

riódicos del plano. Si  $f_i = f_i^{-1} \forall i$ , desaparece la distinción entre los vértices de  $V_1$  y  $V_2$ . Este es el caso del "p-cubo" [SB1].

Existen otros casos particulares en los que, asimismo, debido a la elección del conjunto  $F$ , los nudos de  $V_1$  y  $V_2$  resultan indistinguibles. Entonces, la elección de ambos conjuntos es arbitraria y sólo está sometida a la condición  $|V_1| + |V_2| = |V|$ .

Este sería el caso, por ejemplo, de las redes estudiadas en el subapartado 2.2.2a que podrían ser así consideradas como un caso particular de las estudiadas ahora.

Dado un grafo  $G$   $d$ -regular cualquiera, admite una construcción de este tipo con  $f_i \neq f_j \forall i \neq j$ , si y sólo si es línea- $d$ -coloreable. Si, además, exigimos que  $f_i \neq f_j^{-1} \forall i, j$ ,  $G$  debe ser también vértice-2-coloreable (lo que, junto con la condición de regularidad, implica  $|V_1| = |V_2| = |V|/2$ ).

Tal como se construyen este tipo de grafos, resultan muy apropiados para modelar la clase de sistemas que hemos llamado "de camino compartido", ya que, p.e., los vértices de  $V_1$  pueden representar las unidades de proceso y los de  $V_2$  los buses.

## 2.3 REDES BASADAS EN EL DIRECCIONAMIENTO DE FINKEL Y SOLOMON

### 2.3.1 *El direccionamiento de Finkel y Solomon: funciones asociadas.*

En esta sección, usaremos la metodología de diseño estudiada anteriormente para obtener varias topologías interesantes. Como se verá, las rotulaciones de los vértices (o, equivalentemente, las elecciones del conjunto  $V$ ) con las que trabajamos son idénticas o están inspiradas en la propuesta por Finkel y Solomon en [FS2]. En este artículo, cada vértice está rotulado de la forma

" $u \bullet w$ " donde  $z = uw$  es una secuencia de  $n$  dígitos en base  $b$ . (se considera que la "dirección"  $z \bullet$  es equivalente a  $\bullet z$ ). Dados  $n$  y  $b$ , a tal conjunto de vértices lo denotaremos por  $W_{n,b}$ . Así,

$$W_{n,b} = \{a_1 a_2 \dots a_i \bullet a_{i+1} \dots a_n \mid a_j \text{ dígito en base } b \forall j\} \quad (2.3)$$

$$|W_{n,b}| = nb^n$$

Por otra parte, la elección de las funciones  $f_i$  (o condiciones de adyacencia) está estrechamente relacionada con esta notación. En este capítulo nos limitamos a funciones de la forma

$f_{(\alpha,\beta)}$  donde, dados  $v_1, v_2 \in W_{n,b}$ ,

$$f_{(\alpha,\beta)}(v_1) = v_2 \quad (2.4)$$

(existe un arco *desde*  $v_1$  *hacia*  $v_2$ ) si y sólo si

- a) El punto de  $v_2$  está situado a distancia  $\alpha \pmod{n}$  del punto de  $v_1$ .
- b) El dígito de  $v_2$  situado a distancia  $\beta \pmod{n}$ , respecto a la posición del punto en  $v_1$ , es cualquier dígito en base  $b$  *distinto* de su homólogo en  $v_1$ .

Se define como 1 la distancia entre dos dígitos consecutivos y  $1/2$  la distancia entre el punto y el dígito inmediato posterior. Así,  $f_{(\alpha,0)}$  es la función que "hace saltar" el punto sin modificar ningún dígito. Por ejemplo, tomando  $n=4$ ,

$$f_{(1,0)}(a_1 \bullet a_2 a_3 a_4) = a_1 a_2 \bullet a_3 a_4.$$

Notar que, en realidad, si  $\beta \neq 0$  y  $b > 2$ ,  $f_{(\alpha,\beta)}$  representa un conjunto de  $b-1$  funciones. Por ejemplo, siguiendo con  $n=4$ , si  $b=3$  tenemos:  $f_{(1, \frac{1}{2})}(1 \bullet 202) = 10 \bullet 02$  y  $11 \bullet 02$ .

