrollo profesional” (NCTM, 2.000, p. 25).

El informe *Programme for International Student Assessment* (PISA) 2.003[5], dio a conocer los malos resultados en matemáticas de los escolares españoles, consecuencia de ello algunas administraciones educativas como la *Conselleria d’Educació* de la Comunidad Valenciana, han iniciado la realización de tests para ir revisando el estado de la enseñanza. Así al inicio del curso 2.005/2.006, el 19 de enero de 2.006, a los niños valencianos de Tercer curso de Primaria se les aplicaron pruebas para saber los niveles alcanzados en el Primer ciclo de Educación Primaria, también al inicio del curso 2.006/2.007 en Quinto curso de Primaria, el 20 de octubre de 2.006, se pasaron cuestionarios para saber los niveles logrados en el Segundo ciclo de Primaria, y en Tercer curso de Educación Secundaria Obligatoria el 25 de

[5] OECD (2.004)

octubre de 2.006 se aplicaron tests a los chicos valencianos para saber los niveles alcanzados en el Primer ciclo de ESO.

El Decreto 111/2.007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana, en su artículo 13. Evaluación de la etapa, en el punto 1, dice que al finalizar el Segundo ciclo Primaria se realizará una evaluación diagnóstica a todos los alumnos, y el Decreto 112/2.007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana, en su artículo 16. Evaluación de la etapa, en el punto 1, dice que al finalizar el Segundo curso de ESO se realizará una evaluación diagnóstica a todos los alumnos sobre las competencias básicas alcanzadas. Además, excepcionalmente la *Conselleria d'Educació* de la Comunidad Valenciana tiene previsto realizar en octubre de 2.009 cuestionarios diagnósticos a todo el alumnado de los cursos Segundo y Cuarto de Educación Primaria y Segundo de Educación Secundaria Obligatoria.

Este tipo de pruebas pueden convertirse en una preocupación especial para los docentes, ante lo cual se puede caer en la tentación de «enseñar para el test», decisión que puede debilitar la integridad de la instrucción. Poner al profesorado en la alternativa de decidir entre lo que considera mejor para el aprendizaje de sus alumnos y lo que se requiere para «sobrevivir» en el sistema educativo, lo sitúa en una posición insostenible. Las evaluaciones de alta relevancia, tanto real como pública, tienen que estar estrechamente relacionadas con los objetivos que se pide a los profesores que alcancen.

Pero no se están realizando sólo diagnósticos de los conocimientos matemáticos de los escolares. El proyecto internacional de investigación *Teacher Education Study in Mathematics* (TEDS-M), impulsado por la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA), es un estudio comparativo internacional sobre la formación inicial del profesorado de matemáticas en Educación Primaria y en Secundaria Obligatoria y que España participa a través del Ministerio de Educación y

Ciencia, del Instituto Nacional de Estadística, de la Secretaria de Coordinación Universitaria y del Instituto Superior de Formación del Profesorado y del grupo de investigación (FQM-193) de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada. La muestra para el trabajo de campo definitivo en España, que tuvo lugar en abril de 2.008, la compusieron 50 instituciones de formación inicial del profesorado de Matemáticas de Educación Primaria, entre las cuales estuvo la Universitat Jaume I (UJI); en cada una se seleccionó aleatoriamente una muestra de estudiantes de último año de carrera (futuros maestros de Primaria), y formadores (formadores de Matemáticas, Didáctica de la Matemática y Pedagogía General, y Supervisores de Practicum). Los resultados estaba previsto que se publicasen en octubre de 2.009, pero consultada la organización en España, sita en el Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada, nos informan que por problemas a nivel internacional no se espera publicar los resultados antes del verano de 2.010.

1.1.6. EL PRINCIPIO TECNOLÓGICO

«La tecnología es fundamental en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas; influye en las matemáticas que se enseñan y enriquece su aprendizaje» (NCTM, 2.000, p. 26).

Mediante calculadoras y ordenadores los alumnos pueden examinar más representaciones o ejemplos que los que son posibles usualmente, y así, pueden formular y explorar conjeturas fácilmente. La potencia gráfica de los instrumentos tecnológicos permite el acceso a modelos visuales que muchos estudiantes son incapaces de generar o no están dispuestos a hacerlo. La capacidad de cálculo de los recursos tecnológicos amplía la serie de problemas asequibles a los alumnos, y los capacita para ejecutar procedimientos rutinarios con rapidez y seguridad.

Cuando los estudiantes usan estas herramientas tecnológicas, disponen de más tiempo para desarrollar conceptos y para modelizar, pueden centrar su atención en tomar decisiones, reflexionar, razonar y resolver problemas. La tecnología puede potenciar la implicación de los alumnos en las ideas matemáticas abstractas, y en su dominio, enriquecer la gama y calidad de las investigaciones. Por tanto, mediante un uso adecuado de las calculadoras y ordenadores, los estudiantes pueden aprender más matemáticas y con mayor profundidad.

La tecnología ofrece posibilidades de adaptación de la enseñanza a las necesidades especiales de los alumnos: los que se distraen con facilidad pueden centrarse más intensamente en las tareas con ordenadores; los que tienen dificultades de organización pueden beneficiarse de las restricciones impuestas por el entorno de los mismos y, los alumnos con discapacidades físicas aumentan radicalmente sus posibilidades matemáticas con las tecnologías especiales.

Para que la tecnología constituya una parte esencial de las clases, las herramientas tecnológicas tienen que seleccionarse y usarse de maneras que sean compatibles con los objetivos educativos, no deberían utilizarse como sustituto de los conocimientos e intuiciones básicos, sino que pueden y deberían usarse para potenciarlos.

“En los programas de enseñanza de las matemáticas, la tecnología debería utilizarse amplia y responsablemente, con el objetivo de enriquecer el aprendizaje” (NCTM, 2.000, p. 26).

Cuando estos instrumentos se consideran materiales esenciales de enseñanza para todos los alumnos, las dotaciones económicas correspondientes deben reflejar este punto de vista, teniendo en cuenta los costes de adquisición y mantenimiento, y también los costes de preparación y apoyo al profesorado para utilizarlos al servicio de los objetivos educativos.

El uso eficaz de la tecnología en las clases de matemáticas depende del profesor, por lo que éste debería experimentar por sí mismo cómo la tecnología puede mejorar el aprendizaje de matemáticas significativas y explorar modelos para incorporarla a su práctica docente. Además, debe integrarse en el programa de matemáticas, no tratarse como un añadido llamativo. Para que la incorporación de nueva tecnología llegue a resultar suficiente y adecuada para la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de la asignatura serían necesarios unos planes coherentes y comprensivos de puesta en práctica.

Cuando los alumnos utilizan calculadoras u ordenadores, con frecuencia emplean tiempo trabajando de forma que parece que lo hacen independientemente del profesor, pero esta impresión es falsa. La tecnología no sustituye al profesor. En un aula bien equipada tecnológicamente el profesor desempeña varios papeles importantes, toma decisiones que afectan notablemente al aprendizaje de sus alumnos. En principio, puede decidir si emplea tecnología, cuándo y cómo hacerlo. Por ejemplo utilizando la tecnología para enriquecer las oportunidades de aprendizaje de sus alumnos, seleccionando o creando tareas matemáticas que se beneficien de lo que ella puede hacer bien y eficientemente: hacer gráficas, visualizar, calcular y proporcionar datos y recursos de Internet y de la World Wide Web. Además, al trabajar con herramientas tecnológicas en clase, los estudiantes pueden mostrar con mayor facilidad sus formas de pensar sobre las matemáticas, por lo que el profesor tiene oportunidad de observarlos y centrarse en su razonamiento. De este modo, la tecnología ayuda en la evaluación permitiendo a los profesores examinar los procesos seguidos en las investigaciones de los alumnos, así como los resultados, y enriqueciendo, por tanto, la información disponible para tomar decisiones relativas a la enseñanza.

Los instrumentos tecnológicos no sólo influyen en cómo se enseñan y aprenden las matemáticas, sino que también afectan a qué se enseña y a cuándo aparece un tema en el currículo. Gracias a la tecnología, los niños pueden explorar y resolver problemas que incluyan números grandes, o pueden investigar las características de figuras por medio de programas de Geometría dinámica. Los alumnos de Educación Primaria pueden organizar y analizar grandes conjuntos de datos. Los de Primer Ciclo de ESO, pueden estudiar relaciones lineales y las nociones de pendiente y variación uniforme mediante representaciones en el ordenador, y realizar experiencias físicas con laboratorios controlados por ordenador. Los alumnos de Segundo Ciclo de ESO y del Bachillerato pueden usar simulaciones para estudiar distribuciones muestrales, y pueden trabajar con sistemas algebraicos por ordenador que realizan eficientemente la mayoría de las manipulaciones simbólicas que constituían el centro de los programas tradicionales de esta etapa educativa.

> La tecnología puede ayudar a los profesores a relacionar el desarrollo de las destrezas y los procedimientos con el desarrollo más general del conocimiento matemático. Cuando algunas destrezas, antes esenciales, son menos necesarias debido al uso de los instrumentos tecnológicos, se puede pedir a los alumnos que trabajen a más altos niveles de generalización y abstracción. El trabajo con simulaciones virtuales de experiencias físicas o con Logo, puede permitir a los niños ampliar su experiencia física y desarrollar su comprensión inicial de ideas complejas como las implícitas en el diseño de algoritmos. Los programas de geometría dinámica, permiten la experimentación con objetos geométricos con un enfoque explícito en las transformaciones geométricas. De modo semejante, las utilidades gráficas facilitan la exploración de las características de los tipos de funciones. A causa de la tecnología, muchos tópicos de la Matemática Discreta adquieren nueva importancia en las actuales clases de matemáticas; las fronteras del paisaje matemático están transformándose.
>
> NCTM, 2.000, p. 28

Hasta aquí el resumen de El principio tecnológico, que precisamente acabamos con los dos párrafos anteriores porque en ellos podemos leer casi todas las aplicaciones de la tecnología a la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas escolares.

Pero ahora quisiéramos dar y justificar otro significado de «tecnología» que engloba el que acabamos de ver aun siendo anterior y que nos parece más ajustado a su uso en el proceso educativo.

Bishop (1.991) menciona el trabajo de White (1.959) el cual agrupa los componentes de la cultura en cuatro categorías:

- Ideológica: se compone de creencias, depende de símbolos, filosofías.
- Sociológica: costumbres, instituciones, normas y pautas de comportamiento interpersonal.
- Sentimental: actitudes, sentimientos relacionados con personas, comportamiento.
- Tecnológica: fabricación y empleo de instrumentos y utensilios.

De acuerdo con White (1.959), calificaríamos como tecnológicos, además de los ordenadores y las calculadoras, los instrumentos, utensilios, herramientas, genéricamente los denominados materiales didácticos manipulativos, al menos los estructurados (que han sido fabricados para su uso en la enseñanza y el aprendizaje), que, como a continuación vamos a dejar constancia, se utilizan también en las aulas, y más cuanto más pequeños son los alumnos. Nos estamos refiriendo a los bloques lógicos, los bloques aritméticos multibase, los ábacos, las regletas, las teselas, los geoplanos, los cuerpos geométricos, los equipos completos de metrología, los juegos de probabilidad, etc.

En primer lugar quisiéramos puntualizar el concepto «manipulación»: "cuando hablamos de manipulación en matemáticas se está haciendo referencia a una serie de actividades específicas con materiales concretos, que faciliten la adquisición de determinados conceptos matemáticos" (Cascallana, 1.988, p. 29). No se trata por tanto de coger algo con las manos, de jugar, es algo más, la manipulación es un procedimiento de aprendizaje.

El desarrollo intelectual de los niños desde los niveles de Educación Infantil hasta el nivel 6 de Primaria, según la teoría psicogenética de Piaget, se corresponde con las etapas preoperatoria (Infantil y Primer Ciclo de Primaria) o de las operaciones concretas (Segundo y Tercer Ciclo de Primaria), siendo una de las características de la última la realización de operaciones reversibles con materiales concretos. En las citas que transcribimos seguidamente vamos a ver como NCTM (2.000) sugiere, aconseja, la utilización de materiales didácticos manipulativos en estos niveles.

"Para entender y utilizar las ideas matemáticas es fundamental la forma en que se representen", dice en la p. 71.

Un poco más adelante aclara:

> El término «modelo» tiene muchos significados; por eso no es sorprendente que se use de maneras muy diferentes en las discusiones sobre educación matemática. Por ejemplo, se emplea para referirse a los materiales físicos con los que trabajan los alumnos: modelos manipulativos.
>
> NCTM, 2.000, p. 74

En los Estándares para el período Educación Infantil-Primer Ciclo de Primaria encontramos:

> Los modelos concretos pueden ayudar en la representación de números y en el desarrollo del sentido numérico; pueden también ser de utilidad para dar sentido al uso de símbolos escritos y en la construcción de los conceptos referentes al valor posicional.
>
> NCTM, 2.000, p. 84

> Las representaciones hacen las matemáticas más concretas y asequibles a la reflexión. Los alumnos pueden representar ideas con objetos que pueden moverse y disponerse de otro modo. En estas representaciones concretas descansa el fundamento del empleo posterior de símbolos.
>
> NCTM, 2.000, p. 141

Y en los Estándares para el período 3.º a 5.º de Primaria, podemos leer:

> En los niveles 3-5, los alumnos necesitan desarrollar y usar una variedad de representaciones de ideas matemáticas para modelizar problemas, investigar relaciones matemáticas y justificar o refutar conjeturas. Deberían utilizar representaciones informales, tales como dibujos, para destacar diversas

características de los problemas; emplear modelos físicos para representar y comprender ideas como la de la multiplicación y la del valor posicional.

NCTM, 2.000, p. 210

Como conclusión, ante la variedad de instrumentos, utensilios, materiales a utilizar en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, que a pesar de sus diferencias comparten muchas de sus cualidades (motivar, enriquecer el aprendizaje, modelizar, permitir examinar los procesos seguidos por los estudiantes en las investigaciones, etc.), estableceríamos por tanto, dos clases de tecnologías:

- Tecnología electrónica: materiales didácticos que contienen circuitos impresos integrados y chips. Tendríamos aquí, entre otros, a los ordenadores y las calculadoras.
- Tecnología no electrónica: los materiales didácticos manipulativos.

1.2. ACCIONES Y RESPONSABILIDADES PARA LA REALIZACIÓN DE LOS PRINCIPIOS

Los profesores y los alumnos son los protagonistas de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, las decisiones que toman los primeros cada día determinan la calidad y efectividad de la educación matemática que reciben los segundos, y la respuesta de éstos colaborará o no en la consecución de los logros deseados, pero ambos son sólo dos de las partes del complejo sistema educativo. Los formadores del profesorado en ejercicio, los administradores educativos, los profesores universitarios encargados de la formación inicial del profesorado, las familias, los tutores, los miembros de la comunidad, las sociedades, colegios, organizaciones profesionales y los encargados de establecer la política educativa, poseen recursos, influencia y responsabilidades que pueden facilitar a los profesores y sus alumnos el éxito en su tarea.

A continuación vamos a ver las acciones y las responsabilidades de cada una de las partes del sistema educativo para la realización de los Principios.

1.2.1. LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS

"Los profesores de matemáticas tienen que desarrollar y mantener los conocimientos matemáticos y pedagógicos necesarios para enseñarlas bien" (NCTM, op. cit., p. 380) aprovechando las oportunidades que la Administración educativa da, las que organizan los colegios o sociedades profesionales y formando grupos de compañeros que intercambian y comparten información, experiencias y motivación, para conseguir un desarrollo profesional de calidad como se merecen ellos y la sociedad de la que forman parte. Pero los profesores españoles todavía no pueden hacerlo dentro de su horario laboral.

Aunque muchas cuestiones que afectan a sus clases trascienden el control exclusivo de los profesores, son generalmente responsables de lo que ocurre en ellas y adoptando decisiones respecto a cómo ofrecer experiencias con matemáticas importantes, y cómo satisfacer la amplia gama de intereses, aptitudes y vivencias, pueden tratar de asegurar el acceso de todos los estudiantes a las matemáticas. Acceso que sería más fácil utilizando con eficacia libros de texto, materiales de apoyo, modelos manipulativos, tecnología electrónica, etc., y adaptando estos recursos a sus situaciones particulares, para satisfacer así sus objetivos educativos y las necesidades del alumnado, a la vez que usando una variedad de tipos de pruebas para evaluar a los estudiantes e integrando la evaluación en el proceso de enseñanza.

En los últimos cursos de Primaria es cuando se empiezan a configurar las actitudes de atracción o de rechazo de las matemáticas y en la ESO es cuando se consolidan y afloran con total nitidez (Gairín, 1.987), por tanto fomentar y desarrollar actitudes positivas hacia las matemáticas es un objetivo prioritario (Generalitat Valenciana, 1.992a, 1.992b), que junto con las decisiones acertadas del párrafo anterior podrían convencer a los alumnos de que pueden hacer matemáticas y disfrutarlas y podrían también evitar la desconexión de estudiantes de Secundaria, llegando incluso a ser aprendices de matemáticas seguros y comprometidos.

Dice Gairín (1.987, p. 124): “resulta de capital importancia fomentar la colaboración de los padres con la escuela a través de una exigencia de ayuda y de un proceso de información constante”. Comunicarse acerca de los objetivos matemáticos, los programas, la enseñanza y el aprendizaje, ayuda a las familias y otros educadores a entender la clase de educación matemática en la que están involucrados los alumnos, con lo que los profesores pueden conseguir reforzar sus esfuerzos.

Para hacer bien todo lo anterior, los profesores necesitan comprender los objetivos matemáticos que se marcan y sus puntos de vista sobre la educación matemática, y ser capaces de articular unos y otros de manera satisfactoria. Comprensión y articulación que debe comenzar en la formación inicial de los profesores, continuando durante su ejercicio profesional con la evaluación de los materiales curriculares y la transmisión de sus sugerencias a los formadores de profesores y a los administradores y, además, contando con ellos en las reformas del sistema educativo, analizando conjuntamente las finalidades perseguidas y convenciéndoles de los resultados esperados.

1.2.2. LOS ESTUDIANTES DE MATEMÁTICAS

“Aprender matemáticas es estimulante, gratificante y a veces difícil” (NCTM, 2.000, p. 382) pero para disfrutar las primeras cualidades y superar la última, lo más importante no es, precisamente, tener aptitudes e intereses matemáticos, sino más bien no responder emocionalmente con actitudes que son francamente negativas para toda comprensión ante la simple presencia de los símbolos matemáticos (Gairín, 1.987).

Un buen clima de clase es absolutamente necesario para potenciar positivamente el autoconcepto de los alumnos, que se ha observado favorece el aprendizaje matemático (Gairín, op. cit.), y para la existencia de una comunicación fluida que informe de lo que saben y no saben los alumnos, que hará que los profesores estén más capacitados para planificar la enseñanza y responder a las dificultades.

Como ya hemos dicho en el punto 1.1.4., además de las clases, los alumnos necesitan dedicar diariamente un tiempo para trabajar en matemáticas, que podría comenzar con un rato corto en el Segundo Ciclo de Primaria e incrementarse lenta pero gradualmente en los siguientes ciclos de Primaria y Secundaria, hasta llegar al Bachillerato.

1.2.3. LOS FORMADORES DEL PROFESORADO DE MATEMÁTICAS

> Hay una necesidad urgente y cada vez mayor de formadores del profesorado de matemáticas, esto es, de especialistas situados entre los profesores de aula y la administración, que puedan ayudar a la mejora de la educación matemática.
>
> NCTM, 2.000, p. 382

En la Comunidad Valenciana, la *Conselleria d'Educació*, a través de un concurso selecciona profesores en ejercicio, que son liberados de las clases por un periodo de cuatro años, pasando a los *Centre de Formació, Innovació i Recursos Educatius* (CEFIRE) como formadores potenciales. Pero mientras que en Educación Secundaria hay formadores centrados en matemáticas, en Educación Primaria los formadores del profesorado de matemáticas, en algunas ocasiones, tienen que hacer también de formadores en otras materias.

Los formadores deberían ser profesores con los conocimientos y la competencia necesarios para ayudar al profesorado a actualizar y perfeccionar sus conocimientos matemáticos y pedagógicos, por lo que ellos también deberían estar en un proceso de reciclaje continuo. Los profesores pueden beneficiarse mucho de los conocimientos y asesoramiento de los formadores, desde el apoyo cotidiano hasta la planificación y desarrollo de investigaciones metodológicas o de materiales curriculares.

También deberían asesorar a los encargados de la elaboración, planificación y desarrollo de la política educativa en lo concerniente a la mejora de la educación matemática, lo que podría posibilitar que profesores y administradores educativos trabajasen conjuntamente para alcanzar puntos de vista comunes sobre los objetivos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. De esta manera los profesores comprenderían sus objetivos matemáticos y sus perspectivas sobre la educación matemática y serían capaces de articular unos y otras de manera coherente y convincente, como apuntábamos más arriba.

1.2.4. LA ADMINISTRACIÓN ESCOLAR

La administración escolar es la responsable del diseño y aplicación de políticas educativas, de la asignación de recursos y de la potenciación del desarrollo profesional del profesorado.

En las estructuras y normas del sistema educativo es donde mayor capacidad de influencia tienen los administradores y, por tanto, donde quizás más se puede ver afectada la educación matemática.

Una de las facetas de esa influencia, y por tanto una de sus responsabilidades, es la aplicación de evaluaciones periódicas cuyos resultados sirvan para la aplicación de políticas que apoyen una enseñanza de las matemáticas de gran calidad.

Otra faceta es la relativa a los materiales de curriculares

> Los administradores pueden apoyar la mejora de la educación matemática estableciendo procesos eficaces para el análisis y selección de materiales de enseñanza. Estos procesos -sean en la clase, en la escuela o en otro ámbito- deberían implicar una amplia consulta con profesores y formadores del profesorado, y un profundo y cuidadoso análisis de los materiales.

> [...] Además, la adopción de nuevos materiales de enseñanza es sólo un comienzo. Independientemente de lo bien que hayan sido diseñados los materiales curriculares, es improbable que conduzcan a la continua mejora de la enseñanza a menos que los planes para la aplicación y el desarrollo profesional se formulen junto con el plan para la adopción de estos materiales.
>
> NCTM, 2.000, p. 384

Para el desarrollo profesional del profesorado los administradores deberían crear instituciones en las que los profesores tengan acceso a recursos humanos y materiales que les ayuden a alcanzar los objetivos de una educación matemática de calidad, parecidos a los anteriores Centros de Profesores (CEPs) (Rico y Sierra, 1.994) o los actuales CEFIRE de la Comunidad Valenciana, y pueden también disponer los horarios laborales para considerar dicho desarrollo como parte del trabajo del profesorado, pero desgraciadamente en la Comunidad Valenciana aún no es así y en el resto de España creemos que tampoco.

Cuando los administradores son profesores comprenden mejor y hacen juicios probablemente más acertados sobre las necesidades de la educación. Si además son especialistas en una disciplina, la situación puede ser la mejor que se podría dar para esa materia.

1.2.5. LOS PROFESORES DE EDUCACIÓN SUPERIOR

Los profesores de matemáticas escolares en España pertenecen a uno de los dos colectivos siguientes:

- profesores de matemáticas de Educación Infantil o Educación Primaria, son maestros, diplomados universitarios
- profesores de matemáticas de Educación Secundaria, Obligatoria (ESO) o Post-obligatoria, Bachillerato, son licenciados universitarios.

En ambos casos su formación inicial es competencia y responsabilidad de la universidad.

Los maestros estudian en las Escuelas Universitarias de Profesorado, en las Facultades de Ciencias de la Educación (Rico y Sierra, 1.994) o en los centros que son sedes de las áreas de conocimiento de pedagogía, de psicología y de Didácticas Especiales, como la *Facultat de Ciències Humanes i Socials* en la UJI, donde reciben la formación en contenidos matemáticos teóricos, de la que se encarga el Área de conocimiento Didáctica de la Matemática o alguna de las otras áreas de Matemáticas, la formación relativa al aprendizaje y enseñanza en general, de la que se encargan áreas de conocimiento de pedagogía y de psicología, y la formación específica del aprendizaje y enseñanza de la matemática, que está al cargo del Área de Didáctica de la Matemática.

Los licenciados reciben la formación en contenidos matemáticos teóricos en las Facultades de Matemáticas, quedando la formación relativa al aprendizaje y enseñanza en general y la formación relativa al aprendizaje y enseñanza de la matemática para después de acabada la carrera, anteriormente en el Curso de Adaptación Pedagógica (CAP), actualmente en el Master universitario en Profesor/a de Educación Secundaria Obligatoria y Bachillerato, Formación Profesional y Enseñanzas de Idiomas, que en la UJI dedica 20 créditos ECTS a la formación psico-pedagógica, 8 créditos ECTS a complementos de formación matemática, 8 créditos ECTS a la formación en Didáctica de la Matemática y 8 créditos ECTS a la investigación en Didáctica de la Matemática, además de 10 créditos ECTS a practicum y 6 créditos ECTS para el trabajo final de Master.

La colaboración entre los investigadores en educación matemática, los educadores matemáticos y los profesores en ejercicio, enriquecedora para las partes por la aportación de cada una de ellas como por lo que pueden aprender los unos de los otros, constituye un aspecto muy importante de la mejora de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas.

1.2.6. LAS FAMILIAS, OTROS EDUCADORES Y LOS MIEMBROS DE LA COMUNIDAD

La sociedad actual evoluciona con mayor rapidez que la de las décadas anteriores, evolución que afecta a todos los ámbitos, por lo que todos sus miembros necesitan comprender el cambio de objetivos y prioridades de las matemáticas escolares de comienzos del siglo XXI. Es responsabilidad de los profesores y los administradores escolares dar las explicaciones pertinentes para que las familias, otros educadores y los miembros de la comunidad comprendan dicho cambio, comprensión que además puede conseguir su participación en la mejora de la educación matemática o, cuando menos, no dificultar las iniciativas planteadas. “Las familias necesitan saber de qué opciones disponen sus hijos y por qué es importante que reciban una educación matemática amplia y rigurosa” (NCTM, 2.000, p. 385).

“La familia es el primer núcleo de experiencias de la persona y es a partir de las experiencias como se conforman las actitudes” (Gairín, 1.987, p.123). La información estereotipada acerca de las matemáticas se transmite por los padres en la enseñanza primaria y por los compañeros en la secundaria (Boswell y Katz, 1.980) por lo que el apoyo de los padres puede ser de mucho valor para convencer a sus hijos de la necesidad de aprender matemáticas y de tomar en serio la escolarización.

1.2.7. ORGANIZACIONES PROFESIONALES Y POLÍTICOS

Las sociedades, colegios, organizaciones profesionales son entes colectivos muy cualificados para proporcionar directrices y experiencia que apoyen una educación matemática de gran calidad.

Pueden elaborar informes sobre: los requisitos que debería satisfacer la preparación del profesorado de matemáticas desde Educación Infantil hasta Bachillerato; la enseñanza y sobre la formación de los estudiantes, para que sea de público conocimiento lo que opinan los expertos y como consecuencia de ello, la sociedad pueda manifestarse respecto a apoyar la investigación, el desarrollo y la financiación de la enseñanza de las matemáticas y de otros campos relacionados con ellas.

Informes que podrían servir también de asesoramiento a los políticos encargados de la educación para que legislen lo mejor posible, para que tomen decisiones que potencien la mejora de la educación matemática, para que asignen los fondos y recursos necesarios para continuar el estudio y la puesta en práctica de las mejoras.

Las organizaciones profesionales a través de sus miembros, publicaciones y reuniones, pueden centrar la atención en los temas importantes de la educación matemática.

Para finalizar daremos cuenta de actividades que llevan a cabo algunas organizaciones:

- La *Societat d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana (SEMCV)* «*AL KHWARITZMI*»: edita trimestralmente un boletín de problemas de matemáticas escolares *Problemes Olímpics*; publica un Calendario Matemático escolar, que en cada día lleva una actividad, un hecho o una curiosidad matemática, y en el curso 2.005/2.006, sumándose a la conmemoración de los 500 años de El Quijote, cada mes reseñaba un libro de literatura matemática; organiza cada curso la Olimpiada Matemática de la Comunidad y, cada dos años tienen lugar las *Jornades d’Educació Matemàtica de la Comunitat Valenciana.*

- La Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas (FESPM): edita la revista cuatrimestral «SUMA. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas»; organiza cada dos años las Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas (JAEM), que son las más importantes a nivel estatal y, en 1.996 consiguió que se celebrara en Sevilla, del 14 a 21 de julio, el 8.º Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME-8), el más importante a nivel europeo.

- La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM): como actividades realiza Simposios anuales y, el Foro Indimat, en formato electrónico, para todos aquellos dedicados a la investigación en Didáctica de la Matemática y, publica un Boletín con 2-3 números anuales, así como también las actas de los Simposios.

- Por último, la Real Sociedad Matemática Española (RSEM): convoca anualmente el premio «José Luis Rubio de Francia» para doctores en matemáticas españoles menores de 32 años; organiza la Olimpiada Matemática Española, cuyos finalistas van después a la Internacional y a la Iberoamericana; publica digitalmente un Boletín semanal durante el curso académico y La Gaceta Digital cuatrimestralmente; además de otras reuniones de carácter autonómico, estatal o internacional en las que colabora u organiza; en el año 2.006 ha conseguido que se celebre en Madrid, del 22 al 30 de agosto, el XXV Congreso Internacional de Matemática (ICM2006) de la Unión Matemática Internacional (IMU), reunión matemática de máximo nivel mundial, que se celebra cada cuatro años y que entrega, a matemáticos menores de 40 años, las Medallas Fields, consideradas como los premios «Nobel» de matemática.

Capítulo 2: APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

En este capítulo nos interesaremos por el alumno como sujeto cognitivo que ha de aprender el saber matemático en un centro escolar, institución que introduce dos restricciones, una temporal: el aprendizaje debe llevarse a cabo en un tiempo determinado fijado por la Administración educativa, y otra epistemológica: el conocimiento adquirido por medio del aprendizaje escolar debe ajustarse a un saber de referencia, el saber matemático (Balacheff, 1.996).

«Saber matemáticas» no es solamente saber definiciones, teoremas, identificar propiedades de números, magnitudes, polígonos u otros objetos matemáticos, para reconocer la ocasión de utilizarlos y aplicarlos, la persona que sabe matemáticas ha de ser capaz de usar los contenidos matemáticos para resolver problemas (Brousseau, 1.998).

Por tanto veremos en el cuarto apartado del capítulo en qué consiste aprender contenidos y, después, nos aproximaremos a modelos teóricos que nos facilitarán su comprensión.

Al buscar los fundamentos teóricos apropiados, encontramos dos tipos de teorías: unas específicamente interesadas por el aprendizaje de las matemáticas, que abordaremos en el sexto apartado del capítulo y, otras teorías del aprendizaje en general que son aplicables al aprendizaje de las matemáticas, que trataremos en el quinto apartado.

Las teorías del aprendizaje que tienen su origen en los trabajos que los psicólogos de la educación llevaron a cabo en los tres primeros cuartos del siglo XX, siguen influyendo en las concepciones de las personas implicadas en el proceso educativo bajo formas más o menos actualizadas, por lo que la Psicología ha tenido, y sigue teniendo, una influencia notable en la didáctica de las matemáticas.

2.1. ¿QUÉ MATEMÁTICAS PUEDEN APRENDER LOS NIÑOS?

Los profesores de matemáticas tenemos la misión de ampliar el conocimiento y la comprensión matemáticos que nuestros alumnos poseen y para ello preparamos detallados planes de trabajo, pero deberíamos tomar en consideración los datos que indican aquello que los estudiantes son capaces de aprender. Al buscar el nivel medio adecuado para todos a menudo nos equivocamos respecto a muchos de ellos, pues por una parte, ignoramos el hecho de que hay alumnos que no aprenden con nuestros objetivos y por otro lado, a algunos grupos de estudiantes no les proporcionamos la suficiente ampliación de conocimientos.

Como consecuencia de unos currículos bastante cargados y de nuestro entusiasmo de matemáticos por impartir tanto conocimiento matemático como podamos en el menor tiempo posible, comprometemos a los alumnos a que conozcan unos contenidos que, en el mejor de los casos, sólo aprenden a medias, y a continuación tenemos que decidir si han alcanzado un nivel adecuado que les permita pasar a lo que ya hemos previsto que trataremos después. Los datos de que disponemos indican que con frecuencia, son demasiados los estudiantes que no satisfacen nuestras expectativas. Los profesores podemos fallar con facilidad. En otras ocasiones llegamos a suponer que saben mucho más de lo que en realidad conocen. Parecen estar dando las respuestas pertinentes a lo que hemos programado, pero quizá sigan obedientemente la rutina señalada y no capten la razón de su funcionamiento.

Casi todo lo que se enseña de fracciones en Primaria se plantea otra vez en Secundaria porque los niños no han llegado a dominarlo. ¿Por qué es necesario que los alumnos de Primaria sean capaces de sumar, restar, multiplicar y dividir fracciones, incluso en algunas ocasiones difíciles? La idea básica de la operatividad, con unos cuantos ejemplos muy simples, puede ser más práctica en Educación Primaria (Orton, 1.988).

No es fácil saber con seguridad lo que los chicos pueden aprender. Con los exámenes escritos y los tests escolares usuales llegamos a conocer lo que parecen haber aprendido, pero ignoramos lo que los alumnos pueden aprender. Probablemente, el mejor método para saber lo que en realidad han aprendido y lo que hay de equívoco y erróneo en la comprensión y en la conceptuación es la entrevista individual, utilizada por incontables investigadores cuando descubrieron su valor. En este método, el profesor o el investigador formula preguntas al alumno, anota las respuestas y, posteriormente, analiza los datos obtenidos de la entrevista. Esto resulta prácticamente imposible de realizar en la situación normal del aula, además, las preguntas o las tareas deben ser cuidadosamente preparadas de modo que resulten válidos los datos recogidos de gran número de entrevistas con distintos alumnos, pero salvados todos los problemas y contratiempos los resultados de las investigaciones indican de un modo claro que los errores están muy difundidos, que existen límites en términos de niveles de comprensión alcanzables, en términos de la tasa de progreso y de muchas otras facetas del aprendizaje de las matemáticas.

Sabemos que los niños aprenden mucho mejor cuando están motivados, por tanto una de nuestras acciones como profesores debe ser encontrar los medios que hagan más atrayentes e interesantes, más relevantes y útiles, las matemáticas escolares. La otra cara de la moneda es el problema de la desmotivación a través de la ansiedad generada como reacción al contenido matemático, a una enseñanza antipática o a una variedad de factores que hacen que se dé una correlación negativa entre ansiedad y matemáticas (Gairín, 1.987). Ignoramos lo que tales chicos ansiosos podrían lograr bajo circunstancias totalmente diferentes.

Por último los alumnos aprenderían más y mejor si los profesores fuéramos excelentes docentes.

Determinadas investigaciones educativas han proporcionado una información detallada del desarrollo cognitivo de los alumnos. Estas investigaciones unidas a las explicaciones que aportan las teorías del aprendizaje, han de posibilitar, van a posibilitar una mejora.

2.2. ¿TEORÍA O PRÁCTICA EDUCATIVA?

En la enseñanza y aprendizaje la teoría describe la forma en que se aprende y la práctica prescribe cómo las personas influimos para que se aprenda, dos aspectos controvertidos que llegan a dividir a los profesores en dos grupos: los teóricos de la docencia, y los dedicados a la práctica docente. Tanto en un grupo como en el otro hay opiniones contrastadas: los que defienden que primero hay que perfilar la teoría y luego decidir cómo hay que aplicarla y los que argumentan que es la práctica la que debe conformar la teoría. Para aportar un poco de luz ante tanto claroscuro sirva la siguiente cita del profesor Van Hiele (1.986, p. 8): “hay modos de ascender de un nivel (de pensamiento) al siguiente y el profesor puede ayudar al alumno a encontrar esos modos. Para lograrlo necesita una teoría, y la práctica se sigue de ello”.

Entre los profesores de matemáticas parece haber una cierta despreocupación o tal vez desprecio por las teorías (Gómez, 1.991). Quienes creen que la enseñanza es un arte, que depende casi exclusivamente de lo que haga el profesor, sostienen que a enseñar se aprende enseñando, por lo que recelan de la utilidad de las teorías. Por otra parte están quienes consideran que las teorías son ideales y de laboratorio, para pocos alumnos, y que la realidad es otra cosa, cuestionando por tanto la validez.

Hay profesores que piensan que ya está todo inventando después de décadas y décadas de escolarización, o quienes creen que sólo es válido lo que uno es capaz de pensar, despreciando lo que posiblemente otros han pensado sobre lo mismo y muchas veces con gran acierto.

Probablemente el problema está en una falta de información y de formación del profesorado, que le proporcione una mayor capacitación didáctica y, también en ocasiones, en una falta de conexión entre teoría y práctica o de ejemplos que sirvan de pruebas de la utilidad y validez.

Una teoría debería basarse en la observación de la conducta de los alumnos en situaciones de aprendizaje. Así podría explicar lo que vemos en las aulas y nos permitiría adoptar las acciones apropiadas. Por tanto esta teoría explicaría, y podría incluso predecir, los hechos. Con datos suficientes sobre los que construir hipótesis, cabe esperar que la teoría llegue a presentar una visión sistemática de fenómenos mientras que, al mismo tiempo, su comprensión siga siendo relativamente simple.

2.3. ¿NECESITAN LOS PROFESORES CONOCER TEORÍAS?

Para desarrollar su labor, los profesores tienen que tomar decisiones respecto a algunas cuestiones como: qué contenidos impartir o, en el caso de programas oficiales, en cuáles poner más énfasis; cómo aprenden los alumnos; cómo impartir los contenidos, qué metodología utilizar; tener en cuenta las diferencias individuales o un currículo estándar y uniforme para todos; etc., adoptando por tanto posiciones teóricas al elegir determinados puntos de vista. Tales teorías «personales» están basadas en la experiencia, en la intuición y quizá incluso en creencias, fundadas más en los deseos que en los hechos. Puede que sean útiles; pero, por otro lado, quizá resultan peligrosas. Por ejemplo: para calcular las restas llevando ¿les enseñamos a los niños el algoritmo estándar o, como es mucho más fácil de comprender, sólo les enseñamos el algoritmo de descomposición? La tarea docente no puede realizarse sin aceptar unas opiniones teóricas, pero tales teorías deberán estar firmemente basadas en datos empíricos.

Las teorías generales, que se basan habitualmente en una visión sistemática extrapolada de una gama más amplia de acontecimientos y de situaciones de la que cualquier persona pueda haber experimentado y contemplado, a veces son rechazadas por los profesores como irrelevantes, muy probablemente sin haberles prestado una consideración seria. La educación resulta demasiado importante para que podamos rechazar como irrelevantes Teorías del Aprendizaje (Orton, 1.988).

En otras ocasiones, el hecho de la existencia de teorías en conflicto sobre un mismo tema es utilizado por algunos profesores para rechazarlas todas. Determinadas teorías del aprendizaje pueden estar equivocadas o quizá necesiten una adecuación o enmienda. Pero la formulación de una teoría y su observación en la práctica constituyen parte del proceso a través del cual mejoramos nuestra comprensión. Podemos aprender más del proceso de aprendizaje si estamos dispuestos a estimular la formulación de teorías y luego probar las que parezcan ofrecer mayores probabilidades de utilidad.

2.4. ACTIVIDADES MENTALES EN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

“Las matemáticas son, ante todo, una actividad mental” (Lovell, 1.961, p. 33), las matemáticas estudian las relaciones entre los contenidos matemáticos y las operaciones mentales o cálculos a que pueden dar lugar. La formación de la capacidad matemática: el llamado «saber hacer» (D’Amore, 2.005), incluye tanto el uso de conceptos, como de estrategias (el saber demostrar, el saber resolver,...), como de actividades algorítmicas (el saber calcular, el saber operar,...), como de actividades comunicativas (lenguaje y símbolos matemáticos). Algunas de estas capacidades tienen que ser aprendidas, retenidas y reproducidas; han de ser combinadas con otros conceptos, símbolos, métodos y demostraciones; es necesario operar conjuntamente con todo ello y «manejarlo» para que sirva a las tareas de matemáticas. El niño, el alumno, para razonar matemáticamente necesita poseer los contenidos, aunque no sea capaz de definirlos verbalmente (Lovell, 1.961).

Diversos investigadores se han ocupado de intentar clasificar las actividades mentales que tienen lugar en el aprendizaje. Entre los más sobresalientes podemos citar a: Polya (1.945), que examinó el proceso de resolución de problemas matemáticos; Bloom y cols (1.956), que analizaron los objetivos de la educación en el campo cognitivo; Skemp (1.971), que examinó los procesos que hay que adoptar al operar en matemáticas; Gagné (1.970, 1.977), que describió ocho tipos de aprendizaje, y Brown (1.978), que señaló que existían cuatro tipos de aprendizaje matemático: memorización simple, aprendizaje algorítmico, aprendizaje conceptual y resolución de problemas.

Las cuatro categorías cognitivas de Brown consideramos que presentan una estructura adecuada para un análisis, porque se hallan ligadas de manera compleja en el proceso de aprendizaje (Orton, 1.988) y las tres primeras estaban o están siendo descuidadas a favor de la resolución de problemas, cuando tanto necesita ésta de aquéllas, por lo que a continuación vamos a desarrollarlas brevemente.

2.4.1. MEMORIZACIÓN SIMPLE

La disposición inmediata del conocimiento es evidentemente un factor de eficacia, por lo que la memorización de contenidos matemáticos es importante para su uso eficaz.

Las matemáticas están compuestas por innumerables contenidos, como por ejemplo:

- palabras (multiplicador, perímetro, cateto, media aritmética)
- símbolos (+, -, x, ÷, %, <)
- hechos numéricos (tablas de las operaciones, $a^n \times a^m = a^{n+m}$)
- fórmulas ($A = \pi r^2$, $[a + b]^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$)
- reglas (jerarquía de las operaciones, regla de Ruffini)
- propiedades (conmutativa, asociativa, distributiva)
- etc.

Muchos de éstos no están asociados a algún conocimiento previo o no representan un hecho significativo para el alumno y queremos que desde edades tempranas los memoricen.

Pretendemos que consigan una retención a largo plazo junto con una inmediata memorización. ¿Cómo conseguirlo? En el planteamiento clásico se creía conseguir la conservación del conocimiento con el aprendizaje memorístico, se consideraba que la práctica repetitiva era la respuesta al problema de fijación del conocimiento en la memoria, aunque posteriores dificultades de memorización indican que el ejercicio a menudo no logra su objetivo, pues un aprendizaje memorístico carente de significado es relativamente inútil.

Planteamientos más actuales consideran que se precisa la repetición, pero es menos necesaria en aprendizajes significativos que en aprendizajes memorísticos y que en los aprendizajes significativos la retención es mayor, más duradera, que en los aprendizajes repetitivos (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978). En otras palabras, la retención y la memorización son más fáciles si lo que se ha aprendido es significativo en relación con la estructura de conocimientos ya existente en la mente del que aprende.

¿Cómo conseguir la memorización con alumnos que se inician en las matemáticas, con alumnos que prácticamente no tienen ninguna estructura matemática en su cabeza? Las palabras y los símbolos son, en cierto sentido, arbitrarios y por eso han de ser aprendidos memorísticamente, es en ese momento cuando el docente debe valerse de recursos y estrategias que hagan del proceso de memorización un juego para los niños.

Más aun, cuando un alumno avanza a través de las matemáticas probablemente tendrá alguna necesidad de aprendizaje memorístico, sobre todo en relación con ciertos términos y determinados símbolos. El vocabulario y los símbolos matemáticos intervienen ciertamente en la conceptuación, porque capacitan al individuo para captar y aclarar los conceptos o actúan como un marco de referencia, además hacen que sea posible la comunicación de nuestros pensamientos a otras personas, bien de palabra o por escrito (Lovell, 1.961).

En conclusión, “en el aprendizaje de las matemáticas, y sobre todo en los primeros años, parece inevitable que esté presente el aprendizaje memorístico o por simple asociación” (Orton, 1.988, p. 39).

2.4.2. APRENDIZAJE DE ALGORITMOS

El aprendizaje de las matemáticas se interesa mucho por el aprendizaje de algoritmos, hasta el punto que durante años aprender matemáticas ha sido aprender a hacer las cuatro operaciones básicas. En la Educación Primaria se trabajan con los niños los algoritmos estándares de las operaciones aritméticas, en el Primer Ciclo se les enseña el de la adición, en Segundo Curso el de la sustracción (el «y llevo una»), en el Segundo Ciclo el de la multiplicación, luego viene el de la división y así, curso tras curso en la escolaridad obligatoria y después en el Bachillerato, se les va enseñando los algoritmos de las operaciones con fracciones, de cálculo del máximo común divisor y del mínimo común múltiplo, de operar con matrices, el método de Gauss para resolver sistemas lineales de ecuaciones, etc.

La palabra algoritmo procede de Al-Khwarizmi, el más conocido matemático musulmán de su época, también astrónomo y geógrafo, Mohammed Ibn Musa abu Djafar Al-Khwarizmi, que nació probablemente el año 780 en la ciudad persa de Khwarizm (actual Khiva, en Uzbekistan) y falleció en Bagdad (Irak) hacia el año 850. Su nombre significa «Mohamed, hijo de Moisés, padre de Jafar, el de Khwarizm».

De su aritmética, posiblemente denominada originalmente *Kitab al-Jam'a wal-Tafreeq bil Hisab al-Hindi*[6], sólo se conserva la versión latina, *Algoritmi de Numero Indorum*, del siglo XII. En esta obra describe con detalle el sistema hindú de numeración posicional en base 10 y la manera de hacer cálculos con él. Fue esencial para la introducción de este sistema de numeración en el mundo árabe y posteriormente en Europa. Posiblemente fuese el primero en utilizar el cero como cifra. En particular, muestra las ventajas de usar el sistema posicional hindú, un atrevimiento para su época, dado lo tradicional de la cultura árabe. La exposición clara de cómo calcular de una manera sistemática, por medio de algoritmos diseñados para ser usados con algún tipo de dispositivo mecánico similar a un ábaco, más que con lápiz y papel, muestra la intuición y el poder de abstracción de Al-Khwarizmi. Hasta se preocupaba de reducir el número de operaciones

[6] URL: http://mimosa.pntic.mec.es/jgomez53/matema/conocer/**alkhwarizmi**.htm consultado 8-2-2.009

necesarias en cada cálculo. Por esta razón, aunque posiblemente no haya sido él el inventor del primer algoritmo, merece que este concepto esté asociado a su nombre.

Su tratado de álgebra *Kitab al-jabr wa'l-muqabala* es una introducción compacta al cálculo, usando reglas para completar y reducir ecuaciones. Además de sistematizar la resolución de ecuaciones cuadráticas, también trata geometría, cálculos comerciales y de herencias. Quizás éste es el libro árabe más antiguo conocido y parte de su título da origen a la palabra álgebra.

Entendemos por algoritmo una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza a un resultado (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades), en un número finito de pasos, cada uno de los cuales es sólo una instrucción (Bouvier y George, 1.979).

Dados los muy escasos conocimientos de la mayoría de la población hasta el siglo XVI, los cálculos numéricos los realizaban casi exclusivamente los abaquistas, personas que hacían las operaciones en tablas con bolas, o también con piedras, fichas u otros objetos, cálculo manipulativo, siguiendo una serie de instrucciones, algoritmos manipulativos. En este siglo, en Europa, algunas personas empezaron a calcular sobre papel utilizando símbolos y fórmulas que permitían hacer los mismos cálculos de manera más cómoda y también mucho más rápida, los algoritmos de cálculo representativo escrito, que supusieron una revolución en la matemática. (Segarra, 2.008)

A lo largo de la historia, la enseñanza y el aprendizaje de los algoritmos de las operaciones escritas es un saber al que se le ha dedicado una gran parte del tiempo escolar y que ha tenido siempre un espacio asegurado en los temarios, pero no se han enseñado siempre los mismos algoritmos ni de la misma forma. En su evolución Gómez (1.996) distingue cinco métodos predominantes: el *reglado*, el *razonado*, el de *repeticiones*, el *intuitivo* y el *orientado a la estructura*.

- *El método de Reglas*

Hasta finales del siglo XVIII, el cálculo se presentaba de un modo reglado y variado en lo escrito, con ejemplos aclarativos y ausencia de argumentaciones justificativas; métodos que eran más cómodos, simples, seguros y breves que lo conocido. Se daba mucha importancia a las pruebas de las operaciones, debido a que tradicionalmente el cálculo se efectuaba sobre soportes donde los resultados intermedios se borraban y era imposible repasar la operación, por lo que se hacía necesario efectuar la prueba.

Desde entonces, los métodos de cálculo derivados del sistema de numeración decimal están esencialmente configurados como los conocemos hoy en día.

- *El método de Razonado*

Con el establecimiento, en los comienzos del siglo XIX, de un currículum obligatorio común para los estudiantes de un mismo nivel educativo, entre las materias de estudio se incluyó la aritmética, en cuya enseñanza se explicaba la lógica de las reglas de cálculo y el análisis de los motivos que la sustentan (no hay demostraciones, en el sentido formal), además, se restringió a uno sólo los métodos de cálculo por operación: «las cuatro reglas».

- *El método de las Repeticiones*

En la década de 1.920, la enseñanza del cálculo está dominada por el método de las repeticiones siguiendo las directrices marcadas por Thorndike (1.922). El aprendizaje, mecánico, de una secuencia de pequeños pasos, tenía como objetivo fundamental adquirir el automatismo, a base de repeticiones del acto.

- *El método de Intuitivo*

En el segundo cuarto de siglo XX aparece el método Intuitivo. Se trata de un empirismo razonado, pero con razonamientos apoyados siempre en imágenes muy concretas; de este modo se procura cultivar tanto la intuición como el raciocinio del niño, para que la matemática sea una cuestión de comprender, «significativa», con ejercicios prácticos que se relacionaban con la vida diaria.

Características del método son:

- La intuición tiene gradaciones dependiendo de que se empleen objetos, imágenes (dibujos) o símbolos (u, d, c,...) para los diferentes órdenes de unidad del Sistema de Numeración Decimal.
- Hay variantes en la representación, así, además de la representación de los números mediante objetos, está la representación geométrica o la representación gráfica.
- Debe ser cíclico; es decir, una operación o una regla no es dominada de una vez por el alumno, sino que de año en año, se amplía y se profundiza hasta que se domine la operación completamente.
- También debe ser dinámico; es decir, no darle al alumno los conocimientos matemáticos como cosa hecha, sino hacerle ver su proceso. Capacitarle para el descubrimiento de nuevas verdades tiene más interés que enseñarle las fundamentales.

- *El método Orientado a la Estructura*

Aproximadamente alrededor de 1.960, la enseñanza de la matemática se orienta hacia la comprensión de la estructura del contenido, entendida como los conceptos básicos de los procedimientos y las relaciones sobre las que se basan.

Como la estructura matemática no es evidente en los procedimientos, los defensores de este enfoque vieron en los materiales manipulativos una ayuda para su compresión, por ejemplo los Bloques Aritméticos de Dienes.

Para que un algoritmo se aprenda con «significado», se deben comprender sus relaciones estructurales con los conceptos de los Sistemas de Numeración Posicional –agrupamientos, órdenes de unidad, valor de posición y formas equivalentes de escribir un número- y con las propiedades de las operaciones: conmutativa, asociativa y distributiva. La notación estándar: simbólica, vertical, y reducida, debería aparecer después del trabajo con otras representaciones concretas y cada vez más esquemáticas, bajo la idea de que es preciso retrasarla hasta que se haya comprendido lo que representa.

Estos métodos que surgieron como intento de solución a los problemas de su enseñanza, todos, sin excepción, han sido motivo de objeciones: el reglado, por ocultar la lógica de los procedimientos; el razonado, por requerir un nivel de reflexión para el que no están capacitados los niños; el método de las repeticiones, por mecánico; el método intuitivo, por no mostrar la estructura de las matemáticas y centrarse en la materialización de los procedimientos y propiedades y, el método orientado a la estructura, porque desatiende la práctica, cuando no la elimina, ya que considera que los programas basados en los ejercicios prácticos no responden a las necesidades reales de los niños, que son aburridos y que destruyen su motivación. (Gómez, 1.996)

En el aprendizaje algorítmico los alumnos deben recordar un procedimiento paso a paso, que si no tiene sentido para ellos dificulta su aprendizaje; luego suele seguir una práctica, un entrenamiento repetitivo, para la automatización, que debe ser posterior, en primer lugar a la comprensión y en segundo lugar, a la familiarización con los procesos de cálculo, de forma que los estudiantes tengan siempre como alternativa ante el olvido la reconstrucción o fabricación de procedimientos propios, aunque éstos sean más rudimentarios y artesanales que los algoritmos aprendidos (Chamorro, 1.995). Cuando estas acciones automatizadas carecen de significado para los alumnos, también carecen de valor funcional y pedagógico (Fernández, et al., 1.991), por lo que puede suceder que el niño recuerde el algoritmo pero al aplicarlo mecánicamente obtenga una respuesta incorrecta.

La distinción entre «comprensión instrumental» y «comprensión relacional» (Skemp, 1.976, 1.989) que explicamos a continuación, ayuda a apreciar este hecho.

Los profesores, a través de su experiencia y de las interacciones diarias con sus alumnos, pueden diferenciar aquellos estudiantes que ante un problema son capaces de establecer relaciones entre los datos, anticipar su comportamiento, controlar el sentido de lo que obtienen, etc., de otros alumnos que intentan aplicar un algoritmo tras otro sin poder hacer alguna previsión y sin poder argumentar por qué hacen una u otra elección. El primer grupo de estudiantes relaciona el algoritmo con sus conocimientos previos y decimos que posee una «comprensión relacional», mientras que el segundo grupo, el que logra aplicar un algoritmo y, tal vez, conseguir la respuesta correcta, posee una «comprensión instrumental» (Sáiz, 1.994).

Uno de los ejemplos más significativo lo encontramos en la división de fracciones, por ejemplo 2/3 ÷ 5/7. Para hallar instrumentalmente el resultado, se procede del siguiente modo: 2/3 ÷ 5/7 = 2/3 x 7/5, se invierte la segunda fracción y se sustituye dividir por multiplicar, que conduce a la confusión en el recuerdo de qué fracción había que invertir. Relacionalmente, se quiere saber cuántos 5/7 hay en 2/3, por ello, la idea de equivalencia está implícita. ¿A qué edad alcanzan los alumnos la comprensión relacional? La verdadera comprensión no parece estar al alcance de la mayoría de los estudiantes dentro de los años de escolaridad obligatoria (Orton, 1.988).

Algunos investigadores van más allá, así Watanabe (2.002), basándose en los resultados del *National Assessment of Educational Progress (USA)* que muestran que un alumno intermedio sabe operar fracciones pero le falta entender el significado de fracción, propone la eliminación de fracciones del currículo de Primaria.

Generalmente los profesores tratan de enseñar algoritmos para su compresión relacional, pero frecuentemente los alumnos sólo retienen el procedimiento y no penetran en el significado, por lo que la conclusión que cabría extraer para la enseñanza es que tendremos que examinar muy atentamente aquellos algoritmos que sabemos que sólo se comprenden instrumentalmente, decidir si en realidad resultan necesarios y, si es así, si deberían desarrollarse a edad tan temprana como a menudo se abordan. Algoritmos como el de la división con varias cifras, que los alumnos no lo comprenden ni lo precisan, como la mayoría de los algoritmos de fracciones, son ahora muy difíciles de justificar y más aún, en la escuela primaria (Orton, 1.988).

El objetivo fundamental de la matemática es la resolución de problemas. En las aulas, proponemos y facilitamos métodos algorítmicos o universales para resolver problemas, no debemos esperar a enseñar a los alumnos a aplicar bien los algoritmos al cálculo de las operaciones, para después pasar a resolver problemas que se relacionan con su entorno.

La presentación en la escuela de los algoritmos antes de que los niños y las niñas los necesiten, provoca que no piensen cuando hacen un problema, si no que, al contrario, dejen de pensar y apliquen una fórmula incorrecta de resolución.

> Frecuentemente, se observa niños y niñas en etapas tempranas, a los cuatro y cinco años, que resuelven problemas sobre situaciones aditivas y sustractivas, también algunas veces situaciones multiplicativas, por ejemplo:
>
> - Carla tiene un cuento y le regalan dos más. ¿Cuántos tiene?
> - María tiene tres caramelos y se come uno. ¿Cuántos caramelos le quedan?
> - ¿Cuántas patas tienen dos gallinas?
>
> Estos problemas los solucionan sin demasiadas dificultades y sin ayuda de las personas adultas. En cambio, si estos mismos problemas se presentan a los niños de Primero, automáticamente preguntan:
>
> - ¿Es de sumar o es de restar?
>
> ¿Qué ha pasado? Pues, que en Primero de Primaria les hemos dado un método externo de resolución, es decir, han aprendido a sumar y a restar, los alumnos han utilizado un método universal; en cambio, a los cuatro y cinco años han utilizado su propio método, porque todavía no han aprendido los algoritmos aritméticos básicos.
>
> Es este el motivo de reconducir los aprendizajes de la matemática: no se tendrían que facilitar métodos, como los algoritmos, hasta que el alumnado no los requiera.
>
> Segarra, 2.008, p. 12

El hecho que los alumnos generan sus propios algoritmos más fácilmente en situaciones vivenciales, y nuestro conocimiento de los algoritmos estándares y la observación de la regularidad de sus respuestas ante diversos problemas, nos permitirá, partiendo de sus algoritmos, introducir cambios funcionales en esos esquemas, mediante interacciones con los alumnos, para llevarlos hasta los algoritmos universales, ya que "es un grave error ignorar los algoritmos generados por los niños, a favor de los algoritmos estándares de lápiz y papel que actualmente se enseña en las escuelas primarias" (Steffe, 1.994, p. 8), pues en caso contrario nos encontramos con que después de varios años de preparación matemática, la actuación del alumno se limita a conocer y aplicar los conocimientos matemáticos a través de algoritmos que se adecuan a los problemas propuestos, y tratar de lograr su mecanización (Gairín, 2.001).

La mayoría de las persones no realiza operaciones escritas. Más aun, ¿cuántas personas hacen a la semana una división de dos cifras o más? Si no tenemos en cuenta a los estudiantes y sus profesores, comprobamos fácilmente que los algoritmos de las operaciones escritas se utilizan poco o muy poco actualmente. Es evidente que las operaciones escritas que trabajamos en Ios centros educativos cada vez son menos necesarias.

Las necesidades de cálculo actual van por un camino muy diferente. ¿Debemos seguir enseñando los algoritmos? No hay una respuesta consensuada, aunque sí parece haberla sobre la necesidad de efectuar un cambio que disminuya el énfasis sobre «las cuatro reglas» en favor del cálculo variado: una integración del cálculo escrito, estimado, redondeo numérico, mental y con calculadora, según convenga en cada caso (Gómez, 1.996; Segarra, 2.008).

En lo relativo al cálculo escrito ¿qué necesitaríamos saber para abordarlo con éxito? Unas sugerencias:

- Conocer las nociones aritméticas que gobiernan los algoritmos, para aplicarlas adecuadamente:

- *Concepto base del sistema y de valor de posición*: diez unidades de un orden equivalen a una unidad de orden inmediato superior y su reciprocidad.
- *Alteraciones invariantes*: como la compensación basada en la propiedad de las sustracciones equivalentes (conservación de la diferencia) que justifica el «y llevo una» en la sustracción.
- *Leyes*: que determinan la estrategia del proceso, como aplicar la propiedad distributiva varias veces, lo que justifica el algoritmo de la multiplicación por varias cifras.

La importancia de estas nociones es tal que, además, "este conocimiento permite asentar firmemente las bases que sustentan la operatoria algebraica elemental" (Gómez, 1.996, p. 15).

- La disposición práctica de los resultados parciales es convencional, lo importante es calcularlos correctamente y aplicar las nociones anteriores; tampoco es cierto que sólo haya una manera de hacerlo.
- Que los estudiantes encuentren sus propios caminos, que hagan una construcción progresiva basada en el significado de las operaciones (Treffers, 1.987), y diferencien lo que es fundamental de lo que es superfluo en la disposición práctica.

2.4.3. APRENDIZAJE DE CONCEPTOS

> Existen problemas en la rememoración de hechos matemáticos y hay dificultades en el aprendizaje significativo de los algoritmos, pero quizá el peor aspecto de todo sea la estructura conceptual o base de las matemáticas. El aprendizaje de esta materia consiste en la construcción de un entendimiento de nuevos conceptos, basándose en aspectos previamente comprendidos.
>
> Orton, 1.988, p. 46

Son ejemplos de conceptos matemáticos: correspondencia, número, adición, área, ángulo, semejanza, probabilidad, etc.

El niño muy tempranamente empieza teniendo «perceptos», es decir, interpretando los estímulos del mundo exterior (visuales, sonoros, táctiles, olfativos o del gusto) y, sin tener conciencia de ello, comienza a discriminar, abstraer y generalizar. A medida que progresa en edad tiene lugar mayor grado de concienciación y deliberación, y las abstracciones y generalizaciones se dan con mayor facilidad y rapidez si vive experiencias estimulantes y si éstas son paralelas a su desarrollo neurofisiológico. La secuencia aplicada reiteradamente es: percepción-abstracción-generalización.

Los adultos podemos proporcionarnos o adecuarnos a un medio que nos ayude a progresar, pero los niños pasan por sí mismos del percepto al «concepto», entendiendo que "un concepto es una generalización a partir de datos relacionados, y posibilita responder a, o pensar en, estímulos específicos o perceptos de una manera determinada" (Lovell, 1.961, p. 25).

Para Piaget, Lovell (1.961), Skemp (1.971), Orton (1.988), las clasificaciones son la base de la generalización, pues en la formación de un concepto la persona ha de diferenciar y reconocer las cualidades comunes y distinguirlas de aquellas otras que son diferentes, tiene que clasificar sus experiencias y encontrar conexiones entre ellas, de ahí la importancia de las relaciones y las clasificaciones en la educación básica.

Un concepto es una idea, un objeto puramente mental -inaudible e invisible-, como dice Novak (1.977) los conceptos describen alguna regularidad o relación dentro de un grupo de hechos y son designados por algún signo o símbolo. Puesto que no es posible observar directamente el contenido de la mente de los demás, ni el acceso de los otros a la nuestra, tenemos que utilizar medios para designarlos o representarlos que sean audibles o visibles -palabras habladas u otros sonidos, palabras escritas u otras marcas sobre el papel- haciendo así posible la comunicación. Un símbolo es un sonido (representación lingüísticas), o algo visible (representación gráfica), conectado mentalmente a una idea. Esta idea es el significado de la representación simbólica, lingüística o gráfica. Sin una idea ligada, un símbolo es vacío, carece de significación. La representación simbólica de un concepto es un sonido, o una marca sobre papel, asociada con él; esta asociación puede hacerse después de que el concepto ha sido formado o en el proceso de formación.

Mucha gente encuentra difícil separar un concepto de su representación simbólica. Si cada vez que se encuentra un ejemplo de un concepto se escucha el nombre o se ve el mismo signo, cuando el concepto se forma, el símbolo se ha asociado tan estrechamente con él, que no son sólo los niños los que lo confunden con el concepto mismo. Un símbolo, y el concepto asociado, son dos cosas diferentes; esta distinción no es trivial, siendo la misma que hay entre un objeto y su denominación. Si un objeto es llamado por otro nombre, no cambiamos el objeto mismo; y esto es también cierto para un objeto de pensamiento, una idea matemática. Por ejemplo, el concepto de número, más concretamente, el número de dedos de una mano, y su representación, el numeral: numeral-signo (IIIII, 5, V, etc.) o numeral-nombre (cinco, *cinc*, *five*, etc.). Si el número fuera el signo, IIIII y V serían números distintos, o si el número fuera el nombre, *cinc* y *five* serían números distintos.

Al estar asociado con un concepto, el uso de un símbolo en conexión con un objeto nos ayuda a clasificar el objeto, es decir: a reconocer que dicho objeto pertenece a una clase existente.

La representación simbólica, lingüística o gráfica, puede jugar también una parte, a veces esencial, en la formación de nuevos conceptos. Escuchar o ver la misma representación en conexión con experiencias diferentes, nos predispone a reunirlas en nuestras mentes, e incrementa nuestra oportunidad de abstraer sus similitudes intrínsecas (como algo distinto de la extrínseca de ser representado por el mismo símbolo). Las investigaciones han permitido conocer que asociar distintos símbolos con clases que sólo difieren ligeramente en sus características, ayuda a clasificar con corrección ejemplos posteriores, aun en el caso que los últimos no estén simbolizados. Los símbolos ayudan a diferenciar los conceptos. (Skemp, 1.971)

Podemos distinguir dos tipos de conceptos: aquellos que proceden de nuestras experiencias sensoriales y motoras del mundo exterior, como salado, frío, azul, etc., que llamaremos «conceptos primarios», y aquellos otros que se abstraen de los anteriores, les llamaremos «conceptos secundarios», por lo que estarían más alejados de la realidad. Si el concepto ***c*** es un ejemplo del concepto ***C***, entonces diremos que ***C*** es de un orden superior a ***c***. «De orden más elevado» significa por tanto «abstraído de» y «más separado de la experiencia del mundo externo». (Skemp, 1.971)

Los conceptos matemáticos son de tipo secundario, son generalizaciones sobre relaciones entre ciertas clases de datos, pero en su formación, algunos, también hacen uso de la experiencia, por ejemplo: número, tiempo, etc. (Lovell, 1.961).

¿Cómo promover el aprendizaje de conceptos matemáticos? “En general, los conceptos de un orden superior a aquellos que una persona ya posee no pueden comunicarse mediante una definición, sino, únicamente, reuniendo ejemplos adecuados para que experimente” (Skemp, 1.971, p. 30), pero desgraciadamente no es tan sencillo, como muchos hemos podido comprobar por ejemplo con el concepto de cuadrado.

A través de ejemplos de cuadrados y del contraste con otras figuras planas (contraejemplos) parece que sea relativamente fácil de captar; pero no debemos darlo por supuesto, pues presentado un cuadrado cuyas diagonales son una vertical y la otra horizontal, los alumnos casi seguro que dirán que es un rombo, que no es un cuadrado. Parece probable considerar que entre los ejemplos de cuadrados (a partir de los cuales ha de realizarse la abstracción del concepto), no había un número suficiente de los que presentan un lado que no es paralelo al pie de la página o de la pizarra. Seguramente no hemos aplicado correctamente el Principio de variabilidad matemática de la teoría del aprendizaje de las matemáticas de Dienes (1.960).

El proceso de conceptualización es personal. Cada individuo ha de construir el suyo, no todos los alumnos logran los mismos niveles de comprensión de un concepto, distintos alumnos llegan al mismo concepto por vías distintas, pero dicho proceso puede ser ayudado desde el exterior y ser acelerado si se dispone de los medios adecuados. El lenguaje y los signos son dos factores importantes de apoyo en la adquisición de conceptos por la capacidad de comunicación que dan al individuo.

Tanto los niños como los adultos pueden haber alcanzado un concepto lo suficientemente válido para su uso en la vida cotidiana y laboral y, sin embargo, ser incapaces de definir dicho concepto en términos verbales. Esto es frecuente, y no se debe necesariamente a falta de vocabulario. Por el contrario, los profesores, tanto en la vida social como en las aulas podemos encontrar personas o alumnos que pueden usar la palabra adecuada y, sin embargo, «no tienen idea» del concepto correspondiente, por lo que el hecho no nos debe extrañar ni defraudar.

Los conceptos no se forman o adquieren espontáneamente y totalmente elaborados, sino que se van perfeccionando a lo largo de la vida, mientras el cerebro y la mente permanecen en actividad y los prejuicios no reducen la capacidad de clasificar, por eso en ocasiones nos parece que la comprensión de los conceptos es al comienzo incompleta y fragmentaria; progresivamente se va estableciendo la red de relaciones subyacentes empleando la simbología adecuada, que permite avanzar en la abstracción y generalización.

Por ejemplo, una buena comprensión del concepto genérico «número» depende de un entendimiento de los conceptos: números naturales, números enteros, números racionales, números irracionales y los números reales, y tal vez una apreciación de que ésta pudiera no ser una lista exhaustiva de las diferentes clases de números.

Es decir, una comprensión profunda y completa de un concepto es a veces no sólo innecesaria para permitir al que aprende avanzar hacia el concepto siguiente; puede incluso ser inalcanzable (Orton, 1.988) y "las definiciones pueden verse como una vía de añadir precisión a las fronteras de un concepto, una vez formado; y establecer explícitamente su relación con otros conceptos" (Skemp, 1.971, p. 30).

Es conveniente observar que a un teórico del aprendizaje como Gagné (1.970, 1.977) le costó mucho trabajo explicar que algunos conceptos pueden ser definidos y que ni él ni ninguno de los grandes teóricos ha negado que, en el aprendizaje de las matemáticas por parte de niños, resulta improbable que tengan éxito las intenciones de definir conceptos (Orton, 1.988).

El profesor Richard R. Skemp, considera dos principios objetivos para el aprendizaje de las matemáticas, cuyo conocimiento es necesario por el profesor:

> 1) Los conceptos de un orden más elevado que aquellos que una persona ya tiene, no le pueden ser comunicados mediante una definición, sino solamente preparándola para enfrentarse a una colección adecuada de ejemplos.

> 2) Puesto que en matemáticas estos ejemplos son invariablemente otros conceptos, es necesario en principio asegurarse de que éstos se encuentran ya formados en la mente del que aprende.
>
> Skemp, 1.971, p. 36

Pasamos a continuación a resumir brevemente el análisis que de ellos hace el profesor Skemp, por lo que no vamos a hacer constantes referencias al texto, indicando solamente las citas textuales.

El primero ya había sido explicitado. La mayoría de los libros de texto, no lo tienen mucho en cuenta, introducen nuevos temas no a partir de ejemplos.

Los buenos profesores ayudan a los alumnos a sacar la definición del concepto mediante una colección de ejemplos, que ha de ser adecuada, es decir, los ejemplos han de tener en común las propiedades que forman el concepto, pero no otras, para lo cual se requiere que el profesor tenga imaginación y una comprensión muy clara del concepto que ha de ser formado.

Aplicar el segundo principio significa que antes de enseñar un concepto debemos encontrar cuáles son sus conceptos «contributorios» (de orden inmediato inferior de abstracción); y, para cada uno de éstos, hemos de averiguar sus conceptos contributorios; y así sucesivamente, hasta que lleguemos a los conceptos que sí ya posee el estudiante (ver en p. 95). "Cuando se ha realizado esto, puede formarse un plan idóneo que presentará, al que aprende, una tarea posible, no una imposible" (Skemp, 1.971, p 38).

Hay otras dos consecuencias del segundo principio. La primera de ellas es que, si en la construcción de la estructura descendente de abstracciones sucesivas, en un nivel dado el grado de compresión no es bueno, cualquier contenido derivado será muy poco seguro. Esta dependencia es probablemente mayor en matemáticas que en cualquier otra materia. Por ejemplo, si un niño no ha hecho una buena conceptualización de la operación adición de números naturales, muy probablemente no comprenderá la multiplicación números naturales, pues en Primaria se introduce como una adición repetida de sumandos iguales.

La segunda consecuencia es la de que los conceptos contributorios deben estar disponibles para cada nueva etapa de abstracción. Lo cual supone que, además de haber sido adquiridos con anterioridad, han de estar accesibles cuando se necesitan, bien porque se recuerdan o trayéndolos a la memoria mediante una revisión, planificada por el profesor o *motu propio*.

Finalizado ya el resumen de los principios del aprendizaje de las matemáticas, podemos añadir que Skemp (1.971) hace una deducción más de ellos: las estructuras o jerarquías de las matemáticas. Cada concepto (excepto los conceptos primarios) se deduce de otros conceptos, y contribuye a la formación de otros; por tanto, está incorporado en una estructura de otros conceptos, es parte de una jerarquía.

El término psicológico general para una estructura mental es «esquema». Éste tiene dos funciones principales: integrar conocimientos existentes y ser un instrumento de la mente para la adquisición de nuevos conocimientos. Por tanto, un esquema es también un mecanismo para estudiar y analizar el pensamiento matemático y la formación de conceptos.

Uno de los esquemas matemáticos más básicos que aprendemos es el de los números Naturales junto con las operaciones de adición y multiplicación.

Una de las razones de la importancia del esquema como instrumento de aprendizaje, es que si los primeros esquemas son inadecuados o no existen, dificultan o imposibilitan la asimilación de conceptos posteriores.

Por ejemplo, aquel niño o niña que ha realizado un aprendizaje memorístico, que ha aprendiendo a manipular los símbolos matemáticos de tal manera que puede obtener la respuesta correcta, puede ser muy difícil de diferenciar, en sus primeras etapas, si ha conseguido un aprendizaje conceptual. La cantidad de contenidos que un niño puede memorizar es notable y la apariencia de aprendizaje matemático puede mantenerse hasta que se alcanza un nivel en el cual sólo el verdadero aprendizaje conceptual es adecuado a la situación. Como los profesores sólo podemos ver u oír los símbolos, la solución consiste en probar la adaptabilidad del niño a situaciones nuevas, si bien, matemáticamente relacionadas, situaciones en las que ante la imposibilidad de hacer uso de la memoria, desaparece la apariencia externa del progreso y se evidencia la falta de aprendizaje conceptual.

La responsabilidad del profesor en las primeras etapas del aprendizaje matemático es grande, pues además de conseguir la memorización de las manipulaciones de símbolos, debe asegurarse que tiene lugar el aprendizaje conceptual, de esquemas matemáticos. Debe planificar a largo plazo, los esquemas que serán más adaptables, tanto a las necesidades futuras como a las presentes.

Otra característica del aprendizaje de las matemáticas es que, aunque tengamos que ser más cuidadosos en las secuencias de aprendizaje que algunas otras áreas de conocimiento por la jerarquía de los contenidos, por los esquemas matemáticos, resulta posible una cierta flexibilidad, pues al fin y al cabo, quienes aprenden no son idénticos en sus necesidades y no todos logran los mismos niveles de comprensión de determinados conceptos dentro de una jerarquía. Por tanto:

> Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un sólo principio, enunciaría éste: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente.
>
> Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 1

Para finalizar este apartado un apunte sobre la teoría de los campos conceptuales de Gérard Vergnaud (Vergnaud, 1.990), en la que la conceptualización es considerada la piedra angular de la cognición (Vergnaud, 1.998). Para su autor, el conocimiento está organizado en «campos conceptuales», cuyo dominio, por parte del aprendiz, tiene lugar a lo largo de un dilatado período de tiempo, a través de experiencia, madurez y aprendizaje (Vergnaud, 1.982).

Aunque Vergnaud está especialmente interesado en los «campos conceptuales» de las estructuras aditivas y de las estructuras multiplicativas (Vergnaud, 1.983), la teoría de los «campos conceptuales» no es específica de esos campos, ni de la matemática, es una teoría neo piagetiana que pretende ofrecer un referente más fructífero que el piagetiano para el estudio del desarrollo cognitivo y del aprendizaje de competencias complejas, particularmente científicas y tecnológicas, teniendo en cuenta los propios contenidos del conocimiento y el análisis conceptual de su dominio (Moreira, 2.002).

Vergnaud (1.997, p. 6) define un «concepto», **C**, como una terna de conjuntos **C** = (**S**, **I**, **R**) donde:

- **S** es un conjunto de situaciones que dan sentido al concepto;
- **I** es un conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) sobre las cuales reposa la operacionalidad del concepto, o un conjunto de invariantes que pueden ser reconocidos y usados por los sujetos para analizar y dominar las situaciones del primer conjunto;
- **R** es un conjunto de representaciones simbólicas (lenguaje natural, gráficos y diagramas, gestos, sentencias formales, etc.) que pueden ser usadas para indicar y representar esos invariantes y, consecuentemente, representar las situaciones y los procedimientos para trabajar con ellos.

El primer conjunto –de situaciones– es el «referente» del concepto, el segundo –de invariantes operatorios (teoremas y conceptos-en-acción)– es el «significado» del concepto, en cuanto al tercero –de representaciones simbólicas– es el «significante».

El concepto de situación empleado por Vergnaud no es el de situación didáctica, más bien el de tarea, dado que toda situación compleja puede ser analizada como una combinación de tareas, para las cuales es importante conocer sus naturalezas y dificultades propias.

Define «campo conceptual» como:

> . . . un conjunto informal y heterogéneo de problemas, situaciones, conceptos, relaciones, estructuras, contenidos y operaciones del pensamiento, conectados unos a otros y, probablemente, entrelazados durante el proceso de adquisición.
>
> Vergnaud, 1.982, p. 40

En otros trabajos, Vergnaud (1.990, p. 146) define «campo conceptual» como: "un conjunto de situaciones cuyo dominio requiere, a su vez, el dominio de varios conceptos de naturaleza distinta". Por ejemplo, el campo conceptual de las estructuras aditivas es el conjunto de situaciones cuyo dominio requiere una adición, una sustracción o una combinación de tales operaciones. Análogamente, el campo conceptual de las estructuras multiplicativas consiste en todas las situaciones que pueden ser analizadas como problemas de proporciones simples y múltiples para los cuales generalmente es necesaria una multiplicación, una división o una combinación de esas operaciones.

Como se puede observar, la primera definición de campo conceptual es más extensa. Posteriormente a ella, Vergnaud destaca la idea de situaciones en las definiciones que enuncia, pues «situación» es un concepto clave de la teoría, sin embargo la definición inicial, más amplia, da una idea mejor de la complejidad de lo que él llama campo conceptual.

Son campos conceptuales entre otros:

> - las estructuras aditivas, que incluyen los conceptos de: cardinal, medida, transformaciones por aumento y disminución, composición de medidas, composición de transformaciones, de número natural y número negativo…
> - las estructuras multiplicativas, que engloban los conceptos de: proporción simple y compuesta, función lineal y multilineal, razones, cociente y producto de dimensiones, fracción, número racional, múltiplo, divisor…
> - las magnitudes espaciales: longitud, superficie, volumen
> - la lógica de clases, que constituye la referencia para entender los conceptos de propiedad, relación de inclusión, operaciones de unión e intersección, complementario de clases, conjunción, disyunción y negación de propiedades.
>
> Chamorro, 1.995, p. 89

2.4.4. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Según García Jiménez (2.002) la resolución de problemas puede contemplarse como: objetivo, contenido o metodología. Como objetivo porque la enseñanza de las matemáticas va dirigida a que el alumno aprenda a resolver problemas; como parte del contenido referido a técnicas, heurísticos y estrategias para lograrla, y como metodología porque se la considera uno de los mejores caminos para aprender matemáticas, forma de aprendizaje que trataremos en el punto 2.5.2.5.

Puede afirmarse que la finalidad de la memorización, del aprendizaje de algoritmos y del aprendizaje de conceptos es permitir al alumno operar con la matemática y, por lo tanto, resolver problemas (Orton, 1.988).

Por tanto, la resolución de problemas, corazón de las matemáticas (Halmos, 1.980)[7], dota a éstas de unas peculiaridades y proporciona un sentido propio al proceso educativo.

Principios y Estándares para la Educación Matemática dice: “el objetivo de las matemáticas escolares debería ser que todos los alumnos estén cada vez más capacitados para resolver problemas, y deseen comprometerse en ello” (NCTM, 2.000, p. 186).

Antes de continuar convendría aclarar lo que en este contexto se entiende por «problema» y «resolución de problemas», sin olvidar lo que ya afirmara Schoenfeld (1.992) que la literatura sobre resolución de problemas de matemáticas es difícil de interpretar porque «problema» y «resolución de problemas» tienen y han tenido significados variados y, en ocasiones, contradictorios, por lo que no es nuestra intención zanjar dicha discusión.

Autores como Schoenfeld (1.983), Stanic y Kilpatrick (1.988), o Webster’s (1.979)[8], llegan a recoger hasta 14 significados diferentes para la utilización del término «solución de problemas en matemáticas». No obstante, Webster’s (1.979, p. 1.434) señala que estos distintos significados se pueden resumir fundamentalmente en dos. Por un lado, solucionar

[7] Citado por National Council of Teachers of Mathematics (2.000) y por Puig (1.996)
[8] Citados por Pérez (1.994)

problemas es equivalente a cualquier actividad que requiere ser hecha en matemáticas. Por otro lado, es equivalente a plantearse e intentar resolver una cuestión matemática difícil o sorprendente. Luego en el primer caso problema sería cualquier cuestión matemática y en el segundo, toda cuestión matemática difícil o sorprendente.

Etimológicamente la palabra «problema» deriva de la griega *probállo*, es decir, *bállo* «echar» *pro* «delante»: se trata de una dificultad, un obstáculo, que nos aparece reclamando nuestra intervención para que podamos seguir avanzando en nuestro camino.

Schoenfeld (1.985) en el apartado titulado *Qué es un problema y quiénes son los estudiantes*, da la siguiente definición

> Ser un problema no es una propiedad inherente de una tarea matemática. Más bien es una relación entre el individuo y la tarea lo que hace a la tarea un problema para esa persona. La palabra problema se usa aquí en su sentido relativo, como una tarea que es difícil para el individuo que está intentando resolverlo. Más aún, esa dificultad ha de ser un atolladero intelectual más que de cálculo Por enunciar las cosas más formalmente, si uno tiene acceso a un esquema de solución para una tarea matemática, esa tarea es un ejercicio y no un problema.
>
> p. 74

La introducción del conocimiento de un procedimiento de solución o un algoritmo como línea divisoria entre lo que es un ejercicio y lo que es un problema es una crítica al uso tradicional de los problemas como aplicación rutinaria de procedimientos enseñados a los alumnos, y la propuesta de otras intenciones educativas para los mismos.

Por tanto, es posible que una misma tarea constituya un problema para una persona mientras que para otra ese problema no existe, bien porque carece de interés por la situación, bien porque posee los mecanismos para resolverla sin apenas inversión de recursos cognitivos y puede reducirla a un mero ejercicio.

Pero el que una actividad se acepte como un problema no sólo depende de los alumnos. Depende también en buena medida de cómo se plantea la tarea y cómo la maneja el profesor en el aula. Una misma actividad puede ser percibida por los alumnos como un ejercicio o como un problema, dependiendo de cómo perciban su funcionalidad dentro del aprendizaje, a partir de la forma en que el profesor la plantea, guía su solución y la evalúa.

Para que haya verdaderos problemas, que obliguen al estudiante a tomar decisiones, planificar y recurrir a su bagaje de conceptos y procedimientos adquiridos, es preciso que las tareas sean abiertas, diferentes unas de otras, o sea, imprevisibles. Un problema es siempre una situación en algún sentido sorprendente. (Pozo y Postigo, 1.994)

Los ejercicios y los problemas requieren de los alumnos la activación de diversos tipos de conocimiento, no sólo de diferentes procedimientos, sino también de distintas actitudes, motivaciones y conceptos. En la medida en que son situaciones más abiertas o nuevas, la solución de problemas supone para el alumno una demanda cognitiva y motivacional mayor que la ejecución de ejercicios.

De manera tradicional, la utilización de la palabra «problema» dentro del aula de matemáticas ha coincidido más con el primer significado señalado por Webster's (1.979) que con el segundo: cualquier tipo de actividad procedimental que se realice dentro o fuera del aula, la «definición mínima» que dice Puig (1.996).

Las largas listas de adiciones, sustracciones, multiplicaciones y divisiones que contenían los «cuadernos de problemas» que hemos rellenado durante nuestra Educación Primaria, constituyen un claro ejemplo de qué es un ejercicio matemático. Las tareas en que hay que aplicar una fórmula justo después de haber sido explicada en clase o detrás de la lección en que aparece explícitamente constituyen también ejercicios más que verdaderos problemas.

A pesar del énfasis puesto en la solución de problemas desde la década de los ochenta, en el aula se sigue dedicando mucho más tiempo a la solución de ejercicios que a la solución de problemas. No obstante, los dos tipos de tareas tienen consecuencias muy distintas en el aprendizaje y responden a diferentes tipos de objetivos escolares. Así, los ejercicios sirven para consolidar y automatizar ciertas técnicas, destrezas y procedimientos que son necesarios para la posterior solución de problemas, pero difícilmente pueden ayudar a que estas técnicas se utilicen en diferentes contextos de los que se han aprendido o ejercitado, o difícilmente pueden servir para el aprendizaje y comprensión de conceptos.

Para algunos autores sólo existe un problema cuando no hay un algoritmo conocido que lleve directamente a la solución, independientemente de si en una tarea determinada un alumno conoce o no previamente ese algoritmo. Desde esta postura, no sería posible utilizar verdaderos problemas matemáticos durante las primeras etapas de la escuela.

No obstante, también se puede considerar la existencia de un problema en función del grado de novedad que suponga la tarea para un determinado alumno. De hecho, la mayoría de los trabajos sobre enseñanza y aprendizaje recomiendan que se introduzca la solución de problemas desde los primeros años de la escolaridad. Así, por ejemplo, el Informe Cockcroft (Cockcroft, 1.982), en los puntos 321 a 325 (pp. 116-117), recomienda que se inicie a los alumnos desde el comienzo de la escuela en las estrategias de solución de tareas, si bien considera que no todos los problemas son adecuados para estas edades tempranas.

Según este Informe (p. 116, punto 321): “al principio de la escolaridad las matemáticas se aprenden haciendo cosas”. Tanto en estos primeros años de la escolaridad como más adelante, el aprendizaje de conceptos y procedimientos matemáticos se puede hacer mediante la observación de «la conducta» de los objetos y la manipulación de los mismos. Así, la clasificación, seriación y ordenación de objetos, la utilización de distintos tipos de medidas, el análisis de regularidades entre determinados hechos, etc., pueden constituir problemas con objetivos tan diversos como traducir las experiencias cotidianas a un lenguaje matemático, establecer conjeturas e hipótesis, explorar y modelar las estrategias de resolución de tareas adquiridas en contextos informales o adquirir una serie de actitudes hacia las matemáticas.

Puig (1.996) da la siguiente «definición operativa»: “un problema escolar de matemáticas es una tarea de contenido matemático, cuyo enunciado es significativo para el alumno al que se ha planteado, que éste desea abordar; y para la cual no ha producido sentido” (p. 30). Aclarando que el calificativo «significativo» se introduce para decir que el sujeto es capaz de interpretar la situación, que «para la que no ha producido sentido» pretende dar cuenta de las diversas maneras de terminar la resolución de un problema como la obtención del resultado, la explotación del problema con fines epistémicos, la obtención de resultados erróneos con la convicción de que son correctos o, incluso, la entrega al profesor de la tarea parcialmente realizada.

Pasemos ahora a ver qué entendemos por «resolución de problemas». Tal vez resulte mejor decir primero lo que no se entiende por ello. Frecuentemente, al final de cada lección o tema de un libro de texto de matemáticas se presentan una serie de ejercicios rutinarios, a los que es posible que se denomine problemas aunque no es probable que impliquen la «resolución de problemas» en el significado comúnmente aceptado. La práctica usual proporcionada por tales ejercicios es posiblemente importante y puede ser concebida como una manera de promover la memorización. Algunos requerirán que los alumnos apliquen sus matemáticas a situaciones que surgen en el mundo real y, como tales, podrían llamarse aplicaciones. Determinadas aplicaciones comportan resolución de problemas.

La «resolución de problemas» se concibe normalmente como un proceso “en que las condiciones del problema y los objetivos deseados se relacionan intencionada y sustancialmente con la estructura cognoscitiva existente” (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 488), proceso que permite combinar los conocimientos previos sobre conceptos, procedimientos, reglas, técnicas, destrezas, etc., para producir un conocimiento nuevo, para dar solución a una situación nueva. En otras palabras, consiste en encontrar una manera de alcanzar un objetivo que no es directamente asequible.

Se la considera útil por tres razones: en primer lugar, porque se resuelven muchos problemas matemáticos en la vida diaria; en segundo lugar, porque la experiencia adquirida en la resolución de problemas matemáticos es aplicable para la resolución de otros problemas no matemáticos, y en tercer lugar, porque es un proceso de razonamiento que ayuda a pensar mejor.

Correctamente enfocada la resolución satisface ciertos requisitos del aprendizaje científico con los tres componentes que considera Kilpatrick (1.985): se precisa que el alumno disponga de una información teórica, que posea un conocimiento profundo de la materia, de unos procedimientos, una serie de técnicas (estrategias) heurísticas y, finalmente, de una actitud favorable hacia la tarea y/o hacia la disciplina en cuestión que le haga capaz de regular el proceso de resolución en cuanto a la aplicación de sus conocimientos y estrategias. Es decir, la resolución de problemas conlleva la convergencia de las tres dimensiones básicas del conocimiento y su activación (Perales, 2.000).

Entre sus cualidades podrían incorporarse también argumentos sociales, como el hecho de que los alumnos pueden, mediante la resolución de problemas, ir aproximando su actividad académica a la vida real, fuente de continuas «situaciones problemáticas», e incluyendo la comunicación entre individuos (cuando se afronta colectivamente) y la propia toma de decisiones, aspectos todos ellos esenciales para la integración plena de los estudiantes en el contexto social, cultural y laboral.

Además podría constituirse en una actividad idónea para el diagnóstico o el cambio conceptual, al precisar el contraste entre los conocimientos previos y los matemáticos, así como una actividad de gran significación en la evaluación de los aprendizajes, y su influencia debiera alcanzar la mejora del currículum por parte del profesor a partir del análisis minucioso de los resultados generados por dicha evaluación.

Existen, por tanto, sobradas razones reales y potenciales para dedicar una especial atención a esta tarea, y tratar de rentabilizar esas potencialidades, promoviendo la aprehensión matemática de la realidad por parte de los alumnos y aproximar, de esta forma, los contextos cotidiano y académico, auténtica aspiración de lo que debiera ser la educación del siglo XXI.

La importancia en la resolución de la estructura cognoscitiva que posee la persona, se debe al hecho de que la solución supone la reorganización del residuo de la experiencia previa, de modo que se ajuste a los requisitos concretos de la situación problema presente. Como las ideas de la estructura cognoscitiva constituyen la materia bruta de la resolución, la transferencia que tenga lugar, positiva o negativa, reflejará la naturaleza y la influencia de las variables de la estructura cognoscitiva.

