UNIVERSITAT DE BARCELONA

Análisis de las contribuciones marginales en contextos cooperativos

F. Javier Martínez de Albéniz

Análisis de las contribuciones marginales en contextos cooperativos

Francisco Javier Martínez de Albéniz Salas

Departament de Matemàtica Econòmica, Financera i Actuarial
Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials
Universitat de Barcelona

Programa de Doctorado
Métodos matemáticos para el análisis económico–financiero
Bienio 1989–91

Tesis para optar al Grado de Doctor por la Universitat de Barcelona

Director: Dr. Carles Rafels Pallarola

Índice General

Notaciones

La mayor parte de las notaciones que se usan en esta tesis se definen en el texto cuando se usan por primera vez. Sin embargo, a continuación señalaremos algunas notaciones básicas, que se usan con frecuencia en la exposición.

$\mathbb{N}$	el conjunto de los números naturales, enteros no-negativos
$\mathbb{Z}$	el conjunto de los números enteros
$\mathbb{R}$	el conjunto de los números reales
$[i,j]_{\mathbb{N}}$	para naturales $i \leq j$, el conjunto $\{i, i+1, \ldots, j\}$
$2^X, \mathcal{P}(X)$	indica el conjunto de las partes del conjunto finito X
$\#X, \|X\|$	utilizados para indicar la cardinalidad del conjunto finito X
$R \subseteq T$	R es un subconjunto de T
$R \subset T$	R es un subconjunto de T y R no es igual a T
$:=$	iguales por definición
$\binom{n}{k}$	$\frac{n!}{k!\,(n-k)!}$, el coeficiente binomial: n sobre k
$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_m}$	$\frac{n!}{a_1!\,a_2! \cdots a_m!}$, el coeficiente multinomial $(a_1 + a_2 + \cdots + a_m = n)$
$\Pi(N), \Pi_N, \Pi_n$	el conjunto de las permutaciones u ordenaciones del conjunto N
δ_{ij}	delta de Kronecker, 1 si $i = j$, y 0 en otro caso
$\mathbb{R}^N$	el conjunto de vectores cuyas coordenadas se indexan por N
$\mathbb{R}^N_+$	el conjunto de vectores de $\mathbb{R}^N$ de coordenadas positivas o nulas
$\mathbf{x}$	un vector de $\mathbb{R}^N$
$\mathbf{e}^i$	el i-ésimo vector de la base canónica de $\mathbb{R}^N$, i.e. $\mathbf{e}^i_j = \delta_{ij}$
$\mathbf{e}^S$	el vector de incidencia a $S \subseteq N$ en $\mathbb{R}^N$: 1 si $i \in S$ y 0 en otro caso
$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$	producto interior de dos vectores $\sum_{i \in N} x_i y_i$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N)$
$N \setminus S$	complementario de S en N : los elementos de N que no son de S
$\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$	$x_i \leq y_i$ para cada $i \in N$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N)$
$\mathbf{x} < \mathbf{y}$	$x_i \leq y_i$ para cada $i \in N$ y $x_i < y_i$ para algún $i \in N$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N)$
$\mathbf{x} \geq \mathbf{y}$	$x_i \geq y_i$ para cada $i \in N$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N)$
$\mathbf{x} > \mathbf{y}$	$x_i \geq y_i$ para cada $i \in N$ y $x_i > y_i$ para algún $i \in N$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N)$
$\mathbf{x} \ll \mathbf{y}$	$x_i < y_i$ para cada $i \in N$ $(\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^N)$
$\square$	indica el final de una demostración

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo vamos a señalar algunas cuestiones generales sobre la teoría de juegos y más concretamente los juegos cooperativos, intentando situar el tema del cual trata la presente tesis. Además, indicaremos el significado de las contribuciones marginales desde una perspectiva no demasiado técnica, señalando el concepto de solución más popular en los juegos cooperativos, el valor de Shapley, que las utiliza de forma extensiva.

Por otra parte, la génesis de la presente tesis se hará presente, así como una explicación detallada de los temas que la componen, con una atención especial a los temas actuariales (en un sentido amplio), ya que éstos fueron, en primera instancia, los que originaron este trabajo.

Finalizaremos el capítulo exponiendo los principales resultados a los cuales hemos llegado, así como aquellas cuestiones que quedan abiertas y merecerán más atención en el futuro.

1.1 *The name of the game*

¿De qué trata la Teoría de Juegos?

A pesar de que el nombre de Teoría de Juegos sugiere un entorno más lúdico, lo cual provoca numerosos errores en los buscadores de Internet o en los catálogos de las bibliotecas, ésta se centra en los modelos matemáticos que analizan los problemas de decisión en los que hay conflicto y/o cooperación entre los diversos decisores, que suponemos racionales. Por ello, algunos autores sugieren como sinónimo el nombre de Teoría de Decisión Interpersonal o Multipersonal. Proporciona técnicas matemáticas generales para analizar situaciones en las cuales dos o más individuos toman decisiones que afectan el bienestar o la riqueza tanto del decisor como de los otros.

El nombre procede del artículo *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele* de John von Neumann (1928), si bien la teoría de juegos tal como la conocemos se fundamenta en el libro *Theory of Games and Economic Behavior* por John von Neumann y Oskar Morgenstern (1944). Se puede afirmar que ha sido el libro esencial para todo el desarrollo de la teoría económica más reciente, aunque la teoría de juegos tiene un alcance muy general, con aplicaciones a la economía, otras ciencias sociales,y también las ciencias naturales, como por ejemplo en algunos modelos biológicos de conflicto.

El campo de la teoría de juegos se puede dividir, a grandes rasgos, en dos partes, teoría de juegos cooperativos y teoría de juegos no cooperativos, donde la diferencia procede del supuesto de si los participantes pueden hacer acuerdos vinculantes o no. La teoría de juegos no cooperativos suele analizar qué decisiones tomarán los agentes si no se pueden obligar a acuerdos, y por ello la noción de equilibrio es la relevante en ese contexto. Por otra parte la teoría de juegos cooperativos da por supuesto que antes de que se tomen decisiones, los jugadores pueden obligarse sobre ellas, lo que lleva a focalizar la atención sobre ¿qué coaliciones se formarán?, ¿cómo se repartirá el resultado de la cooperación?, etc. y por tanto los conceptos fundamentales se denominan soluciones.

Juegos cooperativos

La teoría de juegos cooperativos trata de las situaciones en las cuales los agentes (jugadores) coordinan sus acciones, de forma que esta coordinación redunda en beneficios conjuntos, que frecuentemente exceden a los beneficios individuales. Como ya hemos comentado, la cuestión principal consiste en dividir estos beneficios conjuntos.

En algunas ocasiones estos beneficios conjuntos se pueden transferir libremente entre los participantes, mientras que en otros casos no es así. Esto suele suceder si hay una medida de la utilidad que es intercambiable entre los jugadores, tal como el dinero o alguna otra medida semejante. Por ello, una división interna de los juegos cooperativos se encuentra entre los juegos cooperativos de utilidad transferible o juegos T.U. y los juegos cooperativos de utilidad no transferible o juegos N.T.U. En un juego T.U. a cada grupo de jugadores (una coalición) se le puede asignar un único número real, que representa el pago máximo que puede alcanzar la coalición si sus participantes se coordinan y cooperan. No hay restricciones sobre cómo repartir el producto de la cooperación entre los jugadores. En cambio, en un juego N.T.U., y de forma más general, asocia a cada coalición un conjunto de posibles divisiones del beneficio conjunto entre los componentes. Estas divisiones no pueden ser transferidas libremente entre los jugadores.

Aquí nos restringiremos a juegos cooperativos con utilidad transferible. Y además supondremos que el conjunto de los agentes o jugadores es finito.

No hemos señalado que los juegos cooperativos se pueden analizar desde el punto de vista de las ganancias o desde el punto de vista de los costes. La diferencia fundamental consiste en cómo se visualizan los valores de las coaliciones por los participantes. Si prefieren cantidades mayores a menores, se trata de un juego de ganancias, lo que será la situación habitual, mientras que en el caso contrario será un juego de costes.

Habitualmente se supone que todos los agentes cooperarán, es decir, que la coalición total se va a formar, y una posible distribución de estos beneficios conjuntos se llama un vector de pagos. Otras posibilidades, como lo que se denomina *coalition formation*, tampoco serán consideradas aquí. Las definiciones básicas, así como la nomenclatura adecuada a los juegos cooperativos, se proporcionarán en la sección 2.1, así como también una introducción a algunos conceptos de solución, tal como el *core*.

Se han estudiado diversas extensiones de la teoría de juegos cooperativos de utilidad transferible, poniendo limitaciones a la cooperación, lo que será analizado brevemente en el capítulo 4, o bien considerando un número infinito de jugadores. Sin embargo estas extensiones no formarán parte de nuestro estudio. Además algunos clases de juegos cooperativos tienen propiedades especiales, y a veces proceden de un modelo económico o político, lo que será remarcado cuando aparezca.

Conceptos de solución en los juegos cooperativos

En la discusión del problema del reparto del producto de la cooperación entre los jugadores, la búsqueda de soluciones a este reparto, tanto desde un punto de vista normativo como positivo, ha sido una constante desde el inicio de la teoría de juegos, con von Neumann y Morgenstern (1944), quienes ya señalan lo que en el lenguaje actual se denomina conjuntos estables como *Solutions and standards of behavior*.

Las soluciones pueden ser conjuntistas (como los conjuntos estables o el *core*) o bien puntuales. Este último caso es el que suele tener más adeptos, puesto que, una vez se ha formalizado la cooperación entre los jugadores, se espera que la teoría nos aporte una "solución" a los distintos problemas de reparto de ganancias o de costes, recomendando una distribución que sea más o menos equitativa. Algunas de estas soluciones son el valor de Shapley, el nucleolo, o el valor-tau, cuya recomendación se fundamenta en diversos presupuestos teóricos. Además de sus propiedades, conviene analizar la variabilidad de la solución respecto a la monotonía de los juegos, en lo que se podría llamar un análisis de sensibilidad. Young (1985a, 1985b, 1992 y 1994), en contextos diferentes, analiza esta cuestión.

De estas "soluciones", algunas no están definidas para todos los juegos, o son vacías en algún caso, lo que las convierte en insatisfactorias. Otras veces contienen más de un punto, y en este caso la elección de uno de ellos puede indicar que después de la selección viene un proceso que no se puede decidir simplemente con la forma característica, y requiere otros instrumentos. En cualquier caso, no hay una única elección posible, y se trata, por ello, de una recomendación basada en la asunción de principios o axiomas que sustenten la solución. Este análisis de los axiomas que justifican una solución ya proviene desde el principio de la definición del valor (de Shapley). El *core* de un juego cooperativo es una solución conjuntista

que tiene como característica que distingue y agrupa las distribuciones para las cuales ninguna coalición o grupo de agentes tendría incentivos para romper la cooperación. Por ello el *core* tiene una vocación positivista, porque tiende a anticipar el comportamiento de los agentes.

Por el contrario, las soluciones puntuales suelen analizarse desde el punto de vista normativo, indicando qué propiedades cumplen y cuáles lo individualizan, en lo que se llama la axiomatización de la solución.

Formalmente, una **solución** puntual Ψ de un juego cooperativo de utilidad transferible (N, v), no es más que un procedimiento que asigna a cada juego cooperativo (N, v) de una cierta clase $\mathcal{A}$ de juegos un vector

$$\Psi(N, v) = (\Psi_1, \Psi_2, \ldots, \Psi_n) \in \mathbb{R}^n,$$

donde Ψ_i indica el pago al jugador i de forma que el beneficio o coste total sea totlamente distribuido o imputado a los jugadores. Exigiremos, pues, que $\sum_{i \in N} \Psi_i = v(N)$

Discutiremos con algo más de detalle el valor de Shapley (Shapley, 1953), puesto que aparecerá en diversas ocasiones a lo largo de la presente memoria.

El valor de Shapley

El **valor** (de Shapley), introducido por Lloyd Shapley en 1953, es una solución puntual con propiedades muy atractivas, las cuales se pueden encontrar en cualquier manual de juegos cooperativos, como en Rafels (1999), Owen(1995) o Driessen(1988). Se trata de un concepto fundamental en la teoría de juegos y sus aplicaciones, y muchas veces es el único concepto que aparece en los manuales de Investigación Operativa, junto con el *core*, en lo que se refiere a la teoría de juegos cooperativos. El valor de un juego para un jugador se puede interpretar como una evaluación *a priori* de las ganancias esperadas, en una versión probabilística de la formación de la coalición total, si bien otras interpretaciones son también posibles. Tanto el valor de Shapley como sus generalizaciones siguen siendo objeto de investigaciones, tanto desde el punto de vista teórico como aplicado.

Refleja la idea de tener en cuenta las diversas contribuciones marginales de los jugadores, que corresponden al incremento del beneficio que se deriva de la incorporación de cada jugador a las distintas coaliciones. La literatura generada por el estudio del valor de Shapley es muy extensa. Como señala Hart en 1990:

> The main solution concept here, from which the whole theory has developed, is the *Shapley value* (Shapley, 1953). It may be surprising that after so many years there are still new and interesting things to say about the Shapley value, even in finite TU games!

Además del concepto fundamental, al cual se pueden complementar los artículos recogidos en el libro editado por Alvin Roth (1988): *The Shapley value. Essays in honour of Lloyd S. Shapley*, podemos destacar las extensiones a los juegos con cooperación restringida (Myerson, 1977), con un continuo de jugadores y su aplicación al estudio del equilibrio competitivo de una economía (Aumann, 1964), los estudios en los que se relaja la simetría en el tratamiento de los jugadores (valor de Shapley ponderado) como en Shapley(1953b) o Kalai y Samet (1987), la extensión multilineal de Owen (1972), por no hablar de las numerosas aplicaciones de distribución de costes.

En lo que respecta a las contribuciones marginales, cabe señalar que además de los axiomas tradicionales que determinan el valor de Shapley: *eficiencia* (que significa que los valores suman el valor de la coalición total), *simetría o tratamiento igual* (que significa que jugadores iguales reciben exactamente lo mismo), *aditividad* (el valor de la suma de dos juegos es igual a la suma de los valores en cada uno de ellos) y *jugador falso* (si un jugador solo aporta su valor individual, solo recibe su valor), Young (1985) introduce el axioma de *contribuciones marginales*, que señala que el valor de un jugador en cualquier juego solo depende de sus contribuciones marginales. Young demuestra que eficiencia, simetría y contribuciones marginales determina unívocamente el valor de Shapley.

También la introducción del potencial para los juegos cooperativos (Hart y Mas-Colell, 1989) ha permitido encontrar otra derivación teórica muy interesante al valor de Shapley.

1.2 Objetivos de esta tesis

El objetivo de la presente memoria es el estudio de situaciones en las cuales un grupo de individuos o empresas (agentes con capacidad de decisión) con intereses en principio conflictivos se enfrenta a un proceso conjunto de toma de decisiones.

Inicialmente el objetivo principal era el estudio de modelos teóricos de juegos cooperativos, tanto desde un punto de vista de resultados generales como para hallar aplicaciones de la teoría de juegos cooperativos al área actuarial, especialmente al cálculo de primas de seguros y reaseguros. En este campo, se trataba de encontrar maneras más eficientes de compartir la cooperación implícita presente en los seguros. Algunos ejemplos de esta preocupación se pueden encontrar en el modelo del reparto del coste de la solvencia (sección 5.4), en el ejemplo 5.1, o en el estudio que aparece en el artículo de Alegre y Claramunt (1995). En el texto se proporciona una visión panorámica de algunas aplicaciones de los juegos cooperativos de utilidad transferible en el capítulo 5.

El modelo de juego cooperativo que se presenta: *Solvency cost share games* , trata de aplicar el modelo teórico de los juegos homogéneos hacia una aplicación, si bien sencilla, pero que capture lo esencial del problema práctico, y que puede derivar hacia modelos más complejos.

Por otra parte, otros modelos tienen en cuenta que en determinadas situaciones, como el reaseguro, los agentes tienen perfiles de utilidad distintos, puesto que dependerá de su capital y reservas, así como de la suma en riesgo. Esto lleva hacia modelos de cooperación, pero en los cuales la utilidad no es transferible. Suijs (1998) tiene un estudio muy completo de aplicación de los juegos cooperativos al campo actuarial, en los que se analiza un modelo de intercambio de pólizas, que depende de las utilidades de los agentes, pero con unas fases en las cuales las coaliciones pueden decidir entre diversos tipos de acciones.

Posteriormente, el objeto de la tesis fue derivando hacia un estudio más teórico del modelo de los juegos cooperativos con utilidad transferible, especialmente hacia el estudio de las contribuciones marginales en los juegos cooperativos de utilidad transferible. Y dentro de este contexto, el conjunto de Weber y su comportamiento se convirtió en el hilo conductor de la presente tesis. Por ello el título, puesto que esta memoria trata especialmente de las contribuciones marginales, para analizar el conjunto de Weber, que es el menor conjunto convexo que las contiene.

Los problemas que intenta analizar la presente memoria se pueden describir de la siguiente manera:

estudiar la relación entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones, con el propósito de analizar si el conjunto de Weber puede recoger los principales conceptos de solución en los juegos cooperativos,

en el estudio de esta relación aparece un juego no cooperativo bipersonal de suma nula, cuya utilización en el contexto cooperativo es novedosa, y que se puede conectar con la familia de nucleolos matriciales,

estudiar la relación entre los conjuntos de Weber de juegos relacionados por relaciones de orden, y cuyo estudio permite conectar teoremas procedentes de campos muy diferentes,

analizar la limitación de la información disponible en el cálculo de los vectores de contribuciones marginales, mediante el 'olvido' de parte de los valores de las coaliciones, para encontrar cómo se relacionan éstos entre sí,

definir juego cooperativo con grupos homogéneos, para estudiar los modelos con gran número de jugadores, estudiar las condiciones para que un juego con grupos homogéneos sea equilibrado, así como condiciones para hallar que sea totalmente equilibrado, con extensión para funciones definidas sobre el primer cuadrante,

estudiar el conjunto de Weber y el valor de Shapley para juegos con grupos homogéneos,

analizar la convexidad de juegos con grupos homogéneos.

1.3 Esquema de la presente tesis

En primer lugar se presenta este primer capítulo, de introducción sobre la teoría de juegos, y cuyo contenido refleja la descripción de los capítulos, las partes más relevantes y los problemas abiertos que quedan.

Posteriormente, y centrando el contenido en sí de la memoria, el núcleo del trabajo se compone de dos partes netamente diferenciadas:

- la Parte I: Vectores de Contribuciones Marginales para juegos de utilidad transferible, compuesto de tres capítulos, y
- la Parte II: Juegos Cooperativos con grupos homogéneos, compuesta de dos capítulos.

El trabajo termina con la bibliografía citada a lo largo de los capítulos.

A lo largo de todo el trabajo se ha procurado complementar los conceptos o resultados que se exponen con esquemas y ejemplos que permitan comprender de manera más adecuada aquellas ideas, procurando que la exposición sea lo más amena posible.

En el **capítulo 2** se trabaja con el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones. Para ello, en la primera sección se proporciona una breve introducción a la teoría de juegos cooperativos (con utilidad transferible), con la notación que se empleará en lo sucesivo. Más tarde se analiza el conjunto de Weber, con su definición y diversos ejemplos, entre los que cabe destacar el modelo de producción conjunta de un terrateniente y varios campesinos, donde se encuentra que el valor-tau pertenece al conjunto de Weber.

Más tarde se aborda el tema principal en este capítulo, las relaciones entre el conjunto de Weber y las imputaciones. Se analiza la condición que permite identificar los juegos para los cuales el conjunto de Weber está incluído en el conjunto de las imputaciones: la cero-monotonía. También se proporcionan otras condiciones para asegurar que ambos conjuntos coinciden, y por último alguna condición para la inclusión contraria.

Se continúa con un ejemplo en el cual se encuentra que la intersección entre el conjunto de Weber y el de las imputaciones es vacía, lo que responde negativamente a la cuestión planteada. Sin embargo, esto es así para un juego de cuatro jugadores, ya que se demuestra que para un número menor, siempre hay intersección no vacía.

La sección siguiente proporciona una caracterización de la intersección haciendo intervenir un juego bipersonal no cooperativo de suma nula, en el cual los equilibrios y el valor se pueden analizar. Se trata del resultado más importante de este capítulo. También se proporcionan cotas del valor del juego no cooperativo, y alguna caracterización correspondiente.

Por último el capítulo finaliza con el estudio del *selectope*.

En el **capítulo 3** se analiza la relación entre los conjuntos de Weber de juegos con la misma eficiencia y ordenados por la relación de orden usual.

Para ello, en primer lugar se proporcionan algunos resultados parciales antes de abordar el teorema de la intersección. Este teorema de la intersección permite demostrar que estos conjuntos de Weber se intersecan. Esto resulta ser de sumo interés, puesto que proporciona consecuencias insospechadas sobre temas aparentemente inconexos.

En la siguiente sección se detallan las consecuencias del teorema, con un esquema que indica las relaciones que se presentan. Estas van desde la demostración del resultado clásico de inclusión del *core* en el conjunto de Weber hasta el hecho de que todo juego convexo es un juego con *large core* o el teorema del *sandwich*. En el esquema está indicado dónde se encuentra el resultado original, si existía.

En el **capítulo 4** se analiza la relación entre los conjuntos de Weber de juegos en los cuales hemos limitado la información disponible.

Tras unos cuantos ejemplos se demuestran diversos teoremas que justifican que si el juego es suficientemente regular (cero-monótono), los conjuntos de Weber de los juegos de nivel forman una cadena.

En la siguiente sección, y bajo condiciones generales, se demuestra, mediante un argumento de inducción, que los conjuntos de Weber consecutivos presentan siempre intersección no vacía, lo que no ocurre forzosamente para conjuntos de Weber de niveles no consecutivos.

Además, y usando herramientas del capítulo anterior, se encuentra un resultado de intersección de conjuntos de Weber de nivel k entre juegos ordenados y con la misma eficiencia.

Una vez finalizada la Parte I, pasamos a la Parte II: juegos cooperativos con grupos homogéneos.

En el **capítulo 5** se define juego con grupos homogéneos, y se dan todos los instrumentos para encontrar los conceptos de los juegos cooperativos ordinarios trasladados a este contexto.

En primer lugar se analizan diversas situaciones que motivan la introducción de este instrumento. También se exponen con detalle unos ejemplos de índole actuarial, lo que justifica nuestro interés primero.

Posteriormente se introduce el concepto de juego cooperativo con grupos homogéneos, así como otra serie de conceptos relacionados: conjunto de imputaciones, *core*, algunas definiciones necesarias, etc. También se expone la relación con los juegos cooperativos ordinarios.

Como aplicaciones económicas inmediatas se analiza el modelo del *Airport cost game*, así como el mercado de los guantes, para introducir un modelo propio, el modelo actuarial de los *Solvency cost share games*.

El conjunto de las imputaciones y el *core* de los juegos con grupos homogéneos sirven para encontrar condiciones para que un juego sea equilibrado, así como otro juego cooperativo ordinario, el de los tipos, para ver la relación que hay entre los *cores* correspondientes, así como los juegos de unanimidad con grupos homogéneos.

En la siguiente sección se estudia la caracterización de funciones definidas sobre la malla entera, que restringidas proporcionen juegos equilibrados siempre. Se encuentran algunas condiciones necesarias, así como otras suficientes, con numerosos ejemplos. Se presenta un modelo que generaliza el de los juegos financieros, y del que puede asegurarse que es equilibrado.

Además esta misma caracterización se analiza para funciones definidas sobre el cuadrante positivo de $\mathbb{R}^n$, lo que permite encontrar algunas condiciones necesarias, así como otras suficientes. Se puede demostrar que algunos modelos con funciones usadas en la matemática económica, como las funciones Cobb-Douglas, C.E.S. o de Leontief, bajo ciertas condiciones, proporcionan juegos siempre equilibrados.

Se define y estudia el vector de contribuciones marginales y el conjunto de Weber para juegos con grupos homogéneos, con la introducción del concepto de multipermutación. Se descubren otras relaciones con los juegos cooperativos ordinarios, así como la inclusión del *core* en el conjunto de Weber.

El valor de Shapley para este tipo de juegos aparece asociado a las multipermutaciones. Se encuentra la fórmula que determina el valor de Shapley, si bien la axiomatización queda pendiente, ya que no es fácil trasladar los axiomas ordinarios a este tipo de juegos. Esta sección finaliza con el cálculo del valor de Shapley en los juegos del mercado de los guantes.

En el **capítulo 6** se analiza la convexidad para los juegos con grupos homogéneos, observándose que no coincide con la supermodularidad.

En la primera sección se proporciona un ejemplo para hacer evidente que la supermodularidad sobre el retículo es claramente insuficiente para las propiedades que esperamos tenga un juego convexo.

Por lo tanto se hace necesario definir un nuevo concepto que hemos denominado f-convexidad, del que se proporcionan diversas caracterizaciones, y que implica la supermodularidad. Al final se justifica esta definición como un concepto relacionado con el signo de las diferencias segundas. Se proporcionan algunos ejemplos de funciones y se observa que este concepto no está directamente relacionado con la convexidad de funciones de varias variables.

Por último, se define juego convexo con grupos homogéneos, que restringido a los juegos cooperativos ordinarios se traduce en la convexidad usual. Se proporcionan algunas caracterizaciones de esta clase de juegos, si bien no se cumple que la inclusión del *core* en el conjunto de Weber sea una caracterización de la clase. Si se considera el juego cooperativo ordinario de los tipos, éste proporciona el mismo conjunto de Weber, y el mismo *core*. Finaliza la memoria con un ejemplo del modelo del reparto del coste de la solvencia para mostrar la notable economía de cálculos.

1.4 Conclusiones y cuestiones abiertas

En esta sección intentaremos poner de manifiesto las aportaciones que presenta esta tesis, así como identificar aquellos aspectos que quedan abiertos a futuras investigaciones.

Capítulo 2

En primer lugar, se han encontrado condiciones generales que permiten identificar los juegos para los cuales el conjunto de Weber está incluído en el conjunto de las imputaciones, en los que ambos coinciden, así como alguna condición para la inclusión contraria. Estos resultados no estaban descritos con anterioridad.

También en el caso del modelo del terrateniente y los campesinos se muestra que el valor-tau se encuentra en el conjunto de Weber, lo que no suele resultar cierto, incluso para clases de juegos bastante generales

En segundo lugar, ha quedado claro que el conjunto de Weber no es, en general, un *catcher* de los principales conceptos de solución, excepto, claro está, del valor de Shapley, por su propia definición. También se dispone, utilizando herramientas procedentes del campo de los juegos no cooperativos de suma nula, de un criterio nuevo para estudiar la intersección entre el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber.

Este criterio, que corresponde a un equilibrio de Nash del juego no cooperativo, proporciona un punto del conjunto de Weber, y que se puede analizar a la luz de lo que Potters y Tijs (1992) señalan como un nucleolo general.

Por otra parte, el *selectope* tiene una clara relación con el conjunto de Weber, y alguna de las condiciones estaban especificadas de forma incorrecta. A la luz de lo estudiado anteriormente tampoco el *selectope* puede servir para atrapar las soluciones.

Cuestión: ¿En alguna clase de juegos, lo más amplia posible, se podrá asegurar que el conjunto de Weber es un *catcher* de determinadas soluciones, como, por ejemplo, el nucleolo?

Cuestión: ¿Qué propiedades tiene, desde el punto de vista de la axiomática, el punto del conjunto de Weber que aparece como nucleolo general de la matriz M^v?

Cuestión: En el estudio que se realiza, se puede estudiar la matriz traspuesta, y el valor correspondiente, que tiene otro significado. ¿Cómo se puede caracterizar el valor que aparece y analizar la axiomática que cumple?

Cuestión: Hay otros conjuntos relacionados con las contribuciones marginales, como los *Reduced Marginal Worth Vectors*, de Núñez y Rafels (1998). En la misma línea del capítulo, ¿qué relación tiene con el conjunto de las imputaciones?

Cuestión: Todo lo señalado en este capítulo, ¿en qué condiciones se puede extender hacia situaciones de cooperación parcial, en el sentido que analiza Bilbao (2000)?