### 3.3.2 Redes de camino dedicado unidireccional

Como hemos indicado, estas redes se modelan mediante grafos dirigidos (generalmente regulares). La topología que nosotros proponemos es del tipo estudiado en el apartado 2.2.1 y se obtiene direccionando los vértices según (2.3):  $V = W_{n,b}$ ;  $|V| = nb^n$ .

El conjunto  $\vec{F}$  de funciones que imponen las condiciones de adyacencia está formado por las funciones  $f_{(1,0)}$  y  $f_{(1,\frac{1}{2})}$ . Así, el procesador "ua.e.w" es adyacente hacia los procesadores "uac.w" (a, e y c representan dígitos en base b) con  $c = 0, 1, 2, \dots, b-1$ . Es inmediato comprobar que, con  $\vec{F}$  así definido, en cada vértice de  $D = (V, \vec{F})$  concurren b "enlaces entrantes" y b "enlaces salientes" (grafo b-diregular).

El encaminamiento en esta topología es muy sencillo, pues el punto sólo puede desplazarse en un sentido. Así, el algoritmo para ir de un vértice  $v_1$  a otro  $v_2$  es:

- 1.- Aplicar  $f_{(1,0)}$  ó  $f_{(1,\frac{1}{2})}$  repetidamente hasta que todos los dígitos del vértice alcanzado coincidan con los de  $v_2$ .
- 2.- Aplicar sucesivamente  $f_{(1,0)}$  para situar el punto en su lugar correcto.

Esto supone que, en el peor de los casos, debemos recorrer primero n pasos para completar el punto (1) y n-1 pasos para (2). Por tanto, el diámetro de esta red es  $k = 2n - 1 \approx 2\log_b N - 1$ . En la tabla 2.3.1 se muestra el número de vértices y el diámetro para el caso b=2 (grafos 2-diregulares) y hasta n=10.

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10
N	8	24	64	160	384	896	2048	4068	10024
k	3	5	7	9	11	13	15	17	19

Tabla 2.3.1

### 2.3.3 Redes de camino dedicado bidireccional

Usando nuestra terminología, las "lentes multietapa" de |FS2| son redes con  $V = W_{n,b}$  pertenecientes al tipo del subapartado 2.2.2a. Las funciones de adyacencia son

$$f_{(1,0)}, f_{(1,\frac{1}{2})}, f_{(-1,0)} = f_{(1,0)}^{-1} \text{ y } f_{(-1,-\frac{1}{2})} = f_{(1,\frac{1}{2})}^{-1} \quad (2.5)$$

de manera que se obtiene un grafo regular no dirigido de grado siempre par,  $d = 2b$ , y diámetro  $k = \lfloor \frac{3n}{2} \rfloor \approx 1,5 \log_b N$ .

En este apartado presentamos redes análogas a las anteriores pero de *grado impar*.

2.3.3a) Si nos atenemos a conjuntos de vértices del tipo  $W_{n,b}$  con  $n$  par ( $n \neq 2$ ), podemos obtener redes del tipo estudiado en el subapartado 2.2.2a usando las funciones siguientes:

$$f_{(1,0)}, f_{(1,\frac{1}{2})}, f_{(-1,0)}, f_{(-1,-\frac{1}{2})} \text{ y } f_{(\frac{n}{2},0)} = f_{(\frac{n}{2},0)}^{-1} \quad (2.6)$$

Así, obtenemos una red con  $N = nb^n$  vértices, grado  $d = 2b+1$  y diámetro  $k = n + \lceil \frac{n}{4} \rceil = \lceil \frac{5n}{4} \rceil \approx \frac{5}{4} \log_b N$ , como puede fácilmente comprobarse considerando las direcciones de dos nudos situados a distancia máxima. Algunos valores particulares se muestran en la tabla 2.3.2.