Cuando se ha resuelto un problema, se ha aprendido. Puede que concretamente sólo se haya aprendido a resolver ese, pero lo más probable es que se haya aprendido a solucionar una serie de ellos análogos y quizá incluso otros que poseen algunas características parecidas.

Para aprender a resolver problemas en matemáticas, los alumnos deberían adquirir formas de pensar, hábitos de perseverancia y curiosidad, y confianza en situaciones no familiares que les servirán fuera de la clase. Ser un buen resolutor proporciona grandes beneficios en la vida diaria y en el trabajo.

Pensar en voz alta, como auto-escucharse al hablar a otro, es una forma de hacerse consciente de los propios pensamientos, que casi siempre es una ayuda cuando se está trabajando sobre un problema (Skemp, 1.971).

Podemos enseñarles a los escolares estrategias generales para resolver problemas (uso de materiales, tanteo, elaboración de tablas, diagramas, búsqueda de regularidades, etc.); luego algunos podrán desarrollar sus métodos personales, pues les crea confianza en sus posibilidades de hacer matemática, por asentarse sobre los saberes que ellos pueden controlar y quizás resolverán algunos problemas; pero lo importante no es que los resuelvan todos, más bien es importante que traten de resolverlos todos.

El uso de materiales manipulativos puede ayudar a los niños en la comprensión y resolución de los problemas pues se favorece el proceso para realizar operaciones intelectuales, aunque sin ningún material didáctico el niño puede por sí solo llegar a ellas.

No debe obligarse a los alumnos a usar un método u otro, “más bien se instará a probar diversos métodos para sacar información y así planificar la resolución” (Alsina, et al., 1.996, p. 111). A través del trabajo en grupo los profesores podemos facilitar la discusión de cuál de los métodos empleados resulta el más adecuado, analizar las estrategias, formular conjeturas, estimar resultados, acotar errores, examinar alternativas y consecuencias y ver la pertinencia de los resultados en relación con la situación planteada; todo ello hará que los estudiantes maduren sus conceptos y procedimientos y a la vez les inicia en las reglas sociales del debate y de la toma de decisiones.

Los problemas constituyen una novedad para el que aprende y su solución es en cierta medida un proceso creativo, que depende de que la persona no sólo posea el conocimiento y las destrezas requeridos sino también de que sea capaz de utilizarlos y relacionarlos eficientemente. A veces parece producirse un pequeño indicio, una intuición intelectual, una visión interior (*insight*), que nos lleva a la solución. Este fenómeno no entendido del todo, implica por lo general la comprensión de alguna relación anteriormente inadvertida dentro de la estructura del conocimiento. (Skemp, 1.971; Orton, 1.988)

Dicen estos mismos autores que esta actividad no puede realizarse por mandato pues la parte central es inconsciente e involuntaria. Sin embargo parece necesario un período preliminar de concentración en el problema: dar conscientemente vueltas al problema en la mente, probar diferentes líneas de acción, aplicar métodos que pueden resultar apropiados; si a pesar de eso no llega la solución, a continuación hay generalmente un período en el que el problema se deja de lado, al menos conscientemente. En apariencia, durante este período, continúa la actividad mental inconsciente relacionada con el problema, como si el subconsciente, libre de la exigencia consciente por resolverlo, siguiera experimentando con combinaciones de elementos del conocimiento; pues pronto, una intuición intelectual, relativa al problema -quizá la solución completa- viene a la mente en un momento en que no se efectúa un trabajo deliberado sobre el problema.

Según Ausubel:

> … las principales fuentes de variación de la capacidad de resolver problemas son: a) conocimiento de la materia y la familiaridad con la lógica distintiva de una disciplina; b) determinantes cognoscitivos como la sensibilidad al problema, la originalidad y la curiosidad intelectual; el estilo cognoscitivo; el conocimiento general sobre la resolución eficaz del problema; el dominio de estrategias especiales de resolución de problemas dentro de las disciplinas particulares; y c) rasgos de personalidad como la pulsión, la persistencia, la flexibilidad y la ansiedad.
>
> Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 500

Añadiendo que en determinantes como la sensibilidad al problema, la originalidad, el estilo cognitivo y los factores de personalidad, la mayor parte de la variación tal vez esté en función de la dotación genética y de la experiencia acumulada; por lo que estos aspectos de la capacidad de resolución no sean sensibles al adiestramiento. Por consiguiente, el trabajo más eficiente de instrucción en resolución de problemas se concentra en el conocimiento de la materia, en la lógica y estrategia de la resolución particulares de la disciplina y en los principios generales de la resolución valida de problemas (Ausubel, 1.968; Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978).

Dewey (1.910) propuso una lista de fases o etapas que se siguen para la solución de problemas, no elaborada para los de matemáticas, sino para cualquier cosa que en la vida cotidiana se llama «problema»:

- 1. Identificación de la situación problemática.
- 2. Definición precisa del problema.
- 3. Análisis medios-fines. Plan de solución.
- 4. Ejecución del plan.
- 5. Asunción de las consecuencias.
- 6. Evaluación de la solución. Supervisión. Generalización.

Dewey comienza con una «situación» que el sujeto siente como problema, ya que pretende construir un modelo de resolución, en la más amplia acepción del término problema.

Dicen Ausubel, Novak y Hanesian (1.978): “como descripción formal de las sucesivas etapas temporales del pensamiento, el planteamiento de 1.910 de Dewey no ha sido mejorado apreciablemente en los pasados sesenta años” (p. 492).

Entre las descripciones de estrategias para resolver problemas, una de las más conocidas es la debida a Polya (1.945) que incluye: utilizar diagramas, buscar patrones, considerar todas las posibilidades, probar con valores o casos determinados, trabajar marcha atrás, tantear y comprobar, crear un problema equivalente y crear uno más sencillo; estrategias que las agrupa en las siguientes cuatro fases (p. 17):

- I Comprender el problema
- II Concebir un plan
- III Ejecución del plan
- IV Examinar la solución obtenida.

Esta división en fases está hecha desde el punto de vista del «resolutor ideal», que las recorre linealmente pasando de una a otra sólo cuando la anterior ha concluido y sin necesidad de abandonar o de rehacer el camino iniciado, sujeto cuyo supuesto comportamiento determinó por introspección. Polya acompaña la descripción de cada una de estas fases con una serie de preguntas de naturaleza heurística útiles para el resolutor, que puede hacerse a sí mismo o que le puede hacer un profesor que pretenda guiarle mientras resuelve el problema. De esta manera, el modelo no es estrictamente hablando un modelo «descriptivo», porque las sugerencias heurísticas que incluye pretenden a la vez marcar pautas, indicar caminos y hacer posible que el resolutor tome conciencia de lo que necesita hacer y del lugar del proceso en el que se encuentra para actuar en consecuencia. El modelo tiene, por tanto, también un carácter de guía para la acción.

Este carácter de guía o de ejemplo que ha de imitar el resolutor real, ha hecho que se haya utilizado para extraer técnicas o estrategias de instrucción de las fases que necesariamente hay que recorrer para resolver un problema y el orden en que hay que hacerlo, desvirtuando a juicio de Puig y Cerdán (1.988) el carácter del modelo de Polya.

Modelo que en cierto sentido se puede considerar la concreción del de Dewey para los problemas matemáticos (Puig y Cerdán, 1.988).

Muchos autores han exportado estas fases a otras áreas (Proceso General de Investigación (Dewey, 1.910; Bunge, 1.967) o Gestión de Calidad (Deming, 1.982)) hasta el punto que ha quedado instituido como un modelo general de solución de problemas.

Mason, Burton y Stacey (1.982) definen tres fases, llamadas *abordaje, ataque* y *revisión*, en función de lo que llaman sentimientos del resolutor: los estados afectivos, de ánimo, emocionales,... En la descripción hacen referencia a unos procesos (particularización, generalización, conjeturación), a las fases y a unos estados, y no es tanto un modelo descriptivo o analítico sino un modelo de ayuda en la instrucción a los alumnos.

Dicen que puede parecer que de las tres fases, la de ataque es la crucial, por abarcar la mayor parte de la actividad propiamente matemática, pero ocurre que la mayor parte de la gente no consigue resolver satisfactoriamente un problema por no dedicar la atención debida al abordaje y a la revisión. La fase de ataque sólo puede llevarse a cabo correctamente si se ha planteado satisfactoriamente el problema, y si se ha dedicado el tiempo necesario a aprender de la experiencia, revisando los momentos clave del razonamiento.

Y añaden que las fases no están separadas nítidamente, sino que tienden a fundirse en sus extremos, puesto que dependen de matices de la experiencia y no de actividades mecánicas. El trabajo en una fase puede fácilmente llevar a una fase «anterior» o a una descripción final. Aprendiendo a distinguir los aspectos sobresalientes de cada fase podemos encontrar cosas de las que hay que hacer ante un atasco momentáneo evitando un montón de divagaciones y razonamientos improductivos.

A diferencia de Polya, los trabajos de Schoenfeld, resumidos en su libro de 1.985, pueden verse como la búsqueda inacabable de fuentes de explicación de la conducta de los resolutores reales, que conduce a la categorización de lo que Schoenfeld llama los componentes del conocimiento y la conducta para explicar la actuación de los sujetos al resolver problemas de matemáticas, con lo que elabora un modelo de «actuación», y no un modelo de competencia.

Los componentes que Schoenfeld iba introduciendo -heurísticas, gestión, recursos y sistemas de creencias son los nombres que él les da- aparecían por las carencias de los sujetos reales.

Afirma Schoenfeld (1.987a) que no existen fases perfectas y que etiquetas como Exploración o Análisis describen mejor lo que el resolutor hace que las otras de Comprensión y Elaboración del plan de Polya, añadiendo, los resolutores expertos se caracterizan más por un rápido zigzagueo entre episodios o fases que por un recorrido secuencial por ellos.

> En cuanto a las heurísticas generales que acompañan a las fases del modelo de Polya, el mismo Schoenfeld (1.987b) ha mostrado que es inútil prescribirlas. La razón de que su prescripción no sea efectiva no es que las heurísticas generales no tengan ningún valor, sino que cada heurística se multiplica en infinidad de ellas más cercanas a los problemas concretos. De ahí que una de las principales tareas de la instrucción en resolución de problemas consista en hacer posible que los alumnos elaboren una versión efectiva de la heurística general apropiada en función del problema con el que estén trabajando.
>
> Puig y Cerdán, 1.988, p. 24

Schoenfeld plantea el siguiente esquema:

- Análisis y Comprensión
- Diseño y Planificación
- Exploración
- Verificación.

Schoenfeld (1.992) ya no habla de «componentes del conocimiento y la conducta», sino de «aspectos de la cognición», ha cambiado los nombres de tales aspectos -ahora son el conocimiento de base, estrategias de resolución de problemas, gestión y control, creencias y afectos- y ha introducido un quinto que con el nombre de «prácticas» pretende servir como fuente de explicación de las creencias.

Si restringimos el mundo de los problemas a los problemas aritméticos elementales (PAE) que aparecen en el contexto escolar, tenemos el modelo de Puig y Cerdán (1.988) con las fases siguientes:

- 1. Lectura
- 2. Comprensión
- 3. Traducción
- 4. Cálculo
- 5. Solución
- 6. Revisión. Comprobación.

Aclarando sus autores que, como en el contexto escolar se empieza con un «problema enunciado» a diferencia de comenzar por una «situación» en el mundo real, hace que en este modelo -como en el de Polya- no aparezcan las fases 1 y 2 de Dewey. En las metodologías de enseñanza en las que las situaciones escolares simulan situaciones del mundo real, se comienza por fases similares a las dos primeras del modelo de Dewey, pero es difícil que la fase *revisión*, *comprobación* se transforme en algo similar a las dos últimas fases de Dewey -en particular, que aparezca la fase *asunción de las consecuencias*-. En las tendencias pedagógicas que conciben el aprendizaje escolar como un aprendizaje de la vida, la resolución de problemas se transforma en el trabajo en situaciones reales representadas en el aula, como por ejemplo una tienda, lo que hace que todos los problemas aritméticos en el contexto de la compra-venta dejen de aparecer «enunciados», para ser «situaciones», con lo que puede que aparezcan todas las fases del modelo de Dewey, incluida la *asunción de las consecuencias*.

Por su parte Carrillo (1.998) propone la consideración de las siguientes fases en el proceso general de resolución de problemas:

- 0. Identificación
- 1. Comprensión
- 2. Planificación y exploración
- 3. Ejecución
- 4. Verificación

Dice el autor que asigna el número 0 a la fase de Identificación debido a que los problemas presentados en el ámbito escolar suelen ser enunciados.

> La comprensión de un problema o de una situación no tiene porqué darse de manera global; en muchos casos, después de un primer acercamiento al problema, el resolutor atraviesa por otras fases, como Planificación y Ejecución, e incluso Verificación, teniendo posteriormente que volver a profundizar en la comprensión del problema.
>
> Carrillo, 1.998, p. 105

Es decir, concibe las fases como estados por los que se pasa y a los que se puede volver a lo largo del proceso de resolución.

No considera perteneciente a la fase de Ejecución los cálculos que suponen ejemplificación (fase de Comprensión) o tanteo (fase de Planificación y Exploración), tan sólo los que provengan de llevar a cabo un plan previamente ideado.

Como cualquiera otra herramienta matemática, las estrategias tienen que recibir atención docente para que los alumnos las aprendan. Las oportunidades para utilizarlas deberían insertarse naturalmente en el currículo a través de las áreas de contenidos. Por ejemplo, en los primeros niveles, los profesores pueden ayudar a los niños a expresar, clasificar y comparar sus estrategias; en los niveles medios, 6.º de Primaria a 2.º de ESO, los alumnos deberían ser diestros en reconocer cuándo es apropiado usar diversas estrategias y ser capaces de decidir cuándo y cómo usarlas; en los niveles no universitarios altos, 3.º de ESO a 2.º de Bachillerato, deberían tener acceso a una gama amplia de estrategias, saber decidir cuál usar y ser capaces de adaptar e inventar otras (NCTM, 2.000).

Las primeras experiencias de los niños con las matemáticas tienen lugar a través de la resolución de problemas por su tendencia natural a formular cuestiones y buscar respuestas, y a medida que experimentan con una variedad más amplia de problemas, necesitan más y diferentes estrategias. Los profesores deberían ayudarles a ser conscientes de ellas a medida que se presenta la necesidad de utilizarlas y animarles a que tomen nota para alcanzar su modelización. Las estrategias se aprenden con el paso del tiempo, como afirma Kilpatrick (1.985), por ósmosis, memorización, imitación, cooperación, o reflexión, se aplican en contextos particulares, y llegan a ser más refinadas, elaboradas y flexibles según se van utilizando en problemas de complejidad creciente.

> Los cambios relativos al desarrollo en la resolución de problemas reflejan todas las tendencias de edad descritas en relación con el desempeño cognoscitivo en conjunto y, más particularmente, las que se manifiestan en la adquisición de conceptos
>
> Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 492

que después se explicarán en los apartados del punto 2.5.

Entendiendo por aptitud cualquier característica del estudiante que pueda influir en la actividad y los resultados en su aprendizaje, actualmente hay consenso sobre cuales son las principales categorías de aptitudes que ayudan a explicar una solución de problemas habilidosa: el conocimiento del ámbito específico (conocimiento matemático); los métodos heurísticos; el conocimiento y las habilidades metacognitivas, y los componentes afectivos.

El estudio de sujetos competentes en resolución de problemas ha permitido conocer que dominan una base de conocimientos amplia del área de la cual forma parte el problema (términos matemáticos, símbolos, hechos numéricos, fórmulas, reglas, propiedades, algoritmos, conceptos), bien organizada y de fácil acceso (Chi, Glaser y Farr, 1.988)[9], que representan los problemas en términos de la estructura matemática interna, y no en

[9] Citado en De Corte, Greer y Verschaffel (1.996)

función de las características superficiales como hacen los sujetos inexpertos.

Los métodos heurísticos son estrategias sistemáticas de búsqueda, análisis y transformación del problema. No son una garantía de éxito, pero incrementan notablemente la probabilidad de hallar la solución. Son heurísticos: analizar detalladamente el problema, visualizarlo mediante gráficos o diagramas, las pruebas por ensayo y error, ir de lo conocido a lo desconocido, descomponer el problema en subproblemas, buscar uno análogo o relacionado que sea más fácil, trabajar hacia atrás a partir de la meta o solución buscada, etc.

La enseñanza de heurísticos no empezó siendo provechosa por dos razones: cada heurístico era enseñado de forma aislada, de manera que el alumno no tenía que plantearse cual tenía que elegir en cada situación, y las descripciones eran insuficientemente detalladas para capacitar a los alumnos a utilizarlas. En la actualidad se enseñan conjuntamente con las habilidades metacognitivas y de manera satisfactoria (Schoenfeld, 1.992).

A pesar de que el conocimiento sobre las habilidades metacognitivas no está muy desarrollado, la importancia de éstas en el aprendizaje es indudable. Concretamente nos referimos al conocimiento de nuestro funcionamiento cognitivo y a los mecanismos de autocontrol y autorregulación.

El conocimiento de nuestro funcionamiento cognitivo es relativo a cuales son nuestras capacidades y cuales son nuestras flaquezas cognitivas, como por ejemplo: que la memoria nos puede fallar, pero que disponemos de recursos para retener la información; los límites de la memoria a corto plazo; las creencias sobre nuestras capacidades generales o particularmente las matemáticas; etc. Así, los alumnos más eficaces en resolución de problemas orales son más conscientes de las actividades mentales que realizan, explican más detalladamente los métodos que utilizan, justifican de forma más adecuada las estrategias de solución y son más precisos a la hora de predecir qué problemas han solucionado correctamente.

Los mecanismos de autocontrol y autorregulación forman una estructura que organiza y guía nuestros procesos de aprendizaje y pensamiento. Abarca habilidades como planificar el proceso de resolución, supervisar y evaluar el proceso durante su ejecución, eliminar las soluciones erróneas, mejorar las válidas, analizar las actividades de resolución y reflexionar. Los resolutores expertos se caracterizan por tener un alto nivel de autocontrol que les orienta sistemática y persistentemente hacia los objetivos fijados, por regular permanentemente su actividad y efectuar las correcciones pertinentes.

A pesar de conocerse la importancia que los componentes afectivos tienen en el aprendizaje de las matemáticas la investigación se ha dirigido más hacia las variables y procesos cognitivos.

Podemos considerar tres aspectos de la afectividad en la resolución de problemas: las emociones (E), las creencias (C) y las actitudes (A) (McLeod, 1.990, 1.992).

Éstas suponen la totalidad de las reacciones afectivas implicadas en el aprendizaje de las matemáticas y forman un continuo con diferencias en:

1. La intensidad afectiva implicada, desde una actitud más bien indiferente para las creencias hasta una actitud «cálida» para las emociones (esquemáticamente y de menos a más: C-A-E).
2. En el grado de estabilidad, mientras las emociones se alteran rápidamente las actitudes y las creencias son fundamentalmente estables y resistentes al cambio (E-A-C).
3. O en el grado de interrelación con los componentes cognitivos (E-A-C).

Al respecto de las creencias podemos diferenciar entre las creencias sobre uno mismo y sobre las matemáticas (McLeod, 1.990), mientras las primeras son una habilidad metacognitiva, las creencias sobre las matemáticas son el punto de vista con que nos acercamos a su aprendizaje. Las creencias pueden determinar las técnicas que serán utilizadas, durante cuanto tiempo y con qué esfuerzo se intentará encontrar la solución (Schoenfeld, 1.992).

Desde la perspectiva cognitiva, uno de los autores más representativos en educación matemática y afecto es Mandler (Gil, Blanco y Guerrero, 2.006). «El modelo de Mandler» (Mandler, 1.988, 1.989a, 1.989b) trata de dar explicaciones sobre las reacciones afectivas de los estudiantes ante las actividades matemáticas: a) los diferentes procesos cognitivos pueden generar respuestas afectivas diferenciadas, más concretamente, las actividades metacognitivas son especialmente sensibles a las emociones, mientras que los procesos de memorización y recuperación no lo son tanto, b) las respuestas afectivas varían según la fase de resolución del problema en que nos encontramos.

Un resolutor de problemas experto aplica las aptitudes de forma integrada e interactiva, tanto componentes de una misma aptitud, por ejemplo en el caso del conocimiento matemático, utilizar conjuntamente habilidades procedimentales y conceptuales, como componentes de diferentes aptitudes, por ejemplo, para calcular el área de una corona circular, aplicar un conocimiento básico, el área del círculo, y una estrategia heurística, el área de la corona es la diferencia entre las áreas de los dos círculos.

Para finalizar decir que lo visto hasta aquí sobre Resolución de problemas se completa en el punto 2.5.2.5. con lo correspondiente a su utilización como metodología de aprendizaje de las matemáticas.

2.5. TEORÍAS GENERALES QUE FUNDAMENTAN EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Conocidos los diferentes tipos de aprendizajes de contenidos matemáticos veamos cómo se deberían realizar según diferentes teorías generales.

Las teorías del aprendizaje que tienen su origen en los trabajos que los psicólogos de la educación llevaron a cabo en los tres primeros cuartos del siglo XX presentan, algunas, características comunes entre ellas, y discrepancias notables con otras, lo que permiten agruparlas en dos grandes tipos de teorías. El primer tipo históricamente hablando, tiene una raíz conductual, nos referiremos a el como «conductismo», mientras que el segundo tiene una base cognitiva, nos referiremos a el como «cognitivismo».

Como no es posible dar una definición explícita y unánimemente aceptada de ellos, pasamos, sin más dilación, a describir sus características más sobresalientes.

2.5.1. EL CONDUCTISMO

Estas teorías del aprendizaje tienen su origen en los experimentos que psicólogos como Iván Petróvich Pavlov y Skinner realizaron con animales domésticos. Parece que Skinner sugería que lo que podía lograrse con animales también era posible conseguirlo con personas: éstas podían ser condicionadas para que mostrasen la conducta requerida.

Los enfoques conductistas conciben que aprender es el cambio de conducta que experimentan las personas como resultado de la adquisición de conocimientos. Este cambio se puede lograr condicionado, dirigido de un modo determinado por el instructor y puede ser descrito en términos de estímulo, respuesta y asociación: cuando el aprendiz da respuesta a un estímulo, se ha creado un vínculo, una asociación, cuya persistencia en la memoria es una cuestión de repetición y ejercicio.

Una importante opinión que permanece a través de la evolución de estas teorías es la de la eficacia del aprendizaje de estímulo-respuesta. Como resultado de un estímulo específico surge la respuesta requerida.

John B. Watson, conocido como padre del conductismo, fue el primero en los Estados Unidos en poner en práctica en el terreno del aprendizaje los hallazgos de Pavlov, pero los representantes más notables del conductismo son Edward L. Thorndike, Burrhus Frederic Skinner y más recientemente Robert M. Gagné.

En España el modelo predominante en la enseñanza de la aritmética en los libros de texto, al menos hasta la Ley General de Educación de 1.970, ha sido el conductismo, bajo el principio general de que la instrucción debe basarse en la enseñanza directa y en la división del currículum en un número de partes aisladas para ser aprendidas con el esfuerzo apropiado.

2.5.1.1. Thorndike: leyes y transferencia del conocimiento

La teoría de Edward L. Thorndike (1.874-1.949) se conoce también como «aprendizaje por el éxito», siguiendo tres leyes: del efecto, de la disponibilidad y del ejercicio.

1. La ley del efecto: una conexión, un vínculo, entre un estímulo y una respuesta se establece y refuerza si la respuesta va acompañada o inmediatamente seguida por una satisfacción, y se debilita si la respuesta va acompañada o inmediatamente seguida de insatisfacción.
2. La ley de la disponibilidad: asocia el deseo con el aprendizaje, siendo necesario querer, estar motivado, para que la conexión se establezca o active.
3. La ley del ejercicio: los vínculos se fortalecen con el uso y se debilitan con el desuso.

Algunas de las acciones que los profesores hacemos parecen indicar una cierta aceptación de la ley del efecto. Si una respuesta es correcta y el alumno lo sabe, se logra la satisfacción y el chico se ve reforzado. No obstante hay profesores que suponen necesario proporcionar satisfacción de un modo extrínseco, dando premios, menciones honoríficas, puntos blancos, estrellas doradas y cosas por el estilo. Un trabajo deficiente puede tener como consecuencia una nota baja, produce disgusto y, teóricamente, determina que no vuelva a repetirse semejante clase de trabajo.

En general, puede ser aceptada casi como un axioma la afirmación de que el éxito o el fracaso influyen más que cualquier cosa en el desarrollo de una actitud positiva o negativa hacia el trabajo escolar (Sorenson, 1.971), de ahí la trascendencia de la ley de la disponibilidad.

De los muchos ejemplos escolares en que aparece la aplicación de la ley del ejercicio podemos comentar el del aprendizaje del algoritmo de la división. Se trata de establecer una sólida conexión o asociación entre el estímulo (realizar la división) y la respuesta (la aplicación del algoritmo de la división). Los niños realizan muchos ejercicios de dividir y los profesores comprueban que tras las vacaciones de verano la mayoría de los alumnos parecen experimentar un grave debilitamiento de esta conexión, suponiendo que antes hubiese llegado a existir. Los psicólogos conductistas explicarían que el desuso de la respuesta puede muy bien debilitar esta asociación, sin embargo los psicólogos cognitivos darían una explicación muy distinta.

A principios del siglo XX trabajos como los de Thorndike fueron las primeras manifestaciones de una psicología de la educación basada en el aprendizaje de contenidos, el cual publicó en 1.922 un pequeño libro titulado *The Psychology of Arithmetic* (La psicología de la aritmética).

> La teoría asociacionista de E. L. Thorndike, aplicada al aula, se ha utilizado para justificar el empleo de los ejercicios como método para formar y reforzar los vínculos estímulo-respuesta que se supone conforman el contenido de la aritmética. A pesar de que casi todos los ejercicios traen consigo incrementos en la velocidad y la precisión del cálculo, se han presentado varios argumentos contra su uso como método principal de enseñanza. El argumento principal es que los ejercicios no pueden desarrollar el pensamiento cuantitativo, porque interpretan las matemáticas como una colección de vínculos aislados, en vez de como un conjunto integrado de formaciones y de principios.
>
> Resnick y Ford, 1.981, p. 52

Las teorías de procesamiento de la información dan una posible justificación teórica de los ejercicios y la práctica: el desarrollo del automatismo. La posibilidad de responder de forma automática a cálculos complejos, como son los valores de las tablas y los algoritmos sencillos, puede reducir la carga del sistema de la memoria humana, y contribuir a un funcionamiento más eficaz.

Thorndike no se preocupó de dar indicación de qué vínculos eran más fáciles, qué cantidad de práctica era suficiente, o cuál era la mejor manera de organizar la práctica de los diferentes tipos de vínculos.

> El propio Thorndike revocó su ley del ejercicio como resultado de sus investigaciones tardías. No es cierto que la frecuencia del emparejamiento entre la respuesta y el estímulo tenga en sí misma trascendencia en el proceso de aprendizaje.
>
> Ausubel y Robinson, 1.969, p. 275

Para la transferencia del conocimiento (influencia del aprendizaje en una situación o contexto sobre un aprendizaje posterior en otra situación o contexto) Thorndike formuló su teoría de «los elementos idénticos»: “Si se produce la transferencia, la nueva situación de aprendizaje contiene una mayoría de elementos que son idénticos a aquéllos que se encuentran en la situación original del aprendizaje” (Ausubel y Robinson, 1.969, p. 140).

Por ello insistía Thorndike en que la escuela debería favorecer las situaciones reales, debería atender únicamente a aquellos aprendizajes que son idénticos a los que realmente uno va a necesitar, es decir, a aquellos aprendizajes que son socialmente útiles.

2.5.1.2. Skinner: aprendizaje programado

Después de los trabajos de Thorndike, durante los años treinta y cuarenta del siglo XX, el estudio por parte de los psicólogos del aprendizaje del contenido pasó de moda, hasta que en los años 50 del s. XX empezó a cambiar la situación. Los psicólogos conductistas volvieron a interesarse por los problemas de la instrucción, y algunos, sobre todo Burrhus F. Skinner (1.904-1.990) y sus colaboradores, empezaron a aplicar sistemáticamente a la educación los principios del análisis conductual y de la teoría del refuerzo, en lo que ha venido a llamarse «condicionamiento operante», que se define como un proceso en el cual la frecuencia con que ocurre una conducta depende de las consecuencias que tiene esa conducta; la conducta que tiene consecuencias agradables para el sujeto se ve fortalecida y tiende a repetirse, y la conducta que tiene consecuencias negativas para el sujeto se debilita y tiende a desaparecer (Beltrán, et al., 1.987).

El reforzamiento ha constituido siempre una parte importante de los métodos docentes. A comienzos del siglo XX el reforzamiento estaba ampliamente basado en el temor: el miedo a incurrir en la ira del profesor, el miedo al castigo. Incluso hoy, algunos aspectos de la conducta de los chicos en la escuela están fundados en su afán de evitar el castigo o el ridículo y no en un deseo de aprender.

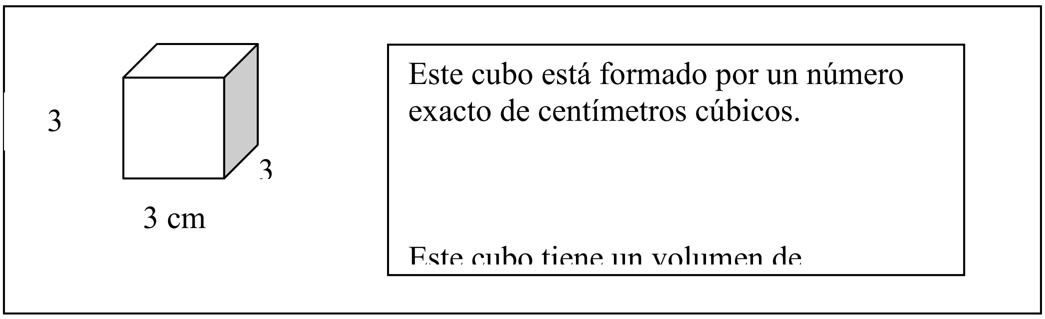
Skinner se interesó por el hecho de que los chicos no aprendieran en ningún sentido positivo, sino sólo para evitar las consecuencias de no aprender, por lo que su ideal fue que todos los alumnos recibieran una retroalimentación constante y rápida de los resultados, que el reforzamiento fuese inmediato, lo que constituyó una parte de la justificación que hizo Skinner (1.954)[10] del «aprendizaje programado»: "todo el proceso de alcanzar una competencia en cualquier campo debe ser dividido en un número muy grande de pasos muy pequeños y el reforzamiento ha de ser contingente a la realización de cada paso".

El sistema de pequeños pasos así como el reforzamiento adecuado para todos los alumnos considerados de manera individualizada son difíciles de lograr sin el uso de máquinas de enseñar.

Los criterios de presentación de material en el aprendizaje programado son los mismos en cualquiera de los medios de presentación, tanto a través de máquinas como mediante libros de texto.

Consisten en la presentación de una secuencia de estímulos al alumno bajo la forma de «cuadros». Un solo cuadro contiene cualquier información necesaria y luego plantea una pregunta que exige una respuesta. El medio de presentación empleado debe proporcionar al alumno los recursos para que formule la respuesta. En la Figura 2.1. vemos un ejemplo de cuadro.

Figura 2.1.



Tras haber formulado una respuesta, el alumno desplaza el programa al siguiente cuadro al tiempo que recibe retroalimentación sobre el cuadro previo.

La aplicación de los criterios anteriores a las circunstancias y las necesidades individuales hace necesario un programa muy complejo y completamente diversificado. Los ordenadores lo permiten, pero no han tenido ningún éxito los intentos de realizar programas de diversificación bajo la forma de libros de texto.

Al tipo de aprendizaje con ayuda de ordenador y basado en el aprendizaje programado se le denomina a menudo «instruccional».

> Resumiendo, pues, la enseñanza mediante máquina ofrece ventajas extraordinarias debido a que: 1) El estudiante recibe refuerzo frecuente e inmediato, 2) goza de libertad para avanzar a su ritmo natural y 3) sigue una secuencia coherente.
>
> Skinner, 1.984, p. 35

Pero como apunta Orton (1.988) también deben existir algunas desventajas, como por ejemplo: 1) no existe la motivación producida por el trabajo con otros alumnos, 2) es posible que, a lo largo del programa, el alumno escoja por error rutas inapropiadas y 3) algunos tipos de experiencias de aprendizaje no pueden ser presentados en forma programada.

El aprendizaje programado tiene una utilización importante en alumnos con necesidades especiales, por ejemplo, el desarrollo de sus capacidades para quienes operan con rapidez, el repaso y la repetición para quienes trabajan con lentitud y, para que se pongan al día alumnos nuevos o que han faltado por enfermedad.

Ahora que empiezan a haber ordenadores en las aulas, una de las posibilidades de su aprovechamiento podría ser la utilización con objetividad de programas instruccionales en la enseñanza de las matemáticas.

[10] Citado por Orton, 1.988, p. 66

2.5.1.3. Gagné: jerarquías de aprendizaje

La forma moderna o actualizada de instrucción conductista se apoya en las ideas de Robert M. Gagné (1.916-2.002) sobre la jerarquía de aprendizaje y el análisis de las tareas que conforman la secuencia de instrucción.

Según Gagné, debemos comenzar definiendo el objetivo, por ejemplo «los alumnos serán capaces de hallar la división de cualquier par de números». El paso siguiente consistirá en realizar el análisis minucioso de la tarea, considerando cuáles son los contenidos previos requeridos con objeto de alcanzar el contenido final (Figura 2.2.)

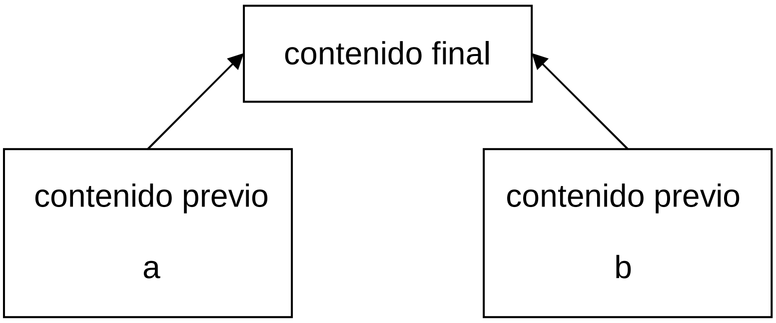


Figura 2.2.

Repetiremos entonces el procedimiento, definiendo qué requisitos previos son precisos para alcanzar los contenidos previos *a* y *b* (Figura 2.2.). Y así hasta llegar a lo que ya sabe el alumno.

Este concepto, que Gagné llama «jerarquía de aprendizaje», ya lo presentó Skemp (1.971), como hemos visto en las páginas 21-22.

Siguiendo con el ejemplo anterior, el conocimiento del algoritmo de la división depende de la multiplicación, y la multiplicación del conocimiento de la adición, etc. Se constituye así el conocimiento del contenido final en una secuencia de instrucción. El aprendizaje tiene, por tanto, un carácter acumulativo (Gagné, 1.985).

Robert M. Gagné y sus colaboradores investigaron la posibilidad de que fuesen necesarios y suficientes los requisitos determinados hipotéticamente. En todos los niveles de una jerarquía, la realización de esta tarea exige mucho tiempo, pero los trabajos de Gagné ha dado lugar a un número considerable de jerarquías comprobadas en matemáticas.

Como en educación las cosas no siempre funcionan perfectamente es posible encontrar alumnos que poseen la capacidad final, pero que no tienen la *a*, la *b* o ninguna de las dos. También pueden hallarse ocasiones en que los alumnos puedan alcanzar *a* o *b* sin una enseñanza específica en el proceso de recibir instrucciones sobre la capacidad final. Por eso no hay que olvidar la reflexión de Gagné (1.985, p. 129): "una jerarquía de aprendizaje describe una ruta eficaz, en promedio, para alcanzar el dominio de un conjunto organizado de habilidades intelectuales que representan la «comprensión» de un tema".

Por tanto, el profesor puede utilizar una jerarquía de aprendizaje como base para la toma de decisiones que le permita adaptar la enseñanza a las diferencias individuales de los niños.

Las jerarquías de aprendizaje de Gagné indican que los diferentes requisitos previos pueden ser de distintas cualidades, es decir, hay dos tipos de jerarquías. Uno se refiere a la organización del conocimiento, el otro a la jerarquía de los «tipos» de aprendizaje.

Para el caso concreto de las matemáticas, tanto Orton (1.988) como Resnick y Ford (1.981), resumen la jerarquía de tipos de aprendizaje de Gagné en la siguiente lista:

Resolución de problemas

requisitos previos

Reglas, principios y conceptos definidos

requisitos previos

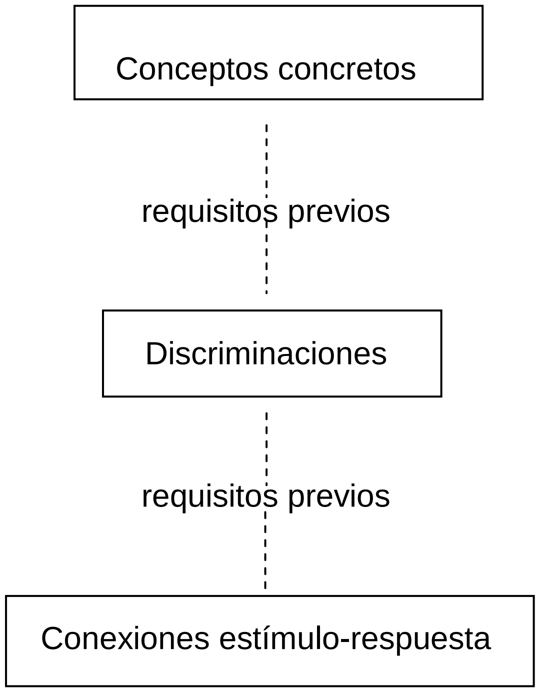


Figura 2.3.

Veámoslos en el siguiente ejemplo:

Consideremos el teorema de Pitágoras: «la suma de los cuadrados de las longitudes de los dos lados

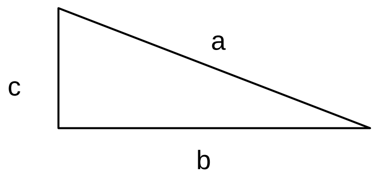


Figura 2.4.

más cortos de un triángulo rectángulo es igual al cuadrado de la hipotenusa» (como se ilustra en la Figura 2.4.). La fórmula $a^2 = b^2 + c^2$ es claramente una *regla* (que solo se aplica a los triángulos cuando son rectángulos).

Una regla es una formulación de la relación entre cualidades. Tanto la relación como las cualidades implican un aprendizaje *conceptual*, por ejemplo cuadrado o área, igualdad, suma, triángulo, ángulo recto, longitud, lado, ángulo.

Los propios conceptos suponen una *discriminación*, entre longitudes y áreas por ejemplo y también implican clasificación, por ejemplo: qué *es* lo que es común a todos los triángulos.

En un nivel muy bajo, un cuadrado supone productos y el modo más eficaz de hallarlos es conocer las tablas de multiplicar. Es probable que su aprendizaje suponga ciertos elementos de aprendizaje de *estímulo-respuesta*,

> sean cuales fueren las opiniones propias acerca del modo en que deben aprenderse las tablas.
>
> Orton, 1.988, p. 75

Si por problema entendemos una cuestión que requiere cierta originalidad por parte del que aprende hasta lograr su solución, exige del alumno que aporte e integre de un modo nuevo elementos de aprendizajes anteriores, por lo que tras haber resuelto el problema habrá aprendido algo. Podemos afirmar pues que la resolución de problemas es el máximo nivel de los tipos de aprendizaje.

La aportación de Gagné es esencial para el análisis del modo en que se produce el aprendizaje y de la manera en que puede organizarse. Es probable que una cuidadosa elaboración de la secuencia del contenido que ha de ser aprendido promueva la calidad y la cantidad del aprendizaje. Sin embargo no es mucha la probabilidad de que tal elaboración de la secuencia sea todo lo que se precise en la planificación de las experiencias de aprendizaje.

La palabra «jerarquía» aplicada a cómo y en qué orden aprenden los niños los contenidos matemáticos, es utilizada de varias maneras no todas ellas conductistas, pues como dice Hart (1.981) se puede utilizar para describir:

- Una secuencia de aprendizaje o de comprensión que se da en el estudiante.
- Una secuencia de enseñanza que usa el profesor.
- Una secuencia lógica que se da en el tema.

Los tres usos no son lo mismo, pero Hart los considera interdependientes, ya que para tener éxito en el aprendizaje escolar, los tres aspectos deben estar estrechamente relacionados, de lo contrario el resultado será el fracaso. En todos ellos, «jerarquía» indica una cadena de destrezas, niveles, etapas o conceptos ordenados de simple a complejo.

2.5.2. EL COGNITIVISMO

La aparición de las teorías psicológicas como la de la *Gestalt* o la de Piaget, que ponían de relieve la existencia de estructuras psicológicas de conocimiento, vinieron a reforzar la importancia de la «comprensión», apoyada en la construcción de dichas estructuras, por encima del adiestramiento algorítmico que caracterizaba la enseñanza tradicional. El conocimiento no proviene de la acumulación de contenidos, sino de la adquisición de estructuras o sistemas de relaciones organizadas subyacentes, no proviene del exterior sino que debe elaborarse desde dentro.

Mientras el conductismo en sus diversas formas fue un modelo adecuado para el aprendizaje de conceptos y estrategias de nivel bajo, resultó totalmente inadecuado para explicar cómo se descubre una relación, cómo se demuestra un teorema o cómo se resuelven problemas. La práctica y los refuerzos repetidos no pueden hacer a alguien un matemático creativo ya que estas estrategias no favorecen la creación de nuevas ideas (Romberg, 1.993).

Desde una perspectiva genérica, Pozo (1.989) indica que:

> … los dos grandes escollos del asociacionismo son la ausencia de una organización en el sujeto psicológico, que se traduce en una imposibilidad de explicar la coherencia conceptual, y la incapacidad de explicar el origen de los significados.
>
> Pozo, 1.989, p. 159

Inicialmente, la oposición a las ideas de Thorndike fue encabezada por Brownell (1.935)[11], que argumentaba que la instrucción matemática necesita apoyarse en la comprensión de los conceptos básicos matemáticos, y por el denominado «Gestaltismo», en cuya visión del aprendizaje son

[11] Citado por Gómez (1.991)

elementos clave la comprensión y la menor consideración de la práctica repetitiva.

A mediados de la década de los 50 del siglo XX el conductismo es sustituido por el procesamiento de la información, entrando en el cognitivismo.

En cuanto al aprendizaje, el procesamiento de información es continuista con la tradición del conductismo. Sus limitaciones son exactamente las mismas que aquejaban al conductismo y no se manifiestan sólo en el aprendizaje. Uno de los síntomas de los límites teóricos que se auto impone la ciencia cognitiva es la recuperación, un tanto desordenada, de diversos autores que alcanza no sólo a Piaget, sino también a Vygotsky, la *Gestalt*, etc. La razón por la que la recuperación resulta tan difícil es la imposibilidad de integrar a estos autores en la corriente dominante del procesamiento de información. En realidad, a pesar de su aparente semejanza, existe una verdadera fractura entre la psicología cognitiva que hacen unos y otros: mientras el procesamiento de información adopta los presupuestos del asociacionismo y el mecanicismo, la «otra» psicología cognitiva, con el riesgo de unificar posiciones bastante heterogéneas, puede ser calificada como estructuralista y organicista: «constructivista».

Las teorías cognitivas se oponen a las tesis asociacionistas en dos aspectos fundamentales: la concepción acumulativa del conocimiento y la explicación del mecanismo de adquisición del mismo, a partir de la asociación entre estímulo y respuesta.

Kilpatrick (1.990) delimita el concepto «constructivismo»:

> La visión del constructivismo incluye dos principios:
>
> 1. El conocimiento es constructivamente activado por el conocimiento subjetivo, no recibido pasivamente por el medio ambiente.
>
> 2. Llegar a saber es un proceso adaptativo que organiza un mundo experimental, no descubierto e independiente. Un mundo preexistente fuera de la mente del conocedor.
>
> Kilpatrick, 1.990, p. 39

El primero de estos principios es de una aceptación mucho más amplia que el segundo dando lugar al llamado constructivismo trivial o simple, mientras que el constructivismo radical se basa en ambos principios (Kilpatrick, 1.990).

Para Coll (1.991) el constructivismo en matemáticas es un método de aprendizaje y de enseñanza a partir del cual el propio alumno construye significados y atribuye sentido a lo que aprende, aunque es el profesor, como mediador del aprendizaje, quien facilita a los alumnos el acceso a los conocimientos que vehiculan los contenidos educativos, relacionando los procesos de construcción de los alumnos con los significados matemáticos que trata la enseñanza.

Confrey y Kazak (2.006) explicitan las raíces del constructivismo matemático:

> Tenemos que ubicar las raíces del constructivismo en tres tradiciones, gran parte habituales del PME[12]: (1) Resolución de problemas […], (2) Errores, barreras críticas y obstáculos epistemológicos […], y (3) Teorías del desarrollo cognitivo […]. Todas estas tradiciones impregnan la educación matemática con la opinión de que algo más que la lógica de la matemática era necesario para explicar, predecir, y facilitar el aprendizaje de las matemáticas. Todas ellas reconocen que la dificultad o la facilidad de aprendizaje no pueden ser explicadas simplemente mirando a la complejidad de la materia, sino que era necesario tener en cuenta otros factores para el camino recorrido de aprendizaje y los niveles de éxito o fracaso.
>
> Confrey y Kazak, 2.006, p. 307

Añadiendo que seguramente la más influyente, la tercera tradición forjadora del desarrollo del constructivismo, es el trabajo de Piaget sobre las teorías del desarrollo cognitivo, y que en general, el constructivismo ha tenido un impacto muy importante en la educación matemática, en el sentido de que ha situado a los niños al frente de la actividad y ha preguntado sobre cuestiones genuinas acerca de cómo hacer un uso eficaz de los recursos y las ideas que éstos aportan al aprendizaje. (Confrey y Kazak, 2.006).

[12] The International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)

Desde la creación del PME en 1.976, en Karlsruhe, en el Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), para PME dos de las principales teorías del desarrollo intelectual han sido dominantes, el constructivismo y la perspectiva socio-cultural (Confrey y Kazak, 2.006).

En las teorías cognitivas se ha hecho hincapié en el papel de la atención, la memoria, la percepción, las pautas de reconocimiento y el uso del lenguaje en el aprendizaje, es por ello que el cognitivismo presenta una gran variedad de formas, por lo que a continuación presentamos resumidamente algunas de ellas, las más representativas.

2.5.2.1. Procesamiento de la información

A partir de la década de los 50 del siglo XX se configura un nuevo paradigma en psicología cuyo objetivo fundamental es el análisis de los procesos mentales, se trata del paradigma cognitivo, también llamado «procesamiento de la información» por su preocupación por las manipulaciones sistemáticas de datos en la mente humana.

Su origen está asociado a una serie de acontecimientos científicos, tecnológicos y sociales que propician el cambio de enfoque de la psicología. Entre ellos, la teoría de la comunicación, que sugirió a los psicólogos la analogía entre la mente y los canales de transmisión de información; las teorías del aprendizaje, basadas en presupuestos asociacionistas y conductistas, que entran en crisis; pero sobre todo el desarrollo de los ordenadores, que causará un impacto decisivo en la consolidación del nuevo paradigma, sustituyendo la analogía del canal de comunicación (Rodrigo, 1.985).

La similitud entre la mente y los ordenadores proporcionaba un magnífico apoyo conceptual a la naciente psicología cognitiva. Se piensa que ambos son sistemas que admiten información, la procesan y producen una respuesta. De esta manera se considera al sistema humano de conocimiento como un sistema de procesamiento de la información, esto es, un sistema de receptores, memorias y efectores, así como los procesos para actuar sobre ellos. Las memorias contienen datos (información) y programas de procesos de información.

El interés desde de la educación matemática por conocer con mayor profundidad y extensión la forma de producirse y desarrollarse el pensamiento matemático, coincidió en la década de los 70 del siglo pasado con el interés que ya tenían los psicólogos de dar una justificación a los procesos generales del pensamiento, dando lugar a líneas de investigación convergentes que han estudiado el fenómeno general de la producción del pensamiento matemático, destacando el campo de estudio de la resolución de problemas como uno de los de mayor interés para la investigación.

La mayoría de los psicólogos del procesamiento de información están de acuerdo en la estructura de la memoria, describen ésta como un sistema de tres almacenes dispuestos secuencialmente en relación al flujo de información. El primero de ellos la «memoria sensorial», o «almacén de información sensorial» (Lindsay y Norman, 1.972), retiene la información del estímulo con gran fidelidad, sin ningún análisis semántico, durante escasas décimas de segundo. En realidad se trata de dos almacenes que retienen respectivamente la información visual (memoria icónica) y la información acústica (memoria ecoica). El siguiente almacén denominado «memoria a corto plazo», o «memoria de trabajo» (Romberg y Carpenter, 1.986), tiene una capacidad limitada (aproximadamente 7 unidades de información) y una persistencia de unos 15 segundos. Pero la memoria a corto plazo no es como el almacén de información sensorial, pues ahora la información ha sido ya descifrada y categorizada por los mecanismos del reconocimiento de patrones. La memoria de trabajo también es la etapa en que mantenemos la información que necesitamos provisionalmente durante sólo unos pocos minutos o que estamos tratando de organizar y almacenar de modo permanente. Por último la «memoria a largo plazo», o «memoria semántica» (Resnick y Ford, 1.981), es un almacén de capacidad y persistencia ilimitada en donde permanece la información en un estado pasivo hasta que es recuperada en la memoria a corto plazo para ofrecer la respuesta adecuada a través del generador de respuesta y de los efectores.

Los tres sistemas difieren en capacidad, persistencia temporal, formato simbólico de la información, procesos de recuperación y mecanismos de trasvase hacia otros almacenes. La memoria a corto plazo juega un papel privilegiado ya que recibe información tanto de la memoria sensorial (de origen externo) como de la memoria a largo plazo (de origen interno) y coordina y controla ambas fuentes de información mediante estrategias.

En el enfoque procesamiento de la información se considera la memoria como un elemento clave en el aprendizaje, pues el objetivo es el almacenamiento de la información en la memoria semántica y el recuerdo inmediato a partir de ésta; jugando un papel importante las redes semánticas o mapas conceptuales como representaciones de las estructuras del conocimiento.

Las teorías del procesamiento permiten analizar el microdesarrollo en tareas y procesos específicos. Los investigadores suelen estudiar la ejecución hábil, es decir, la conducta de una persona que se considera que ha llegado a dominar las habilidades que se requieren en una tarea específica. Los modelos que se derivan de este tipo de estudio pueden servir de modelo de ejecución hacia el que se puede dirigir el aprendizaje del niño.

El esfuerzo llevado a cabo para entender como actúa el sistema en situaciones particulares ha encontrado caldo de cultivo en el aprendizaje de las matemáticas, en cómo procesan los niños el conocimiento matemático. Uno de los campos de las Matemáticas donde más ha florecido este modelo se corresponde con aquel en el que se pueden identificar algoritmos, especialmente algoritmos de cálculo. El procesamiento de la información ha conseguido también analizar los componentes básicos que se dan en la solución de problemas y realizar su simulación mediante un ordenador.

En cualquier situación de resolución de problemas, el primer paso es elaborar una representación del problema; es decir, advertir las características del mismo y codificarlas de tal manera que sean interpretables por el sistema de procesamiento de la información. La elaboración de una representación es el proceso por el que se establecen vínculos entre el planteamiento del problema, por una parte, y la red semántica de la persona, su conocimiento de los procedimientos, y su conocimiento general acerca de las relaciones matemáticas y espaciales, por otra. Las diferentes representaciones pueden traer a la mente datos y procedimientos diferentes de la memoria a largo plazo, lo que a su vez afectará al proceso de resolución y a sus probabilidades de éxito.

El planteamiento del problema, cualquiera que sea su forma, proporciona los materiales brutos a partir de los cuales los sistemas de procesamiento de la información elaboran una representación del problema.

El entorno de la tarea es un poderoso factor determinante de la gama de estrategias que puede aplicar la persona que resuelve el problema.

Las instrucciones de la tarea pueden tener una eficacia especial, ya como ayuda a la resolución del problema, ya como disuasión de la misma, dado su poder de generar representaciones.

Las teorías del aprendizaje basadas en el procesamiento de información, pueden considerarse como versiones sofisticadas del conductismo (Russell, 1.984), por lo que, sin ser su aportación desdeñable, lo que la llamada revolución cognitiva ha venido a proporcionar al estudio del aprendizaje es, en el mejor de los casos, cambios cuantitativos, en la potencia asociativa, pero no cambios cualitativos en la forma de abordar el aprendizaje.

No puede afirmarse que el procesamiento de información haya sido un programa de investigación progresivo en relación con el conductismo. “La diferencia esencial entre el asociacionismo clásico y el computacional es sencillamente que en este último brilla por su ausencia cualquier teoría del aprendizaje” (Fodor, 1.983, p. 60).

> El asociacionismo computacional parte de un constructivismo estático que, respetando el principio de correspondencia entre las representaciones y el mundo, asume que el sujeto interpreta la realidad a partir de sus conocimientos anteriores. En cambio, las teorías de la reestructuración asumen además un constructivismo dinámico por el que no sólo se construyen interpretaciones de la realidad a partir de los conocimientos anteriores, sino que también se

> construyen esos mismos conocimientos en forma de teorías. La diferencia entre el constructivismo estático y dinámico remite, en último extremo, a la propia naturaleza mecanicista y organicista de los dos enfoques. Mientras que los mecanismos son estables y sólo se modifican por intervención exterior, los organismos son, por definición, seres cambiantes, criaturas heraclíteas que no se bañan dos veces en el mismo río ni conocen dos veces con el mismo concepto.
>
> Pozo, 1.989, p. 169

Una de las cosas que ha puesto de manifiesto la utilización de ordenadores es que las personas no siempre piensan como ellos.

La analogía mente-ordenador es exclusivamente en cuanto a los procesos y representaciones, es decir, funcional, pero los componentes y estructura física de ambos sistemas son totalmente diferentes (p.e. neuronas y circuitos integrados respectivamente). Además la analogía implica algunas deficiencias notables como el descuido de los aspectos organizativos de la conducta, de los fenómenos de la conciencia, de la motivación y el afecto, etc.

Los procesos que sustentan las operaciones de los ordenadores aplicados al funcionamiento cognitivo, son muy sencillos comparados con la complejidad de los procesos psicológicos reales; por consiguiente, en la supuesta semejanza de ambos conjuntos de procesos podemos ver, al menos, las siguientes diferencias:

1. Los ordenadores son capaces de procesar y almacenar grandes cantidades de unidades discretas de información que se les presentan simultánea o sucesivamente. Los seres humanos, por otra parte, podemos asimilar y recordar al mismo tiempo sólo unos cuantos ítemes discretos. Compensamos esta limitación por medio de la «comprensión», procesando unidades mayores compuestas de ítemes que dependen unos de otros sucesivamente.
2. El olvido no es problema para los ordenadores.
3. No hay el problema de los cambios debidos al desarrollo. La capacidad de los ordenadores para asimilar y almacenar información, o las clases de procesamiento de información o de procesos para

solucionar problemas que ellos emplean, son cosas que no cambian con la edad.

4. En la actualidad, los ordenadores carecen de la capacidad del ser humano para la improvisación imaginativa, la inspiración creadora y el pensamiento independiente.

2.5.2.2. *Gestalt*

La teoría de la *Gestalt* que nace en Alemania y es exportada a EEUU en los años veinte del siglo pasado, introduce la comprensión intuitiva (*insight*) en el aprendizaje de las matemáticas.

> Una *gestalt* es la percepción de una estructura o forma completa como algo más que, simplemente, las partes que la constituyen. El modelo
>
> . ˙ .
>
> puede ser percibido como un triángulo aunque sus componentes son 3 puntos. Si se percibe la secuencia
>
> 135791113151719
>
> no como una secuencia aleatoria de cifras, sino como la sucesión de los números impares menores que el 20, se ha hecho una *gestalt* (García, 2.001).

La tesis central de la psicología de la *Gestalt* radica en que la mente trata de interpretar las sensaciones y las experiencias que le llegan como un conjunto organizado y no como una colección de unidades de datos separadas, en que está dominada por una tendencia innata a buscar buenas *gestalts* o equilibrios psicológicos.

El más destacado psicólogo de la *Gestalt*, en el período de evolución de la teoría, fue Max Wertheimer (1.880-1.943) que se preocupó especialmente del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas. Estaba interesado sobre todo en demostrar lo que él llamaba «pensamiento productivo», o pensamiento basado en una apreciación de la estructura. Pretendía poner de manifiesto el funcionamiento del pensamiento productivo por medio de su demostración favorita, el problema del paralelogramo, y sugirió lo que implica tal pensamiento.

Wertheimer (1.945) cuenta que estaba de visita en un aula en la que se había enseñado a los niños a calcular el área del rectángulo y el maestro dice a los alumnos:

> «Ahora vais a aprender a hallar el área de un paralelogramo». Designa los ángulos con las letras a, b, c y d, y explica: «Trazo una perpendicular descendente desde el ángulo superior izquierdo y otra desde el ángulo superior derecho. Prolongo hacia la derecha la línea de base. Marco los dos nuevos puntos, e y f»

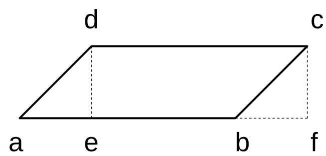


Figura 2.5.

> Con la ayuda de esta figura, hace la demostración habitual del teorema correspondiente (el área de un paralelogramo es igual al producto de la base por la altura) estableciendo la igualdad de determinadas líneas y ángulos, así como la congruencia del par de triángulos. En cada caso formula el teorema, postulado o axioma ya aprendido en el que se funda dicha igualdad o congruencia. Concluye diciendo que ha quedado demostrado que el área de un paralelogramo es igual a la base multiplicada por la altura.
>
> Wertheimer, 1.945, p. 26

Los niños estaban practicando calculando con éxito las áreas de muchas figuras con este algoritmo normalizado, cuando Wertheimer se acercó a la pizarra y dibujó el paralelogramo que se reproduce en la figura 2.6., y les pidió que calculasen su área.

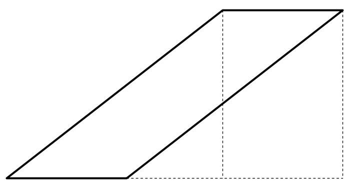


Figura 2.6.

Los niños reaccionaron de formas diferentes. Algunos dijeron “todavía no hemos estudiado eso” (Wertheimer, 1.945, p. 27), otros dijeron que el algoritmo de base por altura que ya conocían no se podía aplicar a ese tipo de figura. La dificultad se debía a que cuando trazaban la perpendicular desde el ángulo superior izquierdo, la línea quedaba a la derecha de la base, de forma que no parecía que la fórmula normalizada se pudiese aplicar.

Lo que Wertheimer quería probar con su demostración era que los niños que aprendían el algoritmo para calcular el área sin comprender los principios estructurales en que se basaba, se limitaban a seguir ciegamente las reglas que marcaba el profesor. Quedaba claro que se les había enseñado el algoritmo de forma mecánica, no habían aprendido de forma significativa.

La dificultad se debía a que los niños «limitados por las reglas» trazaban sus alturas de forma perpendicular a la base del papel, más que a la «base» de la figura. Wertheimer opinaba que no habrían cometido tal error si hubiesen comprendido la equivalencia funcional entre el paralelogramo y el rectángulo. La equivalencia era la verdadera estructura que subyacía en el problema.

Lo que señala claramente la teoría de la *Gestalt* es que la demostración de un resultado por el profesor puede no conducir al *insight* del alumno. Las exposiciones de la manera de calcular el área de un paralelogramo, basadas quizá en proporcionar congruencia a los dos pequeños triángulos, no garantizarán necesariamente que los alumnos comprendan por qué se requiere demostrar que los triángulos son congruentes. El *insight* surge como un aspecto del proceso de descubrimiento. La situación requiere ser estructurada para conseguir que el necesario descubrimiento sea lo más seguro posible. Entonces, el *insight* obtenido puede ser transferido y entendidas también las deducciones de las fórmulas de las áreas de los triángulos, de los trapecios y de las otras figuras planas.

El «proceso» de conseguir el *insight*, aunque los psicólogos de la *Gestalt* apenas lo llegaron a explorar, lo analizó en parte Karl Duncker[13], alumno de Wertheimer. Duncker, que se dedicó a las estrategias generales de la resolución de problemas, distinguió entre el procesamiento «de arriba abajo», que partía del análisis de los objetivos y del planteamiento del problema, y el procesamiento «de abajo arriba», que partía del análisis de los elementos del problema. Suele ser difícil diferenciar en la práctica los procesos de arriba abajo de los de abajo arriba; en la ejecución matemática parece que siempre están actuando recíprocamente. Pero la distinción tiene un interés pedagógico, porque sugiere enfoques de enseñanza alternativos.

La visión gestáltica de la resolución de problemas afirma que el *insight* surge de una comprensión del problema como un todo y de la relación de las partes con el todo. Como profesores, podemos ayudar a nuestros alumnos a aprender, proporcionándoles experiencias en las que la estructura sea evidente, o guiando u orientándoles hacia la estructura. Pero puntualizan Resnick y Ford (1.981) que no es fácil la manera de hacerlo, pues el concepto de estructura del problema, aunque inspiró a Wertheimer largos párrafos, no siempre es sencillo de definir en términos prácticos, además, las explicaciones de los psicólogos de la *Gestalt* no han pasado del nivel de los ejemplos concretos, apuntan a cosas importantes, pero no nos enseñan a generalizar sus descubrimientos para determinar principios pedagógicos que se puedan aplicar a las variedades del contenido matemático y a los problemas concretos.

> Es más fácil demostrar el funcionamiento de las ideas estructurales en el contexto de problemas muy específicos que definir exactamente y de forma abstracta en qué consisten dichas estructuras. Y es más difícil todavía dar una presentación teórica completa de la estructura como fenómeno general en la resolución de problemas matemáticos.
>
> Resnick y Ford, 1.981, p. 169

[13] Duncker (1.945), citado por Resnick y Ford (1.981)

2.5.2.3. Piaget: equilibración y etapas de desarrollo

La obra de Jean W. F. Piaget (1.896-1.980) presenta una visión de las estructuras cognitivas algo diferente de la del movimiento de la *Gestalt*. Estos psicólogos estudiaron principalmente la forma inmediata en que se perciben las estructuras de los problemas o de los contenidos, como si las estructuras completas se percibieran de una sola ojeada. Debido a su insistencia en que el *insight* era inmediato y en que la comprensión subsiguiente era relativamente completa, la psicología de la *Gestalt* no parecía preocuparse de cómo se iba fortaleciendo el conocimiento de las relaciones hasta el punto en que era posible tal *insight* y reconocimiento. Tampoco parecía preocupar a los gestálticos cómo podían cambiar a lo largo del tiempo las capacidades de reconocimiento y de *insight* de las personas. Por el contrario, Piaget se preocupó específicamente del proceso y del desarrollo del pensamiento. También creía que las características fundamentales del pensamiento humano se podían comprender en términos de las proposiciones y relaciones lógicas que expresaba la conducta humana. Tanto su interés por la lógica, como su preocupación por cómo se modifica el pensamiento durante el crecimiento y la experiencia, le permitieron dar forma a su definición de estructura cognitiva.

Piaget es célebre, sobre todo, por sus estudios extensos sobre el desarrollo del pensamiento de los niños. La mayor parte de los estudios de su obra ponen de manifiesto sobre todo la idea de las etapas de desarrollo.

Para Piaget el conocimiento físico es el conocimiento de las propiedades de los objetos, y resulta directamente de la acción sobre los mismos objetos (abstracción simple). En cambio, el conocimiento lógico-matemático no surge ya de las acciones en sí, sino de la reflexión sobre dichas acciones, de la libre coordinación, interiorizada, de tales acciones (abstracción reflexiva), por ejemplo, cuando un niño descubre que el resultado de contar los objetos de un conjunto es independiente del orden que atribuya a los elementos que se cuentan.

Mientras el origen del conocimiento físico está fundamentalmente en los objetos, el del conocimiento lógico-matemático está en el sujeto, en la actividad lógica del sujeto.

El conocimiento no es para Piaget una mera copia de los datos procedentes de la realidad exterior, no es directamente transmisible, el conocimiento no es la consecuencia de un acto instantáneo de comprensión, su adquisición requiere una acción por parte del que aprende y una interacción con el entorno, debe ser construido activamente desde la propia experiencia y no recibido pasivamente del entorno por el sujeto.

Como biólogo que era Piaget consideró el desarrollo intelectual del mismo modo que el crecimiento físico y, en particular, pensó que incluía una autorregulación. Así, cuando nuevas ideas inciden sobre otras ya existentes, puede suceder que creen un conflicto, un desequilibrio mental, que la persona trata de resolver, con un efecto como de contrapeso, de reacción, que Piaget denominó de «equilibración», considerado por muchos investigadores este aspecto de su teoría como el más importante.

Para explicar este fenómeno, Piaget introdujo las ideas de «asimilación» y de «acomodación»: entiende por «asimilación» la adopción o incorporación de nuevos datos a las estructuras existentes, la aceptación de nuevas ideas, y por «acomodación» entiende la modificación y enmienda de las estructuras existentes para hacer posible la asimilación. Estos dos aspectos de la equilibración se producen juntos y son inseparables, generalmente.

Un ejemplo matemático podríamos encontrarlo en la adición. Hasta la aparición del tema de los números enteros, los niños han trabajado con números naturales y fracciones no negativas, por lo que la adición suponía la obtención de un resultado igual o mayor (2 + 6, 1/5 + 4/3), es decir, generalmente adicionar era aumentar, en cambio en la adición con números enteros el resultado puede suponer disminución ([+5] + [-3]), lo que produce un desequilibrio en la concepción de la operación adición, que se resolverá con la correspondiente asimilación y acomodación.

La disponibilidad para el aprendizaje viene determinada por la idoneidad del bagaje cognitivo que posee el estudiante para enfrentarse con los requisitos de una determinada nueva tarea de aprendizaje. Esta idoneidad abarca dos aspectos: por un lado, los conocimientos previos específicos que se poseen en relación con la materia a aprender y por otro, el estado de desarrollo intelectual o madurez cognitiva del individuo.

Los profesores de matemáticas estamos obligados a mantener una mentalidad abierta ante la disponibilidad. Posiblemente resultaría contraproducente para el desarrollo cognitivo de los alumnos suponer con demasiada facilidad que no están aún preparados para un nuevo contenido. Pero la experiencia docente indica que los intentos de presentar nuevos contenidos no siempre alcanzan el éxito, y, por consiguiente, nosotros mismos hemos de estar preparados para cuando esto ocurra.

La teoría de Piaget ofrece una clara consideración de la disponibilidad. Los niños no están preparados para las matemáticas que dependan de la adquisición de la conservación de la cantidad si no han alcanzado la etapa de desarrollo intelectual en la que la conservación es una de las características definitorias. Igualmente los alumnos no están preparados para las matemáticas basadas en la razón y en la proporción (y es muy amplia la parte de las matemáticas escolares que corresponde a esta categoría, como por ejemplo los números racionales y la trigonometría) si no han llegado a la etapa en la que se domina la proporcionalidad.

El trabajo de Piaget tiene en su origen la noción de que los individuos recorren, a lo largo de su desarrollo, la historia intelectual de la especie humana. Creía, por tanto, que era posible comprender el desarrollo de la capacidad intelectual de la especie estudiando el desarrollo intelectual de los individuos al ir haciéndose adultos siempre que mantuviesen una relación normal con el entorno físico y social. La idea general era que las personas estaban conformadas biológicamente para interrelacionarse con su entorno de formas determinadas. A lo largo de esta interrelación, se formaría una secuencia de estructuras complejas de pensamiento.

Para estudiar el desarrollo del pensamiento de los niños Piaget trabajó fundamentalmente sobre el desarrollo de los conceptos lógicos y matemáticos. Estudió, tanto con niños como con adolescentes, el desarrollo de los sistemas de clasificación lógica, y el de los conceptos numéricos, geométricos, de tiempo, de movimiento y de velocidad. Eligió estos temas para su estudio porque suponían claramente el empleo de ciertas estructuras lógicas fundamentales que Piaget creía eran la base del pensamiento y del razonamiento, sobre todo del pensamiento y razonamiento científico.

La teoría del desarrollo de Piaget se centra en el aspecto dinámico de la actividad intelectual y de las estructuras psicológicas que caracterizan a los niños en diferentes etapas de su desarrollo. Utiliza el término «estructura» para describir la organización mental de la experiencia por parte de un estudiante activo. Para probar la existencia de estructuras cognitivas cualitativamente diferentes interpretó protocolos de niños y adolescentes que realizan tareas matemáticas y lógicas, que permiten comprensiones y resoluciones diferentes de las tareas. Estas diferentes estructuras cognitivas se desarrollan siguiendo una secuencia que cubre varias etapas definidas.

Diferentes estudiosos de Piaget han agrupado las etapas de modos ligeramente distintos, así que es posible hallar autores que se refieren a las cinco etapas, a las cuatro e incluso a las tres de Piaget. Las cuatro aquí consideradas son las siguientes:

1. La etapa sensorio-motriz
2. La etapa preoperatoria
3. La etapa de las operaciones concretas
4. La etapa de las operaciones formales

Piaget mismamente se refirió a una etapa preconceptual y a una etapa intuitiva como subdivisiones de la preoperatoria. Otros, como Collis (1.980), han empleado subdivisiones como: temprana de operaciones concretas, media de operaciones concretas, de generalización concreta o formal temprana y, de operaciones formales o formal posterior.

Según Piaget todos los niños pasan por estas etapas y en este orden, es decir, que sucesivamente manifiestan aquellas características de la actividad intelectual que él formuló para las etapas.

La trascendencia curricular de las etapas es notoria y se deriva de la interpretación que se les ha dado como estrategia para decidir el punto óptimo para introducir un determinado contenido en el currículum.

Desde el punto de vista del aprendizaje de las matemáticas, la consecuencia debería ser que, si se sabe que un chico opera a un determinado nivel piagetiano, si se conoce en qué etapa está funcionando, no existe ninguna posibilidad de que pueda hacer frente a matemáticas que dependen de capacidades asociadas con una etapa siguiente.

El término «operación» es común a tres de las etapas y, para Piaget, significa acción, pero efectuada en la mente y organizada en un sistema.

Durante el periodo de escolarización obligatoria, los niños suelen partir de la etapa preoperatoria, pasar por la etapa de operaciones concretas y llegar a la de operaciones formales, por lo que pasamos a continuación a describir brevemente características matemáticas de estas tres etapas.

El pensamiento que Piaget ha llamado preoperatorio se caracteriza por la dependencia de las características perceptuales de los objetos o de las configuraciones y la incapacidad de pensar de forma reversible.

El niño preoperatorio en edad escolar intuye, por lo que puede afirmar, pero no demostrar. La suya es una inteligencia práctica sus intuiciones son muy primarias todavía, rígidas e irreversibles. Su pensamiento es concreto, puede representar mentalmente objetos y acciones, pero no tiene capacidad para realizar operaciones lógicas de comprensión abstracta. Por eso, cuando trabaja debe tener el material concreto delante, manipulando, experimentando, descubriendo con él, trabajando directamente con la realidad.

Dice Piaget que en la génesis de la noción de número, los conceptos cuantitativos prenuméricos como: grande, pequeño, ninguno, algunos, pocos, muchos, todos... están, en general, a merced de las cualidades perceptuales de los objetos.

La conservación, que es uno de los indicadores del paso de la etapa preoperatoria a la de operaciones concretas, en cada tipo de concepto de cantidad (discontinua: número de objetos; continua: longitud, masa, capacidad, superficie, volumen) presenta aproximadamente la misma tendencia evolutiva: 1) no conservación; 2) un tipo de conservación momentáneo, empíricamente fundado; es decir, el niño sostiene provisionalmente la hipótesis de la conservación respecto de algunas transformaciones, pero no respecto de otras, y 3) una afirmación de la conservación lógicamente segura, casi axiomática, en relación con todas las transformaciones relativas al tipo de concepto de cantidad que se estudia (Flavell, 1.963).

Respecto de la clasificación, hasta los 5 años, el niño tiende a organizar el material clasificable en lo que Piaget e Inhelder (1.975) llaman «colecciones figurales», la colección lograda, no es en modo alguno una clase lógica, sino una figura compleja, de ahí el nombre de colección figural. De los 5 1/2 a 7-8 años, las colecciones figurales son reemplazadas por colecciones abstractas no figurales, para llegar a realizar finalmente verdaderas clasificaciones.

Si las primeras matematizaciones organizan el mundo que rodea al niño esencialmente en función de lo que se vive, y las referencias espaciales se forman a partir de su propio cuerpo, las estructuras a que dan origen, se constituyen, según Piaget, a partir de referencias topológicas: volumen, superficie, punto, frontera, interior, exterior, etc. Ya en el final de esta etapa preoperatoria comenzarán a desarrollarse las nociones de geometría euclídea.

Para Piaget, entre las capacidades que se alcanzan y se desarrollan con el comienzo del pensamiento operacional concreto figuran la inclusión en clases, la conservación de la cantidad, la reversibilidad, la combinación y la separación, la ordenación y la posición relativa, todas las cuales pueden ser muy importantes en el paso de un enfoque informal e intuitivo de las matemáticas (implicando poco más que la manipulación de objetos y materiales), a las matemáticas como actividad de papel y lápiz.

Así, en el periodo temprano de operaciones concretas (Collis, 1.980), que abarca aproximadamente la primera mitad de esta etapa se manifiesta la capacidad de los alumnos para trabajar significativamente con las cuatro operaciones aritméticas elementales cuando se las utiliza por separado con números pequeños. Ambos, números y operaciones, deben estar relacionados con objetos físicos y con acciones realizables experimentalmente. Por ejemplo, el niño puede calcular 3 + 12 = 15, tomando un conjunto de tres elementos, otro de doce, juntándolos y contando cuantos objetos hay en total, en una situación dentro de la experiencia del niño.

El término «concreto» no implica que la enseñanza de las matemáticas exija siempre objetos concretos hasta la plena aparición de las operaciones formales. En una situación nueva de aprendizaje, es probable que sea importante la actividad física con objetos reales en la etapa de las operaciones concretas, pero sólo hasta el momento en que el niño sea capaz de sustituir tales manipulaciones físicas por las correspondientes actividades mentales fruto de experiencias personales concretas anteriores. A pesar de que a veces se asocia incorrectamente «operaciones concretas» y uso de materiales concretos en el aula, el error habitual cometido en la enseñanza de las matemáticas no ha sido precisamente el empleo excesivo de materiales, ni contar muy a menudo con ellos como una referencia física.

> Hay muchas personas que no pueden aceptar que tengan significado alguno etapas de desarrollo intelectual descritas por Piaget como la de las operaciones concretas. Sin embargo, en la mayoría de los alumnos y durante gran parte de su vida escolar, parece existir la necesidad de referentes concretos en la enseñanza de las matemáticas, independientemente de cualquier creencia en la teoría piagetiana.
>
> Orton, 1.988, p. 86

En el periodo medio de operaciones concretas (Collis, 1.980), siguiendo con el ejemplo aritmético, el niño es capaz de trabajar significativamente con cierto número de operaciones sucesivas si los números se mantienen pequeños (13 + 5 + 21), y con números grandes si forman parte de operaciones simples.

Según Piaget, el pensamiento operacional formal permite la hipótesis y la deducción, autoriza la argumentación lógica y el razonamiento en las proposiciones verbales.

En términos de aprendizaje de las matemáticas, además de la proporcionalidad, existen en esta etapa muchos temas e ideas en matemáticas que los profesores de enseñanza secundaria saben que ofrecerán grandes dificultades a sus alumnos en razón del nivel de abstracción exigido. El álgebra como generalización de la aritmética depende de la abstracción de relaciones numéricas más bien concretas. A muchos alumnos les resulta difícil y, desde luego, irrelevante, porque lo que les pedimos hacer en álgebra no tiene para ellos un significado real subyacente y algunos llegan a experimentar un rechazo tan intenso que condiciona su actitud global hacia las matemáticas[14].

Frecuentemente todos necesitamos funcionar en un nivel más concreto y a menudo es útil una introducción práctica a una nueva idea.

Así, en el periodo formal temprano o de generalización concreta (Collis, 1.980), que abarca aproximadamente los dos-tres primeros años de la etapa de las operaciones formales, los niños pueden trabajar con números grandes y combinaciones de operaciones, por tanto no concretizables fácilmente, con la confianza de que, en el momento que lo necesiten, las cantidades y sus transformaciones pueden proporcionar un resultado determinado y que podría ser aplicado a la realidad física. Los alumnos de este nivel utilizan elementos generalizados (letras en sustitución de números), entienden y usan con significado generalizaciones como $(m \cdot a)/m = (n \cdot a)/n$ y trabajan con fórmulas como $V = a \cdot b \cdot c$, siempre que comprenden que cada letra representa a un único número y que de cada operación binaria puede obtenerse su resultado en cualquier momento.

[14] Cockroft, 1.982, p. 73: Los participantes en el estudio de Bath tuvieron «la fuerte impresión de que el álgebra parece ser fuente de gran confusión y de las actitudes negativas de muchos alumnos».

Sólo en la etapa de las operaciones formales se puede esperar que vaya desapareciendo la dependencia de los referentes concretos, según la teoría piagetiana. Los alumnos más capacitados tienen escasa necesidad de material concreto cuando ingresan en la enseñanza secundaria y progresan en ésta, aunque también es probable que supongamos que necesitan una referencia a lo concreto inferior a la que realmente precisan. Con el tiempo, y para algunos alumnos, se hace posible la manipulación de símbolos como ejercicio abstracto, pero sólo para una pequeña proporción. Parece que la mayoría de los estudiantes no están nunca dispuestos para buena parte del álgebra.

Ya en el período formal posterior (Collis, 1.980) *e*l alumno no tiene necesidad de relacionar elementos, operaciones o la combinación de ellos con modelos análogos físicos, y puede tomar como realidad un sistema abstracto bien determinado con sus definiciones, relaciones y reglas. Puede resolver problemas en los que las letras representan números o variables que emplean una operación bien determinada. Se enfrenta con variables en cuanto tales, porque puede evitar sacar la conclusión final hasta haber considerado las diversas posibilidades, estrategia esencial para obtener una relación distinta de la de obtener un resultado único.

Hasta el momento no se ha indicado la edad en que los chicos pasan de una etapa piagetiana a otra. Son muchos los problemas que surgen cuando se trata de relacionar etapas con edades. Está claro que todos los chicos siguen la misma secuencia de etapas de desarrollo, que no pasan repentinamente de una etapa a otra, tiene que existir un período de transición. Otro problema es que resulta difícil identificar con claridad en qué etapa se halla un determinado alumno en un momento específico, pues

> … los niños se pueden comportar como si pensasen de forma reversible (operatoriamente, por lo tanto), en una tarea dada, de conservación numérica por ejemplo, y parecer que están en la etapa preoperatoria en alguna otra tarea muy relacionada con la anterior, como puede ser la conservación del peso.
>
> Resnick y Ford, 1.981, p. 208

Piaget señaló los 7 años como la edad aproximada en que se producía el cambio del pensamiento preoperacional al pensamiento operacional concreto, pero añadía que podía haber una amplia variación de un individuo a otro. Investigaciones posteriores han indicado que, en muchos alumnos, no comenzaban a manifestarse hasta los 14 o los 15 años aquellas características que Piaget describió para la etapa de las operaciones formales. El Informe Cockroft señala:

> Parece, por tanto, que hay una «diferencia de 7 años» en cuanto al momento en que se logra la comprensión del valor de posición necesaria para saber qué número es una unidad mayor que 6.399.
>
> Cockroft, 1.982, p. 124

Una considerable proporción de quienes dejan la escuela a los 16 años no ha alcanzado la etapa de las operaciones formales, precisamente Collis (1.980) sitúa a partir de esa edad el periodo formal posterior, o sea, claramente formal.

> Algunos investigadores (Laboratory of Comparative Human Cognition, 1.979)[15] han llegado a la conclusión de que en algunas culturas nunca se alcanza un pensamiento operatorio formal plenamente desarrollado con estas características. Y, lo que es más importante para nuestro estudio, algunos individuos no adquieren modos formales de pensamiento ni siquiera en las culturas más avanzadas intelectualmente.
>
> Resnick y Ford, 1.981, p. 222

Ante esta situación, Orton (1.988, p. 88) propone que la figura 2.7., que reproducimos a continuación, ilustra la relación probable entre las etapas piagetianas y las edades a través de los ojos de un profesor de matemáticas, aunque no debe considerarse este diagrama como preceptivo.

[15] Laboratory of Comparative Human Cognition (1.979): «What's cultural about cross-cultural cognitive psychology?» *Annual Review of Psychology*

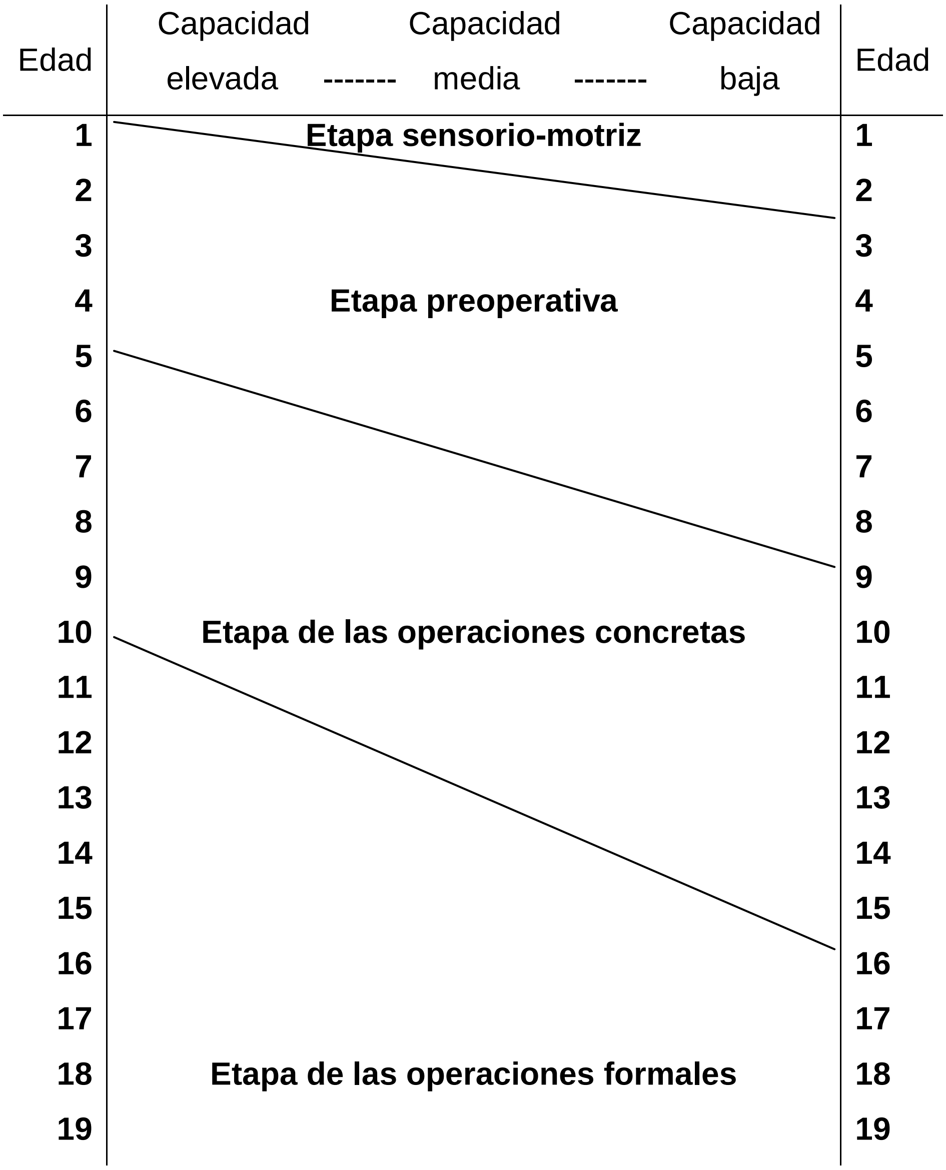


Figura 2.7.

La asignación de niveles absolutos de dificultad a determinados contenidos matemáticos no resulta fácil, y puede ser peligrosa e inútil. La disponibilidad para el aprendizaje es un tema muy complejo y no debemos hacer uso de declaraciones generales de las etapas de desarrollo para justificar no utilizar métodos apropiados para ayudar a los niños a aprender ideas matemáticas, del mismo modo que no debemos presentárselas de manera que reforcemos su convencimiento de que las matemáticas no son para ellos.

De la teoría de Piaget se derivan principios generales de aprendizaje constructivo, de representaciones concretas, de respuesta social, y de interacción clínica entre profesor y alumno, que pueden ayudar a crear ajustes óptimos entre las capacidades del estudiante y el contenido y procedimientos de la enseñanza de la matemática que resumimos muy brevemente.

- *Aprendizaje constructivo*. En el título de su libro de 1.973, Piaget lo dice claramente: «Comprender es inventar», es construir uno mismo. Podemos ayudar a los niños a adquirir conceptos matemáticos por medio de materiales didácticos y de preguntas de los profesores, pero sólo por su propio trabajo pueden comprender verdaderamente.

- *Representaciones concretas*. Las investigaciones de Piaget demuestran que los niños pequeños son capaces de pensar de forma operatoria sólo con respecto a materiales y situaciones que estén presentes físicamente y por tanto, que les ofrezcan una respuesta (*feedback*) en forma de representaciones concretas de conceptos. Pero nuestro sistema educativo se basa casi exclusivamente en la verbalización de ideas, y según Piaget, la verbalización no garantiza la comprensión, ni se puede afirmar que la comprensión dependa de la verbalización.

- *El entorno social en el aprendizaje*. Otro tipo de situaciones que incitan al niño a abandonar sus concepciones y estructuras antiguas y a construir otras nuevas es el entorno social. La acomodación de las estructuras en el proceso de desarrollo intelectual se produce en parte, según Piaget, cuando los niños ven que sus propuestas se reciben con escepticismo. Sugiriendo Piaget que en este proceso la disconformidad de los adultos influye menos sobre los niños que la disconformidad de los otros niños que están más próximos en edad y en nivel conceptual general. Si es así, el aprendizaje de los niños depende en gran medida del entorno social y de las oportunidades que brinda para relacionarse con otros niños en la realización de tareas.

- *La enseñanza como interacción clínica*. Para sus investigaciones Piaget utilizó un tipo especial de entrevista consistente en marcar un problema claramente determinado, materializado en objetos físicos con los que experimenta el niño a lo largo de la entrevista. Las respuestas verbales del niño y sus acciones físicas aportan los datos de los que se deducen sus procesos de pensamiento. Este tipo de entrevista proporciona un método por el que los profesores que comprenden las bases conceptuales de las matemáticas que enseñan pueden llegar a saber qué es lo que comprenden los niños. Esto representa un paso crucial en una estrategia educativa que pretenda ajustar la enseñanza al desarrollo del niño.

Los críticos a la teoría piagetiana ponen en tela de juicio la realidad de las etapas, porque los niños presentan rendimientos muy variables en tareas que supuestamente dependen de las mismas operaciones y porque la modificación de las tareas puede alterar radicalmente su dificultad. Sugieren que hacen falta una serie de variables, además de las estructuras lógicas en las que se centra Piaget, para explicar los rendimientos; por lo tanto, no es posible deducir una falta de competencia lógica a partir de un rendimiento dado en una tarea.

2.5.2.4. Bruner: el currículo en espiral

Aproximadamente por la mitad del siglo XX empezó un periodo de reevaluación y reforma del currículo, centrado en las matemáticas y en las ciencias, en el que se celebraron dos conferencias que darían forma a las aspiraciones de muchos profesores de matemáticas en la década siguiente. Una de las conferencias tuvo lugar en 1.959 en Woods Hole (Massachusetts, USA), reunió a psicólogos, pedagogos, matemáticos y físicos para considerar los principios generales y las propuestas sobre la naturaleza del aprendizaje y de la enseñanza en matemáticas y en ciencias. Otra conferencia, a la que acudieron sobre todo matemáticos, tuvo lugar en Cambridge (Massachusetts) en 1.963, exploró la posibilidad de ampliar de manera considerable la enseñanza de las matemáticas en las escuelas.

Ante la cuestión de cómo se debía conseguir que el aprendizaje de las matemáticas tuviese sentido, ambas conferencias apuestan por la enseñanza de las matemáticas como una disciplina estructurada, de forma que las interrelaciones entre los conceptos quedaran puestas de relieve, así como las estructuras conceptuales que subyacen a los distintos procedimientos matemáticos, es decir, apuestan por enseñar las estructuras matemáticas (no necesariamente las algebraicas), optan por un enfoque más conceptual y comprensivo de la enseñanza de las matemáticas.

Para ello, había que introducir temas avanzados en la escuela primaria, pero adecuados a las capacidades y comprensión de los estudiantes en cuestión. Ajustar la enseñanza a los niños no exigiría el abandono de las estructuras fundamentales de las matemáticas, supondría más bien la presentación de estructuras parciales o incompletas de forma que fomentasen la comprensión intuitiva de las interrelaciones entre sus partes, de tal manera que un aprendizaje posterior permitiría «rellenar» o completar las estructuras.

Aunque no se puede asegurar hasta qué punto los reformadores del currículo de los años 60 (s. XX) se apoyaron en la psicología como marco teórico de referencia intelectual para las nuevas propuestas didácticas, existe un psicólogo cuyo nombre se suele asociar mucho al movimiento estructuralista: Jerome S. Bruner (1.915-).