Capítulo 3

En este capítulo se analiza la relación entre los conjuntos de Weber de juegos con la misma eficiencia y ordenados por la relación de orden usual. El teorema de la intersección permite demostrar que estos conjuntos de Weber se intersecan. Este teorema resulta ser de gran interés, puesto que además de su propio significado, ello nos proporciona consecuencias insospechadas sobre temas aparentemente inconexos, como los juegos exactos *no-gap*, los juegos totalmente esenciales o el teorema del *sandwich*. Algunas de estas consecuencias ni siquiera estaban referenciadas con anterioridad, y las demostraciones aquí presentadas difieren de las originales, puesto que utilizan el teorema de la intersección.

Cuestión: ¿Es posible determinar alguna condición para que si hallamos la intersección de los conjuntos de Weber de tres juegos de la misma eficiencia y ordenados ésta sea con seguridad no vacía? Obsérvese que si los juegos son equilibrados, los *cores* respectivos se contienen, y por eso en este caso es seguro que hay intersección.

Cuestión: ¿Hay otras consecuencias del teorema de la intersección que conecten otros teoremas para los juegos exactos y la cobertura equilibrada de un juego?

Cuestión: ¿Podemos asegurar que hay algún conjunto del conjunto de Weber que contiene al *core* latente o *Least Core*? Sobre este tema disponemos de respuestas parciales.

Capítulo 4

En este capítulo se analiza la relación entre los conjuntos de Weber de juegos en los cuales hemos limitado la información disponible. Se demuestran diversos teoremas para señalar que si el juego es suficientemente regular (cero-monótono), los conjuntos de Weber de los juegos de nivel forman una cadena. Además, y bajo condiciones más generales, los conjuntos de Weber consecutivos presentan siempre intersección no vacía, lo que no tiene que ocurrir necesariamente para conjuntos de Weber de niveles no consecutivos. Por otra parte, y usando herramientas del capítulo anterior, se encuentra algún otro resultado interesante.

Toda esta parte es absolutamente novedosa y su utilización se puede analizar desde el punto de vista de los criterios de reparto de costes utilizados en la ingeniería. También se puede indicar que los vectores de contribuciones marginales ajustados de Driessen (1988) para los juegos k-convexos se pueden ver como un conjunto de Weber de nivel para un juego definido adecuadamente.

Cuestión: Una vez se determinan los conjuntos de Weber de nivel k, ¿es posible señalar relaciones entre los valores de Shapley, que permitieran acotar, para determinados tipos de juegos, la información a procesar para calcularlos? Téngase en cuenta que desde el punto de vista de la información, la determinación del valor de las coaliciones se convierte con frecuencia en un problema insoluble en las aplicaciones prácticas, y no tanto el algoritmo de cálculo del valor de Shapley. Este puede ser el interés de obtener valores aproximados de Shapley.

Cuestión: En el contexto de un juego definido sobre un hipergrafo,¿se pueden utilizar las ideas de limitar la información para definir el conjunto de Weber de una manera más adecuada? Y de la misma manera el *selectope.*

Cuestión: ¿Cómo se puede influir en la determinación del valor de Shapley para juegos definidos sobre estructuras combinatorias?

Capítulo 5

En este capítulo se define juego con grupos homogéneos, y se dan las principales herramientas para trasladar la teoría de los juegos cooperativos. También se analiza la condición para que un juego con grupos homogéneos tenga el *core* no vacío, es decir las colecciones equilibradas en este contexto. Esto permite, a mi entender, reflexionar sobre el significado de colección equilibrada, y después de juego equilibrado.

Se proporcionan algunas condiciones para que un juego sea equilibrado, conectándolo con otros estudios anteriores. Asimismo, se estudian algunas condiciones para obtener juegos totalmente equilibrados, y se observa que algunos modelos de juegos cooperativos presentan esta propiedad. En concreto algunos modelos con funciones usadas en la matemática económica, como las funciones Cobb-Douglas, C.E.S. o de Leontief, bajo ciertas condiciones, proporcionan juegos siempre equilibrados. Parece que para otros modelos este estudio también es posible

Como se señala en la introducción al capítulo, algunas ideas ya se habían estudiado con anterioridad, si bien generalmente centradas en el contexto de los juegos simples. De todas maneras, las condiciones que se encuentran son completamente nuevas, y especialmente interesante es el modelo actuarial de los *Solvency cost share games* , así como las aplicaciones económicas que se señalan por todo el capítulo.

La interpretación y fórmulas del valor de Shapley son interesantes, así como la aplicación a los juegos del mercado de los guantes.

Cuestión: Además de estudiar estos casos de juegos totalmente equilibrados, ¿es posible encontrar comportamientos asintóticos y relaciones con juegos definidos para una infinidad de jugadores?

Cuestión: ¿Cómo se puede analizar unas estructuras similares a los juegos cooperativos, pero definidas sobre el cuadrante positivo de $\mathbb{R}^n$? ¿Y qué significado tendría en este caso, desde el punto de vista económico?

Cuestión: Una vez se determina el conjunto de Weber para juegos con grupos homogéneos, ¿es posible definir el *selectope* correspondiente?

Cuestión: El modelo de los *Multi-Choice games* de Hsiao y Raghavan (1990, 1993) es formalmente muy parecido a nuestro modelo. Por ello, ¿es posible trasladar nuestras definiciones en aquel contexto?

Cuestión: ¿Se puede encontrar una axiomatización del valor de Shapley para juegos con grupos homogéneos, si bien ya ha quedado claro que los axiomas clásicos no servirán?

Capítulo 6

En este capítulo se analiza la convexidad para los juegos con grupos homogéneos, observándose que no coincide con la supermodularidad (en el contexto del retículo que se considera). Ello obliga a definir un nuevo concepto que hemos denominado f-convexidad, al menos de forma provisional, y del que se proporcionan caracterizaciones variadas, para analizar su significado. Se observa cómo se puede estudiar si un juego con grupos homogéneos es *full convex* y se dan las principales herramientas para analizarlo. Los principales teoremas permiten encontrar de forma sencilla el sentido de la f-convexidad. Como se indica en el texto, este concepto ha debido ser definido sin que se haya encontrado otro concepto similar, más que el de complementariedad de costes e *increasing differences*, con un sentido algo distinto.

Además las funciones f-convexas permiten generar juegos convexos a partir de una distribución de recursos iniciales entre los agentes, pero no necesariamente en una variable. Hemos encontrado algunos modelos que son convexos, y un resultado que conviene remarcar es que en este caso se puede asociar un juego cooperativo ordinario, el juego de los tipos, que proporciona el mismo conjunto de Weber, y el mismo *core*, con notable economía de cálculos.

Cuestión: Dado que la f-convexidad se define sobre un retículo, ¿se podría extender el concepto a otro tipo de retículos?

Cuestión: Las funciones f-convexas se pueden trasladar al cuadrante positivo de $\mathbb{R}^n$, y convendría obtener los teoremas que se dan en el texto aplicados a este nuevo conjunto, así como encontrar las relaciones entre ambas definiciones.

Cuestión: Una vez se ha visto que la igualdad entre el *core* y el conjunto de Weber no caracteriza los juegos convexos con grupos homogéneos, ¿se puede encontrar alguna caracterización que vaya más a los fundamentos de esta clase de convexidad?

Cuestión: ¿Se puede hallar una relación general entre los valores de Shapley del juego con grupos homogéneos y el correspondiente del juego de los tipos? ¿O al menos en el caso de algún modelo concreto?

Parte I

VECTORES DE CONTRIBUCIONES MARGINALES PARA JUEGOS DE UTILIDAD TRANSFERIBLE

Capítulo 2

El conjunto de Weber y las imputaciones

El análisis de un conjunto de distribuciones "razonables" dentro de las cuales se debería encontrar la o las soluciones de un juego cooperativo es una cuestión que surge desde los comienzos de la teoría de juegos. Milnor (1952) ya expresa un deseo de aislar ciertas distribuciones, e introduce el concepto de "conjunto razonable" (*reasonable set*), en el sentido de que un reparto que no pertenezca al conjunto debería ser inmediatamente rechazado por inviable. Posteriormente, y modificando ligeramente las definiciones de Milnor, Gerard-Varet y Zamir (1987) definen un conjunto de "distribuciones aceptables" (*reasonable outcomes*), que además se puede justificar mediante su axiomatización. Este tipo de conjuntos se suelen denominar conceptos de pre-solución, por lo que se acaba de señalar: un reparto que no pertenezca al conjunto debería ser inmediatamente rechazado por inviable. Dado que los conjuntos anteriormente señalados suelen ser grandes, diversos autores han introducido otros conjuntos menores, subconjuntos de los anteriores y que conserven ciertas cualidades deseables. Entre éstos cabe indicar a Milnor (1952) con las soluciones "L" y "D", así como los trabajos de Tijs (1981), Rafels y Tijs (1997) y Kikuta (1997).

Un conjunto que se presenta como candidato a un análisis de este tipo es el conjunto de Weber (Weber, 1978). Para ello, en este capítulo veremos la definición del conjunto de Weber, que no es más que el menor conjunto que contiene a los vectores de contribuciones marginales, y la cuestión que nos interesará será estudiar bajo qué condiciones podemos asegurar que el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones tienen puntos en común, con la idea de analizar si algunas de las soluciones "clásicas" en la Teoría de Juegos se encuentran en el conjunto de Weber.

En primer lugar se encuentran algunas condiciones sobre la inclusión del conjunto de Weber en el conjunto de las imputaciones, así como para la igualdad de ambos.

Posteriormente, se proporciona un ejemplo de un juego de cuatro jugadores para el cual la intersección entre el conjunto de Weber y el de las imputaciones es vacía, lo que permite descartar el objetivo inicial. Por otra parte, se proporciona una caracterización en términos de un juego no cooperativo bipersonal de suma cero definido adecuadamente, dándose una interpretación de esta caracterización. Este juego es analizado, para encontrar cotas y significado al valor de este juego. Ciertos resultados parciales permiten identificar algunas amplias clases de juegos en las cuales se puede afirmar que esta intersección es no vacía. En el capítulo siguiente, y utilizando otras herramientas, se vuelve sobre este tema, con nuevas aportaciones.

También se estudia otro conjunto relacionado con el conjunto de Weber, el *selectope* .

2.1 Juegos cooperativos de utilidad transferible. Definiciones básicas

Consideremos la situación en la que hay tres abogados que están especializados en diferentes ramas del derecho. Cada uno está establecido por separado y mantiene su propio bufete, y soporta, por tanto, los costes (alquileres, material, personal) de mantenerlo, aunque todos los despachos están situados en el mismo complejo de oficinas. Sin embargo, es evidente que si deciden unir sus bufetes, manteniendo cada uno su especialización, se producirán ahorros substanciales en los costes, además de los efectos beneficiosos de la unión, las "sinergias". El primer abogado está dispuesto a liderar el proceso, y que cada uno de los otros pague solamente el coste añadido que provoca su adhesión. En otras palabras, permite que los otros se lleven todo el ahorro generado. Si denotamos por $1, 2$ y 3 a los tres abogados, los pagos a los que cada uno hará frente serán:

$$\begin{aligned} x_1 &= c(1), \\ x_2 &= c(12) - c(1), \\ x_3 &= c(123) - c(12). \end{aligned}$$

Cada uno paga la contribución marginal al coste que genera. Esta es una posible distribución del coste total, $c(123)$. Es evidente que otras distribuciones serán posibles, y solo dependerán de los pactos que hayan alcanzado entre ellos. Para cada ordenación de los agentes se obtendrá una distribución diferente del reparto del coste total, y tomando ponderaciones de estas distribuciones se obtendría un conjunto de pagos entre los agentes que corresponde a este criterio (utilizar las contribuciones marginales). Este conjunto será el objeto de estudio en el presente capítulo, el conjunto de Weber.

La herramienta adecuada para tratar esta clase de problemas y otros similares es la Teoría de juegos cooperativos, de la que aquí veremos algunos aspectos. Habitualmente, los juegos que se analizan suelen corresponder a juegos de ahorros, en los que se discute la distribución, no de costes, sino de ahorros o de ganancias.

Definiciones

Un **juego cooperativo** de utilidad transferible (T.U.) es un par (N, v), en el que $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ es un conjunto finito (**los jugadores**) y v es una función definida sobre los subconjuntos de N y que toma valores sobre los números reales, y que se denomina la **función característica**, con la condición que $v(\emptyset) = 0$. En el contexto de los juegos cooperativos cualquier subconjunto de N se llama una **coalición**, y el valor de una coalición S, $v(S)$, se puede interpretar como el valor neto que una coalición puede obtener independientemente de las acciones que tomen los demás jugadores. Formalmente podemos escribir:

Definición 2.1. *Un* ***juego cooperativo*** *es un par ordenado* (N, v) *donde* $N = \{1, \ldots, n\}$ *y* $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$, *con la condición* $v(\emptyset) = 0$.

Escribiremos $v(i_1\ i_2\ \ldots i_k)$ en lugar de $v(\{i_1, i_2, \ldots, i_k\})$ para indicar el valor de una coalición, si no ha lugar a confusión.

Dado un juego cooperativo (N, v), se define el **conjunto de las Preimputaciones** como aquellos vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $x_1 + \ldots + x_n = v(N)$. Supuesta una preimputación x el jugador i recibe el pago x_i. El conjunto de todas las preimputaciones de v se indica por $I^*(v)$:

$$I^*(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = x(N) = v(N)\}.$$

El **conjunto de las Imputaciones** es el conjunto de los vectores de $I^*(v)$ que son eficientes e individualmente racionales:

$$I(v) := \{x \in I^*(v) \mid x_i \geq v(i), \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

El conjunto de las imputaciones puede ser vacío, y un juego cooperativo se dice **esencial** si justamente $I(v) \neq \emptyset$, que es equivalente a que $\sum_{j \in N} v(j) \leq v(N)$.

El ***core*** de un juego cooperativo (N, v) , que denotaremos por $Core(v)$, es el conjunto de las preimputaciones que asignan a cada coalición un pago que al menos es igual al valor de la coalición. Formalmente podemos escribir,

$$Core(v) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x(S) \geq v(S), \text{ para toda } S \subseteq N \text{ y } x(N) = v(N)\}$$

donde se usa la notación $x(S)$ para representar $\sum_{i \in S} x_i$. Por convenio, una suma sobre el conjunto vacío es cero.

El *core* es sin duda el principal concepto de solución en la teoría de los juegos cooperativos. Sin embargo, no es en general una preimputación única, y frecuentemente puede ser vacío. Un juego con el *core* no vacío se denomina **juego equilibrado**.

Dado un juego cooperativo (N, v), el **subjuego** $\left(S, v_{|S}\right)$, cuyo conjunto de jugadores es $S \subseteq N$, no es más que la restricción a S del juego original, y se define de la siguiente manera:

$$v_{|S}(T) := v(T) \quad \text{para todo } T \subseteq S.$$

Un juego cooperativo es **totalmente equilibrado** si los subjuegos inducidos $\left(S, v_{|S}\right)$, son equilibrados para toda $S \subseteq N, \quad S \neq \emptyset$.

Utilizaremos la notación $\mathbf{e}^S \in \mathbb{R}^N$ para indicar el vector incidente a la coalición S, es decir, $e_i^S = 1$ si $i \in S$, y 0 en otro caso. Si $S = \{i\}$, denotaremos por $\mathbf{e}^i$ el vector correspondiente a $\mathbf{e}^{\{i\}}$.

Un juego (N, v) es **modular** si cumple que para cualquier coalicion $S \subseteq N$:

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(i).$$

Para un juego modular el conjunto de las imputaciones se reduce a un único punto, que también es el único punto del *core*:

$$I(v) = Core(v) = \{(v(1), v(2), \ldots, v(n))\}.$$

Otro juego relacionado con un juego cooperativo es el juego dual de uno dado. Vamos a definirlo formalmente:

Definición 2.2. *El **juego dual** de un juego cooperativo (N, v) es el juego (N, v^d), definido por*

$$v^d(S) := v(N) - v(N \setminus S), \quad \textit{para cualquier coalición } S \subseteq N.$$

Obsérvese de la definición que

- $v^d(N) = v(N)$
- $v^{d^d} = v$

Estructura

El conjunto de todos los juegos cooperativos TU sobre el mismo conjunto de jugadores N se denota por G^N. Es evidente que si se consideran las operaciones usuales de suma de juegos y producto por un escalar:

$$\begin{aligned}(v_1+v_2)(S) &:= v_1(S)+v_2(S), \quad \text{y}\\ (\lambda\cdot v_1)(S) &:= \lambda\cdot v_1(S),\end{aligned}$$

para cualquier $S \subseteq N, \lambda \in \mathbb{R}$ y v_1, $v_2 \in G^N$, el conjunto G^N posee la estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Cero-normalización

Una herramienta útil para el análisis de los juegos cooperativos consiste en la 0-normalización, es decir, en considerar el juego transformado del original mediante una reescalación de los valores individuales, de forma que éstos se conviertan en el origen de la escala. Matemáticamente se puede expresar mediante el juego v_0 asociado a cualquier juego v:

$$v_0(S) := v(S) - \sum_{i\in S} v(i), \qquad \text{para cualquier } S \subseteq N.$$

Corresponde a la diferencia del juego original con el juego modular generado por los valores de las coaliciones individuales.

Los juegos 0-normalizados cumplen que $v(i) = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$. El conjunto de todos los juegos 0-normalizados se escribe como

$$G_0^N = \{v \in G^N \mid v(i) = 0,\ i = 1, 2, ..., n\}\ .$$

Esta técnica permite simplificar ciertos cálculos, ya que la mayor parte de las soluciones que se consideran se trasladan de forma correcta por la 0-normalización. Esto significa, por ejemplo, que la relación entre $I(v)$ e $I(v_0)$ corresponde a una traslación de vector $(-v(1), -v(2), \ldots, -v(n))$. Se trata, desde luego, de una biyección. En particular, veremos que la intersección entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones se conserva por esta técnica.

2.2 El conjunto de Weber

A partir de la definición del vector de contribuciones marginales asociado a una permutación, en esta sección vamos a definir el conjunto de Weber, que no es más que el menor conjunto convexo que contiene todos los vectores mencionados.

Los vectores de contribuciones marginales

Consideremos un juego cooperativo, y una ordenación de los jugadores. Se puede pensar en que los jugadores van entrando ordenadamente en la coalición total y cada uno de ellos va recibiendo la parte del valor que van aportando al juntarse con sus predecesores. Como Shapley (1953) hace notar, su valor no es más que una mezcla probabilista (equiprobable) de estas contribuciones marginales.

Sea (N, v) un juego cooperativo. Una ordenación del conjunto de jugadores, N, se puede representar como una aplicación del conjunto $[1, n]_{\mathbb{N}} = \{1, 2, ..., n\}$ en el conjunto N:

$$\theta : [1, n]_{\mathbb{N}} \longrightarrow N.$$

Habitualmente se escribirá como:

$$\theta = (i_1, i_2, \ldots, i_n),$$

donde i_k representa el jugador que ha entrado en el lugar k-ésimo, o si se prefiere, la imagen de k por θ. Con un ligero abuso de notación esta ordenación se puede considerar como una permutación de N, es decir, una biyección del conjunto N en sí mismo. El conjunto de las permutaciones del conjunto N se indicarán por Π_N, o si no hay confusión posible, Π_n.

Consideremos ahora una permutación $\theta = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, y el vector que asigna a cada jugador la contribución marginal asociada a la coalición que forma el jugador con sus predecesores en la ordenación:

$$\begin{aligned} m^{\theta}_{i_1}(v) &= v(\{i_1\})\,, \\ m^{\theta}_{i_2}(v) &= v(\{i_1, i_2\}) - v(\{i_1\})\,, \\ &\vdots \\ m^{\theta}_{i_n}(v) &= v(N) - v(N \setminus \{i_n\})\,. \end{aligned}$$

Formalmente,

Definición 2.3. *Sea (N, v) un juego cooperativo. Para cualquier permutación $\theta \in \Pi_N$, definimos el* ***vector de contribuciones marginales*** *asociado a θ,*

$$m^{\theta}(v) = (m^{\theta}_1(v)\,, m^{\theta}_2(v)\,, \ldots\,, m^{\theta}_n(v)) \in \mathbb{R}^n,$$

de la siguiente manera:

$$m^{\theta}_i(v) = v(P_{\theta,i} \cup \{i\}) - v(P_{\theta,i}), \quad \text{para cada } i \in N,$$

donde $P_{\theta,i} = \{j \in N \mid \theta^{-1}(j) < \theta^{-1}(i)\}$ es el conjunto de predecesores de i en la permutación θ.

Nótese que un vector de contribuciones marginales tiene para cada componente la contribución marginal del jugador respecto de la ordenación dada por la permutación. Hay $n!$ vectores de contribuciones marginales, aunque pueden repetirse. Es obvio, por la definición, que cualquier vector de contribuciones marginales es un vector eficiente, es decir, se trata de una preimputación. Podemos ahora pasar a definir el conjunto de Weber (Weber, 1978):

Definición 2.4. *El* ***conjunto de Weber*** *se define como la envoltura convexa de todos los vectores de contribuciones marginales, i.e.*

$$Web(v) := convex\left\{m^{\theta}(v)\right\}_{\theta\in\Pi_n}.$$

De la definición resulta evidente que

1. el conjunto de Weber es siempre **no vacío**,
2. el conjunto de Weber es siempre **convexo**, y
3. el conjunto de Weber es siempre **compacto**.

En general, y debido a su definición como envoltura convexa, es difícil dar una descripción general del conjunto de Weber, e incluso comprobar si una preimputación determinada pertenece o no a dicho conjunto. Solamente en algunos casos, o para algunas clases de juegos cooperativos, es posible hallar sus vértices.

Por otra parte, los elementos del conjunto de Weber están acotados por la mayor y la menor de las contribuciones marginales. Si $x \in Web(v)$, entonces

$$\min_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\} \leq x_i \leq \max_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\},$$

y, en particular, $v(i)$ se encuentra siempre en ese intervalo:

$$\min_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\} \leq v(i) \leq \max_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\},$$

ya que, para $S=\emptyset$, $\quad v(S\cup\{i\})-v(S)=v(i)$.

Veremos unos ejemplos de conjuntos de Weber para el caso de tres jugadores, lo que nos permitirá analizar su comportamiento.

Ejemplo 2.5. *Consideremos el juego siguiente de tres jugadores,* $N=\{1,2,3\}$*:*

$$\begin{array}{rclrcll} v(1) & = & 0\,, & v(12) & = & 6\,, & \\ v(2) & = & 0\,, & v(13) & = & 2\,, & v(N) \;=\; 10\,. \\ v(3) & = & 0\,, & v(23) & = & 5\,, & \end{array}$$

Los vectores de contribuciones marginales correspondientes se indican en la tabla 2.1. Por tanto, la representación del conjunto de Weber es la que se muestra en la figura 2.1.

Ordenación	Vector de contribuciones marginales de v
$1,2,3$	$(0,6,4)$
$1,3,2$	$(0,8,2)$
$2,1,3$	$(6,0,4)$
$2,3,1$	$(5,0,5)$
$3,1,2$	$(2,8,0)$
$3,2,1$	$(5,5,0)$

Tabla 2.1: Vectores de contribuciones marginales del juego del ejemplo 2.5

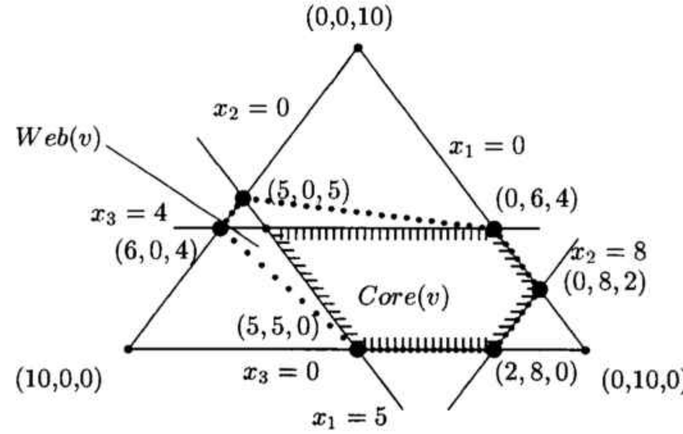

Figura 2.1: El conjunto de Weber y el *core* del juego del ejemplo 2.5

Veamos ahora otro ejemplo en el que hallaremos el conjunto de Weber de un juego con el *core* vacío.

Ejemplo 2.6. *Consideremos el juego siguiente de tres jugadores,* $N = \{1,2,3\}$*:*

$$\begin{array}{rclcrclcrcl} v(1) & = & 0\,, & & v(12) & = & 8\,, & & & & \\ v(2) & = & 0\,, & & v(13) & = & 8\,, & & v(N) & = & 10\,. \\ v(3) & = & 0\,, & & v(23) & = & 5\,, & & & & \end{array}$$

Ahora los vectores de contribuciones marginales serán los que exponen en la tabla 2.2, mientras que la representación del conjunto de Weber es la que se muestra en la figura 2.2.

Ordenación	Vector de contribuciones marginales de v
$1, 2, 3$	$(0, 8, 2)$
$1, 3, 2$	$(0, 2, 8)$
$2, 1, 3$	$(8, 0, 2)$
$2, 3, 1$	$(5, 0, 5)$
$3, 1, 2$	$(8, 2, 0)$
$3, 2, 1$	$(5, 5, 0)$

Tabla 2.2: Vectores de contribuciones marginales del juego del ejemplo 2.6

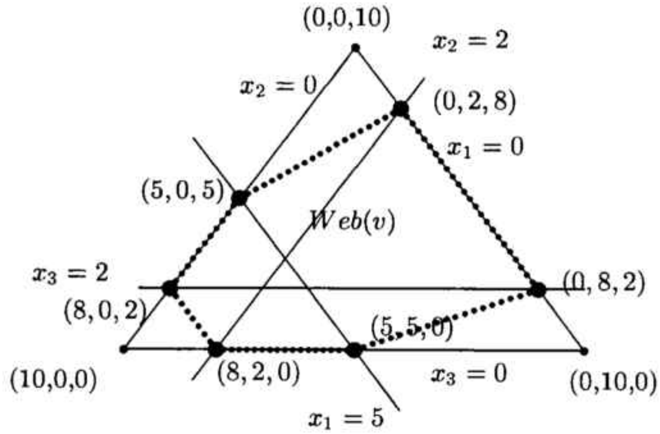

Figura 2.2: El conjunto de Weber del juego del ejemplo 2.6

Veamos ahora algunas otras propiedades de los conjuntos de Weber: el de un juego modular y la relación entre el conjunto de Weber de un juego y de su dual.

Proposición 2.7. *Sea $v \in G^N$. El juego es modular si y solo si $Web(v) = \{x\}$.*

Demostración:

Es evidente que un juego modular tiene el conjunto de Weber reducido a un punto, ya que todos sus vectores de contribuciones marginales coinciden. Por otra parte, si el conjunto de Weber se reduce a un elemento, deben coincidir todos los vectores de contribuciones marginales, y por tanto para cualquier coalición $S \subseteq N$ y para cualquier $i \in N \setminus S$,

$$x_i = v(S \cup \{i\}) - v(S) = v(i) - v(\emptyset) = v(i).$$

Por tanto este juego se describe para cualquier coalición $S \subseteq N$ como

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(i).$$

Se trata, pues, de un juego modular. □

Consideremos un juego cooperativo (N, v), y veamos que el conjunto de Weber de este juego y su dual coinciden.

Para cada ordenación $\theta = (i_1, i_2, \ldots, i_n)$, consideramos la ordenación $\theta' = (i_n, i_{n-1}, \ldots, i_1)$. Resulta que $m^\theta(v) = m^{\theta'}(v^d)$. En efecto,

$$\begin{aligned} m_{i_k}^{\theta'}(v^d) &= v^d(i_n i_{n-1} \ldots i_k) - v^d(i_n i_{n-1} \ldots i_{k+1}) = \\ &= [v(N) - v(N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_k\})] \\ &\quad -[v(N) - v(N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_{k+1}\})] = \\ &= v(N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_{k+1}\}) - v(N \setminus \{i_n, i_{n-1}, \ldots, i_k\}) = \\ &= v(i_1 i_2 \ldots i_k) - v(i_1 i_2 \ldots i_{k-1}) = m_{i_k}^{\theta}(v) \end{aligned}$$

Como dos a dos coinciden los vectores de contribuciones marginales resulta que $Web(v) = Web(v^d)$ (aunque en general no coinciden los juegos v y v^d).

