Resumen

Consideremos la ecuación de Beltrami

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\, \partial f(z), \quad z \in \mathbb{C}$$

donde μ es una función medible definida en el plano y tal que satisface la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. A la aplicación μ se le llama *coeficiente de Beltrami*. Por el Teorema de Morrey de 1938, existe esencialmente una única solución de la ecuación de Beltrami que es un homeomorfismo y pertenece al espacio de Sobolev $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ (funciones donde tanto la función como sus primeras derivadas parciales pertenecen a $L^2_{loc}(\mathbb{C})$). A esta solución se le llama *μ-quasiconforme* o *K-quasiconforme.* Toda solución en $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ de la ecuación de Beltrami se llama *quasiregular.*

Es conocido que uno puede encontrar una aplicación quasiconforme que puede expresarse de forma explícita como

$$f(z) = z + Ch(z) \tag{1}$$

donde C es la transformada de Cauchy. A esta aplicación quasiconforme la llamamos *solución principal.*

Mediante el Teorema de Stoilow, podemos relacionar las aplicaciones quasiregulares con la aplicación quasiconforme puesto que *cualquier solución de la ecuación de Beltrami es la composición de una función holomorfa con la aplicación quasiconforme*

El objetivo de esta tesis es presentar resultados de regularidad de la soluciones a la ecuación de Beltrami cuando el coeficiente tiene una cierta regularidad. Un primer resultado nos dice que: *dado un espacio de funciones $X(\mathbb{C})$, si el coeficiente de Beltrami $\mu \in X(\mathbb{C})$ tiene soporte compacto y satisface la condición de elipticidad $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, entonces la solución principal $f(z) = z + Ch(z)$ y cumple que $h \in X(\mathbb{C})$.*

También consideramos el estudio de la regularidad de las soluciones para coeficientes de Beltrami que están restringidos a un dominio acotado Ω del plano. El resultado principal demostrado es el siguiente: *Sean $0 < \alpha < \epsilon < 1$ y $1 < p < \infty$ tal que $\alpha p > 2$. Consideremos un dominio acotado Ω con frontera de clase $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ y μ una función medible soportada en Ω tal que $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Entonces, si $\mu \in X^{\alpha,p}(\Omega)$, entonces la solución principal de la ecuación de Beltrami es $f(z) = z + Ch(z)$, donde $h \in X^{\alpha,p}(\Omega)$ y donde $X^{\alpha,p}(\Omega) = W^{\alpha,p}(\Omega)$ ó $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$.* Demostramos para ciertos espacios de funciones definidos en un dominio Ω de $\mathbb{R}^n$ que si T es un operador de Calderón-Zygmund de tipo par, la condición que $T\chi_\Omega$ pertenezca al espacio de funciones $X(\Omega)$ (donde χ_Ω es la función característica en Ω) equivale a que T sea acotado de $X(\Omega)$ en $X(\Omega)$.

En el espacio de Lebesgue con pesos $L^p(\omega)$ donde ω es de la clase de Muckenhoupt A_p, demostramos que el operador de Beltrami $I - \mu B$ es invertible en $L^p(\omega)$ cuando ω es un peso de A_p.

Abstract

We consider the Beltrami equation

$$\overline{\partial} f(z) = \mu(z)\ \partial f(z), \quad z \in \mathbb{C} \tag{1}$$

where μ is a measurable function on the plane that satisfies the ellipticity condition $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. The function μ is called the *Beltrami coefficient*. By Morrey's Theorem in 1938, there exists essentially a unique solution of the Beltrami equation in the Sobolev space $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ which is a homeomorphism. This solution is called *μ-quasiconformal* or *K-quasiconformal mapping*. All the solutions of the Beltrami equation in $W^{1,2}_{loc}(\mathbb{C})$ are called *quasiregular mappings.*

When the Beltrami coefficient is compactly supported, it is well known that a quasiconformal solution of (1) can be expressed in the following form

$$f(z) = z + Ch(z)$$

where C denotes the Cauchy transform. This mapping f is called the *principal solution.*

Using Stoilow's Theorem, we can relate the quasiregular mappings with the quasiconformal mappings since *every quasiregular solution of the Beltrami equation is the composition of an holomorphic function and a quasiconformal mapping.*

The goal of this thesis is to find the regularity of the solutions of the Beltrami equation when some regularity conditions are assumed for the Beltrami coefficient. Our first result reads as follows: *Given a function space $X(\mathbb{C})$, if the Beltrami coefficient $\mu \in X(\mathbb{C})$ is compactly supported and satisfies the ellipticity condition $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$, then the principal solution, $f(z) = z + Ch(z)$, satisfies that $h \in X(\mathbb{C})$.*

Moreover, in this thesis we studied the regularity of the solutions when the Beltrami coefficient is supported in a bounded domain $\Omega \subset \mathbb{C}$. The main result we obtained in this sense is the following: *Let $0 < \alpha < \epsilon < 1$ and $1 < p < \infty$ be such that $\alpha p > 2$. We consider a bounded domain Ω with boundary of class $\mathcal{C}^{1,\epsilon}$ and μ a function supported on $\overline{\Omega}$ with $\|\mu\|_\infty \leq k < 1$. Then, if $\mu \in X^{\alpha,p}(\Omega)$, the principal solution of the Beltrami equation, $f(z) = z + Ch(z)$, satisfies that $h \in X^{\alpha,p}(\Omega)$ for $X^{\alpha,p}(\Omega) = W^{\alpha,p}(\Omega)$ or $B^{\alpha}_{p,p}(\Omega)$.* Furthermore we proved that for certain function spaces restricted to a bounded domain Ω of $\mathbb{R}^n$, if T is a Calderón-Zygmund operator with even kernel, then the condition $T\chi_\Omega$ is in the function space $X(\Omega)$ (where χ_Ω is the characteristic function on Ω), is equivalent to the operator T being continuous on $X(\Omega)$.

Finally, on the weighted Lebesgue space $L^p(\omega)$ where ω is in the Muckenhoupt class A_p, we proved that the Beltrami operator $I - \mu B$ is invertible on $L^p(\omega)$.