Bruner asume el problema del cómo enseñar y mantiene que los alumnos cuyas estructuras cognitivas no alcancen los grados de complejidad adecuados para asimilar las estructuras matemáticas pueden acceder a ellas de forma intuitiva e incluso emprender generalizaciones y abstracciones aun cuando sólo perciban parte de lo relacionado y lo generalizado.

En su propio trabajo, combinó los objetivos de la psicología experimental con los del estudio del trabajo del aula. Sus experimentos en el aula se refirieron sobre todo al aprendizaje de las matemáticas, y colaboró con Z. P. Dienes, profesor de matemáticas cuyo trabajo, que describiremos más adelante, permite reconocer la influencia de Bruner en los planteamientos didácticos matemáticos en España.

Investigó sobre los procesos cognitivos propios del pensamiento y del aprendizaje y, apoyándose en parte en las ideas de Piaget sobre el desarrollo, empezó a examinar los procesos cognitivos de los niños, centrándose en cómo representan mentalmente los conceptos e ideas que van aprendiendo, describiendo (Bruner, 1.966) tres modos de representación: enactiva, icónica y simbólica.

El enactivo es un modo altamente manipulativo que opera solamente a través de la acción, por ejemplo, la manipulación de materiales concretos para el inicio del aprendizaje de la adición de números naturales. La representación enactiva es la más elemental, la menos elaborada, se cree que este modo es la única manera por la que los niños pequeños pueden recordar las cosas, pero puede poseerla tanto el adulto como el niño.

El segundo modo de representación, el icónico, nos separa un paso de lo concreto y de lo físico para entrar en el campo de las imágenes mentales. Se recupera en la memoria como una imagen mental figurativa que permite no sólo recordar el hecho sino también recrearlo mentalmente cuando sea necesario, de manera abreviada, presentando únicamente los detalles más importantes. Por ejemplo, un niño que no necesita utilizar materiales concretos para calcular 4 + 9, pero que mentalmente visualiza aquellos objetos para obtener la respuesta.

> El punto culminante de esta fase se encuentra entre los cinco y los siete años. Finalmente, sucede algo muy especial cerca de la adolescencia, cuando el lenguaje es cada vez más importante como medio de pensar.
>
> Bruner, 1.966, p. 36

La representación simbólica, tercera manera de capturar las experiencias en la memoria, tiene como base la competencia lingüística, aunque evidentemente en matemáticas la representación simbólica hace referencia no sólo a definiciones conceptuales sino a relaciones, propiedades, estrategias, y supone la forma más elaborada de representación. Cuando los niños empiezan a escribir operaciones matemáticas (utilizando números, formatos sencillos como las cifras en columna y los signos de operación como +, -, x, ÷, e =), es el principio para ellos de la representación simbólica, como lo es también su capacidad de «leer» estas notaciones matemáticas, y en un futuro inmediato empezarán a pensar, en las actividades que realizarán, en términos de los mismos símbolos, lo que les abre nuevas posibilidades y les conduce a un tipo de aprendizaje y pensamiento más abstracto y flexible.

Según Bruner (1.964)[16] los modos de representación enactiva, icónica y simbólica se desarrollan evolutivamente en este orden, cada modo depende del anterior y exige mucha práctica en el mismo antes de que se pueda llevar a cabo la transición al modo siguiente.

Partiendo de la base de que su teoría del desarrollo conceptual seguía un curso paralelo a la teoría general del desarrollo intelectual, Bruner afirmó que si el intelecto se desarrollaba en el orden enactivo-icónico-simbólico, entonces lo lógico era enseñar los conceptos en dicho orden.

Su teoría es similar en muchos sentidos a la teoría de Piaget en la que está inspirada, pero tienen interpretaciones diferentes en el aula. Mientras Piaget considera necesario esperar hasta que el niño esté preparado (disponibilidad cognitiva), antes de intentar enseñarle conceptos que dependen de que el niño posea capacidades correspondientes a las operaciones concretas, o a las operaciones formales, Bruner, que se ha preocupado más directamente de las aplicaciones en el aula, afirma lo contrario: "cualquier materia puede ser enseñada efectivamente, en alguna forma honradamente intelectual, a cualquier niño en cualquiera fase de su desarrollo" (Bruner, 1.960, p. 51).

El vehículo para una educación de este tipo sería un «currículo en espiral» (Bruner, 1.960, p. 80), en el que los temas irían apareciendo una y otra vez, y cada nuevo tratamiento de los mismos sería algo menos intuitivo y más formalizado que el anterior, y pondría de manifiesto sus relaciones con un conjunto cada vez mayor de conceptos matemáticos. Afirma que las estructuras matemáticas se pueden ir formando en las mentes de los estudiantes a base de proporcionarles experiencias que les permitan desarrollar representaciones enactivas, icónicas y simbólicas de los conceptos, en ese orden.

En este enfoque de la enseñanza de las matemáticas (en el 24th Yearbook, NCTM, 1.959, ya aparece tácitamente)[17], está implícito un gran respeto por la capacidad intelectual del niño.

[16] Bruner (1.964) citado por Bruner (1.966)
[17] Citado por Gómez (1.991)

Un ejemplo de currículo en espiral lo vemos en la enseñanza de las fracciones. Aparecen en 4.° de Primaria (Segundo Ci clo) como expresión parte-todo, la relación entre una parte y el «todo», en el Tercer Ciclo de Primaria se presentan como cociente de dos números naturales, y ya en la Enseñanza Secundaria Obligatoria como operador y como razón. Se vuelve a ellas en los cursos sucesivos ampliando y cambiando los contextos y las interpretaciones de las fracciones. ¿Por qué varios años para tratar el mismo tema? No es por una simple cuestión de repetición y reforzamiento, sino por una razón de aproximación progresiva. La compresión de las fracciones no se contempla como «ahora ya pueden comprender todo y antes no».

> Se considera que no hay por qué restringir la enseñanza en los primeros años a las destrezas básicas, sino que hay que preparar la completa comprensión de los conceptos básicos y principios generales, aunque sea de un modo intuitivo, para fundamentar la asimilación posterior más abstracta, incrementar el potencial significativo y prevenir el aprendizaje memorístico.
>
> Gómez, 1.991, p. 89

El hecho de que el conocimiento se represente de maneras diferentes sugiere que, en el currículo en espiral, el profesor debe adaptar los contenidos a un nivel compatible con la capacidad cognitiva infantil, por ejemplo, como hemos señalado más arriba, una operación matemática se puede presentar en acto, icónica y por último simbólicamente. Esta es una tarea ciertamente difícil, por la tendencia natural a adoptar el mismo nivel en la enseñanza de una materia que el que se ha seguido para aprenderla y porque una vez aprendida, en apariencia se vuelve más fácil y se olvidan las dificultades encontradas.

La teoría de Bruner de la secuencia del desarrollo conceptual, y su propuesta didáctica que se basa en tal secuencia, el currículo en espiral, plantean algunas preguntas importantes sobre las representaciones cognitivas: ¿podemos probar de forma experimental qué modo de representación está utilizando un niño en un momento dado?, ¿puede un profesor utilizar esta información para ajustar la enseñanza en el nivel actual del niño? y, ¿es verdaderamente útil el concepto de representación cognitiva para definir de forma más precisa los requisitos de procesamiento de las tareas matemáticas?

Pero a pesar de las interrogaciones, el enfoque tiene cierto atractivo por el objetivo básico de hacer llegar el contenido matemático de forma elegante y sencilla, teniendo en cuenta las capacidades cognitivas de los estudiantes (Resnick y Ford, 1.981).

2.5.2.5. Aprendizaje por descubrimiento. Resolución de Problemas

La creciente insatisfacción con el vacío formulismo de gran parte de la educación de finales del siglo XIX y principios del XX; con que el currículo no se relacionara con la experiencia cotidiana del niño; y con la verbalización y la memorización mecánica de los contenidos, junto con la concepción piagetiana del conocimiento como resultado de un proceso de acción sobre la realidad y como construcción estrictamente personal, provocó que en el ámbito educativo se fuera extendiendo la idea de que todo aprendizaje verbal es verbalismo inútil, acentuando por el contrario el hincapié en la experiencia directa, inmediata, del niño, como condición imprescindible para la solución adecuada de problemas y realzando el acto de descubrimiento, constituyéndose todo ello en fundamento de un movimiento pedagógico que se puede denominar, genéricamente, «aprendizaje por descubrimiento».

A veces se usan otras denominaciones, como «aprendizaje por investigación», «enseñanza basada en la investigación en el aula», etc., lo que en verdad cuenta y lo que importa es el espíritu de la educación activa frente a la pasiva, no la definición exacta de ciertos términos en uso.

Se ha propuesto muchas veces el descubrimiento como mejor manera de enseñar conceptos nuevos en matemáticas y en otros campos. En el aprendizaje por descubrimiento, el contenido principal de lo que ha de aprenderse se debe descubrir de manera independiente antes de que se pueda asimilar dentro de la estructura cognitiva. En realidad, se alude a la actividad mental de reordenar y transformar lo dado, de forma que el sujeto tiene la posibilidad de ir más allá de lo simplemente dado (Bruner, 1.961).

Teniendo en cuenta que la intención que preside la programación de una lección es asegurarse de que, en la medida de lo posible, tenga lugar el aprendizaje, diferentes autores han tratado de clasificar los métodos de descubrimiento y así tenemos: «aprendizaje por descubrimiento fortuito», «aprendizaje por descubrimiento autónomo» y «aprendizaje por descubrimiento dirigido».

El descubrimiento fortuito sucede, desde luego, pero como no puede ser planificado, ningún programa de aprendizaje puede emplearlo.

En el aprendizaje por descubrimiento autónomo la estrategia consiste en facilitar a los niños todos los materiales relevantes para un problema o concepto y dejarles que jueguen con las ideas y que las prueben hasta que descubran por sí mismos reglas y relaciones, una especie de «metodología espontaneista», reducida casi a un puro hacer por hacer, un aprendizaje de ensayo y error; como no existen secuencias de instrucciones estructuradas, el sujeto se halla a menudo en un callejón sin salida y puede cometer muchos errores.

Una manera algo diferente de fomentar el aprendizaje por descubrimiento, que algunos llaman descubrimiento dirigido, lleva implícita la existencia de una estrategia para orientar el proceso de descubrimiento de los alumnos, para guiar a los niños por todos los pasos y condiciones que llevan a una conclusión, siendo el profesor el que, en último extremo, dirige el proceso de aprendizaje de sus alumnos pero dejándoles que descubran la regla en cuestión ellos mismos.

> Para que esta metodología resulte eficaz, el profesor debe tener definida, pues, una estrategia didáctica. Para ello, debe conocer, con un cierto grado de profundidad, las variables que intervienen en el proceso, a fin de poderlas controlar adecuadamente. Debe tener señalados, así, unos objetivos pedagógicos y didácticos, definida una estrategia de enseñanza acorde con ellos y establecidos algunos mecanismos de control del nivel de consecución de dichos objetivos. Centrándonos estrictamente en el campo cognoscitivo,

> tendrá que tener también efectuada una selección de los contenidos apropiados y haberles dado una oportuna organización, una estructura interna.
>
> Como en el aprendizaje por descubrimiento es el alumno quien, en definitiva, construye sus conocimientos, la estrategia didáctica que elabore el profesor debe basarse fundamentalmente en las características psicológicas, lógicas y cognoscitivas de sus alumnos. Esta atención a las condiciones de aprendizaje de sus alumnos es, lógicamente, uno de los aspectos esenciales del método.
>
> Martínez y Juan (coord.), 1.989, pp. 23-24

Shulman (1.970) señaló que la nueva psicología del aprendizaje de las matemáticas se basaba en el aprendizaje por descubrimiento y que Bruner era el principal defensor del aprendizaje por descubrimiento en los Estados Unidos de América.

El aprendizaje por descubrimiento fue la metodología utilizada por algunos *currícula* matemáticos de los años sesenta y setenta. Fue una característica importante del Proyecto Madison en USA y Davis (1.966) mostró su utilización y el valor del descubrimiento a través de ejemplos de descubrimientos de los alumnos.

En Gran Bretaña los trabajos de John B. Biggs[18] y el Proyecto Nuffield impulsaron enormemente los métodos de descubrimiento en la enseñanza primaria. El Capítulo V de *I Do, and I Understand* (Nuffield, 1.967)[19] describía el significado y la importancia del aprendizaje por descubrimiento dentro del proyecto. Más recientemente, tras el Informe Cockcroft (Cockcroft, 1.982), se realizaron reformas destinadas a asegurar que los currícula matemáticos incluyeran elementos de aprendizaje más activos.

La inclinación por el aprendizaje por descubrimiento de Bruner desembocó en un debate con Ausubel, que resumimos por servir de expresión de las ventajas e inconvenientes de este método.

Bruner (1.960) afirmaba que al operar con las matemáticas en el aprendizaje por descubrimiento se estimulaba el aprendizaje de esta materia, que provocaba el desarrollo de una concepción de las matemáticas

[18] Citado por Orton (1.988)
[19] Citado por Orton (1.988)

más como proceso que como producto acabado, y que se consideraba al descubrimiento como intrínsecamente gratificante para los alumnos. Coincidía con él Edith E. Biggs (1.972), que declaraba que este método generaba un interés real por las matemáticas que, debido a la relación vinculante entre factores cognitivos y afectivos en el aprendizaje, proporcionaba a los alumnos la oportunidad de pensar por sí mismos, y que sólo de esa manera ellos podían percibir todo su potencial.

También reconoció Bruner (1.960) los inconvenientes: que no se podía esperar eternamente a que los alumnos descubriesen que el *Currículum* no podía ser abierto por completo, por tanto, el descubrimiento necesitaría ser guiado o dirigido, y que a algunos alumnos podía resultarles incluso extremadamente decepcionante su capacidad de descubrir. Correspondía al profesor encontrar los medios necesarios para evitar estos inconvenientes.

Por su parte Ausubel (1.963) señaló que el descubrimiento no era el único modo a través del cual un profesor podía generar en los alumnos motivación, seguridad en sí mismos y deseo de aprender. La enseñanza expositiva buena era igualmente capaz de interesar y de inspirar a los alumnos. El descubrimiento puede desmotivar gravemente cuando no se descubre nada. La afirmación de que el aprendizaje por descubrimiento conlleva creatividad resultaba discutible, porque los alumnos rara vez podían ser realmente creativos y el descubrimiento guiado escasamente era creativo. El descubrimiento exigía mucho tiempo. No existían datos de investigaciones que demostrasen, de manera concluyente, que el aprendizaje por descubrimiento resultaba superior al aprendizaje expositivo en términos de logros de aprendizaje a largo plazo. Las matemáticas como proceso no era la prioridad principal en el aprendizaje escolar, era mucho más importante que los alumnos aprendiesen los conocimientos necesarios para la vida.

Posteriormente Ausubel (1.968, p. 40) diría que los conceptos y las proposiciones se adquieren comúnmente a fines de la primera infancia, en la edad preescolar y en los primeros años de la escuela primaria, a través de la resolución de problemas o haciendo descubrimientos autónomos.

También se preguntó y respondió mutuamente:

> ¿Cuáles son algunas de las pretensiones legítimas, los usos defendibles y las ventajas palpables del método de descubrimiento? En las primeras e indiferenciadas etapas del aprendizaje de cualquier tema abstracto, particularmente antes de la adolescencia, el método de descubrimiento es extremadamente útil. También es indispensable para comprobar la significatividad del conocimiento y para enseñar el método científico y las destrezas efectivas para resolver problemas. Como técnica pedagógica adjunta puede ser muy útil para aumentar la significatividad del material presentado principalmente por métodos expositivos. Finalmente, hay varios factores cognoscitivos y motivacionales que mejoran indudablemente el aprendizaje, la retención y la transferibilidad de las ideas potencialmente significativas que se han aprendido por descubrimiento.
>
> Ausubel, 1.968, p. 538

Añadiendo algo muy interesante para la enseñanza Primaria, que el empleo ocasional de técnicas de descubrimiento inductivo para impartir la materia se justifica didácticamente cuando los alumnos están en la etapa operacional concreta del desarrollo cognitivo y que la desventaja de la gran cantidad de tiempo que exige el aprendizaje por descubrimiento es relativamente menos importante, porque los aspectos empírico-concretos del aprendizaje, que son los que requieren de más tiempo, tienen que ocurrir de cualquier manera, y porque de ningún modo puede abarcarse gran volumen de contenidos en el periodo de la escuela primaria (Ausubel, 1.968, p. 539).

Finalmente plantea Ausubel:

> Pero estos puntos controvertidos y decisivos no conciernen a que el aprendizaje por descubrimiento mejore o no el aprendizaje, la retención y la transferibilidad, sino a: a) si lo hace *suficientemente*, con respecto a los alumnos que sean capaces de aprender de manera significativa conceptos y principios sin él, como para garantizar la enorme inversión de tiempo que exige; y b) si en vista de esta consideración relativa al tiempo el método de descubrimiento es una técnica capaz de trasmitir el contenido sustancial de una

> disciplina intelectual o científica a estudiantes cognoscitivamente maduros, quienes ya han dominado sus fundamentos y vocabulario básico.
>
> Ausubel, 1.968, p. 540

El debate entre los partidarios de los métodos de descubrimiento y los no partidarios ha continuado y al respecto de la validez de las investigaciones comparativas dijo Davis (1.984)[20] que son inútiles, pues son comparaciones de experiencias concretas, particulares, no se ha comparado *en general* enseñanza de «descubrimiento» y de «no descubrimiento», concluyendo: "Pero éste es el modo en que se interpretan invariablemente los resultados".

Orton (1.988) hace una afirmación y plantea una pregunta que son totalmente actuales y que pueden aportar un poco más de luz respecto del aprendizaje por descubrimiento: la investigación trata habitualmente de medir sólo la calidad del desarrollo cognitivo o lo que ha sido dominado y, los logros en actitud hacia las matemáticas y el incremento en la comprensión de su naturaleza no son fácilmente medidos, además ¿quién sabe qué beneficios a largo plazo podrían acumularse si el descubrimiento se utilizase más, sobre todo en Secundaria, donde dominan los métodos pasivos de aprendizaje de las matemáticas? (Orton, 1.988, p. 113).

Una actividad predominante en el aprendizaje por descubrimiento es la resolución de problemas, a la que en matemáticas se le ha prestado una considerable atención en los últimos años, así como al modo de ayudar a los alumnos a obtener mejores resultados en dicha actividad.

> La resolución de problemas es también importante porque puede ser un medio para aprender nuevas ideas y destrezas matemáticas (Schroder y Lester 1.989). Un enfoque de la enseñanza de las matemáticas centrado en los problemas, se vale de problemas interesantes y bien seleccionados para iniciar

[20] Citado por Orton, 1.988, p. 112

> lecciones e involucrar a los alumnos. Así, emergen nuevas ideas, técnicas y relaciones matemáticas, y llegan a ser el centro de la discusión. Los buenos problemas pueden inspirar la exploración de ideas matemáticas importantes, alimentar la perseverancia y reforzar la necesidad de comprender y usar varias estrategias, propiedades y relaciones matemáticas.
>
> NCTM, 2.000, p. 186

Después de haber visto en 2.4.4. la Resolución de problemas como objetivo y como contenido, pasamos ahora a tratarla como metodología de aprendizaje de las matemáticas.

Los problemas y su resolución desempeñan un papel esencial en el aprendizaje de los contenidos matemáticos y en ayudar a establecer conexiones entre los distintos bloques de contenidos. Una gran parte de las matemáticas escolares puede verse como la codificación de respuestas a conjuntos de problemas que surgen del propio mundo de los escolares. Por ejemplo, supóngase que niños de Primer curso de Primaria quisieran saber si hay más niños o más niñas en Segundo curso. Para resolver este problema necesitarían aprender a recoger información, anotar los datos, hacer sumas y, finalmente, comparar. En Primer curso de ESO, podría introducirse el concepto de proporción mediante una investigación sobre la proporción de chicos y chicas en los diferentes curso de ESO. En Bachillerato, pueden introducirse muchos de los temas del currículo mediante problemas de contextos matemáticos o de aplicaciones.

En consecuencia, mucho de las matemáticas que los alumnos estudian puede introducirse planteando problemas interesantes sobre los que puedan hacer verdaderos progresos. Abordar así los contenidos produce algo más que motivación a los alumnos, muestra las matemáticas como una disciplina con sentido, en vez de una disciplina en la que el profesor da reglas que deben memorizarse y usarse para hacer los ejercicios.

Si pretendemos que el aprendizaje de nuestros alumnos no sea un aprendizaje memorístico de contenidos, si no que pensamos que el estudiante debe aprender conceptos, procedimientos y estrategias generales, actitudes y valores, no tendremos más remedio que inclinarnos hacia el aprendizaje por descubrimiento dirigido, y es en este punto en el que la resolución de problemas desempeña un papel esencial (Carrillo, 1.998).

El notable crecimiento actual del conocimiento, que ahogaría un currículum que se orientara fundamentalmente a la información (Carrillo, 1.993), el acelerado cambio de intereses de la sociedad, por lo que ésta concede más peso a los procesos que a la información (Garret, 1.988), son algunas de las razones que dan importancia a la resolución de problemas, apuntando García y García (1.989, p. 8): “podríamos decir que aprendemos en cuanto que resolvemos los problemas que se originan en un entorno siempre diverso y cambiante”.

Ya en 1.980, la asociación NCTM en *An Agenda for Action,* afirmaba en la recomendación 1: “La resolución de problemas tendría que ser el centro de las matemáticas escolares de los años 80” (NCTM, 1.980, p. 1), concretándola en seis acciones para llevarla a término, diciendo en la primera acción: “1. El currículum de matemáticas tendría que ser organizado alrededor de la resolución de problemas” (NCTM, 1.980, p. 2).

Los docentes debemos tomar en consideración el valor de la Resolución de Problemas en la formación matemática (no sólo) del alumno, adquiriendo especial relevancia en la formación del futuro profesor dado que se trata de llevar a la práctica una metodología con remarcables implicaciones sobre los objetivos, contenidos, papel del alumno, papel del profesor, metodología, organización de la clase y evaluación, aparte de la eventual acomodación de las concepciones de profesores y alumnos sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, pues mantienen Fernandes y Vale (1.994)[21], y el resto de investigadores de este campo, que son las creencias de los profesores las que determinan con más fuerza el comportamiento de los profesores en las aulas y otros aspectos de sus metodologías.

[21] Citado por Contreras y Carrillo (2.000)

El empleo de la Resolución de Problemas como metodología en un curriculum de matemáticas implica un cambio radical del enfoque docente basado en el estilo más tradicional de la exposición y de la práctica de destrezas. La impresión que los enfoques expositivos de las matemáticas transmiten a los que aprenden en todos los niveles, es que la materia implica una secuencia de contenidos clara, lógica y ordenada y una argumentación transparente y estrictamente controlada. Es posible que muchos de quienes aprenden no aprecien nunca que el proceso de establecimiento de unos resultados, teoremas y reglas matemáticos supone, desde luego, una cierta actividad desordenada, y aquellos que están convencidos de la importancia del aspecto procesal de las matemáticas se muestren ansiosos por promoverla. Claro está que la actividad puede ser ordenada, de hecho podría decirse que deberíamos tratar de inculcar a los alumnos enfoques sistemáticos de la resolución de problemas, pero la cuestión no es si los problemas conducen en el papel a unas matemáticas ordenadas, se busca el aprendizaje del discente a través de su resolución. Problema y solución se convierten en el binomio que abre y cierra la actividad, en un paréntesis donde se reclama el protagonismo del alumno en el momento de analizar y resolver el problema.

El método empieza por un problema que permite activar los conocimientos previos de los estudiantes, es decir, explicitar lo que saben y lo que no para resolverlo y detectar las necesidades de aprendizaje. El estudiante, guiado por el profesor, observa, fija lo que sabe y no sabe, busca, analiza, juzga, evalúa, reflexiona e intercambia. Se trata de una manera de proceder mucho más próxima a la vida real que los métodos tradicionales de enseñanza, posibilita integrar conocimientos de diferentes áreas y facilita la comprensión. (Egido [dir.] et al., 2.006)

Por una parte, la Resolución de Problemas es una técnica que se centra más en el aprendizaje del alumno que en la tarea del profesor. Emplaza al estudiante en el centro del aprendizaje y el profesor se coloca estratégicamente en la periferia, desde donde aporta el apoyo y la ayuda apropiados. El cambio de rol supone en los profesores pasar de ser una fuente de conocimiento a ser un facilitador del conocimiento, un organizador y mediador en el encuentro del alumno con el conocimiento.

Por otra, pretende estimular en el estudiante el deseo de saber y dotarle de las herramientas necesarias para seleccionar la información relevante. Como punto de partida, se considera que es condición del aprendizaje que el alumno se responsabilice de él.

> Hablamos, en consecuencia, de un modelo educativo que desplaza su centro de gravedad de la enseñanza al aprendizaje, que fundamenta su razón de ser en la acción del alumno, un alumno que hace para sí buena parte de los contenidos temáticos de su disciplina a través de su protagonismo. El educando se convierte en un constructor del conocimiento, en un albañil que ladrillo a ladrillo va levantando el muro apetecido, alejándose de su viejo rol que le obligaba a ser un mero receptor de información.
>
> Sola, 2.006a, p. 41

De este modo, el discente además de aprender, aprende a aprender (Coll, 1.990).

Además, es una metodología de aprendizaje que favorece el trabajo en equipo y las relaciones interpersonales, aspectos muy significativos en la educación.

Como se ha dicho, el aprendizaje basado en problemas reclama un cambio de actitud en el profesor. No se puede concebir una actividad en esta metodología sin el protagonismo activo del profesor, sin la dirección que debe brindarle a sus alumnos. Por ello, y al revés de lo que se suele pensar, en este tipo de aprendizaje se refuerza todavía más la presencia del docente y acaba descubriendo al buen o mal maestro, y también al buen o mal alumno, poniendo a cada uno en su lugar. A su vez, el que el estudiante se ponga en acción no significa que el profesor deba pasar a la inactividad y convertirse, por ende, en mero espectador del proceso. Se equivoca quien piensa que el alumno debe ser abandonado a su suerte, que hay que practicar una especie de *laissez faire* sin dirección alguna. Por ello, esta metodología no exige un cambio de papeles, sino más bien, una redefinición de los papeles tradicionales.

Se trata, por tanto de una estrategia que concuerda con la concepción de los créditos de enseñanza ECTS en los nuevos planes de estudio universitarios.

Pero también la resolución de problemas es algo natural para los niños, ya que el mundo es nuevo para ellos y muestran curiosidad, inteligencia y flexibilidad cuando se enfrentan a situaciones nuevas, como afirma Ciarrapico (1.996, p. 13)[22]: "El pensamiento matemático se caracteriza por la actividad de resolución de problemas, lo que está en armonía con la tendencia del niño por formular cuestiones y buscar respuestas".

Por ello, deben propiciarse situaciones en las que se dé cabida al empleo de estrategias intuitivas por parte de los escolares, para lo cual el aprendizaje debe producirse en un contexto de resolución de problemas (Penchaliah y de Villiers, 1.997)[23]. Contexto que además de situarse en la anteriormente mencionada actividad natural de los niños, puede poner de relieve el uso natural de estrategias heurísticas por parte de los alumnos antes de ser instruidos en resolución de problemas (Stein, 1.997).

En estas primeras edades, el reto consiste en construir sobre sus innatas inclinaciones a resolver problemas y en preservar y estimular esta favorable disposición al respecto.

En la Educación Primaria un rasgo importante de los problemas es que, por la propia organización de esta etapa, deben partir de planteamientos más globales, menos disciplinares, que en la ESO y el Bachillerato. A medida que el currículo adopta estructuras de área o de disciplina, como sucede en la Educación Secundaria, los conceptos, en la medida en que son más específicos de las materias, desempeñan una mayor función organizadora en el currículo, en detrimento de los

[22] Citado por Contreras y Carrillo, 2.000, p. 16
[23] Citado por Contreras y Carrillo (2.000)

procedimientos, con lo que los problemas podrán tener un contenido «más matemático».

En la Resolución de Problemas el *qué* y el *cómo* forman un binomio indivisible, verdadero garante para reforzar la tan necesaria autonomía personal en el estudiante y la confianza que éste necesita para ser competente. Rompiendo con la pasividad heredada del pasado, el alumno aprende a investigar y, finalmente, a encarar con determinación los problemas que se le irán presentando.

Además

> ... la solución de problemas entraña una amplísima gama de operaciones mentales, que van desde las operaciones más simples de observación y discriminación perceptiva, a las más complejas como la previsión de consecuencias y evaluación de las mismas con arreglo a diversos criterios; se incluyen en el análisis de problemas operaciones de reconocimiento y evocación y operaciones de razonamiento y deducción; se parte de datos y fenómenos reales observados o recordados y se llega a enunciados en el campo de lo hipotético, lo posible y lo probable. Incluso se puede dar juego a la imaginación para que vague en el ámbito de lo fantástico, irreal e inverosímil.
>
> de Prado, 1.987, pp. 12-13

La Resolución de Problemas allana el camino para que la enseñanza de la matemática actúe como amplificadora de los procesos de pensamiento. Potencia el desarrollo de las estrategias personales, poniéndolas en su justo sitio, y poniendo también en su justo lugar las matemáticas convencionales, no sancionando las facultades individuales, no coartando las iniciativas y alejándose de los juegos vacíos de contenido. El alumno no puede acabar de comprender la matemática escolar, y menos su aplicabilidad, si no conoce en qué medida le sirve su matemática y cuáles son sus limitaciones. La pretensión no es sustituir una matemática por otra, sino promover la mejora de la primera, llegando, en algunos casos, a la última; pero la mejora o llegada tiene que ser por convencimiento del estudiante por su uso, no puede ser impuesta, ha de ser negociada, no debe cambiar por motivo de la autoridad del profesor. Si el profesor desea acercar el nivel de rendimiento de sus alumnos en las matemáticas escolares a su rendimiento en las matemáticas cotidianas, debe tratar de conectar ambas, actuando la Resolución de Problemas de vehículo de conexión y desarrollo de las capacidades personales. (Contreras y Carrillo, 2.000)

Por todo ello, bien aplicada la técnica, el alumno asegura el desarrollo de un importante número de actitudes, habilidades y valores.

El planteamiento de situaciones problemáticas que implican la presencia de las matemáticas en el mundo real constituye un campo fértil para que aparezcan múltiples y variados problemas de interpretación e intervención de las matemáticas en la realidad y es una contribución importante para la comprensión de la naturaleza y del papel de las matemáticas, aproximando los contextos cotidiano y académico (Abrantes, 1.996).

En cuanto a la manera de conseguirlo, señala Anghileri (1.995):

> Cada individuo posee un «esquema de conceptos» que servirá de soporte del aprendizaje que continuará dentro y fuera de la escuela... El aprendizaje matemático tendrá lugar cuando relacionen nuevos problemas con los que han experimentado de forma sensorial, visual, táctil u oral... Así los niños organizarán todas las experiencias y problemas nuevos en relación con la experiencia pasada que les ayudarán a comprender nuevos fenómenos y a estructurar nuevas relaciones dentro de su esquema personal de conocimiento... La participación activa en resolución de problemas a través de tareas prácticas, buscando modelos y compartiendo lo que se comprende, capacitará a los niños a dar su propio significado a las relaciones que subyacen a todo conocimiento matemático. Trabajando en grupos, los niños se verán envueltos en describir y escuchar; discutir y negociar; planificar y evaluar; destrezas en resolución de problemas que serán valoradas socialmente.
>
> Anghileri, 1.995, pp. 6-7

La Resolución de Problemas es un buen medio para conseguir una de las metas de la instrucción, la comprensión:

- la comprensión funcional (Schoenfeld, 1.988b), que convierte los alumnos en participantes en una comunidad de personas que practican matemáticas y

- la comprensión estructural (Hiebert y Carpenter, 1.992), que facilita la representación y organización interna del conocimiento de manera que se realzan las relaciones entre las unidades de información. (Contreras y Carrillo, 2.000)

Entre las dificultades en la aplicación de la Resolución de Problemas nos podemos encontrar que los alumnos no estén habituados a este sistema de trabajo, por lo que en las fases iniciales tengan sensación de desconcierto (inseguridad, desasosiego) ante la actividad, todo cambio en la cultura de trabajo requiere de tiempo, de sosiego, de mucha autocrítica y, ser muy comprensivos y pacientes cuando la frustración se presente. Además, aunque los estudiantes se muestren interesados en la metodología, pueden carecer de la iniciativa necesaria para llevar a cabo un trabajo fructífero, por ello es importante tener en cuenta que el aprendizaje basado en problemas no está pensado para ser aplicado como una experiencia única o puntual, sino como sistema de trabajo a lo largo del curso, se aprende tanto contenidos como maneras de trabajar.

Señala el Informe Cockcroft que se ha comprobado que, si no se adecua el nivel de los problemas al de sus conocimientos, de modo que su esfuerzo se vea coronado por el éxito, sus capacidades de resolución de problemas no se desarrollan de forman satisfactoria (Cockcroft, 1.982, p. 117 [punto 324]).

Esta metodología puede ser ineficaz si, tarde o temprano, seguimos realizando a los estudiantes los exámenes estandarizados de siempre. Si insistimos en la evaluación del «qué», y nos olvidamos del «cómo», muchos alumnos, y nos les faltará razón, no encontrarán sentido a las actividades.

En su aplicación puede ser conveniente que se combine con otros métodos que fomenten el estudio y la consolidación individual de conocimientos.

La fascinante aventura cognitiva que entraña la solución de cualquier problema, la asunción de roles nuevos por parte del alumno, la importancia que se le otorga a la investigación y al trabajo, individual o en equipo, son, por sí mismos, activos suficientes como para conceder, al menos, el beneficio de la duda a técnicas como la Resolución de Problemas.

2.5.2.6. Ausubel: aprendizaje significativo

La teoría del aprendizaje significativo propuesta por David P. Ausubel (1.918-2.008) en su libro de 1.968 *Educational Psychology: A Cognitive View* [24] es una teoría general y no específica de las matemáticas, de la que presentamos a continuación una muy breve síntesis, por lo que no vamos a hacer constantes referencias al texto, indicando solamente las citas textuales.

Ausubel (1.961) discrepa de la mayoría de los psicólogos que pensaban que tipos de aprendizaje escolar cualitativamente diferentes, se podían incluir en un sólo modelo explicativo, y reconoce varios tipos de aprendizaje de acuerdo con dos criterios:

1. Respecto a la formación de conceptos: por repetición y significativo;
2. Respecto a la resolución de problemas: verbal y no verbal.

Para diferenciar los tipos de aprendizaje en el aula formuló dos distinciones: la primera, según el proceso de adquisición, en aprendizaje por recepción y por descubrimiento, porque la mayoría de las nociones adquiridas por el alumno, lo mismo dentro que fuera de la escuela, no las descubre por sí mismo, sino que le son dadas; y la otra distinción, según el proceso de formación, en aprendizaje mecánico o por repetición y aprendizaje significativo, pues como la mayor parte del material de aprendizaje se le presenta al estudiante de manera verbal, conviene considerar que el aprendizaje por recepción verbal no tiene porqué ser mecánico, puede ser significativo, sin experiencias previas, no verbales o de resolución de problemas.

El aprendizaje «mecánico o por repetición» se produce cuando la tarea del aprendizaje consta de asociaciones puramente arbitrarias o cuando

[24] La 2.ª edición: Ausubel, Novak y Hanesian (1.978), es una revisión de Ausubel (1.968), por lo que es congruente con el original e incorpora los avances acaecidos en la psicología educativa, pudiendo encontrar por tanto en la 2.ª edición también las referencias a Ausubel (1.968)

el sujeto lo hace arbitrariamente. Por ejemplo, el aprendizaje de números de teléfonos asociados a determinados nombres; o el aprendizaje del vocabulario de una segunda lengua. Aprendizaje «significativo» es aquel en que la materia de aprendizaje puede relacionarse de manera sustancial, no arbitraria, con la que el alumno ya posee, siendo necesario para ello que la materia sea potencialmente significativa, es decir, coherente en su estructura con la estructura de conocimiento y lógica previa del estudiante, y siendo necesaria también, como cuestión básica, la predisposición hacia ese aprendizaje por parte del alumno.

En el aprendizaje «por recepción» se presenta al estudiante el contenido a aprender como producto completamente elaborado y terminado, no teniendo que hacer el alumno ningún descubrimiento. Su misión consiste en incorporar, internalizar el material de modo que después pueda recuperarlo o reproducirlo. En el aprendizaje «por descubrimiento» el contenido principal de lo que va a ser aprendido no se da, sino que debe ser descubierto por el estudiante antes de que lo pueda incorporar a su estructura cognitiva.

> Aclaremos esta propuesta,… consideremos a un profesor que está intentando que sus alumnos aprendan la generalización… «la suma de los ángulos de un triángulo es igual a 180°». En enseñanza receptiva pura, el profesor enunciará la generalización y quizás la ilustrará con uno o varios triángulos… dibujados en la pizarra. Lo que interesa señalar, es que la tarea de aprender no conlleva ningún descubrimiento por parte del estudiante: Se le presenta la generalización y él sólo debe aprenderla y recordarla.
>
> En enseñanza por descubrimiento, por otro lado, el contenido principal de lo que debe ser aprendido no se presenta en su forma final sino que debe ser descubierto por el estudiante. En el ejemplo… considerado, el profesor debe emplear una forma de aprendizaje por descubrimiento «guiado», pidiendo a cada niño que mida los ángulos de varios triángulos para ver si puede formular alguna generalización concerniente a su suma.
>
> Ausubel y Robinson, 1.969, pp. 43-44

No debe identificarse aprendizaje por descubrimiento con aprendizaje significativo, ni aprendizaje receptivo con aprendizaje repetitivo. Los aprendizajes por recepción y por descubrimiento pueden ser o repetitivos o significativos.

En el aprendizaje por recepción significativo, el material potencialmente significativo es comprendido o hecho significativo durante el proceso de internalización. En el aprendizaje por descubrimiento significativo, el contenido descubierto se hace significativo, en gran parte, de la misma manera.

Al respecto de estos tipos de aprendizajes matiza Ausubel que en los alumnos menores, cierta proporción de aprendizaje por repetición y por descubrimiento puede ser conveniente, pero la mayor parte del aprendizaje en el aula, especialmente el de los alumnos de mayor edad, es aprendizaje por recepción significativo (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 18), pues "después de los años de la escuela primaria, el aprendizaje por recepción verbal constituye el método más eficaz de asimilar significativamente el contenido sustancial de una disciplina" (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 463).

Raramente se encuentra aprendizaje por descubrimiento o receptivo en estado puro, hay varios grados de dirigismo o de mayor o menor descubrimiento, como también hay más o menos participación de los estudiantes en el aprendizaje receptivo.

El aprendizaje por descubrimiento se puede situar en un continuo recepción-descubrimiento y el aprendizaje significativo en otro continuo repetición-significativo. Los aprendizajes por repetición y significativo no son completamente dicotómicos, ambos tipos de aprendizaje pueden darse en la misma tarea de aprendizaje, por lo que no pueden ser colocados en polos opuestos del mismo continuo. Esta misma limitación también se aplica a la distinción entre los aprendizajes por recepción y por descubrimiento. Simplificadamente estas relaciones se muestran en la figura 2.8., en la cual Ausubel consideró las dos dimensiones del aprendizaje como perpendiculares. (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978)

Figura 2.8. (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 35)

En el Prefacio de Ausubel (1.968), afirma:

> Si tuviese que reducir toda la psicología educativa a un sólo principio, enunciaría éste: de todos los factores que influyen en el aprendizaje, el más importante consiste en lo que el alumno ya sabe. Averígüese esto, y enséñese consecuentemente.
>
> Ausubel, 1.968, p. 6

El verdadero problema del aprendizaje escolar dice Novak (1.977) consiste en el grado en que el nuevo aprendizaje es significativo.

> Desde el punto de vista del proceso psicológico, el aprendizaje significativo por descubrimiento es, obviamente, más complejo que el significativo por recepción: involucra una etapa previa de resolución de problemas antes de que el significado emerja y sea internalizado (Ausubel, 1.961). Sin embargo, en términos generales el aprendizaje por recepción, si bien fenomenológicamente más sencillo que el aprendizaje por descubrimiento, surge paradójicamente ya muy avanzado el desarrollo y, especialmente en sus formas verbales puras más logradas, implica un nivel mayor de madurez cognoscitiva.
>
> Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, 36

En la defensa de su concepción del aprendizaje añade Ausubel que el aprendizaje por descubrimiento representa un rechazo de uno de los aspectos culturales más importantes, que los descubrimientos originales efectuados durante milenios pueden ser trasmitidos en la infancia y la juventud por medio del aprendizaje significativo por recepción y no necesitan ser redescubiertos por cada generación nueva (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 448).

Para que el aprendizaje por recepción sea verdaderamente significativo la presentación o exposición de los contenidos (proceso instruccional) debe respetar dos principios:

- *Diferenciación progresiva*, las ideas generales e incluyentes primero, lo particular después, y
- *Reconciliación integradora*, con la nueva información adquirida los conocimientos ya existentes se reorganizan y adquieren nuevo significado.

La reconciliación resulta facilitada cuando se anticipan posibles comparaciones y se adelantan semejanzas y diferencias entre las nuevas ideas y las ya adquiridas.

La capacidad del alumno para adquirir significativamente nuevos conocimientos viene influida por variables organizacionales de las estructuras cognitivas:

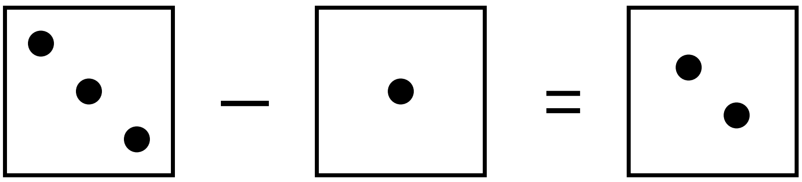
1. *Disponibilidad de ideas de afianzamiento* que suministran capacidad relacional. Cuando no existen, el sujeto aprende de forma repetitiva. En estos casos conviene suministrar materiales introductorios previos

que hagan de puente cognitivo, cumplen la misión de llenar el vacío entre lo que se conoce y lo que se necesita conocer. Ausubel les llama «organizadores previos» y se deben presentar en un nivel de abstracción mayor que el material que se va a aprender.

2. *El grado de discriminabilidad de los contenidos* de la estructura cognitiva respecto a los nuevos contenidos, y viceversa. Esta variable es función de la claridad y estabilidad de las ideas ya existentes.
3. *Estabilidad y claridad de las ideas de afianzamiento*. Si estas son ambiguas o inestables además de que no suministran relacionabilidad para el material nuevo, resultan indiscriminables respecto a dicho material.

Ausubel distingue tres tipos básicos de aprendizaje significativo: de representaciones, de proposiciones y de conceptos.

El «aprendizaje significativo de representaciones» consiste en captar el significado de los símbolos o palabras y entender lo que representan. El aprendizaje de la sustracción de números naturales se puede realizar mediante representaciones del «modelo» cardinal que utiliza los diagramas de conjuntos. Por ejemplo, 3 - 1 = 2 se «representa» mediante el «modelo»:



El aprendizaje significativo de representaciones es condición necesaria para el aprendizaje proposiciones.

Con el «aprendizaje significativo de proposiciones» se trata de captar el significado de nuevas ideas, expresadas en forma proposicional. Realizadas por parte del alumno distintas representaciones de la sustracción de modo significativo, toda la información que aportan se sintetiza en el hecho numérico: «tres menos uno es dos», que expresa mediante una única proposición toda la riqueza de las situaciones trabajadas. Este tipo de aprendizaje significativo es necesario para lograr el dominio de los números y las operaciones aritméticas.

Otro tipo de aprendizaje significativo de importancia en la adquisición de la materia de estudio es el «aprendizaje de conceptos». Como los conceptos se representan por palabras, aprender lo que significan es un tipo superior de aprendizaje de representaciones. Este tercer tipo de aprendizaje también se da al estudiar las operaciones aritméticas. Se considera que un niño ha logrado el concepto de sustracción significativamente cuando sabe reconocer y utilizar dicha operación en los diferentes contextos numéricos en los que se presenta, es decir, cuando utiliza con sentido la sustracción en la resolución de problemas y aplicaciones prácticas.

La diferenciación entre aprendizaje significativo y no significativo puede relacionarse con la diferenciación que hace Skemp (1.976, 1.989) entre «comprensión instrumental» y «comprensión relacional». La comprensión instrumental de un concepto cuantitativo consistiría en disponer sólo de una colección de reglas aisladas (probablemente aprendidas por repetición) para obtener las soluciones de una limitada clase de problemas. Comprensión relacional, por contra, consistiría en disponer de un esquema apropiado o conjunto de estructuras conceptuales suficientes para resolver una clase más amplia de problemas.

Ausubel empleó datos recogidos por Piaget, aceptó las ideas de asimilación y acomodación y, de cuando en cuando, se refirió a las etapas «concreta» y «formal o abstracta», sin aceptar todas las connotaciones de la teoría piagetiana de las etapas. Novak (1.977) que con su trabajo explicó y aclaró eficazmente la teoría ausubeliana, afirmó que “Desde nuestro punto de vista, no existe ningún conflicto operacional entre las ideas de Piaget y las de Ausubel” (p. 115).

En términos de disponibilidad para el aprendizaje, la concepción de Ausubel se halla más próxima a la de Gagné que a la de Piaget. Shulman (1.970) expresó la opinión de que Ausubel coincidía con Gagné en los términos fundamentales, en cuanto que la clave de la disponibilidad era el conocimiento previo requerido, pero Novak (1.977) afirmó que consideraba que la concepción de Ausubel sobre la disponibilidad se hallaba próxima a la de Bruner. Para Ausubel no está todo perdido aunque el niño no esté dispuesto en el sentido de tener inclusores apropiados, existe entonces la posibilidad de emplear un organizador previo que llene el vacío existente. Aunque en matemáticas su naturaleza jerárquica parecería indicar que no deben ser muchas las ocasiones en que un conocimiento nuevo no pueda ser conectado a otro ya existente, la idea del organizador previo hay que para tomarla en consideración. (Orton, 1.988)

La concepción pedagógica de Ausubel revela como superficiales muchas de las críticas efectuadas a los métodos de aprendizaje por recepción, y obliga a una reflexión más detenida sobre las posibles ventajas de los métodos de aprendizaje por descubrimiento.

Martínez y Juan (coord.) (1.989) creyendo que un aprendizaje receptivo puede ser significativo, afirman que como requiere tales condiciones óptimas de los alumnos (motivado hacia el estudio, interesado por la materia, capaz de deducciones propias, de actuar de manera creativa, etc.), entonces

> Hablando en general, los métodos receptivos son métodos incapaces de motivar a la mayoría de los estudiantes, por su carácter fundamentalmente pasivo. […] Su papel, el del alumno, no se entiende en el sentido de participar activamente en la dirección de su proceso de aprendizaje, sino en el de dedicarse al máximo a la asimilación del producto que se ha elaborado para él, pensando en sus necesidades profesionales posteriores.
>
> Ahora bien, desde nuestro punto de vista, una forma de enseñanza que no consiga interesar suficientemente al alumno, que esté concebida pensando sólo en sus conveniencias profesionales futuras, pero que no consiga sintonizar con sus inquietudes habituales, no será capaz, en general, de generar un aprendizaje significativo. No conseguirá crear una predisposición hacia el aprendizaje en los alumnos ni, en consecuencia, que éstos hagan el esfuerzo necesario para asimilar la materia. El esfuerzo del profesor será insuficiente para hacer significativo el proceso de aprendizaje, por muy bien que consiga estructurar la materia, que intente adaptarla a la estructura lógica y cognoscitiva de los alumnos. Carecerá de información suficiente para esto, por la misma naturaleza del método, esencialmente pasivo, que no prevé la

> participación sistemática de los alumnos en la reelaboración de la estrategia de aprendizaje.
>
> Martínez y Juan (coord.), 1.989, pp. 26-27

Los educadores matemáticos no han prestado mucha atención a la teoría ausubeliana, por lo que la relación con el aprendizaje de las matemáticas no se ha debatido con la amplitud suficiente y pocos autores han proporcionado ejemplos matemáticos en relación con la teoría. Algunos profesores de matemáticas reaccionaron contra la afirmación de que el aprendizaje verbal o expositivo sea tan eficaz y efectivo como señalaba Ausubel. Los más firmes defensores de la teoría ausubeliana han acusado siempre a los críticos de no haberla estudiado con suficiente minuciosidad (Orton, 1.988).

2.5.2.7. Vygotsky: aprendizaje sociohistórico

Se conoce con el nombre de enfoque sociohistórico o escuela sociohistórica a la corriente psicológica surgida en la Rusia posrevolucionaria de comienzos del S. XX que, partiendo de un análisis marxista de la realidad, tiene su origen en las tesis propuestas por Lev S. Vygotsky (1.896-1.934), cuya obra inacabada empezó a ser conocida y apreciada en el mundo occidental hacia 1.960 y que con la publicación de Krutetski (1.976) sirvió para popularizar estas ideas en el campo de la enseñanza de las matemáticas.

Tanto Vygotsky (1.934) como más recientemente Ausubel (1.968) dentro del aprendizaje por reestructuración, intentan conciliar los procesos de aprendizaje asociativo con la reestructuración, concediendo para ello una mayor importancia a los procesos de instrucción.

Su posición con respecto al aprendizaje está más próxima a los supuestos organicistas o constructivistas que a los mecanicistas (análisis por globalidades en lugar de por elementos, carácter cualitativo del cambio en lugar de cuantitativo, procesos conscientes y no sólo automáticos, etc.) pero, a diferencia de otras posiciones igualmente organicistas, como las de Piaget o las de la *Gestalt*, Vygotsky no niega por principio la importancia del aprendizaje asociativo, aunque coincide con esos autores en que se trata de un mecanismo claramente insuficiente. Considera que los aprendizajes por asociación y por reestructuración no se excluyen sino que, al contrario, se necesitan el uno al otro, y a diferencia de Piaget, cree que el aprendizaje asociativo puede actuar como facilitador de la reestructuración.

Sitúa el origen del conocimiento en la interiorización de la actividad consciente de transformación de la realidad exterior, pero a diferencia de Piaget, el medio ambiente se compone de objetos y de personas, con una influencia clara del pensamiento y la actividad del grupo humano, cultural, al que pertenece.

A través de la utilización de instrumentos adecuados el individuo puede extender su capacidad de acción sobre esa realidad. Entre los instrumentos, Vygotsky concede una importancia especial al lenguaje, que permite al individuo actuar sobre el ambiente a través de los otros y le pone en contacto con el pensamiento de los demás (con la cultura), que recíprocamente influyen sobre él. El conocimiento y las demás funciones psíquicas superiores no son el resultado de la actividad psíquica del individuo aislado como proponía Piaget, tienen así un origen social, su desarrollo es una consecuencia de la internalización de las pautas de relación con los demás.

Todo conocimiento, el matemático en particular, muestra una doble naturaleza: social y personal, siendo la escuela el lugar donde se institucionaliza ésta. En el aprendizaje de la matemática, se introduce a los estudiantes en un mundo nuevo, conceptual y simbólico (sobre todo representativo), que no es el fruto de una construcción solitaria, sino el fruto de una verdadera y compleja interacción del colectivo que forman el alumno, los compañeros y los maestros y gracias a un continuo debate social el estudiante aprende.

El lenguaje tiene para Vygotsky el sentido de instrumento de regulación del pensamiento y la acción. La asimilación por la persona de las significaciones contenidas en los símbolos lingüísticos que usa, su aplicación en la actividad práctica, transforman cualitativamente su acción. El lenguaje, nacido como instrumento de comunicación, se convierte en instrumento de acción. (Martínez y Juan [coord.], 1.989).

Dice D'Amore (2.005) al respecto de Vygotsky, la enseñanza y el aprendizaje, que:

> … enseñar no consiste sólo en el intento de generalizar, o de ampliar, o de volver más crítico el «sentido común» de los estudiantes, se trata de una acción mucho más compleja, como nos ha enseñado Vygotsky en *Thought and Language* (1.962): "Como sabemos gracias a las investigaciones sobre el proceso de formación de los conceptos, un concepto es algo más que la suma de ciertos vínculos asociativos formados por la memoria [...] es un auténtico y complejo acto de pensamiento que no se puede enseñar mediante la ejercitación y al cual se puede llegar sólo cuando el desarrollo mental del niño ha alcanzado el nivel requerido. El desarrollo de los conceptos, o significados de las palabras, presupone el desarrollo de muchas funciones intelectuales (atención, memoria lógica, abstracción, capacidad de comparación y diferenciación). También la experiencia demuestra que la enseñanza directa de los conceptos es imposible y estéril. Un maestro que intenta hacer esto, normalmente no logrará nada, sólo un vacío verbalismo".
>
> **Aprender** parece ser por tanto una **construcción** sujeta a la necesidad de «socializar», lo que se da obviamente gracias a un medio de comunicación (que puede ser el lenguaje) y que en Matemática será cada vez más condicionado por la elección del mediador **simbólico**, es decir, por el registro de representación preseleccionado (o impuesto, de diversas formas, incluso sólo por las circunstancias).
>
> D'Amore, 2.005, p. 29

Vygotsky opina que las personas aprendemos principalmente por la colaboración, ayuda o mediación que recibimos de los adultos o los iguales más capacitados y sugiere la existencia de una «ley de la doble formación de las funciones psicológicas»:

> En el desarrollo cultural del niño, toda función aparece dos veces: primero a nivel social, y más tarde, a nivel individual; primero *entre* personas (*interpsicológica*), y después, en el *interior* del propio niño (*intrapsicológica*).

> Esto puede aplicarse igualmente a la atención voluntaria, a la memoria lógica y a la formación de conceptos. Todas las funciones psicológicas se originan como relaciones entre seres humanos.
>
> Vygotsky, 1.978, p. 94

Por ejemplo: “el niño empieza contando con los dedos para, más tarde, cuando la operación ha sido correctamente interpretada en un marco social específico (nivel interpsicológico), ser capaz de poder contar por sí solo y «con su cabeza» (nivel intrapsicológico)” (Hernández, 1.996, p. 58). Esta reconstrucción interna de una operación externa recibe en la teoría vygotskyana el nombre de internalización.

Conviene diferenciar las posibilidades de aprendizaje que el niño es capaz de ejercer por sí solo, de las que podría desarrollar en un marco social adecuado, que Vygotsky expresa mediante el concepto «Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)» de una tarea o dominio concreto:

> No es otra cosa que la distancia entre el nivel real de desarrollo, determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema bajo la guía de un adulto o en colaboración con un compañero más capaz.
>
> Vygotsky, 1.978, p. 133

Estima que es el desarrollo potencial el que debe atraer el mayor interés no sólo de los psicólogos sino también de los educadores. Ello hace que, en la teoría del aprendizaje de Vygotsky, tengan una especial importancia los procesos de instrucción o facilitación externa de mediadores para su internalización. “En estas ideas encontramos el esbozo de una teoría que debe servir nuevamente como puente conciliador entre muchas de las teorías del aprendizaje de conceptos que hemos venido revisando” (Pozo, 1.989, p. 198).

Aprender matemáticas, enseñar un nuevo idioma o reflexionar sobre determinados acontecimientos históricos se convierte, desde este enfoque, en una vía privilegiada para la configuración de procesos psicológicos tan complejos como el pensamiento, el lenguaje o la memoria. Maestros, padres, compañeros... son considerados desde este enfoque como agentes activos de desarrollo, siempre que actúen de forma conveniente en la llamada ZDP. Para ello, deben centrarse no tanto en lo que el niño puede hacer por sí mismo (el nivel real de desarrollo), sino en aquello que puede realizar con su colaboración y ayuda (el nivel potencial). En definitiva, promover el desarrollo supone actuar educativamente ligeramente por encima de lo que el niño ya puede hacer a solas; nunca restringirse a operar mecánicamente sobre lo que ya domina.

Frente a la imagen clásica del profesor como transmisor de conocimientos «a la espera» de que sus estudiantes alcancen un cierto nivel madurativo, Vygotsky propone la del profesor como un promotor potencial del desarrollo psicológico de sus estudiantes.

En el proceso de aprendizaje no se puede prescindir de un elemento como el lenguaje, de carácter eminentemente social, a través del cual el pensamiento individual se apropia de la cultura del grupo humano al que se pertenece.

El objetivo de la enseñanza es la transmisión del significado a los alumnos. La comunicación de un significado supone frecuentemente la interpretación por parte del receptor y ello debe prevenirnos de que, a menudo, los mensajes pueden ser objeto de interpretaciones incorrectas. En la escuela, los alumnos no siempre interpretan nuestras palabras del modo que pretendemos, pues como dice Vygotsky (1.934, p. 169): “detrás de las palabras se encuentra la gramática independiente de los pensamientos, la sintaxis del significado de las palabras”.

El lenguaje desempeña un papel vital en el aprendizaje en cuanto que hace que los procesos del conocimiento y del pensamiento sean inmediatamente accesibles a la introspección y a la revisión (Barnes, 1.976). La expresión egocéntrica es importante para los más pequeños porque “sirve de ayuda a la orientación mental y a la comprensión consciente; ayuda a superar dificultades; es el lenguaje para uno mismo, relacionado íntima y útilmente con el pensamiento del niño" (Vygotsky, 1.934, p. 175). El lenguaje ayuda al niño a organizar experiencias y a aportar pensamientos con precisión, pero ello sólo es posible a través del diálogo y del debate a lo largo de la acción (Lovell, 1.971)[25], además la expresión egocéntrica pronto se convierte en un instrumento del pensamiento en sentido estricto, buscando y planificando la solución de un problema (Vygotsky, 1.934).

El Informe Cockcroft (Cockcroft, 1.982, p. 88 [punto 243]) incluía la recomendación de que la enseñanza de las matemáticas debería contener oportunidades para debate entre alumno y profesor y entre alumno y alumno. El auténtico objetivo del debate es promover el aprendizaje. Permitirles hablar sirve al profesor para acceder al pensamiento de los alumnos. Habitualmente, este acceso se logra a través de preguntas y respuestas, pero existen razonables dudas de si se consigue de los alumnos una suficiente contribución pues el contacto real con cada alumno es sólo ocasional. Es muy escaso el tiempo de las clases dedicado a un auténtico debate. Para que un profesor obtenga un conocimiento satisfactorio del pensamiento del alumno, es necesaria una relación entre ambos más duradera que la situación normal de preguntas y respuestas, pero la mayoría de los profesores no logran encontrar tiempo suficiente para este tipo de contacto con los alumnos. El debate entre alumno y alumno en un contexto de grupo pequeño resulta mucho más fácil de lograr, pero requiere un debate de seguimiento con el profesor.

La teoría de Vygotsky permanece inacabada y su aportación es más importante desde el punto de vista metateórico que desde el estrictamente teórico, es decir, más que constituir una teoría desarrollada para el aprendizaje de conceptos, proporciona un marco general en el que podría desarrollarse esa teoría.

En cuanto a las relaciones entre aprendizaje e instrucción la teoría del aprendizaje de Ausubel (1.968) es el mejor apoyo para las sugestivas, y en muchos casos geniales, ideas de Vygotsky (Pozo, 1.989).

[25] Citado por Orton (1.988)

> En muchos puntos, resulta difícil delimitar si la teoría de Vygotsky está inacabada o simplemente es incorrecta. Este es uno de ellos: si la instrucción es el motor del aprendizaje, de acuerdo con la ley de doble formación ¿qué procesos de instrucción favorecen el aprendizaje? ¿Cualesquiera? En ese caso, la teoría es claramente incorrecta. ¿Sólo algunos? ¿Entonces cuáles? En este caso, la teoría es imprecisa.
>
> Pozo, 1.989, p. 207

2.6. TEORÍAS ESPECÍFICAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

Vista la aplicación al aprendizaje de las matemáticas de las teorías generales más representativas, pasamos a ver otras teorías específicamente interesadas por el aprendizaje de las matemáticas.

Presentamos en este punto dos teorías debidas a profesores de matemáticas que surgieron al comienzo de la segunda mitad del siglo XX. Pretendemos dar una visión general de ambas describiendo los principios que se deben aplicar en el aprendizaje y las etapas según Dienes y, los elementos y características principales de los niveles de razonamiento y de las fases de aprendizaje de Van Hiele.

2.6.1. DIENES: PRINCIPIOS DE APRENDIZAJE, ETAPAS Y MATERIALES MANIPULATIVOS

Zoltan Paul Dienes (1.916-), profesor de matemáticas, perteneció al grupo de matemáticos, psicólogos y pedagogos orientados hacia enfoques conceptuales y significativos del aprendizaje de las matemáticas en la década de los sesenta del siglo XX. Enfoques que tenían en cuenta tanto que los niños fuesen capaces de comprender intuitivamente las estructuras de las matemáticas (no necesariamente las estructuras algebraicas), como las capacidades cognoscitivas de los estudiantes, como la relevancia de los contenidos matemáticos en las tareas de la vida real.

Para Dienes el problema del aprendizaje consiste, esencialmente, en encontrar una adecuación entre lo que exige la estructura de la materia a aprender y la estructura del pensamiento del aprendiz, por tanto, para construir una teoría que explique el proceso del aprendizaje, hay que tener en cuenta ambas estructuras.

En un estudio sobre la formación de conceptos matemáticos en el niño, Dienes (1.959) apunta que el pensamiento constructivo (intuitivo) se desarrolla antes que el pensamiento analítico (lógico), pero que ambos son necesarios en los estudios científicos y matemáticos. Dado su enfoque del aprendizaje de las matemáticas basado en la estructura, como las relaciones y pautas matemáticas no son evidentes, propone que se plasmen estas estructuras en forma de materiales para la enseñanza, que se concreten o que tomen cuerpo características y propiedades tanto cuantitativas como cualitativas, permitiendo aproximaciones «concretas» a cuestiones que tradicionalmente sólo eran tratadas simbólicamente.

Dedicó su carrera al diseño de materiales para la enseñanza de las matemáticas y a llevar a cabo experimentos para clarificar algunos aspectos de la adquisición de los conceptos matemáticos. Lo más característico de su enfoque de la enseñanza de las matemáticas era el empleo de materiales y juegos concretos, en secuencias de aprendizaje estructuradas cuidadosamente. (Resnick y Ford, 1.981)

A él son debidos los *Bloques Aritméticos Multibase* (BAM), material que se presenta en cajas que contienen de una serie de piezas de madera sin pintar, pero que los últimos años empiezan a ser fabricadas en plástico, que representan las unidades de primer, segundo, tercer y cuarto orden en sistemas de numeración posicionales. Cada caja corresponde a un sistema de base diferente, aunque los más conocidos y usados son los BAM del Sistema de Numeración Decimal (SND), estando compuesta cada una de ellas por:

- *Cubos* de 1 cm de arista, que representan las unidades simples o de primer orden. Son comunes a todas las cajas.
- *Barras*, prismas cuadrangulares de 1 cm^2 de sección y *b* cm de longitud, donde *b* es la base del sistema de numeración, que representan las unidades de segundo orden. Están marcados tantos cubos como indica la base del sistema de numeración. En el SND,

como la base es 10, la barra está formada por 10 cubos y representa la decena.

- *Placas*, prismas cuadrangulares de b^2 cm^2 de base y 1 cm de altura, donde *b* es la base del sistema de numeración, que representan las unidades de tercer orden. Están marcados los cubos que las componen. En el SND la placa está formada por 10x10 cubos, es decir, 100 cubos y representa la centena.
- *Bloques*, cubos de b^3 cm^3, donde *b* es la base del sistema de numeración, que representan las unidades de cuarto orden. Están marcados los cubos que los componen. En el SND el bloque está formada por 10x10x10 cubos, es decir, 1.000 cubos y representa la unidad de millar.

Con los BAM podemos trabajar de manera manipulativa los conceptos numéricos y las operaciones aritméticas principalmente, que es para lo que fueron concebidos, pero también pueden ser utilizados, por ejemplo los de base 10, en el Sistema Métrico Decimal para las magnitudes de Longitud (las barras como decímetros), Superficie (las placas como decímetros cuadrados) y Volumen (los cubos como centímetros cúbicos y los bloques como decímetros cúbicos).

Otro material son los Bloques de Atributos cuyo creador parece que fue William Hull (1.884-1.952), adjudicado a Dienes por utilizarlo en sus experiencias de aprendizaje de la matemática, principalmente para trabajar los procesos lógicos, y por divulgarlo en una versión que modificó, razones ambas por las que hoy conocemos el material como *Bloques Lógicos de Z. P. Dienes*, que está formado por 48 piezas, de madera o de plástico, cada una de las cuales tiene los cuatro atributos color, forma, tamaño y grosor, que constan de las siguientes propiedades: el color, de las propiedades rojo, azul y amarillo; la forma, de círculo, triángulo, cuadrado y rectángulo; el tamaño de las propiedades grande y pequeño, y el grosor, de grueso y delgado. Cada pieza se diferencia de las demás, al menos, en una propiedad.

Además de los conceptos lógico-matemáticos, con los Bloques Lógicos también podemos trabajar el aprendizaje de las nociones conjuntistas, la introducción al concepto de número, los principios topológicos, etc.

En 1.960 Dienes publicó *Building up Mathematics*, cuyo capítulo Segundo lleva por título «Una teoría del aprendizaje matemático». Dice que la suya es una teoría simple del estudio de los conocimientos matemáticos, fundada en los conocimientos psicológicos de que se dispone por el momento (Dienes, 1.960, p. 10), que principalmente fueron las investigaciones de Piaget, los trabajos del *Cognition Project* de Harvard, dirigidos por Bruner, y los estudios de Bartlett (1.958)[26], siendo partidario de incorporar los descubrimientos de las investigaciones psicológicas a la enseñanza de las matemáticas. En ella expone que en el aprendizaje matemático hay que aplicar los siguientes cuatro principios:

1.º *Principio dinámico*. Por medio de un tipo de actividades que llama «juegos», introducidos en el momento oportuno, los niños adquirirán las experiencias necesarias para formar los conceptos matemáticos.

   En las primeras edades los juegos se practicarán con materiales concretos y posteriormente se introducirán gradualmente juegos mentales.

2.º *Principio de constructividad*. En los juegos la construcción precederá siempre al análisis, al menos hasta la etapa de las operaciones formales de Piaget.

3.º *Principio de variabilidad matemática*. Los conceptos que constan de más de una variable deben ser formados mediante distintas actividades en cuyo conjunto se manipulen la totalidad de dichas variables.

4.º *Principio de variabilidad perceptiva*. Para que los niños vayan adquiriendo el sentido matemático de una abstracción, la estructura del concepto que están formando deber ser presentada en tantas formas perceptivas equivalentes como sea posible.

En el Principio dinámico Dienes hace suyas las tres etapas de Piaget sobre la formación de conceptos. A cada una de ellas le corresponde un tipo de aprendizaje diferente.

[26] Citado por Dienes (1.960)

A la etapa preliminar o etapa del juego corresponde una actividad, literalmente de juego libre, con los elementos constituyentes del concepto.

La segunda etapa es más dirigida, más orientada, su característica es una actividad ya estructurada, aunque tal estructuración no llegue demasiado lejos. La etapa queda cerrada cuando se nos aparezca en la mente una clara imagen y sintamos que «comprendemos». El método más seguro de conseguirlo será acumular muchas experiencias, en las que las distintas estructuras empleadas conduzcan todas al mismo concepto.

La tercera etapa es un período de práctica, cuyo objeto es aplicar y fijar en nuestra experiencia el concepto que ha sido formado. Ésta será a su vez también etapa de juego, dirigida a la formación de un nuevo concepto. De este modo sucesivo se encadenan ciclos, quedando formado cada uno de ellos sobre el conjunto de los ya formados.

Los juegos a practicar en estas etapas en la formación de un mismo concepto se clasifican en: a) juegos preliminares; b) juegos estructurados y, c) juegos de práctica, no debiendo utilizarse juegos de práctica de un concepto como preliminares para el mismo concepto, pero sí para un nuevo concepto.

En el Principio de constructividad indica que cuando se intente crear situaciones matemáticas con un material cualquiera, habrá que tener en cuenta que si bien no siempre los niños pueden formar juicios lógicos, pueden en cambio construir conceptos matemáticos mucho antes de lo que se creía. La exploración lógica de lo que ha construido es posterior a la construcción misma y puede tardar incluso años en aparecer. Es después de los 12 años cuando lo niños comienzan a interesarse por las cuestiones que implican alguna demostración, y es entonces cuando se les puede introducir en ella progresivamente, cuidando de que siempre esté presente la construcción matemática y de que haya siempre algo que analizar.

Un concepto matemático contiene cierto número de variables, y lo que constituye el concepto es la constancia de las relaciones existentes entre tales variables, aunque éstas, por sí mismas, varíen. Por ejemplo, con el concepto de cuadrado, se puede cambiar el tamaño haciendo variar la longitud del lado; se puede cambiar la posición a voluntad, con tal que los lados contiguos sean perpendiculares. Evidentemente un conjunto de cuadrados isométricos, colocados en la misma posición, no forman un conjunto de experiencias apropiado al desarrollo del concepto. El Principio de variabilidad matemática lo que lo que nos dice es que si queremos disponer de las condiciones de experiencia óptimas para desarrollar el concepto de que se trate, habrá que variar todas las variables.

Mediante el Principio de variabilidad perceptiva Dienes pretende tener en cuenta todas las diferencias individuales que pueden presentarse en el modo de abordar la formación de «un mismo» concepto, y dice que el único modo de conseguirlo es proponer trabajos que parezcan muy distintos en los que haya que plasmar o percibir el concepto, pero que, esencialmente, tengan la misma estructura conceptual. Se deben presentar los conceptos en «materializaciones o concretizaciones múltiples», es decir, los niños deben trabajar con materiales que se diferencien entre sí todo lo que sea posible, cada uno de los cuales materialice el concepto en cuestión. Ver una pauta semejante incluso cuando se usan materiales diferentes, parece ayudar a los niños a descubrir lo que es y lo que no es relevante para el concepto. Por ejemplo, se puede dibujar cuadrados en el papel, se pueden construir en el geoplano, también con listones geométricos, o bien descubrirlos, encontrarlos, en los objetos que hay a nuestro alrededor, etc. Los niños captan lo que tienen en común estas diferentes representaciones y este algo común es lo que constituye el concepto matemático.

Fruto de los numerosos experimentos de Dienes sobre aprendizaje de las matemáticas en el aula, publicó en 1.970 *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*, en cuyo capítulo Primero «Descripción de las etapas», presenta genéricamente una especie de «programa» para la enseñanza a los niños pequeños, el «ciclo del aprendizaje». En los capítulos Segundo, Tercero y Cuarto, ve su concreción en tres contenidos matemáticos distintos. El ciclo de aprendizaje es una interacción planificada entre un contenido y un estudiante activo, llevada a cabo con la ayuda de unos materiales didácticos específicos en una secuencia de actividades que van de lo concreto a lo simbólico.

Resnick y Ford (1.981) comentan que se aprecia una similitud, un paralelismo entre esta concepción del aprendizaje con, el currículo en espiral que proponían los reformadores de los años 60 del siglo pasado y los modos de representación de Bruner, con quien Dienes colaboró en Harvard precisamente en esos años.

Pasemos a ver brevemente las «seis etapas».

En cada ciclo de aprendizaje, la *primera etapa* introduce al niño en el «medio» al que tendrá que adaptarse, construido especialmente para poder deducir algunas estructuras matemáticas, que deberá ser tan variado y accesible como sea posible. La primera adaptación a este medio se llama «juego libre». No se debe intentar abreviar la etapa de juego libre del ciclo de aprendizaje, dice el autor. Los niños necesitan bastante tiempo para experimentar con los objetos físicos que les rodean, que luego en la etapa formal ya serán mentales (Dienes, 1.973, p.48), antes de que se pueda o deba dar forma a la manera en que piensan sobre los mismos.

Tras el período de adaptación el niño se dará cuenta de las limitaciones de cada situación. A partir de ese momento, estará dispuesto a jugar contando con unas restricciones que se le impondrán artificialmente, las «reglas del juego». En segundo lugar en el ciclo de aprendizaje está la *etapa* de los «juegos estructurados». Aquí empieza el niño a abstraer el concepto y es donde las características especiales de los materiales matemáticos manipulativos tienen su máximo impacto sobre el aprendizaje.

Jugar a juegos estructurados según las leyes matemáticas relativas a una estructura matemática cualquiera, no es aprender matemática. Jugando a juegos que poseen la misma estructura, pero que tienen una apariencia diferente, juegos de isomorfismo, *tercera etapa* del ciclo de aprendizaje, el niño llegará a descubrir las conexiones de naturaleza abstracta que existen entre los elementos de un juego y los elementos de otro, de estructuras idénticas. Así, el niño obtiene la estructura común de los juegos y se deshace de los aspectos irrelevantes. De esta forma, los juegos desarrollados con unos materiales concretos y después con otros materiales concretos, quedarán identificados desde el punto de vista de la estructura.

Será en ese momento cuando el niño se dará cuenta de lo que hay de «semejante» en los diversos juegos que ha practicado, es decir, habrá realizado una «abstracción».

El proceso de abstracción funciona siempre en el aprendizaje pero, para enseñar los conceptos matemáticos de alto nivel a los niños pequeños, puede ser necesaria la ayuda de los materiales concretos para la enseñanza de las matemáticas y las materializaciones múltiples, el Principio de variabilidad perceptiva.

Las materializaciones múltiples deben permitir también la manipulación de toda la gama de variables matemáticas que se asocian a un concepto, el Principio de variabilidad matemática. Se supone que las variaciones matemáticas clarifican hasta qué punto se puede generalizar un concepto a otros contextos.

Para seguir con el ciclo de aprendizaje, dado que el niño no estará todavía en disposición de utilizar esta abstracción, puesto que no habrá quedado impresa en su mente, antes de tomar plenamente conciencia de la abstracción, el niño necesita un proceso de representación, *cuarta etapa*. "Esta representación le permitirá hablar de lo que ha abstraído, de observarlo desde fuera, de salir del juego o del conjunto de juegos, de examinar los juegos y reflexionar sobre ellos" (Dienes, 1.970, p. 11). Se representa la estructura común dibujando imágenes, gráficos o mapas sencillos, para acabar asociando símbolos matemáticos a los conceptos en la etapa siguiente. El empleo de símbolos debe ser informal al principio, incluso, utilizar símbolos que hayan elegido ellos mismos, dirigido a ayudar a los niños a recordar las formas y relaciones que han advertido. Se cree que esto es una manera de permitir que los niños participen en el proceso emocionante del descubrimiento y la formalización por el que pasan los matemáticos y también consigue que la experiencia del aprendizaje sea algo más que un ejercicio de memoria (Resnick y Ford, 1.981).

Tras la introducción de una representación, o incluso de varias representaciones de la misma estructura, en la *quinta etapa* se estudian las propiedades de la representación, es decir las propiedades de la estructura abstracta. Para ello es necesario inventar un lenguaje, una simbolización. En el momento adecuado se debe introducir a los niños el lenguaje matemático.

Las experiencias matemáticas hasta esta quinta etapa se han registrado como manipulaciones físicas o como imágenes mentales de las manipulaciones y de sus resultados. Una de las funciones que se atribuyen a las materializaciones múltiples es la de crear un fondo rico de imágenes mentales. La transición a la representación simbólica debe permitir que estas imágenes se lleguen a evocar por los símbolos matemáticos que se asocian a las mismas (Dienes, 1.963).

A partir de este punto del ciclo del aprendizaje y dado que no es posible describir todas las propiedades de la estructura matemática formada, en la *sexta etapa* y última del ciclo, se toma un conjunto mínimo de descripciones, los «axiomas», se inventa un procedimiento para deducir las demás propiedades, «demostración», y las propiedades deducidas se llaman «teoremas». "Han inventado un sistema formal" (Dienes, 1.970, p. 12) (con la dirección del profesor si es necesario), han formado un cuerpo de reglas estructurado. Ahora, los niños «juegan» con símbolos y con reglas más que con materializaciones concretas, y descubren qué manipulaciones y agrupaciones de reglas son posibles. Entran en una nueva etapa de juego libre en un nuevo ciclo de aprendizaje, que ahora utiliza los símbolos como objetos de manipulación, y que llevará a una estructura del pensamiento matemático de un orden superior. Pero Dienes (1.963) advierte que para que el simbolismo siga conectado de forma vital con las experiencias concretas de los niños, éstos deben poder «volver a pasar» por las manipulaciones concretas en cualquier momento, o, por lo menos, recibir imágenes de las mismas.

La manipulación de símbolos de la sexta etapa es la meta final del aprendizaje matemático de una estructura.

En la pedagogía tradicional el sentido del aprendizaje es exactamente inverso. Se empieza en la etapa simbólica, se entra directamente en un sistema formal, y ante los problemas de comprensión de los conceptos por los niños, se pasa a la etapa de la representación, utilizando medios audiovisuales para que los comprenda. Al comprobar que los niños no están en condiciones de aplicar los conceptos incluso con la ayuda de los métodos audiovisuales, se les enseñan las conexiones y aplicaciones en la realidad. Se llega finalmente a la realidad, de la cual se tenía que haber partido. (Dienes, 1.970)

A pesar de su antagonismo a la pedagogía tradicional es criticado por parte de algunos didactas como Brousseau (1.986) y como Freudenthal (1.983), quien alega que hay abstracciones que no pueden ser captadas por los alumnos pese a ser materializadas, en vez de hablar de adquisición de conceptos prefiere hablar de constitución de objetos mentales, que desde su punto de vista precede a la adquisición de conceptos, y sustituye las concreciones o materializaciones de conceptos por la constitución y manipulación de objetos mentales que van transformándose.

2.6.2. EL MODELO DE VAN HIELE

Aproximadamente por la mitad del siglo XX, dos profesores holandeses de matemáticas de Enseñanza Secundaria, Pierre Marie Van Hiele y Dina Van Hiele-Geldof, preocupados por el deficiente aprendizaje y resultados de sus alumnos, estudiaron dicho problema y partiendo de la consideración de las matemáticas como actividad y del aprendizaje como proceso de reinvención (Freudenthal, 1.963), presentaron en sus tesis doctorales un modelo de enseñanza y aprendizaje de la Geometría (Van Hiele, 1.957) y un ejemplo concreto de aplicación de ese modelo en unos cursos de Geometría (Van Hiele-Geldof, 1.957).

En el Modelo de Van Hiele se pueden distinguir dos aspectos:

- Uno *descriptivo*, que identifica diferentes formas de razonamiento matemático de los estudiantes y puede valorar el progreso de éstos, los «niveles de razonamiento».
- Otro *instructivo*, que da a los profesores directrices para favorecer el avance de los alumnos a un nivel superior de razonamiento, las «fases de aprendizaje».

Las ideas centrales del Modelo son:

- Hay diferentes niveles en el razonamiento de los estudiantes de matemáticas, que son secuenciales y ordenados.
- Un estudiante sólo podrá comprender aquellas partes de las matemáticas adecuadas a su nivel de razonamiento.
- Una relación matemática que no puede ser expresada en el nivel de razonamiento presente del estudiante, será necesario esperar a enseñársela a cuando alcance un nivel de razonamiento superior.
- No se puede enseñar a un estudiante a razonar de una determinada forma, pero mediante una enseñanza adecuada de las matemáticas se puede favorecer que llegue lo antes posible a razonar de esa forma.

La filosofía que inspira el Modelo de Van Hiele se refiere al razonamiento y aprendizaje de las matemáticas en general, pero tanto los estudios iniciales del matrimonio Van Hiele como los significativos que se han hecho después están centrados en la geometría, hasta el punto que se ha convertido en el modelo teórico de referencia más frecuente en las investigaciones y diseños curriculares relacionados con la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. Parece que hay consenso al respecto de que es sumamente difícil aplicar el Modelo a áreas de las matemáticas diferentes de la geometría.

Pierre Marie Van Hiele ha seguido trabajando en su perfeccionamiento y desarrollo[27], así como otros educadores y psicólogos interesados por el Modelo han realizado investigaciones y experimentaciones que han posibilitado un mejor conocimiento y un uso más eficaz del mismo, a la vez que han contribuido a definir su forma actual.

Son evidentes las diferentes formas de expresarse, de trabajar y de aprender en geometría de los estudiantes de las etapas educativas de Primaria, Enseñanza Secundaria y de las Facultades de Matemáticas. Mientras que en los primeros cursos de la escuela sólo son capaces de trabajar de forma visual, refiriéndose a los objetos que tienen ante ellos, y no saben justificar con claridad sus ideas, los adolescentes en el instituto han logrado un notable desarrollo en su capacidad de expresión y, si bien es

[27] Dina Van Hiele-Geldof falleció en 1.959

posible que necesiten objetos físicos para estudiar las matemáticas, esos objetos representan conceptos o propiedades generales y abstractas, aunque es probable que no sean capaces de realizar demostraciones, capacidad que sí poseen los estudiantes universitarios matemáticos. Por tanto, la existencia de niveles de razonamiento en geometría es clara.

En su forma más general, el Modelo de Van Hiele considera la existencia de cinco niveles de razonamiento, pero también se utiliza con frecuencia una restricción de ésta, que ignora el quinto nivel. Presentamos a continuación las características generales de los cinco niveles de razonamiento.

Nivel 1. Reconocimiento, visualización

- Percepción de las figuras geométricas en su totalidad, de manera global. Se suelen incluir atributos irrelevantes en las descripciones, especialmente referidos a la posición en el plano.
- Percepción de las figuras como objetos individuales, no generalizando las características que reconocen en una figura a otras de su misma clase.
- Descripción de las figuras basada principalmente en su aspecto físico y posición en el espacio. Los reconocimientos, distinciones o clasificaciones se basan en semejanzas o diferencias físicas globales.
- Frecuentemente las descripciones de las figuras lo son por su semejanza con otros objetos que conocen, no necesariamente matemáticos, usando frases como «... se parece a...», «... tiene forma de...», etc.
- Uso de propiedades imprecisas para identificar, comparar, ordenar o caracterizar figuras, con habituales referencias a prototipos visuales.
- Aprendizaje de un vocabulario básico para hablar de las figuras, escribirlas, etc.
- No se suele reconocer explícitamente las partes componentes de las figuras ni sus propiedades matemáticas y cuando se hace el reconocimiento, estos elementos o propiedades no tienen un papel central y, frecuentemente, manifiestan contradicciones.

Se trata del nivel de razonamiento típico de Educación Infantil y los primeros cursos de Primaria, pero no es exclusivo suyo; en realidad, cada vez que se presente a los estudiantes algún concepto geométrico nuevo, éstos van a pasar por el nivel 1, si bien algunas veces ese paso será muy rápido.

Nivel 2. Análisis

- Reconocimiento de que las figuras geométricas están formadas por partes o elementos y están dotadas de propiedades matemáticas. Se describen las partes que integran una figura y se enuncian sus propiedades de manera informal. Se es capaz de analizar las propiedades matemáticas de las figuras.
- Deducción de propiedades a partir de la experimentación y capacidad de generalización de dichas propiedades a todas las figuras de la misma clase.
- Las definiciones de conceptos consisten en recitar una lista exhaustiva de propiedades, pero en la que puede haber omisiones de características necesarias. Se rechazan las definiciones del profesor o del libro de texto en favor de la del estudiante cuando entran en conflicto con la propia.
- No relacionan diferentes propiedades de una misma figura o con las de otras figuras, por lo que no establecen clasificaciones a partir de las relaciones entre las propiedades. No se realizan clasificaciones inclusivas.
- La demostración de una propiedad consiste en su comprobación en unos pocos casos.

En este nivel aparece un razonamiento que podemos calificar como «matemático», pues es el primero en el que los estudiantes son capaces de descubrir y generalizar (a partir de la observación y la manipulación) propiedades que desconocían. Pero esta capacidad es limitada, pues usan las propiedades de una figura como si fueran independientes entre sí, por ejemplo, no relacionan la existencia de ángulos de 90° en una figura poligonal con la perpendicularidad de los lados o con el paralelismo de los lados opuestos.

Nivel 3. Clasificación, deducción informal, abstracción

- Se puede relacionar propiedades de una figura entre sí o con las de otras figuras: se comprende la existencia de relaciones y se descubren nuevas relaciones, de manera experimental.

- Comprensión de lo que es una definición matemática y sus requisitos. Se definen correctamente conceptos y tipos de figuras. Se hacen referencias explícitas a las definiciones cuando se realizan razonamientos o demostraciones.
- Se pueden realizar clasificaciones inclusivas.
- La demostración de una propiedad ya no se basa en la comprobación de casos, pues hay necesidad de justificar de manera general la veracidad de dicha propiedad, para lo cual se usan razonamientos deductivos informales.
- Comprensión y realización de implicaciones simples en un razonamiento formal.
- Comprensión de una demostración realizada por el profesor, capacidad para repetir tal demostración y adaptarla a otra situación análoga.
- Incapacidad para llevar a cabo una demostración formal completa, en la que haya que encadenar varias implicaciones, pues no se logra una visión global de las demostraciones y no se comprende su estructura.
- Incomprensión de la estructura axiomática de las matemáticas.

Entre los avances y las características de los estudiantes de este nivel de razonamiento está el que son capaces de clasificar inclusivamente los cuadriláteros convexos: los cuadrados son rombos y rectángulos,...

Nivel 4. Deducción formal

- Capacidad para comprender y desarrollar demostraciones formales. Capacidad para adquirir una visión global de las demostraciones y para comprender la misión de cada implicación simple en el proceso.
- Realización de demostraciones mediante razonamientos deductivos formales y de varios pasos, asumiendo su necesidad como único medio para verificar la verdad de una afirmación.
- Comprensión de la estructura axiomática de las matemáticas: sentido y utilidad de los axiomas, las definiciones, los teoremas, los términos no definidos,…
- Aceptación de la posibilidad de llegar al mismo resultado desde distintas premisas o mediante diferentes formas de demostración.

- Comprensión de la nueva expresión del enunciado de problemas o teoremas con un lenguaje más preciso.

Al alcanzar el nivel 4 de razonamiento se logra la plena capacidad de razonamiento lógico matemático.

Las investigaciones llevadas a cabo en los niveles educativos no universitarios coinciden en señalar que son pocos los alumnos que logran una adquisición alta del cuarto nivel de razonamiento y lo consiguen al final de la Educación Secundaria.

Nivel 5. Rigor

- Posibilidad de trabajar en sistemas axiomáticos de la geometría euclídea distintos del usual.
- Capacidad para realizar deducciones abstractas basándose en un sistema de axiomas determinado.
- Capacidad para establecer la consistencia de un sistema de axiomas. Capacidad para comparar sistemas axiomáticos diferentes y decidir sobre su equivalencia.
- Comprensión de la importancia de la precisión al tratar los fundamentos y las relaciones entre estructuras matemáticas.

Acabada la exposición de las características generales de los niveles de razonamiento, veamos a continuación las principales propiedades globales del Modelo de Van Hiele cuya consideración y análisis es imprescindible para una adecuada comprensión y utilización de éste.

1. Jerarquización y secuencialidad de los niveles

Cada nivel de razonamiento se apoya en el anterior, para alcanzar un nivel de razonamiento es necesario haber adquirido previamente los niveles anteriores (Van Hiele, 1.986, p. 51); jerarquización que han corroborado todas las investigaciones al respecto.

Por otra parte, entre las características de los niveles 1, 2 y 3 siempre hay alguna que se refiere a habilidades que todavía no saben usar los estudiantes o que están siendo usadas implícitamente y cuyo uso explícito se aprende en el nivel siguiente, es decir, los niveles de Van Hiele tienen una estructura secuencial.

2. Relación entre el lenguaje y los niveles de razonamiento

Para un alumno del segundo nivel de razonamiento, «demostrar» una propiedad consiste en comprobarla en unos pocos casos, para un alumno del tercer nivel consiste en buscar algún tipo de justificación lógica pero intuitiva de la propiedad, mientras que para un alumno del cuarto nivel consiste en aplicar el razonamiento lógico formal para obtener una verificación correcta y aceptable matemáticamente.

Con este ejemplo vemos como una palabra tiene significados diferentes en los distintos niveles, es decir, que a cada nivel de razonamiento le corresponde un tipo de lenguaje específico.

Esta propiedad del Modelo tiene una importancia trascendental en la actividad de los profesores en sus clases: si un profesor quiere hacerse comprender por sus alumnos debe hablarles en su nivel de lenguaje, de lo contrario provocará la incomprensión mutua, pues el profesor, por su desconocimiento psicodidáctico, tampoco entenderá por qué los alumnos responden de esa manera, o no responden, a las actividades y, probablemente, los evaluará erróneamente.

3. Localidad de los niveles de razonamiento

¿Los niveles de razonamiento son específicos de un concepto, es decir, son locales, o son genéricos para toda la geometría, es decir, globales?

Investigadores como Freudenthal (1.973), Mayberry (1.983)[28] y, Gutiérrez y Jaime (1.987)[29] concluyen que la característica local de los niveles de razonamiento es la correcta.

4. El paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua

Van Hiele (1.986) sugirió que el paso de un estudiante desde un nivel de razonamiento al siguiente se produce de una forma brusca, como un salto

[28] Citado por Burger y Shaughnessy, 1.986, p. 7, de la traducción castellana de María Luna y Angel Gutiérrez
[29] Citado por Jaime, 1.993, p. 15

pero Burger y Shaughnessy (1.986) y Jaime (1.993) citan algunas de las investigaciones[30] que han mostrado que la interpretación discontinua de los niveles no puede explicar ciertas situaciones frecuentes de alumnos que razonan simultánea o alternativamente en dos niveles consecutivos, por ello actualmente se considera que el paso de un nivel al siguiente se produce de forma continua, gradual, y que durante algún tiempo el estudiante se encontrará en un período de transición en el que combinará razonamientos de un nivel y del otro.

5. La instrucción herramienta para progresar en los niveles de razonamiento

Van Hiele afirma que la instrucción es un factor básico para avanzar en los niveles de razonamiento: “la transición de un nivel al siguiente no es un proceso natural; tiene lugar bajo la influencia de un programa de enseñanza-aprendizaje. La transición no es posible sin el aprendizaje de un nuevo lenguaje” (Van Hiele, 1.986, p. 50) y añade Crowley (1.987): ningún método de enseñanza permite al estudiante saltarse un nivel.