Para visualizar la propiedad anterior, vamos a exponer un ejemplo:

Ejemplo 2.8. *Consideremos el juego siguiente de tres jugadores, $N = \{1, 2, 3\}$:*

$$\begin{array}{lcllcll} v(1) &=& 0\,, & v(12) &=& 8\,, & \\ v(2) &=& 2\,, & v(13) &=& 7\,, & v(N) = 10\,. \\ v(3) &=& 1\,, & v(23) &=& 6\,, & \end{array}$$

El juego dual del anterior es el siguiente:

$$\begin{array}{lcllcll} v(1) &=& 4\,, & v(12) &=& 9\,, & \\ v(2) &=& 3\,, & v(13) &=& 8\,, & v(N) = 10\,. \\ v(3) &=& 2\,, & v(23) &=& 10\,, & \end{array}$$

Si calculamos los vectores de contribuciones marginales se obtiene la tabla 2.3:

Ordenación	Vector de contribuciones marginales de v	Vector de contribuciones marginales de v^d
$1,2,3$	$(0,8,2)$	$(4,5,1)$
$1,3,2$	$(0,3,7)$	$(4,2,4)$
$2,1,3$	$(6,2,2)$	$(6,3,1)$
$2,3,1$	$(4,2,4)$	$(0,3,7)$
$3,1,2$	$(6,3,1)$	$(6,2,2)$
$3,2,1$	$(4,5,1)$	$(0,8,2)$

Tabla 2.3: Vectores de contribuciones marginales de un juego y su dual

Como se observa, los vectores de contribuciones marginales de un juego y de su juego dual coinciden dos a dos.

Otra propiedad importante es la siguiente: el *core* es un subconjunto del conjunto de Weber, lo que fue probado por primera vez por Weber (1978) utilizando un argumento de inducción. Esta propiedad será demostrada en el capítulo siguiente utilizando nuevos resultados sobre el conjunto de Weber.

Para la clase de los juegos convexos esta inclusión juega un papel central. Shapley (1971) dió la definición de esta clase de juegos, que es la siguiente:

Definición 2.9. *Un juego cooperativo (N, v) es* ***convexo****(supermodular) si las desigualdades siguientes se verifican para cualquier par de subconjuntos S, T de N:*

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

En la definición de juego convexo se utiliza el hecho de que los juegos cooperativos se pueden observar como funciones definidas sobre conjuntos (las coaliciones), relacionadas por las leyes del álgebra de conjuntos, que en otras ramas de la matemática se conocen como funciones supermodulares. En primer lugar, Shapley (1971) probó que si un juego es convexo entonces todos los vectores de contribuciones marginales pertenecen al *core* y se trata de los extremos del *core*. Más tarde, Weber(1978) demostró que en general el *core* está incluído en el conjunto de Weber, y de ambos resultados se deduce que si un juego es convexo el *core* coincide con el conjunto de Weber. Ichiishi (1981) probó la condición suficiente, es decir, que si el *core* y el conjunto de Weber coinciden, el juego es convexo. Dicho resultado ya era conocido anteriormente, y de hecho Weber lo señala en su trabajo. Rafels e Ybern (1995) dan una generalización del resultado sin utilizar todos los vectores de contribuciones marginales.

Otra definición relacionada con la anterior corresponde a la de juego cóncavo o submodular:

Definición 2.10. *Un juego cooperativo (N, v) es* ***cóncavo****(submodular) si las desigualdades siguientes se verifican para cualquier par de subconjuntos S, T de N:*

$$v(S) + v(T) \geq v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

De estas definiciones resulta evidente la siguiente proposición.

Proposición 2.11. *Sea un juego cooperativo (N, v). El juego v es convexo si y solo si v^d es cóncavo.*

Para complementar estas definiciones, se puede definir juego modular de manera diferente a como se ha hecho en la página 26, usando las relaciones análogas de las anteriores:

Definición 2.12. *Un juego cooperativo* (N, v) *es* ***modular*** *si para cualquier par de subconjuntos* S, T *de* N*:*

$$v(S) + v(T) = v(S \cup T) + v(S \cap T).$$

Esta definición es equivalente a la anterior, ya que se deduce inmediatamente que un juego modular cumple que para cualquier coalicion $S \subseteq N$

$$v(S) = \sum_{i \in S} v(i),$$

sin más que proceder ordenadamente con los jugadores de S, con lo que ambas definiciones coinciden.

Soluciones basadas en las contribuciones marginales

Uno de los propósitos principales de la teoría de los juegos cooperativos es analizar cómo repartir el valor de la coalición total entre los jugadores, ya sea si consideramos un reparto de costes como si tratamos de repartir las ganancias derivadas de la cooperación. Se han propuesto y estudiado diversas soluciones, como por ejemplo el valor de Shapley (que sin duda es la que ha generado la mayor cantidad de análisis), el nucleolo, el valor-tau (τ-*value*), ...

Cualquier solución definida sobre una clase de juegos que sea una ponderación de las contribuciones marginales de un jugador a las diversas coaliciones elegirá un punto del conjunto de Weber. En particular el **valor de Shapley** (Shapley, 1953), $Sh(v)$, siempre pertenece al conjunto de Weber, ya que se puede obtener tomando el promedio de los vectores de contribuciones marginales. Dado que hay $n!$ vectores de éstos, se toma un peso de $\frac{1}{n!}$ para cada uno de ellos. Por tanto,

$$\sum_{\theta \in \Pi_N} \lambda_\theta m^\theta(v) = Sh(v),$$

con $\lambda_\theta = \frac{1}{n!}$ para cada $\theta \in \Pi_N$. Por esta razón podemos afirmar que el valor de Shapley ocupa una posición "central" en el conjunto de Weber (téngase en cuenta que si un punto aparece dos veces como vector de contribuciones marginales para dos permutaciones distintas, se cuenta como doble).

Los vectores de contribuciones marginales o sus ponderaciones son soluciones eficientes, que violan en general el axioma de simetría de la solución, y se denominan *random-order values* (Weber, 1988). Alcanzan todos los puntos del conjunto de Weber. Por otra parte, los valores ponderados de Shapley (Shapley, 1953) utilizan otras colecciones de pesos (véase Kalai y Samet, 1987) y en general recubren el *core*, aunque no necesariamente el conjunto de Weber.

Un ejemplo de solución y el conjunto de Weber

Para acabar esta sección vamos a considerar un modelo económico de juego cooperativo para el cual un concepto de solución, el valor-tau ($\tau-$value), se encuentra en el conjunto de Weber.

El valor-tau

El *valor de Tijs*, *τ-value*, o *valor-tau* fue introducido por S.H. Tijs (1981). Es una solución de compromiso, un acuerdo intermedio entre dos vectores, lo que como máximo pueden esperar recibir los jugadores (cota superior) y lo que esperan recibir como mínimo (cota inferior). Se escribe como $\tau(v)$.

En primer lugar asociamos a cada juego cooperativo (N, v) un vector $M(v) \in \mathbb{R}^N$, que se denomina el *vector de utopía,* cuyas componentes son las contribuciones marginales de cada jugador a la coalición total:

$$\begin{aligned} M(v) &= (M_1(v), M_2(v), ..., M_n(v)) \\ &= (v(N) - v(N \setminus \{1\}), v(N) - v(N \setminus \{2\}), ..., v(N) - v(N \setminus \{n\})). \end{aligned}$$

Por otra parte también asociamos un vector $m(v) \in \mathbb{R}^N$, el *vector de derechos mínimos*, que se obtiene de la siguiente manera:

$$m_i(v) = \max_{S,\ i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(v) \right\} \qquad \text{para cada } i \in N.$$

Si se verifica que:

1. la cota inferior es menor que la superior, es decir,

$$m_i(v) \leq M_i(v) \qquad \text{para cada } i \in N,$$

2. el valor del juego es intermedio entre lo que se demanda como vector de derechos mínimos y el vector de utopía, es decir,

$$\sum_{i \in N} m_i(v) \leq v(N) \leq \sum_{i \in N} M_i(v),$$

se dice que el juego es **cuasi-equilibrado** *(quasi-balanced)*, y en este caso el valor-tau está definido (Tijs, 1981).

Esta clase de juegos se denota como QB^N (*cuasi-equilibrados*).

Definición 2.13. *Sea (N, v) un juego cooperativo, cuasi-equilibrado. Sea el* vector de utopía $M(v) \in \mathbb{R}^N$, *definido como antes, y el* vector de derechos mínimos $m(v) \in \mathbb{R}^N$, *también definido como antes.*

El ***valor-tau****, $\tau(v)$, se define como el único vector eficiente en el segmento que une $M(v)$ y $m(v)$:*

$$\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_n) \in \mathbb{R}^N,$$

que verifica:

1. $\tau = \lambda \cdot m(v) + (1 - \lambda) \cdot M(v)$, *con* $\lambda \in [0, 1]$,

2. $\tau(N) = v(N)$.

En general, un juego arbitrario no es forzosamente cuasi-equilibrado, aunque todos los juegos con *core* no vacío (*equilibrados*) son cuasi-equilibrados.

El valor $\tau(v)$ no ha de estar necesariamente en el *core*, incluso en el caso de un juego convexo. Para una descripción detallada de las propiedades que satisface el valor-tau se puede consultar el libro de Driessen (1988).

El modelo de producción con un terrateniente y varios campesinos

Consideremos el siguiente modelo de juego cooperativo, que consiste en una economía de producción, en el que hay un terrateniente y una serie de campesinos.

Sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de agentes de la economía, de los cuales el agente 1 es el terrateniente que posee la propiedad de la tierra, mientras que los agentes $2, 3, ..., n$ son campesinos sin tierra, con la misma capacidad de trabajo, que pueden ser contratados por el terrateniente para cultivar sus tierras. El valor de la cosecha depende únicamente del número de campesinos contratados y se representa mediante una función de producción $f(x)$, definida sobre el conjunto $\{0, 1, 2, ..., n-1\}$ a valores reales, con $f(0) = 0$, ya que suponemos que el terrateniente por sí solo es incapaz de producir nada. Supondremos también que se trata de una función no decreciente, es decir,

$$f(t) \geq f(t-1) \quad \text{para } t = 1, 2, ..., n-1.$$

La función característica de este modelo es, pues,

$$v(S) := \begin{cases} f(|S| - 1) & \text{si } 1 \in S, \\ 0 & \text{si } 1 \notin S. \end{cases}$$

Estos juegos son siempre equilibrados, y para una descripción más detallada del modelo se puede consultar Shapley y Shubik (1967), Chetty, Dasgupta y Raghavan (1976) o Driessen y Tijs (1984). En particular, al ser equilibrados son cuasi-equilibrados, y el valor-tau está siempre definido.

Veremos que en este modelo el valor-tau se encuentra siempre en el conjunto de Weber.

Proposición 2.14. *Sea (N, v) un juego de producción con un terrateniente y $n-1$ campesinos. Entonces*

$$\tau(v) \in Web(v).$$

Demostración:

Por hipótesis, la función de producción es positiva:

$$f : \{0, 1, 2, ..., n-1\} \longrightarrow R$$

con $f(t) \geq 0$ para cualquier $t = 0, 1, 2, ..., n-1$.

Calculemos ahora el vector de utopía. Para el terrateniente será

$$M_1(v) = v(N) - v(N \setminus \{1\}) = f(n-1) \geq 0,$$

mientras que para los campesinos será, teniendo en cuenta que la función de producción es no decreciente,

$$M_i(v) = v(N) - v(N \setminus \{i\}) = f(n-1) - f(n-2) \geq 0 \quad \text{para} \quad i = 2, 3, ..., n.$$

Por otra parte, si calculamos el vector de derechos mínimos obtendremos, para el terrateniente

$$\begin{aligned} m_1(v) &= \max_{S \subseteq N,\ 1 \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus 1} M_j(v) \right\} = \\ &= \max_{s=1,...,n} \{ f(s-1) - (s-1)[f(n-1) - f(n-2)] \} = B, \end{aligned}$$

mientras que para los campesinos,

$$m_i(v) = \max_{S \subseteq N,\ i \in S} \left\{ v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v) \right\} = 0, \quad \text{para} \quad i = 2, 3, \ldots, n.$$

Esto último es así puesto que para la coalición $S = \{i\}, v(\{i\}) = 0$, mientras que para las coaliciones S en las que $1 \in S$, se observa que

$$v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v) =$$

$$= f(s-1) - f(n-1) - (s-2)[f(n-1) - f(n-2)] \leq 0,$$

siendo s la cardinalidad de S,
y para las coaliciones S en las que $1 \notin S$, se observa que

$$v(S) - \sum_{j \in S \setminus i} M_j(v) = -(s-1)[f(n-1) - f(n-2)] \leq 0,$$

siendo s la cardinalidad de S, en ambos casos debido a que la función es no decreciente.

Antes de proseguir con el cálculo del valor-tau, vamos a distinguir el caso en que $f(n-1) = 0$, que corresponde al juego nulo. En este caso el vector de derechos mínimos y el de utopía coinciden con el vector nulo, que además es la única imputación y el único elemento del conjunto de Weber.

A partir de aquí podemos suponer que $f(n-1) > 0$.

Es importante observar que $0 \leq B \leq f(n-1)$, ya que al calcular el valor de B, uno de los elementos que se consideran para hallar el máximo (para $s = 1$) es 0. También vale la pena hacer notar que si $f(n-1) - f(n-2) = 0$, entonces $B = f(n-1)$.

De aquí podemos calcular el valor-tau del juego de producción:

$$\tau(v) = m(v) + \lambda \left[M(v) - m(v) \right],$$

con el valor de λ que se obtiene imponiendo la eficiencia:

$$\begin{aligned} \sum_{i \in N} \tau_i(v) &= B + \lambda \left[f(n-1) - B \right] + \lambda \cdot (n-1) \left[f(n-1) - f(n-2) \right] \\ &= f(n-1), \end{aligned}$$

de donde

$$\lambda^* = \begin{cases} \dfrac{f(n-1) - B}{\left[f(n-1) - B \right] + (n-1) \left[f(n-1) - f(n-2) \right]} & \text{si} \quad B \neq f(n-1), \\ 0 & \text{si} \quad B = f(n-1). \end{cases}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \tau_1(v) &= B + \lambda^* \left[f(n-1) - B \right] \\ \tau_i(v) &= \lambda^* \left[f(n-1) - f(n-2) \right] \quad \text{para} \quad i = 2, 3, ..., n. \end{aligned}$$

Consideremos ahora la ordenación $\bar{\theta} \in \Pi_N$ en la que los jugadores entran con el orden $(n, n-1, n-2, ..., 1)$. En este caso el jugador 1 entra en último lugar, de forma que el vector de contribuciones marginales será:

$$m^{\bar{\theta}}(v) = (f(n-1), 0, ..., 0).$$

Consideremos también la familia de ordenaciones, $\mathcal{T}_1 \subset \Pi_N$, en las que el jugador 1 entra en primer lugar. Hay exactamente $(n-1)!$ ordenaciones posibles en $\mathcal{T}_1$ y para cualquier $\theta \in \mathcal{T}_1$ se verifica que

$$\begin{aligned} m_1^{\theta}(v) = 0, &\qquad \text{y además,} \\ \textstyle\sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} m_i^{\theta}(v) = (n-2)!\, f(n-1), &\qquad \text{para} \quad i = 2, 3, \ldots, n. \end{aligned}$$

Para verlo, solamente hay que pensar en la eficiencia de los vectores de contribuciones marginales y en la simetría entre los jugadores.

Vamos a demostrar que el valor-tau se puede escribir como combinación convexa de los vectores de contribuciones marginales correspondientes a $\bar{\theta}$ y a las permutaciones de $\mathcal{T}_1$.

Veamos que

$$\alpha \cdot m^{\bar{\theta}}(v) + \sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} \frac{1-\alpha}{(n-1)!} m^{\theta}(v) = \tau(v),$$

donde

$$\alpha = \lambda^* + (1-\lambda^*)\frac{B}{f(n-1)}.$$

Este valor de α está bien definido puesto que $f(n-1) > 0$, y de la definición de B, está claro que $\alpha \in [0,1]$.

Si calculamos para el jugador 1:

$$\alpha \cdot m_1^{\bar{\theta}}(v) + \sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} \frac{1-\alpha}{(n-1)!} m_1^{\theta}(v) = \alpha \cdot f(n-1),$$

que resulta ser:

$$\begin{aligned}
\alpha \cdot f(n-1) &= \left[\lambda^* + (1-\lambda^*)\frac{B}{f(n-1)}\right] f(n-1) \\
&= \lambda^* f(n-1) + (1-\lambda^*) B \\
&= B + \lambda^* [f(n-1) - B] \\
&= \tau_1(v).
\end{aligned}$$

Mientras que para $i = 2, 3, \ldots, n$ tendremos

$$\alpha \cdot m_i^{\bar{\theta}}(v) + \sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} \frac{1-\alpha}{(n-1)!} m_i^{\theta}(v) = \sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} \frac{1-\alpha}{(n-1)!} m_i^{\theta}(v),$$

que se convierte:

$$\begin{aligned}
\sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} \frac{1-\alpha}{(n-1)!} m_i^{\theta}(v) &= \frac{1-\alpha}{(n-1)!} \sum_{\theta \in \mathcal{T}_1} m_i^{\theta}(v) = \\
&= \frac{1-\alpha}{(n-1)!}(n-2)!\, f(n-1) = \\
&= \frac{1-\alpha}{(n-1)} f(n-1) = \\
&= \frac{f(n-1) - \alpha \cdot f(n-1)}{(n-1)} = \\
&= \frac{f(n-1) - \tau_1(v)}{(n-1)} = \\
&= \tau_i(v)
\end{aligned}$$

□

Hemos visto que en este modelo de juegos el valor-tau pertenece al conjunto de Weber y también al conjunto de las imputaciones.

Sin embargo, en este modelo, es posible que el valor-tau no pertenezca al *core* del juego, como se puede observar en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 2.15. *Considérese el siguiente juego de* 6 *jugadores,* $N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, *en el que el jugador* 1 *es el propietario y los restantes jugadores son los campesinos, cuya función de producción es la siguiente:*

x	$f(x)$
0	0
1	25
2	25
3	25
4	25
5	50

El vector de utopía viene dado por las contribuciones marginales a la coalición total, $v(N) - v(N \setminus \{i\})$, *que en este caso son:*

$$M = (50, 25, 25, 25, 25, 25).$$

El vector de derechos mínimos es:

$$m = (0, 0, 0, 0, 0, 0),$$

de donde el valor-tau es:

$$\tau = \left(\frac{100}{7}, \frac{50}{7}, \frac{50}{7}, \frac{50}{7}, \frac{50}{7}, \frac{50}{7}\right),$$

que no pertenece al core *de este juego, ya que* $\tau_1 + \tau_2 < v(\{1, 2\}) = 25$.

2.3 El conjunto de Weber y las imputaciones

Ya se ha visto que el conjunto de Weber puede estar incluído en el conjunto de las imputaciones, si bien también es posible la inclusión contraria. Vamos a analizar las condiciones que se pueden considerar para obtener dichas inclusiones.

Determinadas relaciones entre el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber para un juego cooperativo arbitrario son conocidas o pueden ser obtenidas fácilmente. Si un juego v verifica la condición de **cero-monotonía**, es decir, si cumple:

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T), \qquad \text{para cualesquiera } S, T \quad \text{con } S \subseteq T \subseteq N,$$

es fácil ver que $Web(v) \subseteq I(v)$. Los juegos cero-monótonos son, por tanto, esenciales. Además, la cero-monotonía es una caracterización de dicha inclusión, como se muestra en el siguiente teorema:

Teorema 2.16. *Considérese un juego cooperativo (N, v). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *v es cero-monótono,*
2. *$v(S) + v(i) \leq v(S \cup \{i\})$, para cualquier $S \subseteq N$ y para cualquier $i \notin S$,*
3. *$Web(v) \subseteq I(v)$.*

Demostración:

Las dos primeras condiciones son obviamente equivalentes, y la segunda es equivalente a la tercera teniendo en cuenta la propia definición de $Web(v)$. □

Es posible hallar otra caracterización de la inclusión del conjunto de Weber en las imputaciones, obteniendo condiciones sobre las cotas de los vectores del conjunto de Weber.

Teorema 2.17. *Sea (N, v) un juego cooperativo. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$Web(v) \subseteq I(v)$,*
2. *$\min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\} = v(i)$, para todo $i \in N$.*

Demostración:

1.$\Rightarrow$ 2.

Si $Web(v) \subseteq I(v)$, entonces $m^\theta(v) \in I(v)$ para cualquier permutación $\theta \in \Pi_N$. Por lo tanto $v(i) \leq m_i^\theta(v)$, para cualquier permutación $\theta \in \Pi_N$, con lo que

$$\min_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\} = v(i), \quad \text{para todo } i \in N.$$

2.$\Rightarrow$ 1.

Por otra parte, si

$$\min_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\}=v(i),\quad \text{para todo } i\in N,$$

se verifica que $v(i)\leq m_i^{\theta}(v)$ para cualquier permutación $\theta\in\Pi_N$ y para cualquier jugador $i\in N$. Pero los vectores de contribuciones marginales son eficientes, con lo que $m^{\theta}(v)\in I(v)$. □

Veamos ahora unas condiciones que permiten afirmar la igualdad entre $Web(v)$ y $I(v)$. En primer lugar vamos a dar una condición para que los vértices del conjunto de imputaciones pertenezcan al conjunto de Weber, si el juego es cero-monótono. Posteriormente, y utilizando condiciones sobre las cotas del conjunto de Weber, se obtendrá un teorema de caracterización de la igualdad.

Sea $v\in G^N$ un juego cooperativo esencial, es decir, con $\sum_{i\in N}v\left(i\right)\leq v\left(N\right)$. El vector $\hat{e}^i$, definido por

$$\hat{e}_j^i:=\begin{cases} v(N)-\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}v(j) & \text{si } j=i\\ v\left(j\right) & \text{si } j\neq i,\end{cases}$$

es el extremo del conjunto de las imputaciones que corresponde al valor máximo de la coordenada i.

Lema 2.18. *Sea (N,v) un juego cooperativo cero-monótono. Entonces las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $\hat{e}^i\in Web(v)$,
2. $\max\limits_{S\subseteq N\setminus\{i\}}\{v(S\cup\{i\})-v(S)\}=v(N)-\sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}}v(j)$.

Demostración:

1.$\Rightarrow$ 2.

Como el juego es cero-monótono, sabemos que $Web(v)\subseteq I(v)$.

Si $\hat{e}^i\in Web(v)$, debe ser un extremo del conjunto de Weber, y existe una permutación $\tilde{\theta}\in\Pi_N$, de forma que

$$m^{\tilde{\theta}}(v)=\hat{e}^i$$

Además, para cualquier otra permutación, el vector de contribuciones marginales es una imputación y

$$m_i^{\theta}(v)=v(S\cup\{i\})-v(S)\leq v(N)-\sum_{j\in N\setminus\{i\}}v(j),\ \text{para cualquier } \theta\in\Pi_N,$$

con lo que se obtiene la igualdad deseada:

$$\max_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \{v(S\cup\{i\})-v(S)\} = v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} v(j).$$

2.$\Rightarrow$ 1.

Por otra parte, si

$$\max_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \{v(S\cup\{i\})-v(S)\} = v(N) - \sum_{j\in N\setminus\{i\}} v(j),$$

consideremos la coalición S^* donde se alcanza ese máximo, y la permutación $\theta \in \Pi_N$ que hace entrar a los jugadores de S^* en primer lugar, después el jugador i, y por último los jugadores de $N \setminus (S^* \cup \{i\})$.

Para esa permutación (recordemos que el juego es cero-monótono) tenemos

$$\begin{array}{lll} m_j^\theta(v) \geq v(j) & \text{si} & j \in S^* \\ m_i^\theta(v) = v(N) - \sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}} v(j), & \text{para} & \text{el jugador } i \\ m_j^\theta(v) \geq v(j) & \text{si} & j \in N \setminus (S^* \cup \{i\}). \end{array}$$

Aplicando ahora la eficiencia del vector de contribuciones marginales obtenemos que ese vector es un extremo del conjunto de las imputaciones:

$$m_j^\theta(v) = \begin{cases} v(N) - \sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}} v(j) & \text{para} \quad \text{el jugador } i \\ \quad v(j) & \text{si} \quad\quad j \neq i, \end{cases}$$

justamente el vector $\hat{e}^i$. □

Teorema 2.19. *Sea (N, v) un juego cooperativo. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $Web(v) = I(v)$
2. $\min\limits_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \{v(S\cup\{i\})-v(S)\} = v(i)$ *y*

   $\max\limits_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \{v(S\cup\{i\})-v(S)\} = v(N) - \sum\limits_{j\in N\setminus\{i\}} v(j)$, *para todo $i \in N$.*

Demostración:

1.$\Rightarrow$ 2.

Como $Web(v) \subseteq I(v)$, sabemos que $\min\limits_{S\subseteq N\setminus\{i\}} \{v(S\cup\{i\})-v(S)\} = v(i)$, para todo $i \in N$, y el juego es cero-monótono.

Además $I(v) = Web(v)$, con lo que los extremos del conjunto de las imputaciones, $\hat{e}^i$, deben corresponder a algún vector de contribuciones marginales y por tanto, por el lema anterior2.18:

$$\max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\} = v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v(j), \text{ para todo } i \in N.$$

2.$\Rightarrow$ 1.

De la primera igualdad, y aplicando el teorema anterior 2.17, se obtiene que

$$Web(v) \subseteq I(v),$$

pero además, si

$$\max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\} = v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v(j),$$

aplicando el lema 2.18 para cualquier jugador $i \in N$, proporciona la igualdad deseada. □

Podemos, asimismo, analizar dicha igualdad estudiando en primer lugar el caso de los juegos simples monótonos, que han sido ampliamente utilizados en el contexto de los juegos de votación.

Definición 2.20. *Un juego cooperativo de n jugadores (N, v) es un* ***juego simple monótono*** *si cumple:*

- $v(S) \in \{0, 1\}$ *para toda coalición* $S \subseteq N$, *con* $v(N) = 1$,
- *para cualquier par de coaliciones* $S, T \subseteq N$, *si* $S \subseteq T$, *entonces* $v(S) \leq v(T)$.

El conjunto de los juegos simples monótonos se escribe como S^N_{mon}.

El conjunto de las coaliciones ganadoras en un juego simple monótono v se define de la siguiente manera,

$$\mathcal{W}(v) = \left\{S \in 2^N \mid v(S) = 1\right\},$$

y el conjunto de coaliciones minimales ganadoras

$$\mathcal{MW}(v) = \left\{S \in 2^N \mid v(S) = 1 \;\text{ y si }\; T \subseteq S,\; T \neq S,\; v(T) = 0\right\}.$$

Un juego simple monótono queda determinado mediante las coaliciones minimales ganadoras.

Entonces, un jugador $i \in N$ se llama **pivote** si existe una coalición $S \in 2^N$ tal que $i \in S$ y $S \in \mathcal{MW}(v)$. Si analizamos esta definición, podemos señalar que el jugador i es pivote si se une a una coalición perdedora y la convierte en ganadora.

En un juego simple monótono, los vectores de contribuciones marginales son vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, los que corresponden a los jugadores pivote.

Por ello, dentro de la clase de juegos simples monótonos, S^N_{mon}, la condición para la coincidencia entre el conjunto $Web(v)$ y el conjunto $I(v)$ es justamente que todos los jugadores sean pivote.

Consideremos ahora la clase de los juegos cero-monótonos, que escribiremos como ZM^N:

Definición 2.21. *Un juego v está en ZM^N si verifica la condición de* ***cero-monotonía:***

$$v(S) + \sum_{i \in T \setminus S} v(i) \leq v(T), \qquad \textit{para cualesquiera } S, T \textit{ con } S \subseteq T \subseteq N,$$

En este contexto definiremos jugador **pivote**.