k \ d	5 (n=4)	8 (n=6)	10 (n=8)	13 (n=10)
5 (b=2)	64	384	2048	10240
7 (b=3)	324	4374	52488	590490

Tabla 2.3.2

2.3.3b) Otra posibilidad sería obtener, a partir del mismo conjunto  $W_{n,b}$ ,  $n$  par, una red tal como las estudiadas en el apartado 2.2.2b siendo

$$W_{n,b} = W_{n,b}^I \cup W_{n,b}^P$$

$$\text{con } W_{n,b}^I = \{a_1 a_2 \dots a_i \cdot a_{i+1} \dots a_n \mid i \text{ impar}\} \quad (2.7)$$

y análogamente para  $W_{n,b}^P$  con  $i$  par. Para ello usamos las funciones

$$f(1,0), f(1, \frac{1}{2}), f(-1,0), f(-1, -\frac{1}{2}), f(s,0) : W_{n,b}^I \longrightarrow W_{n,b}^P \quad (2.8a)$$

y sus inversas:

$$f(-1,0), f(-1, -\frac{1}{2}), f(1,0), f(1, \frac{1}{2}), f(-s,0) : W_{n,b}^P \longrightarrow W_{n,b}^I \quad (2.8b)$$

donde  $s$  es precisamente la longitud óptima del "eslabón" que da el mínimo diámetro en las "Chordal Ring Networks" estudiadas en [AL2].

Un posible algoritmo de encaminamiento en esta red es:

1. Usar repetidamente las funciones  $f(1,0)$ ,  $f(1, \frac{1}{2})$ , y/o sus inversas, para cambiar todos los dígitos a su valor correcto, es decir los correspondientes a la dirección del procesador destino.
2. Usar las funciones  $f(1,0)$ ,  $f(s,0)$ , y/o sus inversas para, aplicando el simple algoritmo presentado en [AL2], situar el punto en la posición adecuada.

El punto (1) puede obligar a realizar un máximo de  $n$  pasos y el punto (2), como se demuestra en [AL2],  $O(n^{1/2})$  pasos. Por tanto el diámetro de la red obtenida es  $k = n + O(n^{1/2})$ .

2.3.3c) Consideremos ahora el conjunto  $V$  constituido por vértices de la forma  $a_1 a_2 a_3 \dots a_i \cdot a_{i+1} \dots a_n$  con  $n$  par y donde  $a_i$  es un dígito en base  $b_1$  [ $b_2$ ] si  $i$  es par [impar]. Esto supone un total

de  $N = |V| = n(b_1 b_2)^{n/2}$  nudos. Entonces es posible obtener un grafo  $(b_1 + b_2)$ -regular del tipo del subapartado 2.2.2b si escogemos las funciones

$$f(1,0), f(1, \frac{1}{2}), f(-1,0) \text{ y } f(-1, -\frac{1}{2}) \quad (2.9)$$

Así, por ejemplo, el procesador  $a_1 a_2 \dots a_i \cdot a_{i+1} \dots a_n$  (con  $i$  par) es adyacente a los procesadores  $a_1 a_2 \dots a_{i-1} \cdot e a_{i+1} \dots a_n$  y  $a_1 a_2 \dots a_i \cdot c a_{i+2} \dots a_n$  donde  $e$  y  $c$  son dígitos cualesquiera en base  $b_1$  y  $b_2$  respectivamente.

El diámetro de estas redes es idéntico al de las "lentes multietapa", es decir  $k = \frac{3n}{2}$ , salvo en el caso en que  $b_1$  o  $b_2$  sean 1. Si suponemos  $b_1 = 1$ , nos queda una red con  $N = n b_2^{n/2}$  vértices, grado  $d = b_2 + 1$  y diámetro  $k = \frac{3n}{2} - 1$ .