Finalmente, para completar la descripción del Modelo, vamos a exponer las fases de aprendizaje, es decir, la propuesta de Van Hiele sobre los pasos que debe seguir un profesor en la graduación y organización de las actividades que deben realizar los alumnos para pasar de un nivel de razonamiento al siguiente.

Las fases no están asociadas a un nivel determinado, sino que en cada nivel la instrucción comienza con actividades de la primera fase y continúa con actividades de las siguientes fases. A lo largo de estas fases, es necesario conseguir, en primer lugar, que los estudiantes adquieran de manera comprensiva los conocimientos básicos necesarios (nuevos conceptos, propiedades, vocabulario, etc.) con los que tendrán que trabajar, para después centrar su actividad en aprender a utilizarlos y combinarlos. Al finalizar la fase quinta, los alumnos deben haber alcanzado el nivel de razonamiento siguiente.

[30] Citados por Burger y Shaughnessy (1.986): Usiskin (1.982), Mayberry (1.983) y, Fuys y otros (1.985). Citados por Jaime (1.993): Fuys, Geddes y Tischler (1.988), Burger y Shaughnessy (1.990), Gutiérrez y otros (1.991) y, Shaughnessy y otros (1.991)

Las características principales de las fases de aprendizaje son las siguientes:

Fase 1. Información

En esta fase se procede a tomar contacto con el nuevo contenido objeto de estudio.

El profesor debe identificar los conocimientos previos que puedan tener sus alumnos sobre este nuevo tema y su nivel de razonamiento en el mismo.

Los alumnos deben recibir información para conocer el campo de estudio que van a iniciar, los tipos de problemas que van a resolver, los métodos y materiales que utilizarán, etc. Así mismo, los estudiantes aprenderán a manejar el material y adquirirán una serie de conocimientos básicos imprescindibles para poder empezar el trabajo matemático propiamente dicho.

Esta fase de aprendizaje puede evitar repetir o tratar de «enseñar» cosas que los estudiantes ya saben bien porque tienen un conocimiento extraescolar sobre el tema, bien porque vamos a trabajar en un contenido que no es absolutamente nuevo para los alumnos que ya lo han estudiado en algún curso anterior.

La primera fase puede que sea innecesaria en algunos casos, como por ejemplo cuando el profesor imparte docencia a los mismos estudiantes en cursos consecutivos, o cuando dentro del mismo curso, y sin que haya interrupción de las clases dedicadas a un tema de matemáticas, se produzca el paso de los alumnos de un nivel de razonamiento al siguiente (es relativamente fácil que esto ocurra al pasar del nivel 1 al 2 o del nivel 2 al 3).

Fase 2. Orientación dirigida

En esta fase de aprendizaje los estudiantes empiezan a explorar el campo de estudio por medio de investigaciones basadas en los materiales[31] que se les proporciona.

[31] Materiales manipulativos hasta el tercer nivel de razonamiento y ya en el cuarto empezarán a trabajar de forma completamente abstracta (Jaime y Gutiérrez, 1.990)

El profesor guía a los alumnos mediante actividades y problemas (dados por él o planteados por los mismos estudiantes) para que éstos descubran, comprendan y aprendan cuales son los conceptos, propiedades, definiciones, figuras, relaciones, etc., principales en el área de la geometría que están estudiando y en los que deben basar su nueva forma de razonamiento.

Los problemas propuestos han de llevar, progresiva pero directamente, a los resultados y propiedades que los estudiantes deben entender y aprender. El profesor tiene que seleccionar cuidadosamente estos problemas y actividades y debe orientar a sus alumnos hacia la solución cuando lo necesiten.

Refiriéndose a esta fase dice Van Hiele: “las actividades, escogidas cuidadosamente, forman la base adecuada del pensamiento del nivel superior” (Van Hiele, 1.986, p. 97). El papel del profesor es, por tanto, básico en esta fase, ya que debe guiar a sus alumnos para que adquieran correctamente las estructuras básicas del nivel y éstos, por sí mismos, no podrían realizar un aprendizaje eficaz en cuanto a los resultados obtenidos y al tiempo empleado.

Fase 3. Explicitación

En esta fase los alumnos deben intentar expresar, en un contexto de diálogo con el grupo o por escrito, cómo han resuelto las actividades, sus experiencias los resultados que han obtenido, con el fin de que lleguen a ser plenamente conscientes de las características y relaciones descubiertas y terminen de aprender y afiancen el nuevo vocabulario, todo ello correspondiente al tema objeto de estudio y al propio nivel de razonamiento.

No se producen aprendizajes nuevos de estructuras o contenidos, sino una revisión del trabajo llevado a cabo, de puesta a punto de conclusiones y de práctica y perfeccionamiento de la forma de expresarse, lo cual origina un afianzamiento de la nueva red de conocimientos que se está formando.

La tercera fase no debe interpretarse como fijada temporalmente después de la segunda fase y antes de la cuarta como parece indicar su número ordinal, sino más bien como una actitud permanente de diálogo y análisis en todas las actividades posibles de las diferentes fases de aprendizaje.

Fase 4. Orientación Libre

Ahora se debe producir la aplicación, perfeccionamiento y consolidación del aprendizaje de conocimientos y de lenguaje realizado en las fases anteriores.

El profesor propondrá a sus alumnos verdaderos problemas, es decir, que no sean actividades de simple aplicación directa de un dato o algoritmo conocido, sino problemas diferentes de los anteriores y, probablemente, más complejos, que planteen nuevas relaciones o propiedades, que sean más abiertos, preferiblemente con varias vías de resolución, con varias soluciones o con ninguna.

La intervención del profesor en la resolución de las tareas debe ser mínima, son los alumnos quienes tienen que encontrar el camino adecuado a partir de lo aprendido en la segunda fase, pues dice Van Hiele (1.986, p. 54): "los estudiantes aprenden a encontrar su camino en la red de relaciones por sí mismos, mediante actividades generales".

El tipo de actividades de esta cuarta fase es la que permitirá completar la red de relaciones que se empezó a formar en las fases anteriores, dando lugar a que se establezcan relaciones más complejas y más importantes.

Fase 5. Integración

Las actividades de esta fase no provocan aprendizaje de elementos nuevos, deben favorecer la adquisición de una visión global de todo lo aprendido sobre el tema y de la red de relaciones que están terminando de formar, integrando estos nuevos conocimientos, métodos de trabajo y formas de razonamiento con los que tenían anteriormente, actividades que también deben permitirle al profesor comprobar si se ha conseguido ya dicha adquisición e integración.

El profesor debe fomentar esta integración confeccionando y presentando a los estudiantes resúmenes o recopilaciones de los contenidos estudiados.

Los estudiantes deben memorizar los resultados más importantes y adquirir destreza y agilidad en el uso de los nuevos algoritmos, procedimientos de resolución de problemas o métodos de trabajo.

Completada esta fase, los alumnos tendrán a su disposición una nueva red de relaciones mentales, más amplia que la anterior y que la sustituye, habrán adquirido un nuevo nivel de razonamiento y estarán preparados para repetir las fases de aprendizaje en el nuevo nivel.

Para concluir con las fases de aprendizaje de Van Hiele, creemos importante destacar que una actividad por sí misma no corresponde a un nivel de razonamiento y una fase de aprendizaje concretos, pues generalmente las actividades propuestas se pueden resolver utilizando métodos de trabajo y formas de razonamiento propias de distintos niveles.

Por último, dos apuntes sobre la utilización del modelo de Van Hiele. En las propiedades globales del Modelo ya vimos que la secuencia de niveles es inalterable por lo que no se debe pretender que una persona alcance un nivel de razonamiento mientras no haya adquirido suficiente competencia en el nivel anterior.

Las fases de aprendizaje deben aplicarse en la enseñanza de la geometría (o de las matemáticas) y en la organización de la docencia con la suficiente flexibilidad y sentido común como para adaptarlas al grupo de alumnos con los que estamos trabajando. La fase 1 es importante y, como hemos visto, se puede prescindir de ella en algunas ocasiones. Las fases 2 y 4 marcan la secuenciación de las actividades para el aprendizaje de un tema y la adquisición de un nivel de razonamiento. La fase 3 debe abarcar todas las actividades de los estudiantes. La fases 5 es la que cierra, redondea, el aprendizaje en un nivel de razonamiento.

2.7. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

No es fácil saber con seguridad lo que los alumnos pueden aprender, pero el conocimiento de los cuatro tipos de aprendizaje matemático: memorización simple, aprendizaje algorítmico, aprendizaje conceptual y resolución de problemas (Brown, 1.978), de la información detallada de su desarrollo cognitivo proporcionada por determinadas investigaciones educativas, unido a las explicaciones que aportan las teorías del aprendizaje, han de posibilitar, van a posibilitar una mejora de la enseñanza-aprendizaje.

No obstante, entre algunos profesores de matemáticas parece haber una cierta despreocupación o tal vez desprecio por las teorías (Gómez, 1.991), probablemente el problema está en una falta de información y de formación.

Los enfoques conductistas del aprendizaje conciben que éste es el cambio de conducta que experimentan las personas como resultado de la adquisición de conocimientos. Los representantes más notables son Thorndike, Skinner y Gagné.

La teoría de Thorndike, conocida también como «aprendizaje por el éxito», sigue tres leyes: del efecto, de la disponibilidad y del ejercicio, además para la transferencia del conocimiento formuló su conjetura de «los elementos idénticos». Skinner se inclinó por el «aprendizaje programado» y según Gagné, el conocimiento de un contenido se organiza en una «jerarquía de aprendizaje».

Las teorías cognitivas sostienen que el conocimiento proviene de la adquisición de estructuras o sistemas de relaciones organizadas subyacentes y debe elaborarse desde dentro. Las más representativas son las siguientes.

Existe una verdadera fractura en la psicología cognitiva, mientras el procesamiento de información adopta los presupuestos del asociacionismo y el mecanicismo, la «otra» psicología cognitiva puede ser calificada como estructuralista y organicista: «constructivista».

La teoría de la *Gestalt* introdujo la comprensión intuitiva (*insight*) en el aprendizaje de las matemáticas.

Para muchos investigadores el aspecto más importante de la teoría de Piaget es el fenómeno de la «equilibración», que explica introduciendo las ideas de «asimilación» y de «acomodación». Su concepción del desarrollo se centra en el aspecto dinámico de la actividad intelectual y de las estructuras psicológicas que caracterizan a los niños en diferentes «etapas» de su desarrollo. Etapas por las que pasan todos los niños y siguiendo el orden de éstas, cuya trascendencia curricular es notoria por la interpretación como estrategia para decidir el punto óptimo para introducir un determinado contenido en el currículum.

De la teoría de Piaget se derivan principios generales de aprendizaje que pueden ayudar a crear ajustes óptimos entre las capacidades del estudiante y el contenido y procedimientos de la enseñanza de la matemática.

Según Bruner los alumnos cuyas estructuras cognitivas no alcancen los grados de complejidad adecuados para asimilar las estructuras matemáticas (no necesariamente las algebraicas) pueden acceder a ellas [por medio de] un «currículo en espiral», estructuras matemáticas que se pueden ir formando en las mentes de los estudiantes proporcionándoles experiencias que les permitan desarrollar representaciones enactivas, icónicas y simbólicas de los conceptos, en ese orden.

Si pretendemos que el aprendizaje de nuestros alumnos no sea un aprendizaje memorístico de contenidos, si no que pensamos que el estudiante debe aprender conceptos, procedimientos y estrategias generales, actitudes y valores, no tendremos más remedio que inclinarnos hacia el aprendizaje por descubrimiento dirigido, y es en este punto en el que la resolución de problemas desempeña un papel esencial (Carrillo, 1.998). Una gran parte de las matemáticas escolares puede verse como la codificación de respuestas a conjuntos de problemas que surgen del propio mundo de los escolares.

Dice Ausubel que en los alumnos menores, cierta proporción de aprendizaje por repetición y por descubrimiento puede ser conveniente, pero después de los años de la escuela primaria, el aprendizaje por recepción verbal constituye el método más eficaz de asimilar significativamente el contenido sustancial de la disciplina.

Vygotsky considera a maestros, padres, compañeros... agentes activos, promotores potenciales de desarrollo, siempre que actúen de forma conveniente en la «Zona de Desarrollo Próximo». Para ello, deben centrarse no tanto en lo que el niño puede hacer por sí mismo (el nivel real de desarrollo), sino ligeramente por encima, en aquello que puede realizar con su colaboración y ayuda (el nivel potencial). Añadiendo que en el proceso de aprendizaje no se puede prescindir de un elemento como el lenguaje, que nacido como instrumento de comunicación, se convierte en instrumento de acción.

A diferencia de todos los anteriores, Dienes era profesor de matemáticas, y su teoría, de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, sigue unos «principios» y se caracteriza por el empleo de materiales y juegos concretos, en «etapas», secuencias de aprendizaje estructuradas cuidadosamente, que van de lo concreto a lo simbólico.

El matrimonio Van Hiele también eran profesores de matemáticas. La filosofía que inspira su Modelo se refiere al razonamiento y aprendizaje de las matemáticas en general, pero se ha convertido en el modelo teórico de referencia de la enseñanza y el aprendizaje de la Geometría. En él se pueden distinguir dos aspectos: uno *descriptivo*, que identifica diferentes formas de razonamiento matemático de los estudiantes y puede valorar el progreso de éstos, los «niveles de razonamiento» y otro *instructivo*, que da a los profesores directrices para favorecer el avance de los alumnos a un nivel superior de razonamiento, las «fases de aprendizaje».

Capítulo 3: CONTENIDOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMARIA Y CÓMO SE APRENDEN

El Estatut d'Autonomia de la Comunitat Valenciana, en el artículo 53, dispone que es competencia exclusiva de la Generalitat la regulación y administración de la enseñanza en toda su extensión, niveles y grados, modalidades y especialidades, sin perjuicio de lo que disponen el artículo 27 de la Constitución Española y las Leyes Orgánicas que, de acuerdo con el apartado 1 del artículo 81 de aquella, lo desarrollan, de las facultades que atribuye al Estado el número 30 del apartado 1) del artículo 149 de la Constitución Española, y de la alta inspección necesaria para su cumplimiento y garantía.

El Decreto 20/1.992, de 17 de febrero, del Govern Valencià, de acuerdo con el párrafo anterior y la Ley Orgánica 1/1.990, de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), establecía el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana (*Diari Oficial de la Generalitat Valenciana* [DOGV], Núm. 1.728, de 20 de febrero de 1.992, pp. 1.428-1.502) en el momento del inicio de la investigación y durante el trabajo de campo que presenta esta tesis doctoral[32] y orientaba los programas y los contenidos de las asignaturas de didáctica de la matemática de Educación Primaria que cursaron los estudiantes de la diplomatura de Maestro en la UJI

[32] Según establecen su Disposición Final Segunda "El presente decreto entrará en vigor al día siguiente al de su publicación en el *Diari Oficial de la Generalitat Valenciana"* (Decreto 20/1.992, p. 1.436)

cuyos conocimientos matemáticos se analizan, contenidos que presentamos en el capítulo siguiente.

A su vez, el Decreto 111/2.007, de 20 de julio, del Consell, por los mismo motivos y ahora según la Ley Orgánica 2/2.006, de 3 de mayo, de Educación (LOE), establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana (*Diari Oficial de la Comunitat Valenciana* [DOCV], Núm. 5.562, de 24 de julio de 2.007, pp. 30.110-30.401) y orienta los programas y los contenidos de las asignaturas de didáctica de la matemática del presente[33].

Motivos por los cuales vamos a ver cuales eran o son, respectivamente, esos contenidos curriculares de matemáticas, pero mientras en el Decreto 111/2.007, como dice su *Artículo 7. Objetivos, contenidos y criterios de evaluación de las áreas* el currículo de la Educación Primaria para los centros docentes de la Comunitat Valenciana figura en el anexo del decreto, en el que se establecen los contenidos de cada área en los diferentes ciclos (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007: área de Matemáticas pp. 30.386-30.401), en el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.434) dice su artículo 4.2 “El currículo de Educación Primaria se incluye como anexo de este decreto” pero aclara en la página 1.430 que los contenidos “se presentan agrupados en bloques que recogen los contenidos que se deben trabajar a lo largo de la etapa” (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992: área de Matemáticas pp. 1.490-1.502), que repite en la página 1.494, siendo la Resolución de 12 de septiembre de 1.992, de la *Direcció General d’Ordenació i Innovació Educativa* (*Diari Oficial de la Generalitat Valenciana* [DOGV], Núm. 1.912, de 26 de noviembre de 1.992, pp. 11.713-11.804), la que en el Anexo II da orientaciones para la secuenciación de contenidos por ciclos de la Educación Primaria (DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992: área de Matemáticas: pp. 11.794-11.804).

Con los referentes anteriores vamos a presentar en los cuatro primeros apartados del capítulo unas tablas que dan una visión conjunta de

---

[33] Según establecen sus Disposiciones Transitoria (*Única. Calendario de implantación*), Derogatoria (*Única. Derogación normativa*) y Disposición Final (*Segunda. Entrada en vigor*) (Decreto 111/2.007, p. 30.117)

la gradación de los contenidos matemáticos que se ha establecido entre los ciclos para cada uno de los cuatro bloques de contenidos «Números y operaciones», «Medida», «Geometría» y «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», así como una comparación de éstos en ambos decretos. En el Decreto 20/1.992 había dos bloques de contenidos más, Bloque 5. «Resolución de problemas» y Bloque 6. «Actitudes ante las matemáticas», pero en el Decreto 111/2.007 (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.387), en cada ciclo, se han incluido unos «Contenidos comunes a todos los bloques», que se refieren básicamente a la adquisición de actitudes, y la resolución de problemas actúa como eje vertebrador que recorre transversalmente todos los bloques y por ello se incluye con especial relevancia en cada uno de ellos. En la confección de dichas tablas, para las columnas correspondientes al Decreto 111/2.007 sólo ha habido que reproducir (cortar y pegar) del original, pero en el caso del Decreto 20/1.992, por lo ya expuesto y por las características de la Resolución de 12 de septiembre de 1.992, ha habido que hacer una elaboración personal de las correspondientes columnas partiendo de los cuadros resumen de la Resolución.

En el quinto apartado del capítulo veremos cómo se aprenden los contenidos según los dos decretos considerados, es decir, qué teorías de aprendizaje vistas en el Capítulo 2 aparecen en los decretos.

Y todo ello, contenidos de Primaria y cómo se aprenden, durante la formación inicial como maestros de la promoción 2.001/2.004 y en el presente, porque pretendemos ver si hay diferencias sustanciales entre el decreto de la LOGSE y el de la LOE para determinar la validez, en el presente y en el futuro inmediato, del estudio que se lleva a cabo en esta tesis doctoral sobre la importancia de los conocimientos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de Maestro en la UJI.

3.1. CONTENIDOS CURRICULARES DEL BLOQUE 1, «NÚMEROS Y OPERACIONES»

Los contenidos de este bloque hacen referencia al proceso de construcción del concepto de número, al conocimiento, comprensión y uso de los números naturales, enteros, fraccionarios y decimales, a la comprensión de las operaciones y su uso bajo modelos muy variados y a la adquisición de un lenguaje propio de las matemáticas que posibilite una expresión numérica de objetos, situaciones y acciones, observables y cuantificables.

3.1.1. CONTENIDOS DEL BLOQUE 1 EN EL PRIMER CICLO DE PRIMARIA

A continuación mostramos la Tabla 3.1. correspondiente a los contenidos curriculares del bloque 1, «Números y operaciones», en el Primer ciclo de Primaria, en los decretos 20/1.992 y 111/2.007.

Tabla 3.1. Contenidos curriculares del bloque 1 en el Primer ciclo de Primaria

PRIMER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Números	– Números naturales hasta de tres dígitos: lectura, escritura y ordenación según distintos criterios (mayor/menor que, igual, anterior, posterior). – Expresión de cantidades en situaciones y contextos familiares. – Comparación de números en contextos cotidianos. Utilización de los números ordinales. – Sistema de Numeración Decimal: unidades, decenas, centenas.	– Los números naturales menores que mil: lectura, escritura y ordenación según distintos criterios (mayor/menor que, igual, anterior, posterior). – Expresión de cantidades en situaciones de la vida cotidiana. – Orden numérico. Utilización de los números ordinales. Comparación de números en contextos familiares. – El Sistema de Numeración Decimal: valor posicional de las cifras.
Operaciones	– Adición y sustracción de números naturales. Relaciones entre estas operaciones. – Comprobación de la propiedad conmutativa de la adición. – Expresión oral de las operaciones y el cálculo.	– Operaciones con números naturales: adición y sustracción. – Comprobación de la propiedad conmutativa de la suma. – La multiplicación como suma de sumandos iguales y viceversa. Las tablas de multiplicar. – Expresión oral de las operaciones y el cálculo.

Estrategias de cálculo	– Series, patrones y pautas numéricas (pares, impares,...) – Composiciones y descomposiciones aditivas de números menores que 100. – Algoritmos no necesariamente estándar de la adición y la sustracción. – Desarrollo de estrategias de cálculo mental adecuado a los niveles de numeración, operatoria y estrategias propios del ciclo. – Cálculo aproximado. Estimación y redondeo. – Utilización de la calculadora; reglas de uso; cálculo y estimación. – Resolución de problemas que contextualicen los aprendizajes tanto de los números como de las operaciones, explicando oralmente las fases de resolución.	– Escritura de series ascendentes y descendentes de cadencia 3, 4, 5, 10 ó 100 a partir de un número dado, y de cadencia 25 ó 50 a partir de un número acabado en 0 o en 5. – Continuación, oral o mental, de series de cadencia 1, 2 y 10 a partir de un número dado, y de cadencia 5 a partir de un número acabado en 0 o en 5, tanto de forma ascendente como descendente. – Descomposiciones aditivas de números menores que 1.000, atendiendo al valor posicional de sus cifras. – Identificación de números pares e impares en una lista de números menores que 1.000. – Construcción y memorización de las tablas de multiplicar. – Desarrollo de estrategias de cálculo mental para la búsqueda del complemento de un número a la decena inmediatamente superior, para el cálculo de dobles y mitades de cantidades y para resolver problemas de sumas y restas. – Cálculo aproximado. Estimación y redondeo del resultado de un cálculo hasta la decena más cercana escogiendo entre varias soluciones y valorando las respuestas razonables. – Resolución de problemas que impliquen la realización de cálculos, explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.

En la comparación de los contenidos del bloque 1 de los decretos en el Primer ciclo de Primaria observamos las siguientes diferencias:

- Operaciones:
  - En el Decreto 111/2.007, aparece la multiplicación y las tablas de multiplicar, que como se indica en la fila siguiente, se han de construir y memorizar, contenidos que en el Decreto 20/1.992 aparecen en el Segundo ciclo (ver Tabla 3.2.), lógicamente en Tercer curso de Primaria, por lo que pensamos que en el decreto vigente se hace el adelantamiento de un curso para dichos contenidos.
- Estrategias de cálculo:
  - Las series numéricas, así como lo relativo al cálculo mental y al cálculo aproximado, en el decreto de la LOE aparece concretizado totalmente.
  - Las composiciones y descomposiciones aditivas de números que llegan hasta el 100 en el decreto de 1.992, se amplían hasta el 1.000 en el de 2.007.

3.1.2. CONTENIDOS DEL BLOQUE 1 EN EL SEGUNDO CICLO DE PRIMARIA

En la Tabla 3.2. aparecen los contenidos curriculares del bloque 1, Números y operaciones» y operaciones, en el Segundo ciclo de Primaria, en los decretos de la Comunitat Valenciana correspondientes a la LOGSE y a la LOE.

Tabla 3.2. Contenidos curriculares del bloque 1 en el Segundo ciclo de Primaria

SEGUNDO CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Números	– Números naturales de tres, cuatro y cinco dígitos: lectura y escritura. – Sistema de Numeración Decimal: unidades de millar, decenas de millar,... – Ordenación de números naturales. – Fracciones y decimales sencillos. – Concepto de fracción y número decimal como relación entre las partes y el todo.	– Los números naturales menores que el millón: lectura y escritura. – El Sistema de Numeración Decimal: valor posicional de las cifras. – Orden entre los números. Notación. – Redondeo de números naturales a las decenas y centenas. – Concepto de fracción como relación entre las partes y el todo. – Fracciones propias. Representación gráfica. – Fracciones equivalentes a una fracción propia. – Ordenación de fracciones sencillas. – Iniciación al número decimal: décimas y centésimas. – Escritura decimal y fraccionaria de un número no natural.
Operaciones	– Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división. – La multiplicación como suma de sumandos iguales y viceversa. Las tablas de multiplicar. – La división en contextos familiares para repartir y para agrupar. – Relación entre multiplicación y división. – Utilización de los números y el cálculo numérico para resolver problemas en situaciones reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos.	– Operaciones con números naturales: adición, sustracción, multiplicación y división entera por un número de dos cifras. – Identificación y uso de los términos propios de la multiplicación y de la división. – Utilización en situaciones familiares de la multiplicación para efectuar recuentos, en disposiciones rectangulares y en problemas combinatorios en los que interviene la ley del producto. – Utilización en contextos reales de la división para repartir y para agrupar. – Uso de la relación entre los términos de la división como prueba de la operación en casos sencillos. – Resolución de problemas en situaciones reales, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos.

Estrategias de cálculo	– Series, patrones y pautas numéricas – Composición y descomposición de forma aditiva de números menores que un millón y de forma multiplicativa hasta el 100. – Multiplicar por 10, 100… – Algoritmos estándar de suma y resta, y no necesariamente estándar de multiplicación y división, en contextos de resolución de problemas. – Resolución de problemas sencillos cuyos resultados sean fracciones o decimales. – Cálculo mental adecuado a los niveles propios del ciclo. – Estimación de resultados de cálculo, valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable. – La calculadora: reglas de uso; verificación de resultados de operaciones con lápiz y papel y de estimaciones.	– Construcción de series numéricas de cadencias 2, 10, 100 a partir de cualquier número y de cadencias 5, 25 y 50 a partir de múltiplos de 5, 25 y 50 respectivamente, tanto ascendentes como descendentes. – Descomposición, de forma aditiva y de forma aditivo-multiplicativa, de números menores que un millón, atendiendo al valor posicional de sus cifras. – Utilización de los algoritmos estándar, en contextos de resolución de problemas, de suma, resta, multiplicación y división por una cifra. – Elaboración y uso de estrategias de cálculo mental. – Estimación de resultados, asegurándose, mediante algún tipo de estrategia, de que el resultado obtenido es razonable. – Utilización de la calculadora en la resolución de problemas de la vida cotidiana cuando, a juicio de la maestra o del maestro, lo aconseje la complejidad de los cálculos.

Al cotejar los contenidos de «Números y operaciones» y operaciones del Segundo ciclo de ambos decretos podemos decir:

- Números:
    - En el decreto en vigor leemos «Iniciación al número decimal: décimas y centésimas», que son los órdenes de unidad que la Resolución de 12 de septiembre de 1.992 recomienda para el Tercer ciclo (ver Tabla 3.3.).
- Estrategias de cálculo:
    - Las series numéricas en el Decreto 111/2.007 aparecen especificadas.
    - Con respecto a la composición y descomposición de números el decreto de la LOGSE la restringe hasta el 100 para la forma aditivo-multiplicativa.
    - De los algoritmos de las operaciones con números naturales, vemos que en el decreto vigente se tienen que trabajar los estándares en todas ellas, a diferencia del otro decreto y, por tanto, la falta de explicitación en este sentido en el Primer ciclo del decreto del año 2.007, hace pensar que en este ciclo inicial era el mismo nivel de exigencia en ambos decretos.

3.1.3. CONTENIDOS DEL BLOQUE 1 EN EL TERCER CICLO DE PRIMARIA

Los contenidos curriculares del bloque 1, «Números y operaciones» y operaciones, en el Tercer ciclo de Primaria, en los decretos de 1.992 y de 2.007 de la Comunitat Valenciana, son los que muestra la Tabla 3.3.

Tabla 3.3. Contenidos curriculares del bloque 1 en el Tercer ciclo de Primaria

TERCER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Números	– Los números naturales a partir del millón: lectura y escritura. – La relación parte-todo: las fracciones. – Números decimales: décimas y centésimas. – Relación entre fracciones y números decimales. – Números con signo en contextos. – Sistema de numeración romano. – Sistema de Numeración Decimal: unidades de millón, decenas de millón,... – Divisibilidad: múltiplos, divisores, números primos y números compuestos. – Criterios de divisibilidad. – Ordenación de números naturales, fracciones y decimales.	– Uso en situaciones reales del nombre y grafía de los números de más de seis cifras. – Sistema de Numeración Decimal: unidades, decenas, centenas, etc. – Redondeo de números naturales a las decenas, centenas y millares. – Iniciación a la divisibilidad: múltiplos, divisores, números primos y números compuestos. – Criterios de divisibilidad por 2, 3, 5, 9 y 10. – Las fracciones: fracciones equivalentes; reducción a común denominador. – Ordenación de conjuntos de números de distinto tipo. – Los números decimales: valor de posición. Uso en la vida cotidiana. – Redondeo de números decimales a la décima, centésima o milésima más cercana. – Relación entre fracción y número decimal. Aplicación a la ordenación de fracciones. – Números positivos y negativos. Utilización en contextos reales. – Sistemas de numeración en culturas anteriores e influencias en la actualidad. La numeración romana.
Operaciones	– Propiedades de las operaciones con números naturales y relaciones entre ellas. – Iniciación a la potenciación. Cuadrados y cubos. – Adición y sustracción de fracciones con el mismo denominador. Multiplicación de una fracción por un número. – Operaciones con números decimales. – Orden de las operaciones y usos del paréntesis. – Expresar de forma ordenada los datos y los procesos realizados en la resolución de problemas numéricos. – Tanto por ciento de una cantidad. – Relación entre fracciones, decimales y porcentajes. – Proporcionalidad directa.	– Propiedades de las operaciones y relaciones entre ellas utilizando números naturales. – Potencia como producto de factores iguales. Cuadrados y cubos. Potencias de base 10. – Adición y sustracción de fracciones con el mismo denominador. Producto de una fracción por un número. – Operaciones con números decimales. – Jerarquía de las operaciones y usos del paréntesis. – Explicación oral, con el lenguaje adecuado, del proceso seguido en la resolución de problemas numéricos. – Cálculo de porcentajes de una cantidad. – Expresión de partes utilizando porcentajes. Correspondencia entre fracciones sencillas, decimales y porcentajes. – Reconocimiento de proporcionalidad directa, o de su ausencia, en situaciones diversas. – Utilización de la regla de tres en situaciones de proporcionalidad directa: ley del doble, triple, mitad,…

Estrategias de cálculo	– Algoritmos estándar, en contextos de resolución de problemas, de suma, resta, multiplicación y división de números naturales. – Operaciones con números naturales, fracciones y decimales, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. – Composición y descomposición de números naturales y de números decimales atendiendo al valor posicional de sus cifras. – Calculo de tantos por ciento en situaciones cotidianas. – Estimación de resultados de cálculo, valoración de si una determinada respuesta numérica es o no razonable. – Resolución de problemas sencillos de su entorno utilizando estrategias de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito los procesos de resolución y los resultados obtenidos. – Utilización de la calculadora, las cuatro operaciones; reglas de uso; estimación y cálculo mental; resolución de problemas; obtención de resultados de cálculos.	– Automatización de los algoritmos de las operaciones y de la comprobación de los resultados mediante estrategias aritméticas. – Utilización de las cuatro operaciones con distintos tipos de números, en situaciones cotidianas y en contextos de resolución de problemas. – Descomposición de números naturales y de números decimales atendiendo al valor posicional de sus cifras. – Utilización de la tabla de multiplicar para identificar múltiplos y divisores. – Obtención de los primeros múltiplos de un número dado. – Obtención de todos los divisores de cualquier número menor que 100. – Calculo de tantos por ciento básicos en situaciones reales. – Estimación del resultado de un cálculo y valoración de respuestas numéricas razonables. – Resolución de problemas de la vida cotidiana utilizando estrategias de cálculo mental y relaciones entre los números, explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas. – Reglas de uso de la calculadora. – Verificación con la calculadora de los resultados de operaciones efectuadas con lápiz y papel.

Del examen de los dos decretos en los contenidos del bloque 1 del Tercer ciclo de Primaria extraemos los siguientes contrastes:

- Números:
    - Lo más destacado en este apartado es que en el decreto de la LOE, en los números decimales se llega, al menos, al conocimiento de las milésimas.

3.1.4. SÍNTESIS DE LA COMPARACIÓN DE LOS CONTENIDOS DE «NÚMEROS Y OPERACIONES»

Del análisis en los tres ciclos de Primaria deducimos que, en lo referente al bloque 1, «Números y operaciones» y operaciones, el Decreto 111/2.007 adelanta el trabajo de los siguientes contenidos a los ciclos:

- Primer ciclo:
    - La introducción de la multiplicación y las tablas de multiplicar.

  - La composición y descomposición aditivas en números entre cien y mil.

- Segundo ciclo:
  - Décimas y centésimas.
  - La composición y descomposición multiplicativa en números entre cien y un millón.
  - Los algoritmos estándar de la multiplicación y división.
- Tercer ciclo:
  - Las milésimas, que no aparecen en el Decreto 20/1.992.

3.2. CONTENIDOS CURRICULARES DEL BLOQUE 2, «LA MEDIDA: ESTIMACIÓN Y CÁLCULO DE MAGNITUDES»

Los contenidos del bloque 2, «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», buscan facilitar la comprensión de los mensajes en los que se cuantifican magnitudes y se informa sobre situaciones reales que las niñas y los niños deben llegar a interpretar correctamente. A partir del conocimiento de diferentes magnitudes se pasa a la realización de mediciones y a la utilización de un número progresivamente mayor de unidades para tratar de llegar a un conocimiento preciso de las unidades del SMD de uso corriente y del significado cuantitativo exacto en relación a la magnitud de que se trate.

3.2.1. CONTENIDOS DEL BLOQUE 2 EN EL PRIMER CICLO DE PRIMARIA

Exponemos en la Tabla 3.4. los contenidos curriculares del bloque 2, «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», correspondientes al Primer ciclo de Primaria, en los decretos 20/1.992 y 111/2.007.

Tabla 3.4. Contenidos curriculares del bloque 2 en el Primer ciclo de Primaria

PRIMER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Longitud, capacidad y peso	– Reconocimiento de longitudes, capacidades y masas en contextos funcionales. – Comparación directa de objetos según longitud, capacidad o peso. – Medición con unidades, instrumentos y estrategias no convencionales. – Utilización de unidades usuales e instrumentos convencionales para medir objetos y distancias del entorno. – Unidades de medida: metro, centímetro, litro, 1/2 litro, 1/4 litro, kilogramo y 1/2 kilogramo. – Comparación entre los múltiplos y submúltiplos de una misma unidad principal del Sistema Métrico Decimal. – Unidades de medida de uso local. – Destreza en la acción de medir. – Escalas, mapas, planos y maquetas: mediciones indirectas de longitudes en contextos; utilidad de los sistemas de referencia y representación espacial en actividades cotidianas. – Estimación de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades,...) en contextos familiares. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. – Resolución de problemas de medida explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	– Comparación de objetos según longitud, capacidad o peso, de manera directa (sin mediciones). – Unidades de medida: el metro, el centímetro, el litro y el kilogramo. – Comparación entre los múltiplos y submúltiplos de una misma unidad principal del Sistema Métrico Decimal. – Medición con instrumentos y estrategias no convencionales. – Utilización de unidades usuales e instrumentos convencionales para medir objetos y distancias del entorno. – Uso de las medidas propias y tradicionales de la Comunitat Valenciana. – Estimación de resultados de medidas (distancias, tamaños, pesos, capacidades,...) en contextos familiares. Explicación oral del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. – Resolución de problemas de medida explicando el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.
Medida del tiempo	– Unidades de medida del tiempo: año, mes, semana, día y hora. – Lectura del reloj convencional: horas enteras, las medias y los cuartos.	– Unidades de medida del tiempo: minuto, hora, día, semana, mes y año. – Lectura del reloj convencional: las horas enteras y las medias. – Selección y utilización de la unidad apropiada para determinar la duración de un intervalo de tiempo.
Sistema monetario	– Valor de las diferentes monedas y billetes, con la peseta/euro como unidad principal, y comparación entre ellos.	– Valor de las diferentes monedas y billetes, con el euro como unidad principal, y comparación entre ellos. – Manejo de precios de artículos cotidianos.

La lectura comparada de los contenidos de ambos decretos en el Primer ciclo de Primaria correspondientes al bloque 2, nos permite decir:

- Longitud, capacidad y peso:

- En las unidades de medida de las magnitudes capacidad y peso del Decreto 20/1.992, aparecen las relativas a ½ y ¼ del litro y del kilogramo, “para iniciar el uso de fracciones sencillas como partes de un todo conocido” (Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.795), que no están en el otro.
- En el decreto en vigor, aparece «Uso de las medidas propias y tradicionales de la Comunitat Valenciana», contenido que en el decreto de la LOGSE aparece como «Unidades de medida de uso local», situación que se repite en los otros ciclos y también para las magnitudes superficie y volumen (ver tablas 3.5. y 3.6.).
- Los contenidos de longitud, superficie y volumen correspondientes a los ciclos Primero, Segundo y Tercero, respectivamente, relativos a «Escalas, mapas, planos y maquetas» aparecen como exclusivos del Decreto 20/1.992 (ver tablas 3.5. y 3.6.).

• Medida del tiempo:
  - En este ciclo en el Decreto 111/2.007 no está la unidad cuarto de hora y, la unidad minuto en el decreto de la LOGSE aparece en el Segundo ciclo (ver tabla 3.5.).

• Sistema monetario:
  - Cuando el euro pasó a ser la unidad monetaria de uso en España, estaba todavía en vigor el Decreto 20/1.992, por lo que en este apartado de contenidos de cada ciclo para este decreto, utilizamos la doble referencia «Unidad principal: peseta/euro».

3.2.2. CONTENIDOS DEL BLOQUE 2 EN EL SEGUNDO CICLO DE PRIMARIA

La Tabla 3.5. presenta los contenidos curriculares del bloque 2, «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», en el Segundo ciclo de Primaria, en los decretos de la Comunitat Valenciana correspondientes a la LOGSE y a la LOE.

Tabla 3.5. Contenidos curriculares del bloque 2 en el Segundo ciclo de Primaria

SEGUNDO CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Longitud, capacidad, peso y superficie	– Reconocimiento de longitudes, superficies, capacidades y masas de forma contextualizada. – Unidades del SMD en contextos y tareas. Equivalencias sencillas. – Realización de mediciones efectivas y directas usando instrumentos y unidades de medida propios y convencionales en contextos adecuados, utilizando también las unidades de medida de uso local. – Elaboración y utilización de estrategias para medir. Elección de unidades e instrumentos apropiados para la expresión de una medida. – Comparación y ordenación de unidades y cantidades de una misma magnitud. – Destreza en la acción de medir. – Expresión en forma simple de una medida de longitud, capacidad o peso dada en forma compleja y viceversa. – Sumar y restar medidas expresadas en forma simple. – Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana. – Explicación oral y escrita del proceso seguido, de la estrategia utilizada en la medición y de los resultados numéricos, indicando las unidades utilizadas. – Escalas, mapas, planos y maquetas: mediciones indirectas de longitudes y superficies en contextos; utilidad de los sistemas de referencia y representación espacial en actividades cotidianas. – Resolución de problemas de medida explicando el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	– Unidades del Sistema Métrico Decimal y equivalencias. – Expresión en forma simple de una medida de longitud, capacidad o peso dada en forma compleja y viceversa. – Sumar y restar medidas de longitud, capacidad, peso y superficie dadas en forma simple. – Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales en contextos cotidianos, utilizando también las unidades de medida propias y tradicionales de la Comunitat Valenciana. – Elección de la unidad más adecuada para la expresión de una medida. – Comparación y ordenación de unidades y cantidades de una misma magnitud. – Elaboración y utilización de estrategias para medir. – Estimación de medidas de objetos de la vida cotidiana. – Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en la medición. – Interés por conocer y utilizar la medida y por expresar los resultados numéricos de las mediciones manifestando las unidades utilizadas y explicando oralmente y por escrito el proceso seguido.
Medida del tiempo	– Unidades de medida del tiempo: minutos y segundos. – Lectura horaria en relojes analógicos y digitales. – Equivalencias entre algunas unidades de tiempo en contextos.	– Lectura correcta en relojes analógicos y digitales. Utilización de medidas de tiempo (segundo, minuto, hora, día y año). – Equivalencias entre diferentes unidades de tiempo. – Expresión en minutos y segundos de una cantidad de tiempo dada en forma compleja. – Cálculo de la hora antes o después de un intervalo de tiempo dado.
Sistema monetario	– Unidad principal: peseta/euro. – Múltiplos de la peseta, múltiplos y submúltiplos del euro. – Equivalencias entre monedas y billetes.	– Unidad principal: el euro. – Múltiplos y submúltiplos de la unidad principal. – Equivalencias entre monedas y billetes.

Si cotejamos los dos decretos en el Segundo ciclo en «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», deducimos:

- Longitud, capacidad, peso y superficie:
    - La «Expresión en forma simple de una medida de longitud, capacidad o peso dada en forma compleja y viceversa» está relacionada con los contenidos del bloque anterior composición y descomposición de números y con los órdenes de unidad que se trabajan, para los que como hemos visto allí el decreto de la LOGSE marca unos niveles un poco más bajos, por lo que pensamos que ahora también en el Decreto 111/2.007 se pretenderá ir más allá en el cambio de expresiones de medidas de una forma a otra.
- Medida del tiempo:
    - Tanto en un decreto como en el otro las unidades de tiempo propias de este ciclo son el minuto y el segundo, pero en cambio en el decreto vigente tenemos el contenido «Expresión en minutos y segundos de una cantidad de tiempo dada en forma compleja», que corrobora lo dicho en el párrafo anterior.

3.2.3. CONTENIDOS DEL BLOQUE 2 EN EL TERCER CICLO DE PRIMARIA

Los contenidos curriculares del bloque 2, «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», en el Tercer ciclo de Primaria, en los decretos de 1.992 y de 2.007 de la Comunitat Valenciana, son los que aparecen la Tabla 3.6.

Tabla 3.6. Contenidos curriculares del bloque 2 en el Tercer ciclo de Primaria

TERCER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Longitud, capacidad, peso, superficie y volumen	– Reconocimiento de longitudes, superficies, volúmenes, capacidades y masas de forma contextualizada. – Unidades del SMD de uso corriente. Equivalencias y relaciones entre las distintas unidades. – Realización de mediciones efectivas y directas usando instrumentos y unidades de medida propios y convencionales en contextos adecuados, utilizando también las unidades de medida de uso local y su equivalencia con unidades convencionales. – Elaboración y utilización de estrategias para medir. Elección de unidades e instrumentos apropiados para la expresión de una medida. – Comparación y ordenación de unidades y cantidades de una misma magnitud. – Destreza en la acción de medir. – Expresión en forma simple de una medición dada en forma compleja y viceversa. – Sumar y restar medidas expresadas en forma simple dando el resultado en la unidad determinada de antemano. – Cálculo de longitudes y superficies de figuras planas sencillas. – Estimación de magnitudes en objetos y espacios conocidos. – Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones. – Escalas, mapas, planos y maquetas: mediciones indirectas de longitudes, superficies, e inicio al cálculo de volúmenes sencillos en contextos; utilidad de los sistemas de referencia y representación espacial en actividades cotidianas. – Resolución de problemas de medida explicando el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	– Unidades del Sistema Métrico Decimal. – Equivalencias entre las medidas de capacidad y volumen. – Expresión en forma simple de una medición dada en forma compleja y viceversa. – Ordenación de medidas de una misma magnitud. – Desarrollo de estrategias para medir figuras de manera exacta y aproximada. – Realización de mediciones usando instrumentos y unidades de medida convencionales. – Estimación de longitudes, capacidades, pesos, superficies y volúmenes de objetos y espacios conocidos; elección de la unidad y de los instrumentos más adecuados para medir y expresar una medida, teniendo en cuenta las unidades de medida propias y tradicionales de la Comunitat Valenciana y su equivalencia con unidades convencionales. – Explicación oral y escrita del proceso seguido y de la estrategia utilizada en mediciones y estimaciones. – Comparación de superficies de figuras planas por superposición, descomposición y medición. – Sumar y restar medidas de longitud, capacidad, peso, superficie y volumen en forma simple dando el resultado en la unidad determinada de antemano.
Medida del tiempo	– Unidades de medida del tiempo: segundos, décimas y centésimas. – Equivalencias entre unidades de tiempo en contextos. – Cálculos sencillos con medidas temporales.	– Unidades de medida del tiempo y sus relaciones. La precisión con los minutos y los segundos. – Equivalencias y transformaciones entre horas, minutos y segundos, en situaciones reales. – Cálculos sencillos con medidas temporales. – Cálculo de la hora antes o después de un intervalo de tiempo dado.
Sistema monetario	– Equivalencias entre las distintas monedas y billetes.	– Equivalencias entre las distintas monedas y billetes. – Conversión entre el euro, el dólar y la libra esterlina.
Medida de ángulos	– El sistema sexagesimal. – Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medir ángulos. – Cálculos sencillos con medidas angulares.	– El ángulo como medida de un giro o abertura. El sistema sexagesimal. Medida de ángulos y uso de instrumentos convencionales para medir ángulos. – Cálculos sencillos con medidas angulares.

Examinando los contenidos del bloque 2 en el Tercer ciclo de Primaria en uno y otro decreto podemos decir:

- Longitud, capacidad, peso, superficie y volumen:

- En el decreto de la LOE el contenido «Resolución de problemas de medida…» aparece especificado en el Primer ciclo pero no en los siguientes, en cambio encontramos referencia suya en el Tercer ciclo en «Contenidos comunes a todos los ciclos», en el segundo de ellos "Utilización de la medición y las medidas para resolver problemas, comprender y transmitir informaciones" (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.397), y en Criterios de evaluación "11. Resolver y formular distintas situaciones problemáticas en las que se utilicen unidades y equivalencias del Sistema Métrico Decimal…" (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.400) lo que evidencia que se trata de un simple olvido.

- Medida del tiempo:
  - En las unidades de medida sólo en el Decreto 20/1.992 aparecen las décimas y centésimas de segundo, siendo por tanto otra de las pocas ocasiones en que se va más allá en los contenidos en este decreto que en el otro.
- Sistema monetario:
  - En los contenidos vigentes en la Comunitat Valenciana encontramos «Conversión entre el euro, el dólar y la libra esterlina» que no figura en el decreto de la LOGSE, posiblemente debido a que en el año de su promulgación, 1.992, no era tan notoria la internacionalización y globalización de la sociedad.

3.2.4. SÍNTESIS DE LA COMPARACIÓN DE LOS CONTENIDOS DE «LA MEDIDA: ESTIMACIÓN Y CÁLCULO DE MAGNITUDES»

El análisis en ambos decretos del bloque «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», indica que en la etapa de Primaria hay una coincidencia muy grande en el nivel y cantidad de contenidos, con unas diferencias puntuales en:

- Primer ciclo:
    - Las unidades ½ y ¼ del litro y del kilogramo, y ¼ de hora sólo aparecen en el Decreto 20/1.992.
- Segundo ciclo:
    - Los cambios de expresiones de medidas en «Expresión en forma simple de una medida de longitud, capacidad o peso dada en forma compleja y viceversa» y en «Expresión en minutos y segundos de una cantidad de tiempo dada en forma compleja» en el Decreto 111/2.007 se pretenderá ir más allá por lo visto en los contenidos del bloque anterior.
- Tercer ciclo:
    - Las unidades de tiempo: décimas y centésimas de segundo, sólo aparecen en el decreto derogado.

Porque «Escalas, mapas, planos y maquetas: mediciones indirectas de longitudes, superficies, e inicio al cálculo de volúmenes sencillos en contextos; utilidad de los sistemas de referencia y representación espacial en actividades cotidianas», que está únicamente en el decreto de la LOGSE, probablemente queda compensado por los contenidos de «Geometría» «Descripción de posiciones y movimientos en contexto topográfico: planos y maquetas elementales de espacios conocidos» de Segundo ciclo y «Representación elemental del espacio: escalas y gráficas sencillas» de Tercer ciclo del decreto de la LOE (ver tablas 3.8. y 3.9.), que también están en el otro decreto.

3.3. CONTENIDOS CURRICULARES DEL BLOQUE 3, GEOMETRÍA

La geometría se considerará fundamentalmente en Primaria, como exploración del espacio. Los conceptos y procesos matemáticos que aparecen en este bloque se conciben como medios de organización del espacio.

Se presentan a estudio los cuerpos geométricos reconocibles en objetos de la vida cotidiana. Se avanza en el conocimiento de los elementos que los componen, en las relaciones elementales como paralelismo, perpendicularidad, relaciones numéricas en figuras sencillas y se entra en la adquisición de destrezas y habilidades para representar a su vez la realidad objeto de estudio.

3.3.1. CONTENIDOS DEL BLOQUE 3 EN EL PRIMER CICLO DE PRIMARIA

A continuación la Tabla 3.7. indica cuales son los contenidos curriculares del bloque 3, «Geometría», en el Primer ciclo de Primaria, en los decretos 20/1.992 y 111/2.007.

Tabla 3.7. Contenidos curriculares del bloque 3 en el Primer ciclo de Primaria

PRIMER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
La situación en el espacio	– Reconocimiento y exploración de espacios familiares: dentro de, fuera de, encima de, debajo de, a la derecha de, a la izquierda de, entre, etc. – Situación de objetos del entorno respecto de sí mismo: delante-detrás de mí, encima-debajo de mí, a mi derecha-izquierda. – Líneas: abiertas y cerradas; rectas y curvas. – Itinerarios: realización; descripción verbal; interpretación de croquis y elaboración. – Horizontalidad, paralelismo y simetría en el espacio.	– Localización elemental de objetos en el espacio: dentro de, fuera de, encima de, debajo de, a la derecha de, a la izquierda de, entre, etc. – Descripción de la posición de objetos del entorno respecto de sí mismo: delante-detrás de mí, encima-debajo de mí, a mi derecha-izquierda. – Líneas abiertas y cerradas; rectas y curvas. – Uso de vocabulario geométrico para describir itinerarios. – Interpretación y descripción verbal de croquis de itinerarios y elaboración de los mismos.
Formas planas y espaciales	– Identificación de los cuerpos geométricos en objetos familiares: cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros y esferas. – Distinción intuitiva entre superficie plana y superficie curva. – Identificación de figuras planas en objetos y ámbitos cotidianos: triángulos, cuadriláteros y círculos. – Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición. – Elementos geométricos básicos: cara, lado, vértice, interior, exterior, frontera. – Aproximación intuitiva a los conceptos de punto, recta y plano. – Descripción de las formas geométricas utilizando el vocabulario geométrico básico. Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales. – Construcción y dibujo de triángulos y cuadriláteros. – Visualización de objetos desde diferentes puntos de vista.	– Aproximación intuitiva a los conceptos de punto, recta y plano. – Distinción intuitiva entre superficie plana y superficie curva. – Identificación de figuras planas en objetos y ámbitos cotidianos: triángulos, cuadriláteros, círculos y cuadrados. – Elementos geométricos básicos: lado, vértice, interior, exterior, frontera. – Identificación de los cuerpos geométricos en objetos familiares: cubos, ortoedros, prismas, pirámides, cilindros y esferas. – Descripción de las formas geométricas utilizando el vocabulario geométrico básico. – Clasificación de figuras y cuerpos geométricos con criterios elementales. – Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición. – Construcción y dibujo a mano alzada de triángulos y cuadriláteros, en particular rectángulos.

Regularidades y simetrías	– Búsqueda de elementos de regularidad y simetría en formas y configuraciones geométricas a partir de la manipulación de objetos. – Resolución de problemas geométricos explicando oralmente el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	– Búsqueda de elementos de regularidad en figuras y cuerpos a partir de la manipulación de objetos. – Interpretación de mensajes que contengan informaciones sobre relaciones espaciales. – Resolución de problemas geométricos explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.

Al comparar los contenidos de los decretos correspondientes al bloque 3 en el Primer ciclo, extraemos:

- La situación en el espacio:
  - En este apartado el Decreto 20/1.992 propone el reconocimiento de las propiedades espaciales horizontalidad, paralelismo y simetría que no son recogidas explícitamente por los contenidos vigentes.
- Formas planas y espaciales:
  - El contenido «Visualización de objetos desde diferentes puntos de vista» que el decreto de la LOGSE, a través de la Resolución de 12 de septiembre de 1.992, lo indica para todos los ciclos (ver tablas 3.8. y 3.9.), no aparece en ninguno en la actualidad.

3.3.2. CONTENIDOS DEL BLOQUE 3 EN EL SEGUNDO CICLO DE PRIMARIA

En la Tabla 3.8. desplegamos los contenidos curriculares del bloque 3, «Geometría», en el Segundo ciclo de Primaria, en los decretos de la Comunitat Valenciana correspondientes a la LOGSE y a la LOE.

Tabla 3.8. Contenidos curriculares del bloque 3 en el Segundo ciclo de Primaria

SEGUNDO CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
La situación en el espacio	– Descripción de posiciones y movimientos en contexto topográfico: planos y maquetas elementales de espacios conocidos. – Descripción de posiciones y movimientos en contexto geométrico: interpretación de croquis y planos sencillos. – Líneas rectas y curvas. Rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas.	– Localización precisa de elementos en el espacio. – Representación elemental de espacios conocidos: planos y maquetas. Descripción de posiciones y movimientos en un contexto topográfico. – Localización de puntos, dado un sistema de referencia ortonormal, utilizando coordenadas cartesianas. – Interpretación de croquis y planos sencillos. – Líneas rectas y curvas. Rectas paralelas, perpendiculares y oblicuas. – Relación entre el concepto de ángulo y el de giro.

Formas planas y espaciales	– Identificación de cuerpos geométricos y figuras planas en la vida cotidiana. – Cuerpos geométricos: prismas, pirámides y cuerpos redondos. Elementos básicos de poliedros: caras, aristas y vértices. – Figuras poligonales. Elementos básicos: lado, vértice, base, diagonal, ángulo, ejes de simetría. – La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda y arco. – Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico. – Construcción de figuras geométricas planas y de cuerpos geométricos. Exploración de formas geométricas elementales. – Clasificación de cuerpos geométricos y figuras planas con criterios de elementales. – Visualización de objetos desde diferentes puntos de vista. – Relación entre el concepto de ángulo y el de giro. – Comparación y clasificación de ángulos: rectos, agudos, obtusos, llanos, mayores de 180º y completos. – Uso de instrumentos de dibujo.	– Figuras geométricas. Elementos básicos: lado, vértice, base, diagonal, ángulo, ejes de simetría. – La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda y arco. – Cuerpos geométricos: reconocimiento de prismas, pirámides y cuerpos redondos. Elementos básicos de poliedros: caras, vértices y aristas. – Clasificación de figuras y cuerpos geométricos utilizando diversos criterios. – Identificación de figuras planas y espaciales en la vida cotidiana. – Descripción de la forma de objetos utilizando el vocabulario geométrico básico. – Construcción de figuras geométricas planas a partir de datos y de cuerpos geométricos a partir de un desarrollo. Exploración de formas geométricas elementales. – Comparación y clasificación de ángulos: rectos, agudos, obtusos, llanos, mayores de 180º y completos.
Regularidades y simetrías	– Identificación de traslaciones, giros y simetrías en el entorno familiar y en la naturaleza. – Transformaciones métricas: traslaciones, giros y simetrías. – Resolución de problemas geométricos explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	– Transformaciones métricas: traslaciones, giros y simetrías. – Identificación de traslaciones, giros y simetrías en el entorno familiar y en la naturaleza.

Las diferencias apreciadas en la lectura de los contenidos de «Geometría» del Segundo ciclo en los decretos son:

- Regularidades y simetrías:
    - En el Decreto 111/2.007 el contenido «Resolución de problemas geométricos…» aparece en el Primer ciclo pero no lo hace en los siguientes, en cambio en los criterios de evaluación del Segundo ciclo encontramos “22. Resolver problemas relacionados con el entorno […] así como los contenidos básicos de geometría […]” (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.397) lo que evidencia que se trata de un simple olvido.

3.3.3. CONTENIDOS DEL BLOQUE 3 EN EL TERCER CICLO DE PRIMARIA

Enunciamos con la Tabla 3.9. los contenidos curriculares del bloque 3, «Geometría», en el Tercer ciclo de Primaria, en los decretos de 1.992 y de 2.007 de la Comunitat Valenciana.

Tabla 3.9. Contenidos curriculares del bloque 3 en el Tercer ciclo de Primaria

TERCER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOGSE)
La situación en el plano y en el espacio	– Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas cartesianas, puntos cardinales, distancias, ángulos, giros... – Representación elemental del espacio: escalas y gráficas sencillas. – Posiciones relativas de rectas y circunferencias.	– Posiciones relativas de rectas y circunferencias. – Ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice... – Sistema de coordenadas cartesianas, puntos cardinales. Descripción de posiciones y movimientos por medio de coordenadas, distancias, ángulos, giros... – La representación elemental del espacio: escalas y gráficas sencillas. – Utilización de instrumentos de dibujo y programas informáticos para la construcción y exploración de formas geométricas.
Formas planas y espaciales	– Ángulos en distintas posiciones: consecutivos, adyacentes, opuestos por el vértice... – Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación. – Clasificación de polígonos por el número de lados. – Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. – Relaciones entre los lados de un triángulo. – Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. Clasificación de los paralelepípedos. – La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. – Perímetro y área. – Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación. – Poliedros. Elementos básicos: caras, aristas y vértices. Tipos de poliedros. – Cuerpos redondos: cilindro, cono y esfera. – Visualización de objetos desde diferentes puntos de vista. – Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición, desarrollos y plegados. – Uso correcto de instrumentos de dibujo.	– Figuras planas: elementos, relaciones y clasificación. – Clasificación de triángulos atendiendo a sus lados y sus ángulos. – Relaciones entre lados y entre ángulos de un triángulo. – Clasificación de cuadriláteros atendiendo al paralelismo de sus lados. Clasificación de los paralelepípedos. – Concavidad y convexidad de figuras planas. – Identificación y denominación de polígonos atendiendo al número de lados. – Perímetro y área. – La circunferencia y el círculo. Elementos básicos: centro, radio, diámetro, cuerda, arco, tangente y sector circular. – Cuerpos geométricos: elementos, relaciones y clasificación. – Poliedros. Elementos básicos: vértices, caras y aristas. Tipos de poliedros. – Cuerpos redondos: cono, cilindro y esfera. – Formación de figuras planas y cuerpos geométricos a partir de otras por composición y descomposición.
Regularidades y simetrías	– Propiedades en el plano y en el espacio: simetría, movimientos (giros, traslaciones). – Introducción a la semejanza. – Resolución de problemas geométricos explicando oralmente y por escrito el significado de los datos, la situación planteada, el proceso seguido y las soluciones obtenidas.	– Reconocimiento de regularidades y, en particular, de las simetrías de tipo axial y de tipo especular. – Trazado de una figura plana simétrica de otra respecto de un eje. – Introducción a la semejanza: ampliaciones y reducciones. – Interés y perseverancia en la búsqueda de soluciones ante situaciones de incertidumbre relacionadas con la organización y utilización del espacio. Confianza en las propias posibilidades para utilizar las construcciones geométricas y los objetos y las relaciones espaciales para resolver problemas en situaciones reales. – Interés por la presentación clara y ordenada de los trabajos geométricos.

Examinados ambos decretos en los contenidos del bloque 3 del Tercer ciclo de Primaria concluimos:

- Formas planas y espaciales:

- El estudio de la «Concavidad y convexidad de figuras planas» sólo se propone en el decreto de la LOE.

- Regularidades y simetrías:
    - Los dos últimos contenidos del Decreto 111/2.007 son contenidos actitudinales relativos a la geometría, por lo que muy bien podrían estar en «Contenidos comunes a todos los bloques» de este ciclo, con lo cual se equipararía la situación al otro decreto que los agrupaba en el Bloque 6. «Actitudes ante las matemáticas».

3.3.4. SÍNTESIS DE LA COMPARACIÓN DE LOS CONTENIDOS DE GEOMETRÍA

Podemos concluir que las mínimas diferencias entre ambos decretos en lo relativo a «Geometría» se pueden reducir a dos:

- Primer ciclo:
    - El contenido «Visualización de objetos desde diferentes puntos de vista» correspondiente al Decreto 20/1.992 y que no aparece en la actualidad, aunque pensamos que se trata sólo de una falta de explicitación, que no de estudio, dada la importancia para la formación de los conceptos de geometría proyectiva y para la identificación de las formas planas y espaciales.
- Tercer ciclo:
    - El estudio de la «Concavidad y convexidad de figuras planas» que sólo se propone en el decreto de la LOE.

3.4. CONTENIDOS CURRICULARES DEL BLOQUE 4, TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD

Los contenidos de este bloque recogen distintos aspectos acerca del tratamiento matemático de la información a partir de formas sencillas en los primeros años de la etapa, avanzando hacia trabajos más complejos según se vayan desarrollando las capacidades de resolución numérica, determinadas destrezas que se contemplan en el bloque de geometría y sobre todo según las informaciones objeto de estudio sean significativas para los escolares.

En la etapa de Primaria, la estadística no se entiende tan sólo como presentación de técnicas de estadística descriptiva a nivel elemental. El tratamiento reune contenidos actitudinales básicamente para presentar datos de forma ordenada, gráfica, para descubrir que las matemáticas facilitan la resolución de problemas sencillos de la vida diaria. Igualmente el trabajo incidirá de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación, suscitará el interés por los temas y ayudará a valorar el beneficio que los conocimientos estadísticos proporcionan ante la toma de decisiones, normalmente ante cuestiones que estudian otras áreas.

Los contenidos de azar y probabilidad pretenden que mediante el juego se analicen, progresivamente con mayor detalle, los comportamientos de los fenómenos aleatorios y se cree un vocabulario que permita comunicar sencillas experiencias de azar y la comprensión de que el azar está regido por algunas leyes.

3.4.1. CONTENIDOS DEL BLOQUE 4 EN EL PRIMER CICLO DE PRIMARIA

Mediante la Tabla 3.10. decimos cuales son los contenidos curriculares del bloque 4, «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», en el Primer ciclo de Primaria, en los decretos 20/1.992 y 111/2.007.

Tabla 3.10. Contenidos curriculares del bloque 4 en el Primer ciclo de Primaria

PRIMER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Gráficos, tablas y parámetros estadísticos	– Recogida, registro y recuento de datos de experiencias sencillas referidas a toda la población (la clase, un grupo…). – Elaboración de cuestionarios para la obtención de datos. – Ordenación de datos usando tablas de frecuencias absolutas.	– Descripción verbal, obtención de información cualitativa e interpretación de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos cercanos. – Utilización de técnicas elementales para la recogida y

	– Representación e interpretación de gráficas: pictogramas, tablas de doble entrada. – Análisis de datos de estudios sencillos elaborados por los alumnos sobre temas apropiados.	ordenación de datos en contextos familiares y cercanos.
Carácter aleatorio de algunas experiencias	– Situaciones de azar sencillas. Distintos métodos de sorteos. – Realización de recuentos. – Obtención y presentación de datos obtenidos en experiencias: juegos, tiempo atmosférico, etc. – Vocabulario asociado al azar: posible, imposible, probable… – Asignación cualitativa de probabilidad: más o menos probable. – Experiencias sencillas que permitan un inicio a situaciones combinatorias en contextos de juego, situaciones cotidianas (combinaciones al vestirse, al sentarse en equipo, etc.).	– Experiencias cuyo resultado depende de la suerte. – Utilización en el lenguaje habitual, de expresiones relacionadas con la probabilidad.

Cotejados los dos decretos en los contenidos del bloque 4 del Primer ciclo manifestamos:

- Gráficos, tablas y parámetros estadísticos:
  - En este apartado en el Decreto 20/1.992 encontramos la representación gráfica mediante pictogramas que el Decreto 111/2.007 propone en el Segundo ciclo (ver tabla 3.11.).
  - Situación análoga encontramos con las tablas de frecuencias absolutas.
- Carácter aleatorio de algunas experiencias:
  - La «Asignación de probabilidad» sólo se nombra en el decreto ya derogado.

3.4.2. CONTENIDOS DEL BLOQUE 4 EN EL SEGUNDO CICLO DE PRIMARIA

Por medio de la Tabla 3.11. expresamos los contenidos curriculares del bloque 4, «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», en el Segundo ciclo de Primaria, en los decretos de la Comunitat Valenciana correspondientes a la LOGSE y a la LOE.

Tabla 3.11. Contenidos curriculares del bloque 4 en el Segundo ciclo de Primaria

SEGUNDO CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOE)
Gráficos, tablas y parámetros estadísticos	– Recogida, registro y recuento de datos de variables cualitativas y cuantitativas en contextos próximos utilizando técnicas elementales. – Representaciones gráficas: diagramas de barras y polígonos de frecuencias absolutas. – Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. – Iniciación a la media aritmética.	– Recogida y registro de datos sobre objetos, fenómenos y situaciones familiares utilizando técnicas elementales de encuesta, observación y medición. – Lectura, interpretación y elaboración de tablas de doble entrada de uso habitual en la vida cotidiana. – Construcción de tablas de frecuencias absolutas. – Interpretación y descripción verbal de elementos significativos de gráficos sencillos relativos a fenómenos familiares. – Realización de gráficas sencillas: pictogramas, diagramas de barras. – Disposición a la elaboración y presentación de gráficos y tablas de forma ordenada y clara.
Carácter aleatorio de algunas experiencias	– Experimentos aleatorios. Sucesos equiprobables o no. – Utilización de diagramas de árbol para la representación de recuentos. Técnicas de recuento sistemático. – Probabilidad estadística: por repetición sucesiva de un experimento. – Experiencias sencillas que permitan un inicio a situaciones combinatorias en contextos de juego, situaciones cotidianas (combinaciones al vestirse, al sentarse en equipo, etc.).	– Valoración de los resultados de experiencias en las que interviene la suerte, para apreciar que hay sucesos más o menos probables y la imposibilidad de predecir un resultado concreto. – Introducción al lenguaje del azar.

La comparación de ambos decretos correspondiente a los contenidos de «Tratamiento de la información, azar y probabilidad» del Segundo ciclo permite señalar:

- Gráficos, tablas y parámetros estadísticos:
    - El tipo de variables estadísticas estudiadas en el Decreto 20/1.992 son las que el otro decreto explicita en el Tercer ciclo (ver tabla 3.12.).
    - Sólo en el decreto del siglo pasado se realiza ya una iniciación a las medidas de centralización a través de la media aritmética.
    - El último de los contenidos de este apartado del Decreto 111/2.007 es un contenido actitudinal, que muy bien podrían estar en «Contenidos comunes a todos los bloques» de este ciclo, con lo

cual se equipararía la situación al otro decreto que los agrupaba en el Bloque 6. «Actitudes ante las matemáticas».

- Carácter aleatorio de algunas experiencias:
  - En el decreto de la LOGSE se estudia sucesos simples equiprobables y no equiprobables, que no podemos averiguar en qué ciclo se estudian en el decreto de la LOE.
  - La asignación de probabilidad del decreto vigente se corresponde con la que se estudia en el ciclo anterior en el decreto derogado (ver tabla 3.10.).

3.4.3. CONTENIDOS DEL BLOQUE 4 EN EL TERCER CICLO DE PRIMARIA

Los contenidos curriculares del bloque 4, «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», en el Tercer ciclo de Primaria, en los decretos de 1.992 y de 2.007 de la Comunitat Valenciana, son los que presenta la Tabla 3.12.

Tabla 3.12. Contenidos curriculares del bloque 4 en el Tercer ciclo de Primaria

TERCER CICLO	Decreto 20/1.992 (LOGSE)	Decreto 111/2.007 (LOGSE)
Gráficos, tablas y parámetros estadísticos	– Recogida, registro y recuento de datos de variables discretas y continuas en contextos familiares utilizando técnicas elementales. – Elaboración de tablas de frecuencias relativas. – Representación e interpretación de gráficas sencillas: diagramas de sectores. – Iniciación intuitiva a las medidas de centralización en situaciones familiares: media aritmética, moda y rango. – Valoración crítica de informaciones estadísticas.	– Recogida y clasificación de datos cualitativos y cuantitativos. – Construcción de tablas de frecuencias absolutas y relativas. – Iniciación intuitiva a las medidas de centralización: la media aritmética, la moda y el rango. Aplicación a situaciones familiares. – Realización e interpretación de gráficos sencillos: diagramas de barras, poligonales y sectoriales. – Análisis crítico de las informaciones que se presentan mediante gráficos estadísticos.
Carácter aleatorio de algunas experiencias	– Experimentos aleatorios. Sucesos equiprobables o no. – Utilización de diagramas de árbol para la representación de recuentos. Técnicas de recuento sistemático. – Asignación de probabilidad a priori por recuento de casos favorables y posibles.	– Los experimentos cuyos resultados dependen de la suerte: experimentos aleatorios. – Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad de un suceso en experimentos realizados por el alumnado.

	– Expresión porcentual de probabilidades. – Relación entre probabilidad estadística y a priori. – Experiencias sencillas que permitan un inicio a situaciones combinatorias en contextos de juego, situaciones cotidianas (combinaciones al vestirse, al sentarse en equipo, etc.).	

Contrastados los contenidos del bloque 4 del Tercer ciclo de Primaria, deducimos

- Gráficos, tablas y parámetros estadísticos:
  - Las variables estadísticas discretas y continuas son nombradas explícitamente sólo en el Decreto 20/1.992.
  - Las representaciones gráficas mediante diagramas de sectores son vistas en ambos decretos y, además aquí, en el Decreto 111/2.007 se estudian las representaciones gráficas del Segundo ciclo del decreto de la LOGSE (ver tabla 3.11.).
- Carácter aleatorio de algunas experiencias:
  - En los contenidos vigentes, en este ciclo se realiza la «Iniciación intuitiva al cálculo de la probabilidad…», que en el decreto derogado ya empezó en los ciclos anteriores llegando además, en éste, a la expresión porcentual, lo que parece no ve el decreto de la LOE.
  - En los contenidos de este apartado en el Decreto 20/1.992, en todos los ciclos, encontramos «Experiencias sencillas que permitan un inicio a situaciones combinatorias…» que por la explicitación de contenidos del decreto en vigor permite pensar que no son estudiados en la actualidad en Primaria.

Aunque en ninguno de ambos decretos figura referencia a la resolución de problemas en «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», hemos de recordar que el decreto de la LOGSE tenía un bloque para tales contenidos y en el caso del decreto en vigor, encontramos en el Primer ciclo, en Criterios de evaluación: "18. Formular y resolver problemas sencillos en los que intervenga la lectura de gráficos" (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.393), en el Segundo ciclo, también en Criterios de evaluación: "22. Resolver problemas relacionados con el entorno

[…] así como los contenidos básicos de geometría o tratamiento de la información […]" (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.397) y en el Tercer ciclo, en Contenidos comunes a todos los ciclos, el segundo de ellos "Utilización de la medición y las medidas para resolver problemas, comprender y transmitir informaciones" (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.397), por lo que podemos concluir que sí se trabaja la resolución de problemas en este bloque en el decreto correspondiente a la LOE.

3.4.4. SÍNTESIS DE LA COMPARACIÓN DE LOS CONTENIDOS DE TRATAMIENTO DE LA INFORMACIÓN, AZAR Y PROBABILIDAD

El análisis en ambos textos legales de los contenidos en Primaria de «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», revela que el Decreto 111/2.007 retrasa el trabajo de los siguientes contenidos a los ciclos:

- Segundo ciclo:
    - Las representaciones gráficas mediante pictogramas.
    - Las tablas de frecuencias absolutas.
    - La asignación de probabilidad.
- Tercer ciclo:
    - Variables estadísticas cualitativas y cuantitativas, mientras que las variables discretas y continuas son nombradas explícitamente sólo en el Decreto 20/1.992.
    - Las representaciones gráficas mediante polígonos de frecuencias absolutas.
    - La medida de centralización media aritmética.

La explicitación de contenidos del decreto en vigor permite pensar que no son estudiados en la actualidad en Primaria «Expresión porcentual de probabilidades» y «Experiencias sencillas que permitan un inicio a situaciones combinatorias…».

3.5. CÓMO SE APRENDEN LOS CONTENIDOS CURRICULARES DE MATEMÁTICAS DE EDUCACIÓN PRIMÁRIA

Pasamos a ver ahora las concepciones psicológicas, las teorías, sobre cómo se aprenden los anteriores contenidos, que hemos podido deducir en ambos textos legales. Siguiendo un orden cronológico empezaremos por las correspondientes al Decreto 20/1.992 y acabaremos con las del Decreto 111/2.007.

3.5.1. CÓMO SE APRENDEN LOS CONTENIDOS DE MATEMÁTICAS DE PRIMÁRIA SEGÚN EL DECRETO 20/1.992

Como explicamos en el capítulo anterior en el punto 2.5.2. El cognitivismo, la oposición al conductismo surge de Brownell (1.935), que argumentaba que la instrucción matemática necesita apoyarse en la comprensión de los conceptos básicos matemáticos, y de la aparición de las teorías psicológicas como la de la *Gestalt* o la de Piaget, que ponían de relieve la existencia de estructuras psicológicas de conocimiento, que vinieron a reforzar la importancia de la «comprensión», apoyada en la construcción de dichas estructuras, por encima del adiestramiento algorítmico que caracterizaba la enseñanza tradicional. Esta característica del aprendizaje, contraria a los presupuestos del asociacionismo y el mecanicismo, la encontramos reiteradamente en el decreto de 1.992 y en la Resolución de 12 de septiembre del mismo año (que lo complementa), como vamos a mostrar con algunos ejemplos.

El bloque 1. «Números» (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.495) comienza exponiendo que los contenidos hacen referencia al conocimiento y comprensión de los números naturales, enteros, fraccionarios y decimales, que han de ser usados en diferentes contextos, operando con ellos, sabiendo que es contenido previo y prioritario la comprensión de los procesos desarrollados y del significado de los resultados, a la destreza de cálculo y la automatización operatoria (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.495)

La comprensión y uso de las operaciones aritméticas es objetivo prioritario al conocimiento de los algoritmos estándar (Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.797), de los que añade que sería necesario eliminar la arbitrariedad de los procesos de aprendizaje y enseñanza considerando diferentes aproximaciones que resuelvan las situaciones y que queden en el campo de lo comprensible.

Referente a «La medida», un objetivo prioritario de este bloque es facilitar a lo largo de toda la etapa un proceso de comprensión de las expresiones y de los mensajes percibidos por los alumnos en los que se cuantifican magnitudes e informan, avisan, prohíben, etc., sobre situaciones reales que debemos llegar a interpretar correctamente (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.497).

En «Geometría», bloque 3, se pretende a través del uso de materiales y de la actividad personal del alumno la adquisición de conceptos que permita progresivamente comunicar y comprender posiciones, trayectos, tamaños o formas que están a nuestro alrededor (Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.797).

En la etapa de Primaria, el trabajo en Estadística incidirá de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación y los contenidos de Azar y Probabilidad pretenden que se analicen los comportamientos de los fenómenos aleatorios, que se comuniquen sencillas experiencias de azar y que se comprenda que el azar está regido por algunas leyes (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.498).

Visto ya que el enfoque psicológico propuesto es afín a las teorías de aprendizaje cognitivas, pasamos a justificar que se enmarca dentro del constructivismo.

El apartado I. Introducción del texto correspondiente a las Matemáticas en el Decreto 20/1.992 termina con un párrafo en el que puntualiza que el sentido que debe tener el área de Matemáticas en la etapa

Educación Primaria no es que los niños tengan acceso lo más pronto posible a unos conocimientos «acabados» de una disciplina formal, sino que lleguen a ellos "a lo largo de un proceso de construcción progresiva de los conceptos y herramientas matemáticas" (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.493), objetivo que recuerda en distintos bloques de contenidos. Así podemos leer: en el bloque 1. «Números y operaciones» se procede a la construcción del concepto de número (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.495); hay que verificar que los niños van construyendo los conceptos de longitud, capacidad, masa, superficie, volumen, etc., en el bloque de «Medida» (Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.798); la representación mental del espacio irá construyéndose a partir de referentes tanto topológicos como proyectivos y euclídeos, en los contenidos del de «Geometría» (Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.795); etc.

La Resolución de 12 de septiembre de 1.992, que da orientaciones metodológicas y para la evaluación, así como orientaciones para la secuenciación de contenidos por ciclos, en uno de sus últimos párrafos dice que presentando las matemáticas en Primaria globalizadas, contextualizadas y que relacionen de forma natural distintas áreas del currículo, partiendo de lo que los estudiantes conocen, favorecerá la construcción de conocimientos (DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.798).

Podemos entrever por tanto, la influencia de la teoría de Piaget, seguramente la más influyente del desarrollo del constructivismo (Confrey y Kazak, 2.006), como cuando dice en el Decreto 20/1.992 que la actividad matemática en los primeros cursos parta de la observación, manipulación y experimentación con los objetos o con situaciones concretas, familiares y variadas, y que progresivamente los niños y niñas llegarán a ser capaces de representar mediante símbolos, hechos y relaciones que cuantifican y/o explican la realidad, en un proceso continuo que va de lo concreto-intuitivo a lo abstracto-formal (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.492).

Los referentes de toda la propuesta de trabajo en el área de Matemáticas y de la secuenciación de contenidos, según informa la Resolución ya mencionada son:

- presentar los contenidos con carácter cíclico,
- favorecer aprendizajes significativos y funcionales,
- hacer atractivo el trabajo en clase y
- adecuar en todo momento la capacidad de quien aprende a las dificultades de los conceptos implicados

Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.796

Es decir, como criterio general realizar un tratamiento en espiral, cíclico, no lineal de la propuesta de contenidos, lo que supone favorecer unas primeras aproximaciones, un primer contacto, y posteriormente volver de nuevo a los mismos contenidos, aportando más información, reflexionando tras la intuición o el descubrimiento anterior, hasta alcanzar un nivel más formal que será posible más tarde. Se reconoce claramente la consideración de la teoría de Bruner sobre el currículo en espiral.

Aunque la formación que reciban los alumnos permitirá consolidar en los cursos siguientes de la enseñanza obligatoria los conceptos matemáticos con mayor nivel de profundidad, puntualiza el Decreto 20/1.992: “es importante que los niños y las niñas de Primaria encuentren sentido a lo que hacen, en el momento en que lo hacen” (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p.1.492), que ratifica sin dejar lugar a dudas en el apartado III. Contenidos, en la finalización de su Introducción: “los contenidos de las matemáticas en Primaria han de contemplar todo aquello que sean capaces de aprender significativamente los estudiantes” (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p.1.494). Es evidente otro de los referentes, Ausubel y su teoría del aprendizaje significativo.

La importancia de analizar y reflexionar sobre los procesos, su presencia constante en todos los demás bloques de contenido, es lo que hizo que en el decreto de la LOGSE apareciera un bloque de resolución de problemas como bloque procedimental que marca el eje vertebrador del trabajo en matemáticas, contextualizando y dando sentido desde el primer momento a los aprendizajes que los estudiantes realizan, resolviendo situaciones y problemas para los que se precisa aplicar destrezas numéricas, geométricas, estadísticas, métricas, etc. y aprendiendo a resolver problemas. O sea, la resolución de problemas además de un contenido se considera también metodología de aprendizaje (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.499).

Vygotsky concede una importancia especial al lenguaje en el aprendizaje y así es considerado en los textos legales de esta Comunitat que desarrollaron la LOGSE, por ejemplo cuando en la Resolución se recomendaba la verbalización de muchas actividades matemáticas, tratando de mejorar la competencia lingüística en relación con un vocabulario y unos conceptos que progresivamente se irán adquiriendo (Resolución de 12/9/1.992, DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, p. 11.795) y cuando en el artículo tercero del Decreto, que establece los objetivos que los estudiantes deberán alcanzar a lo largo de la Educación Primaria, en el b) menciona comunicarse a través de medios de expresión y entre ellos especifica la expresión matemática. También en el mismo artículo, en el objetivo d) podemos encontrar una referencia a los conceptos vygotskyanos de «nivel real de desarrollo» y «nivel de desarrollo potencial», que delimitan la «Zona de Desarrollo Próximo», cuando dice:

> d) Identificar y plantear interrogantes y problemas a partir de la experiencia diaria, utilizando tanto los conocimientos y los recursos materiales disponibles [nivel real] como la colaboración de otras personas [nivel potencial] para resolverlos de forma creativa.
>
> Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.433

No se encuentran referencias a la teoría de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de Dienes ni tampoco al Modelo de Van Hiele, tanto en el Decreto 20/1.992 como en la Resolución de 12 de septiembre de 1.992 que lo complementa.

3.5.2. CÓMO SE APRENDEN LOS CONTENIDOS DE MATEMÁTICAS DE PRIMÁRIA SEGÚN EL DECRETO 111/2.007

Veamos las concepciones psicológicas correspondientes al Decreto 111/2.007 sobre el aprendizaje de los contenidos matemáticos de Educación Primaria por él establecidos.

Relativas al cognitivismo encontramos las siguientes. En el bloque 1, «Números y operaciones (Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.387): comprender la estructura del sistema de numeración decimal; la comprensión de los procesos desarrollados y el significado de los resultados es contenido previo y prioritario a la destreza de cálculo -muy similar a la enunciada en el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.495) y utilizada por nosotros-; lograr un equilibrio entre comprensión conceptual y competencia en el cálculo.

Los contenidos del bloque 2, «La medida: estimación y cálculo de magnitudes», "buscan facilitar la comprensión de los mensajes en los que se cuantifican magnitudes y se informa sobre situaciones reales que las niñas y los niños deben llegar a interpretar correctamente" (Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.387). Análoga a la del bloque homónimo del decreto de la LOGSE (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.497), que también hemos indicado más arriba.

Respecto al trabajo de los contenidos del bloque 4, «Tratamiento de la información, azar y probabilidad», dice que "ha de incidir de forma significativa en la comprensión de las informaciones de los medios de comunicación" (Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.388), idéntica a la señalada en el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.498).

Referencias todas ellas al respecto de la «comprensión», que son recogidas en los Objetivos del área de Matemáticas para la etapa de Educación Primaria del decreto vigente, en los objetivos números 1 y 2 (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.390).

Justificado que el enfoque psicológico propuesto está vinculado a las teorías de aprendizaje cognitivas, pasamos a argumentar que se posiciona en el constructivismo.

Testimonios de la teoría de Piaget aparecen cuando dice el decreto de la época LOE que el sentido de las matemáticas en la Educación Primaria es eminentemente empírico (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.387) o cuando dice del aprendizaje de la «Geometría», bloque 3, que requiere pensar y hacer, y debe ofrecer continuas oportunidades a las niñas y los niños para clasificar, construir, dibujar, modelizar y medir, desarrollando la capacidad para visualizar relaciones geométricas. Y añade

> asignando un papel relevante a la parte manipulativa a través del uso de materiales (geoplanos y mecanos, tramas de puntos, libros de espejos, material para formar poliedros, etc.) y de la actividad personal (realizando plegados, construcciones, etc.) para llegar al concepto a través de modelos reales
>
> Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.388

«Papel relevante» que encontramos también en el decreto derogado (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.497).

Alusión a la teoría de Bruner del currículo en espiral se presenta en el decreto vigente (DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.387), cuando indica que la enseñanza de las matemáticas atenderá a la configuración cíclica de los contenidos, e indicación a la teoría de Ausubel del aprendizaje significativo cuando apunta, en la misma página, que las niñas y los niños deben aprender matemáticas a partir de las experiencias y los conocimientos previos.

Asimismo en esta página podemos leer que los contenidos de aprendizaje se abordan en contextos de resolución de problemas, los procesos de resolución deben ser fuente y soporte principal del aprendizaje matemático a lo largo de la etapa y la resolución de problemas actúa como eje vertebrador recorriendo transversalmente todos los bloques, por lo que se incluye en cada uno de ellos de manera destacada. La característica de «eje vertebrador» también fue explicitada en el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p.1.494), como indicamos en su momento.

La importancia que Vygotsky otorga al lenguaje en el aprendizaje es recogida por el decreto en vigor, cuando en el artículo 4, Objetivos de la etapa, en el l) menciona comunicarse a través de medios de expresión y entre ellos especifica la expresión matemática (Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.113), igualmente que el Decreto 20/1.992 en el artículo 3.b) (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.433) y cuando dice

> … la verbalización del proceso seguido en el aprendizaje ayuda a la reflexión sobre qué se ha aprendido, qué falta por aprender, cómo y para qué, lo que potencia el desarrollo de estrategias que facilitan el aprender a aprender
>
> Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, p. 30.389

Tampoco se encuentran referencias a la teoría de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de Dienes ni al Modelo de Van Hiele en el Decreto 111/2.007.

3.6. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

Como síntesis de la comparación por bloques y por ciclos de los contenidos curriculares de matemáticas en la etapa Educación Primaria que establecieron y establecen, respectivamente, los decretos 20/1.992 y 111/2.007 en la Comunitat Valenciana, podemos decir que alcanzan aproximadamente y prácticamente el mismo techo en nivel y cantidad, con las matizaciones siguientes:

- Bloque 1, «Números y operaciones» y operaciones

  En el Decreto 111/2.007 se adelanta el trabajo en:

  - Hasta que números llegar en las composiciones y descomposiciones tanto aditivas como multiplicativas.
  - La presentación de la multiplicación, así como de los algoritmos estándar de la multiplicación y división.

- El conocimiento de los órdenes de unidad: décimas, centésimas y milésimas.

- Bloque 2, «La medida: estimación y cálculo de magnitudes»

  - En los cambios de expresiones de medidas de forma simple a forma compleja y viceversa, en el Decreto 111/2.007 se pretenderá ir más allá por lo visto en los contenidos del bloque anterior.

- Bloque 4, «Tratamiento de la información, azar y probabilidad»

  En el Decreto 111/2.007 se retrasa el trabajo en:

  - Algunos tipos de representaciones gráficas.
  - La presentación de la media aritmética.
  - La asignación y cálculo de probabilidades.

Respecto de los referentes para el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Primaria hemos visto que son los mismos en ambos decretos, las diferentes teorías agrupadas dentro del constructivismo; incluso como hemos hecho notar en bastantes ocasiones, las expresiones que lo justifican utilizadas por el decreto actual son prácticamente idénticas a las del decreto derogado. No se aferran a una sola teoría de aprendizaje, tratan de coger lo mejor de varias para aplicarlo a la gran diversidad de situaciones que se presentan en las matemáticas escolares, tanto por las diferentes partes de las matemáticas como por los distintos tipos de estudiantes.

La similitud tan grande entre los contenidos curriculares y su secuenciación por ciclos, que roza casi la identidad, junto con el planteamiento coincidente de los dos decretos sobre cómo se deben aprender las matemáticas en la Educación Primaria, justifica la validez para el momento presente y el futuro inmediato, vigencia del Decreto 111/2.007, del estudio que se lleva a cabo en esta tesis doctoral sobre la importancia de los conocimientos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de Maestro en la UJI.

SEGUNDA PARTE: ESTUDIO EMPÍRICO

Capítulo 4: ASIGNATURAS DEL ÁREA DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA EN LA UNIVERSITAT JAUME I, CURSOS 2.001 A 2.004

El Área de Didáctica de la Matemática en la UJI sólo tiene competencia en asignaturas que se imparten en las Diplomaturas de Maestro, vamos a ver en este capítulo cuáles son esas asignaturas, qué contenidos se trabajaban en ellas y cómo, para situarnos adecuadamente en los estudios matemáticos que ha realizado la promoción 2.001 a 2.004 de futuros maestros utilizada como muestra en esta tesis doctoral.

4.1. DESCRIPCIÓN DE LAS ASIGNATURAS DEL ÁREA EN LOS PLANES DE ESTUDIO DE MAESTRO EN LA UJI

En la UJI se desarrollan los estudios conducentes a la Diplomatura en Maestro de los Planes de Estudios de Maestro-Especialidad de Educación Física (MEF) (Resolución de 29 de julio de 1.992, de la UJI, BOE núm. 212, jueves 3 septiembre 1.992, pp. 30.454-30.475), de Educación Infantil (MEI) (Resolución de 29 de julio de 1.992, de la UJI, BOE núm. 211, jueves 2 septiembre 1.992, pp. 30.329-30.349), de Educación Musical (MEM) (Resolución de 29 de julio de 1.992, de la UJI, BOE núm. 212, jueves 3 septiembre 1.992, pp. 30.408-30.429) y de Educación Primaria (MEP)

(Resolución de 29 de julio de 1.992, de la UJI, BOE núm. 212, jueves 3 septiembre 1.992, pp. 30.430-30.454).

El profesorado del Área de Didáctica de la Matemática imparte docencia en asignaturas de Segundo curso de la Diplomatura de Maestro en las cuatro especialidades existentes en la UJI, también en el Tercer curso de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y de Educación Primaria, que cuentan con una asignatura, y además en la asignatura optativa «O43 Taller de Matemáticas» que se oferta a los estudiantes de tercero de todas las especialidades.

A continuación vamos a describir dichas.

4.1.1. ASIGNATURAS DE MAESTRO-ESPECIALIDAD DE EDUCACIÓN FÍSICA Y DE EDUCACIÓN MUSICAL

Reunimos en este punto las dos titulaciones de Maestro-Especialidad de Educación Física y de Educación Musical por ser idéntica su situación en cuanto a las asignaturas matemáticas.

Los diplomados en Maestro legalmente pueden impartir las matemáticas de cualquier curso de la Etapa de Educación Primaria (BOE núm. 244, 11/10/1.991, pp. 33.004 [MEI], 33.006 [MEP], 33.010 [MEF], 33.012 [MEM]), razón por la cual en las directrices generales propias de los planes de estudio de ambas especialidades (Real Decreto 1.440/1.991, BOE núm. 244, 11/10/1.991, pp. 33.003-33.004, 33.010-33012 [MEF], 33.012-33.014 [MEM]) contaban con una materia troncal de la especialidad, de 4 créditos, «Matemáticas y su Didáctica» (BOE núm. 244, 11/10/1.991, pp. 33.012 [MEF], 33.014 [MEM]) que se convirtieron en los planes de estudio en la UJI en las asignaturas troncales «M20 Matemáticas y su Didáctica» y «620 Matemáticas y su Didáctica» de Maestro-Especialidad de Educación Física y de Educación Musical, respectivamente (BOE núm. 212, 3/9/1.992, pp. 30.459 [MEF], 30.413 [MEM]), con el mismo número de créditos, distribuidos en 3 teóricos y 1 práctico, que se cursan en el primer semestre del Segundo curso.