Definición 2.22. *Consideremos un juego $v \in ZM^N$. Un jugador $i \in N$ es* ***pivote*** *en v si existe una coalición $S \subseteq N$ tal que $i \in S$,*

$$v(S \setminus \{i\}) = \sum_{j \in S \setminus \{i\}} v(j), \quad y$$

$$v(S) + \sum_{j \in N \setminus S} v(j) = v(N).$$

Con esta definición estamos en condiciones de dar una caracterización de la igualdad entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones.

Teorema 2.23. *Considérese un juego cooperativo (N, v). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *$Web(v) = I(v)$,*
2. *v es cero-monótono, y todo jugador $i \in N$ es pivote del juego v.*

Demostración:

1.$\Rightarrow$ 2.

Si $Web(v) = I(v)$, en particular, $Web(v) \subseteq I(v)$ y por el teorema 2.16 v es 0-monótono. Además, si coinciden, los extremos del conjunto de las imputaciones deben ser extremos del conjunto de Weber, es decir, para cada $i \in N$, debe existir una ordenación $\theta \in \Pi_N$ tal que $m^\theta(v) = (m_1^\theta(v), m_2^\theta(v), \ldots, m_n^\theta(v))$ de manera que:

$$\begin{aligned} m_i^\theta(v) &= v(P_{\theta,i} \cup \{i\}) - v(P_{\theta,i}) = v(N) - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} v(j), \\ m_j^\theta(v) &= v(j) \qquad\qquad \text{para } j \neq i. \end{aligned}$$

Si denominamos $S^i = P_{\theta,i}$, y tenemos en cuenta la 0-monotonía del juego, podemos escribir:

$$0 \leq v(S^i) - \sum_{j \in S^i} v(j) \leq v(S^i \cup \{i\}) - \sum_{j \in S^i \cup \{i\}} v(j) \leq v(N) - \sum_{j \in N} v(j),$$

de donde, al ser iguales la diferencia entre los extremos de la desigualdad con la diferencia entre los medios, debe verificarse

$$0 = v(S^i) - \sum_{j \in S^i} v(j),$$

y

$$v(S^i \cup \{i\}) - \sum_{j \in S^i \cup \{i\}} v(j) = v(N) - \sum_{j \in N} v(j),$$

que corresponde justamente a la condición que el jugador i sea pivote en el juego v. Como esta permutación existe para cada $i \in N$, hemos acabado.

2.$\Rightarrow$ 1.

Para la implicación contraria, consideremos para cada $i \in N$ una coalición S para la cual el jugador i es pivote, y la ordenación $\theta \in \Pi_N$ tal que los elementos de $S \setminus \{i\}$ entran en primer lugar, después el jugador i, y por último los elementos de $N \setminus S$. Para esta permutación θ, se cumple que:

(i) $m_j^\theta(v) \geq v(j)$ para $j \in N$,

(ii) $\sum_{j \in N} m_j^\theta(v) = v(N)$,

(iii) $m_i^\theta(v) = v(S) - v(S \setminus \{i\}) = v(N) - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} v(j)$.

Por tanto, la única posibilidad es que para $j \neq i$ se cumpla la igualdad en (i). En resumen,

$$\begin{aligned} m_i^\theta(v) &= v(N) - \sum_{j \in N\setminus\{i\}} v(j), \qquad \text{y} \\ m_j^\theta(v) &= v(j) \qquad\qquad \text{para } j \neq i. \end{aligned}$$

Esto muestra que $I(v) \subseteq Web(v)$. Como por otra parte el juego es cero-monótono, por el teorema 2.16 se verifica la inclusión contraria, $Web(v) \subseteq I(v)$, con lo que tenemos la igualdad deseada. □

Podemos aplicar lo que hemos visto a los juegos simples monótonos para recuperar un resultado conocido (Marín-Solano y Rafels, 1996):

Corolario 2.24. *Sea $v \in S^N_{mon}$ un juego simple monótono. Entonces las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. $I(v) = Web(v)$,
2. $\bigcup_{S \in \mathcal{MW}(v)} S = N$.

En el caso del modelo de producción del terrateniente y los campesinos, se trata de un juego 0-normalizado y monótono. Por lo tanto, para que se produzca la igualdad entre el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber se necesita que la función de producción sea escalonada con tan sólo dos valores, 0 y $f(n-1)$.

Por otra parte hay juegos en los que el conjunto de Weber incluye estrictamente el conjunto de las imputaciones. Un ejemplo particularmente sencillo es el siguiente juego simétrico de tres jugadores:

$$\begin{array}{lcll} v(\{i\}) & = & 0, & \text{para } i = 1,2,3, \\ v(S) & < & 0, & \text{para } |S| = 2 \text{ y} \\ v(\{1,2,3\}) & = & 1. & \end{array}$$

Se pueden dar algunos teoremas con condiciones para que se produzca la inclusión citada, como los que daremos a continuación. Para ello vamos a definir el juego minimarg de un juego $v \in G^N$. Este juego fue definido por Curiel y Tijs (1991) en un artículo en el que estudian dos operadores duales sobre los juegos cooperativos, lo que lleva a ver sus propiedades y cómo los puntos fijos de este operador están formados por los juegos convexos. La expresión "minimarg" hace referencia a que este juego se define, para cada coalición, como el mínimo sobre los vectores de contribuciones marginales, como se concreta en la siguiente definición:

Definición 2.25. *Dado un juego cooperativo (N, v), definimos el* ***juego minimarg*** *v, v_1, como*

$$minimarg(v)(S) = v_1(S) := \min_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\}.$$

Este juego tiene la misma eficiencia que v, es decir, para la coalición total, que contiene todos los jugadores, se verifica la igualdad

$$v(N) = v_1(N),$$

y cumple que siempre

$$Web(v) \subseteq Core(v_1)$$

ya que por construcción

$$\sum_{j \in S} m_j^{\theta}(v) \geq v_1(S).$$

Con esta definición y propiedades podemos enunciar los siguientes teoremas:

Teorema 2.26. *Sea $v \in G^N$ un juego cooperativo esencial, es decir, con $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$. Si se verifica*

$$I(v) \subseteq Web(v),$$

entonces:

$$\min_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in S} m_j^{\theta}(v) \right\} \leq \sum_{j \in S} v(j), \quad \textit{para todo } S \subseteq N, \ \textit{con } S \neq N.$$

Demostración:

Consideremos el juego minimarg de v, v_1.

Si $I(v) \subseteq Web(v)$, debe cumplirse que los vértices del conjunto de las imputaciones se encuentren en el $Core(v_1)$. De aquí, considerando el vértice correspondiente al jugador i, $\hat{e}^i$, se obtiene, para cualquier coalición $S \subseteq N$,

$$\begin{array}{lcll} v(N) - \sum_{j \in N \setminus S} v(j) & \geq & v_1(S) & \text{si} \quad i \in S \\ \sum_{j \in S} v(j) & \geq & v_1(S) & \text{si} \quad i \notin S. \end{array}$$

Como estas desigualdades ocurren para todos los jugadores de N, podemos asegurar:

$$\sum_{j \in S} v(j) \geq v_1(S) \quad \text{para cualquier} \quad S \subseteq N, \ S \neq N.$$

□

Teorema 2.27. *Sea $v \in G^N$ un juego cooperativo esencial, es decir, con $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$. Si se verifica*

$$I(v) \subseteq Web(v),$$

entonces

$$v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v(j) \leq \max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \{v(S \cup \{i\}) - v(S)\} \qquad \textit{para todo } i \in N.$$

Demostración:

Consideremos un vértice del conjunto de las imputaciones, correspondiente al jugador i: $\hat{e}^i$. Por la construcción del juego minimarg, v_1, este vértice debe encontrarse en el $Core(v_1)$, y por ello se obtiene, para cualquier coalición $S \subseteq N$,

$$\begin{array}{rcll} v(N) - \sum_{j \in N \setminus S} v(j) & \geq & \min_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\} & \text{si} \quad i \in S \\ \sum_{j \in S} v(j) & \geq & \min_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\} & \text{si} \quad i \notin S. \end{array}$$

De aquí,

$$\begin{array}{rcll} v(N) - \min_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\} & \geq & \sum_{j \in N \setminus S} v(j) & \text{si} \quad i \in S \\ v(N) - \sum_{j \in S} v(j) & \leq & v(N) - \min_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\} & \text{si} \quad i \notin S, \end{array}$$

es decir,

$$\begin{array}{rcll} \max_{\theta \in \Pi_N} \left\{ v(N) - \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\} & \geq & \sum_{j \in N \setminus S} v(j) & \text{si} \quad i \in S \\ v(N) - \sum_{j \in S} v(j) & \leq & \max_{\theta \in \Pi_N} \left\{ v(N) - \sum_{j \in S} m_j^\theta(v) \right\} & \text{si} \quad i \notin S, \end{array}$$

que, teniendo en cuenta la eficiencia de los vectores de contribuciones marginales:

$$\begin{array}{rcll} \max_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in N \setminus S} m_j^\theta(v) \right\} & \geq & \sum_{j \in N \setminus S} v(j) & \text{si} \quad i \in S \\ v(N) - \sum_{j \in S} v(j) & \leq & \max_{\theta \in \Pi_N} \left\{ \sum_{j \in N \setminus S} m_j^\theta(v) \right\} & \text{si} \quad i \notin S, \end{array}$$

En particular, si tomamos en la última expresión el conjunto $S = N \setminus \{i\}$, se obtiene

$$v(N) - \sum_{j \in N \setminus \{i\}} v(j) \leq \max_{\theta \in \Pi_N} \left\{ m_i^\theta(v) \right\} = \max_{S \subseteq N \setminus \{i\}} \left\{ v(S \cup \{i\}) - v(S) \right\}.$$

□

Por todo esto, puede parecer que es posible estudiar la inclusión del conjunto de las imputaciones en el conjunto de Weber, sin más que trasladar la cuestión a la inclusión en el *core* del juego minimarg. Sin embargo, es posible hallar ejemplos de juegos de cuatro jugadores para los cuales se cumple que el conjunto de las imputaciones no está incluido en el conjunto de Weber, $I(v) \not\subseteq Web(v)$, mientras que

$$I(v) \subseteq Core\,(v_1)\,.$$

La intersección del conjunto de Weber y las imputaciones

En los apartados anteriores hemos encontrado condiciones para que $I(v) \subseteq Web(v)$, $I(v) = Web(v)$, o bien $Web(v) \subseteq I(v)$. La mayoría de ellas son plausibles y fáciles de aplicar, pero queda por ver si siempre existirán imputaciones (en juegos esenciales) que sean combinaciones convexas de vectores de contribuciones marginales. La respuesta es que no siempre es así, ya que a continuación veremos un ejemplo de un juego cooperativo esencial (con $I(v) \neq \emptyset$) para el cual la intersección anterior es vacía, $I(v) \cap Web(v) = \emptyset$. Para ello necesitamos describir un juego de 4 jugadores (ya que demostraremos posteriormente que para juegos esenciales de 2 y 3 jugadores esta intersección es siempre no vacía).

Los valores de las coaliciones van a ser unos valores ciertamente "extraños", ya que, según hemos visto, a poco que el juego posea cierta regularidad o estructura, dicha intersección será no vacía.

Tras el ejemplo, lo que será importante es que ya podemos argumentar que el conjunto de Weber **no es**, en general, un *catcher* para las soluciones puntuales o conjuntistas que seleccionan imputaciones. Este era un problema abierto ya que la inclusión del *core* en el conjunto de Weber daba un posible vaticinio en sentido positivo. Un resultado de imposibilidad se hallará como consecuencia de lo señalado.

Ejemplo 2.28. *Consideremos el siguiente juego de 4 jugadores:*

$$\begin{array}{rclrclrcl}
v(1) & = & 0, & v(12) & = & -2, & v(123) & = & -3,\\
v(2) & = & 0, & v(13) & = & -2, & v(124) & = & -3,\\
v(3) & = & 0, & v(14) & = & -2, & v(134) & = & 8,\\
v(4) & = & 0, & v(23) & = & -2, & v(234) & = & 8,\\
 & & & v(24) & = & -2, & & & \\
 & & & v(34) & = & 10, & v(N) & = & 5.
\end{array}$$

En este juego, los jugadores 1 y 2 son simétricos (substitutos), y cualquier contribución marginal de estos jugadores a cualquier coalición diferente de la vacía es negativa. Por tanto, en cualquier vector de contribuciones marginales, los pagos asignados a los jugadores 1 y 2 son no positivos, y al menos uno de ellos es estrictamente negativo. Cualquier combinación convexa de los vectores de contribuciones marginales tendrá la misma propiedad: que los pagos asignados *a los jugadores* 1 *y* 2 *son no positivos, y al menos uno de ellos es estrictamente negativo. Estas combinaciones convexas no pueden ser imputaciones, para las cuales se exige que el pago a cualquier jugador debe ser mayor o igual que el valor individual,* 0 *en este ejemplo. Por tanto, el conjunto de Weber del juego anterior no contiene ninguna imputación.*

También se pueden observar los vectores de contribuciones marginales para este juego, que se señalan en la tabla 2.4, en donde queda de manifiesto que para los jugadores 1 *y* 2 *los vectores de contribuciones marginales ofrecen un pago conjunto negativo.*

Ordenación θ	Vector de contribuciones marginales
$1,2,3,4$	$m^{1234}(v) = (0,-2,-1,8)$,
$1,2,4,3$	$m^{1243}(v) = (0,-2,8,-1)$,
$1,3,2,4$	$m^{1324}(v) = (0,-1,-2,8)$,
$1,3,4,2$	$m^{1342}(v) = (0,-3,-2,10)$,
$1,4,2,3$	$m^{1423}(v) = (0,-1,8,-2)$,
$1,4,3,2$	$m^{1432}(v) = (0,-3,10,-2)$,
$2,1,3,4$	$m^{2134}(v) = (-2,0,-1,8)$,
$2,1,4,3$	$m^{2143}(v) = (-2,0,8,-1)$,
$2,3,1,4$	$m^{2314}(v) = (-1,0,-2,8)$,
$2,3,4,1$	$m^{2341}(v) = (-3,0,-2,10)$,
$2,4,1,3$	$m^{2413}(v) = (-1,0,8,-2)$,
$2,4,3,1$	$m^{2431}(v) = (-3,0,10,-2)$,
$3,1,2,4$	$m^{3124}(v) = (-2,-1,0,8)$,
$3,1,4,2$	$m^{3142}(v) = (-2,-3,0,10)$,
$3,2,1,4$	$m^{3214}(v) = (-1,-2,0,8)$,
$3,2,4,1$	$m^{3241}(v) = (-3,-2,0,10)$,
$3,4,1,2$	$m^{3412}(v) = (-2,-3,0,10)$,
$3,4,2,1$	$m^{3421}(v) = (-3,-2,0,10)$,
$4,1,2,3$	$m^{4123}(v) = (-2,-1,8,0)$,
$4,1,3,2$	$m^{4132}(v) = (-2,-3,10,0)$,
$4,2,1,3$	$m^{4213}(v) = (-1,-2,6,0)$,
$4,2,3,1$	$m^{4231}(v) = (-3,-2,10,0)$,
$4,3,1,2$	$m^{4312}(v) = (-2,-3,10,0)$,
$4,3,2,1$	$m^{4321}(v) = (-3,-2,10,0)$.

Tabla 2.4: Vectores de contribuciones marginales del ejemplo 2.28

Señalemos que el ejemplo anterior demuestra que el conjunto de Weber no es, en general, un *catcher* para muchos conceptos de solución, los que estén definidos sobre el conjunto de las imputaciones, como el nucleolo, el conjunto de negociación (*bargaining set*), el *kernel* o los conjuntos estables (*Von Neumann-Morgenstern solutions*) (véase Driessen, 1988).

Podemos, pues, enunciar el siguiente corolario:

Corolario 2.29. *Para* $n \geq 4$, *no existen soluciones* Ψ, *ni puntuales ni conjuntistas, en el conjunto de todos los juegos,* G^N, *que*

seleccionen imputaciones, es decir, que si $I(v) \neq \emptyset, \Psi(v) \subseteq I(v)$,

seleccionen elementos del conjunto de Weber, es decir, que $\Psi(v) \subseteq Web(v)$.

2.4 La intersección entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones

Esta sección analiza algunos resultados sobre las relaciones entre el conjunto de las imputaciones de un juego T.U. con la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales (el conjunto de Weber) y en su mayor parte está basada en el artículo de Martínez de Albéniz y Rafels (1998).

Hemos observado que en determinadas clases de juegos cooperativos, suficientemente amplias, se puede asegurar que el conjunto de Weber se encuentra incluido dentro del conjunto de las imputaciones, y por otra parte en algunos casos se verifica la inclusión contraria, y el conjunto de Weber contiene al conjunto de las imputaciones.

En general, como es bien conocido, (véase Derks (1992) y Weber (1988)), el conjunto de Weber contiene el *core* en cualquier juego. Por tanto, si el *core* es no vacío, el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones tienen puntos en común (al menos los puntos del *core*). Podemos preguntarnos ahora: en general, +cuáles son las condiciones para que la intersección $I(v) \cap Web(v)$ sea no vacía?

Este problema se puede simplificar por medio de la 0-normalización, ya que la intersección entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones se conserva por la técnica de la 0-normalización.

Estudiemos ahora las condiciones que debe cumplir un juego esencial para asegurar que tiene una intersección no vacía entre el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber. En primer lugar veremos que para los juegos de 2 o 3 jugadores esta intersección es siempre no vacía:

Proposición 2.30. *Sea* (N, v) *un juego cooperativo con* $|N| \leq 3$, *esencial, es decir, tal que* $\sum_{i \in N} v(i) \leq v(N)$. *Entonces* $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$.

Demostración:

Si $|N| = 2$, hay solamente dos permutaciones posibles, $\theta_1 = (1,\ 2)$ y $\theta_2 = (2,\ 1)$ y por tanto los vectores de contribuciones marginales son los siguientes:

$$m^{\theta_1} = (v(1), v(N) - v(1)) \quad m^{\theta_2} = (v(N) - v(2), v(2))\,.$$

Es evidente que si el juego es esencial ($v(1) + v(2) \leq v(N)$), el conjunto de Weber coincide con el conjunto de las imputaciones (y además ambos conjuntos coinciden sólo si el juego es esencial).

Supongamos que $|N| = 3$ y v_0 es la 0-normalización de v. Hemos supuesto que el juego es esencial, y por tanto $v_0(N) \geq 0$.

Si $0 \leq v_0(ij) \leq v_0(N)$ para algún par de jugadores distintos $i, j \in N$, no hay nada que probar, ya que el vector de contribuciones marginales correspondiente a la permutación que hace entrar en primer lugar a i, luego a j y por último al jugador que falta, es una imputación.

Si no estamos en este caso, hay por lo menos un índice $i \in N$ tal que:

(a) $v_0(ij) < 0$ y $v_0(ik) < 0$, o

(b) $v_0(ij) > v_0(N)$ y $v_0(ik) > v_0(N)$,

en donde $i, j, k \in N$ son índices distintos. En el caso (a), y sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicho índice i corresponde al jugador 1, y en consecuencia $v_0(12) < 0$ y $v_0(13) < 0$. Entonces, dos vectores de contribuciones marginales serán

$$m^{123}(v_0) = (0, v_0(12), v_0(N) - v_0(12))$$

y

$$m^{132}(v_0) = (0, v_0(N) - v_0(13), v_0(13)).$$

Vamos a ver que un punto del segmento que los une pertenece a $I(v_0)$. Un punto genérico en el segmento es de la forma $x = (x_1, x_2, x_3) = \lambda m^{123}(v) + (1-\lambda) m^{132}(v)$, con $\lambda \in [0, 1]$. Esto se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= v_0(N) - v_0(13) - \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)], \\ x_3 &= v_0(13) + \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)], \end{aligned}$$

para $\lambda \in [0, 1]$.

Dado que se trata de un juego 0-normalizado, la condición para que x pertenezca a $I(v_0)$ consiste en

$$\begin{aligned} v_0(N) - v_0(13) - \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)] &\geq 0, \\ v_0(13) + \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)] &\geq 0, \end{aligned}$$

lo que se reduce a

$$\frac{-v_0(13)}{v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)} \leq \lambda \leq \frac{v_0(N) - v_0(13)}{v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)}$$

ya que $v_0(N) - v_0(13) - v_0(12) > 0$.

Evidentemente λ existe y $\lambda \in [0,1]$ porque los numeradores son menores que los denominadores, y $v_0(N)$ es positivo.

En el caso (b), la prueba es análoga: sin pérdida de generalidad, podemos suponer que dicho índice i corresponde al jugador 1, y en consecuencia $v_0(12) > v_0(N)$ y $v_0(13) > v_0(N)$. Entonces, dos vectores de contribuciones marginales serán

$$m^{123}(v_0) = (0, v_0(12), v_0(N) - v_0(12))$$

y

$$m^{132}(v_0) = (0, v_0(N) - v_0(13), v_0(13)).$$

Vamos a ver que un punto del segmento que los une pertenece a $I(v_0)$. Un punto genérico en el segmento es de la forma $x = (x_1, x_2, x_3) = \lambda m^{123}(v) + (1-\lambda) m^{132}(v)$, con $\lambda \in [0,1]$. Por tanto ese punto genérico será:

$$\begin{aligned} x_1 &= 0, \\ x_2 &= v_0(N) - v_0(13) - \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)], \\ x_3 &= v_0(13) + \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)], \end{aligned}$$

para $\lambda \in [0,1]$.

Dado que se trata de un juego 0-normalizado, la condición para que x pertenezca a $I(v_0)$ consiste en

$$\begin{aligned} v_0(N) - v_0(13) - \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)] &\geq 0, \\ v_0(13) + \lambda[v_0(N) - v_0(13) - v_0(12)] &\geq 0, \end{aligned}$$

lo que se reduce a

$$\frac{v_0(13)}{-v_0(N) + v_0(13) + v_0(12)} \geq \lambda \geq \frac{-v_0(N) + v_0(13)}{-v_0(N) + v_0(13) + v_0(12)}$$

ya que $v_0(N) - v_0(13) - v_0(12) < 0$. Evidentemente λ existe y $\lambda \in [0,1]$ porque los numeradores son menores que los denominadores, y $v_0(N)$ es menor que $v_0(13)$. $\square$

Por otra parte, en Rafels y Tijs (1997), se demuestra que en la siguiente clase Z^N de juegos,

$$Z^N := \left\{ v \in G^N \mid v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(i) \leq v(N), \quad \text{para toda } S \subseteq N \right\}$$

se cumple que $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$. Como veremos no se trata de una caracterización, ya que hay juegos que no pertenecen a dicha clase y para los cuales dicha intersección es también no vacía.

En esta clase de juegos Z^N se cumple que el conjunto de imputaciones $I(v) \neq \emptyset$, y además se trata de una clase bastante amplia, ya que contiene los juegos superaditivos, los equilibrados y los 0-monótonos, y en particular los juegos convexos. El resultado encontrado para $n = 3$ en la proposición 2.30 nos muestra que la intersección puede ser no vacía incluso en el caso que un juego no cumpla las condiciones para pertenecer a la clase Z^N.

Además los juegos que tienen intersección no vacía entre el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber forman un cono (el producto de un juego de esta clase por un número positivo pertenece a la clase) dentro de G^N, aunque no se trata de un cono convexo, como se puede comprobar en el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.31. *Sea $v_1 \in G_0^4$ el juego definido de la siguiente manera:*

$$\begin{array}{lll}
v_1(1)=0, & v_1(12)=-2, & v_1(123)=-3,\\
v_1(2)=0, & v_1(13)=-2, & v_1(124)=-3,\\
v_1(3)=0, & v_1(14)=-2, & v_1(134)=5,\\
v_1(4)=0, & v_1(23)=-2, & v_1(234)=5,\\
 & v_1(24)=-2, & \\
 & v_1(34)=5, & v_1(N)=5.
\end{array}$$

Y sea $v_2 \in G_0^4$ el juego definido por:

$$\begin{array}{lll}
v_2(1)=0, & v_2(12)=0, & v_2(123)=0,\\
v_2(2)=0, & v_2(13)=0, & v_2(124)=0,\\
v_2(3)=0, & v_2(14)=0, & v_2(134)=3,\\
v_2(4)=0, & v_2(23)=0, & v_2(234)=3,\\
 & v_2(24)=0, & \\
 & v_2(34)=5, & v_2(N)=0.
\end{array}$$

El primer juego, v_1, pertenece a Z^N, y, por tanto, $I(v_1) \cap Web(v_1) \neq \emptyset$. El segundo, v_2, cumple que $I(v_2) \cap Web(v_2) \neq \emptyset$, ya que el único elemento de $I(v_2)$ pertenece al conjunto de Weber. Sin embargo, si consideramos su suma $v_1+v_2 = v$, obtenemos el juego del ejemplo 2.28, para el cual $I(v) \cap Web(v) = \emptyset$.

Una caracterización de $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$

Vamos a estudiar una condición que caracterice que $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$, utilizando técnicas procedentes del campo de los juegos **no cooperativos**, y en concreto de los juegos bipersonales de suma cero.

Sea $v \in G_0^N$, y consideremos el juego matricial w dado por la matriz M^v, que tiene $n!$ filas y n columnas. Esta matriz se define de manera que cada fila i corresponde a un vector de contribuciones marginales. Es decir,

$$M^v_{i,\bullet} = m^{\theta_i}(v) \quad \text{para cada } \theta_i \in \Pi_N.$$

Dicha matriz se podrá escribir de la siguiente forma:

$$M^v = \begin{pmatrix} m^{\theta_1}(v) \\ m^{\theta_2}(v) \\ \vdots \\ m^{\theta_{n!}}(v) \end{pmatrix}$$

Un juego bipersonal no cooperativo de suma cero (o juego matricial) es un juego con dos jugadores en el que cada uno de ellos tiene un número finito de estrategias (estrategias puras), y el pago al primer jugador es el opuesto al del segundo en cualquier posible combinación de estrategias. Por tanto, es suficiente con especificar la función de pagos para uno solo de los jugadores, que habitualmente se especifica en forma de una matriz (véase, por ejemplo, Vorob'ev, 1977).

Por tanto podemos pensar en un juego de suma cero w con dos jugadores ficticios, el primero de los cuales tiene como conjunto de estrategias puras el conjunto S_I, mientras que el segundo jugador tiene como conjunto de estrategias puras S_{II}. Los pagos al primer jugador vienen dados por una matriz, M^v, que es la matriz de pagos. La descripción de este juego de suma cero es la siguiente:

(a) $S_I = \{\theta \in \Pi_N\} = \{\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{n!}\}$, y si no hay posible confusión, este conjunto se indicará por $\{1, 2, ..., n!\}$,

(b) $S_{II} = \{i \in N\} = \{1, 2, ...n\}$, y

(c) la matriz $M^v \in M_{n!\times n}$ se define de manera que cada fila i corresponde al vector de contribuciones marginales $M^v_{i,\bullet} = m^{\theta_i}(v)$.

Podemos interpretar este juego no cooperativo de la siguiente manera: el primer jugador ficticio elige una permutación $\theta_i \in S_I$, y el segundo elige un jugador $j \in S_{II} = N$. La función de pagos viene dada por la correspondiente contribución marginal, $M^v_{ij} = v(P_{\theta_i,j} \cup \{j\}) - v(P_{\theta_i,j})$.

Podemos considerar ahora la extensión mixta del juego, es decir, las estrategias mixtas generadas a partir de las estrategias puras. Son una mezcla probabilística de las estrategias puras. El espacio de estrategias mixtas es

$$\Delta(n!) = \left\{ \lambda \in R^{n!} \mid \sum_{i=1}^{n!} \lambda_i = 1 \text{ y } \lambda_i \geq 0, \quad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n! \right\}$$

para el primer jugador y

$$\Delta(n) = \{y \in R^n \mid \sum_{i\in N} y_i = 1, \; y_i \geq 0, \; i = 1, 2, ..., n\},$$

para el segundo.