Notar que, para obtener un grafo con un grado dado,  $d = b_1 + b_2$ , tenemos varias posibles elecciones de  $b_1$  y  $b_2$ . Para maximizar el número de vértices, debemos tomar  $b_1 = (d-1)/2$  y  $b_2 = (d+1)/2$  (o viceversa), con lo cual

$$N = n \left( \frac{d^2 - 1}{4} \right)^{n/2} \quad (2.10)$$

Si queremos obtener redes trivalentes,  $d=3$ , (recordar el primer criterio enumerado en el aptdo. 1.4.2 tenemos que escoger forzosamente  $b_1=1$  y  $b_2=2$ , con lo cual  $N = n 2^{n/2}$  y  $k = \frac{3n}{2} - 1 \approx 3 \log_2 N - 1$ , lo que supone un diámetro ligeramente mayor que el de los "Cube Connected Cicles" en los que, como sabemos,  $k \approx \frac{5}{2} \log_2 N$ .

El algoritmo de encaminamiento para este tipo de redes es totalmente análogo al de las "lentes" presentado en [FS2], por lo que remitimos a dicho trabajo al lector interesado.

### 2.3.4 Redes de camino compartido

Como hemos indicado antes, en estas redes las conexiones entre procesadores se realizan a través de un medio de comunicación que comparten: los buses generales, y por los cuales compiten en el caso de que se produzcan conflictos.

Para modelar estos sistemas usaremos los grafos estudiados en el subapartado 2.2.2b. Así, definimos primero dos conjuntos de vértices diferenciados:

$$W_{n,b}^0 = \{0-u.w \mid u.w \in W_{n,b}\} \quad (2.11a)$$

$$\text{y } W_{n,b}^1 = \{1-u.w \mid u.w \in W_{n,b}\} \quad (2.11b)$$

Las funciones de adyacencia usadas son análogas a las definidas en (2.4), es decir  $f_{(\alpha,\beta)}$ , salvo que ahora

$$f_{(\alpha,\beta)}(x-u.w) = \bar{x} - f_{(\alpha,\beta)}(u.w) \quad (2.12)$$

donde  $\bar{x}$  denota el conjugado de  $x$ . Entonces, al referirnos a la construcción de la red, diremos que empleamos las funciones  $f_{(\alpha_i,\beta_i)}$  dando a entender que son del tipo

$$f_{(\alpha_i,\beta_i)}: W_{n,b}^0 \longrightarrow W_{n,b}^1 \quad (2.13a)$$

y determinan las demás funciones  $f_{(\alpha_i,\beta_i)}^{-1}$  de la forma:

$$f_{(\alpha_i,\beta_i)}^{-1}: W_{n,b}^1 \longrightarrow W_{n,b}^0 \quad (2.13b)$$

Supondremos que el conjunto  $W_{n,b}^0 [W_{n,b}^1]$  modela el conjunto de procesadores [buses].

Las "lentes completadas"  $|FS2|$  son redes de este tipo. Las funciones empleadas en ellas son:

$$f_{(0,0)}, \quad f_{(-1,0)} \quad \text{y} \quad f_{(-1,-\frac{1}{2})} \quad (2.14)$$

que, como hemos dicho, aplican sobre la dirección de cada procesador para darnos las direcciones de los buses a los que está conectado.

A su vez, estos buses están conectados a ciertos procesadores cuyas direcciones resultan de aplicar a las direcciones de los buses las funciones inversas a las anteriores, es decir:

$$f_{(0,0)}^{-1} = f_{(0,0)}, \quad f_{(-1,0)}^{-1} = f_{(1,0)} \quad \text{y} \quad f_{(-1,-\frac{1}{2})}^{-1} = f_{(1,\frac{1}{2})} \quad (2.15)$$

Así, la composición de las funciones  $f_{(\alpha_i, \beta_i)}$  y sus inversas nos permite conocer las condiciones de adyacencia entre procesadores. Ver tabla 2.3.3. (Recordar que, si  $\beta \neq 0$ ,  $f_{(\alpha, \beta)} \triangleq (\alpha, \beta)$  denota, en realidad, un conjunto de  $b-1$  funciones).