Cuando en la UJI se redactó el Plan de estudios de Maestro de estas dos especialidades, se pensó que una asignatura troncal de 4 créditos no era suficiente para capacitar adecuadamente a los futuros maestros para impartir las matemáticas de la Etapa de Educación Primaria, por lo que se decidió introducir otra asignatura que completara dicha capacitación: «M24 Educación Matemática» en la especialidad de Educación Física (BOE núm. 212, 3/9/1.992, p. 30.462) y «624 Educación Matemática» en la especialidad de Educación Musical (BOE núm. 212, 3/9/1.992, p. 30.416). Ésta tendría carácter de obligatoria, se desarrollaría en el segundo semestre del Segundo curso de la Diplomatura, con una duración de 4 créditos (3 teóricos y 1 práctico).

4.1.2. ASIGNATURAS DE MAESTRO-ESPECIALIDAD DE EDUCACIÓN INFANTIL

Las directrices generales propias del plan de estudios de Maestro-Especialidad de Educación Infantil establecía una materia troncal de la especialidad «Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica» (Real Decreto 1.440/1.991, BOE núm. 244, 11/10/1.991, p. 33.006), de 6 créditos, que debía recoger los contenidos propios de las matemáticas de Educación Infantil de 3 a 6 años y, también, los de Educación Primaria, por lo dicho al principio del punto anterior: todo maestro puede impartir las matemáticas de cualquier curso de la Etapa de Educación Primaria.

Al proceder en la UJI a la redacción del plan de estudios de esta especialidad se acordó que al igual que en Maestro-Especialidad de Educación Física y de Educación Musical, una materia de 6 créditos, no era suficiente para capacitar adecuadamente a los futuros maestros para impartir las matemáticas desde los 3 hasta los 12 años, por lo que se decidió introducir otra asignatura que completara dicha capacitación, con lo que esta diplomatura cuenta con una asignatura troncal «L14 Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica» (BOE núm. 211, 2/9/1.992, p. 30.332) en Segundo curso y con una asignatura obligatoria «L30 Didáctica de las Matemáticas» (BOE núm. 211, 2/9/1.992, p. 30.337) en Tercer curso.

La asignatura «L14 Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica», heredera de la materia troncal de las directrices generales propias de la especialidad, abarca los contenidos propios de las matemáticas de Educación Infantil de 3 a 6, tiene carácter anual con una duración de 6 créditos (4 teóricos y 2 prácticos), lo que posibilita que en ella se trabajen también los contenidos del Primer ciclo de Primaria.

La asignatura obligatoria «L30 Didáctica de las Matemáticas», trata los contenidos del Segundo y Tercer ciclo de Primaria, a lo largo del primer semestre del curso con una duración de 4 créditos (3 teóricos y 1 práctico).

4.1.3. ASIGNATURAS DE MAESTRO-ESPECIALIDAD DE EDUCACIÓN PRIMARIA

Las directrices generales propias del plan de estudio de esta especialidad fijaban una materia troncal de la especialidad de 8 créditos «Matemáticas y su Didáctica» (Real Decreto 1.440/1.991, BOE núm. 244, 11/10/1.991, p. 33.008) que se convirtió en el plan de estudios en la UJI en la asignatura troncal «P23 Matemáticas y su Didáctica» con el mismo número de créditos, distribuidos en 6 teóricos y 2 prácticos, que se imparte en Segundo curso con carácter anual (BOE núm. 212, 3/9/1.992, p. 30.434).

Estos diplomados son los especialistas en algunas de las disciplinas de la Etapa de Educación Primaria, siendo una de éstas las matemáticas, motivo por el cual cuando se confeccionó su plan de estudios se introdujo la asignatura obligatoria «P38 Teoría y Práctica en Educación Matemática» (BOE núm. 212, 3/9/1.992, p. 30.439), de 4 créditos (3 teóricos y 1 práctico), a desarrollar en el segundo semestre de Tercer curso, con la finalidad de disponer de más tiempo en la titulación para trabajar los contenidos escolares matemáticos teóricos, prácticos y didácticos, y así proporcionar a estos futuros maestros una mayor capacitación en didáctica de la matemática.

4.1.4. ASIGNATURA OPTATIVA «O43 TALLER DE MATEMÁTICAS»

El Real Decreto 1.440/1.991, de 30 de agosto, por el que se establece el título universitario oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudios conducentes a su obtención (BOE núm. 244, 11/10/1.991, pp. 33.003-33.018), en sus anexos relacionaba únicamente las materias troncales de obligatoria inclusión en todos estos planes de estudios, pero el Real Decreto 1.497/1.987, de 27 de noviembre, por el que se establecen directrices generales comunes de los planes de estudio de los títulos universitarios de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional (BOE núm. 298, 14/12/1.987, pp. 36.639-36.643), en su «Art. 7.º Contenidos de las enseñanzas», en el punto «1.b) Materias determinadas discrecionalmente por la Universidad en sus planes de estudio», distingue las «b_2) Materias optativas: Libremente establecidas por la Universidad, que las incluirá en el correspondiente plan de estudios para que el alumno escoja entre las mismas» (Real Decreto 1.497/1.987, BOE núm. 298, 14/12/1.987, p. 36.641), por lo que la UJI en uso de las atribuciones que le otorgaba la legalidad vigente procedió a incluir en sus planes de estudio de Maestro asignaturas optativas, entre las que se encontraba «O43 Taller de Matemáticas», que se oferta a los estudiantes de tercero de todas las especialidades (BOE núm. 212, 3/9/1.992, p. 30.470 [MEF]; BOE núm. 211, 2/9/1.992, p. 30.344 [MEI]; BOE núm. 212, 3/9/1.992, pp. 30.424 [MEM], 30.446 [MEP]).

La breve descripción del contenido de dicha asignatura en los planes de estudio es: «Estudio, diseño, construcción y uso de materiales didácticos para la enseñanza de las Matemáticas», con una asignación de 4 créditos, distribuidos en 2 teóricos y 2 prácticos, que se cursan en el segundo semestre del Tercer curso.

Acabada la descripción estructural de las asignaturas, resumimos en la Tabla 4.1. la distribución por cursos y semestres de las asignaturas matemáticas troncales y obligatorias que han cursado los estudiantes de Maestro de la promoción 2.001-2.004.

Tabla 4.1. Asignaturas por especialidades y cursos y semestres en que se imparten

MAESTRO-ESPECIALIDAD de	**SEGUNDO CURSO**		**TERCER CURSO**	
	1.^{er} semestre	**2.º semestre**	**1.^{er} semestre**	**2.º semestre**
ED. FÍSICA	M20 Matemáticas y su Didáctica	M24 Educación Matemática		
ED. INFANTIL	L14 Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica		L30 Didáctica de las Matemáticas	
ED. MUSICAL	620 Matemáticas y su Didáctica	624 Educación Matemática		
ED. PRIMARIA	P23 Matemáticas y su Didáctica			P38 Teoría y Práctica en Educación Matemática

4.2. CONTENIDOS DE LAS ASIGNATURAS

Expuestas las asignaturas del Área de Didáctica de la Matemática vamos a ver los contenidos de los temarios de dichas asignaturas, relativos a la Etapa de Educación Primaria.

A partir de la «Breve descripción del contenido» de cada asignatura en el Plan de estudios y del Decreto 20/1.992, que establecía el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valencia (DOGV, Núm. 1.728, de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502), los profesores que formábamos el Área procedimos a confeccionar los temarios, con un grado de consenso muy alto, que llegaba a los diferentes niveles de concreción de desarrollo de los contenidos, salvando las diferencias propias de las especialidades, por participar dichos profesores de una formación común en didáctica de las matemáticas.

El profesorado que elaboró los temarios de las asignaturas continuó impartiendo los mismos en los curso académicos de 2.001 a 2.004, años en los que cursaron la carrera de Maestro la promoción de estudiantes con los que se ha realizado el estudio empírico que presenta esta tesis doctoral.

Vamos a describir a continuación los contenidos, agrupándolos por los bloques de las matemáticas escolares de Educación Primaria para relacionarlos más fácilmente con los presentados en el capítulo anterior, pero lo haremos mediante los seis bloques correspondientes al Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728, de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502), que era el vigente y por tanto, el que orientaba los programas de las asignaturas de didáctica de la matemática que cursaron los estudiantes de la promoción 2.001 a 2.004.

En la Tabla 4.2. sintetizamos que bloques de contenidos se trataban en las diferentes asignaturas de las titulaciones de Maestro.

Tabla 4.2. Bloques de contenidos en las diferentes asignaturas de Maestro

BLOQUES DE CONTENIDOS	**ASIGNATURAS**							
	M20	**M24**	**L14**	**L30**	**620**	**624**	**P23**	**P38**
1. Números	X	X	1.^{er} ciclo	2.º y 3.^{er} ciclo	X	X	X	
2. La medida		X	X	X		X	X	
3. Geometría		X	X	X		X		X
4. Estadística. Azar. Probabilildad		X		X		X		X
5. Resolución de problemas	X	X	X	X	X	X	X	X
6. Actitudes ante las matemáticas	X		X	X	X		X	

En la primera asignatura matemática que cursaban en la carrera los estudiantes de las distintas especialidades de Maestro (MEF, MEI, MEM y MEP), los temarios empezaban con una Introducción, en el que lo primero que trabajábamos era «¿Por qué estudiar matemáticas?», después veíamos «La matemática y el proceso educativo», «Análisis de los currícula de matemáticas escolares» y algunos contenidos más, dependiendo de la especialidad, que enumeraremos en los apartados siguientes.

La otra asignatura de cada especialidad, como continuación que era del tratamiento en la universidad de los currícula de las matemáticas escolares de la Etapa de Educación Primaria, no solían tener un tema introductorio, sino que comenzaban con el correspondiente tema de los bloques de contenidos que no se habían completado o que todavía no se habían trabajado, como ahora iremos explicando en los apartados que siguen.

4.2.1. CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE 1, «NÚMEROS»

Este bloque de contenidos de matemáticas escolares de Educación Primaria abarcaba distintos temas de algunas de las asignaturas de las Diplomaturas de Maestro que resumimos en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3. Temas del bloque 1 y asignaturas en que se imparten

BLOQUE DE CONTENIDOS	TEMAS	ASIGNATURAS							
		M20	**M24**	**L14**	**L30**	**620**	**624**	**P23**	**P38**
Números	Números naturales. Sistemas de numeración	X		1.er ciclo	2.º y 3.er ciclo	X		X	
	Operaciones con números naturales	X		1.er ciclo	2.º y 3.er ciclo	X		X	
	Divisibilidad con números naturales	X			X	X		X	
	Números enteros		X		X		X	X	
	Fracciones y decimales		X		X		X	X	

Los dos primeros temas se trabajaban en las asignaturas que se desarrollaban en el primer semestre del curso académico, pero en el caso de la materia «L14 Desarrollo del Pensamiento matemático y su Didáctica»

(MEI) enfocados sólo para el Primer ciclo de Primaria, como ya hemos explicado (ver punto 4.1.2.), por lo que también aparecían en el programa de «L30 Didáctica de las Matemáticas» (MEI), pero orientados al Segundo y Tercer ciclo de Primaria.

El tema «Divisibilidad con números naturales» también se abordaba en el primer semestre en Maestro-Especialidad de Educación Física y de Educación Musical. Al tratarse de contenidos de matemáticas escolares de Tercer ciclo, en Maestro-Especialidad de Educación Infantil se estudiaba en la asignatura de primer semestre «L30 Didáctica de las Matemáticas» por las razones apuntadas más arriba (ver punto 4.1.2.). En Maestro-Especialidad de Educación Primaria como esta diplomatura dispone de tres semestres para las matemáticas, se profundizan y amplían más todos los contenidos, como hemos explicado anteriormente (ver punto 4.1.3.), por lo que la divisibilidad se trabajaba ya en el segundo semestre de la materia anual «P23 Matemáticas y su Didáctica».

Los dos últimos temas de este bloque, «Números enteros» y «Fracciones y decimales», se desarrollaban en asignaturas de segundo semestre del curso a excepción de Maestro-Especialidad de Educación Primaria, que también lo trataba en esa parte del curso escolar pero dentro de «P23 Matemáticas y su Didáctica».

A continuación en la Tabla 4.4. mostramos los contenidos de cada uno de los temas del bloque impartidos en la UJI.

Tabla 4.4. Contenidos de las asignaturas correspondientes al bloque 1, «Números»

Bloque 1, «NÚMEROS»	
TEMA	**CONTENIDOS**
Números naturales. Sistemas de numeración	- Contextos y usos del número natural. - Concepto de número natural en el niño: cardinales y ordinales. - Conjunto de los números naturales. - Sistemas de numeración. - Representación de los números. - El Sistema de Numeración Decimal. - Composición y descomposición de números. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la

	evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.
Operaciones con números naturales	- Operaciones básicas: conceptos. - La estructura algebráica de (N, +, x). - Algoritmos: presentaciones y esquematizaciones. - Lenguaje aritmético. - Cálculo: mental, aproximado. - Estimación. - Calculadoras. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.
Divisibilidad con números naturales	- Múltiplos y divisores. - Números primos y compuestos. - Criterios de divisibilidad. - Máximo común divisor. - Mínimo común múltiplo. - Algoritmo y Teorema de Euclides. - Teorema Fundamental. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.
Números enteros	- Contextos y usos de los números positivos y negativos. - Conjunto de los números enteros. - Operaciones y algoritmos. - La estructura algebráica de (Z, +, x). - Concepciones y dificultades en la adquisición del concepto de número entero. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.
Fracciones y decimales	- Contextos y usos de las fracciones y de los decimales. - Conjunto de los números racionales. - Operaciones y algoritmos. - La estructura algebraica de (Q, +, x). - Dificultades en la adquisición del concepto de fracción. - Introducción a las fracciones. - Dificultades, conflictos, obstáculos y errores relacionados con el concepto de número decimal. - Relaciones entre fracciones y decimales. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación

	Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.

La comparación de esta tabla con las tablas 3.1., 3.2. y 3.3. del Capítulo 3, donde explicitamos los contenidos de las matemáticas escolares del bloque «Números» en los tres ciclos de Educación Primaria, establecidos por el Decreto 20/1.992, permite afirmar que las abarca, tanto desde la vertiente teórica, la práctica, como también la didáctica, tal como mandaban los planes de estudios de las diferentes especialidades de Maestro.

4.2.2. CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE 2, «LA MEDIDA»

Los contenidos de matemáticas escolares correspondientes a las magnitudes y su medida en Educación Primaria constituyen un tema de algunas de las asignaturas de las Diplomaturas de Maestro que indicamos en la Tabla 4.5.

Tabla 4.5. Tema del bloque 2 y asignaturas en que se imparten

BLOQUE DE CONTENIDOS	TEMA	ASIGNATURAS							
		M20	M24	L14	L30	620	624	P23	P38
La medida	Magnitudes y medida		X	1.er ciclo	2.º y 3.er ciclo		X	X	

Esta materia se trabajaba en el Segundo semestre del curso académico en la UJI, aunque la temporalización de algunas de las asignaturas a las que pertenecía fuera anual, con la excepción de la asignatura «L30 Didáctica de las Matemáticas», de MEI, en la que se impartía en el Primer semestre, como indicamos en la Tabla 4.1.

En la asignatura «L14 Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica», de Maestro-Especialidad de Educación Infantil, el tópico tenía por nombre «Iniciación a la medida», pues como ya hemos explicado anteriormente (ver punto 4.1.2.) esta asignatura se orientaba a la Educación Infantil de 3 a 6 años y al Primer ciclo de Educación Primaria.

La mayor amplitud y profundidad dada a los diferentes temas en Maestro-Especialidad de Educación Primaria, por lo explicado más arriba (ver punto 4.1.3.), hacía que los bloques de contenidos «Números y operaciones», «Medida», «Resolución de problemas» y «Actitudes ante las matemáticas» (ver Tabla 4.2.) se estudiaran en la asignatura anual «P23 Matemáticas y su Didáctica», con lo que el tema «Magnitudes y medida» era el último visto en el Segundo curso de la diplomatura, pasando los temas de los otros dos bloques que recorrían las matemáticas escolares de 6 a 12 años a la asignatura «P38 Teoría y Práctica en Educación Matemática» que se cursaba en Tercero.

La Tabla 4.6. expone los contenidos matemáticos tanto teóricos, como prácticos y didácticos, que configuran el tema que se desarrolla en la UJI.

Tabla 4.6. Contenidos de las asignaturas correspondientes al bloque 2, «La medida»

Bloque 2, «LA MEDIDA»	
TEMA	**CONTENIDOS**
Magnitudes y medida	- Conceptos de magnitud y medida. Tipos de magnitudes. - Magnitudes longitud, capacidad, masa, superficie y volumen. - El Sistema Métrico Decimal. - Medida en otros contextos: monedas, tiempo y ángulos. - Estimación de magnitudes. - Razón y proporción. - Escalas: mapas, planos y maquetas. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.

Tal como determinaban los respectivos planes de estudios, con el tratamiento de este tema en las aulas de la UJI, se satisfacían los requisitos profesionales mínimos de los futuros diplomados en Maestro para impartir los contenidos de las matemáticas escolares de magnitudes y medida en los tres ciclos de Educación Primaria establecidos por el Decreto 20/1.992, que hemos explicitado en las tablas 3.4., 3.5. y 3.6. del Capítulo 3.

4.2.3. CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE 3, «GEOMETRÍA»

Los contenidos geométricos de Educación Primaria abarcaban distintos temas de algunas de las asignaturas de las Diplomaturas de Maestro que resumimos en la Tabla 4.7.

Tabla 4.7. Tema del bloque 3 y asignaturas en que se imparte

BLOQUE DE CONTENIDOS	TEMA	ASIGNATURAS							
		M20	M24	L14	L30	620	624	P23	P38
Geometría	Descripción de posiciones y movimientos, el estudio de la forma		X	1.er ciclo	2.º y 3.er ciclo		X		X

Este campo matemático se abordaba en el Segundo semestre del curso académico en la UJI, con la excepción de la asignatura« L30 Didáctica de las Matemáticas» en la que se impartía en el Primer semestre, como indicamos en la Tabla 4.1.

En Maestro-Especialidad de Educación Infantil, en la asignatura «L14 Desarrollo del Pensamiento Matemático y su Didáctica», el tema tenía por nombre «Primeras nociones espaciales y geométricas», por enfocarse a la Educación Infantil de 3 a 6 años y al Primer ciclo de Educación Primaria según lo explicado en el punto 4.1.2.

Uno de los dos temas que se trabajaban en la asignatura «P38 Teoría y Práctica en Educación Matemática», de Maestro-Especialidad de Educación Primaria, era el geométrico, como hemos explicado en el punto anterior, y su implementación ocupaba más de la mitad del tiempo correspondiente a la asignatura, pues el otro tema que completaba su programa, **«**Estadística. Azar. Probabilidad**»**, tiene naturalmente un menor número de contenidos correspondientes a las edades escolares de 6 a 12 años.

En la Tabla 4.8 exponemos los contenidos geométricos impartidos en la UJI en las titulaciones de Maestro.

Tabla 4.8. Contenidos de las asignaturas correspondientes al bloque 3, «Geometría»

Bloque 3, «GEOMETRÍA»	
TEMA	**CONTENIDOS**
Descripción de posiciones y movimientos, el estudio de la forma	- Posiciones en el espacio: contextos cotidiano, topográfico y geométrico. - Geometrías y topología. - Etapas genéticas del espacio. - Formas y configuraciones geométricas. - Movimientos y pseudomovimientos. Homotecias y semejanzas. - Utilización de los instrumentos de dibujo habituales. - Estudio de triángulos, cuadriláteros, círculo y circunferencia. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.

Los contenidos curriculares del bloque 3 «Geometría», de la Etapa Educación Primaria expresados en las tablas 3.7., 3.8. y 3.9., correspondientes al Decreto 20/1.992 para los ciclos Primero a Tercero respectivamente, son recogidos por los contenidos de la tabla anterior, tanto desde la vertiente teórica, la práctica, como también la didáctica, pues así lo exigen los planes de estudios de las titulaciones de Maestro de la UJI.

4.2.4. CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE 4, «ESTADÍSTICA. AZAR. PROBABILIDAD»

En la Tabla 4.9. indicamos las asignaturas de las Diplomaturas de Maestro en la UJI en que se estudian los contenidos de matemáticas escolares de Educación Primaria de estadística, azar y probabilidad.

Tabla 4.9. Tema del bloque 4 y asignaturas en que se imparte

BLOQUE DE CONTENIDOS	TEMA	ASIGNATURAS							
		M20	M24	L14	L30	620	624	P23	P38
Estadística. Azar. Probabilidad	Estadística. Azar. Probabilidad		X		X		X		X

La asignatura «L30 Didáctica de las Matemáticas» desarrollaba estos conocimientos de toda la Etapa de Educación Primaria en el Primer semestre del curso académico mientras que las otras lo hacían en el Segundo semestre.

A continuación en la Tabla 4.10. mostramos los contenidos matemáticos teóricos, prácticos y didácticos del tema impartidos en la carrera de Maestro.

Tabla 4.10. Contenidos de las asignaturas correspondientes al bloque 4, **«**Estadística. Azar. Probabilidad**»**

Bloque 4, «Estadística. Azar. Probabilidad»	
TEMA	**CONTENIDOS**
Estadística. Azar. Probabilidad	- Recogida, registro y recuento de datos. - Elaboración de encuestas. - Presentación de datos. Representaciones gráficas. - Análisis de datos. Medidas descriptivas. - Lectura e interpretación de tablas de frecuencias, de gráficos estadísticos y de medidas. - Reconocimiento del carácter aleatorio de una experiencia. - Asignación de probabilidades. - Situaciones combinatorias: técnicas de recuento sistemático. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.

El análisis de esta tabla y de las tablas 3.10, 3.11. y 3.12. del Capítulo 3, donde explicitamos los contenidos de las matemáticas escolares del bloque en los tres ciclos de Educación Primaria, establecidos por el Decreto 20/1.992, permite afirmar que el desarrollo de este tema en las aulas de la

UJI cubría las necesidades profesionales de los futuros maestros en este campo, tanto desde la vertiente teórica, la práctica, como también la didáctica, tal como mandaban los planes de estudios de las diferentes especialidades de Maestro.

4.2.5. CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE 5, «RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS»

En el desarrollo de los contenidos matemáticos cuya presentación se ha realizado ya en los bloques de contenidos anteriores, aparecerían aquéllos procedimientos más directamente relacionados con la numeración, con las operaciones, con la geometría, etc.

Como en la diplomatura de Maestro-Especialidad de Educación Infantil se cuenta con algo menos de tiempo que en las otras especialidades para el currículo matemático de la Etapa de Educación Primaria, a diferencia de éstas no se dedicaba explícitamente un tema a los contenidos de «Resolución de problemas», por lo que considerando también el párrafo anterior, en la Tabla 4.11. donde indicamos en que asignaturas se trabajan contenidos de este bloque, vamos a distinguir aquellas asignaturas que cuentan con un tema de «Resolución de problemas» en su programa (X) de aquellas otras que no lo tienen sin dejar de trabajar por ello esta clase fundamental de contenidos (x).

Tabla 4.11. Tema del bloque 5 y asignaturas en que se imparte

BLOQUE DE CONTENIDOS	TEMA	ASIGNATURAS							
		M20	M24	L14	L30	620	624	P23	P38
Resolución de problemas	Resolución de problemas	X	x	x	x	X	x	X	x

En los contenidos del tema «Resolución de problemas», presentados a continuación en la Tabla 4.12., se explicitaban de los procedimientos de carácter general algunas estrategias, destrezas o técnicas que tienen una fuerte relación con la resolución de problemas en general. También se incluía una referencia a los juegos por posibilitar ciertos elementos de los mismos propuestas didácticas que desarrollan capacidades directamente relacionadas con el pensamiento lógico-matemático, así como procedimientos tales como reconocimiento de atributos, clasificación, ordenación, seriación, inclusión, etc., interesantes por su contribución a la estructura del pensamiento lógico.

Tabla 4.12. Contenidos de las asignaturas correspondientes al bloque 5, «Resolución de problemas**»**

Bloque 5, «Resolución de problemas»	
TEMA	**CONTENIDOS**
Resolución de problemas	- Fases en la resolución de problemas. - Estrategias y métodos. - Juegos: análisis del juego y reglas. - Estrategias ganadoras y perdedoras. - Variación de reglas. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación. - Conocimiento práctico de materiales didácticos.

Este bloque de contenidos no aparece en las tablas de contenidos curriculares de Educación Primaria del Capítulo 3, pues como ya explicamos allí, las tablas eran relativas a los bloques del Decreto 111/2.007, que sólo contempla los cuatro anteriores vistos aquí, por lo que la comparación de la tabla anterior se tiene que hacer ahora directamente con los contenidos del bloque homónimo en el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.500) y nos va a permitir afirmar que los programas de las asignaturas satisfacen los requisitos tanto teóricos, prácticos, como también didácticos de los diferentes planes de estudios de las diplomaturas de Maestro en la UJI.

4.2.6. CONTENIDOS CORRESPONDIENTES AL BLOQUE 6, «ACTITUDES ANTE LAS MATEMÁTICA»

Decía el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.493) que "entre los distintos contenidos planteados en el área de matemáticas es necesario resaltar que los relativos a las actitudes deben ocupar un lugar preferente en la educación primaria", añadiendo que es primordial que al término de esta etapa los alumnos y alumnas hayan adquirido una actitud positiva hacia las matemáticas y que de ello dependía, en gran parte, que puedan seguir progresando satisfactoriamente en la construcción del conocimiento matemático durante la ESO.

Por este motivo, en el desarrollo de los programas de al menos en una de las dos asignaturas de cada especialidad de Maestro, trabajábamos explícitamente los contenidos actitudinales, porque de manera implícita en todas ellas se trataba y procuraba el desarrollo de actitudes positivas en los futuros maestros, dada la gran repercusión que esto tiene en su posterior labor en el aula escolar (Gairín, 1.987, p.128).

En la Tabla 4.13. indicamos en qué asignaturas aparecen contenidos de este bloque, distinguiendo aquellas asignaturas que cuentan con un tema sobre actitudes en el programa (X), de aquellas otras que no lo tienen (x) pero que en su Tema 1 Introducción, dedicaban un apartado a esta clase de contenidos. En cualquiera de ellas las actitudes se estudiaban al principio del desarrollo de la asignatura.

Tabla 4.13. Tema del bloque 6 y asignaturas en que se imparte

BLOQUE DE CONTENIDOS	TEMA	ASIGNATURAS							
		M20	**M24**	**L14**	**L30**	**620**	**624**	**P23**	**P38**
Actitudes ante las matemáticas	Las actitudes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas	X		x	x	x		X	

La tabla que mostramos a continuación expone los contenidos que configuran el tema que se imparte en la UJI.

Tabla 4.14. Contenidos de las asignaturas correspondientes al bloque 6, «Actitudes ante las matemáticas**»**

Bloque 6, «Actitudes ante las matemáticas»	
TEMA	**CONTENIDOS**
Las actitudes en la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas	- Las actitudes hacia las matemáticas. - Variables asociadas a las actitudes hacia las matemáticas. - La mejora de las actitudes hacia las matemáticas. - Análisis de los objetivos y contenidos de este tema y de libros de texto de Educación Primaria. - Orientaciones metodológicas y para la evaluación.

Por los mismos motivos que el bloque de contenidos anterior, éste tampoco aparece en las tablas de contenidos curriculares de Educación Primaria del Capítulo 3, luego la comparación de la tabla anterior se tiene que hacer también ahora directamente con los contenidos del bloque homónimo en el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.500-1.501) y nos va a permitir afirmar que el tratamiento de este tema en las aulas de la UJI cubría las necesidades profesionales de los futuros maestros en este campo, tal como mandaban los planes de estudios de las diferentes especialidades de Maestro.

4.3. METODOLOGÍA

Descritas las asignaturas matemáticas de las diplomaturas de Maestro y los contenidos de sus temarios, expondremos ahora cómo eran impartidas.

El profesorado que formaba el Área Didáctica de la Matemática, que trabajó en las aulas de la UJI los contenidos de los temas anteriores con los estudiantes de Maestro de la promoción 2.001 a 2.004, participaba de un muy alto grado de consenso que ya aplicó en la redacción de los temarios y que llegó incluso a los últimos niveles de concreción de desarrollo de los contenidos (clases teóricas, clases prácticas, lecturas, etc.), salvando las diferencias propias de las especialidades, por lo que la metodología desarrollada en las clases era muy parecida y seguidamente vamos a describirla.

En el Tema 1 Introducción, con el que empezaba la primera asignatura matemática que cursaban en la carrera los estudiantes de las distintas especialidades de Maestro, comenzábamos con «¿Por qué estudiar matemáticas?», donde mediante la lectura y comentario de algún artículo y parte de algún capítulo de libro aclarábamos la razón por la que, entonces en la universidad y posteriormente en las aulas escolares, iban a dedicar una parte muy importante de su vida. Después veíamos «La matemática y el proceso educativo», apartado en el que a través de algunas lecturas y también de explicaciones conocían o reconocían qué clase de conocimiento es el matemático y, en consecuencia, cómo debía abordarse de manera genérica su aprendizaje en las aulas de Primaria. La parte común del tema introductorio en las diferentes especialidades terminaba con «Análisis de los currícula de matemáticas escolares», donde los estudiantes tomaban contacto por primera vez y de manera general con el currículo matemático de Educación Primaria mediante los textos oficiales que establecían el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana, el Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502), o que daban orientaciones metodológicas y para la evaluación, así como orientaciones para la secuenciación de contenidos por ciclos de la Educación Primaria, la Resolución de 12 de septiembre de 1.992 (DOGV, Núm. 1.912 de 26/11/1.992, pp. 11.713-11.804).

Con estos tres apartados pretendíamos que a partir de ese momento fueran significativos para ellos los contenidos teóricos, prácticos y didácticos que de manera ya concreta iban a ir trabajando en cada uno de los temas siguientes en el programa y que pertenecían a bloques de contenidos matemáticos correspondientes a los de Educación Primaria.

El tratamiento metodológico de cada uno de los restantes temas de las asignaturas tenía más en común entre ellos que con el del Tema 1, pese a la especificidad de cada uno o de algunos, por lo que la explicación del método utilizado en su trabajo va a ser más global que el del tema que acabamos de ver.

Empezábamos los temas viendo los conceptos matemáticos teóricos necesarios, presentados con un grado de formalización que satisficiera los requisitos de formación teórica y posibilitara un mejor entendimiento de los aspectos didácticos que se desarrollarían posteriormente. Combinábamos un aprendizaje por recepción significativo con un aprendizaje por descubrimiento guiado, con distintos porcentajes de reparto según los temas (Ausubel, Novak y Hanesian, 1.978, p. 18)[34].

Utilizábamos la resolución de problemas como método[35] y también como contenido[36], tanto teórico como formando parte de los contenidos prácticos.

Las matemáticas han surgido históricamente y surgen actualmente porque resuelven problemas que se plantean en diferentes ámbitos. Creemos que la realidad ha de estar en el inicio del conocimiento matemático en el aula y que las matemáticas nos han de devolver a la realidad, dando respuesta a las situaciones problemáticas que ésta plantee y dotándonos de mecanismos mentales para abordarlas con éxito.

Una parte muy importante de cada tema era la dedicada a la didáctica. Partiendo de los textos oficiales ya citados que marcan y orientan los contenidos mínimos, hacíamos un análisis de los objetivos y contenidos del tema en Educación Primaria, formulábamos las capacidades y competencias a conseguir, las situábamos en los correspondiente ciclos y cursos y partiendo de los conocimientos previos de los niños y niñas se desarrollaba el tratamiento didáctico conveniente (Skemp, 1.971, p.38[37]; Vygotsky, 1.978, p.133[38]) para que construyeran sus conocimientos (Piaget, 1.973[39]; Dienes, 1.960[40]) y al final del trabajo las niñas y niños consiguieran adquirir la capacidad o competencia pretendida.

[34] Capítulo 2, punto 2.5.2.6. Ausubel: aprendizaje significativo
[35] Capítulo 2, punto 2.5.2.5. Aprendizaje por descubrimiento. Resolución de Problemas
[36] Capítulo 2, punto 2.4.4. Resolución de Problemas
[37] Capítulo 2, punto 2.4.3. Aprendizaje de conceptos (Segundo principio para el aprendizaje de las matemáticas: conceptos «contributorios»)
[38] Capítulo 2, punto 2.5.2.7. Vygotsky: aprendizaje sociohistórico (ZDP; lenguaje)
[39] Capítulo 2, punto 2.5.2.3. Piaget: equilibración y etapas de desarrollo
[40] Capítulo 2, punto 2.6.1. Dienes (Principios de aprendizaje)

El trabajo no era igual en todos los bloques, por ejemplo, en el bloque «Números», poníamos el énfasis en que los futuros maestros entendieran la estructura del Sistema de Numeración Decimal, en el significado de las operaciones y en esclarecer los algoritmos, de forma que no hubiera reglas o secuencias de mandatos memorísticos que condujeran mágicamente al resultado final. Nos interesaba más todo el trabajo que ha de hacerse antes de llegar a la simbolización estándar de los algoritmos de las operaciones. Iniciábamos cualquier trabajo con cantidades manipulando materiales didácticos que representaran estas cantidades, que les permitieran elaborar imágenes mentales a las que recurrir como ayuda para realizar la transición simbólica al papel, es decir, recorriendo los modos de representación enactiva, icónica y simbólica (Bruner, 1.966)[41].

En el caso del bloque de contenidos «La medida», queríamos incidir en la formación mental del concepto de magnitud, que necesariamente pasa por la agrupación de objetos atendiendo a una característica y que para ésta son equivalentes, por lo que utilizábamos diferentes materiales didácticos en las distintas magnitudes trabajadas. Era pues el concepto de equivalencia, el que entonces cobraba protagonismo. También nos interesaba la investigación del porqué de una unidad común de medida, ya no sólo a nivel práctico cotidiano, sino a nivel internacional y científico.

En cualquier caso en cada bloque de contenidos justificábamos a nuestros estudiantes la necesidad de utilizar materiales didácticos manipulativos (Piaget; NCTM, 2.000[42]) que combinen una parte lúdica, necesaria en el aula de Primaria, con otra parte relacionada con el aprendizaje de los contenidos matemáticos (Decreto 20/1.992, DOGV Núm. 1.728 de 20/2/1.992, p. 1.492). Materiales como por ejemplo: los bloques lógicos y los bloques aritméticos multibase de Dienes; los ábacos; las Regletas Cuisenaire; los equipos completos de metrología; los dominós de diferentes contenidos; las teselas; los geoplanos; los cuerpos geométricos; los juegos de probabilidad; las ruletas y perindolas, etc.

[41] Capítulo 2, punto 2.5.2.4. Bruner: el currículo en espiral
[42] Capítulo 1, punto 1.1.6. El Principio Tecnológico

Al presentar la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas de manera distinta a la que conocían los estudiantes de la titulación de Maestro, incidíamos en la mejora de sus propios conocimientos matemáticos teóricos y prácticos y también les servía de herramienta para formarse en didáctica de la matemática, de manera que pudieran ayudar a sus futuros alumnos a utilizar las matemáticas para entender, representar, resolver situaciones de su vida cotidiana y comunicar las soluciones, proporcionándoles asimismo estrategias para abordar situaciones específicas de otros campos científicos que pudieran necesitarlas.

Finalmente decir que en este capítulo de las asignaturas de didáctica de la matemática, en que hemos expuesto los contenidos que se trabajan en ellas y la metodología que utilizábamos, no hemos entrado en la evaluación por ser tratada en el Capítulo 5: Planteamiento del Estudio Empírico, en el punto 5.4.2. Prueba de Conocimientos de Didáctica de la Matemática, y en el Capítulo 6: Estudio Descriptivo, en el punto 6.1.2. Conocimientos en Didáctica de la Matemática.

Capítulo 5: PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO EMPÍRICO

En este capítulo empezaremos mostrando investigaciones que nos informan del bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro, tanto nacional como internacionalmente. Expuesto el problema pasaremos a formular los objetivos e hipótesis del Estudio Empírico que presenta esta tesis doctoral. A continuación describiremos el diseño realizado, los instrumentos utilizados y la metodología seguida.

5.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En estudios con profesores (Carrillo, 1.998; Contreras, 1.999; Block et al., 2.000; Chapman, 2.000) se ha puesto de relieve que las matemáticas de Educación Primaria y ESO, tienen un carácter eminentemente instrumental, las actividades básicamente están centradas en la identificación y usos de algoritmos que se aplican de forma mecánica, así como en la memorización de hechos, actividades rutinarias muchas veces carentes de significado para el estudiante, lo que lleva a identificar aprendizaje matemático con maestría algorítmica, concebir al maestro-profesor como transmisor y al alumno como receptor-repetidor y a tener una visión de las matemáticas escolares como conjunto de hechos y procedimientos para ser aprendidos.

Los estudiantes de Primaria y Secundaria no tienen demasiadas oportunidades de «hacer matemáticas», de construir un conocimiento rico e interconectado a partir de situaciones que permitan el establecimiento de conjeturas. No suelen estar entrenados en actividades metacognitivas y de resolución de problemas.

La preparación de los futuros maestros en el área de Didáctica de la Matemática debe centrarse en los conocimientos profesionales sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas de su nivel educativo. El estudio de los problemas didácticos matemáticos no es posible sin un conocimiento suficiente del contenido teórico matemático propuesto en los currículos de Primaria (sistemas numéricos, medida, geometría elemental y tratamiento de la información) (Godino, 2.002).

El núcleo básico de la didáctica de las matemáticas sobre contenidos impartidos en los primeros niveles educativos es la construcción por parte de los niños del sentido del lenguaje, los conceptos y métodos matemáticos, mediante su referencia a las situaciones y problemas matemáticos presentes en la vida cotidiana. Esta atribución de significado a las tareas matemáticas escolares requiere conocimientos y destrezas matemáticos por parte del maestro que con frecuencia no están disponibles para los futuros maestros como vamos a ver en la serie de investigaciones que enumeramos a continuación, referidas tanto a la época LOGSE (1.992): Educación Primaria y ESO, con la que hemos comenzado este apartado y a la que corresponde el plan de estudios de la Diplomatura de Maestro de los estudiantes objeto de esta tesis doctoral, como a la época anterior a 1.992, Ley General de Educación (1.971): EGB y BUP, a cuya última promoción pertenecen dichos estudiantes.

Llinares y Sánchez (1.991) mostraron las dificultades de sus estudiantes para maestro (en la Universidad de Sevilla) con fracciones mayores que la unidad, la fuerte ligazón entre fracción y la interpretación parte todo, incapacidad para identificar la unidad, representar fracciones con modelos concretos.

Nortes y Martínez (1.992) realizaron un trabajo de investigación en la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB de Murcia, en la asignatura de Matemáticas 1.º del Plan 1.971 (asignatura común y única de matemáticas en la carrera, excepto para los estudiantes de la especialidad de Profesor de EGB de Ciencias), con 150 alumnos de tres grupos de diferentes características, uno de la especialidad de Filología, otro del resto de especialidades (Ciencias, Ciencias Humanas, Preescolar y Educación Especial) y un tercero de todas las especialidades (en la sede de la ciudad de Cartagena), a los que se les aplicaron una serie de pruebas con la finalidad de medir variables aptitudinales, actitudinales y de rendimiento en matemáticas.

El rendimiento en matemáticas se obtuvo a través de las calificaciones de junio, con los siguientes resultados:

- Por sexo. Las calificaciones obtenidas en junio tanto por hombres como por mujeres son bajas, situándose sus medias en 4,750 y 4,477 respectivamente.
- Por edad. Sin embargo, la calificación en Matemáticas en junio de los menores de 20 años roza la media de cinco (4,966), mientras que la de los de 20 años o más no llega a cuatro (3,886).
- Por especialidad. La media de las calificaciones en Matemáticas de los de Ciencias es de 6,075 y de los de No Ciencias de 3,646.

Por su parte, Abraira y González (1.995), en un total aproximado de 350 alumnos que iniciaban los estudios de Diplomatura en Profesorado de EGB “en la Universidad de León, con una muestra de 196 estudiantes, que en el año 1.992-93 cursaban por primera vez la asignatura Matemáticas I (asignatura común y única de matemáticas en la carrera, excepto para los estudiantes de la especialidad de Profesor de EGB de Ciencias), realizaron una prueba de conocimientos matemáticos básicos necesarios para la comprensión de la asignatura obteniendo los resultados: en una escala de 0 a 66 alcanzaron una puntuación media de 28’08, “que corresponde a una posición muy baja, dada la presunta escasa dificultad de la Prueba de conocimientos básicos en el nivel que nos ocupa" (Abraira y González, 1.995, p. 147).

Gutiérrez y Jaime (1.996), Universidad de Valencia, con relación al concepto de altura del triángulo, encontraron gran similitud entre las ideas de los futuros maestros y los alumnos de primaria.

Resultados análogos de bajo conocimiento matemático manifiestan profesores de otras Escuelas de Magisterio, como la profesora Chamorro desde la Universidad Complutense de Madrid, los profesores Lacasta (1.998) desde la Universidad Pública de Navarra, Rico (2.000) de la Universidad de Granada, Aballe (2.000) de la Universidad de Cádiz, Contreras y Blanco (2.001) de las universidades de Huelva y de Extremadura, respectivamente, etc.

> […] la escasa formación matemática del alumnado, impide muchas veces centrarse en los aspectos netamente didácticos, debiendo dedicar un tiempo considerable, no ya al repaso o recuerdo, sino al trabajo matemático desde cero.
>
> Chamorro, 1.998, p. 103

La profesora Salinas (2.003), en su tesis doctoral presenta un estudio empírico sobre competencia matemática llevado a cabo en dos fases: la primera, que correspondía al plan de estudios de 1.971 y abarcaba todas las Escuelas Universitarias de Formación del Profesorado de EGB de Galicia de carácter público, se realizó sobre una muestra de 467 estudiantes de 3.^{er} curso; la segunda, correspondiente al plan de estudios de 1.993, sólo se realizó en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela, para esta fase se contó con una muestra de 150 estudiantes de 3.^{er} curso y tenía como objetivo principal comprobar si los resultados obtenidos por los alumnos del plan de 1.971 habían sido modificados a raíz de la implementación de los nuevos programas del plan de 1.993.

Los resultados generales en el total de la prueba de matemáticas fueron muy bajos en las dos fases, en ambas se obtuvo un porcentaje de aciertos inferior al 50 por ciento.

En la primera parte de la prueba (valor posicional), el porcentaje de aciertos fue del 63,62 y 65,15 para las fases primera y segunda, respectivamente; "resultados bajos, si se tiene en cuenta el carácter relativamente simple de los ítems y el nivel académico de los alumnos (estudiantes que finalizan Magisterio)" (Salinas, 2.003, p. 230). La diferencia de medias entre los dos planes de estudio no resultó significativa.

En la segunda parte de la prueba (comprensión de los algoritmos usuales de las operaciones aritméticas), los resultados fueron del 12,8 por ciento de aciertos para la primera fase (plan de 1.971) y 19,75 por ciento de aciertos para la segunda fase (plan de 1.993). En esta parte de la prueba, las diferencias de medias entre los dos planes de estudio eran significativas. Como la segunda fase sólo se realizó en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago, se hizo un contraste de medias utilizando la muestra de esta fase y la sub-muestra del plan de estudios de 1.971 correspondiente a la Escuela Universitaria de Santiago de Compostela, resultando significativa la diferencia de medias a favor de los alumnos del plan de 1.993, con lo que concluye la profesora Salinas que los alumnos del centro de Santiago del plan de 1.993 experimentaron una mejora en cuanto a la comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas con respecto a los alumnos del plan de 1.971.

Situaciones de déficit matemático de los estudiantes para maestro que también se dan en el ámbito internacional como muestran las referencias siguientes.

Autores como Ball (1.988b) o Tirosh y Graeber (1.989), han puesto de relieve un insuficiente conocimiento sustantivo y de razonamiento de los futuros maestros con relación a la división entera, así como sobre qué es lo que hace que algo se considere verdad en matemáticas; asimismo, analizaron la similitud de las creencias de los estudiantes y los futuros maestros con relación a la idea de que dividir hace pequeño y multiplicar grande (deficiente conocimiento sobre la naturaleza de las operaciones con decimales, desconocimiento sobre tipos de problemas de dividir y las estrategias asociadas, y sobre qué significa demostrar).

El trabajo de Ball (1.990), mostró las deficiencias de un grupo de estudiantes para maestro en el campo de las relaciones entre área y perímetros de cuadriláteros, así como la insuficiente capacidad para justificar o validar los razonamientos.

Post et al. (1.991) evidenciaron las dificultades [de los futuros maestros] para resolver cuestiones y problemas con fracciones y decimales. Incluso obteniendo la resolución correcta, no sabían justificar su procedimiento.

También en relación con la división, Simon (1.993) señaló que los estudiantes para maestro poseen un apropiado conocimiento sobre algoritmos y símbolos en relación con la división pero al no poseer conexiones relevantes su conocimiento es muy poco organizado y útil.

Trabajos como el de Putt (1.995), evidencian el bajo nivel que presentan los futuros maestros por ejemplo en, la inadecuada comprensión sobre los números decimales, o que no son capaces de resolver situaciones elementales como ordenación de decimales.

En el ámbito de la geometría, Baturo y Nason (1.996) han mostrado que el conocimiento sobre el área de los estudiantes para maestro es demasiado pobre como para ayudar a sus futuros alumnos a desarrollar una comprensión significativa e integrada de conceptos y procesos.

Carvalho (1.999, p. 323) dice que los futuros maestros brasileños tienen: “un conocimiento medio-bajo del contenido mínimo del 4.º nivel de la enseñanza fundamental [nuestra enseñanza Primaria], esto es, del nivel en que van a enseñar o ya están”.

Ejemplos todos estos que evidencian el bajo nivel que presentan los estudiantes para maestro en un conocimiento que, como señaló Ball

(1.988a, p. 12): "es obviamente fundamental para ser capaz de ayudar a alguien a que lo aprenda".

A partir de esta última frase y habiendo comprobado personalmente en los últimos años, además de las investigaciones anteriores, la insatisfactoria preparación matemática con que llegan a la universidad los futuros maestros y conociendo los malos resultados en las asignaturas de didáctica de la matemática,

> consideramos necesario averiguar realmente el nivel de conocimientos matemáticos de dichos estudiantes al iniciar la Diplomatura y su relación con el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática

con vistas a la programación de acciones que reporten una mejora de la docencia de, y del aprendizaje en, las asignaturas de didáctica de la matemática en la carrera universitaria y como consecuencia, una elevación de su formación matemática como maestros.

De este modo, para conocer el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI quien firma esta tesis doctoral llevó a cabo un trabajo[43] practicándose la primera recogida de información que asienta la base del Pretest (O_1) de esta tesis doctoral.

A la vista de los resultados obtenidos, entre las acciones realizadas para una mejora de la docencia de, y del aprendizaje en, las asignaturas de didáctica de la matemática en la carrera universitaria, durante el mes de septiembre de 2.002, la profesora Inmaculada C. Pérez Serrano y quien

[43] Alcalde y Ferrández (2.004), que contó con la aprobación de la *Unitat de Suport Educatiu* (USE) dentro de *Projectes de millora educativa* presentados al programa de *Formació Permanent del Professorat* de la UJI del curso 2.001-2.002. Con la financiación concedida además de sufragar los gastos materiales del proyecto, se contó con la inestimable colaboración del becario Ignacio Moreno Jovaní.

suscribe esta tesis doctoral impartimos el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, sobre contenidos matemáticos de EGB, a estudiantes que habían finalizado Primer curso de Maestro e iban a cursar por primera vez asignaturas de didáctica de la matemática en el año académico 2.002-2.003. Los resultados de la prueba final en conocimientos matemáticos de los asistentes al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* significó la segunda observación (O_2), Postest 1, de esta tesis doctoral.

5.2. OBJETIVOS E HIPÓTESIS

Conocido el bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro vamos a formular los objetivos y las hipótesis del Estudio Empírico que presenta esta tesis doctoral.

- Objetivo 1.º Determinar el nivel de los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI del año académico 2.001-2.002 en conocimientos de contenidos conceptuales, ejecución de algoritmos, utilización de contenidos procedimentales complejos y resolución de problemas, en los campos matemáticos Aritmética, Álgebra, Medida, Geometría, Estadística y Probabilidad, y Proporcionalidad.

  - Hipótesis 1.ª El nivel de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes de Maestro que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, es equivalente al de los asistentes al *Curs Zero*.

- Objetivo 2.º Analizar la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes.

- Hipótesis 2.1. El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes.

  2.2. El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* se mantiene en el tiempo.

- Objetivo 3.º Establecer la posible repercusión que los conocimientos matemáticos puedan tener en las asignaturas de didáctica de la matemática.

- Hipótesis 3.1. El rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* es mejor que el de los no asistentes.

  3.2. Existe una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero*.

5.3. DISEÑO

Para llevar a término los objetivos marcados en esta tesis y ver si se cumplen las hipótesis hechas en ella, se ha realizado un diseño cuasi-experimental Pretest-Postest con Grupo de Control y varias medidas.

La medida del Pretest fue única (O_1), para determinar el nivel de partida en conocimientos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro y si había equivalencia de los grupos de Control y Experimental.

Se efectuaron varias medidas de Postest (O_2, O_3, O_4 y O_5) para analizar los distintos objetivos planteados. O_2, O_3, y O_5 hacen referencia a contenidos matemáticos y O_4 al rendimiento en didáctica de la matemática.

En la figura siguiente esquematizamos el diseño de la investigación.

Figura 5.1. Observaciones realizadas

Grupo de Control (Grupo A):	O_1		O_3	O_4	
Grupo Experimental (Grupo B):	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5

5.4. INSTRUMENTOS

Para la ejecución del diseño realizado los instrumentos utilizados han sido de dos tipos: pruebas de conocimientos matemáticos y de conocimientos de didáctica de la matemática, que seguidamente pasamos a explicar.

5.4.1. PRUEBA DE CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

Los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI del año académico 2.001-2.002 acabaron la EGB el curso escolar 1.996-1.997, por ello para conocer su nivel de conocimientos matemáticos de la educación obligatoria se pensó en aplicarles el cuestionario *TIMSS Mathematics Items* del *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) de la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) de 1.995 correspondiente al nivel de EGB, complementado con otros ítems de interés para la investigación.

España forma parte de la IEA y participó en el citado estudio.

Se eligió el test de 1.995 porque la IEA realiza estos estudios cada cuatro años, por lo que el inmediato al de 1.995, el del año 1.999, correspondía a una situación educativa en España, desaparición de la EGB e implantación de la Ley de Ordenación General del Sistema Educativo (LOGSE), distinta a la de realización de los estudios básicos por los referidos estudiantes de Maestro.

5.4.1.1. Presentación de la prueba TIMSS

Consecuencia del interés creciente por la evaluación comparada del rendimiento en matemáticas y en ciencias, durante las últimas décadas han surgido diversas organizaciones internacionales para promover y desarrollar iniciativas de evaluación. Entre estas organizaciones destaca, por su importancia y nivel de actividad *The International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA).

A la vista de los positivos resultados de las experiencias anteriores, la IEA puso en marcha, en 1.991, una evaluación conjunta en matemáticas y ciencias conocida con el nombre de *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS).

El núcleo central del estudio fueron los alumnos de 13 años. El diseño del estudio, la construcción de los instrumentos y su aplicación tuvieron lugar entre 1.991 y 1.995. Participaron en total más de 500.000 alumnos de 15.000 centros docentes de 45 países de todo el mundo.

España, a través del Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE) del Ministerio de Educación y Cultura (MEC), participó en la parte formada por los alumnos que tenían 13 años en el curso 1.994-1.995, pertenecientes a los niveles educativos de 7.º y 8.º de EGB. Las conclusiones que se desprenden del estudio se refieren, pues, a alumnos de EGB y no del Primer ciclo de ESO, porque éste aún no estaba implantado cuando se llevó a cabo el estudio, en el curso escolar 1.994-1.995. Las pruebas se aplicaron durante el mes de mayo y la primera semana de junio de 1.995, participando 153 colegios con 7.596 alumnos, siendo 3.855 de 8.º de EGB y 3.741 de 7.º de EGB.

El contenido que abarcaba el currículum matemático internacional para 7.º y 8.º de EGB fue agrupado según la Categoría del Contenido en las siguientes seis áreas, de las que damos una concisa descripción:

- Fracciones y sentido numérico: operaciones, relaciones y problemas con números naturales, fracciones y números decimales; cálculos y problemas con porcentajes; estimación de operaciones y redondeo de números.

- Geometría: visualización y propiedades de las figuras geométricas en el plano y en el espacio; transformaciones geométricas, simetría, congruencia y semejanza.

- Álgebra: expresiones algebraicas (fórmulas y monomios); sustituciones rutinarias; resolución de problemas que implican patrones, relaciones, expresiones y ecuaciones lineales.

- Representación y análisis de datos. Probabilidad: representación, lectura, interpretación y análisis de datos en cuadros, tablas y gráficos; conocimiento y comprensión de los conceptos básicos del azar y la probabilidad.

- Medida: concepto de medida; interpretación de escalas de medida; unidades de longitud, área, volumen, masa, tiempo; estimación y errores de medida, precisión; problemas de medida.

- Proporcionalidad: concepto y problemas de razón y proporcionalidad. Esta categoría está constituida por contenidos que encajan en alguna de las anteriores, especialmente en la de Fracciones y sentido numérico y en la de Geometría (semejanza).

La prueba TIMSS de rendimiento de matemáticas contenía preguntas de tres tipos: preguntas de elección múltiple, con 4 ó 5 opciones de respuesta entre las que seleccionar la correcta, preguntas abiertas de respuesta corta, en las que bastaba con que el alumno escribiera la respuesta, y preguntas de respuesta extendida, en las que el alumno tenía que explicar en detalle el proceso seguido para llegar a la respuesta.

Los tiempos de respuesta estimados para cada tipo de pregunta eran: 1 minuto, 2 minutos y 5 minutos, respectivamente.

Aproximadamente un cuarto de las preguntas del TIMSS eran de respuesta libre y representaban alrededor del treinta por ciento del tiempo dado a los alumnos para responder.

No todos los alumnos contestaron a las mismas preguntas pero el proceso seguido garantizó que se trataba de pruebas de la misma dificultad. Cada alumno contestó a unas 70 preguntas; en total se usaron 151 de matemáticas. El número de preguntas realizadas cubrió ampliamente el curriculum internacional acordado.

De acuerdo con la política de la IEA, TIMSS reserva un tercio de los ítems para un posible uso futuro en evaluaciones de rendimientos en matemáticas, por lo que en *TIMSS, IEA's Third International Mathematics and Science Study, TIMSS Mathematics Items: Released Set for Population 2 (Seventh and Eighth Grades)* aparecen 102 preguntas, que incluyen todas las de respuesta libre.

Los ítems matemáticos fueron clasificados según las seis categorías de contenidos anteriores de modo que cada pregunta pertenece a una categoría y sólo a una. Cada categoría tenía suficiente número de preguntas como para poder hacer un análisis por separado de la misma.

También fueron clasificados según la Expectativa de Ejecución en:

– Conocimiento

– Procedimiento rutinario

– Uso de procedimiento complejo

– Resolución de problemas.

En la *Table 2: Distribution of Mathematics Items by Content Reporting Category and Performance Expectation - Population 2*[44], aparece la distribución de los tres tipos de preguntas en dos cuadros, en uno según la Categoría del Contenido y en otro según la Expectativa de Ejecución.

En LÓPEZ y MORENO (1.997)[45] se explicita el número de preguntas por subcategoría de contenidos, lo que junto con la *Table 2* completa la información sobre cómo estaba compuesta la prueba del TIMSS.

5.4.1.2. Adaptación de TIMSS al estudio

Para confeccionar el instrumento del Pretest (O_1), a partir de los datos anteriores procedimos a seleccionar una serie de preguntas del TIMSS que respetara los porcentajes de la distribución de la *Table 2* y del número de ítems por subcategoría, lo que condicionado a que el tiempo para responder que dispondrían los estudiantes de Maestro sería de 50 minutos, nos dio como resultado un cuestionario con 33 ejercicios.

En la Tabla 5.1. indicamos la distribución en nuestro cuestionario de los tres tipos de preguntas según la Categoría del Contenido, información equivalente a la correspondiente de la *Table 2* del TIMSS.

Tabla 5.1. Distribución de ítems por Categorías de Contenido

CATEGORÍA DE CONTENIDO	**Número de ítems**	**Número de ítems de múltiple elección**	**Número de ítems de respuesta corta**	**Número de ítems de respuesta extendida**
Fracciones y sentido numérico	11	9	2	0
Geometría	5	5	0	0

[44] *TIMSS, IEA's Third International Mathematics and Science Study, TIMSS Mathematics Items: Released Set for Population 2 (Seventh and Eighth Grades)*
[45] pp. 25, 28, 31, 34, 37 y 40.

Álgebra	6	4	1	1
Representación y análisis de datos. Probabilidad	5	4	0	1
Medida	4	3	1	0
Proporcionalidad	2	1	1	0
Total	33	26	5	2

En la Tabla 5.2. presentamos las subcategorías de cada Categoría de Contenido y entre paréntesis el número de ítems de cada una de ellas en nuestro cuestionario según los porcentajes de distribución del TIMSS.

Tabla 5.2. Subcategorías de Contenido y número de ítems

Categoría de contenido	**Número de ítems**	**SUBCATEGORÍAS**			
Fracciones y sentido numérico	11	**Fracc. ordinarias, significado y representación** (2)	**Operaciones, relaciones y propiedades** (3)	**Números decimales** (3)	**Estimación y sentido numérico** (3)
Geometría	5	**Congruencia y semejanza** (1)		**Otras cuestiones de geometría** (4)	
Álgebra	6	**Ecuaciones lineales** (2)		**Otras cuestiones de álgebra** (4)	
Repr. y análisis de datos. Probabilidad	5	**Representación y análisis de datos** (3)		**Probabilidad** (2)	
Medida	4				
Proporcionalidad	2				

Total	33				

Las categorías de contenido «Medida» y «Proporcionalidad» no tienen subcategorías de contenido.

Y en la Tabla 5.3. mostramos la distribución en nuestro cuestionario de los tres tipos de preguntas según la Expectativa de Ejecución, información equivalente a la correspondiente de la *Table 2* del TIMSS.

Tabla 5.3. Distribución de ítems por Expectativas de Ejecución

EXPECTATIVA DE EJECUCIÓN	**Número de ítems**	**Número de ítems de múltiple elección**	**Número de ítems de respuesta cora**	**Número de ítems de respuesta extendida**
Conocimiento	7	6	1	0
Procedimiento rutinario	8	7	1	0
Uso de procedimientos complejos	7	6	1	0
Resolución de problemas	11	7	2	2
Total	33	26	5	2

Para expresar los resultados y poder efectuar comparaciones, en TIMSS se construyó una escala según la Teoría de Respuesta al Ítem (TRI) (Jornet, 1.987) en la que se sitúan las preguntas según su grado de dificultad. El rendimiento global de cada país en cada materia viene dado por la puntuación media de los alumnos en esa escala. La escala se ajustó de modo que la puntuación media internacional para los alumnos de 13 años, ya sean de 7.º u 8.º de EGB, fuera 500 puntos y la desviación típica 100. El uso de las escalas basadas en TRI para expresar los resultados permite hacer comparaciones con fiabilidad, pero tiene la desventaja de que son difíciles de interpretar.

La adaptación por nosotros realizada tiene un índice medio de dificultad de 546,3 puntos y una desviación típica de 96,93 puntos.

Confeccionado el borrador de los ejercicios y ordenados aleatoriamente, fue aplicado, a modo de ensayo, a los estudiantes de Segundo curso de Maestro-Especialidad de Educación Primaria del año académico 2.001-2.002 y después de la oportuna revisión, obtuvimos el definitivo instrumento del Pretest (O_1), que adjuntamos en el Anexo 5.1.

En la segunda observación (O_2), Postest 1, la prueba de conocimientos matemáticos de EGB que se utilizó fue la misma que en la primera observación, dado que había transcurrido cuatro meses desde su primera aplicación y no era probable que los estudiantes la recordaran.

El análisis de la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos matemáticos de los futuros maestros motivó la realización de una tercera observación (O_3), Postest 2, con otra prueba de contenidos matemáticos de educación obligatoria, el instrumento de la O_3, que adjuntamos en el Anexo 5.2., equivalente estadísticamente al instrumento de la O_1, es decir, del mismo índice medio de dificultad (546,3 puntos) y desviación típica (96,93 puntos), que respetara los porcentajes de la distribución del TIMSS y del número de ítems por subcategoría, con 33 ejercicios para responder en 50 minutos.

De las preguntas del TIMSS cuyo conocimiento es público no fue posible encontrar otros 33 ejercicios que uno a uno fueran equivalentes a los utilizados en la primera observación (O_1), por lo que para la elaboración del instrumento de la O_3 procedimos a la renovación de los enunciados del cuestionario de O_1 mediante la modificación de los datos y/o transformación del contexto, a excepción del ejercicio n.º 7 que es el mismo en ambas pruebas, ejercicios que ordenamos de manera igual que en el cuestionario de O_1, con lo que obtuvimos el borrador del instrumento de la tercera observación, que aplicamos a los estudiantes de Tercer curso de Maestro de

Educación Primaria del año académico 2.002-2.003, los mismos con los que se ensayó el borrador de la O_1. Los resultados de las respuestas del borrador del cuestionario de la tercera observación fueron comparados con los resultados de las respuestas de dichos estudiantes al instrumento de O_1 para comprobar la equivalencia estadística de los cuestionarios de O_1 y O_3.

Para estudiar si con el paso del tiempo se producía pérdida de conocimientos matemáticos de EGB se practicó una última observación (O_5) a los estudiantes asistentes al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, Postest 4. Como había transcurrido más de un año desde la anterior observación del mismo tipo, la prueba que se utilizó fue el cuestionario de la O_3.

5.4.2. PRUEBA DE CONOCIMIENTOS DE DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA

La cuarta observación (O_4), Postest 3, del Estudio Empírico de esta tesis doctoral la constituyó el rendimientos de los estudiantes en la primera convocatoria de exámenes oficiales de las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro de la UJI del año académico 2.002-2.003, concretamente de los estudiantes matriculados por primera vez en estas asignaturas y su rendimiento en los contenidos de los temas comunes de dichas asignaturas, indicados en el Capítulo 4, punto 4.2. Contenidos de las asignaturas.

El instrumento utilizado fue la prueba resultante de elegir, de dichos exámenes oficiales, las preguntas relativas a los contenidos especificados, cuestionario que adjuntamos en el Anexo 5.3.

La prueba de rendimiento en didáctica de la matemática contenía preguntas de dos tipos: preguntas abiertas de respuesta corta y preguntas de respuesta extendida en las que el alumno tenía que explicar en detalle el proceso seguido para llegar a la respuesta.

Las preguntas de didáctica de la matemática fueron clasificadas en lo que denominamos «Didáctica matemática general», aquellos contenidos de didáctica de la matemática que son de aplicación en todos los bloques de contenidos de matemáticas de Educación Primaria, y «Didáctica matemática concreta», contenidos de didáctica de la matemática que son de aplicación concreta, específica, en los diferentes bloques de contenidos de matemáticas de Educación Primaria. En el Anexo 5.3. indicamos las preguntas que pertenecen a cada clase.

Los bloques de contenidos de las matemáticas escolares de Educación Primaria eran los seis bloques correspondientes al Decreto 20/1.992 (DOGV, Núm. 1.728, de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502), vigente en aquellas fechas y por tanto, el que orientaba los programas de las asignaturas de didáctica de la matemática que cursaron los estudiantes de la promoción 2.001 a 2.004.

Según la Expectativa de Ejecución el instrumento de esta cuarta observación contenía preguntas de Conocimiento, de Uso de procedimiento complejo y de Resolución de problemas.

El número de preguntas de cada tipo (respuesta corta o extendida), de cada bloque de contenidos de matemáticas escolares de Educación Primaria y de las diferentes expectativas de ejecución variaba de unos a otros exámenes oficiales de las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro de la UJI según éstas fueran de Primer o Segundo semestre del curso y también según la especialidad de Maestro.

5.5. METODOLOGÍA

La metodología seguida contaba con una muestra formada por un Grupo de Control y otro Experimental, con una temporalización que nos permite concretar cuándo se han aplicado los instrumentos y con unos análisis realizados que nos han permitido ver si se han alcanzado los objetivos establecidos y si se han cumplido las hipótesis formuladas.

5.5.1. MUESTRA

Para el Estudio Empírico de esta tesis doctoral la muestra elegida estaba formaba por los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI del curso académico 2.001-2.002, que se matricularían al año académico siguiente por primera vez en las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de la Diplomatura de Maestro.

5.5.1.1. Grupo de Control

De los integrantes de la muestra constituyeron el Grupo de Control (Grupo A) aquellos estudiantes que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia.*

En la Tabla 5.4. podemos ver el número de estudiantes participantes cada curso académico en las diferentes observaciones.

Tabla 5.4. Estudiantes del Grupo de Control participantes en las observaciones

GRUPO DE CONTROL (Grupo A)		
Curso	**Observación**	**N.º estudiantes**
2.001-2.002	O_1A	171
2.002-2.003	O_3A	165
	O_4A	401

5.5.1.2. Grupo Experimental

De los integrantes de la muestra constituyeron el Grupo Experimental (Grupo B) aquellos estudiantes que asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia.*

En la Tabla 5.5. podemos ver el número de estudiantes participantes cada curso académico en las diferentes observaciones. La ligera fluctuación de la cantidad de estudiantes era debida a que algunos no se encontraban presentes en el momento de la aplicación del instrumento correspondiente.

Tabla 5.5. Estudiantes del Grupo Experimental participantes en las observaciones

GRUPO EXPERIMENTAL (Grupo B)		
Curso	**Observación**	**N.º estudiantes**
2.001-2.002	O_1B	17
	O_2	19
2.002-2.003	O_3B	18
	O_4B	19
2.003-2.004	O_5	19

5.5.2. TEMPORALIZACIÓN

La información de la muestra necesaria para el Estudio Empírico de esta tesis doctoral se consiguió durante los tres cursos académicos de duración de la Diplomatura de Maestro, del 2.001-2.002 al 2.003-2.004, concretamente desde mayo de 2.002 a junio de 2.004.

El instrumento del Pretest (O_1) fue aplicado en mayo de 2.002 a los estudiantes de Primer Curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI, que constituían la muestra de la investigación, para determinar su nivel de conocimientos de contenidos matemáticos. Para su cumplimentación dispusieron de 50 minutos en una clase de su horario lectivo, cedida amablemente por los profesores Inmaculada Cortés, Adela Gonell, Lorenzo Moreda, Vicente Pinto y Amparo Porta, a los que les damos las gracias por su colaboración.

La segunda observación practicada a los estudiantes del Grupo Experimental (O_2), Postest 1, se llevó a cabo en 50 minutos de la última sesión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, curso impartido en el mes de septiembre de 2.002. Con ella queríamos precisar el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de este grupo, para poder compararlo con su nivel en el Pretest y analizar la repercusión del *Curs Zero*.

La aplicación del cuestionario a los componentes de la muestra del Estudio Empírico de esta tesis doctoral, correspondiente a la tercera observación (O_3), Postest 2, tuvo lugar el mes de mayo de 2.003. Durante 50 minutos de una clase lectiva de una asignatura de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, pudieron responder a las 33 preguntas que formaban el instrumento para medir su nivel de conocimientos matemáticos de educación obligatoria y con él analizar la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los futuros maestros.

La recogida de la información correspondiente a la cuarta observación (O_4), Postest 3, se efectuó durante el mes de enero de 2.003, en las fechas marcadas para los exámenes oficiales de las asignaturas de Primer semestre del Segundo curso de Maestro, y durante el mes de junio del mismo año, en las fechas marcadas para los exámenes oficiales de las asignaturas de Segundo semestre y Anuales del Segundo curso de Maestro. Con los datos del rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática queríamos establecer la posible repercusión que los conocimientos matemáticos puedan tener en dichas asignaturas.

A los miembros del Grupo Experimental se les realizó otra observación (O_5), Postest 4, en junio de 2.004, cuando estudiaban Tercer curso de Maestro, siendo citados expresamente para ello, dado que algunos no cursaban asignaturas de didáctica de la matemática, disponiendo de 50 minutos para responder a las correspondientes 33 cuestiones. El motivo de esta observación era estudiar si con el paso del tiempo se producía pérdida de conocimientos matemáticos de educación obligatoria.

Con la finalidad de conseguir la máxima participación se eligieron fechas de aplicación de los instrumentos lo más adecuadas posible, considerando entre otros factores:

– encontrarse en pleno desarrollo de las clases, salvo en los casos justificados de O_4 y O_5;

– no avisar con anterioridad a los estudiantes de la fecha y hora de aplicación, exceptuando en O_4 y O_5;

– instar a los asistentes en ese momento a contestar los cuestionarios en aras de lograr mejorar en aquello que sea posible, descontado el caso obvio de O_4 por tratarse de un examen oficial.

5.5.3. ANÁLISIS REALIZADOS

Los análisis realizados han sido varios, dependiendo de los objetivos planteados y de las hipótesis formuladas. Siguiendo la enumeración de los objetivos y de las hipótesis enunciados en el apartado 5.2., los análisis efectuados han sido los siguientes:

– Objetivo 1.º Determinar el nivel de los estudiantes de Primer curso de Maestro en conocimientos de contenidos matemáticos.

  • Descriptivo de Pretest (O_1): mediante la contabilización de las respuestas de los estudiantes correspondientes a cada uno de los tipos correctas, incorrectas y no responden (N. R.), y su expresión en frecuencias absolutas y relativas (porcentajes), utilizando el programa Excel.

– Hipótesis 1.ª El nivel de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes de Maestro que no asistieron y de los que asistieron al *Curs Zero* es equivalente.

  • Contraste en el Pretest: Prueba U de Mann-Whitney.

– Objetivo 2.º Analizar la repercusión del *Curs Zero* en el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes.

- Descriptivos de Postest 1 (O_2), Postest 2 (O_3) y Postest 4 (O_5): análogamente que en el Pretest.

– Hipótesis 2.1. El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes.

- Contrastes:
    - o Prueba U de Mann-Whitney:
        - * en el Grupo de Control entre el Pretest (O_1A) y el Postest 2 (O_3A)
        - * en el Postest 2 (O_3), entre los dos grupos de la muestra.
    - o Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon: en el Grupo Experimental entre el Pretest (O_1B) y el Postest 1 (O_2).

– Hipótesis 2.2. El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* se mantiene en el tiempo.

- Contrastes: Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon entre las medidas del Grupo Experimental: Postest 1 (O_2), Postest 2 (O_3B) y Postest 4 (O_5).

– Objetivo 3.º Establecer la posible repercusión que los conocimientos matemáticos puedan tener en las asignaturas de didáctica de la matemática.

- Descriptivo de Postest 3 (O_4): mediante la contabilización de las notas del rendimiento de los estudiantes en las asignaturas de didáctica de la matemática, que para una mayor uniformización de la descripción agrupamos en calificaciones correspondientes a las categorías cualitativas matrícula de honor, sobresaliente, notable, aprobado, suspenso y no presentado, y su expresión en frecuencias absolutas y relativas, utilizando el programa Excel. En el Capítulo 7, Estudio Inferencial, obtuvimos también medias aritméticas, desviaciones típicas y coeficientes de variación de las notas, utilizando el programa estadístico SPSS versiones16 a 18.

– Hipótesis 3.1. El rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero* es mejor que el de los no asistentes.

- Contrastes:
  - o Prueba T para muestras independientes en Postest 3 (O_4) entre los dos grupos de la muestra:
    - * del rendimiento en didáctica de la matemática
    - * del rendimiento en didáctica matemática general
    - * del rendimiento en didáctica matemática concreta.
  - o Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon entre medidas del rendimiento en didáctica matemática general y concreta:
    - * del Grupo de Control en Postest 3 (O_4A)
    - * del Grupo del Experimental en Postest 3 (O_4B).

– Hipótesis 3.2. Existe una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero*.

- Contrastes: Correlaciones en
  - o el Grupo Experimental entre todas las medidas: Postest 1 (O_2), Postest 2 (O_3B), Postest 3 (O_4B) y Postest 4 (O_5)

- o en Maestro-Especialidad de Educación Física (MEF) y de Educación Musical (MEM) del Grupo Experimental, entre las medidas Postest 3 (O_4B) y Postest 4 (O_5)
- o en Maestro-Especialidad de Educación Infantil (MEI) y de Educación Primaria (MEP) del Grupo Experimental, entre las medidas Postest 3 (O_4B) y Postest 4 (O_5).

Para todos estos análisis utilizamos el paquete estadístico SPSS versiones 16 a 18.

En la Tabla 5.6. resumimos los análisis realizados para cada objetivo e hipótesis del estudio.

Tabla 5.6. Análisis realizados para los objetivos e hipótesis

		ANÁLISIS REALIZADOS	
		Descriptivos	**Contrastes**
OBJETIVOS	**1.º**	Frecuencias absolutas y relativas de O_1	Prueba U de Mann-Whitney en el Pretest
	2.º	Frecuencias absolutas y relativas de O_2, O_3 y O_5	Prueba U de Mann-Whitney: entre Pretest (O_1A) y Postest 2 (O_3A), y en el Postest 2 (O_3). Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon entre las medidas del Grupo Experimental.
	3.º	Frecuencias absolutas y relativas, media aritmética, desviación típica y coeficiente de variación de O_4	Prueba T para muestras independientes en O_4 en: didáctica de la matemática; didáctica matemática general, y didáctica matemática concreta. Correlaciones entre las medidas del Grupo Experimental, y entre O_4B y O_5 en MEF-MEM y en MEI-MEP.

Capítulo 6: ESTUDIO DESCRIPTIVO

Presentamos los resultados del Estudio Descriptivo de las medidas realizadas a los estudiantes de Maestro de la UJI en conocimientos matemáticos y también en rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática con los instrumentos explicados en el Capítulo 5.

6.1. CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

Las medidas de estos conocimientos corresponden a las observaciones Pretest (O_1), Postest 1 (O_2), Postest 2 (O_3) y Postest 4 (O_5). La primera y tercera lo son de toda la muestra y la segunda y cuarta sólo del Grupo Experimental, por lo que en aquéllas expondremos primero los resultados globales, luego los del Grupo de Control y finalmente los del Grupo Experimental.

6.1.1. EL PRETEST (O_1)

Presentamos a continuación los resultados de la realización del Primer objetivo «Determinar el nivel de los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro de la UJI del año académico 2.001-2.002 en conocimientos de contenidos conceptuales, ejecución de algoritmos, utilización de contenidos procedimentales complejos y resolución de problemas, en los campos matemáticos Aritmética, Álgebra, Medida, Geometría, Estadística y Probabilidad, y Proporcionalidad», fruto de la aplicación del instrumento de la Primera Observación (O_1) en mayo de 2.002.

Posteriormente, en el Capítulo 7, punto 7.1., utilizaremos estos resultados para la contrastación de la Primera Hipótesis, la equivalencia de los grupos Control y Experimental, así como también para el trabajo relativo al Segundo Objetivo y las dos partes de su Hipótesis, apartado 7.2.

6.1.1.1. Globales (O_1)

La Tabla 6.1. contiene los resultados por categorías de contenidos y totales en el Pretest, observación O_1, de los estudiantes de Maestro de la UJI.

Para poder apreciar y valorar en su justa medida los resultados, en esta tabla y en todas las relativas a categorías de contenido en cada medida realizada, indicaremos el índice de dificultad medio de cada categoría y de la prueba global. También presentaremos los resultados de la prueba completa.

Tabla 6.1. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Pretest (O_1)

Categoría de Contenido	Índices dificultad	N.º preguntas	Respuestas			
			Correctas	Incorrectas	N. R.	Total
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	1.316 *(63,64%)*	511 *(24,71%)*	241 *(11,65%)*	2.068 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	503 *(53,51%)*	305 *(32,45%)*	132 *(14,04%)*	940 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	770 *(68,26%)*	262 *(23,23%)*	96 *(8,51%)*	1.128 *(100%)*

REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	671 *(71,38%)*	195 *(20,74%)*	74 *(7,87%)*	940 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	458 *(60,90%)*	201 *(26,73%)*	93 *(12,37%)*	752 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	202 *(53,72%)*	93 *(24,73%)*	81 *(21,54%)*	376 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	3.920 *(63,19%)*	1.567 *(25,26%)*	717 *(11,56%)*	6.204 *(100%)*

El nivel de dificultad de cada pregunta se estableció de modo que alumnos con una puntuación global en la escala de rendimiento igual o superior a ese nivel de dificultad, tienen una probabilidad mayor de saber la respuesta (un 65% de probabilidad) que de no saberla (López y Moreno, 1.997, p. 24).

El rendimiento medio de los alumnos españoles de EGB era de 487, aproximadamente 500, índice medio de dificultad del cuestionario del TIMSS. La prueba por nosotros confeccionada tiene un índice medio de dificultad de 546, no llega a un 10% superior a la del TIMSS, y los futuros maestros estudiaron matemáticas al menos dos cursos más, en Primero y Segundo de Bachillerato Unificado Polivalente (BUP), por lo que su nivel matemático debería ser considerablemente superior al de los estudiantes de EGB, lo que permitiría ser optimistas en que obtuvieran un porcentaje de respuestas correctas ampliamente superior al 65%, siendo realmente del 63,19%, como vemos en la última fila de la tabla anterior.

Este porcentaje no nos sorprende dadas las investigaciones presentadas en el Capítulo 5, en el apartado 5.1., que informaban sobre el bajo nivel de conocimientos matemáticos de los futuros maestros, entre las cuales Abraira y González (1.995) y Salinas (2.003), relativas a las Escuelas Universitarias de Profesorado de EGB de la Universidad de León y de las universidades de Galicia respectivamente, proporcionaban datos numéricos que nos permiten justificar esa impresión.

Los mejores resultados porcentuales en los tres tipos de respuestas aparecen en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad», y los peores en «Geometría» seguida por «Proporcionalidad».

Al considerar los índices de dificultad medio de cada categoría para explicar los resultados, como procede para ser más objetivos, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores porcentajes, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», no alcanza los números más negativos.

Además, «Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, no equidistan también en los tantos por ciento de las preguntas en los sentidos que les corresponden: por ejemplo, en las respuestas correctas, «Álgebra» sale 5 puntos por encima del total de la prueba y en cambio, «Geometría» está casi 10 puntos por debajo; algo parecido, pero no tan acusado, ocurre en las respuestas incorrectas.

Por tanto, parece desprenderse que la categoría en que los estudiantes de Maestro se encuentran peor preparados es «Geometría».

Seguidamente exponemos los resultados por subcategorías de contenido en el Pretest, observación O_1, de los estudiantes de Maestro de la UJI. El orden de exposición va a ser el mismo que adoptamos en la presentación de los resultados por categorías de contenidos.

A. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico»

En la Tabla 6.2. tenemos los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico». De manera análoga a como hemos hecho en la Tabla 6.1., para poder considerar e interpretar mejor los resultados, en ésta y en todas las tablas relativas a subcategorías de contenido en cada medida realizada, indicaremos el índice de dificultad medio de cada subcategoría, de la categoría y de la prueba completa. También presentaremos los resultados globales de la categoría y de la prueba.

Tabla 6.2. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Pretest (O_1)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	210 *(55,85%)*	143 *(38,03%)*	23 *(6,12%)*	376 *(100%)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	381 *(67,55%)*	110 *(19,50%)*	73 *(12,94%)*	564 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	371 *(65,78%)*	139 *(24,65%)*	54 *(9,57%)*	564 *(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	354 *(62,77%)*	119 *(21,10%)*	91 *(16,13%)*	564 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	1.316 *(63,64%)*	511 *(24,71%)*	241 *(11,65%)*	2.068 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.920 *(63,19%)*	1.567 *(25,26%)*	717 *(11,56%)*	6.204 *(100%)*

Vemos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es muy poco superior al de la totalidad de la prueba.

Los mejores resultados porcentuales mejores en aparecen en la subcategoría «Operaciones, relaciones y propiedades», y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Considerando los índices de dificultad medio de cada subcategoría para relacionarlas más ecuánimemente, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», no obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al del total de la categoría, recoge unos resultados de respuestas correctas ligeramente inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad superior al del total de la prueba, consigue unos resultados porcentuales de aciertos inferiores a los globales de la prueba en la misma cantidad de puntos.

B. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Geometría»

Exponemos en la Tabla 6.3. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Pretest (O_1).

Tabla 6.3. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Pretest (O_1)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	66 *(35,11%)*	90 *(47,87%)*	32 *(17,02%)*	188 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	437 *(58,11%)*	215 *(28,59%)*	100 *(13,30%)*	752 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	503 *(53,51%)*	305 *(32,45%)*	132 *(14,04%)*	940 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.920 *(63,19%)*	1.567 *(25,26%)*	717 *(11,56%)*	6.204 *(100%)*

Podemos apreciar claramente en esta tabla que el índice de dificultad de la categoría de contenido «Geometría» no es la media aritmética de los índices de las subcategorías «Congruencia y semejanza» y «Otras cuestiones de Geometría» que la forman, como tampoco el índice de dificultad de la prueba es la media aritmética de los índices de las categorías que la integran, porque cada uno de estos índices de dificultad se ha calculado como la media aritmética de los índices de los ejercicios que componen la subcategoría, la categoría o prueba completa, respectivamente.

Hemos visto en la Tabla 6.1., resultados por categorías de contenidos en el Pretest (O_1), que los peores resultados eran los de «Geometría», con un 53,51% de respuestas correctas, ahora podemos decir que ese porcentaje tan bajo se debe por un lado a la subcategoría «Congruencia y semejanza», en la que el único ejercicio de que consta, con un índice de dificultad de 639,0 puntos, consigue un 35,11% de respuestas correctas, tanto por ciento corto pero comprensible por su índice de dificultad, pero si consideramos que la categoría de contenidos «Proporcionalidad», con un índice de dificultad superior, 648,0 puntos, tienen unas respuestas correctas del 53,72%, bastante mayor que el 35,11% de «Congruencia y semejanza», nos permite pensar que realmente sí es bajo el nivel de respuestas correctas de esta subcategoría, el menor de todas las categorías y subcategorías del Pretest (O_1).

Por otro lado los bajos resultados de respuestas correctas de la categoría de contenido «Geometría» también se deben a la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría», que con un índice de dificultad de 539,8 puntos, inferior al de toda la prueba (546,3 puntos), tiene unos aciertos del 58,11%, que lógicamente debería superar al del cuestionario completo, 63,19%, no siendo así.

C. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Álgebra»

Los resultados de las subcategorías de «Álgebra» aparecen en la Tabla 6.4.

Tabla 6.4. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Pretest (O_1)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	309 *(82,18%)*	40 *(10,64%)*	27 *(7,18%)*	376 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	461 *(61,30%)*	222 *(29,52%)*	69 *(9,18%)*	752 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	770 *(68,26%)*	262 *(23,23%)*	96 *(8,51%)*	1.128 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.920 *(63,19%)*	1.567 *(25,26%)*	717 *(11,56%)*	6.204 *(100%)*

Observamos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es superior al de la totalidad de la prueba.

Las dos subcategorías que forman «Álgebra» tiene un índice medio de dificultad prácticamente igual, en cambio el porcentaje de respuestas correctas es notablemente distinto y en sentido inverso respecto de lo que cabría esperar, por tanto: «Ecuaciones lineales» (82,18%) es responsable del buen nivel de los estudiantes en esta categoría y «Otras cuestiones de Álgebra» (61,30%) evita que los rendimientos puedan ser más brillantes.

La subcategoría «Ecuaciones lineales» con su 82,18% de respuestas correctas alcanza el máximo de las categorías y subcategorías del Pretest (O_1). Una posible explicación de tan buen resultado puede ser que las ecuaciones lineales son un contenido que se trabaja bastante en la Educación Secundaria y por lo que se ve, lo aprenden los alumnos.

D. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

La categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad» ha obtenido en el Pretest (O_1) unos resultados que concretamos en la Tabla 6.5.

Tabla 6.5. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Pretest (O_1)

REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	431 *(76,42%)*	82 *(14,54%)*	51 *(9,04%)*	564 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	240 *(63,83%)*	113 *(30,05%)*	23 *(6,12%)*	376 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	671 *(71,38%)*	195 *(20,74%)*	74 *(7,87%)*	940 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.920 *(63,19%)*	1.567 *(25,26%)*	717 *(11,56%)*	6.204 *(100%)*

La responsable de que esta categoría sea la de mayor éxito en las respuestas correctas de los estudiantes de Maestro es la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», como podemos ver en la Tabla 6.5., debido a que la otra subcategoría, «Probabilidad», ha obtenido unos resultados peores, pues con un índice de dificultad de 510 puntos obtiene sólo un 63,83% de aciertos, cuando en el conjunto de la prueba los números son: 546,3 puntos y 63,19%.

Las categorías de contenidos «Medida» y «Proporcionalidad» no tiene subcategorías, razón por la cual no mostramos tablas análogas a las anteriores y tampoco lo haremos en la descripción de los resultados de los grupos que integran la muestra, ni en las otras medidas de los conocimientos matemáticos.

Los resultados presentados en este apartado A. Globales (O_1) formaban parte del Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado realizado, del que esta tesis doctoral es la culminación.

6.1.1.2. Grupo de Control (O_1A)

En la Tabla 6.6. mostramos los resultados del Pretest para el Grupo de Control, observación O_1A, en un formato idéntico al de la Tabla 6.1. Es decir, tenemos aquí el nivel en conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de Maestro que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*.

Tabla 6.6. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Pretest Grupo Control (O_1A)

Categoría de Contenido	Índices dificultad	N.º preguntas	Respuestas			
			Correctas	Incorrectas	N. R.	Total
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	1.195 *(63,53%)*	465 *(24,72%)*	221 *(11,75%)*	1.881 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	459 *(53,68%)*	274 *(32,05%)*	122 *(14,27%)*	855 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	699 *(68,13%)*	238 *(23,20%)*	89 *(8,67%)*	1.026 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	604 *(70,64%)*	183 *(21,40%)*	68 *(7,95%)*	855 *(100%)*

MEDIDA	523,5	4	416 *(60,82%)*	183 *(26,75%)*	85 *(12,43%)*	684 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	183 *(53,51%)*	86 *(25,15%)*	73 *(21,35%)*	342 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	3.556 *(63,02%)*	1.429 *(25,32%)*	658 *(11,66%)*	5.643 *(100%)*

El porcentaje total de aciertos de este grupo 63,02%, es ligeramente inferior al de la totalidad de la muestra (63,19%).

Como en los resultados porcentuales globales, los mejores en los tres tipos de respuestas aparecen también en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad». Los peores en cambio son los de «Proporcionalidad» seguidos muy de cerca por los de «Geometría».

Es ahora la categoría de contenidos «Proporcionalidad» en la que los estudiantes del Grupo de Control se encuentran peor preparados.

Teniendo en cuenta los índices de dificultad medio de cada categoría para referirnos a ellas con más objetividad, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», sí alcanza los números más negativos.

Las categorías «Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, no equidistan también en los porcentajes de las preguntas en los sentidos debidos. En las respuestas correctas, «Álgebra» sale 5 puntos por encima del total de la prueba y en cambio, «Geometría» está casi 10 puntos por debajo; algo parecido, pero menos acusado, ocurre en las respuestas incorrectas.

A continuación, de manera análoga al apartado A. Globales (O_1) ofrecemos los resultados por subcategorías de contenido en el Pretest para el Grupo de Control, observación O_1A, estudiantes de Primer curso de Maestro que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*.

A. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

Exponemos en la Tabla 6.7. los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.7. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	192 *(56,14%)*	131 *(38,30%)*	19 *(5,56%)*	342 *(100,00 %)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	345 *(67,25%)*	100 *(19,49%)*	68 *(13,26%)*	513 *(100,00 %)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	334 *(65,11%)*	129 *(25,15%)*	50 *(9,75%)*	513 *(100,00 %)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	324 *(63,16%)*	105 *(20,47%)*	84 *(16,37%)*	513 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	1.195 *(63,53%)*	465 *(24,72%)*	221 *(11,75%)*	1.881 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.556 *(63,02%)*	1.429 *(25,32%)*	658 *(11,66%)*	5.643 *(100%)*

Reconocemos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es 0,5% superior al de la totalidad de la prueba.

Los mejores resultados porcentuales en aparecen en la subcategoría «Operaciones, relaciones y propiedades», y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Considerando los índices de dificultad medio de cada subcategoría para ser más ecuánimes en los comentarios, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», no obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al total de la categoría, recoge unos resultados muy ligeramente inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad superior al del total de la prueba, consigue unos resultados porcentuales inferiores a los globales de la prueba en la misma cantidad de puntos.

B. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Geometría» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

Exponemos en la Tabla 6.8. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Pretest del Grupo de Control (O_1A).

Tabla 6.8. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	62 *(36,26%)*	79 *(46,20%)*	30 *(17,54%)*	171 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	397 *(58,04%)*	195 *(28,51%)*	92 *(13,45%)*	684 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	459 *(53,68%)*	274 *(32,05%)*	122 *(14,27%)*	855 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.556 *(63,02%)*	1.429 *(25,32%)*	658 *(11,66%)*	5.643 *(100%)*

Observamos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es inferior aproximadamente en un 10% al del total de la prueba.