Es un resultado conocido que para cualquier juego bipersonal de suma cero, en estrategias mixtas existe siempre un valor para el juego, $w^*(M^v)$, y estrategias óptimas del primer y del segundo jugador, $\lambda_I^* \in \Delta(n!)$ y $y_{II}^* \in \Delta(n)$ tal que[1]

$$\lambda \cdot M^v \cdot y_{II}^{*t} \leq \lambda_I^* \cdot M^v \cdot y_{II}^{*t} \leq \lambda_I^* \cdot M^v \cdot y^t \ , \quad \text{para todo } \lambda \in \Delta(n!) \ \text{ y todo } y \in \Delta(n) \ .$$

El valor del juego es $w^*(M^v) = \lambda_I^* \cdot M^v \cdot y_{II}^{*t}$, y las estrategias óptimas forman los equilibrios de Nash del juego matricial.

Denotaremos por $O_I(M^v)$ el conjunto de estrategias óptimas para el primer jugador y $O_{II}(M^v)$ para el segundo. El conjunto de todas las estrategias del primer jugador ficticio da lugar a todos los puntos del conjunto de Weber, ya que éstos no son más que las combinaciones convexas de los vectores de contribuciones marginales. Los productos $\lambda \cdot M^v$ con $\lambda \in \Delta(n!)$ proporcionan todas estos puntos. En particular, el valor de Shapley,

$$Sh(v) := \frac{1}{n!} \sum_{\theta \in \Pi_n} m^\theta(v)$$

corresponde a la estrategia mixta igualitaria $\lambda = (\frac{1}{n!})_{\theta \in \Pi_n}$ que, como ya hemos comentado, pertenece siempre al conjunto de Weber.

Si suponemos que $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$, hay un punto de la intersección

$$\tilde{x} = \sum_{\theta \in \Pi_n} \lambda_\theta \, m^\theta(v),$$

donde los coeficientes verifican $\lambda_\theta \geq 0$, y $\sum\limits_{\theta \in S_n} \lambda_\theta = 1$ y que cumple también $\tilde{x}_i \geq 0, \ i = 1, 2, ..., n$.

El vector $\tilde{x}$ se puede escribir como $\tilde{x} = \lambda \cdot M^v \geq 0$, en donde

$$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_{n!}) \in R^{n!} \ , \ \lambda_i \geq 0, \ \sum_{i=1}^{n!} \lambda_i = 1 \ .$$

Para cualquier $y \in \Delta(n)$, tenemos

$$\lambda \cdot M^v \cdot y^t \geq 0.$$

Ahora estamos en condiciones de establecer un teorema que caracteriza si la intersección entre $I(v)$ y $Web(v)$ es vacía o no, en términos del juego matricial asociado.

Teorema 2.32. *Sea $v \in G_0^N$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

[1] El superíndice ^{t} indica que el vector o matriz correspondiente se traspone.

(i) $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$,

(ii) $w^*(M^v) \geq 0$.

Demostración:

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Supongamos que $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$, y sea $z \in I(v) \cap Web(v)$. Dado que $z \in Web(v)$, entonces

$$z = \sum_{\theta \in \Pi_n} \lambda_\theta m^\theta(v) \ = \lambda \cdot M^v$$

con $\lambda_\theta \geq 0$, $\sum\limits_{\theta \in \Pi_n} \lambda_\theta = 1$ y dado que $z \in I(v)$, entonces

$$z_i \geq 0 \quad \text{para } i = 1, 2, ..., n \ ,$$

o, equivalentemente[2]

$$z \cdot e^{it} \geq 0 \quad \text{para} \ \ i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Supongamos ahora que $y^* \in O_{II}(M^v)$ es una estrategia óptima para el segundo jugador. Podemos afirmar que

$$\lambda \cdot M^v \cdot y^{*t} = z \cdot y^{*t} = z \cdot \sum_{i \in N} y_i^* e^{it} = \sum_{i \in N} y_i^*(z \cdot e^{it}) \geq 0.$$

Y por lo tanto,

$$0 \leq \lambda \cdot M^v \cdot y^{*t} \leq \lambda^* \cdot M^v \cdot y^{*t} = w^*(M^v) \ .$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Dado que $w^*(M^v) \geq 0$, sabemos que para las estrategias óptimas $\lambda_I^* \in O_I(M^v)$, $\quad y_{II}^* \in O_{II}(M^v)$, se verifican las desigualdades siguientes:

$$0 \leq \lambda_I^* \cdot M^v \cdot y_{II}^{*t} \leq \lambda_I^* \cdot M^v \cdot y^t \ , \quad \text{para todo} \ \ y \in \Delta(n).$$

En particular, si tomamos $x = e^i$, $i = 1, 2, ..., n$, los vectores de la base canónica de $\mathbb{R}^n$, obtenemos

$$0 \leq \lambda_I^* \cdot M^v \cdot e^{it} \ , \ \text{para} \ \ i = 1, 2, ..., n.$$

Es decir, $\lambda_I^* \cdot M^v = z$ es un punto del conjunto de Weber que cumple $z_i \geq 0$, y en consecuencia, $z \in I(v) \cap Web(v)$. □

A partir del teorema anterior podemos enunciar la condición para que la intersección entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones sea no vacía.

[2]El vector e^i es el vector i-ésimo de la base canónica de $\mathbb{R}^n$.

Corolario 2.33. *Sea $v \in G^N$ un juego arbitrario. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(i) $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$.

(ii) $w^*(M^{v_0}) \geq 0$.

Significado y cotas para el valor $w^*(M^v)$

Supongamos que el juego cooperativo (N, v) está cero-normalizado. En este caso vamos a dar una interpretación del valor $w^*(M^v)$, lo que nos puede dar una comprensión mayor de su significado. Para los juegos matriciales (véase, por ejemplo, Vorob'ev, 1977), sabemos que

$$w^*(M^v) = \max_{\lambda \in \Delta(n!)} \left\{ \min_{j \in N} \lambda \cdot M^v_{\bullet j} \right\} = \max_{z \in Web(v)} \left\{ \min_{j \in N} z_j \right\} \tag{2.1}$$

y también

$$w^*(M^v) = \min_{y \in \Delta(n)} \left\{ \max_{i \in \{1,2,\ldots,n!\}} M^v_{i\bullet} \cdot y^t \right\} = \min_{y \in \Delta(n)} \left\{ \max_{\theta \in \Pi_n} m^\theta(v) \cdot y^t \right\}. \tag{2.2}$$

La expresión (2.1) establece:

para cualquier $z \in Web(v)$ elegimos su coordenada mínima, y

seleccionamos posteriormente el mayor de estos valores, que será el valor del juego M^v.

Si analizamos los puntos del conjunto de imputaciones con la coordenada mínima igual a una constante K, se obtiene la intersección de un diedro de lados paralelos a los planos de coordenadas que pasa por el punto $(K, K, \ldots, K)$, con el plano de eficiencia. Por eso está claro que el valor máximo de K para que esta intersección sea no vacía ha de ser $\dfrac{v(N)}{n}$.

En el caso de tres jugadores, de una manera gráfica se puede observar que las líneas que tienen la misma coordenada mínima forman triángulos paralelos a las paredes del conjunto de las imputaciones:

Para encontrar el punto o puntos del conjunto de Weber que corresponden a las estrategias óptimas del juego de suma cero dado por M^v, debemos hallar las intersecciones entre las semirrectas que unen el centro del conjunto de imputaciones $\left(\dfrac{v(N)}{n}, \dfrac{v(N)}{n}, \ldots, \dfrac{v(N)}{n}\right)$ con los extremos del conjunto de imputaciones y el conjunto de Weber. Entre todos estos puntos de las intersecciones se escoge aquel que tiene la coordenada mínima mayor.

Calculemos el valor para el siguiente ejemplo de un juego de tres jugadores:

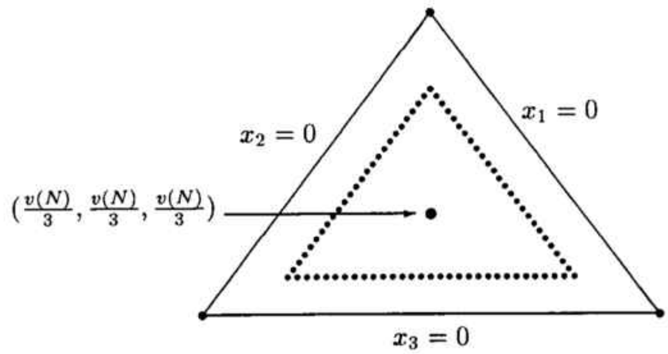

Figura 2.3: Curvas de nivel para el juego M^v

Ejemplo 2.34. *Consideremos el juego 0-normalizado siguiente de tres jugadores,* $N = \{1, 2, 3\}$*:*

$$\begin{array}{rclrclrcl} v(1) & = & 0\ , & v(12) & = & 3\ , & & & \\ v(2) & = & 0\ , & v(13) & = & 1\ , & v(N) & = & 12\ . \\ v(3) & = & 0\ , & v(23) & = & 12\ , & & & \end{array}$$

Los vectores de contribuciones marginales correspondientes se indican en la tabla 2.5, así como si son vértices del conjunto de Weber:

Ordenación	Vector de contribuciones marginales de v	
$1,2,3$	$(0,3,9)$	no es un vértice
$1,3,2$	$(0,11,1)$	no es un vértice
$2,1,3$	$(3,0,9)$	
$2,3,1$	$(0,0,12)$	
$3,1,2$	$(1,11,0)$	
$3,2,1$	$(0,12,0)$	

Tabla 2.5: Vectores de contribuciones marginales del juego del ejemplo 2.34

Entonces, la representación del conjunto de Weber es la que se muestra en la figura 2.4, donde se ha señalado también el punto del conjunto de Weber seleccionado por el criterio de esta sección:

El punto del conjunto de Weber que corresponde a las estrategias óptimas del juego (M^v) *es* $A = (\frac{33}{13}, \frac{33}{13}, \frac{90}{13})$. *El valor* $w^*(M^v)$ *es* $\frac{33}{13}$.

El juego matricial M^v queda resuelto en estrategias puras cuando el punto seleccionado del conjunto de Weber es un vector de contribuciones marginales. Si

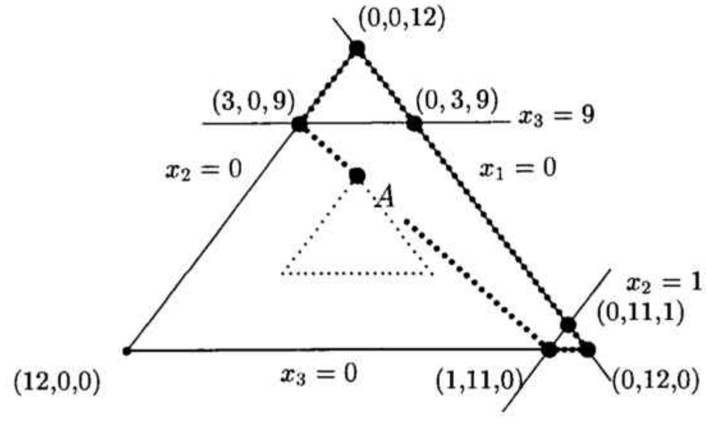

Figura 2.4: El conjunto de Weber del juego v del ejemplo 2.34

usamos la interpretación anterior y seleccionamos puntos especiales del conjunto de Weber, se pueden obtener cotas para el valor $w^*(M^v)$.

Proposición 2.35. *Sea $v \in G_0^N$, y $Sh(v)$ el valor de Shapley de v. Entonces,*

$$\min_{i=1,2,\ldots,n} Sh_i(v) \leq w^*(M^v) \leq \frac{v(N)}{n}. \tag{2.3}$$

Demostración:

Si tomamos $z = Sh(v)$ en la expresión (2.1), y $y = \frac{1}{n}\, e^N$ en la expresión (2.2), las desigualdades anteriores (2.3) resultan inmediatamente. □

Dichas cotas se pueden alcanzar, como muestra el ejemplo siguiente:

Ejemplo 2.36. *Considérese el siguiente juego simétrico, dado por una función arbitraria $f : \{0, 1, \ldots, n\} \longrightarrow \mathbb{R}$, con la condición $f(0) = 0$, y $f(n) > 0$. Dicho juego queda definido para cualquier coalición:*

$$v(S) = f(|S|) \ \textit{para toda} \ S \subseteq N .$$

A causa de la simetría, el valor de Shapley proporciona lo mismo para todos los jugadores, y por tanto las desigualdades (2.3) se convierten en igualdades.

Vamos a ver ciertas propiedades del conjunto de Weber cuando se alcanza la cota superior del valor $w^*(M^v)$. La primera da condiciones bajo las cuales el centro del conjunto de las imputaciones, $\frac{v(N)}{n}\, e^N$, pertenece al conjunto de Weber.

Proposición 2.37. *Sea $v \in G_0^N$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $\dfrac{v(N)}{n}\, e^N \in Web(v)$,

(ii) $w^*(M^v) = \dfrac{v(N)}{n}$.

Demostración:

$(i) \Longrightarrow (ii)$

Por la proposición 2.35 y la expresión (2.1), basta tomar

$$z = \frac{v(N)}{n}\, e^N \in Web(v) \ .$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

Si $w^*(M^v) = \dfrac{v(N)}{n}$, existe algún $z^* \in Web(v)$, y algún $y^* \in \Delta(n)$ tales que

$$\frac{v(N)}{n} = z^* \cdot y^{*t} \leq z^* \cdot y^t, \quad \text{para cualquier} \quad y \in \Delta(n).$$

Consideremos ahora $y = e^i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Entonces

$$z_i^* \geq \frac{v(N)}{n}, \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n \ .$$

Pero por la eficiencia, $z^* = \dfrac{v(N)}{n}\, e^N$, y la demostración ha finalizado. □

Podemos hallar una relación entre los equilibrios del juego matricial asociado y el valor de Shapley del juego. El resultado siguiente da una caracterización de las condiciones para la coincidencia del valor de Shapley con la distribución igualitaria de $v(N)$, $\dfrac{v(N)}{n}\, e^N$.

Proposición 2.38. *Sea $v \in G_0^N$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

(i) $Sh_i(v) = \dfrac{v(N)}{n}$, *para* $i = 1, 2, ..., n$,

(ii) $\left((\dfrac{1}{n!})_{\theta \in \Pi_n} , \dfrac{1}{n}\, e^N \right)$ *es un equilibrio del juego matricial M^v.*

Demostración:

$(i) \Longrightarrow (ii)$

De la proposición 2.37, y dado que $Sh(v) \in Web(v)$, se cumple que

$$w^*(M^v) = \frac{v(N)}{n}.$$

Veamos, pues, que $\left((\frac{1}{n!})_{\theta\in\Pi_n}, \frac{1}{n}\, e^N\right)$ es un equilibrio en el juego matricial M^v. Para cualquier $\lambda \in \Delta(n!)$,

$$\lambda \cdot M^v \cdot (\frac{1}{n}\, e^N)^t = z \cdot (\frac{1}{n}\, e^N)^t = \frac{v(N)}{n}$$

y para cualquier $y \in \Delta(n)$,

$$\Phi(v) \cdot y^t = \frac{v(N)}{n}\, e^N \cdot y^t = \frac{v(N)}{n}.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$

En este caso, dado que $(\frac{1}{n!})_{\theta\in\Pi_n} \cdot M^v = Sh(v)$, tenemos

$$\frac{v(N)}{n} = (\frac{1}{n!})_{\theta\in\Pi_n} \cdot M^v \cdot (\frac{1}{n}\, e^N)^t \leq Sh(v) \cdot y^t, \quad \text{para cualquier } y \in \Delta(n).$$

Si tomamos $y = e^i$, $i = 1, 2, ..., n$, obtenemos $Sh_i(v) \geq \frac{v(N)}{n}$. Pero, por la eficiencia del valor de Shapley:

$$Sh_i(v) = \frac{v(N)}{n}, \qquad \text{para } i = 1, 2, \ldots, n\ ,$$

lo que acaba la demostración □

2.5 Otro conjunto relacionado con el conjunto de Weber: el *selectope*

Para finalizar nuestro estudio del conjunto de Weber y su relación con el conjunto de las imputaciones, vamos a dar las definiciones y propiedades más importantes de un conjunto relacionado con el primero, y para el cual podemos señalar su relación con el conjunto de las imputaciones, el *selectope*.

El *selectope*

Ahora vamos a analizar el *selectope*, un conjunto que siempre contiene al conjunto de Weber. Parece natural pensar que si ampliamos el conjunto de Weber podemos encontrar un conjunto que conserve las nociones de contribuciones marginales y que siempre contenga algún punto del conjunto de las imputaciones.

La noción de selector aparece en el trabajo de Hammer, Peled y Sorensen (1977) como una función que asigna a cada coalición no vacía del conjunto N

un elemento de dicha coalición. Más formalmente, un *selector* es una función $\alpha : 2^N \backslash \emptyset \longrightarrow N$ con $\alpha(S) \in S$ para cada subconjunto no vacío S de N. Su significado es que un selector asigna a cada coalición un "representante" de dicha coalición. El conjunto de todos los selectores sobre $2^N \backslash \emptyset$ se indica por A^N.

Por otra parte, para cada juego cooperativo v y cada coalición S, los dividendos (Harsanyi, 1963) se definen de manera recursiva como:

$$\Delta_v(S) := \begin{cases} 0 & \text{si } S = \emptyset \\ v(S) - \sum\limits_{T \subseteq S, T \neq S} \Delta_v(T) & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Otra definición equivalente es la siguiente:

$$\Delta_v(S) := \sum_{T \subseteq S} (-1)^{s-t} v(T)$$

donde s y t corresponden a la cardinalidad de S y T respectivamente.

Si se considera el espacio vectorial de los juegos cooperativos sobre el mismo conjunto de jugadores N, los dividendos no son más que las coordenadas del juego v en la base de los juegos de unanimidad, los cuales se definen de la siguiente manera, para cada coalición T no vacía:

$$u_T(S) := \begin{cases} 1 & \text{si } T \subseteq S \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se trata de una base del mencionado espacio vectorial. Entonces se puede escribir la expresión del juego v en la base de unanimidad:

$$v = \sum_{T \subseteq N} \Delta_v(T) \cdot u_T.$$

Resulta de forma inmediata que

$$v(S) = \sum_{T \subseteq S} \Delta_v(T).$$

En este contexto, el *valor del selector* α es el vector m^α definido por

$$m_i^\alpha(v) = \sum_{S : i = \alpha(S)} \Delta_v(S),$$

para cada $i \in N$ y cada juego $v \in G^N$.

El *selectope* para un juego v se define como la envoltura convexa de todos los valores de los selectores. Formalmente:

Definición 2.39. *Sea $v \in G^N$ un juego cooperativo. El* ***selectope*** *se define como*

$$Sel(v) := convex \left\{ m^\alpha(v) \in R^N \mid \alpha \in A^N \right\}$$

El *selectope* fue introducido en el trabajo ya mencionado de Hammer et al. (1977), y ha sido analizado en un reciente artículo de Derks, Haller y Peters (2000). En él se estudia su relación con el *core* y el conjunto de Weber, así como algunas otras propiedades. El *selectope* es obviamente un conjunto convexo, compacto y no vacío.

Cada selector asigna a un jugador de la coalición (su "representante") el dividendo correspondiente a la coalición. Por eso el *selectope* puede ser visto como todas las maneras de repartir los dividendos de las coaliciones entre los jugadores.

En el artículo ya citado de Derks *et al.* (2000) se demuestra que cada vector de contribuciones marginales corresponde a un valor de un selector, el que asigna a cada coalición S el elemento de S que entra en último lugar en la permutación.

Por otra parte, si se define que un selector α es *consistente* si $\alpha(S) = \alpha(T)$ siempre que $S \subset T$ y $\alpha(T) \in S$, (lo que formalmente es semejante a la condición de Nash(1950) de la Independencia de las Alternativas Irrelevantes) podemos señalar una condición para que un selector provenga de una ordenación.

Esto se expresa en el lema 1 y lema 2 de dicho artículo, que exponemos aquí:

Lema 2.40. *Sea* $\pi = (i_1, i_2, ..., i_n)$ *una permutación de* N *y sea* $\alpha : 2^N \backslash \emptyset \longrightarrow N$ *definida por*

$$\alpha(S) := i_k$$

donde $k = \max\{j : i_j \in S\}$.

Entonces, α *es un selector y* $m^{\alpha}(v) = m^{\pi}(v)$ *para todo juego* $v \in G^N$.

Por otra parte, si α *es un selector, existe una ordenación* $\pi = (i_1, i_2, ..., i_n)$ *de* N *con* $m^{\alpha}(v) = m^{\pi}(v)$ *para todo juego* $v \in G^N$ *si y sólo si* α *es consistente, y la ordenación* π *se define recursivamente como*

$$\begin{aligned} i_n &= \alpha(N) \\ i_k &= \alpha(N \setminus \{i_{k+1}, ..., i_n\}) \end{aligned}$$

para $k = n-1, n-2, ..., 1$.

Ya en el trabajo inicial de Hammer *et al.* (1977), y utilizando resultados más generales, se examinan las relaciones entre el *core* y el *selectope*, lo que en el trabajo de Derks *et al.* (2000) se estudia directamente.

El *selectope* tiene una estructura del tipo del *core*, y sus paredes corresponden a vectores normales de coeficientes $0-1$, y se puede encontrar la expresión del *selectope* como el *core* de un juego definido adecuadamente, como veremos a continuación.

Dado un juego arbitrario $v \in G^N$, podemos definir los siguientes juegos:

$$v^+ = \sum_{T:\Delta_v(T)>0} \Delta_v(T) \cdot u_T$$

y

$$v^- = \sum_{T:\Delta_v(T)<0} -\Delta_v(T) \cdot u_T.$$

Con estas definiciones se obtiene:

$$v = v^+ - v^-.$$

Derks *et al.* (2000) prueban el siguiente teorema:

Teorema 2.41. *El* selectope *de un juego v es el* core *del juego convexo*

$$\tilde{v} = v^+ + \left(-v^-\right)^d.$$

Esta expresión del *selectope* como *core* de otro juego permite dar algunas interpretaciones para los extremos. El valor de una coalición se puede interpretar de la siguiente manera, si se escribe en términos de dividendos:

$$\begin{aligned} \tilde{v}(S) &= v^+ - v^-(N) + v^-(N \setminus S) \\ &= \sum_{T:T\subseteq S,\Delta_v(T)>0} \Delta_v(T) + \sum_{T:T\cap S\neq\emptyset,\Delta_v(T)<0} \Delta_v(T). \end{aligned}$$

Los vértices del *selectope* corresponden a ciertas asignaciones de los dividendos a los diversos jugadores, en lo que se llaman "*greedy allocations*", repartos avariciosos o egoístas.

Resulta de manera sencilla que el *core* es un subconjunto del *selectope*, así como que el conjunto de Weber es también parte del *selectope* (ya que, en particular, los vectores de contribuciones marginales corresponden a un selector).

También como consecuencia, Derks *et al.* (2000) presentan una caracterización de la inclusión del *selectope* en el conjunto de las imputaciones, que resulta ser equivalente a la igualdad entre el *core* y el *selectope.*

Para ello necesitamos definir una clase de juegos. Un juego $v \in G^N$ es **casi-positivo** si los dividendos de todas las coaliciones no unitarias son no negativos, es decir, si $\Delta_v(T) \geq 0$ para $|T| \geq 2$.

Claramente se puede ver que los juegos casi-positivos forman un subconjunto de los juegos convexos. El *core* y el *selectope* coinciden sobre la clase de los juegos casi-positivos, lo que ya se señala en el trabajo inicial de Hammer *et al.*(1977)

El teorema que presenta la caracterización de la inclusión entre $Sel(v)$ y $I(v)$ (Teorema 2), no es correcto en su totalidad, ya que se afirma que $Sel(v) = I(v)$ si y solo si v es modular. Veremos la condición precisa que permite afirmar la igualdad entre ambos conjuntos posteriormente.

El siguiente teorema se halla en Derks *et al.* (2000):

Teorema 2.42. *Sea $v \in G^N$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $Sel(v) = Core(v)$,
2. $Sel(v) \subseteq I(v)$,
3. *v es casi-positivo.*

Este teorema nos proporciona una caracterización, en términos de los dividendos del juego, de la inclusión del *selectope* en el conjunto de las imputaciones. Por otra parte Crama, Hammer y Holzman (1989) proporcionan una caracterización, mediante desigualdades, de los juegos casi-positivos.

Para caracterizar la igualdad entre el *selectope* y el conjunto de las imputaciones necesitamos en primer lugar un lema técnico.

Lema 2.43. *Sea $v \in G^N$, v casi-positivo. Entonces, si el extremo del conjunto de las imputaciones $\hat{e}^i \in Sel(v)$, se cumple que $\Delta_v(S) = 0$ para cualquier $S \subset N$ tal que $i \notin S$ y $|S| \geq 2$.*

Demostración:
Dado que el juego v es casi-positivo, por el teorema 2.42, $Sel(v) \subseteq I(v)$. Además si un extremo del conjunto de las imputaciones $\hat{e}^i$ pertenece a $Sel(v)$, debe tratarse de un extremo de este conjunto, y por tanto existe un selector $\alpha \in A^N$ tal que $m^\alpha(v) = \hat{e}^i$. Para cualquier S tal que $i \notin S$, forzosamente se cumple que $\alpha(S) = j \neq i$. Entonces

$$m_j^\alpha(v) = \sum_{T:\alpha(T)=j} \Delta_v(T) = \Delta_v(\{j\}) + \sum_{T:\alpha(T)=j,|T|\geq 2} \Delta_v(T).$$

Pero como $\Delta_v(\{j\}) = v(j)$, $m_j^\alpha(v) = v(j)$ y el juego v es casi-positivo, forzosamente

$$\Delta_v(T) = 0 \quad \text{para todo } T \subset N \quad \text{con } \alpha(T) = j, |T| \geq 2.$$

Y por tanto

$$\Delta_v(S) = 0 \quad \text{para todo } S \subset N \quad \text{con } i \notin S, |S| \geq 2.$$

Además, de la propia demostración se deduce que si para alguna coalición S que contiene al jugador i, el selector asignara el dividendo a otro jugador, este dividendo debe ser 0. Por lo tanto siempre podemos elegir otro selector que asigne dicha coalición al jugador i, sin modificar $m^\alpha(v)$. Es decir, el selector α se puede elegir de forma que $\alpha(S) = i$ si $i \in S$. □

Ahora podemos proporcionar el teorema de caracterización de la igualdad:

Teorema 2.44. *Sea* $v \in G^N$. *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $Sel\,(v) = I\,(v)$,

2. *Para cualquier* $S \subset N$, *con* $|S| \geq 2$ *y* $S \neq N$, $\Delta_v\,(S) = 0$ *y* $\Delta_v\,(N) \geq 0$.

Demostración:

Si $Sel\,(v) = I\,(v)$, todos los extremos del conjunto de las imputaciones pertenecen al selectope. Teniendo en cuenta el teorema 2.42, el juego v es casi-positivo, y podemos aplicar el lema 2.43 anterior.

Si se aplica a todos los vértices, todos los dividendos deben ser 0 para cualquier coalición S con $|S| \geq 2$, excepto la coalición total, en la cual están todos los jugadores. Por otra parte, dado que el juego es casi-positivo, debe cumplirse que $\Delta_v\,(N) \geq 0$.

Para ver la otra implicación, obsérvese que cualquier selector asigna a todos los jugadores menos a uno el dividendo de la coalición individual, mientras que al jugador restante le asigna el dividendo de su coalición individual más el dividendo de la coalición total. Por la eficiencia, se trata de un extremo del conjunto de las imputaciones. Y por otra parte se puede seleccionar un selector adecuado para todos los extremos del conjunto de las imputaciones. □

Las relaciones entre el *selectope* y el conjunto de Weber se estudian también en el artículo de Derks *et al.*(2000). Para ello, dada una ordenación arbitraria $\pi \in \Pi_N$ se define el selector α de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \alpha\,(T) &= \max_{\pi}\,(T) && \text{para toda } T \text{ con } \Delta_v\,(T) > 0, \text{ y} \\ \alpha\,(T) &= \min_{\pi}\,(T) && \text{para toda } T \text{ con } \Delta_v\,(T) < 0, \end{aligned}$$

donde $\max_\pi\,(T)$ indica el último elemento de T en la ordenación dada por π. De manera similar, $\min_\pi\,(T)$ indica el jugador de T que es el primero en entrar en la "cola" que indica la ordenación π. El valor de $\alpha\,(T)$ para aquellas T tales que su dividendo sea cero es irrelevante.