$f_{(i, i)}^{-1}$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1, \frac{1}{2})$
$(0,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$	$(1, \frac{1}{2})$
$(-1,0)$	$(-1,0)$	$(0,0)$	$(0, -\frac{1}{2})$
$(-1, -\frac{1}{2})$	$(-1, -\frac{1}{2})$	$(0, -\frac{1}{2})$	$(0,0)$ ó $(0, -\frac{1}{2})$

Tabla 2.3.3

Como se puede comprobar, las condiciones que resultan son idénticas a las "lentes multietapa" :  $f_{(1,0)}$ ,  $f_{(1,\frac{1}{2})}$ ,  $f_{(-1,0)}$  y  $f_{(-1,-\frac{1}{2})}$ , salvo en que aparece otra función:  $f_{(0,-\frac{1}{2})}$ . No obstante, esta condición de adyacencia es poco útil en el algoritmo de encaminamiento presentado en [FS2] y, de hecho, el diámetro de la red (referido a distancia entre procesadores) resulta ser el mismo que en las "lentes multietapa":  $\lfloor 3n/2 \rfloor$ .



Probemos entonces con funciones  $f_{(\alpha_1,0)}$ ,  $f_{(\alpha_2,0)}$  y  $f_{(\alpha_3,\beta)}$  donde las  $\alpha_i$  y  $\beta$  son variables a determinar para optimizar el diámetro obtenido sin menoscabo de que sea posible hallar un algoritmo simple de encaminamiento.

La tabla 2.3.4 muestra cual es el resultado de la composición de funciones en este caso general.

	$(-\alpha_1,0)$	$(-\alpha_2,0)$	$(-\alpha_3,\beta-\alpha_3)$
$(\alpha_1,0)$	$(0,0)$	$(\alpha_1-\alpha_2,0)$	$(\alpha_1-\alpha_3,\beta-\alpha_3+\alpha_1)$
$(\alpha_2,0)$	$(\alpha_2-\alpha_1,0)$	$(0,0)$	$(\alpha_2-\alpha_3,\beta-\alpha_3+\alpha_2)$
$(\alpha_3,\beta)$	$(\alpha_3-\alpha_1,\beta)$	$(\alpha_3-\alpha_2,\beta)$	$(0,0)$ ó $(0,\beta)$

Tabla 2.3.4

Para que el sistema funcione con un algoritmo simple de encaminamiento, tal como el presentado en [FS2], es conveniente disponer de las adyacencias  $f_{(1,0)}$ ,  $f_{(1,\frac{1}{2})}$ ,  $f_{(-1,0)}$  y  $f_{(-1,-\frac{1}{2})}$ .

Esto restringe considerablemente los valores que pueden darse a las variables consideradas. Una buena solución resulta si tomamos:  $\alpha_1$  cualquiera,  $\alpha_2 = \alpha_1 - 1$ ,  $\alpha_3 = \alpha_1 + 1$  y  $\beta = \frac{1}{2}$ , con lo cual las funciones que imponen las condiciones de adyacencia entre procesadores resultan ser las cuatro anteriores más  $f_{(2,\frac{1}{2})}$  y  $f_{(-2,-\frac{1}{2})}$ , mucho más útiles que en las "lentes completadas" pues permiten que el punto avance con pasos de longitud 2.

Obtenemos así una configuración con todas las ventajas de dichas "lentes" y con diámetro  $k = n + \lceil \frac{n}{4} \rceil \approx \frac{5n}{4}$  (un máximo de  $\lceil \frac{n}{4} \rceil$  pasos para situar el punto en el lugar correcto y un máximo de  $n$  pasos para cambiar todos los dígitos).