En la Tabla 6.6., resultados por categorías de contenidos en el Pretest (O_1A), teníamos que los peores resultados eran los de «Proporcionalidad», con un 53,51% de respuestas correctas, con un índice de dificultad de 648,0 puntos, ahora la subcategoría «Congruencia y semejanza», formada por un ejercicio, con un índice de dificultad de 639,0 puntos, consigue un 36,26% de respuestas correctas, tanto por ciento realmente bajo, el menor de todas las categorías y subcategorías del Pretest (O_1A).

Las respuestas correctas de la categoría de contenido «Geometría» alcanzan bajos resultados debido también a la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría», que con un índice de dificultad de 539,8 puntos, inferior al de toda la prueba (546,3 puntos), tiene unos aciertos del 58,04%, que lógicamente debería superar al del cuestionario completo, 63,02%, y no es así.

C. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Álgebra» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

Los resultados del Grupo de Control en el Pretest (O_1A) en las subcategorías de «Álgebra» aparecen en la Tabla 6.9.

Tabla 6.9. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	280 *(81,87%)*	36 *(10,53%)*	26 *(7,60%)*	342 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	419 *(61,26%)*	202 *(29,53%)*	63 *(9,21%)*	684 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	699 *(68,13%)*	238 *(23,20%)*	89 *(8,67%)*	1026 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.556 *(63,02%)*	1.429 *(25,32%)*	658 *(11,66%)*	5.643 *(100%)*

El porcentaje de aciertos de la categoría, 68,13%, es superior al del total de la prueba, 63,02%.

El índice medio de dificultad de las dos subcategorías que conforman «Álgebra» es prácticamente igual, en cambio el tanto por ciento de respuestas correctas es notablemente distinto y en sentido inverso respecto de lo que cabría esperar. «Ecuaciones lineales» (81,87%) es responsable del buen nivel de los estudiantes en esta categoría y «Otras cuestiones de Álgebra» (61,26%) evita que los rendimientos puedan ser más brillantes.

Con su 81,87% de respuestas correctas la subcategoría «Ecuaciones lineales» alcanza el máximo de las categorías y subcategorías del Pretest (O_1A). Una posible explicación de tan buen resultado puede ser que las ecuaciones lineales son un contenido que se trabaja bastante en la Educación Secundaria y por lo que se ve, lo aprenden.

D. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

El Grupo de Control, en la categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad», ha obtenido unos resultados que indicamos en la Tabla 6.10.

Tabla 6.10. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Pretest Grupo Control (O_1A)

REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	386 *(75,24%)*	79 *(15,40%)*	48 *(9,36%)*	513 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	218 *(63,74%)*	104 *(30,41%)*	20 *(5,85%)*	342 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	604 *(70,64%)*	183 *(21,40%)*	68 *(7,95%)*	855 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.556 *(63,02%)*	1.429 *(25,32%)*	658 *(11,66%)*	5.643 *(100%)*

Esta categoría es la de mayor éxito en las respuestas de estos estudiantes, la razón es debida a la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», como podemos ver en la tabla anterior, pues la otra subcategoría, «Probabilidad», ha obtenido unos resultados peores absoluta y relativamente, ya que con un índice de dificultad de 510 puntos obtiene sólo un 63,74% de aciertos, cuando en el conjunto de la prueba los números son: 546,3 puntos y 63,02%.

6.1.1.3. Grupo Experimental (O_1B)

Los resultados del Pretest para el Grupo Experimental, los estudiantes de Primer curso de Maestro que asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia,* observación O_1B, se presentan en la Tabla 6.11.

Tabla 6.11. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

Categoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	121 *(64,71%)*	46 *(24,60%)*	20 *(10,70%)*	187 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	44 *(51,76%)*	31 *(36,47%)*	10 *(11,76%)*	85 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	71 *(69,61%)*	24 *(23,53%)*	7 *(6,86%)*	102 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	67 *(78,82%)*	12 *(14,12%)*	6 *(7,06%)*	85 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	42 *(61,76%)*	18 *(26,47%)*	8 *(11,76%)*	68 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	19 *(55,88%)*	7 *(20,59%)*	8 *(23,53%)*	34 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	364 *(64,88%)*	138 *(24,60%)*	59 *(10,52%)*	561 *(100%)*

El porcentaje total de aciertos del Grupo Experimental es del 64,88%, superior en un 1,8% al de la totalidad de la muestra del Pretest de la investigación de la presente tesis doctoral.

Los mejores resultados porcentuales en los tres tipos de respuestas aparecen también en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad». Los peores son los de «Geometría» seguidos por «Proporcionalidad».

Los estudiantes del Grupo Experimental también coinciden con la globalidad de la muestra en estar peor preparados en la categoría de contenidos «Geometría».

Considerando los índices de dificultad medio de cada categoría para ser más objetivos, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores tanto por ciento, como cabría esperar, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», alcanza los segundos números más negativos.

«Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, no equidistan también en los porcentajes de las preguntas en los sentidos que serían congruentes. Así en las respuestas correctas, «Álgebra» sale 5 puntos por encima del total del Grupo Experimental y en cambio, «Geometría» está 13 puntos por debajo. En las respuestas incorrectas «Álgebra» está un punto por debajo, en cambio «Geometría» está 12 puntos por encima.

Veamos a continuación los resultados por subcategorías de contenido en el Pretest del Grupo Experimental.

A. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

En la Tabla 6.12. tenemos los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.12. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	18 *(52,94%)*	12 *(35,29%)*	4 *(11,76%)*	34 *(100%)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	36 *(70,59%)*	10 *(19,61%)*	5 *(9,80%)*	51 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	37 *(72,55%)*	10 *(19,61%)*	4 *(7,84%)*	51 *(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	30 *(58,82%)*	14 *(27,45%)*	7 *(13,73%)*	51 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	121 *(64,71%)*	46 *(24,60%)*	20 *(10,70%)*	187 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	364 *(64,88%)*	138 *(24,60%)*	59 *(10,52%)*	561 *(100%)*

Podemos ver en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es muy poco inferior al de la totalidad de la prueba.

Los mejores resultados porcentuales en aparecen en la subcategoría «Números decimales», a diferencia del otro grupo que forma la muestra y del total de ésta, y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación», como esos colectivos de estudiantes.

Considerando los índices de dificultad medio de cada subcategoría para ser más ecuánimes en los comentarios, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», sí obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al total de la categoría, recoge unos resultados de respuestas correctas un 6% inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad superior al del total de la prueba, consigue unos resultados porcentuales de aciertos inferiores a los globales de la prueba en casi el doble de puntos.

B. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Geometría» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

Mostramos en la Tabla 6.13. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Pretest del Grupo Experimental (O_1B).

Tabla 6.13. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	4 *(23,53%)*	11 *(64,71%)*	2 *(11,76%)*	17 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	40 *(58,82%)*	20 *(29,41%)*	8 *(11,76%)*	68 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	44 *(51,76%)*	31 *(36,47%)*	10 *(11,76%)*	85 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	364 *(64,88%)*	138 *(24,60%)*	59 *(10,52%)*	561 *(100%)*

Observamos en esta tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es un 13% inferior al del total de la prueba.

En el Pretest (O_1B), los resultados de la categoría «Geometría» eran los peores, ahora podemos saber la razón. La subcategoría «Congruencia y semejanza», formada por un ejercicio con índice de dificultad de 639,0 puntos, consigue un 23,53% de respuestas correctas, el tanto por ciento más bajo que hemos visto hasta el momento.

C. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Álgebra» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

Las subcategorías de «Álgebra» aparecen en la Tabla 6.14. con los resultados del Pretest en el Grupo Experimental.

Tabla 6.14. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	29 *(85,29%)*	4 *(11,76%)*	1 *(2,94%)*	34 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	42 *(61,76%)*	20 *(29,41%)*	6 *(8,82%)*	68 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	71 *(69,61%)*	24 *(23,53%)*	7 *(6,86%)*	102 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	364 *(64,88%)*	138 *(24,60%)*	59 *(10,52%)*	561 *(100%)*

Esta categoría tiene un porcentaje de aciertos superior al de la totalidad de la prueba.

Las dos subcategorías que conforman «Álgebra» tiene un índice medio de dificultad prácticamente igual, en cambio el resultado porcentual de respuestas correctas es notablemente distinto y en sentido inverso respecto de lo que cabría esperar. «Ecuaciones lineales» con un 85,29% de respuestas correctas es responsable del buen nivel de conocimientos de los estudiantes en esta categoría y supera los tanto por ciento de ella en la muestra global y el Grupo de Control. La subcategoría «Otras cuestiones de Álgebra» (61,76%) evita que los resultados puedan ser más brillantes.

D. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

La categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad» ha obtenido en el Pretest del Grupo Experimental (O_1B) unos resultados que precisamos en la Tabla 6.15.

Tabla 6.15. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Pretest Grupo Experimental (O_1B)

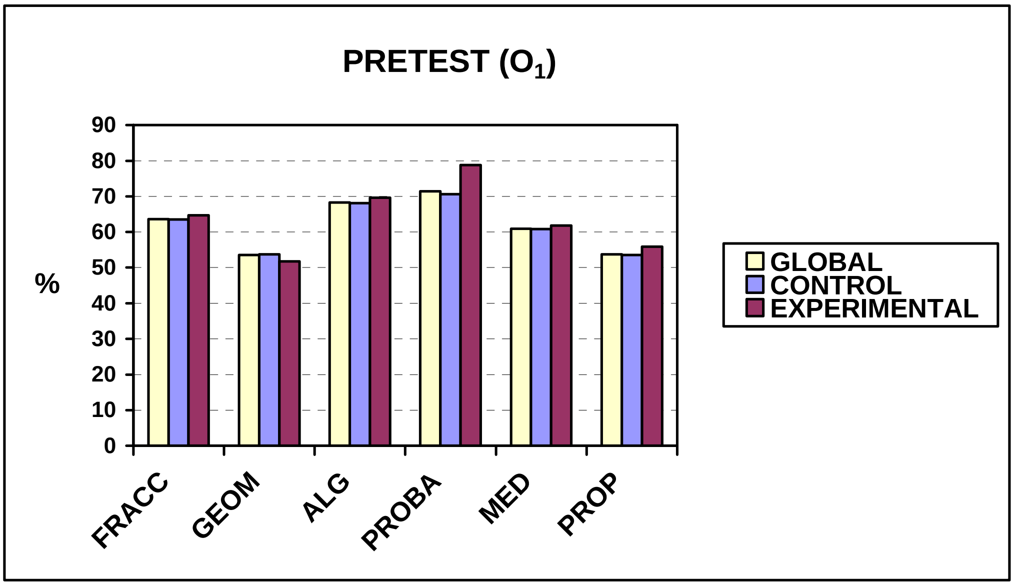
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	45 *(88,24%)*	3 *(5,88%)*	3 *(5,88%)*	51 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	22 *(64,71%)*	9 *(26,47%)*	3 *(8,82%)*	34 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	67 *(78,82%)*	12 *(14,12%)*	6 *(7,06%)*	85 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	364 *(64,88%)*	138 *(24,60%)*	59 *(10,52%)*	561 *(100%)*

Vemos en la tabla que la responsable de que esta categoría sea la de mayor éxito en las respuestas de los estudiantes del Grupo Experimental es la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», que asimismo con su 88,24% alcanza el valor más alto hasta el momento. En cambio, «Probabilidad» ha obtenido unos resultados mucho peores, pues con un índice de dificultad más bajo, 510 puntos, obtiene sólo un 64,71% de aciertos, cuando además en el conjunto de la prueba los números son: 546,3 puntos y 64,88%.

6.1.1.4. Síntesis

Mostramos el Gráfico 6.1. como resumen de los resultados totales de aciertos del Global de la muestra y de los grupos Control y Experimental en el Pretest 1 (O_1), en cada una de las seis categorías de contenido matemático.

Gráfico 6.1. Resultados totales por categorías de contenido en el Pretest 1 (O_1)



Apreciamos claramente en el diagrama como el máximo corresponde a «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en los tres colectivos (71,38%, 70,64% y 78,82% respectivamente), siendo los mínimos en «Geometría» en el Global (53,51%), en «Proporcionalidad» en el Grupo de Control (53,51%) y también en «Geometría» en el Experimental (51,76%).

De las categorías de contenido en los tres colectivos alcanza el máximo de respuestas correctas «Representación y análisis de datos. Probabilidad» con un 78,82% en el Grupo Experimental y el mínimo «Geometría» con un 51,76% también en el Experimental.

En las subcategorías de contenido el máximo se alcanzó en «Representación y análisis de datos» del Grupo Experimental con un 88,24% y el mínimo en «Congruencia y semejanza» con un 23,53% en el mismo grupo.

Coincide que la categoría que alcanza la máxima cantidad de repuestas correctas contiene la subcategoría análoga y lo mismo ocurre respecto del número mínimo de aciertos.

6.1.2. POSTEST 1 (O_2)

Exponemos en la Tabla 6.16. los resultados del Postest 1 (O_2), unos de los necesarios para la consecución del Segundo Objetivo «Analizar la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes».

La obtención de los datos precisos tuvo lugar en septiembre de 2.002 y con los resultados realizamos varios estudios, que presentamos en el Capítulo 7, punto 7.2., para contrastar las hipótesis 2.1. y 2.2., el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes y esta diferencia se mantiene en el tiempo.

Tabla 6.16. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Postest 1 (O_2)

Categoría de Contenido	Índices dificultad	N.º preguntas	Respuestas			
			Correctas	Incorrectas	N. R.	Total
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	169 *(80,86%)*	30 *(14,35%)*	10 *(4,78%)*	209 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	72 *(75,79%)*	21 *(22,11%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	91 *(79,82%)*	15 *(13,16%)*	8 *(7,02%)*	114 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	79 *(83,16%)*	14 *(14,74%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	63 *(82,89%)*	12 *(15,79%)*	1 *(1,32%)*	76 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	28 *(73,68%)*	7 *(18,42%)*	3 *(7,89%)*	38 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	502 *(80,06%)*	99 *(15,79%)*	26 *(4,15%)*	627 *(100%)*

Observamos en la tabla como el porcentaje total de respuestas correctas ha subido hasta el 80,06%, cuando la medida del Pretest de este grupo fue del 64,88%.

Los mejores resultados porcentuales en respuestas correctas aparecen como es habitual en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad», que han aumentado respecto del Pretest en un 4,5% aproximadamente. Los peores en cambio son los de «Proporcionalidad» (que también han mejorado, aproximadamente un 17,5%), seguidos por los resultados de «Geometría» (incrementados en un 24%) que fueron los peores en el Pretest.

Al tener en cuenta los índices de dificultad medio de cada categoría, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores tanto por ciento, como cabría esperar, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», sí alcanza los números más negativos.

Las categorías «Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, no equidistan también en los porcentajes de las preguntas en los sentidos acordes: por ejemplo, en las respuestas correctas, «Álgebra» está prácticamente igualada con el total de la prueba y en cambio, «Geometría» está poco más de 4 puntos por debajo. En las respuestas incorrectas «Álgebra» está aproximadamente 2,5 puntos por debajo, en cambio «Geometría» está algo más de 6 puntos por encima.

Pasamos a ofrecer seguidamente por categorías los resultados de las correspondientes subcategorías en la prueba de contenidos matemáticos del Postest 1 (O_2).

6.1.2.1. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico»

En la Tabla 6.17. presentamos los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.17. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 1 (O_2)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	29 *(76,32%)*	6 *(15,79%)*	3 *(7,89%)*	38 *(100%)*

OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	49 *(85,96%)*	5 *(8,77%)*	3 *(5,26%)*	57 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	47 *(82,46%)*	9 *(15,79%)*	1 *(1,75%)*	57 *(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	44 *(77,19%)*	10 *(17,54%)*	3 *(5,26%)*	57 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	169 *(80,86%)*	30 *(14,35%)*	10 *(4,78%)*	209 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	502 *(80,06%)*	99 *(15,79%)*	26 *(4,15%)*	627 *(100%)*

El porcentaje de aciertos de la categoría es muy ligeramente superior al de la totalidad de la prueba.

Podemos ver en la tabla que los mejores resultados porcentuales en aparecen en la subcategoría «Operaciones, relaciones y propiedades», y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Considerando los índices de dificultad medio de cada subcategoría para ser más ecuánimes en los comentarios, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», no obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al total de la categoría, recoge unos resultados algo inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad 7 puntos superior al del total de la prueba, consigue unos resultados porcentuales de respuestas correctas inferiores a los globales de la prueba en casi la mitad de puntos.

6.1.2.2. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Geometría»

Mostramos en la Tabla 6.18. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Postest 1 del Grupo Experimental (O_2).

Tabla 6.18. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Postest 1 (O_2)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	15 *(78,95%)*	4 *(21,05%)*	0 *(0,00%)*	19 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	57 *(75,00%)*	17 *(22,37%)*	2 *(2,63%)*	76 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	72 *(75,79%)*	21 *(22,11%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	502 *(80,06%)*	99 *(15,79%)*	26 *(4,15%)*	627 *(100%)*

Se aprecia en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es inferior al de la totalidad de la prueba.

La subcategoría «Congruencia y semejanza», con un índice de dificultad de 639 puntos alcanza un 78,95% de respuestas correctas, mientras que «Otras cuestiones de Geometría», con un índice medio de dificultad 100 puntos inferior obtiene un 75% de aciertos, lo que en principio contradice la lógica.

Además «Congruencia y semejanza» que habitualmente era la subcategoría con peores resultados de respuestas correctas vemos que no es así, incluso está casi a un 1% de la media del Postest 1.

6.1.2.3. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Álgebra»

Pasemos a ver las subcategorías de «Álgebra».

Tabla 6.19. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra en el Postest 1 (O_2)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	38 *(100,00%)*	0 *(0,00%)*	0 *(0,00%)*	38 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	53 *(69,74%)*	15 *(19,74%)*	8 *(10,53%)*	76 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	91 *(79,82%)*	15 *(13,16%)*	8 *(7,02%)*	114 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	502 *(80,06%)*	99 *(15,79%)*	26 *(4,15%)*	627 *(100%)*

Podemos ver en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es casi el de la totalidad de la prueba.

La subcategoría «Ecuaciones lineales» que habitualmente suele alcanzar los mejores resultados de aciertos, en este caso ya obtiene el límite máximo, 100%. Pero por el contrario, como viene siendo normal, la subcategoría «Otras cuestiones de Álgebra», está por debajo de lo que sería esperable por su índice medio de dificultad y en esta ocasión marca el mínimo de las categorías y subcategorías del Postest 1 (O_2).

6.1.2.4. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

El Grupo Experimental, en la categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad», ha obtenido unos resultados que indicamos en la Tabla 6.20.

Tabla 6.20. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 1 (O_2)

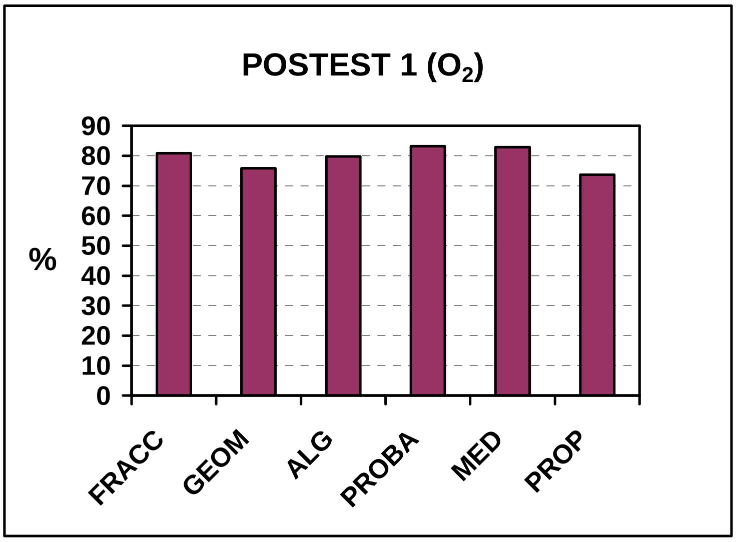
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificult ad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	51 *(89,47%)*	4 *(7,02%)*	2 *(3,51%)*	57 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	28 *(73,68%)*	10 *(26,32%)*	0 *(0,00%)*	38 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	79 *(83,16%)*	14 *(14,74%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	502 *(80,06%)*	99 *(15,79%)*	26 *(4,15%)*	627 *(100%)*

Esta categoría es la de mayor éxito en las respuestas de los estudiantes, la razón: la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», como podemos ver en la tabla anterior, pues la otra subcategoría, «Probabilidad», ha obtenido unos resultados peores, más aun si tenemos en cuenta su índice de dificultad de 510 puntos.

6.1.2.5. Síntesis

Indicamos con las barras del Gráfico 6.2. los resultados en el Postest 1 (O_2) en las categorías de contenido matemático.

Gráfico 6.2. Resultados totales en el Postest 1 (O_2)



En esta medida los resultados de todas las categorías de contenidos están por encima del 70% de aciertos.

La categoría con mayor porcentaje de respuestas correctas es «Representación y análisis de datos. Probabilidad», con un 83,16%, y la que alcanza el mínimo «Proporcionalidad» con un 73,68%.

En las subcategorías de contenido el máximo lo consigue «Ecuaciones lineales», un 100%, y el mínimo «Otras cuestiones de Álgebra», con un 69,74%.

6.1.3. POSTEST 2 (O_3)

La medida del Postest 2 (O_3) se hizo también para la ejecución del Segundo Objetivo «Analizar la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes».

La obtención de los datos tuvo lugar en el mes de mayo de 2.003 y con los resultados realizamos varios estudios, que presentamos en el Capítulo 7, punto 7.2., para contrastar también las hipótesis 2.1. y 2.2, el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes y esta diferencia se mantiene en el tiempo.

Veamos los resultados de toda la muestra y los de los grupos que la integran.

6.1.3.1. Globales (O_3)

Presentamos en la Tabla 6.21. los resultados por categorías de contenidos y totales en el Postest 2, observación O_3, de los estudiantes de Maestro de la UJI.

Tabla 6.21. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Postest 2 (O_3)

Categoría de Contenido	Índices dificultad	N.º preguntas	Respuestas			
			Correctas	Incorrectas	N. R.	Total
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	1.295 *(64,33%)*	560 *(27,82%)*	158 *(7,85%)*	2.013 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	564 *(61,64%)*	254 *(27,76%)*	97 *(10,60%)*	915 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	783 *(71,31%)*	213 *(19,40%)*	102 *(9,29%)*	1.098 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	674 *(73,66%)*	176 *(19,23%)*	65 *(7,10%)*	915 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	478 *(65,30%)*	169 *(23,09%)*	85 *(11,61%)*	732 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	221 *(60,38%)*	65 *(17,76%)*	80 *(21,86%)*	366 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	4.015 *(66,48%)*	1.437 *(23,80%)*	587 *(9,72%)*	6.039 *(100%)*

El porcentaje total de respuestas correctas es ahora del 66,48%, superior al anterior de este colectivo, el del Pretest, 63,19%.

Los mejores resultados porcentuales aparecen en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad», y los peores en «Proporcionalidad» seguida por «Geometría».

Considerando los índices de dificultad medio de cada categoría vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», sí alcanza los números más negativos.

Además, «Geometría» y «Álgebra» equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, ahora también equidistan aproximadamente en los porcentajes de las preguntas en los sentidos respectivos. En las respuestas correctas, «Álgebra» obtiene casi 5 puntos por encima del total de la prueba y «Geometría» está casi 5 puntos por debajo; algo parecido ocurre en las respuestas incorrectas, siendo las diferencias alrededor de 4 puntos.

A. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico»

En la Tabla 6.22. tenemos los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.22. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 2 (O_3)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	171 *(46,72%)*	176 *(48,09%)*	19 *(5,19%)*	366 *(100%)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	385 *(70,13%)*	104 *(18,94%)*	60 *(10,93%)*	549 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	426 *(77,60%)*	100 *(18,21%)*	23 *(4,19%)*	549 *(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	313 *(57,01%)*	180 *(32,79%)*	56 *(10,20%)*	549 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	1295 *(64,33%)*	560 *(27,82%)*	158 *(7,85%)*	2013 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	4.015 *(66,48%)*	1.437 *(23,80%)*	587 *(9,72%)*	6.039 *(100%)*

Vemos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es inferior al de la totalidad de la prueba.

Los mejores resultados porcentuales en aparecen en la subcategoría «Números decimales», y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Al tener en cuenta los índices de dificultad medio de cada subcategoría para relacionarlas más ecuánimemente, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimale»s, sí obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos. En este caso los resultados se han ajustado a la lógica.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al del total de la categoría, recoge unos resultados de respuestas correctas 7 puntos inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad 7 puntos superior al del total de la prueba, consigue unos porcentajes de aciertos inferiores en un 20% a los globales de la prueba.

B. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Geometría»

Exponemos en la Tabla 6.23. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Postest 2 (O_3).

Tabla 6.23. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de« Geometría» en el Postest 2 (O_3)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	69 *(37,70%)*	86 *(46,99%)*	28 *(15,30%)*	183 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	495 *(67,62%)*	168 *(22,95%)*	69 *(9,43%)*	732 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	564 *(61,64%)*	254 *(27,76%)*	97 *(10,60%)*	915 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	4.015 *(66,48%)*	1.437 *(23,80%)*	587 *(9,72%)*	6.039 *(100%)*

Hemos visto en la Tabla 6.21., resultados por categorías de contenidos en el Postest 2 (O_3), que los segundos peores resultados eran los de «Geometría», con un 61,64% de respuestas correctas. Ese tanto por ciento se debe por un lado a la subcategoría «Congruencia y semejanza», en la que el único ejercicio de que consta, con un índice de dificultad de 639,0 puntos, consigue un 37,70% de respuestas correctas, porcentaje corto pero comprensible por su índice de dificultad, pero si consideramos que la categoría de contenidos «Proporcionalidad», con un índice de dificultad superior, 648,0 puntos, tienen unas respuestas correctas del 60,38%, podemos pensar que realmente si es bajo el nivel de respuestas correctas de esta subcategoría. El menor de todas las categorías y subcategorías del Postest 2 (O_3).

Por otro lado los bajos resultados de respuestas correctas de la categoría de contenido «Geometría» también se deben a la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría», que con un índice de dificultad de 539,8 puntos, inferior al de toda la prueba (546,3 puntos) y al de la categoría (559,1 puntos), tiene unos aciertos muy poco superiores.

C. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Álgebra»

Los resultados de las subcategorías de «Álgebra» aparecen en la Tabla 6.24.

Tabla 6.24. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Postest 2 (O_3)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	300 *(81,97%)*	44 *(12,02%)*	22 *(6,01%)*	366 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES	532,5	4	483	169	80	732

DE ÁLGEBRA			*(65,98%)*	*(23,09%)*	*(10,93%)*	*(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	783 *(71,31%)*	213 *(19,40%)*	102 *(9,29%)*	1098 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	4.015 *(66,48%)*	1.437 *(23,80%)*	587 *(9,72%)*	6.039 *(100%)*

Observamos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es superior al de la totalidad de la prueba.

Las dos subcategorías que conforman «Álgebra» con un índice medio de dificultad prácticamente igual, consiguen tantos por ciento de respuestas correctas notablemente distintos y en sentido inverso respecto de lo que cabría esperar. «Ecuaciones lineales» con un 81,97% de respuestas correctas logra el máximo de las categorías y de las subcategorías del Postest 2 (O_3) y «Otras cuestiones de Álgebra», con un índice de dificultad casi idéntico que el de la categoría, obtiene unos porcentajes de correctas 5 puntos inferiores.

D. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

La categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad» ha obtenido unos resultados que concretamos más en la Tabla 6.25.

Tabla 6.25. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 2 (O_3)

REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	423 *(77,05%)*	76 *(13,84%)*	50 *(9,11%)*	549 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	251 *(68,58%)*	100 *(27,32%)*	15 *(4,10%)*	366 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	674 *(73,66%)*	176 *(19,23%)*	65 *(7,10%)*	915 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	4.015 *(66,48%)*	1.437 *(23,80%)*	587 *(9,72%)*	6.039 *(100%)*

La responsable de que esta categoría sea la de mayor éxito en las respuestas de los estudiantes de Maestro Postest 2 (O_3) es la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», debido a que la otra subcategoría, «Probabilidad», ha obtenido unos resultados peores, pues con un índice de dificultad de 510 puntos obtiene sólo un 68,58% de aciertos, cuando en el conjunto de la prueba los números son: 546,3 puntos y 66,48%.

6.1.3.2. Grupo de Control (O_3A)

En la Tabla 6.26. mostramos los resultados del Postest 2 para el Grupo de Control, observación O_3A, es decir, el nivel en conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes que en Primer curso de Maestro no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*.

Tabla 6.26. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

Categoría de Contenido	Índices dificultad	N.º preguntas	Respuestas			
			Correctas	Incorrectas	N. R.	Total
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	1.150 *(63,36%)*	519 *(28,60%)*	146 *(8,04%)*	1.815 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	495 *(60,00%)*	238 *(28,85%)*	92 *(11,15%)*	825 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	704 *(71,11%)*	193 *(19,49%)*	93 *(9,39%)*	990 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	600 *(72,73%)*	162 *(19,64%)*	63 *(7,64%)*	825 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	419 *(63,48%)*	157 *(23,79%)*	84 *(12,73%)*	660 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	196 *(59,39%)*	60 *(18,18%)*	74 *(22,42%)*	330 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	3.564 *(65,45%)*	1.329 *(24,41%)*	552 *(10,14%)*	5.445 *(100%)*

El porcentaje total de aciertos de este grupo 65,45%, es un punto inferior al de la totalidad de la muestra, pero superior en casi dos puntos y medio al anterior de este colectivo, el del Pretest (O_1A).

Como en los resultados porcentuales globales los mejores aparecen en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad». Los peores también aquí son los de «Proporcionalidad seguidos por los de «Geometría.

Teniendo en cuenta los índices de dificultad medio de cada categoría para compararlas con más objetividad, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores resultados porcentuales, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», sí alcanza los números más negativos.

Las categorías «Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto el índice de dificultad medio de la prueba, equidistan también en los porcentajes de las preguntas en los sentidos debidos, oscilando las diferencias cerca de 5 puntos.

A. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

Exponemos en la Tabla 6.27. los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.27. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	150 *(45,45%)*	163 *(49,39%)*	17 *(5,15%)*	330 *(100%)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	342 *(69,09%)*	98 *(19,80%)*	55 *(11,11%)*	495 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	383 *(77,37%)*	90 *(18,18%)*	22 *(4,44%)*	495 *(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	275 *(55,56%)*	168 *(33,94%)*	52 *(10,51%)*	495 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	1150 *(63,36%)*	519 *(28,60%)*	146 *(8,04%)*	1815 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.564 *(65,45%)*	1.329 *(24,41%)*	552 *(10,14%)*	5.445 *(100%)*

Reconocemos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es inferior al de la totalidad de la prueba.

Los mejores resultados porcentuales en aparecen en la subcategoría «Números decimales», y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Considerando los índices de dificultad medio de cada subcategoría para ser más ecuánimes en los comentarios, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», sí obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al total de la categoría, recoge unos resultados casi un 8% inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad superior en 7 puntos al del total de la prueba, consigue unos resultados porcentuales inferiores a los globales de la prueba en un 20%.

B. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Geometría» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

Exponemos en la Tabla 6.28. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Pretest del Grupo de Control (O_1A).

Tabla 6.28. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	58 *(35,15%)*	82 *(49,70%)*	25 *(15,15%)*	165 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	437 *(66,21%)*	156 *(23,64%)*	67 *(10,15%)*	660 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	495 *(60,00%)*	238 *(28,85%)*	92 *(11,15%)*	825 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.564 *(65,45%)*	1.329 *(24,41%)*	552 *(10,14%)*	5.445 *(100%)*

Observamos en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es inferior al de la totalidad de la prueba.

La subcategoría «Congruencia y semejanza», formada por un ejercicio, consigue un 35,15% de respuestas correctas, tanto por ciento realmente bajo a pesar del índice de dificultad de 639,0 puntos. El porcentaje menor de todas las categorías y subcategorías del Postest (O_3A).

Las respuestas correctas de la categoría de contenido «Geometría» alcanzan bajos resultados debido también a la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría», que con un índice de dificultad de 539,8 puntos, inferior al de toda la prueba (546,3 puntos), tiene unos aciertos del 66,21%, que lógicamente debería superar al del cuestionario completo, 65,45%, y no es así.

C. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Álgebra» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

Los resultados del Grupo de Control en el Postest 2 (O_3A) en las subcategorías de «Álgebra» aparecen en la Tabla 6.29.

Tabla 6.29. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Pretest Grupo Control (O_3A)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	269 *(81,52%)*	40 *(12,12%)*	21 *(6,36%)*	330 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	435 *(65,91%)*	153 *(23,18%)*	72 *(10,91%)*	660 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	704 *(71,11%)*	193 *(19,49%)*	93 *(9,39%)*	990 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.564 *(65,45%)*	1.329 *(24,41%)*	552 *(10,14%)*	5.445 *(100%)*

El tanto por ciento de aciertos de la categoría, 71,11%, es superior al del total de la prueba, 65,45%.

El índice medio de dificultad de las dos subcategorías que conforman «Álgebra» es prácticamente igual, en cambio el porcentaje de respuestas correctas es muy distinto e inverso respecto de lo que cabría esperar. «Ecuaciones Lineales» con su 81,52% de correctas alcanza el máximo de las categorías y subcategorías del Postest (O_3A) y «Otras cuestiones de Álgebra» (65,91%) evita que los rendimientos puedan ser más brillantes.

D. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

El Grupo de Control, en la categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad», ha obtenido unos resultados que indicamos en la Tabla 6.30.

Tabla 6.30. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 2 Grupo Control (O_3A)

REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	376 *(75,96%)*	71 *(14,34%)*	48 *(9,70%)*	495 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	224 *(67,88%)*	91 *(7,58%)*	15 *(4,55%)*	330 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	600 *(72,73%)*	162 *(19,64%)*	63 *(7,64%)*	825 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	3.564 *(65,45%)*	1.329 *(24,41%)*	552 *(10,14%)*	5.445 *(100%)*

Esta categoría es la de mayor éxito en las respuestas de estos estudiantes, la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos» es la que lo origina, como podemos ver en la tabla anterior, pues la otra subcategoría, «Probabilidad», ha obtenido unos resultados peores absoluta y relativamente, ya que con un índice de dificultad de 510 puntos obtiene sólo un 67,88% de aciertos, cuando en el conjunto de la prueba los números son: 546,3 puntos y 65,45%.

6.1.3.3. Grupo Experimental (O_3B)

Los resultados del Postest 2 para el Grupo Experimental, observación O_3B, aparecen en la Tabla 6.31.

Tabla 6.31. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

Categoría de Contenido	Índices dificultad	N.º preguntas	Respuestas			
			Correctas	Incorrectas	N. R.	Total
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	145 *(73,23%)*	41 *(20,71%)*	12 *(6,06%)*	198 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	69 *(76,67%)*	16 *(17,78%)*	5 *(5,56%)*	90 *(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	79 *(73,15%)*	20 *(18,52%)*	9 *(8,33%)*	108 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	74 *(82,22%)*	14 *(15,56%)*	2 *(2,22%)*	90 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	59 *(81,94%)*	12 *(16,67%)*	1 *(1,39%)*	72 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	25 *(69,44%)*	5 *(13,89%)*	6 *(16,67%)*	36 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	451 *(75,93%)*	108 *(18,18%)*	35 *(5,89%)*	594 *(100%)*

El porcentaje total de aciertos del Grupo Experimental es del 75,93%, más de 9 puntos superior al de la totalidad de la muestra.

Los mejores resultados porcentuales se presentan en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad». Los peores son los de «Proporcionalidad» seguidos, en cambio ahora, por «Álgebra».

Al considerar los índices de dificultad medio de cada categoría para ser más objetivos, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», no obtiene los mejores tanto por ciento, como cabría esperar, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», sí alcanza los números más negativos.

«Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, no equidistan en los porcentajes de las preguntas en sentidos congruentes. Así en las respuestas correctas, «Álgebra», con menor índice de dificultad, sale más de dos puntos por debajo del total de la prueba y en cambio «Geometría», con mayor índice de dificultad, está tres cuartos de punto por encima. En las respuestas incorrectas, «Álgebra» está prácticamente igualada con el total, pero por encima, y «Geometría» también pero por debajo. Es decir, además de no haber equidistancia, los sentidos de las diferencias de los resultados son inversos a lo que cabría esperar según los índices de dificultad.

A. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

En la Tabla 6.32. tenemos los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.32. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	21 *(58,33%)*	13 *(36,11%)*	2 *(5,56%)*	36 *(100%)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	43 *(79,63%)*	6 *(11,11%)*	5 *(9,26%)*	54 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	43	10	1	54

			(79,63%)	*(18,52%)*	*(1,85%)*	*(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	38 *(70,37%)*	12 *(22,22%)*	4 *(7,41%)*	54 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	145 *(73,23%)*	41 *(20,71%)*	12 *(6,06%)*	198 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	451 *(75,93%)*	108 *(18,18%)*	35 *(5,89%)*	594 *(100%)*

Podemos ver en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es inferior al de la totalidad de la prueba.

En los mejores resultados porcentuales hay un empate en las subcategorías «Números decimales» y «Operaciones, relaciones y propiedades», y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Teniendo en cuenta los índices de dificultad medio de cada subcategoría para ser más ecuánimes en los comentarios, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», sí obtiene uno de los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al total de la categoría, recoge unos resultados algo inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad superior al del total de la prueba, en las respuestas correctas consigue unos resultados porcentuales inferiores a los globales de la prueba en casi 17,5 puntos, con lo que tiene el mínimo de las categorías y subcategorías del Postest 2 para el Grupo Experimental (O_3B).

B. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Geometría» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

Mostramos en la Tabla 6.33. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría».

Tabla 6.33. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	11 *(61,11%)*	4 *(22,22%)*	3 *(16,67%)*	18 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	58 *(80,56%)*	12 *(16,67%)*	2 *(2,78%)*	72 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	69 *(76,67%)*	16 *(17,78%)*	5 *(5,56%)*	90 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	451 *(75,93%)*	108 *(18,18%)*	35 *(5,89%)*	594 *(100%)*

Observamos en esta tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es superior al del total de la prueba a pesar de tener un índice medio de dificultad superior que la prueba completa. La razón de esta situación es debida a que la subcategoría «Congruencia y semejanza», con un índice de dificultad de 639,0 puntos, consigue un 61,11% de respuestas correctas, resultado relativamente alto, pues «Otras cuestiones de Geometría» aun superando las del total de la prueba aproximadamente en un 4,5%, no es tan buen porcentaje ya que su índice es 6,5 puntos más bajo.

C. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Álgebra» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

Las subcategorías de «Álgebra» aparecen en la Tabla 6.34. con los resultados del Postest en el Grupo Experimental.

Tabla 6.34. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	31 *(86,10%)*	4 *(11,10%)*	1 *(2,80%)*	36 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	48 *(66,70%)*	16 *(22,20%)*	8 *(11,10%)*	72 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	79 *(73,10%)*	20 *(18,50%)*	9 *(8,30%)*	108 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	451 *(75,93%)*	108 *(18,18%)*	35 *(5,89%)*	594 *(100%)*

Esta categoría tiene un tanto por ciento de aciertos inferior al de la totalidad de la prueba pese a tener un índice medio de dificultad inferior.

Las dos subcategorías que forman «Álgebra» tienen un índice medio de dificultad prácticamente igual, en cambio el porcentaje de respuestas correctas es marcadamente distinto y en sentido inverso respecto de lo que cabría esperar. «Ecuaciones lineales» con un 86,10% de respuestas correctas, casi 20 puntos más que «Otras cuestiones de Álgebra», es responsable de que no sea peor el nivel de conocimientos algebraicos de los estudiantes.

D. Resultados por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

La categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad» ha obtenido en el Postest 2 del Grupo Experimental (O_3B) unos resultados que concretamos en la Tabla 6.35.

Tabla 6.35. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 2 Grupo Experimental (O_3B)

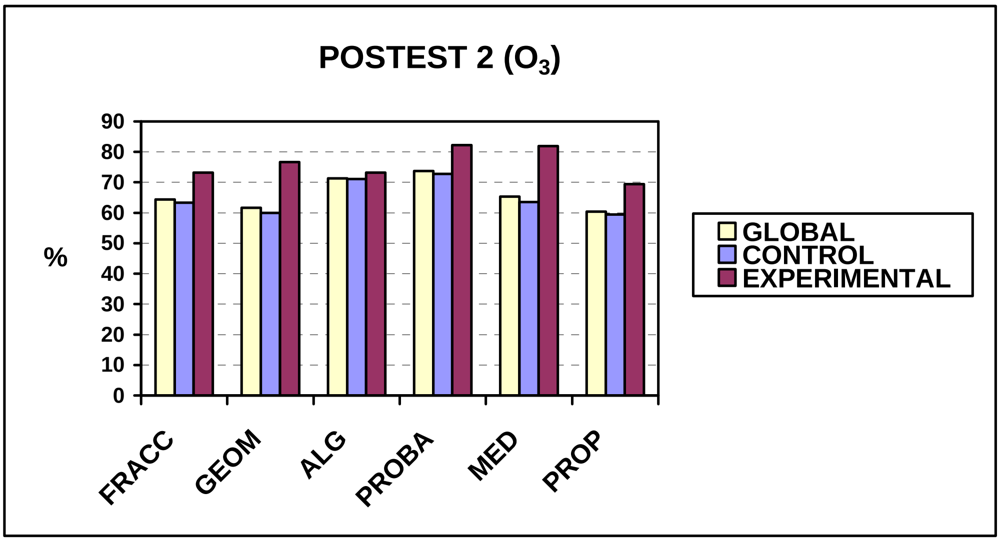
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	47 *(87,04%)*	5 *(9,26%)*	2 *(3,70%)*	54 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	27 *(75,00%)*	9 *(25,00%)*	0 *(0,00%)*	36 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	74 *(82,22%)*	14 *(15,56%)*	2 *(2,22%)*	90 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	451 *(75,93%)*	108 *(18,18%)*	35 *(5,89%)*	594 *(100%)*

Vemos en la tabla que la responsable de que esta categoría sea la de mayor éxito en las respuestas correctas de los estudiantes del Grupo Experimental es la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», que asimismo con su 87,04% alcanza el valor más alto de las categorías y subcategorías del Postest 2 (O_3B). En cambio, «Probabilidad» ha obtenido unos resultados peores, pues con un índice de dificultad más bajo, 510 puntos, casi iguala por abajo el porcentaje de respuestas correctas del conjunto de la prueba, que tiene un índice de 546,3 puntos.

6.1.3.4. Síntesis

Exponemos en el Gráfico 6.3. los resultados totales de aciertos en las categorías de contenido matemático en el Postest 2 (O_3) del Global de la muestra y de los grupos Control y Experimental.

Gráfico 6.3. Resultados totales en el Postest 2 (O_3)



Distinguimos claramente en la ilustración gráfica que el mayor valor de respuestas correctas del Grupo Control, 72,73%, en «Representación y análisis de datos. Probabilidad», es superado por el valor correspondiente en el Global y por los valores de varias categorías en el Grupo Experimental.

De las categorías de contenido en los tres colectivos alcanza el máximo de respuestas correctas «Representación y análisis de datos. Probabilidad» con un 82,22% en el Grupo Experimental y el mínimo «Proporcionalidad» con un 59,39% en el Control.

En las subcategorías de contenido el máximo lo consiguió «Representación y análisis de datos» del Grupo Experimental con un 87,04% y el mínimo en «Congruencia y semejanza» con un 35,15% en el Control.

La categoría que alcanza la máxima cantidad de repuestas correctas contiene la subcategoría análoga y respecto del número mínimo de aciertos no ocurre lo mismo.

6.1.4. POSTEST 4 (O_5)

Para la correcta valoración e interpretación de los resultados del Postest 4 hay que recordar que cuando se realizó esta observación (O_5), en el mes de junio del Tercer curso de la carrera de la promoción de futuros maestros objeto de estudio en esta tesis doctoral, los integrantes del Grupo Experimental que pertenecían a las diplomaturas de Maestro-Especialidad de Educación Infantil o de Educación Primaria cursaban una asignatura de didáctica de la matemática.

Exponemos en la Tabla 6.36. los resultados del Postest 4 (O_5), otros de los necesarios para la cumplimentación del Segundo Objetivo, para contrastar la Hipótesis 2.2. «El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* se mantiene en el tiempo» (Capítulo 7, punto 7.2.2.) y también para el logro del Tercer Objetivo «Establecer la posible repercusión que los conocimientos matemáticos puedan tener en las asignaturas de didáctica de la matemática», así como para probar la Hipótesis 3.2. «Existe una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero*» (Capítulo 7, punto 7.3.2.).

Tabla 6.36. Resultados por Categoría de Contenido y totales en el Postest 4 (O_5)

Categoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO	497,1	11	154 *(73,68%)*	48 *(22,97%)*	7 *(3,35%)*	209 *(100%)*
GEOMETRÍA	559,1	5	78	15	2	95

			(82,11%)	*(15,79%)*	*(2,11%)*	*(100%)*
ÁLGEBRA	533,2	6	91 *(79,82%)*	15 *(13,16%)*	8 *(7,02%)*	114 *(100%)*
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD	516,6	5	80 *(84,21%)*	13 *(13,68%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
MEDIDA	523,5	4	60 *(78,95%)*	14 *(18,42%)*	2 *(2,63%)*	76 *(100%)*
PROPORCIONALIDAD	648,0	2	29 *(76,32%)*	5 *(13,16%)*	4 *(10,53%)*	38 *(100%)*
TOTAL	546,3	33	492 *(78,47%)*	110 *(17,54%)*	25 *(3,99%)*	627 *(100%)*

El porcentaje total de respuestas correctas se sitúa en esta ocasión en el 78,47%.

Los mejores resultados porcentuales en respuestas correctas aparecen una vez más en la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad». Los peores en cambio ahora son los de «Fracciones y sentido numérico» seguidos por los de «Proporcionalidad».

Al considerar los índices de dificultad medio de cada categoría, vemos que la categoría con menor índice, «Fracciones y sentido numérico», obtiene los peores tanto por ciento, cosa que raramente cabría esperar, y la categoría con mayor índice, «Proporcionalidad», alcanza los segundos números más negativos.

Las categorías «Geometría» y «Álgebra», que están equidistantes en su índice de dificultad respecto al índice de dificultad medio de la prueba, no equidistan del total de la prueba en los porcentajes de las preguntas, ni los sentidos de las diferencias son consecuentes con los correspondientes a los índices de dificultad. Por ejemplo, en las respuestas correctas, «Álgebra» está casi un punto y medio por encima del total de la prueba y en cambio, «Geometría» está cerca de 4 puntos también por encima. En las respuestas incorrectas «Álgebra» está aproximadamente 4 puntos por debajo, en cambio «Geometría» está también por debajo alrededor de 2 puntos.

Pasamos a ofrecer seguidamente por categorías los resultados de las correspondientes subcategorías en la prueba de contenidos matemáticos del Postest 4 (O_5).

6.1.4.1. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Fracciones y sentido numérico»

En la Tabla 6.37. presentamos los resultados correspondientes a las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico».

Tabla 6.37. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Fracciones y sentido numérico» en el Postest 4 (O_5)

FRACCIONES Y SENTIDO NUMÉRICO						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
FRACC. ORDINARIAS, SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN	553,5	2	21 *(55,26%)*	15 *(39,47%)*	2 *(5,26%)*	38 *(100%)*
OPERACIONES, RELACIONES Y PROPIEDADES	501,0	3	45 *(78,95%)*	10 *(17,54%)*	2 *(3,51%)*	57 *(100%)*
NÚMEROS DECIMALES	434,0	3	47 *(82,46%)*	9 *(15,79%)*	1 *(1,75%)*	57 *(100%)*
ESTIMACIÓN Y SENTIDO NUMÉRICO	497,7	3	41 *(71,93%)*	14 *(24,56%)*	2 *(3,51%)*	57 *(100%)*
TOTAL Categoría	497,1	11	154 *(73,68%)*	48 *(22,97%)*	7 *(3,35%)*	209 *(100%)*

TOTAL Prueba	546,3	33	492 *(78,47%)*	110 *(17,54%)*	25 *(3,99%)*	627 *(100%)*

El porcentaje de aciertos de la categoría es aproximadamente un 5% inferior al de la totalidad de la prueba cuando los índices de dificultad son 497,1 y 546,3 respectivamente.

Podemos ver en la tabla que los mejores resultados porcentuales aparecen en la subcategoría «Números decimales» y los peores en «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Teniendo en cuenta los índices de dificultad medio de cada subcategoría para ser más ecuánimes en los comentarios, vemos que la categoría con menor índice, «Números decimales», sí obtiene los mejores tanto por ciento, como sería esperable, y la categoría con mayor índice, «Fracciones ordinarias, significado y representación», sí alcanza los números más negativos.

«Estimación y sentido numérico», con un índice medio de dificultad equivalente al total de la categoría, recoge unos resultados de respuestas correctas algo inferiores.

La subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» con un índice medio de dificultad 7 puntos superior al del total de la prueba, consigue unos resultados porcentuales inferiores a los globales de la prueba en casi la 23 de puntos, marcando el mínimo de las categorías y subcategorías del Postest 4 (O_5).

6.1.4.2. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Geometría»

Mostramos en la Tabla 6.38. los resultados de las subcategorías de contenido de «Geometría» en el Postest 4 del Grupo Experimental (O_5).

Tabla 6.38. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Geometría» en el Postest 4 (O_5)

GEOMETRÍA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
CONGRUENCIA Y SEMEJANZA	639,0	1	15 *(78,95%)*	4 *(21,05%)*	0 *(0,00%)*	19 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE GEOMETRÍA	539,8	4	63 *(82,89%)*	11 *(14,47%)*	2 *(2,63%)*	76 *(100%)*
TOTAL Categoría	559,1	5	78 *(82,11%)*	15 *(15,79%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	492 *(78,47%)*	110 *(17,54%)*	25 *(3,99%)*	627 *(100%)*

Se aprecia en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es superior al de la totalidad de la prueba a pesar de tener un índice de dificultad medio superior en casi 13 puntos.

La subcategoría «Congruencia y semejanza», con un índice de dificultad de 639 puntos alcanza un 78,95% de respuestas correctas, número verdaderamente alto tanto absoluta como relativamente. «Otras cuestiones de Geometría», con un índice medio de dificultad superior al de la totalidad de la prueba también la supera en el tanto por ciento de respuestas correctas.

6.1.4.3. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Álgebra»

Pasemos a ver las subcategorías de «Álgebra».

Tabla 6.39. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Álgebra» en el Postest 4 (O_5)

ÁLGEBRA						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º pre gun tas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrecta s**	**N. R.**	**Total**
ECUACIONES LINEALES	534,5	2	35 *(92,11%)*	3 *(7,89%)*	0 *(0,00%)*	38 *(100%)*
OTRAS CUESTIONES DE ÁLGEBRA	532,5	4	56 *(73,68%)*	12 *(15,79%)*	8 *(10,53%)*	76 *(100%)*
TOTAL Categoría	533,2	6	91 *(79,82%)*	15 *(13,16%)*	8 *(7,02%)*	114 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	492 *(78,47%)*	110 *(17,54%)*	25 *(3,99%)*	627 *(100%)*

Podemos ver en la tabla que el porcentaje de aciertos de la categoría es más de un punto superior al de la totalidad de la prueba.

La subcategoría «Ecuaciones lineales» que habitualmente suele alcanzar los mejores resultados, en este caso no es así, pero obtiene un buen número de respuestas correctas, 92,11%. Por el contrario, como viene siendo normal, la subcategoría «Otras cuestiones de Álgebra», está por debajo de lo que sería esperable por su índice medio de dificultad.

6.1.4.4. Resultados globales por Subcategoría de Contenido en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

El Grupo de Experimental, en la categoría de contenidos «Representación y análisis de datos. Probabilidad», ha obtenido unos resultados que indicamos en la Tabla 6.40.

Tabla 6.40. Resultados por Subcategoría de Contenido y totales de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en el Postest 4 (O_5)

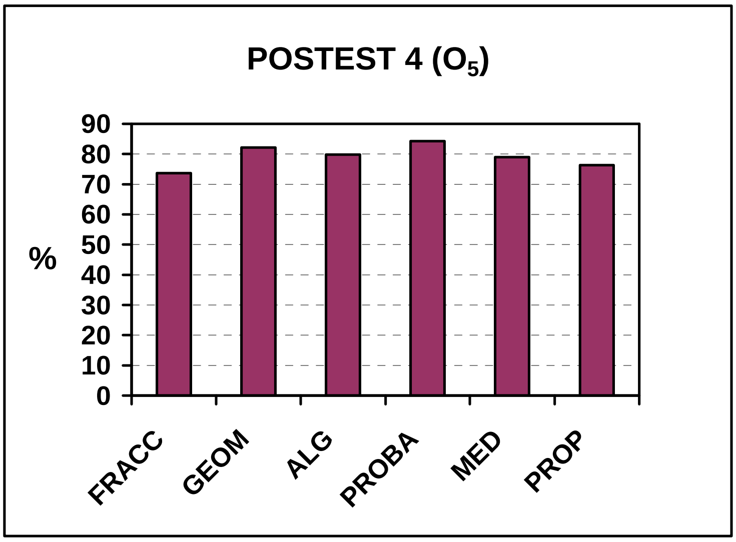
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS. PROBABILIDAD						
Subcategoría de Contenido	**Índices dificultad**	**N.º preguntas**	**Respuestas**			
			Correctas	**Incorrectas**	**N. R.**	**Total**
REPRESENTACIÓN Y ANÁLISIS DE DATOS	521,0	3	53 *(92,98%)*	2 *(3,51%)*	2 *(3,51%)*	57 *(100%)*
PROBABILIDAD	510,0	2	27 *(71,05%)*	11 *(28,95%)*	0 *(0,00%)*	38 *(100%)*
TOTAL Categoría	516,6	5	80 *(84,21%)*	13 *(13,68%)*	2 *(2,11%)*	95 *(100%)*
TOTAL Prueba	546,3	33	492 *(78,47%)*	110 *(17,54%)*	25 *(3,99%)*	627 *(100%)*

Esta categoría es la de mayor éxito en las respuestas correctas de los estudiantes, la razón: la subcategoría de contenido «Representación y análisis de datos», que alcanza el máximo de las categorías y subcategorías del Grupo Experimental en el Postest 4 (O_5), pues la otra subcategoría, «Probabilidad», ha obtenido unos resultados peores, casi un 22% menos, siendo su índice de dificultad de 510 puntos.

6.1.4.5. Síntesis

Plasmamos con las barras del Gráfico 6.4. los resultados de las respuestas correctas en el Postest 4 (O_5) en las categorías de contenido matemático.

Gráfico 6.4. Resultados totales en el Postest 4 (O_5)



También en esta medida los resultados de todas las categorías de contenidos están por encima del 70% de aciertos.

Una vez más, la categoría con mayor porcentaje de respuestas correctas es «Representación y análisis de datos. Probabilidad», con un 84,21%, y la que alcanza el mínimo, por primera vez en las diferentes observaciones, «Fracciones y sentido numérico» con un 73,68%.

De todas las subcategorías de contenido el máximo de aciertos lo consigue «Representación y análisis de datos», con un 92,98%, y el mínimo «Fracciones ordinarias, significado y representación», con un 55,26%.

Coincide que la categoría que alcanza la máxima cantidad de repuestas correctas contiene la subcategoría análoga y lo mismo ocurre respecto del número mínimo de aciertos.

6.2. CONOCIMIENTOS EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA, POSTEST 3 (O_4)

Con la finalidad de lograr el Tercer Objetivo «Establecer la posible repercusión que los conocimientos matemáticos puedan tener en las asignaturas de didáctica de la matemática», obtuvimos las notas del rendimiento de los estudiantes en la primera convocatoria oficial de exámenes de las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de la Diplomatura de Maestro en la UJI del año académico 2.002-2.003.

Estos datos los utilizaremos además para contrastar posteriormente en el Capítulo 7, en el punto 7.3., la Tercera Hipótesis en sus dos partes, el rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero* es mejor que el de los no asistentes y, existe una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en el Grupo Experimental.

Para una mayor uniformización de la descripción agrupamos las notas en calificaciones correspondientes a las categorías cualitativas Matrícula de Honor, Sobresaliente, Notable, Aprobado, Suspenso y No Presentado (N. P.), y su expresión en frecuencias absolutas y relativas.

Presentamos en la Tabla 6.41. los rendimientos en las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro en la UJI de los estudiantes que integraron la muestra de este estudio.

Tabla 6.41. Resultados Postest 3 (O_4)

Calificación							
Muestra	**N. P.**	**SUSPENSO**	**APROBADO**	**NOTABLE**	**SOBRESALIENTE**	**M. H.**	**Total**
GLOBAL	193 *(45,95%)*	160 *(38,10%)*	56 *(13,33%)*	11 *(2,62%)*	0 *(0%)*	0 *(0%)*	420 *(100%)*
GRUPO DE CONTROL	189 *(47,13%)*	154 *(38,40%)*	50 *(12,47%)*	8 *(2,00%)*	0 *(0%)*	0 *(0%)*	401 *(100%)*
GRUPO EXPERIMENTAL	4 *(21,05%)*	6 *(31,58%)*	6 *(31,58%)*	3 *(15,79%)*	0 *(0%)*	0 *(0%)*	19 *(100%)*

Comentaremos a continuación estos resultados, primero los Globales, luego los del Grupo de Control y finalmente los del Grupo Experimental.

6.2.1. GLOBALES

Como vemos en la Tabla 6.41. en la fila Global, el porcentaje de estudiantes No Presentado a las evaluaciones de las asignaturas en la primera convocatoria oficial fue del 45,95% y el de Suspenso del 38,10%, muy altos pero que no nos extrañan dadas las investigaciones presentadas en el Capítulo 5, en el apartado 5.1., que informaban sobre el bajo nivel de conocimientos matemáticos de los futuros maestros o sobre el rendimiento en asignaturas de didáctica de la matemática, como es el caso de Nortes y Martínez (1.992) relativa a la Escuela Universitaria de Formación del Profesorado de EGB de Murcia.

6.2.2. GRUPO DE CONTROL

En la anterior Tabla 6.41. mostramos el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes que integraron el Grupo de Control del Estudio Empírico, es decir, de aquellos estudiantes de Maestro de la promoción 2.001-2.004 que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*.

En la cuarta fila de la tabla podemos ver, a la derecha del todo, como el porcentaje total de No Presentado a las evaluaciones fue del 47,13%, algo mayor que el de toda la muestra.

6.2.3. GRUPO EXPERIMENTAL

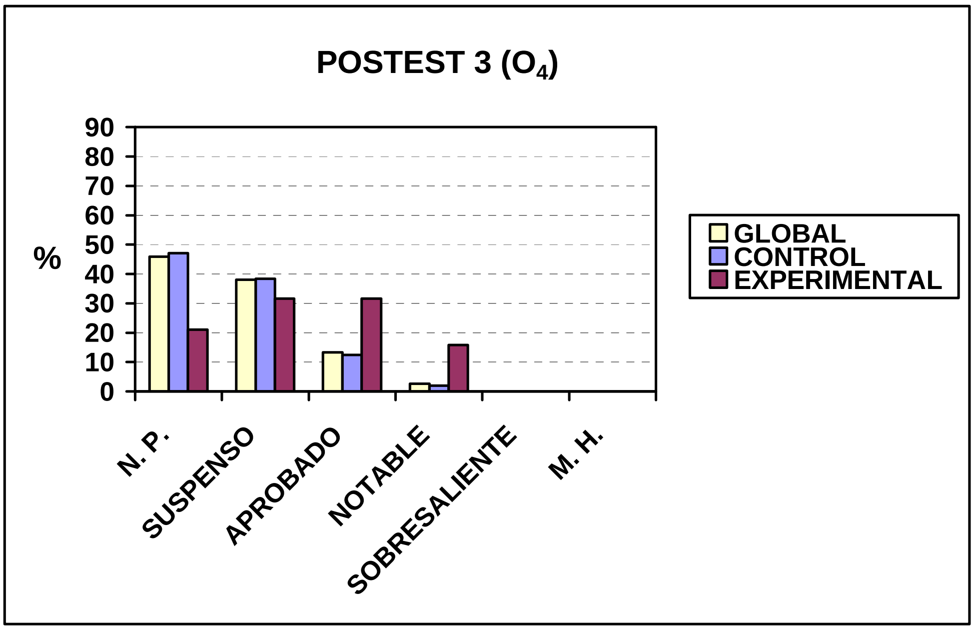
Los resultados en las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro en la UJI de los estudiantes de Maestro de la promoción 2.001-2.004 que asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, o sea, de los estudiantes del Grupo Experimental, también los exponemos en la Tabla 6.41.

Quisiéramos comentar de este colectivo la reducción a más de la mitad del porcentaje de No Presentado respecto del Grupo de Control y además, que el porcentaje de los estudiantes que superaron las evaluaciones con éxito es casi el 50%, exactamente el 47,37%.

6.2.4. SÍNTESIS

Como condensación de lo presentado en este apartado 6.2., indicamos mediante el Gráfico 6.5. los rendimientos porcentuales en las diferentes categorías de calificación en las asignaturas de didáctica de la matemática en el Postest 3 (O_4) del Global de la muestra y de los grupos Control y Experimental.

Gráfico 6.5. Porcentajes totales en la observación 4 (O_4)



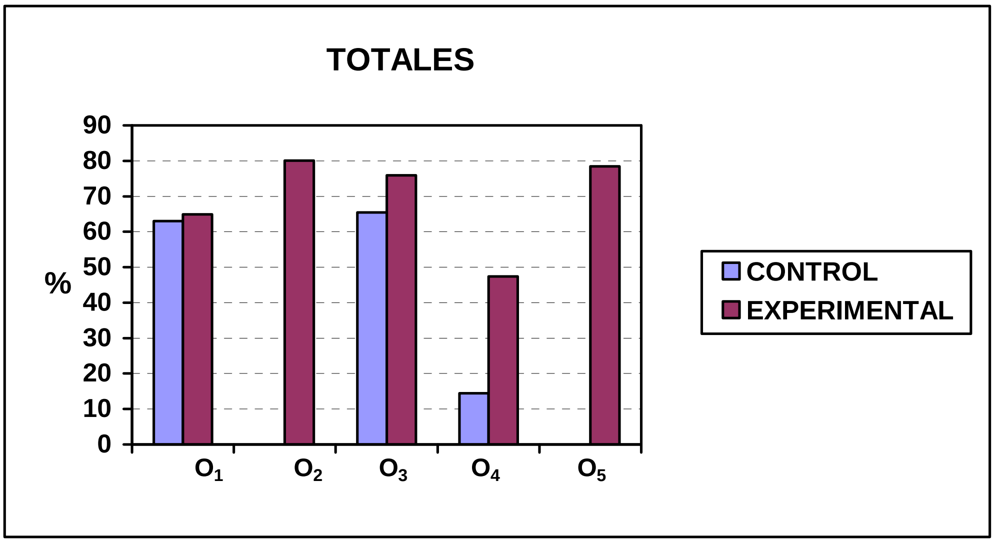
Vemos en la imagen como en el Global de la muestra y en el Grupo de Control a medida que nos desplazamos hacia la derecha la altura de las barras decrece, es decir, su polígono de frecuencias sería una línea poligonal descendente, mientras que en el Grupo Experimental el polígono de frecuencias se parecería más a la curva de la Distribución Normal, la campana de Gauss.

6.3. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este apartado vamos a hacer una síntesis de los descriptivos de los resultados de conocimientos en contenidos matemáticos en las diferentes medidas realizadas (O_1, O_2, O_3 y O_5) y también de los resultados en rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática (O_4). Para ello utilizaremos gráficos de diagramas de barras en los que resumiremos la información más relevante presentada, diferenciando entre los resultados del Grupo de Control y los del Grupo Experimental, excepto en las observaciones O_2 y O_5 que sólo se aplicaron al Grupo Experimental, como ya hemos explicado en el Capítulo 5, en los apartados 5.3. Diseño y 5.5. Metodología.

En primer lugar en el Gráfico 6.6. presentamos el diagrama de barras con los resultados globales de respuestas correctas en las diferentes observaciones.

Gráfico 6.6. Resultados totales respuestas correctas en las diferentes observaciones



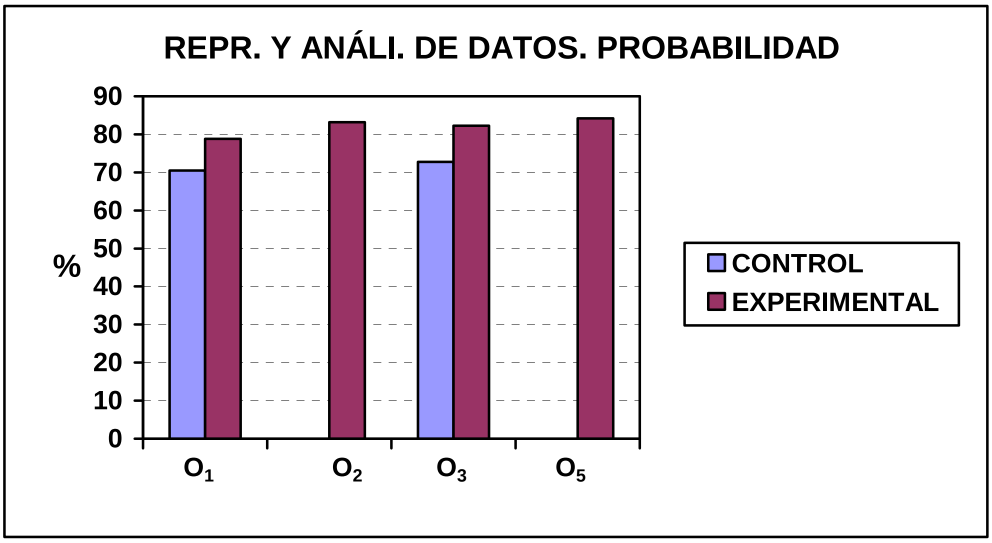
Podemos apreciar en la imagen que los resultados del Grupo Experimental siempre son mejores que los del Grupo de Control.

También observamos que las medidas de conocimientos matemáticos alcanzan su máximo en el Postest 1 (O_2) con un 80,06% de respuestas correctas, casi recuperado en el Postest 4 (O_5) con un 78,47%.

Se percibe fácilmente en el diagrama la gran diferencia de rendimiento en contenidos didácticos matemáticos en el Postest 3 (O_4): 14,47% del Grupo de Control que superaron las asignaturas en la primera convocatoria oficial de exámenes, frente al 47,37% del Grupo Experimental. El de los estudiantes asistentes al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* fue más del triple que el de los no asistentes.

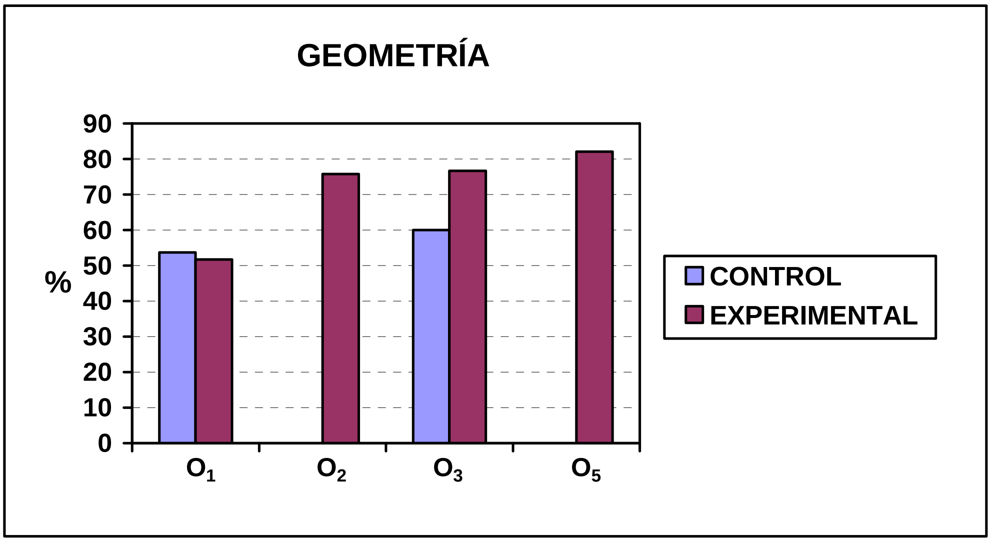
En las categorías de contenido matemático de todas las medidas realizadas la que ha conseguido mayor porcentaje de respuestas correctas (84,21%) es «Representación y análisis de datos. Probabilidad» del Postest 4 (O5). Como hemos visto en el apartado 6.1. Conocimientos matemáticos, esta categoría lograba siempre los máximos aciertos en cada observación, en el Gráfico 6.7. tenemos plasmado que es en el Postest 4 (O5) cuando llega al tope.

Gráfico 6.7. Resultados totales en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en las medidas



De todas las categorías de contenido matemático en las diferentes medidas practicadas, obtuvo el mínimo «Geometría» del Pretest del Grupo Experimental (O_1B), con un 51,76%. En el Gráfico 6.8. aparece dicha categoría y vemos en que observación fue.

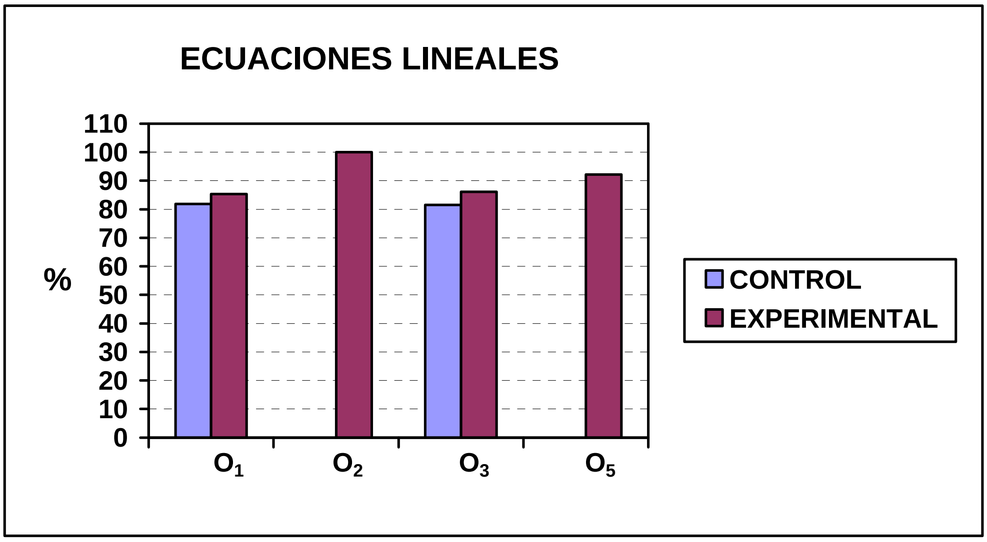
Gráfico 6.8. Resultados totales en «Geometría» en las medidas



De entre las subcategorías de contenido matemático de todas las medidas realizadas la que logró el máximo de aciertos fue «Ecuaciones lineales» del Postest 1 (O_2), con el 100%. Los datos del apartado 6.1.

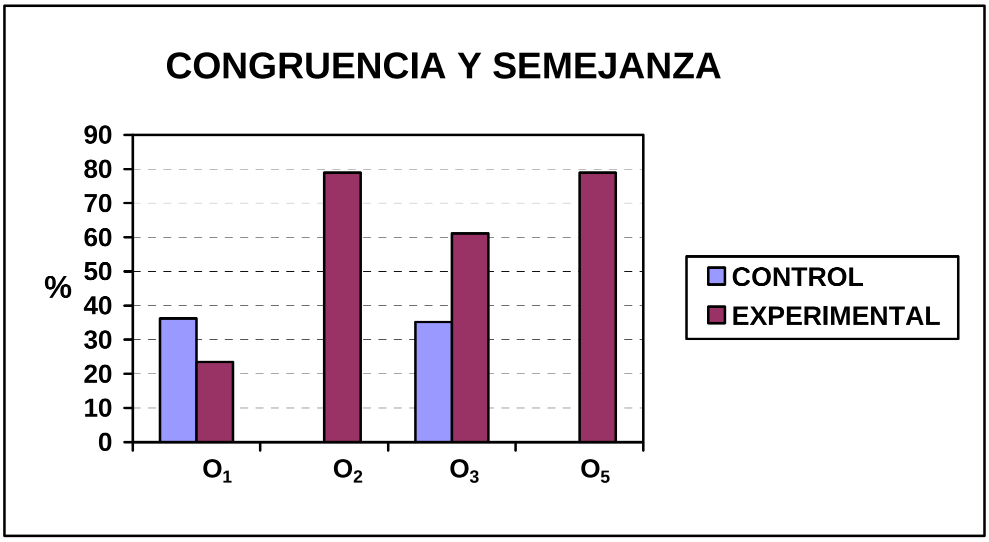
Conocimientos matemáticos muestran que esta subcategoría recogió en la mayoría de las observaciones el máximo de respuestas correctas. El Gráfico 6.9. visualiza que en el Postest 1 (O_2) alcanzó el límite.

Gráfico 6.9. Resultados totales en «Ecuaciones lineales» en las medidas



El mínimo de aciertos de todas las subcategorías de contenido matemático de las diferentes medidas llevadas a cabo lo sacó «Congruencia y semejanza» del Pretest del Grupo Experimental (O_1B), con un 23,53%. En este caso los datos del apartado 6.1. Conocimientos matemáticos dicen que esta subcategoría tuvo en la mayoría de las observaciones el mínimo de respuestas correctas. El Gráfico 6.9. visualiza que en el Pretest del Grupo Experimental (O_1B) consiguió la cota más baja.

Gráfico 6.10. Resultados totales en «Congruencia y semejanza» en las medidas



La categoría que obtuvo la máxima cantidad de repuestas correctas, «Representación y análisis de datos. Probabilidad» del Postest 4 (O_5), no incluye la subcategoría análoga, «Ecuaciones lineales» del Postest 1 (O_2), pero sí engloba la subcategoría que consiguió la segunda mayor cantidad de aciertos (92,98%), «Representación y análisis de datos» del Postest 4 (O_5).

Como en una simetría, la subcategoría de contenido matemático que tuvo el máximo de respuestas correctas, «Ecuaciones lineales» del Postest 1 (O_2), forma parte de la categoría que cosechó la segunda mayor cantidad de aciertos (83,16%), «Representación y análisis de datos. Probabilidad» del Postest 1 (O_2).

En el lado opuesto, la categoría que recogió la mínima cantidad de respuestas correctas, «Geometría» del Pretest del Grupo Experimental (O_1B), sí contiene la subcategoría análoga, «Congruencia y semejanza».

Capítulo 7: ESTUDIO INFERENCIAL

Presentados en el Capítulo 6 los descriptivos de todas las medidas realizadas en la investigación empírica que presenta esta tesis doctoral, ahora vamos a efectuar el Estudio Inferencial de cada uno de los objetivos e hipótesis formulados en el Capítulo 5.

7.1. EQUIVALENCIA DE LOS GRUPOS CONTROL Y EXPERIMENTAL

Cumplimentado el Primer Objetivo, determinar el nivel de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes de Maestro, visto en el Capítulo 6, punto 6.1.1. El Pretest (O_1), nivel que no era nada alto (63,19%), realmente inferior a lo que cabía esperar por sus estudios de matemáticas no universitarias, y con la finalidad de confirmar o negar la Primera Hipótesis «El nivel de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes de Maestro que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, es equivalente al de los asistentes al *Curs Zero*», realizamos un contraste en el Pretest mediante la Prueba U de Mann-Whitney, cuyos resultados completos ofrecemos en el Anexo 7.1., indicando en la Tabla 7.1. los datos más significativos.

Tabla 7.1. Contraste en Pretest (O_1)

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
CONTROL	171	63,02%	94,14	16098,50	NO
EXPERIMENTAL	17	64,88%	98,09	1667,50	
Total	188	63,19%			

No hay significación asintótica (bilateral), por lo que podemos rechazar la existencia de diferencias significativas, lo que indica que los grupos de Control y Experimental son equivalentes en cuanto al nivel de conocimientos matemáticos previos.

7.2. EFICACIA DEL *CURS ZERO: MATEMÀTICA PRÈVIA* SOBRE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS

Para la consecución del Segundo Objetivo «Analizar la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes», y también con la finalidad de ratificar o desmentir la Segunda Hipótesis en sus dos partes, efectuamos una serie de contrastes, algunos entre medidas del Grupo de Control y del Grupo Experimental, y otros únicamente entre medidas del Grupo Experimental, que pasamos a describir.

7.2.1. DIFERENCIAS ENTRE EL GRUPO DE CONTROL Y EL GRUPO EXPERIMENTAL

Para probar o refutar la Hipótesis 2.1. «El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes», practicamos varios contrastes, unos Pretest-Postest en el Grupo de Control, en las observaciones O_1A y O_3A, otros en el Grupo Experimental, en las observaciones O_1B y O_2, y otros más entre los grupos Control y Experimental en el Postest 2 (O_3), para comprobar si existía diferencia significativa entre las observaciones correspondientes, lo que determinó los tres apartados de este punto.

7.2.1.1. Contraste Pretest-Postest 2 en el Grupo de Control (O_1A – O_3A)

A partir de los datos del Grupo de Control en el Pretest (O_1A), un porcentaje de repuestas correctas bastante bajo (63,02%) que mostramos en el Capítulo 6, punto 6.1.1.2., y su nivel de conocimientos matemáticos postest (65,45%), que es la medida Postest 2 (O_3A) del Estudio Empírico, descriptivos muy poco mejores presentados en el punto 6.1.3.2., hemos ejecutado un estudio mediante la Prueba U de Mann-Whitney, cuyos resultados completos aparecen en el Anexo 7.2., comprobando que no hay significación asintótica (bilateral), como mostramos en la Tabla 7.2., por lo que no existe diferencia significativa entre el Prestest y el Postest del Grupo de Control (O_1A y O_3A, respectivamente).

Tabla 7.2. Contraste observaciones O_1A – O_3A

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_1A	171	63,02%	160,97	27525,50	NO
O_3A	165	65,45%	176,31	29090,50	

Pero además, como la observación O_3A se efectuó en el mes de mayo, finalizando ya las clases de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, podemos concluir el hecho de que estas asignaturas no aportan conocimientos significativos de contenidos matemáticos a los estudiantes no asistentes al *Curs Zero*.

7.2.1.2. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2)

Entre los trabajos hechos por y para el Segundo Objetivo y también la Segunda Hipótesis en su Primera parte, con los descriptivos vistos en el Capítulo 6, en el punto 6.1.1.3. los de O_1B (64,88%) y en el punto 6.1.2. los de O_2 (80,06%) , datos algo diferentes entre ellos, realizamos un contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) mediante la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, para averiguar si había diferencias significativas entre ambas medidas. Los resultados completos del análisis están en el Anexo 7.3., exponiendo seguidamente en la Tabla 7.3. los datos más significativos.

Tabla 7.3. Contraste observaciones O_1B y O_2

Observa-ciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B	64,88%	Negativos	0^a	0,00	0,00	$-3{,}299^d$	SÍ, al 99%

		Positivos	14[b]	7,50	105,00		
O_2	80,06%	Empates	3[c]				
		Total	17				

a. $O_2 < O_1B$

b. $O_2 > O_1B$

c. $O_2 = O_1B$

d. Basado en rangos negativos

Vemos en la columna de más a la derecha de la tabla que sí hay significación asintótica (bilateral), además al 99%, eso quiere decir que hay diferencias notables en el nivel de conocimientos matemáticos entre antes y después del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* y como nos revelan la segunda, tercera y cuarta columnas por la izquierda, Respuestas correctas, Rangos y N respectivamente, la superioridad se observa en el Postest 1 (O_2). Es decir, consecuencia del *Curs Zero* los conocimientos de contenidos matemáticos de los estudiantes del Grupo Experimental han aumentado.

Al constatarse diferencias significativas entre el Pretest y el Postest 1 del Grupo Experimental, vamos a efectuar el mismo tipo de análisis, la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, en las distintas categorías de contenidos para tratar de concretar en qué bloques de contenidos se confirman dichas diferencias. Los resultados completos de todos estos estudios se incluyen también en el Anexo 7.3.

A. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Fracciones y sentido numérico»

El contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O1B - O2) aplicado en la categoría de contenido «Fracciones y sentido numérico» lo mostramos en la Tabla 7.4. con los datos más significativos.

Tabla 7.4. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Fracciones y sentido numérico»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B FRAC	64,71%	Negativos	0[a]	0,00	0,00	-2,809[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	10[b]	5,50	55,00		
O_2 FRAC	80,86%	Empates	7[c]				
		Total	17				

a. O_2 FRAC < O_1B FRAC

b. O_2 FRAC > O_1B FRAC

c. O_2 FRAC = O_1B FRAC

d. Basado en rangos negativos

Como podemos leer en la primera columna por la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 99%, es decir, hay diferencias importantes en «Fracciones y sentido numérico» entre antes y después del curso *Matemàtica Prèvia*. Las columnas segunda y tercera por la izquierda, Rangos y N respectivamente, nos aclaran que son mejores los resultados en el Postest 1 (O_2).

Como hay significación asintótica (bilateral) afirmativa vamos a realizar también el análisis, la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, en las subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico» en busca de posibles explicaciones.

Análogamente, si en las sucesivas categorías de contenidos encontramos en los contrastes diferencias significativas en algunas de ellas, practicaremos asimismo este estudio en las correspondientes subcategorías y los resultados completos de todos ellos también constarán en el Anexo 7.3., mostrando los resultados más señalados en las correspondientes tablas que siguen

En los análisis a ejecutar en las categorías de contenidos y si procede en las subcategorías, seguiremos el orden en que fueron presentadas en el Capítulo 5, punto 5.4.1. Prueba de conocimientos matemáticos, que es el seguido ya en el Estudio Descriptivo de los conocimientos matemáticos hecho en el Capítulo 6, en el apartado 6.1.

Recordemos las cuatro subcategorías de «Fracciones y sentido numérico»: «Fracciones ordinarias, significado y representación»; «Operaciones, relaciones y propiedades»; «Números decimales» y, «Estimación y sentido numérico».

A.1. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Fracciones ordinarias, significado y representación»

En la Tabla 7.5. tenemos algunos de los datos del contraste en la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» (F.O.S.R.).

Tabla 7.5. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Fracciones ordinarias, significado y representación» (F.O.S.R.)

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B F.S.O.R.	**52,94%**	Negativos	0[a]	0,00	0,00	-2,530[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	7[b]	4,00	28,00		
O_2 F.S.O.R.	76,32%	Empates	10[c]				
		Total	17				

a. O_2 F.O.S.R. < O_1B F.O.S.R.

b. O_2 F.O.S.R. > O_1B F.O.S.R.

c. O_2 F.O.S.R. = O_1B F.O.S.R.

d. Basado en rangos negativos

Estudio que nos dice que hay diferencias significativas, al 95%, manifestando los rangos con signo que los resultados de respuestas correctas fueron mejores en el Postest 1 (O_2).

A.2. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Operaciones, relaciones y propiedades»

Este análisis en la subcategoría «Operaciones, relaciones y propiedades» (O.R.P.) está resumido en la Tabla 7.6.

Tabla 7.6. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Operaciones, relaciones y propiedades» (O.R.P.)

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B O.R.P.	**70,59%**	Negativos	2[a]	4,00	8,00	-2,066[d]	Sí, al 95%
		Positivos	8[b]	5,88	47,00		
O_2 O.R.P.	85,96%	Empates	7[c]				
		Total	17				

a. O_2 O.R.P. < O_1B O.R.P.

b. O_2 O.R.P. > O_1B O.R.P.

c. O_2 O.R.P. = O_1B O.R.P.

d. Basado en rangos negativos

Vuelve a haber significación asintótica (bilateral), al 95% y favorable para el Postest 1 (O_2).

A.3. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Números decimales»

Exhibimos en la Tabla 7.7. lo más relevante del contraste en «Números decimales» (N.D.).

Tabla 7.7. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Números decimales» (N.D.)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B N.D.	**72,55%**	Negativos	2[a]	3,00	6,00	-1,725[d]	NO
		Positivos	6[b]	5,00	30,00		
O_2 N.D.	82,46%	Empates	9[c]				
		Total	17				

a. O_2 N.D. < O_1B N.D.
b. O_2 N.D. > O_1B N.D.
c. O_2 N.D. = O_1B N.D.
d. Basado en rangos negativos

En esta subcategoría de contenidos de «Fracciones y sentido numérico», en el Grupo Experimental no hay diferencia significativa entre el Pretest y el Postest 1.

A.4. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Estimación y sentido numérico»

Reflejamos parte de este estudio en «Estimación y sentido numérico» (E.S.N.) en la Tabla 7.8.

Tabla 7.8. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Estimación y sentido numérico» (E.S.N.)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B E.S.N.	**58,82%**	Negativos	1[a]	7,00	7,00	-2,131[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	9[b]	5,33	48,00		
O_2 E.S.N.	77,19%	Empates	7[c]				
		Total	17				

a. O_2 E.S.N. < O_1B E.S.N.

b. O_2 E.S.N. > O_1B E.S.N.

c. O_2 E.S.N. = O_1B E.S.N.

d. Basado en rangos negativos

También hay significación asintótica (bilateral), al 95% y positiva para el Postest 1 (O_2).

B. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Geometría»

En el caso de la categoría de contenido «Geometría» los datos más relevantes del contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) mediante la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon los enseñamos en la Tabla 7.9., mientras que los resultados completos se presentan en el Anexo 7.3. como ya habíamos dicho.

Tabla 7.9. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Geometría»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B GEOM	51,76%	Negativos	1[a]	3,00	3,00	-2,862[d]	SÍ, al 99%

		Positivos	11[b]	6,82	75,00		
O_2 GEOM	75,79%	Empates	5[c]				
		Total	17				

a. O_2 GEOM $<$ O_1B GEOM

b. O_2 GEOM $>$ O_1B GEOM

c. O_2 GEOM = O_1B GEOM

d. Basado en rangos negativos

Igualmente en esta categoría de contenido hay significación asintótica (bilateral) al 99%, por tanto, los estudiantes asistentes al *Curs Zero* saben más contenidos de «Geometría» que antes del curso.

Al haber significación asintótica (bilateral) pasamos a analizar las dos subcategorías de «Geometría»: «Congruencia y semejanza» y «Otras cuestiones de Geometría».

B.1. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Congruencia y semejanza»

La Tabla 7.10. reune algunos de los datos en el caso de la subcategoría «Congruencia y semejanza» (CONGR).

Tabla 7.10. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Congruencia y semejanza» (CONGR)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B CONGR	23,53%	Negativos	0a	0,00	0,00	-3,000	SÍ, al 99%
		Positivos	9b	5,00	45,00		
O_2 CONGR.	78,95%	Empates	8c				
		Total	17				

[a] O_2 CONGR < O_1B CONGR
[b] O_2 CONGR > O_1B CONGR
[c] O_2 CONGR = O_1B CONGR
[d] Basado en rangos negativos

Estudio que nos descubre que hay diferencias significativas, al 99%, manifestando los rangos con signo que los resultados de respuestas correctas fueron mejores en el Postest 1 (O_2).

B.2. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Otras cuestiones de Geometría»

Para la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría» (OTR. GEOM) el resumen es en la Tabla 7.11.

Tabla 7.11. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Otras cuestiones de Geometría» (OTR. GEOM)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B OTR. GEOM	58,82%	Negativos	2a	5,00	10,00	-2,392	SÍ, al 95%
		Positivos	10b	6,80	68,00		

O_2 OTR. GEOM	75,00%	Empates	5c				
		Total	17				

[a] O_2 OTR. GEOM < O_1B OTR. GEOM
[b] O_2 OTR. GEOM > O_1B OTR. GEOM
[c] O_2 OTR. GEOM = O_1B OTR. GEOM
[d] Basado en rangos negativos

Se repite la significación asintótica (bilateral), pero al 95% y favorable para el Postest 1 (O_2).

C. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Álgebra»

Realizado el contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en la categoría de contenido «Álgebra» mostramos en la Tabla 7.12. los datos más significativos.

Tabla 7.12. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Álgebra»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B ÁLG	69,61%	Negativos	3[a]	3,67	11,00	-1,972[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	8[b]	6,88	55,00		
O_2 ÁLG	79,82%	Empates	6c				

[a] O_2 ÁLG < O_1B ÁLG
[b] O_2 ÁLG > O_1B ÁLG
[c] O_2 ÁLG = O_1B ÁLG
[d] Basado en rangos negativos

Ahora la significación asintótica (bilateral) es al 95%, eso quiere decir que hay diferencias en el nivel de conocimientos algebraicos entre antes y después del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* y como nos indican la segunda y tercera columnas por la izquierda, Rangos y N respectivamente, la superioridad se observa en el Postest 1 (O2).

Como hay significación asintótica (bilateral) procedemos a analizar en las subcategorías de contenido de «Álgebra», «Ecuaciones lineales» y «Otras cuestiones de Álgebra», en busca de posibles esclarecimientos.

C.1. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Ecuaciones lineales»

Enunciamos en la Tabla 7.13. lo más relevante del análisis en «Ecuaciones lineales» (EC. LIN).

Tabla 7.13. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Ecuaciones lineales» (EC. LIN)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B EC. LIN	85,29%	Negativos	0[a]	0,00	0,00	-1,890[d]	NO
		Positivos	4[b]	2,50	10,00		
O_2 EC. LIN	100,00	Empates	13[c]				
		Total	17				

a. O_2 EC. LIN < O_1B EC. LIN

b. O_2 EC. LIN > O_1B EC. LIN

c. O_2 EC. LIN = O_1B EC. LIN

d. Basado en rangos negativos

En esta subcategoría de contenidos de «Álgebra», en el Grupo Experimental no hay diferencia significativa entre el Pretest y el Postest 1.

C.2. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Otras cuestiones de Álgebra»

Proclamamos parte de este contraste en «Otras cuestiones de Álgebra» (OTR. ÁLG) en la Tabla 7.14.