Si es posible elegir α de forma que sea consistente, se dice que la permutación π *es consistente en el juego* v. Para encontrar la igualdad entre el *selectope* y el conjunto de Weber se puede ofrecer el siguiente teorema:

Teorema 2.45. *El selectope y el conjunto de Weber de un juego* v *coinciden si y solo si todas las permutaciones son consistentes en* v.

Alguna otra condición más técnica se puede deducir a partir del trabajo de Derks y Peters (1998) y no tiene especial interés para nosotros.

Para finalizar, tiene interés estudiar si con este conjunto, a priori más amplio que el conjunto de Weber, se puede afirmar que la intersección entre el *selectope* y el conjunto de las imputaciones es siempre no vacía. Desgraciadamente, Derks *et al.* (2000) proporcionan un ejemplo en el que al observar que el *selectope* no contiene al nucleolo del juego, se prueba que no tiene ningún punto común con el conjunto de las imputaciones.

Ejemplo 2.46. *Considérese el siguiente juego de cuatro jugadores, v, definido por*

$$\begin{array}{lll}
v(\{1\})=0 & v(\{1,2\})=1 & v(\{1,2,3\})=4 \\
v(\{2\})=0 & v(\{1,3\})=1 & v(\{1,2,4\})=4 \\
v(\{3\})=0 & v(\{1,4\})=1 & v(\{1,3,4\})=-7 \\
v(\{4\})=0 & v(\{2,3\})=1 & v(\{2,3,4\})=-7 \\
 & v(\{2,4\})=1 & \\
 & v(\{3,4\})=-10 & v(\{1,2,3,4\})=0.
\end{array}$$

En este juego, los dividendos de las coaliciones de cardinalidad 1 *valen* 0, -10 *para la coalición* $\{3,4\}$ *y* 1 *para el resto de coaliciones.*

En cualquier punto del selectope*, los jugadores* 1 *y* 2*, conjuntamente, deben recibir por lo menos* 1*, mientras que la única imputación es el vector nulo.*

Señalemos que el ejemplo anterior demuestra que el *selectope* no es, en general, un *catcher* para muchos conceptos de solución, los que estén definidos sobre el conjunto de las imputaciones.

Podemos, pues, enunciar el siguiente corolario:

Corolario 2.47. *Para $n \geq 4$, no existen soluciones Ψ, ni puntuales ni conjuntistas, en el conjunto de todos los juegos, G^N, que*

seleccionen imputaciones, es decir, que si $I(v) \neq \emptyset$, $\Psi(v) \subseteq I(v)$,

seleccionen elementos del selectope*, es decir, que $\Psi(v) \subseteq Sel(v)$.*

Capítulo 3

El conjunto de Weber y el *core*

El conjunto de Weber de un juego es, en general, difícil de describir en forma sintética, ya que está definido como la envoltura convexa de un cierto número de vectores (que además crece como $n!$ al aumentar el número de jugadores) y solamente para determinadas clases de juegos la descripción del conjunto de Weber se puede dar fácilmente. Sin embargo, es un resultado conocido que el conjunto de Weber contiene siempre al *core* del juego.

En este capítulo vamos a estudiar las relaciones entre los conjuntos de Weber de distintos juegos. En el caso del *core,* se sabe que al estudiar el *core* de dos juegos, si uno es mayor que el otro (con la ordenación usual) y supuesta la misma eficiencia, el *core* del juego menor contiene al *core* del juego mayor. Sin embargo, ejemplos sencillos muestran que en el caso de los conjuntos de Weber, la relación no es directa, y que la inclusión, sea en un sentido o en el contrario, no se da en general.

Por ello, en primer lugar analizaremos unos resultados sobre la intersección de los conjuntos de Weber de juegos relacionados entre sí por relaciones de orden, lo que nos permitirá posteriormente recuperar por otra vía algunos resultados clásicos, así como proseguir nuestro análisis de las relaciones entre el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber.

3.1 La intersección de los conjuntos de Weber

En esta sección, la cuestión que nos proponemos analizar es la relación entre los conjuntos de Weber de dos juegos arbitrarios v_1 y v_2, que tienen la misma eficiencia. En este caso, ¿podemos asegurar alguna cosa de la intersección $Web(v_1) \cap Web(v_2)$? (nótese que si no tuvieran la misma eficiencia no se puede hablar de posible intersección de los conjuntos de Weber).

Recordemos, en primer lugar, que si dos juegos cooperativos $v, v' \in G^N$ están ordenados se puede enunciar la siguiente proposición, inmediata, y que no demostraremos:

Proposición 3.1. *Sean dos juegos cooperativos, $v_1, v_2 \in G^N$, de manera que v_2 es equilibrado, y tales que*

$$v_1(S) \leq v_2(S) \textit{ para cualquier coalición } S \subseteq N \quad y \quad v_1(N) = v_2(N).$$

Entonces el juego v_1 es equilibrado, y

$$Core(v_2) \subseteq Core(v_1).$$

De aquí, se puede demostrar la siguiente proposición:

Proposición 3.2. *Sean dos juegos cooperativos, $v_1, v_2 \in G^N$, de manera que v_2 es equilibrado, y tales que*

$$v_1(S) \leq v_2(S) \textit{ para cualquier coalición } S \subseteq N \quad y \quad v_1(N) = v_2(N).$$

Entonces,

$$Core(v_2) \subseteq Web(v_1) \cap Web(v_2) \subseteq Web(v_2).$$

Demostración:
Por la proposición 3.1 anterior,

$$Core(v_2) \subseteq Core(v_1),$$

y por la inclusión del *core* en el conjunto de Weber, tenemos

$$Core(v_1) \subseteq Web(v_1),$$

que junto con la inclusión correspondiente al juego v_2, proporciona el resultado.
□

También, en el caso de que el juego mayor sea convexo podemos establecer una inclusión:

Proposición 3.3. *Sean dos juegos cooperativos, $v_1, v_2 \in G^N$, de manera que v_2 es convexo, y tales que*

$$v_1(S) \leq v_2(S) \textit{ para cualquier coalición } S \subseteq N \quad y \quad v_1(N) = v_2(N).$$

Entonces,

$$Core(v_2) = Web(v_2) \subseteq Core(v_1) \subseteq Web(v_1).$$

Demostración:

Al ser el juego v_2 convexo, tenemos la igualdad entre el *core* y el conjunto de Weber, mientras que por la proposición 3.1 anterior,

$$Core(v_2) \subseteq Core(v_1),$$

y por la inclusión del *core* en el conjunto de Weber, tenemos

$$Core(v_1) \subseteq Web(v_1).$$

□

En particular, si un juego se puede mayorar por un juego convexo, cualquier vector de contribuciones marginales de este último pertenecerá al *core* del juego, así como el valor de Shapley.

Estos resultados parciales se refieren solamente a una clase de juegos relativamente pequeña, si bien importante. Ahora vamos a demostrar el teorema que permite asegurar que, si dos juegos están ordenados y tienen la misma eficiencia, la intersección entre los conjuntos de Weber es no vacía. La demostración hace uso del conocido teorema del hiperplano separador (véase Nikaido, 1968 o Webster, 1994) del análisis convexo. Este teorema aparece como sumamente importante porque tiene después implicaciones en diversos campos, lo que permite recuperar ciertos resultados conocidos.

Teorema 3.4. **[Teorema de la intersección]**

Sean dos juegos cooperativos arbitrarios, $v_1, v_2 \in G^N$, tales que

$$v_1(S) \leq v_2(S) \quad \textit{para cualquier coalición } S \subseteq N \quad y \quad v_1(N) = v_2(N).$$

Entonces,

$$Web(v_1) \cap Web(v_2) \neq \emptyset.$$

Demostración:

Supongamos que $Web(v_1) \cap Web(v_2) = \emptyset$. En este caso, y dado que $Web(v_1)$ y $Web(v_2)$ son conjuntos no vacíos, convexos y compactos de $\mathbb{R}^n$, existirá un hiperplano separador estricto entre ellos[1]:

$$\alpha \cdot x = K,$$

que vendrá dado por el vector de incidencia $\alpha \in \mathbb{R}^n$, y por la constante $K \in \mathbb{R}$.

Como aquellos conjuntos vienen determinados como la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales (no necesariamente vértices), éstos serán separados estrictamente por el hiperplano:

$$\alpha \cdot m^{\theta}(v_1) > K > \alpha \cdot m^{\theta'}(v_2) \quad \text{para cualesquiera } \theta\,,\ \theta' \in \Pi_N.$$

[1] Véase por ejemplo Webster (1994), teorema 2.4.6

Ordenamos los coeficientes de α de forma creciente, y consideramos la permutación $\theta = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \Pi_N$, que ordena los jugadores según los coeficientes del hiperplano separador α, es decir, que cumple que

$$\alpha_{i_n} \leq \alpha_{i_{n-1}} \leq \ldots \leq \alpha_{i_2} \leq \alpha_{i_1}.$$

Obsérvese que dicha ordenación existe siempre, aunque no sea necesariamente única. Para esta permutación, si llamamos $\{i_1, i_2, .., i_k\} = T_k$, el vector de contribuciones marginales es el siguiente:

$$\begin{array}{rclcl}
m^\theta_{i_1}(v) & = & v(\{i_1\}) & = & v(T_1)\,, \\
m^\theta_{i_2}(v) & = & v(\{i_1, i_2\}) - v(\{i_1\}) & = & v(T_2) - v(T_1)\,, \\
 & \vdots & & & \\
m^\theta_{i_n}(v) & = & v(N) - v(\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-1}\}) & = & v(N) - v(T_{n-1})\,.
\end{array}$$

Entonces

$$\begin{array}{rcll}
\alpha \cdot m^\theta(v_1) & = & \alpha_{i_n} \cdot [v_1(N) - v_1(T_{n-1})] & + \\
 & & \alpha_{i_{n-1}} \cdot [v_1(T_{n-1}) - v_1(T_{n-2})] & + \\
 & & \vdots & \\
 & & \alpha_{i_2} \cdot [v_1(T_2) - v_1(T_1)] & + \\
 & & \alpha_{i_1} \cdot v_1(T_1) & \\
 & = & \alpha_{i_n} \cdot v_1(N) & + \\
 & & [\alpha_{i_{n-1}} - \alpha_{i_n}] \cdot v_1(T_{n-1}) & + \\
 & & \vdots & \\
 & & [\alpha_{i_2} - \alpha_{i_3}] \cdot v_1(T_2) & + \\
 & & [\alpha_{i_1} - \alpha_{i_2}] \cdot v_1(T_1) & \\
 & \leq & \alpha_{i_n} \cdot v_2(N) & + \\
 & & \sum\limits_{r=1}^{n-1} [\alpha_{i_r} - \alpha_{i_{r+1}}] \cdot v_2(T_r) & \\
 & = & \alpha \cdot m^\theta(v_2), &
\end{array}$$

donde hemos usado la definición de la permutación θ para poder asegurar que $\alpha_{i_r} - \alpha_{i_{r+1}} \geq 0$.

Pero la desigualdad obtenida contradice la existencia del hiperplano separador, con lo que el teorema queda probado. □

De este teorema se pueden deducir diversas consecuencias, que serán objeto de estudio en la siguiente sección.

3.2 Consecuencias del Teorema de la Intersección

Del teorema de la intersección, teorema 3.4, se pueden extraer diferentes resultados que sorprendentemente se refieren a aspectos generalmente alejados entre sí. Entre éstos se podrá encontrar la inclusión clásica del *core* en el conjunto de Weber, un análogo al teorema del *sandwich* para juegos cooperativos y otros. Esta serie de consecuencias se señalan en el cuadro correspondiente, figura 3.1.

Teorema de la Intersección de los conjuntos de Weber

1 Inclusión del *core* en el conjunto de Weber: $Core(v) \subseteq Web(v)$ *(Weber, 1978)*

2 Intersección no vacía en la clase Z^N : $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$ *(Rafels y Tijs, 1997)*

3 Si el juego v es totalmente esencial: $I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset$

4 Teorema del *sandwich* *(Frank, 1982)*

5 Todo juego convexo tiene *large core* *(Sharkey, 1982)*

6 Todo juego convexo es un juego *"no-gap"* *(Ichiishi, 1990)*

7 Todo juego tiene el conjunto de Weber "grande"

Figura 3.1: Las consecuencias del Teorema de la Intersección

Consecuencia 1 :

Inclusión del *core* en el conjunto de Weber.

Como consecuencia de este teorema se obtiene la inclusión clásica del *core* de un juego cooperativo en el conjunto de Weber de dicho juego, inclusión ya mencionada en el capítulo anterior. Este resultado fue demostrado mediante un argumento de inducción en primer lugar por Weber (1978), en una publicación poco difundida. Dicha demostración, más sintética, se puede hallar también en Weber (1988).

Otra demostración más sencilla usando la técnica del hiperplano separador fue publicada por Derks (1992).

Corolario 3.5. *Para cualquier juego* $v \in G^N$ *se tiene* $Core(v) \subseteq Web(v)$.

Demostración:

Sea $x \in Core(v)$ un elemento arbitrario del *core*.

Consideramos el siguiente juego modular dado por x,

$$v_2(S) := \sum_{i \in S} x_i \quad \text{para toda coalición} \quad S \subseteq N.$$

Pero del hecho que x esté en el *core* y la definición de v_2, es obvio que $v(S) \leq v_2(S)$ para toda coalición $S \subset N$ y que $v(N) = v_2(N)$.

Por el teorema 3.4 tenemos que

$$Web(v) \cap Web(v_2) \neq \emptyset,$$

pero el juego v_2 es un juego modular, y por tanto $Web(v_2) = \{x\}$, lo que implica que $x \in Web(v)$. □

Por tanto, si el *core* es no vacío, el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones tienen puntos en común (al menos los puntos del *core*). Ya en el capítulo anterior de la presente monografía, se han estudiado algunas relaciones entre el conjunto de las imputaciones, $I(v)$, y el conjunto de Weber, $Web(v)$, junto con diversos ejemplos. La siguiente consecuencia establece una condición suficiente de intersección no vacía en una clase bastante amplia de juegos.

Consecuencia 2 :

Intersección no vacía del conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber en la clase Z^N.

En Rafels y Tijs (1997) se considera la clase de juegos Z^N, definida de la siguiente manera:

$$Z^N = \left\{ v \in G^N \mid v(S) + \sum_{i \in N \setminus S} v(i) \leq v(N), \quad \text{para todo } S \subseteq N \right\}.$$

Se trata, como se ve, de un debilitamiento de la condición de cero-monotonía, puesto que la condición que define Z^N es justamente que

$$v_0(S) = v(S) - \sum_{i\in S} v(i) \leq v_0(N) = v(N) - \sum_{i\in N} v(i),$$

es decir, la monotonía en la cero-normalización, pero solamente respecto de la coalición total. Para esta clase de juegos, Z^N, se cumple que $I(v) \neq \emptyset$, y como señalan Rafels y Tijs (1997), la clase contiene los juegos superaditivos, los juegos equilibrados y los juegos 0-monótonos (y en particular contiene los juegos convexos). En el artículo mencionado se enuncia y demuestra el siguiente teorema:

Corolario 3.6. *Dado un juego arbitrario $v \in Z^N$, se cumple que*

$$I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset.$$

Demostración:
Si definimos el juego v_2, de la siguiente manera:

$$v_2(S) := \begin{cases} 0 & \text{si } S = \emptyset, \\ v(N) - \sum\limits_{i\in N\setminus S} v(i), & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

es evidente que se cumplen las hipótesis del teorema 3.4, de la intersección, para los juegos v y v_2, puesto que $v \leq v_2$ con $v(N) = v_2(N)$ y por tanto

$$Web(v) \cap Web(v_2) \neq \emptyset.$$

Pero por la construcción del juego v_2, $Web(v_2) = I(v)$, y de aquí se deduce el resultado buscado. □

Consecuencia 3 :

Intersección no vacía de $I(v)$ y $Web(v)$ para un juego totalmente esencial.

Vamos ahora a definir qué es un juego totalmente esencial, para poder enunciar un corolario que asegura que en este caso el conjunto de las imputaciones y el conjunto de Weber tienen puntos en común.

Definición 3.7. *Un juego cooperativo (N, v) es* ***totalmente esencial*** *si*

$$\textit{para cualquier coalición } S \subseteq N, \quad \sum_{i\in S} v(i) \leq v(S).$$

Esta definición señala que para cualquier coalición $S \subseteq N$ el subjuego $v_{|S}$ tiene imputaciones, es decir, existen repartos eficientes e individualmente racionales.

Para los juegos totalmente esenciales podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 3.8. *Sea (N, v) un juego cooperativo. Si v es totalmente esencial, entonces*

$$I(v) \cap Web(v) \neq \emptyset.$$

Demostración:

Podemos definir el juego $v_1 \in G^N$, de la siguiente manera[2]:

$$v_1(S) := \begin{cases} \sum_{i \in S} v(i) & \text{si } S \neq N \\ v(N) & \text{si } S = N. \end{cases}$$

Es evidente que $v_1(S) \leq v(S)$ para cualquier $S \neq N$, ya que es totalmente esencial. Además, $v_1(N) = v(N)$. Por tanto, se cumplen las hipótesis del teorema 3.4 y $Web(v_1) \cap Web(v) \neq \emptyset$.

Pero por la construcción del juego $v_1, Web(v_1) = I(v_1) = I(v)$, y de aquí se deduce el resultado buscado. □

Consecuencia 4 :

El teorema del *sandwich* para juegos cooperativos.

El teorema de la intersección (teorema 3.4) se puede aplicar a un par de juegos para encontrar un corolario similar al teorema del *sandwich* en el análisis convexo (véase Frank, 1982). Este último teorema señala que entre la gráfica de una función convexa y la de una función cóncava menor se puede hallar un hiperplano que las separa.

Corolario 3.9. *Sean $v_1, v_2 \in G^N$ dos juegos tales que $v_1 \leq v_2$, con v_1 convexo (supermodular), y v_2 cóncavo (submodular). Entonces hay un juego modular entre ellos, es decir,*

$$\textit{existe } x \in \mathbb{R}^n \textit{ tal que } v_1(S) \leq x(S) \leq v_2(S), \quad \textit{para toda } S \subseteq N.$$

Demostración:

Podemos definir el siguiente juego auxiliar:

$$v_2'(S) := \begin{cases} v_2(S), & \text{si } S \subset N, \\ v_1(N), & \text{si } S = N. \end{cases}$$

Es fácil comprobar que v_2' es cóncavo, puesto que v_2 lo es y simplemente hemos modificado el valor de la coalición total para disminuirlo.

[2] Nótese que el sumatorio sobre el conjunto vacío es 0 por definición.

Ahora se puede aplicar el teorema 3.4 de la intersección a v_1 y v_2', puesto que están ordenados y tienen la misma eficiencia. Entonces,

$$Web(v_1) \cap Web(v_2') \neq \emptyset.$$

Por otra parte, el juego v_1 es convexo, y por tanto:

$$Web(v_1) = Core(v_1).$$

En cambio, el juego v_2' es cóncavo, y por tanto el juego $(v_2')^d$, dual del juego v_2', es también convexo. Por ello,

$$Web((v_2')^d) = Core((v_2')^d).$$

El conjunto de Weber de un juego y su dual coinciden, y consecuentemente

$$Core(v_1) \cap Core((v_2')^d) \neq \emptyset.$$

Cualquier elemento $x \in Core(v_1) \cap Core((v_2')^d)$ puede ser el juego modular del enunciado del corolario, ya que por estar en $Core(v_1)$,

$$v_1(S) \leq x(S) \quad \text{para cualquier } S \subseteq N,$$

mientras que por estar en el *core* de $(v_2')^d$,

$$x(N \setminus S) \geq (v_2')^d(N \setminus S) = v_2'(N) - v_2'(S) = x(N) - v_2(S),$$

que se transforma en la desigualdad deseada:

$$v_2(S) \geq x(S).$$

□

Consecuencia 5 :

Todo juego convexo tiene *large core*.

Otra consecuencia que se puede extraer del teorema 3.4 es la que se refiere a la propiedad de que un juego convexo tiene el *core* grande (*large core*), concepto introducido por Sharkey (1982).

Para ello, vamos a introducir la definición de juego con *large core* . Se dice que un juego cooperativo (N, v) tiene el *core* grande si para cualquier distribución z, no necesariamente eficiente, que cumpla las desigualdades del *core*,

$$v(S) \leq \sum_{i \in S} z_i \text{ para toda coalición } S \subseteq N,$$

es posible encontrar un elemento del *core* de v, $x \in Core(v)$, tal que $x \leq z$.

Sharkey (1982) demuestra que todo juego convexo tiene *large core,* pero que no se trata de una equivalencia con la definición de los juegos convexos, es decir, hay juegos no convexos que también verifican esta propiedad. La clase de juegos que tienen el *core* grande todavía no ha sido caracterizada en términos de otras propiedades de la función característica, ni se dispone de una definición equivalente de esta clase de juegos.

Veremos ahora que se puede deducir que todo juego convexo tiene *large core* como consecuencia del teorema 3.4.

Corolario 3.10. *Sea (N, v) un juego cooperativo convexo, y considérese una distribución (no necesariamente eficiente) $y \in \mathbb{R}^N$ tal que*

$$v(S) \leq \sum_{i \in S} y_i \text{ para toda coalición } S \subseteq N.$$

Entonces es posible encontrar un elemento del core *de v, $x \in Core(v)$, tal que $x_i \leq y_i$ para todo $i \in N$.*

Demostración:

Consideremos el juego siguiente:

$$w(S) = \begin{cases} y(S) & \text{si } S \subset N, \\ v(N) & \text{si } S = N. \end{cases}$$

De esta definición se desprende que

$$v \leq w$$

y que $v(N) = w(N)$. Aplicando el teorema 3.4 se deduce que

$$Web(w) \cap Web(v) \neq \emptyset.$$

El conjunto de Weber del juego w es justamente

$$Web(w) = convex \left\{w^k\right\}_{k \in N},$$

donde cada uno de los puntos w^k para $k \in N$ se ha definido como

$$w_i^k = \begin{cases} y_i & \text{si } i \neq k \\ v(N) - \sum\limits_{i \in N \setminus \{k\}} y_i & \text{si } i = k \end{cases}$$

Además, como el juego v es convexo, su *core* coincide con su conjunto de Weber, $Core(v) = Web(v)$. Por tanto, hemos visto que existe $x \in Core(v)$ que se puede escribir como combinación convexa de los puntos w^k. Dado que, como se observa en la definición $w_i^k \leq y_i$, inmediatamente se desprende

$$x_i \leq y_i \text{ para todo } i \in N.$$

□

Consecuencia 6 :

Todo juego convexo es un juego *"no-gap"*.

Ichiishi (1990) estudia la comparación entre juegos y las relaciones entre los *cores* respectivos. En particular, se introduce el concepto de juego *"no-gap"*, como un caso especial de los juegos exactos[3]. La condición de juego exacto *"no-gap"* $v \in G^N$ se define en términos de la cobertura eficiente de un juego equilibrado. Ésta es una función v^* asociada a cualquier vector $p \in \mathbb{R}^n_+$, y está definida por

$$v^*(p) := \max\{p \cdot x \mid x \in Core(v)\},$$

donde v es un juego equilibrado.

Para cualquier coalición $S \subseteq N$, la cobertura eficiente de un juego equilibrado se define como $v^*(S) = v^*(e^S)$, el vector incidente a la coalición S.

Un juego exacto v se llama *"no-gap"* si para cada $p \in \mathbb{R}^n_+$, existe una colección de coeficientes reales positivos (o nulos), $(\lambda_S)_{S \subseteq N}$, tales que $\sum_{S \subseteq N} \lambda_S e^S = p$ y $\sum_{S \subseteq N} \lambda_S v^*(S) \leq v^*(p)$.

Ichiishi demuestra que se verifica la siguiente inclusión:

$$\{ \text{ juegos convexos } \} \subsetneq \{ \text{ juegos exactos } \textit{no-gap} \} \subsetneq \{ \text{ juegos exactos } \}.$$

La condición de ser un juego exacto *no-gap* es dual del concepto de juego con *core* grande (Sharkey, 1982). También demuestra que todo juego convexo es un juego *"no-gap"*, que resulta ser equivalente a la condición que se expone en el siguiente corolario:

Corolario 3.11. *Sea (N, v)un juego cooperativo convexo, y sea $x \in \mathbb{R}^N$ una distribución tal que*

$$x(S) \leq v(N) - v(N \setminus S) \textit{ para toda coalición } S \subseteq N.$$

Entonces es posible encontrar un elemento del core *de v, $y \in Core(v)$, tal que $x \leq y$.*

[3]Un juego $v \in G^N$ es exacto si para cualquier coalición $S \subseteq N$ existe un punto del *core*, $x \in Core(v)$, tal que $x(S) = v(S)$, lo que implica que v sea equilibrado. Todo juego exacto es totalmente equilibrado, ya que todos los subjuegos tienen *core* no vacío.

Demostración:

Consideremos los juegos siguientes:

$$v_1(S) = \begin{cases} x(S) & \text{si } S \subset N \\ v(N) & \text{si } S = N \end{cases}$$

y

$$v_2(S) = v(N) - v(N \setminus S) = v^d(S) \text{ si } S \subseteq N.$$

De esta definición se desprende que

$$v_1 \leq v_2$$

y que $v_1(N) = v_2(N)$. Aplicando el teorema 3.4 se deduce que

$$Web(v_1) \cap Web(v_2) \neq \emptyset.$$

Pero el juego v_1 es convexo, y su conjunto de Weber coincide con el *core* del mismo:

$$Web(v_1) = Core(v_1),$$

y el juego $v_2^d = v$ es también convexo, y por tanto:

$$Web(v_2) = Web(v_2^d) = Web(v) = Core(v),$$

de donde tenemos

$$Core(v_1) \cap Core(v) \neq \emptyset.$$

Por tanto, cualquier elemento $y \in Core(v_1) \cap Core(v)$ verificará la desigualdad pedida, ya que $y \in Core(v)$ y

$$x_i \geq y_i \text{ para todo } i \in N.$$

□

Estos resultados se han utilizado en diversos problemas relacionados con la provisión de un bien público puro, la producción cooperativa de bienes privados, o la distribución del excedente asociado con el equilibrio de Nash del mecanismo de contribución voluntaria (véase Moulin, 1995).

Consecuencia 7 :

Todo juego tiene el conjunto de Weber "grande".

Parafraseando la definición de *large core*, de Sharkey (1982), podemos ver que cualquier juego cooperativo tiene el conjunto de Weber "grande", en el sentido que para cualquier reparto, no necesariamente eficiente, que mayore los valores de todas las coaliciones, es posible encontrar un punto del conjunto de Weber, y eficiente por tanto, que sea menor en todas las componentes que el reparto inicial.

Corolario 3.12. *Sea (N, v)un juego cooperativo, y sea $y \in \mathbb{R}^N$ una distribución tal que*

$$v(S) \leq \sum_{i \in S} y_i \quad \textit{para toda coalición } S \subseteq N.$$

Entonces es posible encontrar un elemento del conjunto de Weber de v, $x \in Web(v)$, tal que $x \leq y$.