Análogamente, el encaminamiento en estas redes puede im-

plementarse a partir del algoritmo presentado en [FS2] con ligeras variaciones (las debidas a la mayor "movilidad" del punto).

## 2.4 CONCLUSIONES

La nueva metodología de diseño para redes de interconexión, presentada en las secciones 2.1 y 2.2, ha sido usada en la sección 2.3 para obtener algunas topologías interesantes sobre la base del direccionamiento propuesto en [FS2].

La generalidad de este método (recordemos que la elección de los conjuntos  $V$  y  $F$  -o  $\vec{F}$ - no tiene otra restricción que la de obtener redes que cumplan los requisitos deseados) permite su aplicación y desarrollo en múltiples situaciones distintas, tales como las existentes en los ejemplos dados de trabajos anteriores, las planteadas en este capítulo y la que nos sirve como punto de partida para el desarrollo del siguiente (ver sección 3.1).

Finalmente enumeramos, a modo de resumen, las principales ventajas de dicho método:

1. Permite obtener fácilmente estructuras recursivas.
2. La forma en que se construye la red permite, en general, hallar, o al menos acotar  $|LS1|$ , su diámetro.
3. Se dispone de una buena base -condiciones de adyacencia- para construir el algoritmo de encaminamiento.
4. Algunas características normalmente exigidas, como regularidad, grado pequeño y tráfico uniforme quedan automáticamente satisfechas con una adecuada, y no demasiado restrictiva, elección de  $V$  y  $F$  (o  $\vec{F}$ ).

## CAPÍTULO III

REDES DE PASOS CONMUTATIVOS: CONGRUENCIAS EN  $\mathbb{Z}^N$



En general, los vértices situados a distancia  $l$  de  $x$  deben ser de la forma:

$$(f_1^{m_1} \circ f_2^{m_2} \circ \dots \circ f_d^{m_d})(x) \quad \text{con} \quad \sum_{i=1}^d m_i = l \quad (3.1)$$

Si todos ellos son distintos, tenemos en total

$$\frac{(l+d-1)!}{l!(d-1)!} = \binom{l+d-1}{d-1} \quad (3.2)$$

nudos, es decir, el número de formas de expresar  $l$  mediante  $d$  sumandos diferenciados.

Esto implica que el número máximo de vértices en una red con  $d$  pasos conmutativos y diámetro  $k$  es:

$$\sum_{l=0}^k \binom{l+d-1}{d-1} = \binom{d+k}{d} \quad (3.3)$$

Por ejemplo, si  $d=2$ , (3.3) nos da

$$\sum_{l=0}^k (l+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad (3.4)$$

Como veremos en la sección 3.4, dichos máximos son inalcanzables para  $k > 1$ . Así pues, (3.3) debe verse sólo como una cota superior.

Denotemos por  $X(x) = X(f_1, \dots, f_d, x) \subset V$  el conjunto de vértices "alcanzables" con cualquier número de pasos desde  $x$ , o sea:

$$X(x) = \{y \in V \mid (f_1^{m_1} \circ f_2^{m_2} \circ \dots \circ f_d^{m_d})(x) = y, m_i \in \mathbb{Z}^+\} \quad (3.5)$$

Naturalmente, debemos escoger las funciones  $f_i$  de manera que  $X(x) = V$ , ya que esto es condición necesaria para que  $D = (V, A)$

sea fuertemente conexo. Además, si todas las  $f_i$ 's son biyectivas, dicha condición también es suficiente.