Tabla 7.14. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Otras cuestiones de Álgebra» (OTR. ÁLG)

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B OTR. ÁLG	61,76%	Negativos	3a	4,00	12,00	-1,310d	NO
		Positivos	6b	5,50	33,00		
O_2 OTR. ÁLG	69,74%	Empates	8c				
		Total	17				

a. O_2 OTR. ÁLG < O_1B OTR. ÁLG
b. O_2 OTR. ÁLG > O_1B OTR. ÁLG
c. O_2 OTR. ÁLG = O_1B OTR. ÁLG
d. Basado en rangos negativos

Tampoco hay significación asintótica (bilateral).

Por tanto la significación afirmativa de la categoría «Álgebra» no es fruto de ninguna de sus subcategorías, es general.

D. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

En la categoría de contenido «Representación y análisis de datos. Probabilidad» (PROBA) los datos más notables del análisis Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) los indicamos en la Tabla 7.15.

Tabla 7.15. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» (PROBA)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B PROBA	78,82%	Negativos	2[a]	4,50	9,00	-1,414[d]	NO
		Positivos	6[b]	4,50	27,00		
O_2 PROBA	73,68%	Empates	9[c]				
		Total	17				

a. O_2Proba < O_1BProba
b. O_2Proba > O_1BProba
c. O_2Proba = O_1BProba
d. Basado en rangos negativos

A diferencia de las categorías de contenido anteriores, en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» no hay significación asintótica (bilateral), por tanto, los estudiantes asistentes al *Curs Zero* aproximadamente saben tanto de estos contenidos antes como después del curso.

E. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Medida»

En este estudio Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) mediante la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon en la categoría de contenido «Medida» (MED), los resultados completos se representan en el Anexo 7.x., ofreciendo en la Tabla 7.16. los datos más importantes.

Tabla 7.16. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Medida» (MED)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B MED	61,76%	Negativos	1[a]	6,50	6,50	-2,170[d]	Sí, al 95%
		Positivos	9[b]	5,39	48,50		
O_2 MED	82,89%	Empates	7[c]				
		Total	17				

a. O_2 MED < O_1B MED

b. O_2 MED > O_1B MED

c. O_2 MED = O_1B MED

d. Basado en rangos negativos

Como podemos leer en la columna de más a la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 95%, es decir, hay diferencias en el nivel de conocimientos en los contenidos de «Medida» entre antes y después del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*. Las columnas segunda, tercera y cuarta por la izquierda, Respuestas correctas, Rangos y N respectivamente, nos revelan que son mejores los resultados en el Postest 1 (O_2).

F. Contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en «Proporcionalidad»

Efectuado el contraste Pretest-Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2) en la categoría de contenido «Proporcionalidad» (PROP) mediante la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, cuyos resultados completos aparecen en el Anexo 7.x., mostramos en la Tabla 7.17. los datos más característicos.

Tabla 7.17. Contraste observaciones O_1B y O_2 en «Proporcionalidad» (PROP)

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B PROP	55,88%	Negativos	1[a]	3,00	3,00	-1,667[d]	NO
		Positivos	5[b]	3,60	18,00		
O_2 PROP	73,68%	Empates	11[c]				
		Total	17				

e. O_2Prop < O_1BProp

f. O_2Prop > O_1BProp

g. O_2Prop = O_1BProp

h. Basado en rangos negativos

No hay significación asintótica (bilateral) en «Proporcionalidad», es decir, los estudiantes asistentes al *Curs Zero,* al acabar éste tienen aproximadamente el mismo nivel de conocimientos de estos contenidos que antes del curso, lo cual no es de extrañar pues dichos saberes no se trabajaron por falta de tiempo en el citado curso.

G. Síntesis

Recapitulando sobre los resultados de los análisis realizados entre las medidas Pretest y Postest 1 en el Grupo Experimental (O_1B - O_2), podemos decir que la diferencia significativa global existente al 99% no la generan las seis categorías de contenido, únicamente cuatro: «Fracciones y sentido numérico», «Geometría», «Álgebra» y «Medida».

La posible explicación de por qué las otras dos categorías de contenido, «Representación y análisis de datos. Probabilidad» y «Proporcionalidad», no producen también la diferencia significativa se deba a que estos contenidos tienen la particularidad de ser contenidos en los que los estudiantes tienen mejor y peor nivel, respectivamente, en ambas medidas y además, que concretamente «Proporcionalidad» no se trabajó en el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* por no ser contenidos escolares de Educación Primaria.

7.2.1.3. Contraste en Postest 2 (O_3)

Continuando con el análisis de la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* y la verificación de la Primera parte de la Segunda Hipótesis, vamos a efectuar un contraste por medio de la Prueba U de Mann-Whitney en la medida tomada en el mes de mayo del Segundo curso de la diplomatura de Maestro, el Postest 2 (O_3), en los grupos de Control y Experimental, cuyos descriptivos (65,45% y 75,93%), que vimos en el Capítulo 6 en los puntos 6.1.3.2 y 6.1.3.3. respectivamente, eran muy similares a los de su última medida, por lo que esperamos que haya diferencias significativas entre ambos grupos.

En la Tabla 7.18. exponemos los datos más importantes del análisis, estando la totalidad en el Anexo 7.4.

Tabla 7.18. Contraste en la medida O_3

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
CONTROL	165	65,45%	88,51	14604,00	SÍ, al 99%
EXPERIMENTAL	18	75,93%	124,00	2232,00	
Total	183	66,48%			

La significación asintótica (bilateral) es afirmativa, hay diferencias significativas, la 99%, es decir, el curso *Matemàtica Prèvia* influye, y vemos en la columna «Rango promedio» que el valor del Grupo Control es 88,51 y el del Experimental, 124,00, que indica que el grupo Experimental ha mejorado.

Al haber diferencias significativas en el Postest 2 entre el Grupo de Control y el Grupo Experimental, vamos a realizar el mismo tipo de análisis, la Prueba U de Mann-Whitney, en las categorías de contenidos. Si en algunas de ellas hay también significación asintótica (bilateral) efectuaremos también el estudio en las subcategorías de contenido.

Los resultados completos de todos estos contrastes los presentamos en el Anexo 7.4.

A. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Fracciones y sentido numérico»

Exhibimos en la Tabla 7.19. los datos más característicos de este análisis.

Tabla 7.19. Contraste observación O_3 en «Fracciones y sentido numérico»

Grupo	**N**	**Respuestas correctas**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_3A FRAC	165	63,36%	89,15	14709,50	Sí, al 95%
O_3B FRAC	18	73,23	118,14	2126,50	
Total	183	65,45%			

Como podemos leer en la primera columna por la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 95%, es decir, hay diferencias importantes en «Fracciones y sentido numérico» entre ambos grupos. La columna «Rango promedio», nos aclara que son mejores los resultados en el Grupo Experimental.

Al haber significación asintótica (bilateral) pasamos a hacer el contraste en cada una de las cuatro subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico» en busca de posibles aclaraciones.

A.1. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Fracciones ordinarias, significado y representación»

En la Tabla 7.20. tenemos algunos de los datos del mismo en la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» (F.O.S.R.).

Tabla 7.20. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Fracciones ordinarias, significado y representación»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A F.O.S.R.	165	45,45%	90,17	14878,50	NO
O_3B F.O.S.R.	18	58,33%	108,75	1957,50	
Total	183	46,72%			

Datos que nos dicen que no hay diferencias significativas entre ambos grupos en esta clase de contenidos.

A.2. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Operaciones, relaciones y propiedades»

Este análisis en la subcategoría «Operaciones, relaciones y propiedades» (O.R.P.) está resumido en la Tabla 7.21.

Tabla 7.21. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Operaciones, relaciones y propiedades»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A O.R.P.	165	69,09%	89,91	14835,00	NO
O_3B O.R.P.	18	79,63%	111,17	2001,00	
Total	183	70,13%			

Vuelve a no haber significación asintótica (bilateral) entre el Grupo de Control y Experimental, ahora en «Operaciones, relaciones y propiedades».

A.3. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Números decimales»

Reflejamos en la Tabla 7.22. lo más relevante del estudio en «Números decimales» (N.D.).

Tabla 7.22. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Números decimales»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A N.D.	165	77,37%	91,57	15109,00	NO
O_3B N.D.	18	79,63%	95,94	1727,00	
Total	183	7760%			

En esta subcategoría de contenidos de «Fracciones y sentido numérico», en el Postest 2 (O_3) no hay diferencia significativa entre el Grupo de Control y el Grupo Experimental.

A.4. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Estimación y sentido numérico»

Relacionamos parte del contraste en «Estimación y sentido numérico» (E.S.N.) en la Tabla 7.23.

Tabla 7.23. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Estimación y sentido numérico»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A E.S.N.	165	55,56%	89,69	14799,50	NO
O_3B E.S.N.	18	70,37%	113,14	2036,50	
Total	183	57,01%			

Tampoco hay significación asintótica (bilateral) para el Postest 2 (O_3) entre los que asistieron y los que no lo hicieron al *Curs Zero*.

La significación afirmativa de la categoría «Fracciones y sentido numérico», al 95%, no es fruto de ninguna de sus subcategorías, es general.

B. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Geometría»

Para la categoría de contenido «Geometría» los datos más notables del análisis lo enseñamos en la Tabla 7.24.

Tabla 7.24. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Geometría»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A. GEOM	165	60,00%	88,25	14560,50	SÍ, al 99%
O_3B GEOM	18	76,67%	126,42	2275,50	
Total	183	65,45%			

En esta categoría de contenido hay significación asintótica (bilateral) al 99%, por tanto, según los números anteriores, los estudiantes del Grupo Experimental saben más contenidos de «Geometría».

Al haber significación asintótica (bilateral) vamos a hacer el estudio en las subcategorías de contenido de «Geometría».

B.1 Contraste en Postest 2 (O_3) en «Congruencia y semejanza»

La Tabla 7.25. reune algunos de los datos en el caso de la subcategoría «Congruencia y semejanza»

Tabla 7.25. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Congruencia y semejanza»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A. CONGR	165	35,15%	89,66	14794,50	SÍ, al 95%
O_3B CONGR	18	61,11%	113,42	2041,50	
Total	183	37,70%			

Estudio que nos descubre que hay diferencias significativas, al 95%, manifestando los rangos promedio que los resultados de respuestas correctas fueron mejores en el Grupo Experimental.

B.2 Contraste en Postest 2 (O_3) en «Otras cuestiones de Geometría»

Para la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría» el resumen del análisis es la Tabla 7.26.

Tabla 7.26. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Otras cuestiones de Geometría»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A. OTR. GEOM	165	66,21%	89,00	14685,50	SÍ, al 95%
O_3B OTR. GEOM	18	80,56%	119,47	2150,50	
Total	183	67,62%			

Se repite la significación asintótica (bilateral) y favorable para el mismo grupo.

C. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Álgebra»

Realizado el contraste en la categoría de contenido «Álgebra» desplegamos en la Tabla 7.27. los datos más significativos.

Tabla 7.27. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Álgebra»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A ÁLG	165	71,11%	91,45	15089,00	NO
O_3B ÁLG	18	73,11%	97,06	1747,00	
Total	183	71,31%			

Ahora no hay significación asintótica (bilateral), eso quiere decir que no hay diferencias importantes en el nivel de conocimientos algebraicos entre ambos grupos.

D. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

En la categoría de contenido «Representación y análisis de datos. Probabilidad» los datos más notables del contraste los manifestamos en la Tabla 7.28.

Tabla 7.28. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A PROBA	165	72,73%	89,64	14790,50	NO
O_3B PROBA	18	82,22%	113,64	2045,50	
Total	183	73,66%			

También en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» no hay significación asintótica (bilateral), por tanto, los estudiantes del Grupo de Control aproximadamente saben tanto de estos contenidos como los del Experimental.

E. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Medida»

En este estudio en la categoría de contenido «Medida» ofrecemos en la Tabla 7.29. los datos más trascendentes.

Tabla 7.29. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Medida»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A MED	165	63,48%	87,87	14498,00	SÍ,al 99%
O_3B MED	18	81,94%	129,89	2338,00	
Total	183	65,30			

Como podemos leer en la columna de más a la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 99%, es decir, hay diferencias importantes en el nivel de conocimientos en los contenidos de «Medida» entre ambos grupos. Las columnas tercera y cuarta por la izquierda, nos revelan que son mejores los resultados en el Grupo Experimental.

F. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Proporcionalidad»

Efectuado el análisis en la categoría de contenido «Proporcionalidad» anunciamos en la Tabla 7.30. los datos más característicos.

Tabla 7.30. Contraste en Postest 2 (O_3) en «Proporcionalidad»

Grupo	N	Respuestas correctas	Rango promedio	Suma de rangos	Significación asintótica (bilateral)
O_3A PROP	165	59,39%	90,70	14965,50	NO
O_3B PROP	18	69,44%	103,92	1870,50	
Total	183	60,38%			

No hay significación asintótica (bilateral) en «Proporcionalidad», es decir, los estudiantes del Grupo de Control tienen casi el mismo nivel de conocimientos de estos contenidos que los del Grupo Experimental.

G. Síntesis

El resumen de los resultados de los análisis realizados entre las medidas de la observación O_3 en los dos grupos, es que la diferencia significativa global existente al 95%, siempre favorable al Grupo Experimental, no la originan las seis categorías de contenido matemático, sólo la mitad de ellas: «Fracciones y sentido numérico»; «Geometría» y «Medida».

Que no haya diferencia significativa entre los dos grupos de la muestra en las otras tres categorías de contenido matemático, «Álgebra», «Representación y análisis de datos. Probabilidad» y «Proporcionalidad», puede ser porque la medida del Postest 2 (O_3) fue tomada hacia el final de las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro (en el mes de mayo) concurriendo que los contenidos algebraicos y de proporcionalidad no son trabajados en ellas y los de estadística y probabilidad únicamente y muy brevemente en este curso en las especialidades de Educación Musical y de Educación Física (por no disponer de más tiempo en dichas asignaturas), como hemos expuesto en el Capítulo 4 en los puntos 4.1. Descripción de las asignaturas del Área en los planes de estudio de Maestro en la UJI y 4.2. Contenidos de las asignaturas.

7.2.2. CONTRASTES EN EL GRUPO EXPERIMENTAL

Para finalizar la realización del Segundo Objetivo, el estudio de la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro y para validar o rebatir la Hipótesis 2.2. «El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de

Maestro asistentes al *Curs Zero* se mantiene en el tiempo», practicamos unos análisis mediante la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon en las medidas tomadas en el Grupo Experimental. Lo que esperamos con estos contrastes es confirmar la progresión entre O_1B y O_2 y que no hay retrocesos entre O_2 y las siguientes medidas.

7.2.2.1. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B

Como ya hemos aplicado el análisis a las observaciones O_1B y O_2 en el estudio Pretest-Postest en el Grupo Experimental, punto 7.2.1.2., vamos a empezar los contrastes en este grupo por las medidas tomadas en O_1B y O_3B. Sus descriptivos (64,88% y 75,93%) aparecían en el Capítulo 6 en los puntos 6.1.1.3 y 6.1.3.3. respectivamente, pudiendo ver que había diferencia entre ellos, por lo que vamos a estudiar si esa diferencia estadísticamente es significativa.

En la Tabla 7.31. exponemos los datos más importantes del estudio, estando la totalidad en el Anexo 7.5.

Tabla 7.31. Contraste observaciones O_1B y O_3B

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B	64,88%	Negativos	3[a]	3,83	11,50	-2,578[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	11[b]	8,50	93,50		
O_3B	75,93%	Empates	2[c]				
		Total	16				

a. $O_3B < O_1B$

b. $O_3B > O_1B$

c. $O_3B = O_1B$

d. Basado en rangos negativos

Vemos en la tabla que hay significación asintótica (bilateral) al 99% y las columnas Respuestas correctas, Rangos y N nos aclaran que es favorable al Postest 2 (O_3B).

Como hay diferencias significativas entre ambas observaciones del Grupo Experimental, vamos a efectuar el mismo tipo de análisis, la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, en las distintas categorías de contenidos y si procede en las correspondientes subcategorías, para tratar de conocer en qué contenidos se producen las diferencias. Los resultados completos de todos estos estudios se incluyen asimismo en el Anexo 7.5.

A. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B en «Fracciones y sentido numérico»

Indicamos en la Tabla 7.32. los datos más significativos de este contraste.

Tabla 7.32. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Fracciones y sentido numérico»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B FRAC	64,71%	Negativos	5[a]	5,20	26,00	-1,680[d]	NO
		Positivos	9[b]	8,78	79,00		
O_3B FRAC	73,23%	Empates	2[c]				
		Total	16				

[a] O_3B FRAC < O_1B FRAC

[b] O_3B FRAC > O_1B FRAC

[c] O_3B FRAC = O_1B FRAC

[d] Basado en rangos negativos

No hay significación asintótica (bilateral), podemos afirmar por tanto que las medidas de O_1B y O_3B son equivalentes en cuanto al nivel de conocimientos de «Fracciones y sentido numérico».

B. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B en «Geometría»

El análisis en los contenidos geométricos lo mostramos en la Tabla 7.33.

Tabla 7.33. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Geometría»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B GEOM	51,76%	Negativos	2[a]	4,25	8,50	-2,430[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	10[b]	6,95	69,50		
O_3B GEOM	76,67%	Empates	4[c]				
		Total	16				

a. O_3B GEOM < O_1B GEOM

b. O_3B GEOM > O_1B GEOM

c. O_3B GEOM = O_1B GEOM

d. Basado en rangos negativos

En esta categoría de contenido sí hay significación asintótica (bilateral) al 95%, a favor de O_3B, por lo que pasamos a estudiar las dos subcategorías de «Geometría»: «Congruencia y semejanza» y «Otras cuestiones de Geometría».

B.1. Contrastes en las observaciones O_1B y O_3B en «Congruencia y semejanza»

La Tabla 7.34. reune algunos de los datos en el caso de esta subcategoría.

Tabla 7.34. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Congruencia y semejanza»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B CONGR	23,53%	Negativos	1[a]	4,00	4,00	-1,890[d]	NO
		Positivos	6[b]	4,00	24,00		
O_3B CONGR	61,11%	Empates	9[c]				
		Total	16				

[a] O_3B CONGR $<$ O_1B CONGR
[b] O_3B CONGR $>$ O_1B CONGR
[c] O_3B CONGR = O_1B CONGR
[d] Basado en rangos negativos

Estudio que nos descubre que no hay diferencias significativas.

B.2. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B en «Otras cuestiones de Geometría»

Para la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría» resumimos en la Tabla 7.35. el contraste.

Tabla 7.35. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Otras cuestiones de Geometría»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B OTR. GEOM	58,82%	Negativos	1[a]	6,50	6,50	-2,197[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	9[b]	5,39	48,50		
O_3B OTR. GEOM	80,56%	Empates	6[c]				
		Total	16				

a. O_3B OTR. GEOM < O_1B OTR. GEOM
b. O_3B OTR. GEOM > O_1B OTR. GEOM
c. O_3B OTR. GEOM = O_1B OTR. GEOM
d. Basado en rangos negativos

Hay significación asintótica (bilateral) al 95% y favorable para O_3B. Luego ésta es la justificación de las diferencias en la categoría de contenido «Geometría».

C. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B en «Álgebra»

Realizado el análisis en la categoría de contenido «Álgebra» desplegamos en la Tabla 7.36. los datos más significativos.

Tabla 7.36. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Álgebra»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B ÁLG	69,61%	Negativos	5[a]	4,60	23,00	-0,061[d]	NO
		Positivos	4[b]	5,50	22,00		
O_3B ÁLG	73,11%	Empates	7[c]				

		Total	16				

a. O_3B ÁLG < O_1B ÁLG

b. O_3B ÁLG > O_1B ÁLG

c. O_3B ÁLG = O_1B ÁLG

d. Basado en rangos negativos

Ahora no hay significación asintótica (bilateral), eso quiere decir que no hay diferencias importantes en el nivel de conocimientos algebraicos entre ambas observaciones.

D. Contrastes en las observaciones O_1B y O_3B en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

Los datos más notables del estudio los manifestamos en la Tabla 7.37.

Tabla 7.37. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B PROBA	78,82%	Negativos	4[a]	5,50	22,00	-0.061[d]	NO
		Positivos	5[b]	4,60	23,00		
O_3B PROBA	82,22%	Empates	7[c]				
		Total	16				

a. O_3B PROBA < O_1B PROBA

b. O_3B PROBA > O_1B PROBA

c. O_3B PROBA = O_1B PROBA

d. Basado en rangos negativos

Tampoco hay significación asintótica (bilateral) en «Representación y análisis de datos. Probabilidad».

E. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B en «Medida»

En este caso ofrecemos en la Tabla 7.38. los datos más trascendentes.

Tabla 7.38. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Medida»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B MED	61,76%	Negativos	2[a]	4,00	8,00	-2,289[d]	Sí, al 95%
		Positivos	9[b]	6,44	58,00		
O_3B MED	81,94%	Empates	5[c]				
		Total	16				

a. O_3B MED < O_1B MED
b. O_3B MED > O_1B MED
c. O_3B MED = O_1B MED
d. Basado en rangos negativos

Como podemos leer en la columna de más a la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 95%, es decir, hay diferencias importantes en el nivel de conocimientos en los contenidos de «Medida» entre ambos observaciones. Las columnas segunda a cuarta por la izquierda, nos revelan que son mejores los resultados en O_3B.

F. Contraste en las observaciones O_1B y O_3B en «Proporcionalidad»

Efectuado el análisis en la categoría de contenido «Proporcionalidad» anunciamos en la Tabla 7.39. los datos más característicos.

Tabla 7.39. Contraste observaciones O_1B y O_3B en «Proporcionalidad»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B PROP	55,88%	Negativos	4[a]	5,50	22,00	-1,069[d]	NO
		Positivos	7[b]	6,29	44,0		
O_3B PROP	69,44%	Empates	5[c]				
		Total	16				

a. O_3B PROP < O_1B PROP

b. O_3B PROP > O_1B PROP

c. O_3B PROP = O_1B PROP

d. Basado en rangos negativos

No hay significación asintótica (bilateral) en «Proporcionalidad», es decir, los estudiantes del Grupo Experimental tienen casi el mismo nivel de conocimientos de estos contenidos en las dos medidas.

G. Síntesis

La recopilación de los resultados de los estudios realizados entre las medidas Pretest y Postest 2 en el Grupo Experimental (O_1B – O_3B), permite decir que la diferencia significativa global existente al 99% favorable para el Postest 2 (O_3B) la causan las categorías de contenido «Geometría» y «Medida».

La posible explicación de por qué sólo estas dos categorías de contenido generan la diferencia significativa tal vez se deba a que los contenidos geométricos se trabajaron en el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* y también en las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, excepto en Maestro-Especialidad de Educación Primaria (ver en Capítulo 4 los puntos 4.1. Descripción de las asignaturas del Área en los planes de estudio de Maestro en la UJI y 4.2. Contenidos de las asignaturas), mientras que los contenidos de medida pese a que no fueron vistos en el *Curs Zero* sí se estudiaron en todas las asignaturas de Segundo curso de Maestro, hacia cuyo final fue tomada la medida del Postest 2 (O_3B).

7.2.2.2. Contraste en las observaciones O_1B y O_5

Siguiendo con los trabajos hechos por y para el Segundo Objetivo y también la Segunda parte de la Segunda Hipótesis, efectuamos un contraste, mediante la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, entre la primera (O_1B) y la última medida (O_5) en el Grupo Experimental, cuyos valores descriptivos (64,88% y 78,47%), que aparecían en el Capítulo 6 en los puntos 6.1.1.3. y 6.1.4. respectivamente, mantenían una cierta distancia que vamos a ver si es una diferencia significativa estadísticamente.

Los resultados completos del análisis están en el Anexo 7.6., exponiendo en la Tabla 7.40. los datos más significativos.

Tabla 7.40. Contraste observaciones O_1B y O_5

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B	64,88%	Negativos	2[a]	2,00	4,00	-3,315[d]	Sí, al 99%
		Positivos	14[b]	9,43	132,00		
O_5	78,47%	Empates	1[c]				
		Total	17				

a. $O_5 < O_1B$

b. $O_5 > O_1B$

c. $O_5 = O_1B$

d. Basado en rangos negativos

Vemos en la columna de más a la derecha de la tabla que sí hay significación asintótica (bilateral), además al 99%, eso quiere decir que hay diferencias notables en el nivel de conocimientos matemáticos y como nos revelan la segunda, tercera y cuarta columnas por la izquierda, la superioridad se observa en O_5.

Por haber diferencias significativas, como ya es sabido vamos a practicar el mismo tipo de análisis, la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, en las distintas categorías de contenidos y si es el caso en las respectivas subcategorías, para tratar de conocer en qué contenidos se suscitan. Los resultados completos de todos estos estudios se incluyen en el Anexo 7.6.

A. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Fracciones y sentido numérico»

Este estudio en el Grupo Experimental lo mostramos en la Tabla 7.41. con los datos más interesantes.

Tabla 7.41. Contraste observaciones O_1B y O_5 en y «Fracciones y sentido numérico»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B FRAC	64,71%%	Negativos	4[a]	5,75	23,00	-1,583[d]	NO
		Positivos	9[b]	7,56	68,00		
O_5 FRAC	73,68%	Empates	4[c]				
		Total	17				

a. O_5 FRAC < O_1B FRAC
b. O_5 FRAC > O_1B FRAC
c. O_5 FRAC = O_1B FRAC
d. Basado en rangos negativos

Como podemos leer en la columna más a la derecha no hay significación asintótica (bilateral), es decir, no hay diferencias importantes en «Fracciones y sentido numérico» entre ambas observaciones.

B. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Geometría»

Los datos más relevantes del contraste los enseñamos en la Tabla 7.42.

Tabla 7.42. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Geometría»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B GEOM	51,76%	Negativos	1[a]	2,50	2,50	-3,033[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	12[b]	7,38	88,50		
O_5 GEOM	82,11%	Empates	4[c]				
		Total	17				

a. O_5 GEOM < O_1B GEOM

b. O_5 GEOM > O_1B GEOM

c. O_5 GEOM = O_1B GEOM

d. Basado en rangos negativos

En esta categoría de contenido hay significación asintótica (bilateral) al 99%, los estudiantes saben más contenidos de «Geometría» en la observación O_5.

Procedemos a analizar las dos subcategorías de «Geometría»: «Congruencia y semejanza» y «Otras cuestiones de Geometría».

B.1. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Congruencia y semejanza»

La Tabla 7.43. reune algunos de los datos en el caso de la subcategoría «Congruencia y semejanza».

Tabla 7.43. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Congruencia y semejanza»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_1B CONGR	23,53%	Negativos	0[a]	0,00	0,00	-3,000[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	9[b]	5,00	45,00		
O_5 CONGR	78,95%	Empates	8[c]				
		Total	17				

a. O_5 CONGR < O_1B CONGR

b. O_5 CONGR > O_1B CONGR

c. O_5 CONGR = O_1B CONGR

d. Basado en rangos negativos

Estudio que nos descubre que hay diferencias significativas, al 99%, manifestando los rangos con signo que los resultados de respuestas correctas fueron mejores en el Postest 4 (O_5).

B.2. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Otras cuestiones de Geometría»

Para la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría» el resumen es en la Tabla 7.44.

Tabla 7.44. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Otras cuestiones de Geometría»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B OTR. GEOM	58,82%	Negativos	2[a]	4,00	8,00	-2,676[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	11[b]	7,55	83,00		
O_5 OTR. GEOM	82,89%	Empates	4[c]				
		Total	17				

a. O_5 OTR. GEOM < O_1B OTR. GEOM

b. O_5 OTR. GEOM > O_1B OTR. GEOM

c. O_5 OTR. GEOM = O_1B OTR. GEOM

d. Basado en rangos negativos

Se repite la significación asintótica (bilateral), pero al 99% y favorable para el Postest 4 (O_5).

C. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Álgebra»

Realizado el contraste registramos en la Tabla 7.45. los datos más reveladores.

Tabla 7.45. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Álgebra»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B ÁLG	69,61%	Negativos	2[a]	3,50	7,00	-1,851[d]	NO
		Positivos	7[b]	5,43	38,00		
O_5 ÁLG	79,82%	Empates	8[c]				
		Total	17				

[a.] O_5 ÁLG < O_1B ÁLG
[b.] O_5 ÁLG > O_1B ÁLG
[c.] O_5 ÁLG = O_1B ÁLG
[d.] Basado en rangos negativos

Ahora no hay significación asintótica (bilateral) eso quiere decir que no hay diferencias significativas en el nivel de conocimientos algebraicos entre ambas observaciones.

D. Contrastes en las observaciones O_1B y O_5 en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

En la categoría de contenido «Representación y análisis de datos. Probabilidad» los datos notables del análisis los desplegamos en la Tabla 7.46.

Tabla 7.46. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B PROBA	78,82%	Negativos	3[a]	4,50	13,50	-1,155[d]	NO
		Positivos	6[b]	5,25	31,50		
O_5 PROBA	84,21%	Empates	8[c]				
		Total	17				

[a.] O_5 PROBA < O_1B PROBA
[b.] O_5 PROBA > O_1B PROBA
[c.] O_5 PROBA = O_1B PROBA
[d.] Basado en rangos negativos

Como en la categoría de contenido anterior, en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» no hay significación asintótica (bilateral), por tanto, los estudiantes aproximadamente saben tanto de estos contenidos en una como en otra observación.

E. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Medida»

En este estudio ofrecemos en la Tabla 7.47. los datos más importantes.

Tabla 7.47. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Medida»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B MED	61,76%	Negativos	1[a]	4,00	4,00	-2,495[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	9[b]	5,67	51,00		
O_5 MED	78,95%	Empates	7[c]				
		Total	17				

[a] O_5 MED < O_1B MED
[b] O_5 MED > O_1B MED
[c] O_5 MED = O_1B MED
[d] Basado en rangos negativos

Como podemos leer en la columna de más a la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 95%, es decir, hay diferencias en el nivel de conocimientos en los contenidos de «Medida». Las columnas segunda, tercera y cuarta por la izquierda, nos revelan que son mejores los resultados en el Postest 4 (O_5).

F. Contraste en las observaciones O_1B y O_5 en «Proporcionalidad»

Efectuado el contraste anunciamos en la Tabla 7.48. los datos más característicos.

Tabla 7.48. Contraste observaciones O_1B y O_5 en «Proporcionalidad»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_1B PROP	55,88%	Negativos	3[a]	5,00	15,00	-1,706[d]	NO
		Positivos	8[b]	6,38	51,00		
O_5 PROP	76,32%	Empates	6[c]				
		Total	17				

a. O_5 PROP < O_1B PROP

b. O_5 PROP > O_1B PROP

c. O_5 PROP = O_1B PROP

d. Basado en rangos negativos

No hay significación asintótica (bilateral) en «Proporcionalidad», es decir, los estudiantes tienen aproximadamente el mismo nivel de conocimientos de estos contenidos en ambas observaciones.

G. Síntesis

Si los resultados de los análisis realizados entre las medidas O_1B y O_5 del Grupo Experimental los condensamos, nos quedamos con que la diferencia significativa global existente al 99% positiva para O_5 la crean solamente las categorías de contenido «Geometría» y «Medida».

Estas dos categorías de contenido son también las mismas y únicas que generaron la diferencia significativa entre las medidas O_1B y O_3B. A todas las circunstancias que se daban en esta comparación, ahora para la de O_1B y O_5 además del año transcurrido en la obtención de los nuevos datos (la observación O_3B fue en mayo de 2.003 y O_5 en junio de 2.004), los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y los de Especialidad de Educación Primaria han estudiado una asignatura de didáctica de la matemática en Tercer curso, en la que los primeros vieron todos los bloques de contenidos de la etapa educativa Primaria y los segundos los bloques de «Geometría» y «Estadística. Azar. Probabilidad», y a pesar de ello, ni siquiera la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad» (sinónima del último bloque) participa en la producción de la diferencia significativa entre O_1B y O_5.

7.2.2.3. Contraste en las observaciones O_2 y O_3B

Continuando con los contraste en el Grupo Experimental, ahora le toca el turno al que practicamos entre las observaciones O_2 y O_3B. Los descriptivos (80,06% y 75,93%) presentados en el Capítulo 6 en los puntos 6.1.2. y 6.1.3.3. respectivamente, parecían muy similares, pero analizaremos si hay equivalencia o diferencia significativa.

Los resultados completos los recopilamos en el Anexo 7.7., exponiendo en la Tabla 7.49. los datos más reveladores.

Tabla 7.49. Contraste observaciones O_2 y O_3B

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2	80,06%	Negativos	14[a]	9,54	133,50	-2,727[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	3[b]	6,50	19,50		
O_3B	75,93%	Empates	1[c]				
		Total	18				

a. $O_3B < O_2$

b. $O_3B > O_2$

c. $O_3B = O_2$

d. Basado en rangos positivos

La significación asintótica (bilateral) es afirmativa, al 99%, indicándonos las restantes columnas de la tabla que los mejores resultados son los O_2.

Al haber diferencias significativas, vamos a realizar el análisis, la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon, en las categorías de contenidos y, si es el caso, en algunas de ellas, también en las subcategorías de contenido. Los resultados completos de todos estos estudios los presentamos asimismo en el Anexo 7.7.

A. Contraste en las observaciones O_2 y O_3B en «Fracciones y sentido numérico»

Exhibimos en la Tabla 7.50. los datos más característicos de este contraste.

Tabla 7.50. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Fracciones y sentido numérico»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 FRAC	80.66%	Negativos	12[a]	8,00	96,00	-2,791[d]	SÍ, al 99%
		Positivos	2[b]	4,50	9,00		
O_3B FRAC	73,23%	Empates	4[c]				
		Total	18				

a. O_3B FRAC < O_2 FRAC
b. O_3B FRAC > O_2 FRAC
c. O_3B FRAC = O_2 FRAC
d. Basado en rangos positivos

Como podemos leer en la primera columna por la derecha sí hay significación asintótica (bilateral), al 99%, es decir, hay diferencias importantes en «Fracciones y sentido numérico» entre ambos grupos. La columnas centrales nos aclaran que son mejores los resultados en el Postest 1 (O_2).

Al haber diferencias significativas pasamos a hacer el contraste en cada una de las cuatro subcategorías de contenido de «Fracciones y sentido numérico» en busca de posibles aclaraciones.

A.1. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Fracciones ordinarias, significado y representación»

En la Tabla 7.51. tenemos algunos de los datos del mismo en la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación».

Tabla 7.51. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Fracciones ordinarias, significado y representación»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_2 F.O.S.R.	76,32%	Negativos	7[a]	4,57	32,00	-2,111[d]	SÍ, al 95%
		Positivos	1[b]	4,00	4,00		
O_3B F.O.S.R.	58,33%	Empates	10[c]				
		Total	18				

a. O_3B F.O.S.R. < O_2 F.O.S.R.

b. O_3B F.O.S.R. > O_2 F.O.S.R.

c. O_3B F.O.S.R. = O_2 F.O.S.R.

d. Basado en rangos positivos

Datos que nos dicen que hay diferencias significativas entre ambas observaciones en esta clase de contenidos.

A.2. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Operaciones, relaciones y propiedades»

Este análisis en la subcategoría «Operaciones, relaciones y propiedades» (O.R.P.) está resumido en la Tabla 7.52.

Tabla 7.52. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Operaciones, relaciones y propiedades»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 O.R.P.	85,96%	Negativos	4[a]	3,13	12,50	-1,414[d]	NO
		Positivos	1[b]	2,50	2,50		
O_3B O.R.P.	79,63%	Empates	13[c]				
		Total	18				

a. O_3B O.R.P. < O_2 O.R.P.

b. O_3B O.R.P. > O_2 O.R.P.

c. O_3B O.R.P. = O_2 O.R.P.

d. Basado en rangos positivos

No hay significación asintótica (bilateral) entre O_2 y O_3B en «Operaciones, relaciones y propiedades».

A.3. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Números decimales»

Reflejamos en la Tabla 7.53. lo más relevante del estudio en «Números decimales.

Tabla 7.53. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Números decimales»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 N.D.	82,46%	Negativos	4[a]	3,13	12,50	-1,414[d]	NO
		Positivos	1[b]	2,50	2,50		
O_3B N.D.	79,63%	Empates	13[c]				
		Total	18				

[a.] O_3B N.D. < O_2 N.D.

[b.] O_3B N.D. > O_2 N.D.

[c.] O_3B N.D. = O_2 N.D.

[d.] Basado en rangos positivos

En esta subcategoría de contenidos de «Fracciones y sentido numérico», no hay diferencia significativa entre O_2 y O_3B.

A.4. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Estimación y sentido numérico»

Relacionamos parte del contraste en «Estimación y sentido numérico» en la Tabla 7.54.

Tabla 7.54. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Estimación y sentido numérico»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 E.S.N.	77,19%	Negativos	7[a]	4,93	34,50	-1,461[d]	NO
		Positivos	2[b]	5,25	10,50		

O_3B E.S.N.	70,37%	Empates	9[c]				
		Total	18				

[a.] O_3B E.S.N. < O_2 E.S.N.

[b.] O_3B E.S.N. > O_2 E.S.N.

[c.] O_3B E.S.N. = O_2 E.S.N.

[d.] Basado en rangos positivos

Tampoco hay significación asintótica (bilateral).

La significación afirmativa de la categoría «Fracciones y sentido numérico», al 99%, es fruto de la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación.

B. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Geometría»

Los datos más notables del análisis para «Geometría» los enseñamos en la Tabla 7.55.

Tabla 7.55. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Geometría»

Observaciones	**Respuestas correctas**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Significación asintótica (bilateral)**
O_2 GEOM	75,79%	Negativos	5[a]	5,30	26,50	-0,105[d]	NO
		Positivos	5[b]	5,70	28,50		
O_3B GEOM	76,67%	Empates	8[c]				
		Total	18				

[a.] O_3B GEOM < O_2 GEOM

[b.] O_3B GEOM > O_2 GEOM

[c.] O_3B GEOM = O_2 GEOM

[d.] Basado en rangos negativos

En esta categoría de contenido no hay significación asintótica (bilateral), por tanto, según los números anteriores, los estudiantes saben aproximadamente tantos contenidos de «Geometría» en una observación como en la otra.

C. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Álgebra»

Realizado el estudio en la categoría de contenido «Álgebra» desplegamos en la Tabla 7.56. los datos más significativos.

Tabla 7.56. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Álgebra»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 ÁLG	79,82%	Negativos	8[a]	8,38	67,00	-1,521[d]	NO
		Positivos	5[b]	4,80	24,00		
O_3B ÁLG	73,15%	Empates	5[c]				
		Total	18				

a. O_3B ÁLG < O_2 ÁLG
b. O_3B ÁLG > O_2 ÁLG
c. O_3B ÁLG = O_2 ÁLG
d. Basado en rangos positivos

Tampoco hay significación asintótica (bilateral), eso quiere decir que no hay diferencias importantes en el nivel de conocimientos algebraicos entre ambas observaciones.

D. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

En la categoría de contenido «Representación y análisis de datos. Probabilidad» los datos más notables del contraste los manifestamos en la Tabla 7.57.

Tabla 7.57. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Representación y análisis de datos. Probabilidad»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 PROBA	83,16%	Negativos	4[a]	3,63	14,50	-0,086[d]	NO
		Positivos	3[b]	4,50	13,50		
O_3B PROBA	82,22%	Empates	11[c]				
		Total	18				

a. O_3B PROBA < O_2 PROBA
b. O_3B PROBA > O_2 PROBA
c. O_3B PROBA = O_2 PROBA
d. Basado en rangos positivos

También en «Representación y análisis de datos. Probabilidad» no hay significación asintótica (bilateral), por tanto, los estudiantes del Grupo Experimental, poco más o menos, saben tanto de estos contenidos en O_2 como en O_3B.

E. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Medida»

En este estudio en la categoría de contenido «Medida» ofrecemos en la Tabla 7.58. los datos más trascendentes.

Tabla 7.58. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Medida»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 MED	82,89%	Negativos	4[a]	3,88	15,50	-0,264[d]	NO
		Positivos	3[b]	4,17	12,50		
O_3B MED	81,94%	Empates	11[c]				
		Total	18				

a. O_3B MED < O_2 MED
b. O_3B MED > O_2 MED
c. O_3B MED = O_2 MED
d. Basado en rangos positivos

Como podemos leer en la columna de más a la derecha no hay significación asintótica (bilateral), es decir, no hay diferencias importantes en el nivel de conocimientos en los contenidos de «Medida» entre ambas medidas.

F. Contrastes en las observaciones O_2 y O_3B en «Proporcionalidad»

Efectuado el análisis en la categoría de contenido «Proporcionalidad» anunciamos en la Tabla 7.59. los datos más característicos.

Tabla 7.59. Contraste observaciones O_2 y O_3B en «Proporcionalidad»

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2 PROP	73,68%	Negativos	7[a]	6,00	42,00	-0,905[d]	NO
		Positivos	4[b]	6,00	24,00		

O_3B PROP	69,44%	Empates	7[c]				
		Total	18				

a. O_3B PROP $<$ O_2 PROP

b. O_3B PROP $>$ O_2 PROP

c. O_3B PROP = O_2 PROP

d. Basado en rangos positivos

No hay significación asintótica (bilateral) en «Proporcionalidad», es decir, los estudiantes tienen casi el mismo nivel de conocimientos de estos contenidos en O_2 que en O_3B.

G. Síntesis

Al hacer el compendio de los resultados de los estudios realizados entre las medidas O_2 y O_3B del Grupo Experimental, obtenemos que la diferencia significativa global existente al 99%, positiva para O_2 se debe exclusivamente a la categoría de contenido «Fracciones y sentido numérico» y generada principalmente por la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» en la que hay una diferencia significativa del 95% entre ambas medidas.

Si comparamos las tablas de resultados por subcategorías de contenidos y totales de «Fracciones y sentido numérico» de las observaciones O_2 y O_3B (Capítulo 6: punto 6.1.2.1., Tabla 6.17. y punto 6.1.3.3., Tabla 6.32., respectivamente) vemos que en O_3B, en las diferentes subcategorías y en el total de la categoría, se produce un descenso en los porcentajes, que en valores relativos no llega la 10% mientras que en la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» ese descenso relativo supera el 20%.

¿El motivo? Tal vez que durante el tiempo que separa el momento de tomar ambas medidas, que fue en el que se desarrollaron las asignaturas de Segundo curso de Maestro, la incidencia de éstas en los aspectos didácticos de los contenidos matemáticos afectó más a los contenidos de «Fracciones ordinarias, significado y representación» el olvido o la pérdida de nivel de conocimientos matemáticos.

7.2.2.4. Contraste en las observaciones O_2 y O_5

Prosiguiendo con los trabajos para el logro del Segundo Objetivo y también para constatar la Segunda parte de la Segunda Hipótesis, efectuamos un contraste entre las dos medidas tomadas sólo en el Grupo Experimental, Postest 1 (O_2) y Postest 4 (O_5). La Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon ha sido la aplicada a los descriptivos, que aparecían en el Capítulo 6 en los puntos 6.1.2. para O_2 (80,06%) y en 6.1.4. para O_5 (78,47%), datos numéricamente muy próximos, por lo que esperamos que no haya diferencia significativa.

Los resultados completos están contenidos en el Anexo 7.8., exponiendo en la Tabla 7.60. los datos más característicos.

Tabla 7.60. Contraste observaciones O_2 y O_5

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_2	80,06%	Negativos	9[a]	7,44	67,00	-0.928[d]	NO
		Positivos	5[b]	7,60	38,00		
O_5	78,47%	Empates	5[c]				
		Total	19				

a. $O_5 < O_2$
b. $O_5 > O_2$
c. $O_5 = O_2$
d. Basado en rangos positivos

No hay significación asintótica (bilateral), es decir, los estudiantes tienen casi el mismo nivel de conocimientos de estos contenidos en ambas observaciones.

7.2.2.5. Contraste en las observaciones O_3B y O_5

Adelantando con los análisis en el Grupo Experimental, ahora vemos el correspondiente entre las observaciones O_3B y O_5. Los descriptivos correspondientes (75,93% y 78,47%) se encontraban en el Capítulo 6 en los puntos 6.1.3.3. y 6.1.4., valores numéricos muy cercanos, cabe esperar por tanto que no haya diferencia significativa.

Los resultados completos del contraste aparecen en el Anexo 7.9., reuniendo en la Tabla 7.61. los datos más explicativos.

Tabla 7.61. Contraste observaciones O_3B y O_5

Observaciones	Respuestas correctas	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Significación asintótica (bilateral)
O_3B	**75,93%**	Negativos	5[a]	5,80	29,00	-1,782[d]	NO
		Positivos	10[b]	9,10	91,00		
O_5	78,47%	Empates	3[c]				
		Total	18				

a. $O_5 < O_3B$
b. $O_5 > O_3B$
c. $O_5 = O_3B$
d. Basado en rangos negativos

Como podemos leer en la columna de más a la derecha no hay significación asintótica (bilateral), o sea, no hay diferencias importantes entre ambas medidas en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos.

7.2.2.6. Síntesis

De la compilación de los resultados de los contrastes realizados entre las medidas del Grupo Experimental, obtenemos:

- Entre el Pretest (O_1B) y el Postest 2 (O_3B) [punto 7.2.2.1.] hay una diferencia significativa al 99% favorable para el Postest 2, generada por:
  - La categoría de contenido «Geometría», en la que había una significación asintótica (bilateral) al 95%, consecuencia de la subcategoría «Otras cuestiones de Geometría», con una significación del 95%.
  - La categoría de contenido «Medida», en la que había una significación asintótica (bilateral) al 95%.
- Entre el Pretest (O_1B) y el Postest 4 (O_5) [punto 7.2.2.2.] hay una diferencia significativa al 99% favorable para el Postest 4, generada por:
  - La categoría de contenido «Geometría», en la que había una significación asintótica (bilateral) al 99%, consecuencia de sus dos subcategorías, con una significación del 99% en cada una de ellas.
  - La categoría de contenido «Medida», en la que había una significación asintótica (bilateral) al 95%.
- Entre el Postest 1 (O_2) y el Postest 2 (O_3B) [punto 7.2.2.3.] hay una diferencia significativa al 99% favorable para el Postest 1, generada únicamente por la categoría de contenido «Fracciones y sentido numérico», en la que había una significación asintótica (bilateral) al 99%, consecuencia sólo de la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación», con una significación del 95%.
- Entre el Postest 1 (O_2) y el Postest 4 (O_5) [punto 7.2.2.4.] no hay diferencia significativa.

- Entre el Postest 2 (O_3B) y el Postest 4 (O_5) [punto 7.2.2.5.] no hay diferencia significativa.

7.2.3. SÍNTESIS

En el punto 7.1. hemos visto que los grupos Control y Experimental son equivalentes en cuanto a su nivel conocimientos matemáticos previos, $O_1A = O_1B$ utilizando el lenguaje simbólico matemático, y en la primera medida tomada a cada grupo inmediatamente a la impartición del curso *Matemàtica Prèvia*, O_3A en el Control y O_2 en el Experimental tenemos: $O_1A = O_3A$ (punto 7.2.1.1.) y $O_1B < O_2$ (punto 7.2.1.2.).

Además, en el Postest 2, $O_3A < O_3B$ (punto 7.2.1.3.), es decir, transcurrido prácticamente el Segundo curso de la diplomatura de Maestro, los estudiantes asistentes al *Curs Zero*, el Grupo Experimental, tienen mejor nivel de conocimientos matemáticos que los no asistentes, el Grupo de Control.

Simbólicamente lo expresaríamos de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} O_1A = O_1B < O_2 \\ \parallel \\ O_3A < O_3B \end{array}$$

Podemos deducir que «El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes». Tenemos que mediante 7.2.1. hemos confirmado la Hipótesis 2.1.

En el punto 7.2.2. estábamos tratando de validar la Hipótesis 2.2. «El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* se mantiene en el tiempo». Siguiendo con la utilización del lenguaje simbólico matemático, detallamos que hemos obtenido:

En el punto 7.2.2.1.: $O_1B < O_3B$, y en el 7.2.2.2.: $O_1B < O_5$, es decir, el nivel Postest en conocimientos en contenidos matemáticos de los estudiantes asistentes al *Curs Zero* es mejor que antes del *Curs* (en el punto 7.2.1.2. ya habíamos visto que $O_1B < O_2$).

En el punto 7.2.2.3.: $O_3B < O_2$, en el 7.2.2.4.: $O_2 = O_5$, y en 7.2.2.5.: $O_3B = O_5$. O sea, salvo la diferencia significativa mínima que genera $O_3B < O_2$ (ver 7.2.2.6.), no hay diferencias significativas en el nivel en conocimientos matemáticos en los Postest.

Concluyendo por tanto, que quedaría confirmada la Hipótesis 2.2. a excepción de la explicación dada en 7.2.2.3.G. Síntesis.

Y con ella, dado que también está probada la Hipótesis 2.1., hemos completado el Segundo Objetivo de esta tesis doctoral.

7.3. IMPORTANCIA DE LOS CONOCIMIENTOS MATEMÁTICOS EN EL RENDIMIENTO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA (O_4)

Para la realización del Tercer Objetivo «Establecer la posible repercusión que los contenidos matemáticos puedan tener en las asignaturas de didáctica de la matemática» y también con la finalidad de verificar o rehusar la Tercera Hipótesis en sus dos partes, hicimos una serie de estudios, algunos entre medidas del Grupo de Control y del Grupo Experimental, y otros únicamente entre medidas de un sólo Grupo, que pasamos a detallar.

Queremos comprobar mediante los estudios que un mejor nivel de conocimientos matemáticos posibilita un mejor rendimiento en didáctica de la matemática.

7.3.1. ANÁLISIS DEL RENDIMIENTO EN DIDÁCTICA DE LA MATEMÁTICA (O_4)

Con la finalidad de afirmar o rechazar la Hipótesis 3.1. «El rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* es mejor que el de los no asistentes», practicamos la Prueba T de muestras independientes en la medida Postest 3 (O_4), cuyos resultados completos ofrecemos en el Anexo 7.10., indicando en la Tabla 7.62. los más representativos.

Para esta Prueba utilizamos las notas del rendimiento de los estudiantes en las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de la Diplomatura de Maestro. En el Capítulo 6 en el punto 6.2. mostrábamos los descriptivos del rendimiento mediante las categorías cualitativas Matrícula de Honor, Sobresaliente, Notable, Aprobado, Suspenso y No Presentado, que nos permiten suponer que habrá diferencias estadísticamente significativas entre el Grupo de Control y el Experimental.

Tabla 7.62. Prueba T en Postest 3 (O_4)

Grupo	N	Media	Desviación típica	Coeficiente de variación	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias
					F	**Signif.**	**Significación asintótica (bilateral)**
CONTROL	212	3,89	1,52	39,19%	0,479	NO	SÍ, al 99%
EXPERIMENTAL	15	5,19	1,66	32,02%			

Al efectuar el análisis, la Prueba de Levene para la igualdad de varianzas nos dice que no hay diferencias significativas entre el Grupo de Control y el Experimental, por lo que asumiendo dicha igualdad, la Prueba T para la igualdad de medias nos aclara que hay diferencias significativas importantes entre ambos grupos, al 99%.

En la columna «Media», vemos para el Grupo Control «3,89» y para el Grupo Experimental «5,19», es decir, el rendimiento de los estudiantes del grupo Experimental es mayor, luego se confirma la Hipótesis 3.1. Pero además, el coeficiente de variación nos indica que dicho rendimiento de los asistentes al *Curs Zero* es más homogéneo.

Al haber significación asintótica (bilateral) en la Prueba T, de manera análoga a los estudios de los apartados anteriores, deberíamos proceder a realizar el mismo tipo de análisis en las categorías equivalentes a las de contenido matemático de aquellos estudios.

En el afán de investigar más la repercusión de los contenidos matemáticos en las asignaturas de didáctica de la matemática, descendiendo un escalón en el sentido hacia la especificación de los contenidos por bloques o categorías de contenidos didácticos, la primera especificación es la resultante de la clasificación en didáctica matemática general y didáctica matemática concreta (ver Capítulo 5, punto 5.4.2. Prueba de conocimientos de didáctica de la matemática).

No podemos descender otro escalón en la especificación, como hemos hecho en las categorías de contenido matemático yendo a las subcategorías, porque como hemos explicado en el Capítulo 4 sobre los contenidos que abarcaban las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, los contenidos de didáctica comunes de éstas, cuyos resultados del rendimiento de los estudiantes son la medida Postest 3 (O_4), no recorrían todos los contenidos matemáticos escolares.

Nos encontramos, por tanto, con la imposibilidad de efectuar un análisis más pormenorizado coherente, significativo.

Así pues, vamos a realizar un análisis de los datos de la medida Postest 3 (O_4) de contenidos de didáctica matemática general y otro de didáctica matemática concreta, y también otro estudio de comparación didáctica matemática general con didáctica matemática concreta en cada uno de los grupos de la muestra. Los resultados completos de los cuatro análisis los incluimos asimismo en el Anexo 7.10.

En estos estudios el rendimiento de los futuros Maestro-Especialidad de Educación Musical no ha podido ser considerado, porque las preguntas de su Prueba de conocimientos de didáctica de la matemática catalogadas como de didáctica matemática general, eran de respuesta optativa, no se contabilizaban en la calificación básica de la prueba, por lo que la falta de información no permite evaluar correctamente el rendimiento en este apartado.

7.3.1.1. Análisis del rendimiento en didáctica matemática general en el Postest 3 (O_4)

A los datos de la medida Postest 3 (O_4) de contenidos de didáctica matemática general aplicamos la Prueba T de muestras independientes indicando en la Tabla 7.63. los resultados más característicos.

Tabla 7.63. Prueba T en Postest 3 (O_4) en didáctica matemática general

Grupo	N	Media	Desviación típica	Coeficiente de variación	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias
					F	Signif.	Significación asintótica (bilateral)
CONTROL	169	4,70	2,22	47,21%	0,980	NO	NO
EXPERIMENTAL	13	5,56	2,01	36,18%			

La Prueba de Levene para la igualdad de varianzas nos dice que no hay diferencias significativas entre el Grupo de Control y el Experimental, por lo que asumiendo dicha igualdad, la Prueba T para la igualdad de medias nos determina que no hay diferencias significativas en el rendimiento en contenidos de didáctica matemática general entre ambos grupos.

7.3.1.2. Análisis del rendimiento en didáctica matemática concreta en el Postest 3 (O_4)

Los resultados de la Prueba T de muestras independientes en la medida Postest 3 (O_4) para los contenidos de didáctica matemática concreta los resumimos en la Tabla 7.64.

Tabla 7.64. Prueba T en Postest 3 (O_4) en didáctica matemática concreta

Grupo	N	Media	Desviación típica	Coeficiente de variación	Prueba de Levene para la igualdad de varianzas		Prueba T para la igualdad de medias
					F	Signif.	Significación asintótica (bilateral)
CONTROL	169	3,78	1,67	44,24%	0,053	NO	SÍ, al 95%
EXPERIMENTAL	13	4,78	1,64	34,46%			

Como la Prueba de Levene para la igualdad de varianzas nos dice que no hay diferencias significativas entre el Grupo de Control y el Experimental, aceptando dicha igualdad la Prueba T para la igualdad de medias nos esclarece que hay diferencias significativas importantes entre ambos grupos, al 95%.

Los estadísticos descriptivos «Media», 3,78 para el Grupo de Control y 4,78 para el Grupo Experimental, y «Coeficiente de variación», 44,24%

para el Grupo de Control y 34,46% para el Grupo Experimental, nos aclaran que el rendimiento en didáctica matemática concreta de los asistentes al *Curs Zero* es mejor y un poco más homogéneo.

7.3.1.3. Análisis entre rendimiento en didáctica matemática general y didáctica matemática concreta en el Postest 3 en el Grupo de Control (O_4A)

Como ya hemos dicho, con la pretensión de averiguar más sobre la repercusión de los contenidos matemáticos en las asignaturas de didáctica de la matemática, hicimos también el contraste de didáctica matemática general con didáctica matemática concreta en cada uno de los grupos de la muestra por medio de la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon.

Podemos ver en la Tabla 7.65. los datos más característicos del análisis en el Postest 3 del Grupo de Control (O_4A).

Tabla 7.65. Contraste observación O_4A entre didáctica matemática general y didáctica matemática concreta

Observaciones	**Media**	**Desviación típica**	**Rangos**	**N**	**Rango promedio**	**Suma de rangos**	**Z**	**Signific. asintótica (bilateral)**
O_4A DMGEN	4,70	2,22	Negativos	116[a]	88,22	10233,0	-5,508[d]	SÍ, al 99%
			Positivos	49[b]	70,65	3462,00		
O_4A DMCONCR	3,78	1,67	Empates	4[c]				
			Total	169				

a. O_4A DMCONCR < O_4A DMGEN

b. O_4A DMCONCR > O_4A DMGEN

c. O_4A DMCONCR = O_4A DMGEN

d. Basado en rangos positivos

Hay significación asintótica (bilateral), al 99%, entre los rendimientos en contenidos didácticos matemáticos generales y concretos.

Los estadísticos descriptivos Media aritmética, 4,70 para didáctica matemática general y 3,78 para didáctica matemática concreta, y el coeficiente de variación (que no hemos incluido en la tabla por no agrandarla más), 47,21% y 44,24% respectivamente, nos aclaran que el rendimiento en didáctica matemática concreta ha sido el peor de los rendimientos en contenidos didácticos en el Grupo de Control.

7.3.1.4. Análisis entre rendimiento en didáctica matemática general y didáctica matemática concreta en el Postest 3 en el Grupo Experimental (O_4B)

Efectuado el contraste anunciamos en la Tabla 7.66. los datos más representativos.

Tabla 7.66. Contraste observación O_4B entre didáctica matemática general y didáctica matemática concreta

Observaciones	Media	Desviación típica	Rangos	N	Rango promedio	Suma de rangos	Z	Signific. asintótica (bilateral)
O_4B DMGEN	5,56	2,01	Negativos	10[a]	7,10	71,00	-1,782[d]	NO
			Positivos	3[b]	6,67	20,00		
O_4B DMCONCR	4,78	1,64	Empates	0[c]				
			Total	13				

a. O_4B DMCONCR < O_4B DMGEN

b. O_4B DMCONCR > O_4B DMGEN

c. O_4B DMCONCR = O_4B DMGEN

d. Basado en rangos positivos

No hay significación asintótica (bilateral) entre el rendimiento en contenidos didácticos matemáticos tanto generales como concretos. Veamos pues cómo podemos interpretarlo.

El hecho de que haya diferencia significativa al 99% en el rendimiento en didáctica de la matemática entre el Grupo de Control y el Experimental favorable para éste último (punto 7.3.1.), que el rendimiento en didáctica de la matemática general sea equivalente en ambos grupos (punto 7.3.1.1.) y que haya diferencia significativa al 95% en el rendimiento en didáctica de la matemática concreta entre los grupos favorable para el Experimental (punto 7.3.1.2.), parece significar que el rendimiento equivalente en contenidos didácticos matemáticos tanto generales como concretos indicado por la tabla anterior, es debido a que el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* afecta también al rendimiento en didáctica de la matemática general del Grupo Experimental, de manera leve, no considerable estadísticamente.

7.3.2. APROXIMACIÓN A UN ESTUDIO LONGITUDINAL

Entre las actividades para la realización del Tercer Objetivo y para corroborar o contradecir la Hipótesis 3.2. «Existe una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero*», aplicamos análisis de correlación entre las diferentes medidas del Grupo Experimental, los resultados completos de los cuales adjuntamos en el Anexo 7.11., presentando en la Tabla 7.67. los resultados más sobresalientes, indicando entre paréntesis y en cursiva la significación asintótica (bilateral).

Tabla 7.67. Correlaciones medidas Grupo Experimental

CORRELACIONES DE PEARSON				
	O_1B			
O_2	0,682**	**O_2**		
	(0,003)			
	N=17			
O_3B	0,684**	0,905**	**O_3B**	
	(0,003)	*(0,000)*		
	N=16	N=18		
O_5	0,818**	0,822**	0,777**	**O_5**
	(0,000)	*(0,000)*	*(0,000)*	
	N=17	N=19	N=18	
O_4B NOTA	0,317	0,780**	0,697**	0,691**
	(0,291)	*(0,001)*	*(0,006)*	*(0,004)*
	N=13	N=15	N=14	N=15

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral)

De las informaciones que aporta la tabla, las que más nos interesan son las de la fila de O_4B NOTA.

La correlación de los conocimientos matemáticos de O_1B (Pretest) con el rendimiento en didáctica de la matemática de O_4B NOTA es positiva y baja (0,317) además de no significativa, como cabía esperar.

En el caso de las medidas de conocimientos matemáticos Postest, O_2, O_3B y O_5, vemos que la correlación con O_4B NOTA es positiva, alta y significativa al 99%, por tanto se corrobora la Hipótesis 3.2.

Como los datos de la observación O_5 se tomaron en junio del Tercer curso de Maestro, hay una diferencia entre los componentes del Grupo Experimental, pues mientras los de Maestro-Especialidad de Educación Física y Especialidad de Educación Musical en ese curso no estudiaron ninguna asignatura de didáctica de la matemática, los de Maestro-

Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria sí cursaron una asignatura de didáctica de la matemática, motivo por el cual consideramos adecuado investigar un poco más sobre la correlación entre O_4B NOTA y O_5 en esas dos circunstancias.

7.3.2.1. Correlación entre las medidas O_4B NOTA y O_5 en Maestro Especialidades de Educación Física y de Educación Musical

Los resultados completos del estudio los ofrecemos en el Anexo 7.11., presentando en la Tabla 7.68. los más señalados.

Tabla 7.68. Correlación medidas O_4B Nota y O_5 en MEF y MEM

CORRELACIÓN		**O_5 MEF MEM**
O_4B NOTA MEF MEM	Correlación de Pearson	0,625
	Significación asintótica (bilateral)	NO
	N	5

Vemos en la tabla que la correlación es positiva, alta, pero no significativa.

7.3.2.2. Correlación entre las medidas O_4B NOTA y O_5 en Maestro Especialidades de Educación Infantil y de Educación Primaria

La Tabla 7.69. muestra los resultados más importantes del estudio, la totalidad los exponemos en el Anexo 7.11.

Tabla 7.69. Correlación medidas O_4B Nota y O_5 en MEI y MEP

CORRELACIÓN		O_5 MEI MEP
O_4B NOTA MEI MEP	Correlación de Pearson	0,854**
	Significación asintótica (bilateral)	SÍ, al 99%
	N	10

** La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral)

Nos enteramos por la tabla que la correlación es significativa al 99%, positiva y más alta que en el caso general de O_4B NOTA con O_5 (0,691), lo que nos indica que para los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria, se refuerza la correlación entre conocimientos matemáticos y conocimientos de didáctica de la matemática.

Parece que la existencia de una asignatura más, de didáctica de la matemática, fortalece la relación.

7.3.3. SÍNTESIS

En el punto 7.3.1. confirmamos la Hipótesis 3.1., el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes del Grupo Experimental es mejor que el del grupo de Control, y además, el coeficiente de variación nos indicaba que el rendimiento de los asistentes al *Curs Zero* era más homogéneo.

Por el análisis de 7.3.1.1. sabemos que no hay diferencias significativas en el rendimiento en didáctica matemática general entre los dos grupos de la muestra, mientras que por el de 7.3.1.2. conocemos que en el rendimiento en didáctica matemática concreta hay diferencias significativas y a favor del Grupo Experimental, lo que corrobora también la Hipótesis 3.1. y además aclara, que la repercusión de los contenidos matemáticos vistos en el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* ejercen su buen efecto en los contenidos de didáctica matemática concreta.

Mediante otro tipo de análisis, la Prueba de los rangos con signo de Wilcoxon para muestras relacionadas, hemos obtenido en 7.3.1.3. que entre el rendimiento del Grupo de Control en didáctica matemática general y didáctica matemática concreta hay diferencias significativas, al 99%, siendo peor el de contenidos didácticos matemáticos concretos, y en 7.3.1.4. que el rendimiento del Grupo Experimental en didáctica matemática general y didáctica matemática concreta es significativamente equivalente, como 7.3.1.1. nos ha dicho que no hay diferencias significativas en el rendimiento en didáctica matemática general entre los dos grupos de la muestra, podemos inferir que en contenidos didácticos matemáticos concretos el Grupo de Control tiene unos rendimientos significativamente inferiores al de los asistentes al curso *Matemàtica Prèvia*, como nos había justificado 7.3.1.2.

Este último razonamiento simbólicamente lo expresaríamos de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l} O_4A\ \mathrm{DM\ GEN} > O_4A\ \mathrm{DM\ CONCR} \\ \qquad \shortparallel \\ O_4B\ \mathrm{DM\ GEN} = O_4B\ \mathrm{DM\ CONCR} \end{array}\right. \Rightarrow O_4A\ \mathrm{DM\ CONCR} < O_4B\ \mathrm{DM\ CONCR}$$

Mediante el apartado 7.3.2. se corrobora la Hipótesis 3.2., la existencia de una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en didáctica de la matemática de los miembros del Grupo Experimental, correlación significativa al 99%, que se refuerza en el caso de los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria (punto 7.3.2.2.).

7.4. SÍNTESIS DEL CAPÍTULO

En este Capítulo 7 hemos hecho el Estudio Inferencial de los datos del capítulo anterior, de los descriptivos de todas las medidas realizadas en la investigación empírica que presenta esta tesis doctoral.

Determinado en el Capítulo 6 el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de Maestro (Primer Objetivo), ahora (punto 7.1.) hemos probado que los grupos de Control y Experimental son equivalentes en cuanto al nivel de conocimientos matemáticos previos, $O_1A = O_1B$ (Hipótesis Primera).

Estudiamos la repercusión del *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* sobre los conocimientos matemáticos (Segundo Objetivo) mediante el análisis de las medidas en los dos grupos de la muestra inmediatas a la impartición del *Curs Zero* (punto 7.2.1.), obteniendo

$$\begin{array}{ll} O_1A & = O_1B < O_2 \\ \shortparallel & \\ O_3A & < O_3B \end{array}$$

Es decir, al finalizar el curso *Matemàtica Prèvia* el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes es mejor que el de los no asistentes (Hipótesis 2.1.).

También estudiamos la repercusión del *Curs Zero* a través de contrastes entre las medidas Postest de conocimientos matemáticos del Grupo Experimental (punto 7.2.2.), viendo que salvo la diferencia significativa mínima que genera $O_3B < O_2$ (explicación dada en 7.2.2.3.G. Síntesis), el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los futuros Maestros se mantiene en el tiempo (Hipótesis 2.2.).

Investigamos la posible repercusión de los conocimientos matemáticos sobre el rendimiento en didáctica de la matemática (Tercer Objetivo) mediante análisis de las medidas del rendimiento de los dos grupos de la muestra, averiguando en el punto 7.3.1. que el rendimiento en didáctica de la matemática del Grupo Experimental es mejor que el del Grupo de Control (Hipótesis 3.1.), específicamente en contenidos de didáctica matemática concreta (punto 7.3.1.2.).

Y por medio de correlaciones entre las medidas del Grupo Experimental (punto 7.3.2.), observando la existencia de una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes (Hipótesis 3.2.), que se refuerza en el caso de los futuros Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria (punto 7.3.2.2.) por el hecho de cursar una asignatura más de didáctica de la matemática.

TERCERA PARTE: CONCLUSIONES

Capítulo 8: SÍNTESIS GLOBAL Y LÍNEAS FUTURAS DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo empezamos haciendo una recapitulación del trabajo presentado, a continuación se revisan los objetivos marcados y las hipótesis planteadas mediante los principales resultados obtenidos, también se describen cuáles son las principales aportaciones y repercusiones de esta tesis doctoral, se citan las posibles líneas de mejora y para finalizar se plantean futuros temas de investigación.

8.1. RECAPITULACIÓN

En la Primera Parte de esta tesis doctoral (capítulos 1, 2 y 3) hemos hecho una fundamentación teórica sobre el aprendizaje de las matemáticas: cómo debería ser una educación matemática de calidad, cómo se aprenden las matemáticas y cuáles eran y son los contenidos matemáticos de Educación Primaria.

En el Capítulo 1 presentábamos los Principios para la educación matemática (de igualdad, curricular, de enseñanza, de aprendizaje, de evaluación y tecnológico), disposiciones básicas fundamentales para una educación matemática de calidad, y las acciones y responsabilidades para su realización por las diferentes partes del sistema educativo (profesores de matemáticas, estudiantes, formadores de los profesores, la administración educativa, los profesores universitarios, las familias y los miembros de la comunidad social y las organizaciones profesionales y políticas).

Nos hemos interesado por el alumno como sujeto cognitivo que ha de aprender matemáticas en el Capítulo 2, vimos qué era aprender contenidos matemáticos (memorización simple, aprendizaje de algoritmos, de conceptos y resolución de problemas) y nos aproximamos a modelos teóricos que nos facilitarán su comprensión. Unas teorías generales del aprendizaje aplicables al de las matemáticas: conductistas-asociacionistas (Thorndike, Skinner y Gagné) y cognitivistas (Procesamiento de la información, *Gestalt*, Piaget, Bruner, Aprendizaje por descubrimiento. Resolución de problemas, Ausubel y Vygotsky), y otras teorías específicamente interesadas por el aprendizaje de las matemáticas (Dienes y Van Hiele).

Finalizábamos la Primera Parte mostrando en el Capítulo 3 los contenidos curriculares de matemáticas de Educación Primaria en el momento de iniciar esta investigación (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502), que orientaron los programas y los contenidos de las asignaturas de didáctica de la matemática, y los contenidos en el momento actual (Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, pp. 30.110-30.401). También analizábamos las concepciones psicológicas, las teorías de aprendizaje vistas en el capítulo anterior, que sobre el aprendizaje de las matemáticas emanan, se desprenden, de ambos decretos, decantándose por diferentes teorías agrupadas dentro del constructivismo. No se aferran a una sola teoría de aprendizaje, tratan de coger lo mejor de varias para aplicarlo a la gran diversidad de situaciones que se presentan en las matemáticas escolares.

Con la Segunda Parte (capítulos 4, 5, 6 y 7) presentábamos el Estudio Empírico.

Mediante el Capítulo 4 contextualizábamos la tesis doctoral en la UJI, exponiendo los contenidos de las asignaturas de didáctica de la matemática de las titulaciones de Maestro en la UJI, durante los cursos 2.001 a 2.004, e indicando la metodología utilizada en ellas, consecuencia de los contenidos matemáticos de Educación Primaria del Capítulo 3 y las teorías de aprendizaje del Capítulo 2.

El planteamiento teórico del Estudio Empírico tenía lugar en el Capítulo 5, en el que presentábamos el problema del bajo nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro (génesis de la investigación de esta tesis doctoral), los objetivos que nos marcábamos y las hipótesis que formulábamos, así como el diseño, los instrumentos utilizados (las pruebas de conocimientos matemáticos y de conocimientos de didáctica de la matemática) y la metodología aplicada.

Para llevar a término los objetivos marcados en esta tesis y ver si se cumplían las hipótesis hechas, hemos realizado un diseño cuasi-experimental de Pretest-Postest con Grupo de Control y varias medidas. El Grupo Experimental lo formaron los estudiantes de Maestro que asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*.

La medida del Pretest fue única (O_1), para determinar el nivel de partida en conocimientos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de la Diplomatura de Maestro y si había equivalencia de los grupos de Control y Experimental.

Se efectuaron varias medidas de Postest (O_2, O_3, O_4 y O_5) para analizar los distintos objetivos planteados. Así, O_2, O_3, y O_5 hacían referencia a conocimientos sobre contenidos matemáticos y O_4 al rendimiento en didáctica de la matemática.

Para la Prueba de conocimientos de matemáticas realizamos una adaptación del cuestionario *TIMSS Mathematics Items* del *Third International Mathematics and Science Study* (TIMSS) de la *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA) de 1.995 correspondiente al nivel de EGB.

La Prueba de conocimientos de didáctica de la matemática consistió en las preguntas de la primera convocatoria de exámenes oficiales de las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro de la UJI del año académico 2.002-2.003, concretamente de las preguntas de los temas comunes de dichas asignaturas (indicados en el Capítulo 4, punto 4.2.).

En el Capítulo 6 ofrecimos los resultados del Estudio Empírico por medio del Estudio Descriptivo, en el que las tablas informaban del nivel de conocimientos de contenidos matemáticos y del rendimiento en contenidos didácticos matemáticos en las diferentes medidas efectuadas a los estudiantes de Maestro en la UJI de la promoción 2.001-2.004, viéndose que el nivel y el rendimiento eran bastantes bajos.

Con el Capítulo 7 completábamos la presentación de los resultados del Estudio Empírico a través del Estudio Inferencial practicado a los datos obtenidos en el Capítulo 6, que nos permitió justificar la realización de los objetivos establecidos y confirmar las hipótesis planteadas.

La Tercera Parte la constituye este capítulo.

Y la Cuarta Parte son las referencias bibliográficas.

Por último hay una sección con todos los Anexos (CD adjunto).

8.2. PRINCIPALES RESULTADOS

El problema de investigación que nos planteábamos era

> averiguar realmente el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes al iniciar la Diplomatura de Maestro y su relación con el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática.

Para encontrar la solución formulamos unos objetivos e hicimos unas hipótesis que pasamos a revisar mediante los principales resultados obtenidos.

El Primer Objetivo marcado fue determinar el nivel de los estudiantes de Primer curso de Maestro de la UJI del año académico 2.001-2.002 en conocimientos matemáticos y la Primera Hipótesis formulada era:

«El nivel de conocimientos matemáticos previos de los estudiantes de Maestro que no asistieron al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, es equivalente al de los asistentes al *Curs Zero*».

El porcentaje total de respuestas correctas de la muestra fue del 63,19% como se puede ver en la siguiente Tabla 8.1.

Por las investigaciones presentadas en el Capítulo 5 en el apartado 5.1., que informaban sobre el bajo nivel de conocimientos matemáticos de los futuros maestros, este porcentaje no nos sorprende.

El porcentaje total de respuestas correctas del Grupo de Control fue del 63,02% y el del Grupo Experimental del 64,88%. Este último resultado, aunque algo mayor, sigue siendo inferior a lo que cabría esperar.

Tabla 8.1. Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos[46]

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

[46] Esta tabla aparecerá en sucesivas ocasiones siempre que hagamos referencia a las categorías de contenidos en los análisis de las medidas efectuadas, sombreando en cada ocasión las columnas correspondientes, por lo que nos referiremos a ella como Tabla 8.1.(x), x=a, b, c, …

En las categorías de contenido como muestra la Tabla 8.1. el máximo de aciertos correspondió a «Representación y análisis de datos. Probabilidad» en los tres colectivos (71,38%, 70,64% y 78,82% respectivamente), siendo los mínimos en «Geometría» en el Global (53,51%), en «Proporcionalidad» en el Grupo de Control (53,51%) y también en «Geometría» en el Experimental (51,76%).

En las subcategorías de contenido, que podemos ver en la Tabla 8.2., el máximo se alcanzó en «Ecuaciones lineales» en el Global (82,18%) y el Grupo de Control (81,87%) y en «Representación y análisis de datos» en el Grupo Experimental (88,24%) y el mínimo en «Congruencia y semejanza» en los tres colectivos (35,11%, 36,26% y 23,53% respectivamente).

Tabla 8.2. Resultados por Subcategoría de Contenido en conocimientos matemáticos[47]

Categoría de Contenido	Subcateg. de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
		O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	Fracc. ord., signif. y represent.	56,14	45,45	52,94	76,32	58,33	55,26	55,85	46,72
	Operac., relac. y propied.	67,25	69,09	70,59	85,96	79,63	78,95	67,55	70,13
	Números decimales	65,11	77,37	72,55	82,46	79,63	82,46	65,78	77,60
	Estimación y sentido numérico	63,16	55,56	58,82	77,19	70,37	71,93	62,77	57,01
Geometría	Congruen. y semejanza	36,26	35,15	23,53	78,95	61,11	78,95	35,11	37,70
	Otras cuestiones de geometría	58,04	66,21	58,82	75,00	80,56	82,89	58,11	67,62
Álgebra	Ecuaciones lineales	81,87	81,52	85,29	100	86,10	92,11	82,18	81,97
	Otras cuestiones de álgebra	61,26	65,91	61,76	69,74	66,70	73,68	61,30	65,98
Represent. y análisis de datos. ProbabIL.	Represent. y análisis de datos	75,24	75,96	88,24	89,47	87,04	92,98	76,42	77,05
	Probabilidad	63,74	67,88%	64,71%	73,68%	75,00%	71,05%	63,83%	68,58%
Medida	Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38

[47] Esta tabla aparecerá en sucesivas ocasiones siempre que hagamos referencia a las subcategorías de contenidos en los análisis de las medidas efectuadas, sombreando en cada ocasión las columnas correspondientes, por lo que nos referiremos a ella como Tabla 8.2.(x), x=a, b, …

Por los resultados anteriores podemos decir que los contenidos matemáticos previos en los que los estudiantes de Maestro están mejor preparados son los de «Representación y análisis de datos. Probabilidad» y en los que peor «Geometría».

Relativo a la Primera Hipótesis formulada:

«Afirmamos que los grupos de Control y Experimental son equivalentes en cuanto al nivel en conocimientos matemáticos previos ($O_1A = O_1B$)».

Concerniente al Segundo Objetivo, analizar la repercusión del curso *Matemàtica Prèvia* en el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos de los futuros maestros, la Hipótesis 2.1. enunciada fue:

«El nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero*, al finalizar el curso es mejor que el de los no asistentes».

En los contrastes practicados obtuvimos la siguiente información (ver anexos 7.2. a 7.4.): que el nivel de conocimientos de contenidos matemáticos en O_1A y O_3A (en la Tabla 8.1.(a)) era equivalente ($O_1A = O_3A$). Como la observación O_3A se efectuó en el mes de mayo de 2.003, en los últimos días de las clases de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, pudimos deducir el hecho de que estas asignaturas no aportaban conocimientos significativos de contenidos matemáticos a los estudiantes no asistentes al *Curs Zero*.

Tabla 8.1.(a) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcio nalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

También obtuvimos que el nivel de conocimientos matemáticos (en la Tabla 8.1.(b)) del Grupo Experimental en el Pretest era significativamente inferior al del Postest 1 ($O_1B < O_2$). La diferencia significativa global existente al 99% no la generaron las seis categorías de contenido, únicamente cuatro: «Fracciones y sentido numérico», «Geometría», «Álgebra» y «Medida».

Tabla 8.1.(b) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcio nalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

Que las categorías «Representación y análisis de datos. Probabilidad» y «Proporcionalidad», no produjeran también la diferencia significativa tal vez se debió a que estos contenidos tenían la particularidad de ser contenidos en los que los estudiantes solían tener mejor y peor nivel, respectivamente, en ambas medidas y además, que la materia de «Proporcionalidad» no se trabajó en el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* por no ser un contenido escolar de Educación Primaria.

En los análisis realizados entre las medidas de la observación O_3 en los dos grupos (en la Tabla 8.1.(c)), obtuvimos una diferencia significativa global al 95% favorable al Grupo Experimental ($O_3A < O_3B$), que no la originaban las seis categorías de contenido matemático, sólo la mitad de ellas: «Fracciones y sentido numérico»; «Geometría» y «Medida».

Tabla 8.1.(c) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

No haber diferencia significativa entre los dos grupos de la muestra en las otras tres categorías de contenido matemático, «Álgebra», «Representación y análisis de datos. Probabilidad» y «Proporcionalidad», pudo ser debido a que la medida del Postest 2 (O_3) fue tomada hacia el final de las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, concurriendo que los contenidos algebraicos y de proporcionalidad no fueron trabajados en ellas y los de estadística y probabilidad únicamente muy brevemente en dicho curso en las especialidades de Educación Musical y de Educación Física (por no disponer de más tiempo en dichas asignaturas), como expusimos en el Capítulo 4 en los puntos 4.1. y 4.2.

Simbólicamente podríamos expresar los resultados obtenidos en la comprobación de la Hipótesis 2.1. de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l} O_1A = O_1B < O_2 \\ \;\;\shortparallel \\ O_3A < O_3B \end{array}$$

Es decir, transcurrido prácticamente el Segundo curso lectivo de la diplomatura de Maestro desde la impartición del curso *Matemàtica Prèvia* (septiembre de 2.002) se confirmó que:

«Los estudiantes asistentes al *Curs Zero*, el Grupo Experimental, tienen mejor nivel en conocimientos matemáticos que los no asistentes, el Grupo de Control».

Asimismo perteneciente al Segundo Objetivo, la Hipótesis 2.2. expuesta era:

«El nivel en conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* se mantiene en el tiempo».

Con la finalidad de validarla efectuamos unos análisis en las medidas tomadas en el Grupo Experimental (ver los anexos 7.5. a 7.9.), habiendo obtenido:

De los estudios realizados entre las medidas Pretest y Postest 2 (en la Tabla 8.1.(d)) en el Grupo Experimental (O_1B – O_3B), que había una diferencia global del 99% favorable para el Postest 2 ($O_1B < O_3B$), reflejada en las categorías de contenido «Geometría» y «Medida».

Tabla 8.1.(d) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

La explicación de por qué sólo estas dos categorías generaron la diferencia tal vez fuera debida a que los contenidos geométricos se trabajaron en el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* y también en las asignaturas de didáctica de la matemática de Segundo curso de Maestro, excepto en Maestro-Especialidad de Educación Primaria (ver en el Capítulo 4 los puntos 4.1. y 4.2.), mientras que los contenidos de medida, que no fueron vistos en el *Curs Zero*, sí que se estudiaron en todas las asignaturas de Segundo curso de Maestro, hacia cuyo final fue tomada la medida del Postest 2 (O_3B).

De los resultados de los análisis realizados entre las medidas O_1B y O_5 del Grupo Experimental (en la Tabla 8.1.(e)) nos quedamos con que la diferencia global existente al 99% positiva para O_5 ($O_1B < O_5$) la crearon solamente las categorías de contenido «Geometría» y «Medida».

Tabla 8.1.(e) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

Estas dos categorías de contenido fueron también las mismas y únicas que generaron la diferencia significativa entre las medidas O_1B y O_3B. A todas las circunstancias que se daban en esta comparación, para la de O_1B y O_5 se unió que en el año transcurrido en la obtención de los nuevos datos (la observación O_3B fue en mayo de 2.003 y O_5 en junio de 2.004), los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y los de Especialidad de Educación Primaria habían cursado una asignatura de didáctica de la matemática en Tercero, en la que los primeros vieron todos los bloques de contenidos de la etapa educativa Primaria y los segundos los bloques de «Geometría» y «Estadística. Azar. Probabilidad», y a pesar de ello, ni siquiera la categoría «Representación y análisis de datos. Probabilidad» (sinónima del último bloque) participó en la producción de la diferencia significativa entre O_1B y O_5.

Del compendio de los resultados de los estudios realizados entre las medidas O_2 y O_3B del Grupo Experimental, obtuvimos que la diferencia global existente al 99%, positiva para O_2 ($O_3B < O_2$) se debió exclusivamente a la categoría de contenido «Fracciones y sentido numérico» (ver la Tabla 8.1.(f)) y generada principalmente por la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación» (en la Tabla 8.2.(a)) en la que había una diferencia significativa del 95% entre ambas medidas.

Tabla 8.1.(f) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

Al comparar los resultados por subcategorías de contenidos (en la Tabla 8.2.(a)) y totales de «Fracciones y sentido numérico» de las observaciones O_2 y O_3B vimos que en O_3B, en las diferentes subcategorías y en el total de la categoría, se produce un descenso en los porcentajes, que en valores relativos es menos de la mitad que en la subcategoría «Fracciones ordinarias, significado y representación», tal vez motivado porque la incidencia de las asignaturas de Segundo curso de Maestro en los aspectos didácticos de los contenidos matemáticos, afectó más en los contenidos de «Fracciones ordinarias, significado y representación» a la pérdida de nivel de conocimientos matemáticos.

Tabla 8.2.(a) Resultados por Subcategoría de Contenido en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	Subcateg. de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
		O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	Fracc. ord., signif. y represent.	56,14	45,45	52,94	76,32	58,33	55,26	55,85	46,72
	Operac., relac. y propied.	67,25	69,09	70,59	85,96	79,63	78,95	67,55	70,13
	Números decimales	65,11	77,37	72,55	82,46	79,63	82,46	65,78	77,60
	Estimación y sentido numérico	63,16	55,56	58,82	77,19	70,37	71,93	62,77	57,01
Geometría	Congruen. y semejanza	36,26	35,15	23,53	78,95	61,11	78,95	35,11	37,70
	Otras cuestiones de geometría	58,04	66,21	58,82	75,00	80,56	82,89	58,11	67,62
Álgebra	Ecuaciones lineales	81,87	81,52	85,29	100	86,10	92,11	82,18	81,97
	Otras cuestiones de álgebra	61,26	65,91	61,76	69,74	66,70	73,68	61,30	65,98
Represent. y análisis de datos. ProbabIL.	Represent. y análisis de datos	75,24	75,96	88,24	89,47	87,04	92,98	76,42	77,05
	Probabilidad	63,74	67,88%	64,71%	73,68%	75,00%	71,05%	63,83%	68,58%
Medida	Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38

Por los análisis que efectuamos en las medidas tomadas en el Grupo Experimental supimos que no había diferencias significativas en el nivel de conocimientos matemáticos en los Postest 1 y 4: $O_2=O_5$ (ver la Tabla 8.1.(g)).

Tabla 8.1.(g) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	CONTROL		EXPERIMENTAL				GLOBAL	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66

Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

Y también que eran equivalentes los Postest 2 y 4: $O_3B=O_5$ (ver la Tabla 8.1.(h)).

Tabla 8.1.(h) Resultados por Categoría de Contenido y totales en conocimientos matemáticos

Categoría de Contenido	**CONTROL**		**EXPERIMENTAL**				**GLOBAL**	
	O_1A % aciertos	O_3A % aciertos	O_1B % aciertos	O_2 % aciertos	O_3B % aciertos	O_5 % aciertos	O_1 % aciertos	O_3 % aciertos
Fracc. y sentido numérico	63,53	63,36	64,71	80,86	73,23	73,68	63,64	64,33
Geometría	53,68	60,00	51,76	75,79	76,67	82,11	53,51	61,64
Álgebra	68,13	71,11	69,61	79,82	73,15	79,82	68,26	71,31
Represent. y análisis de datos. Probabil.	70,64	72,73	78,82	83,16	82,22	84,21	71,38	73,66
Medida	60,82	63,48	61,76	82,89	81,94	78,95	60,90	65,30
Proporcionalidad	53,51	59,39	55,88	73,68	69,44	76,32	53,72	60,38
TOTAL	63,02	65,45	64,88	80,06	75,93	78,47	63,19	66,48

Por tanto, de los contrastes en las medidas tomadas en el Grupo Experimental sobre conocimientos matemáticos, pudimos decir que quedaría confirmada la Hipótesis 2.2. a excepción de la explicación dada de $O_3B < O_2$.

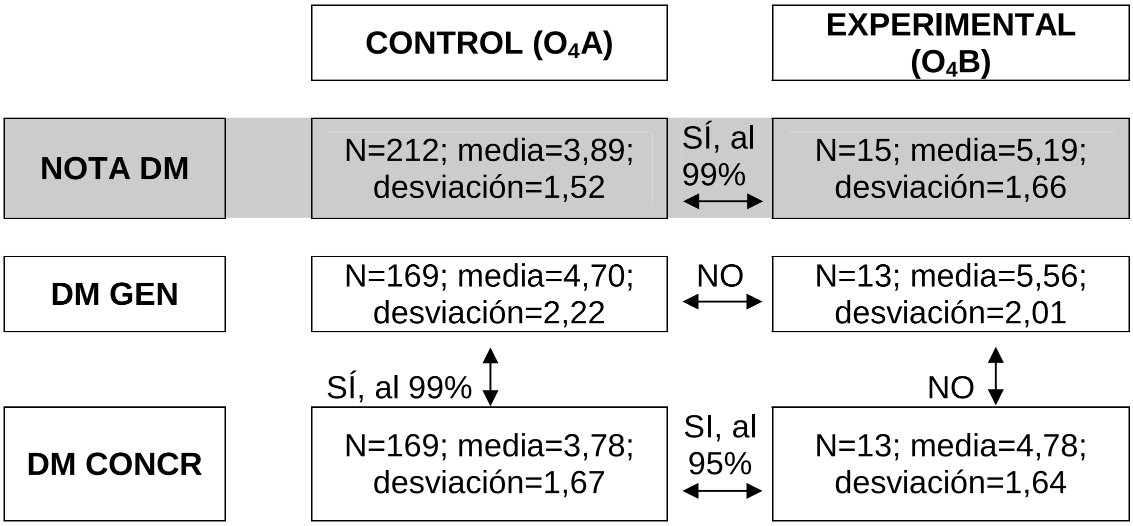
Referente al Tercer Objetivo, establecer la posible repercusión que los contenidos matemáticos puedan tener en las asignaturas de didáctica de la matemática, la Hipótesis 3.1. propuesta fue:

«El rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero* es mejor que el de los no asistentes»

Esta hipótesis quedó confirmada con la ejecución de un análisis en la medida Postest 3 (O_4) (ver el Anexo 7.10.), en el que encontramos (ver

Gráfico 8.1.) que había entre ambos grupos una diferencia al 99% favorable al Grupo Experimental ($O_4A < O_4B$).

Gráfico 8.1. Comparaciones en rendimiento en didáctica de la matemática[48]



Para investigar más la repercusión de los contenidos matemáticos en las asignaturas de didáctica de la matemática, realizamos un análisis de los datos de la medida Postest 3 (O_4) de contenidos de didáctica matemática general y otro de didáctica matemática concreta, y otro estudio más, de comparación didáctica matemática general con didáctica matemática concreta en cada uno de los grupos de la muestra (ver el Anexo 7.10.).