Demostración:

Consideremos el juego siguiente:

$$w(S) = \begin{cases} y(S) & \text{si } S \subset N, \\ v(N) & \text{si } S = N. \end{cases}$$

De la definición del juego w se desprende que

$$v \leq w$$

y que $v(N) = w(N)$. Aplicando el teorema 3.4 de la intersección se deduce que

$$Web(w) \cap Web(v) \neq \emptyset.$$

Pero el conjunto de Weber del juego w es justamente

$$Web(w) = convex \left\{ w^k \right\}_{k \in N},$$

donde cada uno de los puntos w^k para $k \in N$ se ha definido como

$$w_i^k = \begin{cases} y_i & \text{si } i \neq k \\ v(N) - \sum\limits_{j \in N \setminus \{k\}} y_j & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Por tanto, hemos visto que existe al menos un $x \in Web(v)$ que se puede escribir como combinación convexa de los puntos w^k. Dado que, como se observa en la definición, $w_i^k \leq y_i$, para todo $i \in N$, inmediatamente se desprende

$$x_i \leq y_i \quad \text{para todo } i \in N.$$

$\square$

Capítulo 4

Juegos cooperativos con información limitada

El modelo de los juegos cooperativos da por supuesto que no hay restricciones a la cooperación entre los jugadores, de forma que todas las coaliciones se pueden formar y por tanto se evalúan. Sin embargo, en determinadas situaciones (económicas, de votación, etc.) este supuesto no parece apropiado, ya que los jugadores se agrupan de forma natural (por ideología, por nacionalidad, etc.)

Aumann y Maschler (1964) iniciaron, en su forma más sencilla, el estudio de juegos cooperativos en los cuales no todas las coaliciones son factibles, sino que solamente se pueden formar las que están dentro de estructuras de coaliciones. En dicho artículo, una estructura de coaliciones se define como una partición del conjunto de jugadores en coaliciones disjuntas. Dada una estructura de coaliciones la comunicación entre los diversos jugadores sólo se puede dar dentro de las coaliciones que definen la estructura. Además, cada una de estas coaliciones se comporta como una unidad para el exterior. Esta estructura de coaliciones viene dada exógenamente, y ha dado lugar a numerosos artículos analizando diversos aspectos, en particular las soluciones aplicables a esta situación, los conjuntos de negociación (Aumann y Maschler, 1964 y Davis y Maschler, 1967), etc.

El estudio de los juegos con estructuras de coalición dadas exógenamente, con un enfoque ligeramente distinto, ha sido llevado a cabo, entre otros, por Aumann y Drèze (1974), Owen (1977), Levy y McLean (1989), Winter (1989, 1992), Driessen y Tijs (1990) y McLean (1991).

Por otra parte, para estudiar las situaciones en las que la comunicación directa no es transitiva, Myerson (1977) introdujo grafos para señalar canales de relación entre los jugadores. El grafo toma los jugadores como los nodos, y la presencia de un arco entre dos jugadores señala que éstos pueden comunicarse, y por tanto no tienen restricciones a la comunicación. Esta línea ha sido seguida posteriomente por Owen (1986), van den Nouweland y Borm (1991), Borm, Owen y Tijs (1992), van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) y Potters y Reijnierse (1992), Hamiache (1999).

Otra línea ligeramente diferente fue la iniciada por Myerson (1980) al modelar la comunicación mediante hipergrafos (que denomina *conference structures*). Dicha idea fue estudiada también por van den Nouweland, Borm y Tijs (1992) mediante lo que denominan conjuntos de interacción (*interaction sets*), y donde se halla un tratamiento axiomático del valor de Myerson y el valor de posición (*position value*). Un análisis de las diversas posibilidades de modelar la cooperación parcial se realiza en el *survey* de Borm, van den Nouweland y Tijs (1994)

El libro de Bilbao (2000) estudia, de forma bastante exhaustiva, los juegos cooperativos definidos sobre estructuras combinatorias. Se trata de una generalización de los juegos cooperativos para incluir prácticamente todos los diversos modelos de cooperación parcial. La estructura combinatoria recoge desde el retículo formado por todas las coaliciones (todas las coaliciones son posibles) hasta un conjunto de coaliciones sin ninguna condición especial.

4.1 El conjunto de Weber de nivel k

El problema del reparto de costes se presenta tanto en las empresas y proyectos públicos como en las empresas privadas. Aparece en las políticas de precios de las empresas de servicios como la electricidad, agua, transporte o teléfono. ¿Cómo se deben repartir los costes comunes entre sus beneficiarios? También para encontrar las tasas o precios públicos a repercutir entre los usuarios en los aeropuertos, autopistas o canales. Por no hablar de los análisis coste-beneficio en los proyectos de embalses y regadíos, o la contabilidad interna en las empresas para asignar costes comunes y costes específicos entre los distintos departamentos.

Una herramienta para analizar el reparto de costes consiste en su modelización como un juego cooperativo. Este análisis ya se tiene en cuenta en los conocidos repartos de costes de la Tennessee Valley Authority en los años 1930, aunque el análisis se sigue en problemas de diversos contextos (véase Young, 1985).

Frecuentemente, y especialmente en el contexto de los métodos de reparto de costes, al evaluar una situación cooperativa, resulta que es costosa o compleja la evaluación del valor de las coaliciones. Por esa razón se suelen tener en cuenta métodos de reparto de costes que tienen en cuenta el coste total con el coste individual de cada jugador y eventualmente el coste marginal (a la coalición total) de cada agente.

En este apartado vamos a "olvidar" parte de los valores de un juego para analizar las situaciones en las cuales decidimos tener en cuenta solamente ciertas coaliciones, sea porque no deseamos tener en cuenta las restantes o bien porque solamente disponemos de información limitada.

El juego de nivel k

Recordemos que el conjunto de todos los juegos cooperativos TU sobre el mismo conjunto de jugadores N se denota por G^N.

Consideremos, en el conjunto G^N, el siguiente operador, definido para $k = 0, 1, 2, ..., n-1$:

$$\begin{aligned} \Phi_k : \ & G^N \to G^N \\ & v \longmapsto v_k \end{aligned}$$

El juego v_k se define de la siguiente manera:

$$v_k(S) := \begin{cases} \sum_{j \in S} v(j) & \text{si} \quad |S| \leq k, \\ v(S) & \text{si} \quad |S| > k. \end{cases}$$

Hemos substituido los valores de las coaliciones, hasta la talla k incluída, por el juego modular asociado a los valores individuales. Obviamente $v_0 = v_1 = v$.

Corresponde a la situación en que el juego v se "filtra" a través de un hipergrafo, formado por las coaliciones de cardinalidad 1 y las coaliciones de cardinalidad $k+1$ o superior.

Por otra parte, recordemos la definición de los vectores de contribuciones marginales asociados a una permutación.

Sea (N, v) un juego cooperativo. Para cualquier ordenación

$$\theta = (i_1, i_2, \ldots, i_n) \in \Pi_N,$$

definimos el **vector de contribuciones marginales** asociado a θ,

$$m^\theta(v) = (m_1^\theta(v), m_2^\theta(v), \ldots, m_n^\theta(v)) \in \mathbb{R}^n$$

de la siguiente manera:

$$m_{i_k}^\theta(v) = v(\{i_1, i_2, ..., i_k\}) - v(\{i_1, i_2, ..., i_{k-1}\}), \quad \text{para cada } i_k \in N.$$

El conjunto de Weber se define como la envoltura convexa de todos los vectores de contribuciones marginales:

$$Web(v) := convex \left\{ m^\theta(v) \right\}_{\theta \in \Pi_n}.$$

Teniendo en cuenta esta definición, podemos definir el conjunto de Weber de nivel k :

Definición 4.1. *Dado un juego cooperativo (N, v), se define como* ***conjunto de Weber de nivel*** k ***del juego*** v*, al conjunto de Weber del juego v_k, y se denota por*

$$Web_k(v) = Web(v_k) = convex \left\{ m^\theta(v_k) \right\}_{\theta \in \Pi_N}.$$

De la igualdad entre los juegos v_0 y v_1 tenemos que

$$Web_0(v) = Web_1(v) = Web(v).$$

Vamos a estudiar ahora algunas propiedades del conjunto de Weber de nivel k.

Teorema 4.2. *Sea $v \in G^N$ un juego cooperativo. Entonces*

$$Core(v) \subseteq Web_k(v), \qquad para\ k \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}.$$

Demostración:
Para todo $x \in Core(v)$, se cumple $x \in Core(v_k)$, ya que

$$\begin{aligned} x(S) &\geq v(S), \qquad \text{para } S \subseteq N \\ \text{y } x(N) &= v(N) \end{aligned}$$

En particular,

$$x_i \geq v(i), \qquad \text{para } i \in N,$$

de donde

$$x(S) \geq \sum_{i \in S} v(i), \qquad \text{para } S \subseteq N.$$

Por ello,

$$\begin{aligned} x(S) &\geq v_k(S), \qquad \text{para } S \subseteq N. \\ \text{y } x(N) &= v_k(N) \end{aligned}$$

Pero, para el juego v_k se cumple:

$$Core(v_k) \subseteq Web_k(v),$$

con lo que queda demostrado el enunciado. □

Para ilustrar el concepto anterior los siguientes ejemplos muestran diversas situaciones en las que se pueden encontrar el conjunto de Weber de nivel k.

Ejemplo 4.3. *Consideremos el juego (N, v) definido sobre el conjunto de jugadores $N = \{1, 2, ..., n\}$ por*

$$v(S) := s - 1, \qquad donde\ s = |S| \geq 1, \qquad y\ \ v(\emptyset) = 0.$$

Este juego es convexo, y por tanto se tiene que $Core(v) = Web(v) \neq \emptyset$. Se puede comprobar que los vectores y^j $(j = 1, 2, ..., n)$ definidos por

$$y_i^j := \begin{cases} 0 & si\ i = j \\ 1 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

son los extremos del conjunto de Weber, y son todos los vectores de contribuciones marginales.

Si $\theta = (i_1, i_2, ..., i_k, i_{k+1}, ..., i_n) \in \Pi_N$, *entonces el vector de contribuciones marginales del juego* v_k *es el siguiente:*

$$m_{i_r}^{\theta}(v_k) = \begin{cases} 0 & si \quad r \leq k, \\ k & si \quad r = k+1, \\ 1 & si \quad r > k+1. \end{cases}$$

Estos vectores definen el conjunto de Weber de nivel k :

$$Web_k(v) = Web\,(v_k) = convex\left\{m^{\theta}(v_k)\right\}.$$

Se cumple que

$$Web_{k-1}(v) \subset Web_k(v) \quad para\ k = 2, 3, ..., n-1$$

ya que si para cada $\theta = (i_1, i_2, ..., i_k, i_{k+1}, ..., i_n) \in \Pi_N$, *consideramos la ordenación* $\theta' = (j_1, j_2, ..., j_k, j_{k+1}, ..., j_n)$ *con* $j_k = i_{k+1}$, $j_{k+1} = i_k$, *y la igualdad para todos los demás índices, entonces*

$$m_{i_r}^{\theta}(v_{k-1}) = \begin{cases} 0 & si \quad r < k \\ k-1 & si \quad r = k \\ 1 & si \quad r > k, \end{cases}$$

y es fácil verificar que

$$m^{\theta}(v_{k-1}) = \frac{1}{k}m^{\theta}(v_k) + \frac{k-1}{k}m^{\theta'}(v_k).$$

Además,

$$Web_{k-1}(v) \neq Web_k(v),$$

puesto que

$$\max_{i \in N}\left\{m_i^{\theta}(v_k)\right\} = k,$$

y, en cambio,

$$\max_{i \in N}\left\{m_i^{\theta}(v_{k-1})\right\} = k-1.$$

En resumen, hemos obtenido una cadena de inclusiones estrictas:

$$\emptyset \neq Core(v) = Web_1(v) \subset Web_2(v) \subset ... \subset Web_{n-1}(v) = I(v).$$

Hay, además, otros ejemplos en los cuales las inclusiones se dan justamente al revés. El ejemplo siguiente muestra esta situación.

Ejemplo 4.4. *Sea el juego siguiente de 4 jugadores:*

$$\begin{array}{rclrclrcl} v(1) &=& 0, & v(12) &=& -1, & v(123) &=& 1, \\ v(2) &=& 0, & v(13) &=& -1, & v(124) &=& 1, \\ v(3) &=& 0, & v(14) &=& -1, & v(134) &=& 1, \\ v(4) &=& 0, & v(23) &=& -1, & v(234) &=& 1, \\ &&& v(24) &=& -1, &&& \\ &&& v(34) &=& -1, & v(N) &=& 0. \end{array}$$

En este caso:

$$Web_1(v) = Web(v) = convex\left\{\overline{(0,-1,2,-1)}\right\}$$

donde la barra significa las posibles permutaciones de estos valores entre los distintos lugares. También:

$$Web_2(v) = convex\left\{\overline{(0,0,1,-1)}\right\}$$

y

$$Web_3(v) = I(v) = \{(0,0,0,0)\}$$

Tenemos las siguientes inclusiones, que son estrictas:

$$Web_1(v) \supset Web_2(v) \supset Web_3(v) = I(v)$$

Este último ejemplo nos muestra que las relaciones de inclusión entre los conjuntos de Weber de diferentes niveles pueden darse de diversas maneras.

Sin embargo, y teniendo en cuenta lo que ya hemos visto sobre la inclusión del conjunto de Weber en el conjunto de las imputaciones, vamos a demostrar que en el caso de que el juego sea 0-monótono, los conjuntos de Weber de niveles sucesivos se van conteniendo, es decir, forman una cadena:

$$Web_1(v) \subseteq Web_2(v) \subseteq ... \subseteq Web_{n-2}(v) \subseteq Web_{n-1}(v) = I(v),$$

y que esa es una caracterización de la 0-monotonía. Para ello, vamos a ver en primer lugar una serie de lemas técnicos previos para el análisis del comportamiento de los conjuntos de Weber de nivel k, y cuya demostración es inmediata.

Lema 4.5. *Sea $v \in G^N$, y sean $k, k' \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$. Se cumple:*

$$(v_k)_{k'} = (v_{k'})_k = v_{\max\{k,k'\}}.$$

Lema 4.6. *Sea $v \in G^N$. Si v es un juego esencial ($I(v) \neq \emptyset$), se cumple que*

$$I(v) = Web(v_{n-1}).$$

Lema 4.7. *Sea $v \in G^N$, y sea $k \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$. Se cumple que*

$$I(v) = I(v_k).$$

Lema 4.8. *Sea $v \in G^N$. Si v es 0−monótono, se cumple que es totalmente esencial:*

$$v(S) \geq \sum_{j \in S} v(j) \quad \textit{para todo } S \subseteq N.$$

En particular, $I(v) \neq \emptyset$, es decir, v es un juego esencial.

Lema 4.9. *Sea $v \in G^N$, y sea $k \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$. Se cumple que si v es 0-monótono, v_k es 0-monótono.*

Demostración:

Dado que v es 0-monótono, se cumple:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(i) \quad \text{para todo } i \in N \text{ y todo } S \subseteq N \setminus \{i\}.$$

Por otra parte, para todo $i \in N$ y todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$:

si $|S| < k$,

$$v_k(S \cup \{i\}) - v_k(S) = \sum_{j \in S} v(j) + v(i) - \sum_{j \in S} v(j) = v(i) = v_k(i),$$

si $|S| = k$, utilizando el lema anterior,

$$v_k(S \cup \{i\}) - v_k(S) = v(S \cup \{i\}) - \sum_{j \in S} v(j) \geq v(i) = v_k(i),$$

y si $|S| > k$,

$$v_k(S \cup \{i\}) - v_k(S) = v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(i) = v_k(i).$$

Con lo que queda demostrado que v_k es 0-monótono. □

Además, hallar el juego de nivel k y considerar un subjuego[1] conmuta, supuesto que el nivel k sea menor que la cardinalidad de la coalición total dei subjuego.

Lema 4.10. *Sea $v \in G^N, k \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$, y sea $S \subseteq N$.*

$$\textit{Si } k < |S|, \textit{ entonces } (v_k)_{|S} = \left(v_{|S}\right)_k.$$

[1]Dado un juego cooperativo (N, v), el subjuego $(S, v_{|S})$, cuyo conjunto de jugadores es $S \subseteq N$ se define de la siguiente manera: $v_{|S}(T) := v(T)$ para todo $T \subseteq S$.

Lema 4.11. *Sea* $v \in G^N$, *y sea* $k \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$. *Se cumple que si* v *es* 0*-monótono, entonces*

$$Web_k(v) = Web\,(v_k) \subseteq Web\,(v_{n-1}) = I\,(v)\,.$$

Demostración:

Sabemos que v_k es 0-monótono por el lema previo 4.9. Por tanto,

$$Web\,(v_k) \subseteq I\,(v_k) = I\,(v)\,.$$

□

Una vez hemos estudiado algunas propiedades de los conjuntos de Weber de nivel k, podemos demostrar el teorema de la inclusión entre conjuntos de Weber consecutivos, que dará como corolario la cadena de inclusiones que hemos anunciado.

Teorema 4.12. *Sea* $v \in G^N$, *y sea* $k \in [2, n-1]_{\mathbb{N}}$. *Se cumple que si* v *es* 0*-monótono, entonces*

$$Web_{k-1}(v) \subseteq Web_k(v)$$

Demostración:

Vamos a proceder por inducción sobre la cardinalidad del conjunto N.

Si $|N| = 3$, debe ser $k = 2$ y tenemos que la inclusión pedida es justamente la inclusión del conjunto de Weber en el conjunto de las imputaciones, que se cumple justamente para los juegos 0-monótonos.

Supongamos ahora que la inclusión es cierta hasta $n-1$.

Consideremos una ordenación $\tilde{\theta} = (i_1, i_2, ..., i_{n-1}, i_n)\,.$

Si $k < n-1$, podemos considerar el subjuego obtenido al restringirnos al conjunto $N \backslash \{i_n\}$, así como la ordenación $\theta = (i_1, i_2, ..., i_{n-1})\,.$

Entonces,

$$m_j^{\tilde{\theta}}\,(v_k) = \begin{cases} m_j^{\theta}\left(v_{k_{|N\backslash\{i_n\}}}\right) & \text{si } \; j \neq i_n \\ v_k\,(N) - v_k\,(N\backslash\{i_n\}) & \text{si } \; j = i_n \end{cases}$$

Aplicando la hipótesis de inducción al subjuego $v_{|N\backslash\{i_n\}}$ tenemos

$$m^{\theta}\left(v_{k-1_{|N\backslash\{i_n\}}}\right) = \sum_{\pi \in \Pi_{N\backslash\{i_n\}}} \lambda_\pi m^\pi \left(v_{k_{|N\backslash\{i_n\}}}\right)$$

con $\lambda_\pi \geq 0$ y $\sum_{\pi \in \Pi_{N\backslash\{i_n\}}} \lambda_\pi = 1$.

Si completamos cada ordenación π con el jugador i_n que entra en último lugar para obtener una ordenación $\tilde{\pi} \in \Pi_N$, se obtiene que

$$m_j^{\tilde{\pi}}\,(v_k) = \begin{cases} m_j^{\pi}\left(v_{k_{|N\backslash\{i_n\}}}\right) & \text{si } \; j \neq i_n \\ v_k\,(N) - v_k\,(N\backslash\{i_n\}) & \text{si } \; j = i_n \end{cases}$$

Con ello se prueba que

$$m^{\theta}(v_{k-1}) = \sum_{\pi \in \Pi_{N \setminus \{i_n\}}} \lambda_\pi m_j^{\bar{\pi}}(v_k)$$

con $\lambda_\pi \geq 0$ y $\sum_{\pi \in \Pi_{N \setminus \{i_n\}}} \lambda_\pi = 1$.

Si $k = n-1$, aplicando el lema 4.11 tenemos

$$Web_{n-2}(v) \subseteq Web_{n-1}(v),$$

con lo que queda demostrado el teorema. □

Es posible ofrecer otra prueba de la inclusión en general, sin utilizar un argumento de inducción, y procediendo de forma constructiva.

Como consecuencia directa del teorema anterior podemos señalar la condición necesaria y suficiente para que las inclusiones de los conjuntos de Weber de niveles consecutivos se produzcan.

Corolario 4.13. *Sea $v \in G^N$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *v es 0-monótono,*
2. *$Web_1(v) \subseteq Web_2(v) \subseteq ... \subseteq Web_{n-2}(v) \subseteq Web_{n-1}(v) = I(v)$.*

Demostración:

En un sentido la equivalencia está probada por el teorema 4.12 anterior, mientras que en el otro es la caracterización de la inclusión del conjunto de Weber en las imputaciones para los juegos 0-monótonos. □

Analizando la condición de 0-monotonía, aparece que se puede extender la noción de monotonía utilizando las herramientas del juego del nivel k. Esta extensión de la monotonía se efectuará de la siguiente manera:

Definición 4.14. *Sea $v \in G^N$ y sea $k \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$. Diremos que v es* ***k-monótono*** *si*

1. *Para cualquier $i \in N$ y todo $S \subseteq N \setminus \{i\}$ tal que $|S| \geq k$, se cumple $v(S \cup \{i\}) - v(S) \geq v(i)$.*
2. *Para todo $S \subseteq N$ tal que $|S| \leq k$, se cumple $v(S) \geq \sum_{j \in S} v(j)$.*

Obsérvese que la 0-monotonía y la 1-monotonía coinciden, y que la definición de la 0−monotonía corresponde a la definición habitual, que es equivalente a pedir que el juego, una vez cero-normalizado, sea monótono.

Con esta definición es evidente el siguiente teorema:

Teorema 4.15. *Sea $v \in G^N$ y sea $k \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$. Las dos condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *v es k-monótono.*

2. *v_k es 0-monótono.*

También es fácil, utilizando un argumento de recurrencia, demostrar el siguiente teorema:

Teorema 4.16. *Sea $v \in G^N$ y sea $k \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$. Entonces, si v es $k-$monótono,*

$$v(S) \geq \sum_{j \in S} v(j) \quad \textit{para cualquier } S \subseteq N.$$

Este teorema indica que todo juego k-monótono es totalmente esencial, en el sentido que cualquier subjuego es esencial, con conjunto de imputaciones no vacío.

Otro teorema que relaciona el conjunto de Weber de nivel k con el conjunto de las imputaciones es el siguiente:

Teorema 4.17. *Sea $v \in G^N$ y sea $k \in [0, n-1]_{\mathbb{N}}$. Entonces, las condiciones siguientes son equivalentes:*

1. *v es k-monótono,*

2. *$Web_k(v) \subseteq I(v)$.*

4.2 La intersección de conjuntos de Weber de nivel k

Podemos ahora analizar la intersección entre los conjuntos de Weber de nivel k para juegos cualesquiera. Para ello, y en primer lugar, vamos a demostrar un lema previo que corresponde a la generalización a juegos arbitrarios de una proposición del capítulo primero. Ésta establece que para juegos cooperativos esenciales de tres jugadores o menos, la intersección entre el conjunto de Weber y el conjunto de las imputaciones es siempre no vacío. Obsérvese que, si el juego es esencial, el conjunto de las imputaciones $I(v)$, coincide con el conjunto de Weber de nivel 2, $Web_2(v)$.

Lema 4.18. *Sea* $v \in G^N$, *y* $|N| = 3$. *Entonces*

$$Web_1(v) \cap Web_2(v) \neq \emptyset.$$

Demostración:

Si hallamos los vértices del conjunto $Web_1(v) = convex\left\{m^{\theta}(v)\right\}$, se obtiene:

$$\begin{array}{rcl}
m^{123}(v) & = & (v(1), v(12) - v(1), v(N) - v(12)) \\
m^{132}(v) & = & (v(1), v(N) - v(13), v(13) - v(1)) \\
m^{213}(v) & = & (v(12) - v(2), v(2), v(N) - v(12)) \\
m^{231}(v) & = & (v(N) - v(23), v(2), v(23) - v(2)) \\
m^{312}(v) & = & (v(13) - v(3), v(N) - v(13), v(3)) \\
m^{321}(v) & = & (v(N) - v(23), v(23) - v(3), v(3))
\end{array}$$

Por otra parte, los vértices del conjunto $Web_2(v) = convex\left\{m^{\theta}(v_2)\right\}$, son los siguientes:

$$\begin{array}{rcl}
m^{123}(v_2) & = & (v(1), v(2), v(N) - v(1) - v(2)) \\
m^{132}(v_2) & = & (v(1), v(N) - v(1) - v(3), v(3)) \\
m^{231}(v_2) & = & (v(N) - v(2) - v(3), v(2), v(3))
\end{array}$$

Si la intersección fuera vacía, el segmento que une los puntos $m^{123}(v)$ y $m^{132}(v)$ no debe tener ningún punto en común con el segmento que une los puntos $m^{123}(v_2)$ y $m^{132}(v_2)$.

Por ello, y teniendo en cuenta que la primera coordenada es la misma, debe cumplirse que

$$\begin{array}{rcl}
v(2) & < & v(12) - v(1) \\
v(2) & < & v(N) - v(13) \\
v(N) - v(1) - v(3) & < & v(12) - v(1) \\
v(N) - v(1) - v(3) & < & v(N) - v(13)
\end{array}$$

o bien,

$$\begin{array}{rcl}
v(2) & > & v(12) - v(1) \\
v(2) & > & v(N) - v(13) \\
v(N) - v(1) - v(3) & > & v(12) - v(1) \\
v(N) - v(1) - v(3) & > & v(N) - v(13).
\end{array}$$

Si ordenamos estas desigualdades se obtienen las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{rcl}
v(1) + v(2) & < & v(12) \\
v(2) + v(13) & < & v(N) \\
v(N) & < & v(12) + v(3) \\
v(13) & < & v(1) + v(3)
\end{array}$$

o bien,

$$\begin{array}{rcl}
v(1) + v(2) & > & v(12) \\
v(2) + v(13) & > & v(N) \\
v(N) & > & v(12) + v(3) \\
v(13) & > & v(1) + v(3).
\end{array}$$

Por otra parte, si hacemos la misma consideración para las intersecciones:

el segmento que une $m^{213}(v)$ y $m^{231}(v)$ con el segmento $m^{123}(v_2)$ y $m^{231}(v_2)$

y

el segmento que une $m^{312}(v)$ y $m^{321}(v)$ con el segmento $m^{132}(v_2)$ y $m^{231}(v_2)$

Se obtienen las condiciones:

$$\begin{array}{rcc}
v(2)+v(3) & < & v(23) \\
v(3)+v(12) & < & v(N) \\
v(N) & < & v(23)+v(1) \\
v(12) & < & v(1)+v(2)
\end{array}
\quad \text{o bien} \quad
\begin{array}{rcc}
v(2)+v(3) & > & v(23) \\
v(3)+v(12) & > & v(N) \\
v(N) & > & v(23)+v(1) \\
v(12) & > & v(1)+v(2).
\end{array}$$

y

$$\begin{array}{rcc}
v(3)+v(1) & < & v(13) \\
v(1)+v(23) & < & v(N) \\
v(N) & < & v(13)+v(2) \\
v(23) & < & v(2)+v(3)
\end{array}
\quad \text{o bien} \quad
\begin{array}{rcc}
v(1)+v(3) & > & v(13) \\
v(1)+v(23) & > & v(N) \\
v(N) & > & v(13)+v(2) \\
v(23) & > & v(2)+v(3).
\end{array}$$

Pero ya se ve que estas condiciones tomadas en conjunto son incompatibles.
□

Ahora estamos en condiciones de establecer el teorema sobre la intersección de dos conjuntos de Weber de niveles consecutivos.

Teorema 4.19. *Sea $v \in G^N$, y $k \in [2, n-1]_{\mathbb{N}}$. Entonces*

$$Web_{k-1}(v) \cap Web_k(v) \neq \emptyset.$$

Demostración:

Vamos a utilizar un argumento de inducción sobre el número de jugadores, es decir, sobre la cardinalidad de N.

Si $|N| = 3$, el enunciado se verifica ya que se ha demostrado en el lema previo 4.18.

Supongamos ahora que $|N| > 3$. Si $k < n-1$ consideremos la coalición $S = \{1, 2, ..., n-1\}$ y podemos aplicar la hipótesis de inducción sobre el juego $v_{|S}$.

Se cumple

$$Web_{k-1}(v_{|S}) \cap Web_k(v_{|S}) \neq \emptyset.$$

Y para cada $\hat{x} \in Web_{k-1}(v_{|S}) \cap Web_k(v_{|S})$, que es un vector de $\mathbb{R}^{n-1}$ podemos considerar el vector $x \in \mathbb{R}^n$ definido de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} \hat{x}_i & \text{si} \quad i \in S \\ v(N) - v(N \backslash \{n\}) & \text{si} \quad i = n. \end{cases}$$

También para cada ordenación $\hat{\theta} = (i_1, i_2, ..., i_{n-1})$ de los jugadores $S = \{1, 2, ..., n-1\}$, podemos considerar la ordenación $\theta = (i_1, i_2, ..., i_{n-1}, n)$.