Antes de demostrar este punto, introduciremos una notación más cómoda: ya que el orden en que se aplican las funciones es irrelevante, la función que resulta de componer  $m_1$  veces  $f_1$ ,  $m_2$  veces  $f_2$ , etc. la denotaremos por  $(m_1, m_2, \dots, m_d)$ . Así,

$$(m_1, m_2, \dots, m_d)(x) = (f_1^{m_1} \circ f_2^{m_2} \circ \dots \circ f_d^{m_d})(x) \quad (3.6)$$

Notemos en primer lugar que, si las  $f_i$ 's son biyectivas, aseguramos que el digrafo obtenido es  $d$ -regular pues cada vértice  $x$  es adyacente hacia los vértices  $f_1(x), \dots, f_d(x)$  y desde los vértices  $f_1^{-1}(x), \dots, f_d^{-1}(x)$ . Además, en este caso, para cada  $f_i$  y cada  $x$ , existe un entero positivo  $t_i$  tal que  $f_i^{t_i}(x) = x$  (de lo contrario es fácil ver que  $f_i$  no sería biyectiva). Veamos que estos  $t_i$ 's son los mismos para todo vértice  $y \in X(x)$ . En efecto, por ser  $y \in X(x)$ , se cumple:

$$y = (m_1, m_2, \dots, m_d)(x), \quad m_i \in \mathbb{Z}^+ \quad (3.7)$$

de donde

$$\begin{aligned} f_i^{t_i}(y) &= (0, \dots, t_i, \dots, 0)(y) = (0, \dots, t_i, \dots, 0) \left\{ (m_1, \dots, m_d)(x) \right\} = \\ &= (m_1, \dots, m_d) \left\{ (0, \dots, t_i, \dots, 0)(x) \right\} = (m_1, \dots, m_d)(x) = y \quad (3.8) \end{aligned}$$

Supongamos ahora que  $X(x) = V$ . Como hemos dicho, demostraremos que esto implica que  $D = (V, A)$  es fuertemente conexo. Para ello basta ver que desde cualquier vértice  $y \in X(x)$  podemos alcanzar  $x$  (pues desde  $x$  es posible alcanzar cualquier vértice de  $V$ ), pero

$$(m_1, \dots, m_d)(x) = y \quad \text{con} \quad 0 \leq m_i < t_i \quad (3.9)$$

por tanto

$$\begin{aligned} & (t_1 - m_1, \dots, t_d - m_d) \left[ (m_1, \dots, m_d) (x) \right] = \\ & (t_1, \dots, t_d) (x) = x = (t_1 - m_1, \dots, t_d - m_d) (y) \text{ con } 0 < t_i - m_i \leq t_i \quad (3.10) \end{aligned}$$

Luego existe un camino desde  $y$  hacia  $x$ .

En lo sucesivo, al referirnos a *redes de pasos conmutativos* se supondrá que cumplen las condiciones anteriores, es decir, las funciones  $f_i$  conmutan, son biyectivas y el digrafo obtenido a partir de ellas es fuertemente conexo.

Es fácil ver que, en dichos grafos  $d$ -diregulares, todos los vértices son equivalentes. Esto es, para cualquier par de vértices  $x, y \in V$ , existe un automorfismo  $\psi: V \rightarrow V$  tal que  $\psi(x) = y$  y conserva la adyacencia, o sea  $[u, v] \in A \iff [\psi(u), \psi(v)] \in A$ . En efecto, si  $y = (m_1, \dots, m_d) (x)$  basta tomar  $\psi = (m_1, \dots, m_d)$ .

Todo lo anterior nos permite pasar a una *representación común* de todos los grafos de pasos conmutativos basada en los siguientes puntos:

1. Cada vértice  $(m_1, \dots, m_d) (x)$  puede representarse por un vector de componentes enteras  $\vec{a} = (m_1, \dots, m_d)$ . En particular  $x = \vec{0} = (0, \dots, 0)$ . Así  $V \subset \mathbb{Z}^n$ .
2. La aplicación de cada función de adyacencia  $f_i$  supone ahora sumar el vector coordenado unitario  $\vec{e}_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ . Es decir  $f_i(\vec{a}) = \vec{a} + \vec{e}_i$ .
3. Los puntos anteriores obligan a definir previamente una relación de equivalencia entre los vectores de  $\mathbb{Z}^n$ . Como veremos en la sección 3.3, ello es posible mediante la generalización a  $\mathbb{Z}^n$  del concepto de congruencia.