Descubrimos que los dos grupos de la muestra eran equivalentes estadísticamente por sus resultados en didáctica matemática general (O_4A DM GEN = O_4B DM GEN), como señalamos en el Gráfico 8.1.(a)

[48] Este gráfico aparecerá en sucesivas ocasiones siempre que hagamos referencia a las comparaciones en rendimiento en didáctica de la matemática, sombreando en cada ocasión las columnas o filas correspondientes, por lo que nos referiremos a el como Gráfico 8.1.(x), x=a, b, c, …

Gráfico 8.1.(a) Comparaciones en rendimiento en didáctica de la matemática

	CONTROL (O_4A)		EXPERIMENTAL (O_4B)
NOTA DM	N=212; media=3,89; desviación=1,52	SI, al 99% ↔	N=15; media=5,19; desviación=1,66
DM GEN	N=169; media=4,70; desviación=2,22	NO ↔	N=13; media=5,56; desviación=2,01
	SÍ, al 99% ↕		NO ↕
DM CONCR	N=169; media=3,78; desviación=1,67	SI, al 95% ↔	N=13; media=4,78; desviación=1,64

También conocimos que en el rendimiento en didáctica matemática concreta había diferencia significativa al 95% a favor del Grupo Experimental (O_4A DM CONCR < O_4B DM CONCR), que indicamos en el Gráfico 8.1.(b)

Gráfico 8.1.(b) Comparaciones en rendimiento en didáctica de la matemática

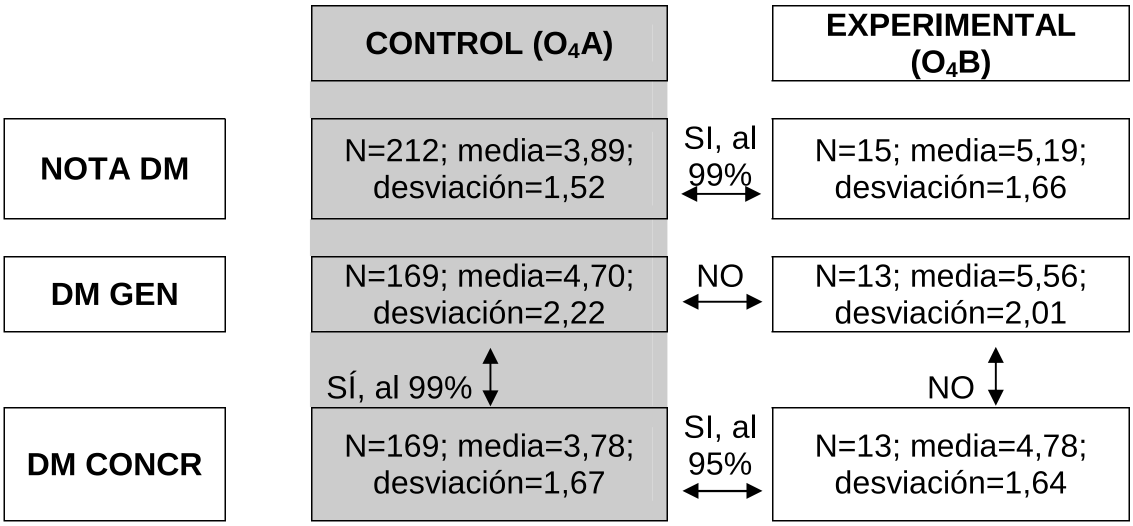
	CONTROL (O_4A)		EXPERIMENTAL (O_4B)
NOTA DM	N=212; media=3,89; desviación=1,52	SI, al 99% ↔	N=15; media=5,19; desviación=1,66
DM GEN	N=169; media=4,70; desviación=2,22	NO ↔	N=13; media=5,56; desviación=2,01
	SÍ, al 99% ↕		NO ↕
DM CONCR	N=169; media=3,78; desviación=1,67	SI, al 95% ↔	N=13; media=4,78; desviación=1,64

Con estos tres últimos resultados sobre el rendimiento en didáctica de la matemática se corroboró que:

«El rendimiento en didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al curso *Matemàtica Prèvia* fue mejor que el de los no asistentes y además, la repercusión de los contenidos matemáticos vistos en el curso ejercieron su buen efecto en los contenidos de didáctica matemática concreta».

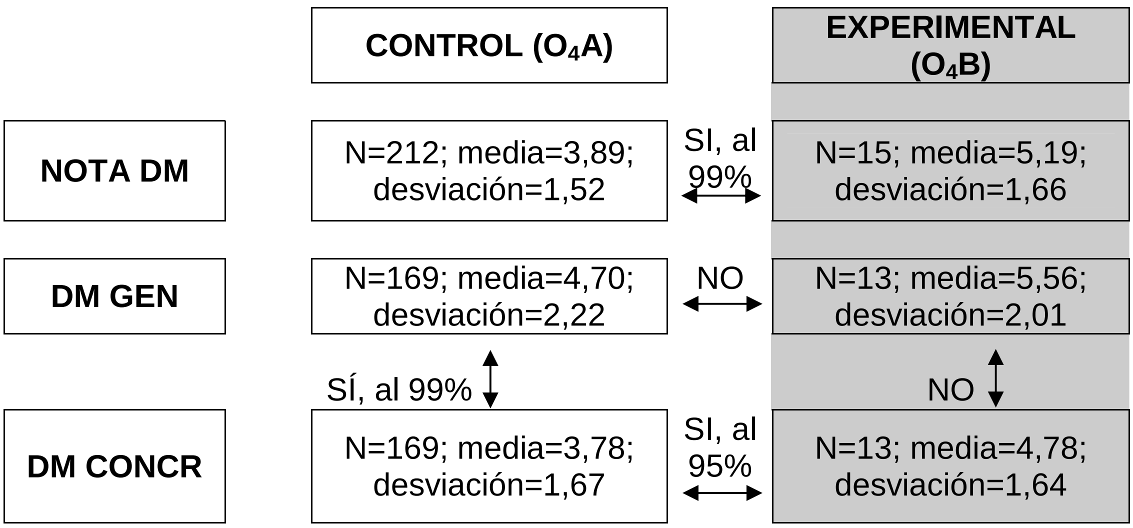
El estudio de comparación de didáctica matemática general con didáctica matemática concreta en el Grupo de Control (ver Gráfico 8.1. (c)) nos informó de que el rendimiento en didáctica matemática concreta había sido el peor de los rendimientos en contenidos didácticos en este grupo (O_4A DM GEN > O_4A DM CONCR).

Gráfico 8.1.(c) Comparaciones en rendimiento en didáctica de la matemática



Y el estudio de comparación de didáctica matemática general con didáctica matemática concreta en el Grupo Experimental (ver Gráfico 8.1. (d)) nos permitió saber que los rendimientos en ambos contenidos eran equivalentes (O_4B DM GEN = O_4B DM CONCR).

Gráfico 8.1.(d) Comparaciones en rendimiento en didáctica de la matemática



De todos estos resultados sobre rendimiento en conocimientos de didáctica de la matemática hacemos la siguiente reflexión relativa al último de ellos obtenido.

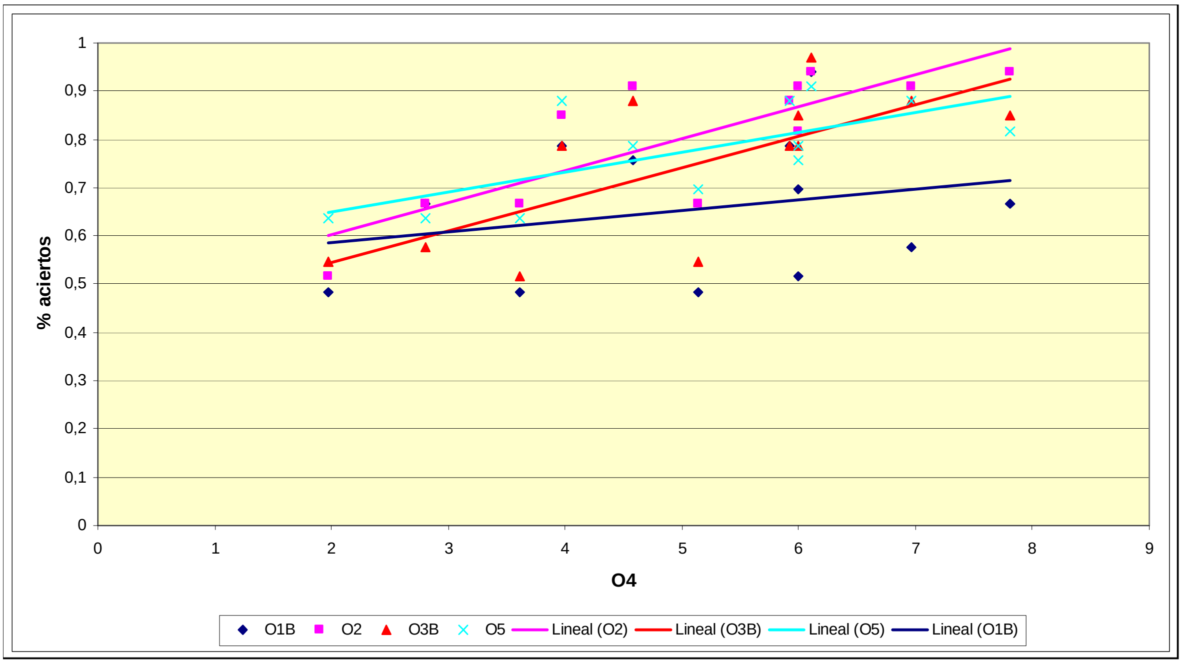
El hecho de que haya diferencia significativa al 99% en el rendimiento en didáctica de la matemática entre el Grupo de Control y el Experimental favorable para éste último ($O_4A < O_4B$), que el rendimiento en didáctica de la matemática general sea equivalente en ambos grupos (O_4A DM GEN = O_4B DM GEN) y que haya diferencia significativa al 95% en el rendimiento en didáctica de la matemática concreta entre los grupos, favorable para el Experimental (O_4A DM CONCR < O_4B DM CONCR), parece significar que el rendimiento equivalente en contenidos didácticos matemáticos tanto generales como concretos en el Grupo Experimental (O_4B DM GEN = O_4B DM CONCR), es debido a que el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* afecta también al rendimiento en didáctica de la matemática general del Grupo Experimental, de manera leve, no considerable estadísticamente.

Inherente también al Tercer Objetivo, la Hipótesis 3.2. expresada era:

«Existe una elevada correlación positiva entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero*».

Con la intención de probarla aplicamos el coeficiente de correlación de Pearson entre las diferentes medidas del Grupo Experimental (ver el Anexo 7.11.), con los siguientes resultados (ver Gráfico 8.2.): la correlación de los conocimientos matemáticos del Pretest (O_1B) con el rendimiento en didáctica de la matemática, O_4B NOTA, fue positiva y baja (0,317) además de no significativa y en las medidas de conocimientos matemáticos Postest (O_2, O_3B y O_5) la correlación con O_4B NOTA fue positiva, alta y significativa al 99%.

Gráfico 8.2. Diagrama de dispersión entre las medidas de conocimientos matemáticos y rendimiento en didáctica de la matemática



Como los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria tuvieron además en Tercer curso de la carrera una asignatura de didáctica de la matemática (ver en el Capítulo 4, la Tabla 4.1. del punto 4.1.), curso en cuyo tramo final se practicó la medida O_5, realizamos un análisis de correlación de O_4B NOTA con O_5 para los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Física y Especialidad de Educación Musical, que resultó ser positiva y alta pero no significativa, y otro análisis de correlación para los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria, que nos indicó que para estos futuros maestros la correlación entre conocimientos matemáticos y conocimientos de didáctica de la matemática se reforzó, fue más alta que en el caso general.

Por tanto pudimos decir:

«La correlación entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero* es positiva, alta y significativa al 99%, además es más alta en los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria».

8.3. REPERCUSIONES EDUCATIVAS

La primera repercusión educativa lógicamente debe ser la que se deriva inmediatamente de la propia investigación: como ha quedado probado por los objetivos que nos marcábamos y las hipótesis que formulábamos, los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes tienen una gran importancia para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de Maestro en la UJI.

Pero la anterior repercusión cobra más fuerza, si cabe, con la conclusión obtenida en el Capítulo 3 al analizar los decretos 20/1.992 y 111/2.007 (Decreto 20/1.992, DOGV, Núm. 1.728 de 20/2/1.992, pp. 1.428-1.502; Decreto 111/2.007, DOCV, Núm. 5.562 de 24/7/2.007, pp. 30.110-30.401), que establecían los contenidos matemáticos de Educación Primaria y sugerían cómo se aprenden las matemáticas:

> Dada la similitud tan grande entre los contenidos curriculares y su secuenciación por ciclos, que roza casi la identidad, junto con el planteamiento coincidente de los dos decretos sobre cómo se deben aprender las matemáticas en la Educación Primaria, queda justificada la validez para el momento presente y el futuro inmediato, vigencia del Decreto 111/2.007, del estudio que se lleva a cabo en esta tesis doctoral sobre la importancia de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes para el aprendizaje de la didáctica de la matemática en las titulaciones de Maestro en la UJI.

Los estudiantes de Maestro-Especialidad de Educación Infantil y Especialidad de Educación Primaria son los que más asignaturas de didáctica de la matemática estudian, los que más créditos didácticos matemáticos cursan, y como indicamos en la Tabla 7.69. (punto 7.3.2.2.), la correlación positiva y alta entre el nivel de conocimientos matemáticos y el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de los estudiantes asistentes al *Curs Zero,* en los futuros maestros de Educación Infantil y de Educación Primaria es más alta, por lo que podemos afirmar que el estudio de mayor número de créditos didácticos matemáticos repercute, conlleva, mayor correlación positiva entre conocimientos matemáticos y conocimientos de didáctica de la matemática.

Luego, tenemos que, poseer mayor nivel en contenidos matemáticos asegura mayor rendimiento en didáctica de la matemática y estudiar más contenidos didácticos matemáticos, produce mayor correlación positiva entre los contenidos matemáticos «teóricos» y «didácticos».

Dos repercusiones educativas se derivan del párrafo anterior.

De la afirmación «mayor nivel en contenidos matemáticos asegura mayor rendimiento en didáctica de la matemática», la sugerencia-repercusión educativa de la necesidad de que los futuros estudiantes de Maestro posean un mayor nivel de conocimientos matemáticos, que podría asegurarse estableciendo el requisito de que para estudiar el Grado de Maestro fuera obligatorio cursar una modalidad de Bachillerato que incluyera la asignatura de Matemáticas o bien, realizando una prueba específica para el ingreso en la titulación de Maestro que contemplara cuestiones de matemáticas.

Como el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, del que hemos mostrado su efectividad, forma parte de acciones y/o planes estratégicos de la Facultat de Ciències Humanes i Socials de la UJI, que dependen de la situación presupuestaria y de la voluntaria disponibilidad del profesorado, en definitiva, como el *Curs Zero* no forma parte de las enseñanzas regladas de la universidad, otra manera de la que podría asegurarse un mayor nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro sería incorporando sus contenidos a los de las asignaturas de didáctica de la matemática, haciendo especial hincapié en los bloques de contenidos «Geometría» y «Proporcionalidad», que como hemos visto en el apartado

6.1.1.1. Globales (O_1) del Estudio Descriptivo, eran en los que los futuros maestros estaban peor preparados.

De la afirmación «estudiar más contenidos didácticos matemáticos, produce mayor correlación entre los contenidos matemáticos «teóricos» y «didácticos» la repercusión es clara, los futuros maestros deberían estudiar más asignaturas de didáctica de la matemática. Vamos a poder constatar la efectividad de dicha medida, pues en el Grado en Maestro que en la UJI comenzará a impartirse el próximo año académico 2.010-2.011, los futuros docentes de Educación Primaria tendrán que cursar tres asignaturas anuales didáctico-matemáticas.

Otra de las repercusiones educativas es la que se desprende del resultado obtenido en el Capítulo 6, punto 6.2., en el Estudio Descriptivo, la gran diferencia en rendimiento en contenidos didácticos matemáticos en el Postest 3 (O_4): el 14,47% de los estudiantes del Grupo de Control superaron las asignaturas de didáctica de la matemática en la primera convocatoria oficial de exámenes, frente al 47,37% del Grupo Experimental. El rendimiento de los estudiantes asistentes al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* fue más del triple que el de los no asistentes, luego dicho curso ejerce un efecto positivo notable.

En el Capítulo 3 apartado 3.5. Cómo se aprenden los contenidos curriculares de matemáticas de Educación Primaria, hemos justificado que los dos decretos que establecían los contenidos curriculares de matemáticas de Educación Primaria proponen un aprendizaje de las matemáticas constructivista, basado en diferentes teorías de las agrupadas dentro de esta corriente psicológica y vistas en el Capítulo 2, y en el Capítulo 6 en el apartado 6.1. Conocimientos matemáticos, hemos presentado el porcentaje total de respuestas correctas de la muestra, 63,19%, realmente bajo como hemos razonado, luego maestros con un conocimiento tan bajo de la matemática difícilmente podrán ayudar a los niños a que aprendan matemáticas (Ball, 1.988a, p. 12).

Por ello proponemos que en las asignaturas de didáctica de la matemática se aplique una metodología constructivista tanto en la enseñanza de contenidos matemáticos «teóricos» como «didácticos», para que los futuros maestros acaben de construir su pensamiento matemático y utilicen dicha metodología para ayudar a los niños a que construyan su pensamiento matemático.

Ésta creemos que es una de las repercusiones educativas más trascendentes, pues como hemos dejado constancia en el Capítulo 5, apartado 5.1. Planteamiento del problema, el bajo nivel en conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro es un hecho nacional e internacional.

Con el objetivo de que éste sea un trabajo útil y manejable para futuros estudios e investigadores que quieran iniciarse en algunos de los temas aquí tratados, hemos incluido bastantes referencias bibliográficas, algunas absolutamente básicas y otras no tanto pero sí necesarias para disponer de una visión general sobre ellos.

8.4. DISCUSIÓN DE LA INVESTIGACIÓN, LÍNEAS DE MEJORA

La tesis doctoral que aquí se ha presentado es la culminación de un proceso que se inició sin pensar que el trabajo realizado podría terminar siendo la llave para el acceso al Grado de Doctor de este aspirante, proceso que vamos a explicar brevemente y que puede ser la causa de la mayoría de las deficiencias de la tesis susceptibles de posible mejora.

Como hemos explicado en el Capítulo 5, en el punto 5.1. Planteamiento del problema, todo comenzó siendo un proyecto presentado por quien suscribe, a la convocatoria de *Projectes de millora educativa* del curso 2.001-2.002, dentro del programa de *Formació Permanent del Professorat* de la *Unitat de Suport Educatiu* (USE) de la UJI, para conocer el nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes de Primer curso de la

Diplomatura de Maestro de la UJI, ante la insatisfactoria preparación matemática con que llegan a la universidad los futuros maestros y sus malos resultados en las asignaturas de didáctica de la matemática.

Dado el volumen de dicho proyecto y el calado del estudio realizado, se presentó en el año 2.003 como Trabajo de Investigación del Programa de Doctorado al que pertenece esta tesis doctoral y es entonces cuando el tribunal que juzga el Trabajo sugiere que puede ser el embrión de una tesis doctoral, como así ha sido.

Esta génesis de la tesis puede ser la causante de algunos de los aspectos de mejora.

Por ejemplo, si se hubiera sabido que el *Curs Zero: Matemàtica Prèvia*, que se impartió en septiembre de 2.002, podría ser el punto de inflexión, la piedra de toque, del estudio del nivel de conocimientos matemáticos de los estudiantes y de su influencia en el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática, se podría haber preparado de manera que pudiera ser más clara y medirse mejor su influencia y repercusión.

Se hubiera podido intentar también que fuera mayor el número de estudiantes que hubieran asistido a su impartición, el Grupo Experimental de la tesis, para que pudiera haber sido más representativo y asimismo poder hacer más análisis entre las diferentes especialidades de Maestro de los asistentes al curso *Matemàtica Prèvia.*

Algunas de las pruebas de obtención de los datos, tanto las de conocimientos de contenidos matemáticos como las de rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática se podrían haber planificado mejor para la finalidad que han sido utilizadas.

Por ejemplo, en las pruebas de conocimientos matemáticos, así como coinciden la del Pretest (O_1) y la del Postest 1 (O_2), pues en septiembre de 2.002 no se sabía que la prueba de evaluación del *Curs Zero* (instrumento de O_2) se iba a utilizar para esa otra finalidad, y la del Postest 2 (O_3) coincide con la del Postest 4 (O_5), para evitar las coincidencias dichas pruebas se podrían haber alternado en el peor de los caos.

Las pruebas de rendimiento en contenidos didácticos matemáticos no tenían ninguna característica mayor de uniformidad que la de los contenidos que evaluaban y la de la similitud de la formación de los profesores que las redactaban, pues cuando se concibieron, en el primer semestre del curso académico 2.003-2.004, no se hizo con la pretensión de su utilización también para la obtención de datos para la tesis doctoral, por la inexistencia siquiera del proyecto de ésta.

Asimismo, de haber sabido cómo iba a terminar aquel proyecto se podría haber contemplado el medir y analizar las actitudes hacia las matemáticas de los futuros maestros.

Se podría haber considerado otras variables en el aprendizaje de la didáctica de la matemática, como:

- Variables de Entrada: características personales de los alumnos y del tipo de institución escolar de la que provienen.

- Variables de Proceso: elementos que describen cómo se produce la enseñanza-aprendizaje.

- Variables de Contexto social–familiar: elementos socioeconómicos y familiares del estudiante.

Que juntamente con la utilización de Cuestionarios de Contexto como los propuestos en el Proyecto AVACO[49] podrían identificar los elementos que pueden dinamizarse para la mejora del aprendizaje de la didáctica de la matemática.

[49] Análisis de variables de contexto para la evaluación de sistemas educativos (Proyecto AVACO). Administración financiadora: MEC (CICYT). N.º proyecto: SEJ2005-05995.

8.5. LÍNEAS A SEGUIR, NUEVOS PROBLEMAS DE INVESTIGACIÓN

En el Capítulo 5, en el punto 5.1. Planteamiento del problema, hemos dado ejemplos del bajo nivel en conocimientos matemáticos de los estudiantes de Maestro, tanto nacionales como internacionales.

La mayoría de ellos se refieren a contenidos matemáticos específicos o partes de la matemática, no abundando los que se ocupan de asignaturas completas.

Abraira y González (1.995, p. 147) nos informaban de una puntuación muy baja en conocimientos matemáticos básicos, conocimientos previos, para la compresión de las matemáticas de Profesor de EGB en la Universidad de León, lo que confirma los resultados obtenidos por nosotros en el Objetivo Primero.

Nortes y Martínez (1.992) desvelaban el bajo rendimiento en las matemáticas de Profesor de EGB en la Universidad de Murcia, que avala los resultados del Postest 3 (O_4) sobre rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática presentados en el Capítulo 6, punto 6.2. Conocimientos en Didáctica de la Matemática.

Ya más en la línea de esta investigación es la tesis doctoral Salinas (2.003) sobre competencia matemática de estudiantes de Profesor de EGB (plan de 1.971) y futuros maestros (plan de 1.993). Tenía como objetivo principal comprobar si los resultados obtenidos por los alumnos del plan de 1.971 habían sido modificados a raíz de la implementación de los nuevos programas del plan de 1.993, concluyendo la profesora Salinas que los alumnos de la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela del plan de 1.993 experimentaron una mejora en cuanto a la comprensión de los algoritmos de las operaciones aritméticas con respecto a los alumnos del plan de 1.971.

Sería deseable que aparecieran investigaciones en las que se pueda ver la repercusión de la mejora de los conocimientos matemáticos previos de los estudiantes sobre los rendimientos en las asignaturas de contenidos matemáticos didácticos de los futuros maestros.

Un tema en el que sería interesante indagar es, la transcendencia en el rendimiento en las asignaturas de didáctica de la matemática de haber cursado los futuros maestros asignaturas de matemáticas en el Bachillerato, dado que los contenidos de éstas no son necesarios para las matemáticas escolares.

Hemos comprobado en esta tesis doctoral que los estudiantes de Maestro asistentes al *Curs Zero: Matemàtica Prèvia* tenían mejor nivel de conocimientos matemáticos y mayor rendimiento en didáctica de la matemática que los estudiantes que no asistieron al *Curs Zero.* Un proyecto muy interesante sería hacer el seguimiento, analizar el rendimiento en matemáticas de los niños de Primaria, alumnos de los maestros que asistieron al curso *Matemàtica Prèvia*, ver si su rendimiento es significativamente diferente de los niños de maestros que no asistieron al *Curs Zero*.

El curso 2.010-2.011 comenzará el Grado en Maestro de Educación Primaria en la UJI, sería muy interesante averiguar cómo afecta al rendimiento en contenidos didácticos matemáticos la estructuración que crea el nuevo plan de estudios con una asignatura de seis créditos ECTS, en cada uno de los cursos Primero a Tercero, con enseñanzas teóricas, prácticas de problemas y de laboratorio, seminarios y tutorías en cada una de ellas, actividades la mayoría de las cuales no se contemplan en el plan de estudios actual.

CUARTA PARTE: REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AA. VV. (1.997). La Reforma vista por los profesores de Matemáticas de Primaria. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*(2)6, 73-93.

AA. VV. (1.999). Problemas actuales de nuestra educación matemática primaria y secundaria. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, 31, 15-18.

ABALLE, M. A. (2.000). Aproximación al nivel de conocimiento matemático básico de futuros maestros de Primaria. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Monográfico 25: Construcción de conocimientos matemáticos para el siglo XXI, 89-105.

ABRAIRA, C. F. y GONZÁLEZ, M. F. (1.995). Reflexiones sobre la formación matemática de los futuros maestros. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* 24, 143-160.

ABRAIRA, C. (1.997). Matemáticas y su Didáctica para maestros: ¿qué, cómo, por qué, para qué? En L. J. BLANCO y M.ª C. CRUZ (Coord.), *Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas* (pp. 123-131). León: Universidad de León.

ABRANTES, P. (1.996). El papel de la resolución de problemas en un contexto de innovación curricular. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 8, 7-18.

AGUIRRE DE CARCER, I. (1.986). Opción de estudios y preparación académica de los candidatos. En M. LATIENSA (Edra.), *Demanda de educación superior y rendimiento académico en la universidad* (pp.133-146). Madrid: Centro Nacional de Investigación y Documentación Educativa (CIDE).

ALCALDE, M. y FERRÁNDEZ, R. (2.004). Conocimientos matemáticos de los estudiantes al inicio de la diplomatura de Maestro en la Universitat Jaume I. En M. A. FORTEA y L. LAPEÑA, *Hacia una docencia de calidad: políticas y experiencias: actas del I Congreso de la Red*

Estatal de Docencia Universitaria y III Jornada de Mejora Educativa de la Universitat Jaume I [CD-ROM] (pp. 437-484). Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I.

ALSINA, A. (2.001). *La intervención de la memoria de trabajo en el aprendizaje del cálculo aritmético* (Tesis doctoral). Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Psicologia de l'Educació. URN: TDX-0613101-113720.

ALSINA, C. et al. (1.996). *Enseñar matemáticas*. Barcelona: Graó.

ANGHILERI, J. (1.995). Focus on Thinking. En J. ANGHILERI (Ed.), *Children's Mathematical Thinking in the PriM. Years. Perspectives on Children's Learning* (pp. 1-10). London: Cassell.

ARRIETA, M. (1.996). *Análisis causal para un diagnóstico individual del rendimiento en matemáticas (11-12 años)*. Bilbao: Servicio Editorial Universidad del País Vasco.

AUSUBEL, D. P. (1.961). In defence of verbal learning. *Educational Theory*, 11, 15-25.

AUSUBEL, D. P. (1.963). Some psychological and educational limitations of learning by discovery. *New York State Mathematics Teachers Journal*, XIII, 90-108.

AUSUBEL, D. P. (1.968). *Educational Psychology. A Cognitive View* (1st ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast.: HELIER, R. (1.976). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (1.ª ed.). México: Trillas).

AUSUBEL, D. P.; NOVAK, J. D. and HANESIAN, H. (1.978). *Educational Psychology. A Cognitive View* (2nd ed.). New York: Holt, Rinehart and Winston. (Trad. cast.: SANDOVAL, M. (1.983). *Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo* (2.ª ed.; 4.ª reimpr., 1.990). México: Trillas).

AUSUBEL, D. P. and ROBINSON, F. G. (1.969). *School Learning. An Introduction to Educational Psychology* (1st printed; reprinted 1.973). London: Holt, Rinehart and Winston, Inc.

BALACHEFF, N. (1.996). Conception, propriété du système sujet/milieu. En R. NOIRFALISE et M. J. PERRIN-GLORIAN (Eds.), *Actes de la VIIème école et universite d'été de didactique des mathématiques (22-31 août 1.995)* (pp. 215-229). Clermont-Ferrand: IREM de Clermont-Ferrand.

BALL, D. L. (1.988a). Unlearning to teach mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 8(1), 40-48.

BALL, D. L. (1.988b). "I haven't done these since high school": prospective teachers' understanding of mathematics. En M. J. BEHR; C. B. LACAMPAGNE and M. M. WHEELER (Eds.), *Proceedings of 10th PME-NA* (pp. 268-274). Illinois.

BALL, D. L. (1.990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding of division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21(2), 132-144.

BARNES, D. (1.976). *From Communication to Curriculum*. Harmondsworth (GB): Penguin Books. (Trad. cast.: SÁNCHEZ, G. (1.994). *De la comunicación al currículo* (2.ª ed.). Madrid: Visor).

BAROODY, A. J. (1.987). *Children's Mathematical Thinking: A Developmental Framework for Preschool, PriM., and Special Education Teachers*. New York: Teachers College Press. (Trad. cast.: SÁNCHEZ, G. (1.988). *El pensamiento matemático de los niños. Un marco evolutivo para maestros de preescolar, ciclo inicial y educación especial*. Madrid: Visor Libros y Centro de Publicaciones del M. E. C.).

BATURO, A. and NASON, R. (1.996). Student Teachers' Subject Matter Knowledge within the Domain of Area Measurement. *Educational Studies in Mathematics,* 31(3), 235-268.

BEATON, A. E.; MULLIS, I. V. S.; MARTIN, M. O.; GONZÁLEZ, E. J.; KELLY, D. L. and SMITH, T. A. (1.996). *Mathematics Achievement in* *the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, Massachusetts (USA): Boston College. (Extraído el 22-9-2.004 de URL: http://isc.bc.edu/isc/isc_publications.html).

BELMONTE, J. M. (1.997). Relaciones numéricas en la formación de maestros. En L. J. BLANCO y M.ª C. CRUZ (Coord.), *Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas* (pp. 75-91). León: Universidad de León.

BELTRÁN, J. et al. (1.987). *Psicología de la educación* (1.ª ed. -3.ª reimpresión, 1.995-). Madrid: Ediciones de la Universidad Complutense (EUDEMA), S. A.

BIGGS, E. E. (1.972). Investigational methods. En L. R. CHAPMAN (Ed.), *The Process of Learning Mathematics*. Oxford: Pergamon Press.

BIGGS, J. B. (1.962). *Anxiety, Motivation and Primary School Mathematics*. London: National Foundation for Educational Research.

BISHOP, A. J. (1.991). *Mathematical Enculturacion*. Dordrecht (Holanda): Kluwer Academic Publishers. (Trad. cast.: SÁNCHEZ, G. (1.999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. Barcelona: Paidós).

BISHOP, A. J. (2.000). Enseñanza de las matemáticas: ¿cómo beneficiar a todos los alumnos? En N. GORGORIÓ; J. DEULOFEU y A. J. BISHOP (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 35-56). Barcelona: ICE de la Universitat de Barcelona y Ed. GRAÓ.

BLACK, P. and WILIAM, D. (1.998). Inside the Black Box: Raising Standards through Classroom Assessment. *Phi Delta Kappan*, october 1.998, 139-148.

BLANCO, L. J. (1.991). *Conocimiento y acción en la enseñanza de las matemáticas de profesores de E.G.B. y estudiantes para profesores*. Cáceres: Servicio Publicaciones, Universidad de Extremadura.

BLANCO, L. J. (1.996). *Aprender a enseñar Matemáticas. Formación práctica de los Profesores de Primaria sobre resolución de problemas aritméticos.* Badajoz: I.C.E. de la Universidad de Extremadura.

BLANCO, L. J. (1.996a). Resolución de problemas y formación inicial, teórica y práctica, de profesores. *Actas ICME 8.* Sevilla.

BLANCO, L. J. (1.996b). Aprender a enseñar geometría. Una experiencia en la formación inicial del profesorado de primaria. *Epsilon*. 12(1), 47-58.

BLANCO, L. J. (1.998). Otro nivel de aprendizaje: perspectivas y dificultades de aprender a enseñar matemáticas. *Cultura y Educación,* 9, 77-96

BLANCO, L. J. (2.000). La resolución de problemas en primaria. Una propuesta para la formación inicial del profesorado. En J. CARRILLO y L. C. CONTRERAS (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 207-235). Huelva: Hergué, Editora Andaluza.

BLANCO, L. J. y CRUZ, M.ª C. (1.997). Bases para la elaboración de un programa que favorezca aprender a enseñar Matemáticas en Primaria. En L. J. BLANCO y M.ª C. CRUZ (Coord.), *Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas* (pp. 11-17). León: Universidad de León.

BLOCK, D. et al. (2.000). Usos de los problemas en la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. En J. CARRILLO y L. C. CONTRERAS (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 147-179). Huelva: Hergué, Editora Andaluza.

BOSWELL, S. L. and KATZ, P. A. (1.980). *Nice Girls Don't Study Mathematics. Final Report, December 1, 1.977, through January 31, 1.980*. Boaulder, CO: Institute for Research on Social Problems.

BOUVIER, A. et GEORGE, M. (1.979). *Dictionaire des mathématiques*. Paris: Presses Universitaires de France. (Trad. cast.: ARMIÑO, M. y BORDOY, V. (1.984). *Diccionario de matemáticas*. Madrid: Akal Ed.).

BOYER, C. B. (1.968). *A History of Mathematics*. New York: J. Wiley & Sons, Inc. (Trad. cast.: MARTÍNEZ, M. (1.986). *Historia de la Matemática* (1.ª ed. -1.ª reimpr. 1.987-). Madrid: Alianza Ed. S. A.).

BRANSFORD, J. D.; BROWN, A. L. and COCKING, R. R. (Eds.) (1.999). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School*. Washington, D. C.: National Academy Press.

BROUSSEAU, G. (1.986). Fondements et méthode de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des matématiques*. 7(2), 33-115.

BROUSSEAU, G. (1.998). *Théorie des situations didactiques (Didactique des mathématiques 1.970-1.990)*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Editions.

BROWN, C. A. and BORKO, H. (1.992). Becoming a Mathematics Teacher. En D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 209-239). New York: McMillan Publishing Co.

BROWNELL, W. A. (1.935). Psycological considerations in the learning and the teaching of arithmetic. En W. D. REEVE (Ed.), *The teaching of arithmetic (10th Yearbook of the NCTM)* (pp. 1-31). New York: Teachers College Press.

BROWNELL, W. A. (1.947). The Place of Meaning in the Teaching of Arithmetic. *Elementary School Journal*, 47, 256-265.

BRUNER, J. S. (1.960a). On learning mathematics. *The Mathematics Teacher*, 53, 610-619.

BRUNER, J. S. (1.960b). *The Process of Education*. Cambridge, Massachusetts (USA): Harvard University Press (Trad. cast.: PALOMAR,

C. (1.963). *El proceso de la educación*. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana).

BRUNER, J. S. (1.961). The act of discovery. *Harvard Educational Review*, 31, 21-32.

BRUNER, J. S. (1.964). The Course of Cognitive Growth. *American Psychologist,* 19, 1-15.

BRUNER, J. S. (1.966). *Toward a Theory of Instruction*. Cambridge, Massachusetts (USA): Harvard University Press. (Trad. cast.: PARÉS, N. (1.969). *Hacia una Teoría de la Instrucción*. México: Unión Tipográfica Editorial Hispano Americana).

BRUNER, J. S. (1.988). *Desarrollo cognitivo y educación. Selección de textos por J. Palacios*. Madrid: Morata S. A.

BUNGE, M. (1.967). *Scientific Research. Strategy and Philosophy* (2 volumes). Berlin, New York: Springer-Verlag. (Trad. cast.: SACRISTÁN, M. (1.969). *La Investigación científica: su estrategia y su filosofía*. Barcelona: Ariel).

BURGER, W. F. and SHAUGHNESSY, J. M. (1.986). Characterizing the Van Hiele levels of development in geometry. *Journal for Research in Mathematics Education,* 17(1), 31-48.

CABELLO, T. y CELA, P. (1.980). *Sentido de la Matemática en Preescolar y Ciclo Preparatorio*. Madrid: Narcea S. A.

CARRAHER, T. N.; CARRAHER, D. W. & SCHLIEMANN, A. D. (1.988). *Na vida dez, na escola zero*. Sao Paulo: Cortez Editora. (Trad. cast.: CUSMINSKY, R. (1.991). *En la vida diez, en la escuela cero*. México: Siglo XXI Editores, S.A. de C.V.).

CARRETERO, M. (1.985). Teorías neopiagetianas. En A. MARCHESI; M. CARRETERO y J. PALACIOS (Comp.), *Psicología evolutiva 1. Teorías y métodos* (pp. 195-219). Madrid: Alianza Editorial S. A.

CARRILLO, J. (1.993). Algunas aportaciones de la investigación en resolución de problemas. *Actas VI Jornadas Andaluzas de Educación Matemática* (pp. 127-146). Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática (S.A.E.M.) "Thales".

CARRILLO, J. (1.998). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza: metodología de la investigación y relaciones*. Huelva: Servicio de Publicaciones Universidad de Huelva.

CARRILLO, J. (2.000). La formación del profesorado para el aprendizaje de las matemáticas. *Uno. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, Monográfico 24: Aprendizaje de las matemáticas para el siglo XXI, 79-91.

CARVALHO, J. B. (1.999). La formación matemática de los futuros profesores: un obstáculo a superar. *Adaxe -Revista de Estudos e Experiencias Educativas-,* 14-15, 313-326.

CASCALLANA, M.ª T. (1.988). *Iniciación a la matemática. Materiales y recursos didácticos*. Madrid: Santillana.

CASE, R. (1.978). Piaget and beyond: Toward a developmentally based theory and technology of instruction. En R. GLASER (Comp.), *Advances in instructional psychology (Vol. 1)*. Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

CASE, R. (1.985). *Intellectual Development: Birth to Adulthood*. London: Academic Press, Inc. (Trad. cast.: MENÉNDEZ, I. (1.989). *El desarrollo intelectual: del nacimiento a la edad adulta*. Barcelona: Paidós Ibérica S. A.).

CASTRO, E.; RICO, L. y CASTRO, E. (1.987). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar*. Madrid: Síntesis, S. A.

CASTRO, E. (Ed.) (2.001). *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria*. Madrid: Síntesis Educación.

CHAMORRO, M.ª del C. (1.995). Los procesos de aprendizaje en Matemáticas y sus consecuencias metodológicas en Primaria. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas*. 4, 87-96.

CHAMORRO, M.ª del C. (1.998). La formación en Didáctica de las Matemáticas de los profesores de Educación Infantil y Educación Primaria. En C. F. ABRAIRA y A. de FRANCISCO (Coord.), *La formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el*

Área de Didáctica de las Matemáticas. Actas del II Simposio sobre el currículum en la formación de profesores en el Área de Didáctica de las Matemáticas (pp. 97-104). León: Universidad de León.

CHAMORRO, M.ª del C. (2.003). Herramientas de análisis en didáctica de las matemáticas. En M.ª del C. CHAMORRO (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 69-94). Madrid: Pearson Educación, S.A.

CHI, M. T. H.; GLASER, R. and FARR, M. J. (Eds.) (1.988). *The Nature of Expertise*. Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates.

CIARRAPICO, L. (1.996). The Structure of Italian Schooling-The Teaching of Mathematics. En C. BERNARDI and F. ARZARELLO (Eds.), *Educational System and Teacher Training in Italy*. Bologna (Italia): Unione Matematica Italiana.

CIVIL, M. (1.996). Pensando sobre las matemáticas y su enseñanza: Una experiencia con estudiantes para profesores de primaria. En J. GIMÉNEZ; S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.), *Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria* (pp. 173-197). Granada: Comares.

COCKCROFT, W. H. (1.982). *Mathematics Counts*. Londres: Her Majesty's Statonery Office. (Trad. cast.: MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.985). *Las matemáticas sí cuentan. Informe Cockroft*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC).

COLL, C. (1.990). *Aprendizaje escolar y construcción del conocimiento*. Barcelona: Paidós.

COLL, C. (1.991). *Constructivismo e interacción educativa: ¿cómo enseñar lo que se ha de construir?* Ponencia en el Congreso Internacional de Psicología y Educación: «Intervención educativa». Madrid, noviembre 1.991.

COLLIS, K. F. (1.980). School Mathematics and Stages of Development. En S. MODGIL and C. MODGIL (Eds.), *Towards a Theory of Psychology Development* (pp. 635-671). Windsor, N.J.: N.F.E.R. Publishing Co. (Trad. cast.: RÍO, P. del (1.982). La matemática escolar y los estadios de desarrollo. *Infancia y Aprendizaje*, 19-20, 39-74).

CONFREY, J. and KAZAK, S. (2.006). A Thirty-Year Reflection on Constructivism in Mathematics Education in PME. En A. GUTIÉRREZ and P. BOERO (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 305-345). Rotterdam (The Netherlands): Sense Publishers. (Versión electrónica, ISBN 90-77874-19-4.pdf).

CONTRERAS, L. C. (1.999). El método de casos en la formación de Maestros. Una aproximación desde la Educación Matemática. En J. CARRILLO y N. CLIMENT (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas* (pp. 149-162). Huelva: Servicio de Publicaciones, Universidad de Huelva.

CONTRERAS, L. C. (1.999). *Resolución de problemas. Un análisis exploratorio de las concepciones de los profesores acerca de la concepción de su papel en el aula* [CD-ROM]. Huelva: Universidad de Huelva, Publicaciones (edición electrónica).

CONTRERAS, L. C. (2.002). Dificultades y obstáculos para el cambio en el aula. Una perspectiva desde la educación matemática. *Investigación en la escuela*, 47, 75-82.

CONTRERAS, L. C. y BLANCO, L. J. (2.001). ¿Qué conocen los maestros sobre el contenido que enseñan? Un modelo formativo alternativo. *XXI. Revista de Educación*, 3, 211-220.

CONTRERAS, L. C. y CARRILLO, J. (2.000). El amplio campo de la resolución de problemas. En J. CARRILLO y L. C. CONTRERAS (Eds.), *Resolución de problemas en los albores del siglo XXI: una* *visión internacional desde múltiples perspectivas y niveles educativos* (pp. 13-37). Huelva: Hergué, Editora Andaluza.

COONEY, T. J. (1.994). Teacher education as an exercise in adaptation. En D. B. AICHELE and F. COXFORD (Eds.), *Professional development for teachers of mathematics* (pp. 9-22). Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics..

CROWLEY, M. L. (1.987). The Van Hiele Model of the development of geometric thought. En NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS, *Learning and teaching geometry, K-12 (1.987 Yearbook)* (pp. 1-16). Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

DA PONTE, J. P. (2.004). Problemas e investigaciones en la actividad matemática de los alumnos. En J. GIMÉNEZ; L. SANTOS y J. P. DA PONTE (Coords.), *La actividad matemática en el aula. Homenaje a P. Abrantes* (pp. 25-34). Barcelona: Graó.

D'AMORE, B. (2.005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la Didáctica de la Matemática*. Mexico: Reverté, S. A.; Comité Latinoamericano de Matemática Educativa-Clame A.C.

DAVIS, R. B. (1.966). Discovery in the teaching of mathematics. En L. S. SHULMAN and E. R. KEISLAR (Eds.), *Learning by Discovery: A critical Appraisal* (pp. 114-128). Chicago: Rand McNally & Company. (Trad. cast.: VINÓS, R. (1.974). El descubrimiento en la enseñanza de las matemáticas. En L. S. SHULMAN y E. R. KEISLAR, *Aprendizaje por descubrimiento. Evaluación crítica* (1.ª ed. -1.ª reimpr., 1.979-) (pp. 135-151). México: Trillas).

DAVIS, R. B. (1.984). *Learning Mathematics: The Cognitive Science Approach to Mathematics Education*. London: Croom Helm.

De CORTE, E.; GREER, B. and VERSCHAFFEL, L. (1.996). Mathematics Teaching and Learning. En D. C. BERLINER and R. C. CALFEE (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 491-549). New York: Macmillan Library Reference USA.

de PRADO, D. (1.987). *La solución creativa de problemas*. Santiago de Compostela: Centro de Estudios Creativos/Lubrican.

DEMING, W. E. (1.982). *Quality, Productivy and Competitive Position*. Cambridge, Massachusetts (USA): Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press. (Trad. cast.: NICOLAU, J. (1.989). *Calidad, productividad y competitividad: la salida de la crisis*. Madrid: Díaz de Santos).

DEULOFEU, J. y GORGORIÓ, N. (2.000). Planteamientos para el cambio. En N. GORGORIÓ; J. DEULOFEU y A. J. BISHOP (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 15-31). Barcelona: ICE de la Universitat de Barcelona y Editorial GRAÓ.

DEWEY, J. (1.910). *How We Think* (1st ed. -2nd ed., reviewed, 1.933-). Lexington, Massachusetts (USA): D. C. Heath and Company. (Trad. cast. de la 2.ª ed.: GALMARINI, M. A. (1.989). *Cómo pensamos. Nueva exposición de la relación entre pensamiento y proceso educativo*. Barcelona: Paidós).

DIDDULPH, F. (1.999). The Legacy of Schooling: Student Teacher's Initial Mathematical Feeling and Competence. *Mathematics Teacher Education and Development. Mathematics Education Research Group of Australasia*, 1, 64-71.

DIENES Z. P. (1.971). *Cómo utilizar los bloques multibase*. Barcelona: Teide, S. A.

DIENES, Z. P. (1.959). *Concept Formation and Personality* (1st ed. -2nd impression, 1.965-). Leicester (UK): Leicester University Press.

DIENES, Z. P. (1.960). *Building Up Mathematics* (1st ed. -3rd ed., further revised and expanded, 1.967-). London: Hutchinson Educational Ltd. (Trad. cast. de la 3.ª ed: AIZPÚN, A. y QUIÑIONES, A. (1.970). *La construcción de las Matemáticas*. Barcelona: Vicens-Vives).

DIENES, Z. P. (1.963). *An Experimental Study of Mathematics-Learning* (1st ed. -2nd reprinted, 1.968-). London: Hutchinson.

DIENES, Z. P. (1.970). *Les six étapes du processus d'apprentissage en mathématique*. París: OCDL. (Trad. cast.: TORTELLA, J. y AZCÁRATE, C. (1.971). *Las seis etapas del aprendizaje en matemáticas* (1.ª ed. -2.ª ed., 1.974-). Barcelona: Teide).

DIENES, Z. P. (1.973). Una teoría del aprendizaje matemático. En Z. P. DIENES y A. VICENS, *La nueva matemática* (pp. 36-56). Barcelona: Vicens-Vives.

DOMINGO, M. (2.005). *Una aproximació a la construcció significativa del coneixement matemàtic a l'ESO* [Treball investigació doctorat]. Vic: Universitat de Vic, Facultat d'Educació. (Extraído el 20-7-2.007 de URL: http://hdl/handle.net/2072/2234).

DUNCKER, K. (1.945). On problem-solving. *Psychological Monographs*, 58(270), 1-112.

EGIDO, I. (Dir.) et al. (2.006). Aprendizaje basado en problemas (ABP). Estrategia metodológica y organizativa del currículum para la calidad de la enseñanza en los estudios de Magisterio. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado,* 20(3), 137-149.

ENDERSON, M. C. (1.995). *Assessment practices of three prospective secondary mathematics teachers* (Unpublished doctoral dissertation). University of Georgia, Athens.

ESTRADA, A. (2.003). Actitudes hacia la Estadística y su evaluación. *Revista de Educación de la Universidad de Granada*, 16, 227-245.

FENNEMA, E. and FRANKE, M. L. (1.992). Teacher's knowledge and its impact. En D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 147-164). New York: McMillan Publishing Co.

FERNANDES, D. and VALE, I. (1.994). Two young teacher's conceptions and practices about problem solving. En J. P. DA PONTE and J. F. MATOS (Eds.), *Proceeding of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education, vol. II* (pp. 328-335). Lisbon (Portugal).

FERNÁNDEZ, F. et al. (1.991). *Matemáticas básicas: dificultades de aprendizaje y recuperación*. Madrid: Santillana S.A.

FLAVELL, J. H. (1.963). *The Developmental Psychology of J. Piaget* Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company Inc. (Trad. cast.: CEVASCO, M. T. (1.982). *La psicología evolutiva de J. Piaget* (2.ª reimpresión). Barcelona: Paidós).

FLORES, J. et al. (1.991). Calidad pedagógica en el ámbito universitario. En *2.as Jornadas de didáctica universitaria* (pp. 21-25). Madrid: Secretaría General, Consejo de Universidades.

FLORES, P. (1.999). Conocimiento profesional en el Área de Didáctica de la Matemática en el primer curso de la Formación de Maestros de Educación Primaria. En J. CARRILLO y N. CLIMENT (Eds.), *Modelos de formación de maestros en Matemáticas* (pp. 91-117). Huelva: Servicio de Publicaciones, Universidad de Huelva.

FLORES, P. (2.001). Aprendizaje y evaluación. En E. CASTRO (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 41-59). Madrid: Síntesis Educación.

FODOR, J. A. (1.983). *The modularity of mind: an essay on faculty psychology*. Cambridge, Massachusetts (USA): Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press. (Trad. cast.: IGOA, J. M. (1.986). *La modularidad de la mente: un ensayo sobre la psicología de las facultades*. Madrid: Morata).

FREUDENTHAL, H. (1.963). Enseignement des mathématiques modernes ou enseignement moderne des mathématiques? *L'Enseignement Mathématique*, 9, 28-44. (Trad. cast.: FREUDENTHAL, H. (1.978). ¿Enseñanza de las matemáticas modernas o enseñanza moderna de las matemáticas? En J. PIAGET et al., *La enseñanza de las matemáticas modernas* (pp. 159-173). Madrid: Alianza).

FREUDENTHAL, H. (1.973). *Mathematics as an Educational Task*. Dordrecht (Holland): Reidel Publishing Company.

FREUDENTHAL, H. (1.983). *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht (Holland): Reidel Publishing Company.

G. ARMENDÁRIZ, M.ª V.; AZCÁRATE, C. y DEULOFEU, J. (1.993). Didáctica de la Matemáticas y Psicología. *Infancia y Aprendizaje*. 62-63, 77-99.

GAGNÉ, R. M. (1.985). *The Conditions of Learning and Theory of Instruction* (4.ª ed. -1.ª ed. 1.965, 2.ª ed. 1.970, 3.ª ed. 1.977-). New York: CBS College Publishing. (Trad. cast.: ELIZONDO, R. (1.987). *Las condiciones del aprendizaje* (2.ª ed. -1.ª ed. 1.979-) México: Nueva Editorial Interamericana, S.A. de C.V.).

GAIRÍN, J. (1.987). *Las actitudes en Educación. Un estudio sobre educación matemática*. Barcelona: Promociones y Publicaciones Universitarias S.A.

GAIRÍN, J. M.ª (2.001). Hacer matemáticas: el juego como recurso. En C. ALSINA et al., *Aspectos didácticos de matemáticas, 8*. Zaragoza: I.C.E. Universidad de Zaragoza.

GARCÍA JIMÉNEZ, J. E. (2.002). Ideas, pautas y estrategias heurísticas para la resolución de problemas. En P. ABRANTES et al., *La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiencias* (pp. 111-130). Barcelona: Ed. Laboratorio Educativo-Graó.

GARCÍA, F. J. (2.001). L'aprenentatge de les matemàtiques a l'ensenyament obligatori. En F. J. GARCÍA y F. DOMÉNECH (Coords.), *Psicologia de la instrucció. L'aprenentatge dels continguts escolars* (pp. 87-169). Castelló de la Plana: Publicacions de la Universitat Jaume I, Servei de Comunicacions i Publicacions.

GARCÍA, J. E. y GARCÍA F. F. (1.989). *Aprender investigando una propuesta metodológica basada en la investigación*. Sevilla: Diada.

GARCÍA, J. A. (2.002). Resolución de problemas. En P. ABRANTES et al., *La resolución de problemas en matemáticas. Teoría y experiencias* (pp. 27-33). Barcelona: Ed. Laboratorio Educativo-Graó.

GARCÍA, J. E. (2.002). Resolución de problemas y desarrollo de capacidades. *Uno. Revista de didáctica de las matemáticas,* 29, 20-37.

GARCÍA-SÁNCHEZ, A. et al. (1.991). Correlación entre masificación y fracaso escolar en los primeros cursos de enseñanzas técnicas. En *2.as Jornadas de didáctica universitaria* (pp. 147-154). Madrid: Secretaría General, Consejo de Universidades.

GARRET, R. M. (1.988). Resolución de problemas y creatividad: implicaciones para el currículum de ciencias. *Enseñanza de las Ciencias*. 6(3), 224-230.

GELMAN, R. and GALLISTEL, C. R. (1.978). *The Child's Understanding of Number*. Cambridge, Massachusetts (USA): Harvard University Press.

GENERALITAT VALENCIANA (1.992a). *Decreto 20/1.992, de 17 de febrero, del Gobierno Valenciano, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunidad Valenciana*. Diari Oficial de la Generalitat Valenciana (DOGV), Núm. 1.728, de 20 de febrero de 1.992, pp. 1.428-1.502.

GENERALITAT VALENCIANA (1.992b). *Decreto 47/1.992, de 30 de marzo, del Govern Valencià, por el que se establede el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunidad Valenciana*. Di. Oficial de la Generalidad Valenciana (DOGV), Núm. 1.759, de 6 de abril de 1.992, pp. 2.991-3.116.

GENERALITAT VALENCIANA (1.992c). *Resolución de 12 de septiembre de 1.992, de la Direcció General d'Ordenación i Innovació Educativa, en la cual da orientaciones metodológicas y para la evaluación, así como orientaciones para la secuenciación de contenidos por ciclos de la Educación Primaria*. Di. Oficial de la Generalidad Valenciana (DOGV), Núm. 1.912, de 26 de noviembre de 1.992, pp. 11.713-11.804.

GENERALITAT VALENCIANA (2.007). *Decreto 111/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Primaria en la Comunitat Valenciana*. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana (DOCV), Núm. 5.562, de 24 de julio de 2.007, pp. 30.110-30.401.

GENERALITAT VALENCIANA (2.007). *Decreto 112/2007, de 20 de julio, del Consell, por el que se establece el currículo de la Educación Secundaria Obligatoria en la Comunitat Valenciana*. Diari Oficial de la Comunitat Valenciana (DOCV), Núm. 5.562, de 24 de julio de 2.007, pp. 30.402-30.587.

GIL, N.; BLANCO, L. J. y GUERRERO, E. (2.006). El papel de la afectividad en la resolución de problemas matemáticos. *Revista de Educación*, 340, 551-569.

GIMÉNEZ, J.; SANTOS, L.; DA PONTE, J. P. (2.004). Introducción: Recordando a P. Abrantes. En J. GIMÉNEZ; L. SANTOS y J. P. DA PONTE (Coords.), *La actividad matemática en el aula. Homenaje a P. Abrantes* (pp. 7-10). Barcelona: Graó.

GODINO, J. D. (2.002). *La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la Didáctica de las Matemáticas: el proyecto EDUMAT-MAESTROS*. Granada. (Extraído el 19/10/2.004 de URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/descripcion.pdf).

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, Vicenç (2.003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas para Maestros*. Granada. (Extraído el 19/01/2.005 de URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/).

GÓMEZ, B. (1.991). Las Matemáticas y el Proceso Educativo. En A. GUTIÉRREZ (Ed.), *Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática* (pp. 59-104). Madrid: Síntesis, S. A.

GÓMEZ, B. (1.996). Desarrollo histórico de la enseñanza de la aritmética. El caso de los algoritmos de cálculo. *Aula de Innovación Educativa*, 50, 11-16.

GÓMEZ-GRANELL, C. y FRAILE, J. (1.993). Psicología y Didáctica de las matemáticas. *Infancia y Aprendizaje,* 62-63, 101-113.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME, A. (1.996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. GIMÉNEZ; S. LLINARES y M.ª V. SÁNCHEZ (Eds.), *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.

GUTIÉRREZ, A. y JAIME A. (1.987). Estudio de las características de los niveles de Van Hiele. En *Proceedings of the XI International Conference for the P.M.E. Vol. 3* (pp. 131-137).

GUZMÁN, M. de (1.996). *Para pensar mejor. Desarrollo de la creatividad a través de los procesos matemáticos*. Madrid: Pirámide S. A.

HALMOS, P. R. (1.980). The Heart of Mathematics. *American Mathematical Monthly*, 87, 7, 1.980, 519-24.

HERNÁNDEZ, C. (1.996). Vygostky y la escuela sociohistórica. En R. A. CLEMENTE y C. HERNÁNDEZ, *Contextos de desarrollo psicológico y educación* (pp 51-67). Granada: Aljibe.

HIEBERT, J. and CARPENTER, T. P. (1.992). Learning and Teaching with Understanding. En D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 65-97). New York: Macmillan Publishing Co.

HILTON, P. (2.000). Necesidad de una reforma. En N. GORGORIÓ; J. DEULOFEU y A. J. BISHOP (Coords.), *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional* (pp. 79-90). Barcelona: ICE de la Univesitat de Barcelona y Editorial GRAÓ.

HUERTA, P. (1.997). Didáctica de la Geometría en la formación de maestros. En L. J. BLANCO y M.ª C. CRUZ (Coord.), *Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas* (pp. 93-121). León: Universidad de León.

INHELDER, B.; BLANCHET, A.; SINCLAIR, H. and PIAGET, J. (1.975). Relations entre les conservations d'ensembles d'élements discrets de quantités continues. *Année psychologie*. 75, 23-60.

INHELDER, B.; SINCLAIR, H. et BOVET, M. (1.974). *Apprentissage et structures de la connaissance*. Paris: Presses Universitaires de France. (Trad. cast.: ECHEVERRÍA, L. E. (1.975). *Aprendizaje y estructuras del conocimiento*. Madrid: Morata S. A.).

INSTITUTO NACIONAL DE EVALUACIÓN Y CALIDAD EDUCATIVA (INCE) (1.998). *Diagnóstico del Sistema Educativo. La escuela secundaria obligatoria, 1997. 1. Elementos para un diagnóstico del Sistema Educativo Español. Informe Global*. Madrid: MEC, Secretaría General de Educación y Formación Profesional, INCE. (Extraído el 14/10/2.004 de URL: http://www.ince.mec.es/elem/index.htm).

INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR THE EVALUATION OF THE EDUCATIONAL ACHIEVEMENT (IEA) (1.997). *TIMSS Mathematics Items: Released Set for Population2 (Seventh and Eighth Grades). IEA's Third International Mathematics and Science Study (TIMSS)*. Chestnut Hill, Massachusetts (USA): Boston College. (Extraído el 22/09/2.004 de URL: http://isc.bc.edu/isc/isc_publications.html).

IZQUIERDO, M.ª del C. (2.002). *Sistema estatal de indicadores de la educación 2.002*. Madrid. Ministerio de Educación, Cultura y Deporte, Instituto Nacional de Calidad y Evaluación (INCE). (Extraído el 18/10/2.004 de URL: http://www.ince.mec.es/pub/ind2002.pdf).

JAIME, A. (1.993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: la enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento* (Tesis doctoral inédita). Universitat de València, Valencia.

JAIME, A.; GUTIÉRREZ, A. (1.990). Una propuesta de fundamentación para la enseñanza de la geometría: el Modelo de Van Hiele. En S. LLINARES y M.ª V. SÁNCHEZ (Eds.),*Teoría y Práctica en Educación Matemática* (pp. 295-384). Sevilla: Alfar.

JORNET, J. M. (1.987). *Una aproximación a los métodos de medición de referencia criterial* (Tesis doctoral inédita). Universitat de València, Valencia.

JUSTICIA, F. y GARCÍA, J. (1.990). *El rendimiento académico en la Universidad de Granada. Análisis de una cohorte (1.979-80) de las Facultades de Letras y Ciencias*. Granada: Servicio Publicaciones Universidad de Granada.

KILPATRICK, J. (1.985). A retrospective account of the past 25 years of research on teaching mathematical problem-solving. En E. A. SILVER (Ed.), *Teaching and Learning Mathematical Problem Solving. Multiples Research Perspectives* (pp. 1-15). Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates.

KILPATRICK, J. (1.990). Lo que el constructivismo puede ser para la educación de la matemática. *Educar*. 17, 37-52.

KOTHE, S. (1.968). *Denken macht Spass. Denkspiele mit den Merkmalklötzen Logische Blöcke von Z. P. Dienes* (1. Ausg. -11. Ausg., 1.973-) Freiburg im Breisgau (Deutschland): Verlag Herder KG. (Trad. cast. de la 11.ª ed.: BOFILL, M. (1.973). *Cómo utilizar los Bloques Lógicos de Z. P. Dienes. Pensar es divertido*. Barcelona: Teide, S. A.).

KRUTETSKI, V. A. (1.976). *The Psichology of Mathematical Abilities in Schoolchildren.Survey of recent East European Mathematical Literature*. Chicago: University of Chicago Press. (Translated from the russian by Joan Teller; edited by J. Kilpatrick and Izaak Wirszup).

LACASTA, E. (1.998). Desarrollo del currículo y formación inicial del profesorado de Educación Infantil: el aprendizaje lógico y numérico. En C. F. ABRAIRA y A. de FRANCISCO (Coord.), *La formación inicial de los profesores de Primaria y Secundaria en el Área de Didáctica de las Matemáticas. Actas del II Simposio sobre el currículum en la formación de profesores en el Área de Didáctica de las Matemáticas* (pp. 125-139. León: Universidad de León.

LAMPERT, M. (1.986). Teaching Multiplication. *Journal of Mathematical Behavoir*, 5(3), 241-280.

LAMPERT, M. (1.989). Arithmetic as Problem Solving. *Arithmetic Teacher*, 36, 34-36.

LAPOINTE, A. E.; MEAD, N. A. y PHILIPS, G. V. (1.989). *Un mundo de diferencias*. Madrid. Centro de Publicaciones, Ministerio de Educación y Ciencia.

LERMAN, S. (1.996). Socio-cultural approaches to mathematics teaching and learning. *Educational Studies in Mathematics,* 31(1-2), 1-9.

LERMAN, S. (2.006). Socio-Cultural Research in PME. En A. GUTIÉRREZ and P. BOERO (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. Past, Present and Future* (pp. 347-366). Rotterdam (The Netherlands): Sense Publishers. (Versión electrónica, ISBN 90-77874-19-4.pdf).

LINDSAY, P. H. and NORMAN, Donald A. (1.972). *Human information processing: An introducction to psychology*. New York: Academic Press. (Trad. cast.: SEOANE, J. y GARCÍA, C. (1.976 -tomo 1-; 1.975 -tomo 2-). *Procesamiento de la información humana. Una introducción a la Psicología. Tomo 1: Percepción y reconocimiento de formas; tomo 2: Memoria y Lenguaje*. Madrid: Tecnos S. A.).

LIRA, D. (2.001). Enfoque integral para la enseñanza de la matemática en secundaria. *Correo del Maestro,* 62,

LLINARES, S. and SÁNCHEZ, M.ª V. (1.991). The Knowledge About Unity in Fraction Task of Prospective Elementary Teachers. En F. FURINGHETTI (Ed.), *Proceedings of 15th PME (vol. 2)* (pp. 181-189). Assisi (Italy).

LLINARES, S. y SÁNCHEZ, V. (1.996). Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales en estudiantes para profesores de primaria. En J. GIMÉNEZ; S. LLINARES y V. SÁNCHEZ (Eds.), *El proceso de llegar* *a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 95-118). Granada: Comares.

LÓPEZ, J. A.; MORENO, M.ª L. (1.997). *Resultados españoles de Matemáticas en el TIMSS*. Madrid.MEC, Secretaría General de Educación y Formación Profesional, INCE. (Extraído el 22/09/2.004 de URL: http://www.ince.mec.es/timss/timssmat.pdf).

LOVELL, K. (1.961). *The Growth of Basic Mathematical and Scientific Concepts in Children*. London: University of London Press. (Trad. cast.: SÁNCHEZ, O. (1.962). *Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños* (1.ª ed. -6.ª ed., 1.986-). Madrid: Ediciones Morata).

LOVELL, K. (1.971). *The Growth of Understanding in Mathematics: Kindergarten Through Grade Three*. New York: Holt, Rinehart and Winston.

LUELMO, M.ª J. (1.996). La resolución de problemas en el aula de matemáticas. *Uno, Revista de Didáctica de las Matemáticas,* 8, 5-6.

MA, L. (1.999). *Knowing and Teaching Elementary Mathematics: Teacher's Understanding of Fundamental Mathematics in China*. Mahwah, N.J.: Lawrence Erlbaum Asociates.

MACK, N. K. (1.990). Learning Fractions with Understanding: Building on Informal Knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education,* 21, 16-31.

MANDLER, G. (1.988). Historia y desarrollo de la psicología de la emoción. En L. MAYOR (Comp.), *Psicología de la emoción. Teoría básica e investigaciones* (pp. 9-69). Valencia: Promolibro.

MANDLER, G. (1.989a). Affect and Learning: Causes and Consequences of Emotional Interactions. En D. B. McLEOD and V. M. ADAMS (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: a New Perspective* (pp. 3-19). New York: Springer-Verlang.

MANDLER, G. (1.989b). Affect and Learning: Reflections and Prospects. En D. B. McLEOD and V. M. ADAMS (Eds.), *Affect and Mathematical Problem Solving: a New Perspective* (pp. 49-58). New York: Springer-Verlang.

MAPOLELO, D. C. (1.999). Do pre-service primay teachers who excel en mathematics become good mathematics teachers? *Teaching and Teacher Education*, 15, 715-725.

MARGOLINAS, C. (1.993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble: La Pensée Sauvage, Editions.

MARTIN, M. O. and KELLY, D. L. (Eds.) (1.996). *TIMSS Technical Report, Volume I: Design and Development*. Chestnut Hill, Massachusetts (USA): Boston College. (Extraído el 22/09/2.004 de URL: http://isc.bc.edu/isc/isc_publications.html).

MARTIN, M. O. and KELLY, D. L. (Eds.) (1.997). *TIMSS Technical Report, Volume II: Implementation and A.lysis*. Chestnut Hill, Massachusetts (USA): Boston College. (Extraído el 22/09/2.004 de URL: http://isc.bc.edu/isc/isc_publications.html).

MARTÍN, M.ª E. (1.999). *Creencias y prácticas del profesorado de primaria en la enseñanza de las matemáticas* [CD-ROM] (Tesis doctoral). La Laguna: Universidad de La Laguna, Servicio de Publicaciones. ISBN: 84-699-9454-9 (84-7756-524-4 Obra completa).

MARTÍNEZ, A. y JUAN, F. (coord.) (1.989). *Una metodología activa y lúdica para la enseñanza de la geometría elemental*. Madrid: Síntesis, S. A.

MASON, J.; BURTON, L. and STACEY, K. (1.982). *Thinking Mathematically*. Reading, Massachusetts (USA): Addison-Wesley Publishing Company Inc. 224 (Trad. cast.: MARTÍNEZ, M. (1.992). *Pensar matemáticamente* (1.ª ed. - 2.ª reimpresión, 1.992-). Barcelona. MEC-Ed. Labor).

MAYBERRY, J. (1.983). The Van Hiele levels of geometric thought in undergraduate preservice teachers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 14(1), 58-69.

McLEOD, D. B. (1.990). Information-processing theories and mathematics learning: the role ofaffect. *International Journal of Educational Research*, 14, 13-29.

McLEOD, D. B. (1.992). Research on Affect in Mathematics Education: A Reconceptualization. En D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 575-596). New York: McMillan Publishing Co.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.970). *Ley 14/1970, de 4 de agosto, General de Educación y Financiamiento de la Reforma Educativa*. Boletín Oficial del Estado (BOE), 187, 6 de agosto de 1970, pp. 12.525-12.546.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.981). *Programas Renovados de Educación Preescolar y Ciclo Inicial*. Madrid. Escuela Española S. A.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.981). *Programas Renovados de la Educación General Básica, Ciclo Medio: 3.º, 4.º y 5.º curso*. Madrid. Escuela Española S. A.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.982). *La educación Preescolar: teoría y práctica*. Madrid: Servicio de Publicaciones del MEC.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.982). *Programas Renovados de la Educación General Básica, Ciclo Superior: 6.º, 7.º y 8.º curso*. Madrid. Escuela Española S. A.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.990). *Ley Orgánica 1/1.990, de 3 de octubre, de Ordenación General del Sistema Educativo*. Boletín Oficial del Estado (BOE)(2)38, de 4 de octubre de 1.990, pp. 28.927-28.942.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (1.991). *Real Decreto 1.440/1.991, de 30 de agosto, por el que se establece el título* *universitario oficial de Maestro, en sus diversas especialidades y las directrices generales propias de los planes de estudio conducentes a su obtención*. Boletín Oficial del Estado (BOE), Núm. 244, viernes 11 octubre 1.991, pp. 33.003-33.018.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN Y CIENCIA (2.006). *Ley Orgánica 2/2.006, de 3 de mayo, de Educación*. Boletín Oficial del Estado (BOE), 106, de 4 de mayo de 2.006, pp. 17.158-17.207.

MOREIRA, M. A. (2.002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências*, 7(1), 7-29. (Trad. cast.: IGLESIAS, I. (2.002). La teoría de los campos conceptuales de Vergnaud, la enseñanza de las ciencias y la investigación en el área. *Investigación en Enseñanza de las Ciencias*, 7(1), pp 1-28 (Extraído el 26/02/2009 de URL: http://www.if.ufrgs.br/~moreira/vergnaudespanhol.pdf)).

NATIONAL COMMISION ON TEACHING AND AMERICA'S FUTURE (1.996). *What Matters Most: Teaching for America's Future*. New York: National Commision on Teaching and America's Future.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1.959). *The growth of mathematical ideas. Grades K-12 (24th Yearbook)*. Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (1.980). *An Agenda For Action: Recommendations for School Mathematics of the 1980s*. Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2.000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics. (Trad. cast.: SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA THALES (2.003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. Granada. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales).

NORTES, A. (1.993). *Matemáticas y su Didáctica*. Murcia: Tema-DM.

NORTES, A. y MARTÍNEZ, R. (1.992). Actitud, aptitud y rendimiento en Matemáticas: un estudio en Primero de Magisterio. *Suma. Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas*, 10, 36-40.

NOVAK, J. D. (1.977). *A Theory of Education*. Ithaca, New York. Cornell University Press. (Trad. cast.: del BARRIO, C. y GONZÁLEZ, C. (1.982). *Teoría y práctica de la educación*. Madrid: Alianza Ed.).

NUFFIELD MATHEMATICS PROJECT (1.967). *I do, and I Understand*. Edinburgh, London, New York: Chambers, J. Murray, J. Wiley & Sons.

ORTON, A. (1.988). *Learning Mathematics. Issues, Theory and Classroom Practice*. London: Cassell. (Trad. cast.: SOLANA, G. (1.990). *Didáctica de las matemáticas. Cuestiones, teoría y práctica en el aula*. Madrid. Ministerio de Educación y Ciencia y Ed. Morata S. A.).

PENCHALIAH, S. and DE VILLIERS, M. (1.997). Young Children's intuitive strategies for multiplication and division word problem in a problem-centered approach. En E. PEHKONEN (Ed.), *Procceding of the 21st Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, vol. I*. Lahti (Finlandia): Univ. of Helsinki.

PERALES, F. J. (2.000). *Resolución de problemas*. Madrid: Síntesis S.A.

PÉREZ, M.ª del P. (1.994). La solución de problemas en Matemáticas. En J. I. POZO (Coord.) et al., *La solución de problemas* (pp. 53-83). Madrid: Santillana S. A.

PÉREZ, M.ª del P. y POZO, J. I. (1.994). Aprender a resolver problemas y resolver problemas para aprender. En J. I. POZO (Coord.) et al., *La solución de problemas* (pp. 13-52). Madrid: Santillana S. A.

PETIT, Q. y SÁNCHEZ-MELLADO, L. (2.006). Verano en suspenso. *El País Semanal*, 1.562, domingo 3 de septiembre de 2.006, 66-71.

PIAGET, J. (1.970). Piaget's Theory. En P. H. MUSSEN (Ed.), *Carmichael's Manual of Child Psychology* (3rd ed.) New York: J. Wiley & Sons, Inc.

(Trad. cast.: SERIGOS, M. (1.981). La teoría de Piaget *Infancia y Aprendizaje,* 2, 13-54).

PIAGET, J. (1.973). *To Understand Is To Invent. The Future of Education* (1st ed. -2nd reprinted, 1.980-). Kingsport, Tennessee: Penguin Books.

PIAGET, J. e INHELDER, B. (1.975). *Génesis de las estructuras lógicas elementales. Clasificaciones y seriaciones*. Buenos Aires: Ed. Guadalupe.

POLYA, G. (1.945). *How to solve it* (1st ed. -2nd ed., 1957-). Princeton (USA): Princeton University Press. (Trad. cast. de la 2.ª ed. inglesa: ZAGAZAGOITIA, J. (1.965). *Cómo plantear y resolver problemas* (1.ª ed. -17.ª reimpr., 1992-). México: Trillas).

POST, T. R., et al. (1.991). Intermediate teachers' knowledge of rational number concepts. En E. FENNEMA; T. P. CARPENTER and S. J. LAMON (Eds.), *Integrating research on teaching and learning mathematics* (pp. 194-217). Albany (New York, USA): State University of New York Press.

POZO, J. I. (1.989). *Teorías cognitivas del aprendizaje* (1.ª ed. -3.ª ed., 1.994-). Madrid: Morata S. L.

POZO, J. I. y POSTIGO, Y. (1.994). La solución de problemas como contenido procedimental de la Educación Obligatoria. En J. I. POZO (Coord.) et al., *La solución de problemas* (pp. 179-213). Madrid: Santillana S. A.

PUIG, L. (1.996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares.

PUIG, L. y CERDÁN, F. (1.988). *Problemas aritméticos escolares*. Madrid: Síntesis, S. A.

PUTT, I. J. (1.995). Preservice teachers ordering of decimal numbers: When more is smaller and less is larger! *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 17(3), 1-15.

QUINTANA, J. M. (1.998). Problem Solving y Pedagogía. La resolución de problemas como tarea y categoría de la educación. En E. LÒPEZ-BARAJAS (Coord), *La metodología del "Problem Solving". Fundamentos y técnicas. (Actas y Congresos)* (pp. 53-64). Madrid: Universidad Nacional de Educación a Distancia.

RESNICK, L. B. (1.987). *Education and Learning to Think*. Washington D. C.: National Academy Press.

RESNICK, L. B. and FORD, W. W. (1.981). *The Psychology of Mathematics for Instruction*. Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. (Trad. cast.: PAREJA, A. (1.990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Ministerio de Educación y Ciencia y Ed. Paidós).

RICO, L. y SIERRA, M. (1.994). La década de los ochenta y comienzos de los noventa. En J. KILPATRICK; L. RICO y M. SIERRA, *Educación Matemática e Investigación* (pp. 167-202). Madrid: Síntesis S. A.

RICO, L. (2.000). Formación y desempeño práctico en educación matemática de los profesores de primaria. *Suma. Revista sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*, 34, 45-51.

RICO, L. (2.001). Matemáticas en Educación Primaria. En E. CASTRO (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 23-40). Madrid: Síntesis Educación.

RICO, L. (2.003). Presentación de la edición española. En NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (2.000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics. (Trad. cast.: SOCIEDAD ANDALUZA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA «THALES» (2.003). *Principios y Estándares para la Educación Matemática* (pp. vii-x). Granada: Sociedad Andaluza de Educación Matemática «Thales»)

RIVIÈRE, A. (1.984). *La psicología de Vygotski* (1.ª ed. -2.ª ed., 1.985-). Madrid: Visor.

RIVIÈRE, A. (1.990). Problemas y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas. En A. MARCHESI; C. COLL y J. PALACIOS (Eds.), *Desarrollo psicilógico y Educación III. Necesidades educativas especiales y aprendizaje escolar* (pp. 155-182). Madrid: CEPE.

RODRIGO, M.ª J. (1.985). Psicología evolutiva y procesamiento de la información. En A. MARCHESI; M. CARRETERO y J. PALACIOS (Comp.), *Psicología evolutiva 1. Teorías y métodos* (1.ª ed. -3.ª reimpr. 1.991-) (pp. 221-242). Madrid: Alianza Editorial S. A.

ROMBERG, T. A. (1.993). How One Comes to Know: Models and Theories of the Learning of Mathematics. En M. NISS (Ed.), *Investigations into assessment in Mathematics Education: An ICMI Study* (pp. 97-112). Dordretch (Nederland): Kluver Academic Publishers.

ROMBERG, T. A. and CARPENTER, T. P. (1.986). Research on Teaching and Learning Mathematics: Two Disciplines of Scientific Inquiry. En M. C. WITTROCK (Ed.), *Handbook of Research on Teaching. A Project of the American Educational Research Association* (pp. 850-873). New York: Macmillan Publishing Co.

RUIZ, L. (2.005). La actividad lógica en la Escuela Infantil. En M.ª del C. CHAMORRO (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp., 101-140). Madrid: Pearson Educación, S.A.

RUIZ, M.ª L. (2.003). Aprendizaje y matemáticas. En M.ª del C. CHAMORRO (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Primaria* (pp. 31-68). Madrid: Pearson Educación, S.A.

RUSSELL, J. (1.984). *Explaining mental life. Some philosophical issues in psychology*. London: Macmillan Publishers.

SÁIZ, I. (1.994). Dividir con dificultad o la dificultad de dividir. En C. PARRA y I. SÁIZ (Comps.), *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones* (pp. 185-217). Buenos Aires: Editorial Paidós.

SALINAS, M.ª J. (2.003). *Competencia matemática al finalizar los estudios de Magisterio. Explicación mediante un modelo causal* [CD-ROM]

(Tesis doctoral). Santiago de Compostela: Universidad de Santiago de Compostela. ISBN: 978-84-9750-281-8.

SÁNCHEZ, V. (1.997). Área de Didáctica de las Matemáticas en el título de Maestro-especialidad de Educación Primaria. En L. J. BLANCO y M.ª C. CRUZ (Coord.), *Aportaciones al currículum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas* (pp. 19-35). León: Universidad de León.

SANZ, I. y ARRIETA, M. (1.988). *Por los caminos de la lógica. Lógica y conjuntos en E.G.B*. Madrid: Síntesis, S. A.

SARMIENTO, M. (2.004). *La Enseñanza de las Matemáticas y las Nuevas Tecnologías de la Información y Comunicación. Una estrategia de formación permanente* (Tesis doctoral). Universitat Rovira i Virgili. Departamento de Pedagogía. xii, 392 (29,7 cm x 21 cm) (Extraído el 22/01/2.009 de URL: http://www.tdx.cat/TDX-0806107-121312. ISBN: T.1625-2007/978-84-690-8294-2).

SCHOENFELD, A. H. (1.983). Episodes and Executive Decisions in Mathematical Problem-Solving. En R. LESH and M. LANDAU (Eds.), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 345-395). New York: Academic Press.

SCHOENFELD, A. H. (1.985). *Mathematical problem solving*. San Diego, California (USA): Academic Press, Inc.

SCHOENFELD, A. H. (1.987a). What's All the Fuss about Metacognition? En A. H. SCHOENFELD (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 189-215). Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

SCHOENFELD, A. H. (1.987b). Cognitive Science and Mathematics Education: An Overview. En A. H. SCHOENFELD (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education* (pp. 1-31). Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

SCHOENFELD, A. H. (1.988a). When Good Teaching Leads to Bad Results: The Disasters of Well Taught Mathematics Classes. *Educational Psychologist,* 23, 145-166.

SCHOENFELD, A. H. (1.988b). Problem solving in context(s). En R. I. CHARLES and E. A. SILVER (Eds.), *The teaching and assesing of mathematical problem-solving* (pp. 82-92). Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

SCHOENFELD, A. H. (1.992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. En D. A. GROUWS (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: Macmillan Publishing Co.

SEGARRA, LL. (1.997). Maneras curiosas de sumar, restar, multiplicar y diviDir. *Aula de Innovación Educativa,* 58, 24-25.

SEGARRA, LL. (2.008). Cap on va el càlcul escrit? *Guix*. 348, 11-14.

SEGOVIA, I. y RICO, L. (2.001). Unidades didácticas. Organizadores. En E. CASTRO (Ed.), *Didáctica de la matemática en la Educación Primaria* (pp. 83-104). Madrid: Síntesis Educación.

SHULMAN, L. S. (1.970). Psychology and mathematics education. En E. G. BEGLE (Ed.), *Mathematics education: The sixty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education: Part 1* (pp. 23-71). Chicago: University of Chicago Press.

SHULMAN, L. S. (1.986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.

SIMON, M. A. (1.993). Prospective elementary teachers' knowledge of division. *Journal for Research in Mathematics Education,* 24(3), 233-254.

SKEMP, R. R. (1.971). *The Psychology of Learning Mathematics* (1st ed. -reprinted 1.977-). London: Penguin Books Ltd. (Trad. cast.: GONZALVO, G. (1.980). *Psicología del aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Morata S. A.

SKEMP, R. R. (1.976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teacher*, 77, 20-26. Reprinted in ArithmeticTeacher, 26, 9-15.

SKEMP, R. R. (1.989). *Mathematics in the Primary School*. London: Routledge.

SOCAS, M. M., et al. (1.989). *Iniciación al álgebra*. Madrid: Síntesis, S. A.

SOLA, C. (2.006a). Fundamentos de la técnica didáctica ABP. En C. SOLA (Dir.), et al., *Aprendizaje basado en problemas. De la teoría a la práctica* (pp. 37-50). Sevilla: Trillas-MAD.

SOLA, C. (2.006b). Ventajas y desventajas de ABP: a modo de final. En C. SOLA (Dir.), et al., *Aprendizaje basado en problemas. De la teoría a la práctica* (pp. 187-201). Sevilla: Trillas-MAD.

SORENSON, H. (1.964). *Psychology in Education* (4.ª -1.ª ed., 1.940-). New York: McGraw-Hill Book Company. (Trad. cast.: WINSNES, M. (1.971). *La psicología en la educación. Nuevas orientaciones de la Educación*. Buenos Aires: El Ateneo).

STANIC, G. M. A. and KILPATRICK, J. (1.988). Historical Perspectives on Problem Solving in the Mathematics Curriculum. En R. I. CHARLES and E. A. SILVER (Eds.), *The Teaching and Assesing of Mathematical Problem Solving* (pp. 1-22). Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

STARKEY, P. and GELMAN, R. (1.982). The Development of Addition and Substraction Abilities Prior to Formal Shooling in Arithmetic. En T. P. CARPENTER; J. M. MOSER and T. A. ROMBERG (Eds.), *Addition and Substraction: A cognitive perspective* (pp. 99-116). Hillsdale (New Jersey, USA): Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

STEFFE, L. P. (1.994). Children's Multiplying Schemes. En G. HAREL and J. CONFREY (Eds.), *The Development of Multiplicative Reasoning in the*

Learning of Mathematics (pp. 3-39). Albany (New York, USA): State University of New York Press (SUNY Press).

STENHOUSE, L. (1.984). *Investigación y desarrollo del currículum*. Madrid: Morata.

STIGLER, J. W. and HIEBERT, J. (1.999). *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. New York: The Free Press.

THORNDIKE, E. L. (1.922). *The Psychology of Arithmetic*. New York: The Macmillan Co.

TIROSH, D. and GRAEBER, A. O. (1.989). Preservice elementary teachers' explicit beliefs about multiplication and division. *Educational Studies in Mathematics,* 20(1), 79-96.

TREFFERS, A. (1.987). *Three Dimensions: A Model of Goal and Theory Description in Mathematics Instruction. The Wiskobas Project*. Dordretch (The Netherlands): Reidel Publishing Company.

TURÉGANO, P. (1.997). Nuevo enfoque en la formación matemática para futuros profesores de Educación Primaria. En L. J. BLANCO y M.ª C. CRUZ (Coord.), *Aportaciones al curriculum en la formación inicial de los profesores de Primaria en el Área de Matemáticas* (pp. 133-139). León: Universidad de León.

UNIVERSIDAD JAUME I (1.992). *Resolución de 29 de julio de 1.992, de la Universidad Juame I de Castellón, por la que se hace público el plan de estudios de la titulación de Maestro-Especialidad Educación Infantil de esta Universidad*. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 211, miércoles 2 septiembre 1.992, 30.329-30.349.

UNIVERSIDAD JAUME I (1.992). *Resolución de 29 de julio de 1.992, de la Universidad Jaume I de Castellón, por la que se hace público el plan de estudios de la titulación de Maestro-Especialidad Educación Musical de esta Universidad*. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 212, jueves 3 septiembre 1.992, pp. 30.408-30.429.

UNIVERSIDAD JAUME I (1.992). *Resolución de 29 de julio de 1.992, de la Universidad Jaume I de Castellón, por la que se hace público el plan de estudios de la titulación de Maestro-Especialidad Educación Primaria de esta Universidad*. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 212, jueves 3 septiembre 1.992, pp. 30.430-30.454.

UNIVERSIDAD JAUME I (1.992). *Resolución de 29 de julio de 1.992, de la Universidad Jaume I de Castellón, por la que se hace público el plan de estudios de la titulación de Maestro-Especialidad Educación Física de esta Universidad*. Boletín Oficial del Estado (BOE), núm. 212, jueves 3 septiembre 1.992, pp. 30.454-30.475.

VALLECILLOS, A. (1.997). Notas históricas y reflexiones acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. *Publicaciones*, 25-26-27, 793-815.

VAN HIELE, P. M. (1.986). *Structure and Insight. A Theory of Mathematics Education*. London: Academic Press.

VAN HIELE, P. M. (1.957). *De problematiek van het inzicht, gedemonstreerd aan het inzicht van schoolkinderen in meetkunde-leerstof* (Dissertation). Groningen (Nederlanden): J. B. Wolters.

VAN HIELE-GELDOF, D. (1.957). *De didaktiek van de meetkunde in de eerste klas van het V.H.M.O.* (Dissertation). Groningen (Nederlanden): J. B. Wolters.

VECINO, F. (2.005). Desarrollo del pensamiento simbólico en el niño. En M.ª del C. CHAMORRO (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas para Educación Infantil* (pp. 63-99). Madrid: Pearson Educación, S.A.

VERGNAUD, G. (1.982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. En T. P. CARPENTER; J. M. MOSER and T. A. ROMBERG (Eds.), *Addition and Substraction: A cognitive perspective* (pp. 39-59). Hillsdale (New Jersey, USA): L. Erlbaum Associates, Publishers.

VERGNAUD, G. (1.983). Multiplicative structures. En R. LESH and M. LANDAU (Eds.), *Adquisition of Mathematics Concepts and Processes* (pp. 127-174). New York: Academic Press.

VERGNAUD, G. (1.990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10(2-3), 133-170.

VERGNAUD, G. (1.997). The nature of mathematical concepts. En T. NUNES and P. BRYANT (Eds.), *Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective* (pp. 5-28). Hove (East Sussex, UK): Psychology Press Ltd.

VERGNAUD, G. (1.998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior,* 17(2), 167-181.

VILA, A. (2.001). *Resolució de problemes de matemàtiques: identificació, origen i formació dels sistemes de creences en l'alumnat. Alguns efectes sobre l'abordatge dels problemes* (Tesis doctoral). Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, Departament de Didàctica de la Matemàtica i les CC. Experimentals. URN: TDX-0925101-170122.

VUYK, R. (1.981). *Overview and Critique of Piaget's Genetic Epistemology. 1.965-1.980, (2 vols)*. London: Academic Press Inc. (Trad. cast.: del BARRIO, C. y CORRAL, A. (1.984). *Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1.965-1.980, vol. I*. Madrid: Alianza Editorial.; del BARRIO, C. (1.984). *Panorámica y crítica de la epistemología genética de Piaget 1.965-1.980, vol. II*. Madrid: Alianza Editorial).

VYGOTSKY, L. S. (1.934). *Myshlenie i rech*. (Trad. cast. del original ruso: ROTGER, M.ª M. (1.973). *Pensamiento y lenguaje. Teoría del desarrollo cultural de las funciones psíquicas*. Buenos Aires: La Pléyade).

VYGOTSKY, L. S. (1.962). *Thought and Language*. Cambridge, Massachusetts (USA): Massachusetts Institute of Technology (MIT) Press. (Traducción inglesa del original ruso VYGOTSKY (1.934). *Myshlenie i rech*, por E. HANFMANN y G. VAKAR).

VYGOTSKY, L. S. (1.978). *Mind in Society. The Development of Higher Psychological Processes*. Cambridge, Massachusetss (USA): Harvard University Press. (Trad. cast.: FURIÓ, S. (1.979). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona: Crítica).

WATANABE, T. (2.002). Representations in Teaching and Learning Fractions. *Teaching Children Mathematics*. 8(8), 457-463.

WEBSTER'S (1.979). *New universal unabridged dictionary* (2nd ed.). New York: Simon & Schuster.

WERTHEIMER, Max (1.912). Experimentelle studien über das sehen von bewegung. *Zeitschrift für psychologie*. 61, 121-165.

WERTHEIMER, M. (1.945). *Productive Thinking*. New York: Harper and Brothers Publishers. (Trad. cast.: WOLFSON, L. (1.991). *El pensamiento productivo*. Barcelona: Paidós).

WHITE, L. A. (1.959). *The Evolution of Culture*. New York: McGraw-Hill. (Trad. cast.: *La ciencia de la cultura* (1.982). Barcelona: Paidós).

WILSON, L. D. and KENNEY, P. A. (2.003). Classroom and Large-Scale Assessment. En J. KILPATRICK; W. G. MARTIN and D. SCHIFTER (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 53-67). Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.

YACKEL, A. and HANNA, G. (2.003). Reasoning and Proof. En J. KILPATRICK; W. G. MARTIN and D. SCHIFTER (Eds.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, Virginia (USA): National Council of Teachers of Mathematics.