Entonces,

$$m_j^{\theta}(v_k) = \begin{cases} m_j^{\hat{\theta}}\left(v_{k_{|S}}\right) & \text{si } j \neq n \\ v_k(N) - v_k(N \setminus \{n\}) & \text{si } j = n \end{cases}$$

y también:

$$m_j^{\theta}(v_{k-1}) = \begin{cases} m_j^{\hat{\theta}}\left(v_{k-1_{|S}}\right) & \text{si } j \neq n \\ v_{k-1}(N) - v_{k-1}(N \setminus \{n\}) & \text{si } j = n \end{cases}$$

Con ello, de la expresión de $\hat{x}$ como elemento del conjunto $Web_k(v_{|S})$,

$$\hat{x} = \sum_{\hat{\pi} \in \Pi_S} \lambda_{\hat{\pi}} m^{\hat{\pi}}\left(v_{k_{|S}}\right)$$

con $\lambda_{\hat{\pi}} \geq 0$ y $\sum_{\hat{\pi} \in \Pi_S} \lambda_{\hat{\pi}} = 1$, si completamos cada ordenación $\hat{\pi}$ con el jugador n que entra en último lugar para obtener una ordenación $\pi \in \Pi_N$, se obtiene que

$$x = \sum_{\hat{\pi} \in \Pi_{N \setminus \{i_n\}}} \lambda_{\hat{\pi}} m^{\pi}(v_k)$$

Con ello se prueba que $x \in Web_k(v)$, y de forma análoga, que $x \in Web_{k-1}(v)$, ya que $v_k(N) - v_k(N \setminus \{n\}) = v(N) - v(N \setminus \{n\})$.

Queda por estudiar el caso en que $|N| > 3$ y $k = n - 1$.

En este caso consideremos el juego auxiliar w definido sobre $N \setminus \{1\}$ de la siguiente manera:

$$w(T) := v_{k-1}(T \cup \{1\}) - v_{k-1}(\{1\}) \quad \text{si } T \subseteq N \setminus \{1\}.$$

Dado que $k - 1 = n - 2$ y suponemos que $n > 3$, tenemos:

$$w(\{j\}) = v_{k-1}(\{1, j\}) - v_{k-1}(\{1\}) = v(\{j\}),$$

mientras que si $|T| + 1 \leq k - 1$, es decir $|T| \leq k - 2$,

$$w(T) = \sum_{j \in T} v(\{j\}) + v(\{1\}) - v(\{1\}) = \sum_{j \in T} v(\{j\}),$$

y si $|T| + 1 > k - 1$,

$$w(T) = v(T \cup \{1\}) - v(\{1\}).$$

Obsérvese que en particular se cumple:

$$w(N \setminus \{1\}) = v(N) - v(\{1\}).$$

Por la construcción resulta:

$$w_{k-2} = w.$$

Además

$$w_{k-1}(T) = \begin{cases} \sum\limits_{j\in T} v(\{j\}) & \text{si} \quad |T| \leq k-1 \\ w(T) & \text{si} \quad |T| > k-1. \end{cases}$$

Por ello, se puede afirmar que si $|T| > k-1$ (entonces $|T \cup \{1\}| > k$),

$$\begin{aligned} w_{k-1}(T) &= v_{k-1}(T \cup \{1\}) - v_{k-1}(\{1\}) = \\ &= v_k(T \cup \{1\}) - v_k(\{1\}), \end{aligned}$$

mientras que si $|T| \leq k-1$ también se cumple

$$w_{k-1}(T) = v_k(T \cup \{1\}) - v_k(\{1\}).$$

De esta forma podemos asegurar, por la hipótesis de inducción aplicada a w, que se cumple

$$Web(w_{k-2}) \cap Web(w_{k-1}) \neq \emptyset.$$

Y para cada $\hat{x} \in Web(w_{k-2}) \cap Web(w_{k-1})$, que es un vector de $\mathbb{R}^{n-1}$, podemos considerar el vector $x \in \mathbb{R}^n$ definido de la siguiente manera:

$$x_i = \begin{cases} v(\{1\}) & \text{si} \quad i = 1 \\ \hat{x}_i & \text{si} \quad i \in N\backslash\{1\}. \end{cases}$$

Para cada permutación $\hat{\theta} = (i_1, i_2, ..., i_{n-1})$ de $N\backslash\{1\}$, consideremos la permutación $\theta = (1, i_1, i_2, ..., i_{n-1})$. Se cumple que:

$$m_j^{\theta}(v_k) = \begin{cases} v(\{1\}) & \text{si} \quad j = 1 \\ m_j^{\hat{\theta}}(v_k) = m_j^{\hat{\theta}}(w_{k-1}) & \text{si} \quad j \neq 1 \end{cases}$$

así como

$$m_j^{\theta}(v_{k-1}) = \begin{cases} v(\{1\}) & \text{si} \quad j = 1 \\ m_j^{\hat{\theta}}(v_{k-1}) = m_j^{\hat{\theta}}(w_{k-2}) & \text{si} \quad j \neq 1 \end{cases}$$

Por tanto, para cada elemento $\hat{x} \in Web(w_{k-2}) \cap Web(w_{k-1})$ podemos encontrar el vector $x \in Web(v_{k-1}) \cap Web(v_k)$, es decir, tenemos

$$Web(v_{k-1}) \cap Web(v_k) \neq \emptyset.$$

□

Es posible demostrar otro resultado sobre las relaciones entre los conjuntos de Weber de nivel k en el caso en que los juegos estén ordenados, igual que se ha demostrado para los conjuntos de Weber.

Teorema 4.20. *Sea* v^1, $v^2 \in G^N$, *y* $k \in [1, n-1]_{\mathbb{N}}$. *Entonces, si* $v^1 \leq v^2$, *con* $v^1(N) = v^2(N)$, *se cumple:*

$$Web_k(\, v^1) \cap Web_k(\, v^2) \neq \emptyset.$$

Demostración:

Si $v^1 \leq v^2$, con $v^1(N) = v^2(N)$ se cumple que

$$v^1(S) \leq v^2(S)\,, \qquad \text{para todo } S \subset N,$$

de donde

$$v^1(i) \leq v^2(i)\,, \qquad \text{para todo } i \in N,$$

$(\, v^1)_k \leq (\, v^2)_k$, con $(\, v^1)_k(N) = (\, v^2)_k(N)$.

Entonces el resultado a demostrar es inmediato, a partir de que $Web_k(v) = Web(v_k)$. □

Parte II

JUEGOS CON GRUPOS HOMOGÉNEOS

Capítulo 5

Juegos cooperativos con grupos homogéneos

En este capítulo presentaremos el modelo de los juegos sobre grupos homogéneos. Se trata de una extensión de la teoría clásica de los juegos cooperativos. La idea que hay tras este modelo es la de manejar juegos con un gran número de agentes (jugadores), pero que pueden ser agrupados en grupos de jugadores con las mismas características. Esta propiedad permitirá simplificar los cálculos y conceptos de la teoría de los juegos cooperativos de utilidad transferible, ya que da lugar a definiciones ligeramente diferentes.

En primer lugar tratamos de analizar un modelo específico que aparece en situaciones procedentes del campo actuarial, es decir, de aplicaciones a los seguros, pero veremos que se puede utilizar en otros contextos. El artículo de Alegre y Claramunt (1995) constituye un punto de partida del presente modelo. Otras situaciones pueden ser también interesantes; por ejemplo, el estudio de los juegos de imputación de costes que aparecen en la reorganización del sector ferroviario en Europa, ya que la desregulación en este sector debe permitir la competencia, y la infraestructura ferroviaria debe ser compartida entre diversos operadores, a los que se les debe imponer una tarifa "justa" (véase, por ejemplo, Fragnelli et al., 1999). Este uso conjunto de unas infraestructuras *(facilities)* ha sido estudiado anteriormente en otros contextos, desde el principio de la teoría de juegos.

Efectivamente, la posibilidad que varios agentes o jugadores pueden y deben ser agrupados ha sido considerada antes: por ejemplo, los *airport cost games* fueron los primeros en los que el análisis teórico desde los juegos cooperativos se hizo agrupando los jugadores en grupos homogéneos. En este caso la función característica depende tan solo de los diversos tipos de avión presentes en cada coalición, y no en el número de aviones de cada tipo dentro de cada coalición. Este tipo de juegos será estudiado más tarde, pero la presentación del modelo se puede ver en los trabajos de Littlechild y Owen (1973) y Dubey (1982).

Nosotros nos restringiremos al estudio de juegos con muchos jugadores, pero en número finito (*large games*). También Rosenmüller (1982, 1987, 1990) en toda una serie de artículos, ha explorado este tipo de situación, señalando que se trata del mismo esquema discreto y finito, que por tanto no necesita de la teoría de la medida ni del paso al límite, aunque su estudio está claramente escorado hacia los juegos de votación, es decir, juegos simples. Otros enfoques utilizan una infinidad de jugadores, de los cuales algunos, o todos, son individualmente insignificantes, como los juegos oceánicos de Milnor y Shapley (1978), o bien definidos sobre conjuntos no atómicos y que por tanto obligan a reformular la teoria de los juegos cooperativos de utilidad transferible, mediante el uso del concepto de medida y espacio medible, como Aumann y Shapley (1974).

También aparecerá con claridad que ciertas extensiones de la teoría de juegos cooperativos T.U., como los *Multi-Choice Games*, introducidos por Hsiao y Raghavan (1990, 1993) se pueden analizar desde el punto de vista inicial presentado aquí.

5.1 Motivación

Diversas situaciones, procedentes tanto de los modelos clásicos de la teoría de juegos cooperativos, como de otros campos (las aplicaciones actuariales, por ejemplo) se pueden considerar que justifican el análisis de esta extensión de la teoría de juegos cooperativos:

- Supongamos que una universidad o una empresa desea proporcionar a sus empleados un seguro de accidentes. Para calcular el coste que se debe imputar a cada trabajador (a efectos de impuestos), es natural considerar las diversas categorías existentes, debido a los riesgos evidentemente distintos a los que se enfrentan. Sin embargo, una vez nos encontramos en una categoría o tipo de trabajo, todos los empleados deben ser considerados iguales, ya que la suposición natural es que el riesgo de accidente depende del tipo de trabajo realizado, y no de otras características, tales como la edad, por ejemplo.

- Supongamos que se analiza el funcionamiento de una institución grande, como un estado federal, o una empresa multinacional. En esta institución el proceso de toma de decisiones a menudo requiere la aprobación de grupos diversos en un modelo complejo. Este proceso ya ha sido estudiado exhaustivamente y desde la teoría de juegos. Por ejemplo, si nos fijamos en que los componentes de la organización están divididos en secciones o comités, el resultado de la decisión puede consistir en conseguir el apoyo de un número suficiente de comités. Este caso se puede ver en el libro de Owen (1995).

- Otro ejemplo puede ser un grupo de investigación. Éste puede estar formado por:

  directores de investigación(*research directors*),

  investigadores(*assistant researchers*),

  becarios postdoctorales (*post-doc researchers*),

  etc.,

  cuya composición debe cumplir ciertas reglas, digamos burocráticas, o restricciones: por ejemplo, el número de directores puede estar fijado entre 1 y 3, o la proporción mínima entre directores e investigadores puede ser $1:4$, o entre investigadores y becarios debe ser de $1:3$, etc. Suponemos que todos los miembros de un mismo grupo presentan la misma habilidad. Además, podemos suponer que el presupuesto que el grupo de investigación puede manejar está "relacionado" con el número de personas que forman el grupo, y puede ser determinado de una manera fácil y no tiene un límite superior. Si el presupuesto crece lo suficiente (el modelo presenta superaditividad) el tamaño máximo del grupo se va a alcanzar, y la pregunta que queda es: ¿cómo compartir el producto de la cooperación? En Hsiao and Raghavan (1993), un ejemplo de este tipo lleva a motivar la introducción de los *Multi–Choice games*. Estos últimos pueden ser analizados desde el punto de vista señalado aquí, si bien ciertas modificaciones del modelo básico son necesarias.

- El ejemplo bien conocido de los terratenientes y los campesinos, introducido por Shapley y Shubik (1967), y estudiado también por Chetty, Dasgupta y Raghavan (1976). Se trata de una economía de producción en la cual se consideran unos cuantos campesinos sin tierra (braceros) y uno o más terratenientes. Los terratenientes pueden emplear a los braceros para cultivar su tierra, y los campesinos contribuyen con tan solo su trabajo. Se proporciona una función de producción que expresa la tecnología y que depende solamente del número de trabajadores contratados (y eventualmente del número de terratenientes), de forma que cumpla ciertas condiciones "naturales". Suponemos que todos los terratenientes son iguales (disponen de la misma cantidad de tierra) así como que todos los campesinos son iguales.

- Los juegos del mercado de los guantes (*Glove market games*): este tipo de juegos están compuestos por dos tipos de jugadores, dependiendo del tipo de guante que posee cada uno, guantes de la mano derecha y guantes de la mano izquierda. Para obtener un provecho hace falta juntar un guante de cada clase, de manera que se tenga un guante completo. Este modelo será estudiado con más detalle posteriormente.

- El modelo de los *Airport cost games*. En él, se considera el problema de evaluar el coste de la construcción de un aeropuerto que sirva para distintos tipos de aeronaves. Lo que se analiza es el coste anual (que incluye amortizaciones y conservación), que debe repartirse entre los diversos aviones que utilizan la infraestructura. Aquí cada agente corresponde a un aterrizaje de un avión, y estos agentes (aviones) se pueden identificar por el tipo de avión del que se trata, ya que diversos aviones del mismo tipo van a necesitar la misma longitud de pista para poder aterrizar. En este caso, la función de coste depende solamente de los tipos de avión que se van a usar, y en realidad no importa el número real de aterrizajes de cada uno de los tipos considerados. Por ello el modelo corresponde claramente a una agrupación de los jugadores en tipos homogéneos. Más tarde analizaremos este modelo con más extensión.

- Si conocemos quiénes son los tomadores de una póliza de seguros, y se da un criterio actuarial para calcular la prima pura, ¿cómo repartir el coste del seguro (la prima) entre ellos?, y de forma más general, ¿cuáles deberían ser los criterios para satisfacer alguna propiedad de equidad desde el punto de vista de la economía normativa?

5.2 Unos ejemplos

Antes de estudiar con detalle el modelo de los juegos cooperativos con grupos homogéneos vamos a ver un par de ejemplos de aplicación de los juegos cooperativos a los problemas actuariales. Como siempre, estudiamos el problema de un grupo de individuos o empresas que se enfrentan a una decisión conjunta, y que están de acuerdo en la colaboración, pero deben analizar cuál es su situación y el reparto de los costes o beneficios.

Ejemplo 5.1. *Consideremos el ejemplo siguiente sobre los grupos de retención* (retention groups), *que se encuentra en Borch (1962) y Lemaire (1991).*

Consideremos un grupo de $n_1 = 100$ *individuos. Cada uno de ellos está expuesto a un riesgo de pérdida de* 1 *unidad monetaria, con probabilidad* $q_1 = 0,1$. *Supongamos que estas personas deciden formar un grupo de retención del riesgo, una pequeña compañía aseguradora (una "mutua"), para cubrirse del riesgo entre ellos mismos. La prima que se cargará será justamente aquella que permita cubrir la esperanza del riesgo (la prima pura) y también las desviaciones de esta esperanza que impidan que la compañía se arruine. Esta prima recargada debe ser tal que la probabilidad de ruina del grupo sea menor que* $0,001$. *El principio* *actuarial que permite este cálculo se denomina "principio del percentil" o según Gerber (1979),* constrained premium, *y de acuerdo con este principio*

$$\Pi^{\varepsilon} = Min\{y \mid F_{\xi}(y) \geq 1 - \varepsilon\},$$

donde ε representa el nivel admisible de insolvencia, y F_{ξ} es la variable aleatoria que expresa la pérdida.

Suponiendo que los riesgos son independientes, y usando la aproximación por la ley normal de la distribución binomial, la cantidad para asegurar que la probabilidad de ruina sea menor que $0,001$ *debe ser la esperanza de la distribución más tres veces la desviación típica y, por tanto, el grupo debe tener un monto total de fondos igual a*

$$P_1 = n_1 q_1 + 3\sqrt{n_1 q_1 (1 - q_1)} = 10 + 9 = 19.$$

Cada persona debe pagar, además de la prima neta $0,10$, *un recargo de seguridad de* $0,09$.

Si ahora tenemos otro grupo, que consiste de $n_2 = 100$ individuos, y como antes cada uno de ellos está expuesto a un riesgo de pérdida de 1, *con probabilidad* $q_2 = 0,2$, *podemos suponer que estas personas también deciden formar un grupo de retención del riesgo, la "mutua", para cubrirse del riesgo entre ellos mismos. La prima que se cargará debe ser tal que la probabilidad de ruina del grupo sea menor que* $0,001$. *Suponiendo que los riesgos son independientes, y usando la aproximación por la ley normal de la distribución binomial, el grupo debe tener un monto total de fondos igual a*

$$P_2 = n_2 q_2 + 3\sqrt{n_2 q_2 (1 - q_2)} = 20 + 12 = 32.$$

Por tanto, cada persona debe pagar $0,32$ *(además de la prima neta* $0,20$, *un recargo de seguridad de* $0,12$*).*

El último grupo consiste de $n_3 = 120$ individuos. Cada uno de ellos está expuesto a un riesgo de pérdida de 1, *con probabilidad* $q_3 = 0,3$. *Como antes, supongamos que estas personas deciden formar un grupo de retención del riesgo para cubrirse del riesgo entre ellos mismos. La prima que se cargará debe ser tal que la probabilidad de ruina del grupo sea menor que* $0,001$. *Suponiendo que los riesgos son independientes, y usando la aproximación por la ley normal de la distribución binomial, el grupo debe tener un monto total de fondos igual a*

$$P_3 = n_3 q_3 + 3\sqrt{n_3 q_3 (1 - q_3)} = 36 + 15,06 = 51,06 \ .$$

Por tanto cada persona debe pagar $0,4255$, *que corresponde, por una parte, a la prima neta,* $0,30$, *y por otra un recargo de seguridad de* $0,1255$.

Supongamos ahora que los dos primeros grupos deciden unirse y formar una única compañía. Para asegurarse de que la probabilidad de ruina sigue siendo menor que $0,001$, *esta nueva compañía debe tener unos fondos totales de*

$$P_{12} = n_1 q_1 + n_2 q_2 + 3\sqrt{n_1 q_1 (1 - q_1) + n_2 q_2 (1 - q_2)} = 10 + 20 + 15 = 45.$$

Como $P_{12} = 45 < P_1 + P_2 = 19 + 32 = 51$, *su unión resulta en un decrecimiento de* 6 *en el recargo de seguridad. El problema es ahora cómo este ahorro debe repartirse entre los grupos*

Si procedemos de igual manera para las otras coaliciones posibles:

$$\begin{aligned} P_{13} &= n_1q_1 + n_3q_3 + 3\sqrt{n_1q_1(1-q_1) + n_3q_3(1-q_3)} = 10 + 36 + 17,54 = 63,54 \ , \\ P_{23} &= n_2q_2 + n_3q_3 + 3\sqrt{n_2q_2(1-q_2) + n_3q_3(1-q_3)} = 20 + 36 + 19,26 = 75,26 \ , \\ P_{123} &= n_1q_1 + n_2q_2 + n_3q_3 + 3\sqrt{n_1q_1(1-q_1) + n_2q_2(1-q_2) + n_3q_3(1-q_3)} \\ &= 10 + 20 + 36 + 21,26 = 87,26 \ . \end{aligned}$$

Es evidente que al unir los grupos, no hace falta que los recargos de seguridad sean tan grandes, y el ahorro está claro. La Teoría de Juegos es un instrumento para analizar este problema y sus herramientas pueden dar formas para estudiar la cooperación implícita que se da en los seguros.

Algunas aplicaciones de la teoría de los juegos cooperativos al campo actuarial proceden desde los primeros años 60. Citaremos los trabajos de Borch (1960a, 1960b, 1962), y otros, como los de Beard et al. (1987), Bühlmann (1980, 1984), Lemaire (1984, 1991), etc.

El artículo de Alegre y Claramunt (1995) es el que nos servirá para introducir un ejemplo de la utilización de los grupos homogéneos.

Un ejemplo de juego cooperativo con grupos homogéneos

El artículo de Alegre y Claramunt (1995), en el cual se proporcionan dos ejemplos numéricos, puede ser analizado desde el punto de vista de los juegos cooperativos con grupos homogéneos. Presentamos aquí todos los detalles para observar el enfoque aplicado de un ejemplo:

Ejemplo 5.2. *Este ejemplo presenta* 6 *participantes, uno de los cuales tiene* 30 *años de edad, mientras que los restantes tienen* 20 *años. Los beneficios son rentas prepagables de retiro, que para los participantes de* 20 *años tiene un monto de PTA* 1.000.000 *y para el participante de* 30 *años tiene un monto de PTA* 5.000.000 .

El tanto efectivo de interés anual es del 6%, *la probabilidad máxima admitida de insolvencia es del* 5% *y la tabla de mortalidad usada es la de la Población Española Masculina (P.E.M.-80) que puede ser encontrada en Navarro(1991).*

Tabla 5.1: Operaciones individuales

Edad	Prima Neta	Prima Recargada	Recargo de seguridad
20	555 441,75	1 032 396,36	85,87%
30	5 027 251,40	9 244 323,3	83,88%

En la tabla 5.1 se proporciona el análisis de cada operación individual (para cada participante), con la prima única que debe pagarse para garantizar, en el momento del retiro, los beneficios señalados.

En la tabla 5.2 se define la función v que proporciona el ahorro respecto de las operaciones individuales que obtienen las diversas coaliciones. Éstas están indicadas por el primer número de la edad que tienen los jugadores (los participantes) que forman la coalición.

Tabla 5.2: Ahorro del coste de la solvencia para las coaliciones

Coalición	Función característica
2	0
3	0
22	173 972,07
23	416 528,13
222	415 004,8
223	823 324,36
2222	730 518,84
2223	1 228 945,90
22222	1 059 513,53
22223	1 653 630,45
222223	2 086 456,37

En el contexto en el que estamos, es obvio que el ejemplo tiene 2 *grupos homogéneos, uno con* 5 *elementos y el otro con* 1 *elemento.*

Los valores para cada coalición tienen en cuenta que los miembros del mismo grupo son similares a la hora de calcular el valor de la coalición. En el artículo de Alegre y Claramunt (1995) se estudia el core *del juego, pero solamente lo que se indica como el* core restringido, *i.e., permitiendo solamente los mismos valores para jugadores que son indiferentes para nosotros. Se muestra que el* core *restringido no es vacío, pero cuando se aplican la mayor parte de los criterios actuariales estándar para la determinación de la prima, las distribuciones se encuentran fuera del* core *restringido.*

Como indican sus cálculos, el valor de Shapley (del ahorro que se produce) se halla en el core *y vale:*

$$Sh_2 = 289\ 628,741667 \quad y \quad Sh_3 = 638\ 312,661667\ .$$

Además, solamente uno de los principios actuariales que se señalan en el artículo proporciona una distribución en el core.

5.3 El modelo de los juegos con grupos homogéneos

Consideremos un conjunto finito M, el conjunto de los tipos en los que se clasifican los jugadores. Habitualmente estará numerado, y por tanto utilizaremos $M = \{1, 2, ..., m\}$.

Cada elemento de M indica un tipo de jugador, y consideraremos que índices diferentes representan diferentes tipos de jugadores. El tipo de cada jugador refleja sus características respecto del problema económico que estamos considerando.

Si replicamos los jugadores, y del tipo $j \in M$ tenemos n_j jugadores, entonces

$$\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m, \qquad \text{con} \qquad \mathbf{n} \neq \mathbf{0},$$

indica el número de jugadores de cada tipo que tenemos.

La función característica es una función definida sobre[1] $\prod_{i=1}^{m} [0, n_i]_{\mathbb{N}}$, con imagen en los números reales, y con la condición $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Refleja el valor que puede alcanzar un grupo $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ con s_i elementos de cada tipo.

Una vez tengamos fijados los tipos, admitiremos que puede ocurrir que $n_i = 0$, y en este caso no tendremos elementos de tipo i en el modelo, si bien normalmente podremos aceptar que $n_i > 0$, y que tenemos jugadores de cada uno de los tipos en el modelo. Algunos de los conceptos que aparecerán tendrán su definición adaptada a este hecho.

Formalmente podemos enunciar la siguiente definición:

Definición 5.3. *Un* ***juego con grupos homogéneos*** Γ *es una tripleta*

$$(M, \mathbf{n}, f),$$

donde

1. $M = \{1, 2, \ldots, m\}$ *es un conjunto finito no vacío, el conjunto de los tipos, y* $m = |M| \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *es el número de tipos,*

2. $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^n$ *es un vector no nulo que indica el número de agentes de cada tipo,* $\mathbf{n} \neq \mathbf{0}$ *y*

3. f *es una función definida sobre* $\prod_{i=1}^{m} [0, n_i]_{\mathbb{N}}$ *a valores en los números reales,* $f : \prod_{i=1}^{m} [0, n_i]_{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}$, *con la condición* $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$.

[1] donde $[0, n_i]_{\mathbb{N}} = \{0, 1, 2, \ldots, n_i\}$ es la cadena de números naturales entre 0 y n_i.

Una *coalición* es cualquier vector $\mathbf{s} = (s_1, s_2, \ldots, s_m) \in \mathbb{N}^m$, tal que $\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n}$ (es decir, $0 \leq s_i \leq n_i$ para todo $i \in M$). Puede interpretarse como el grupo que tiene s_i réplicas del tipo i.

Por otra parte, el conjunto $\prod_{i=1}^{m}[0, n_i]_{\mathbb{N}}$ no es más que un subconjunto de la malla entera de $\mathbb{R}^M$, por tanto al considerar la función definida sobre este conjunto estamos considerando funciones sobre vectores de coordenadas naturales. En realidad, la malla que consideramos es el retículo de la malla entera (con el orden usual) comprendido entre el vector $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ y el vector $\mathbf{n} = (n_1, n_2, \ldots, n_m) \in \mathbb{N}^m$, y es el producto cartesiano de una serie de cadenas. Podemos designar este retículo como

$$\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m = \left(\prod_{i=1}^{m}[0, n_i]_{\mathbb{N}} \ , \ \leq \right).$$

La coalición "vacía" es justamente $\mathbf{0} = (0, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{N}^m$, donde la interpretación es clara: no hay elementos de ningún tipo. Unas coaliciones especialmente importantes serán las que corresponden a los ejes de coordenadas, la base canónica[2] de $\mathbb{R}^M$, $\mathbf{e}^i = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Es fácil calcular que el número de todas las coaliciones posibles es $\prod_{i=1}^{m} (n_i + 1)$.

El *soporte* de $\mathbf{s}$, $supp(\mathbf{s})$, es el conjunto de tipos que están efectivamente presentes en $\mathbf{s}$:

$$supp(\mathbf{s}) := \{ i \in M \mid s_i \neq 0 \}.$$

En particular, ya que admitimos que n_i puede ser 0 para algún tipo $i \in M$, nos interesará especialmente el soporte de la coalición total

$$supp(\mathbf{n}),$$

que será el conjunto de los tipos "realmente existentes".

La función f se denomina *función característica*, y el valor $f(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ da el valor de una coalición que tiene s_i elementos de tipo i. Si $s_i = 0 \in [0, n_i]_{\mathbb{N}}$, entenderemos que ningún elemento de tipo i se encuentra en la coalición.

El valor de la función característica se suele interpretar como el ahorro, o la ganancia que se puede obtener si deciden cooperar s_i jugadores del tipo i para cada uno de los tipos ($i = 1, 2, \ldots, m$). Normalmente el juego se identifica con su función característica, f, si no hay confusión posible.

[2]Recordemos que el vector incidente al conjunto $S \subseteq M$, $\mathbf{e}^S \in \mathbb{R}^m$, se define como $\mathbf{e}_i^S = 1$ si $i \in S$, y 0 en otro caso. Por ello, el i-ésimo vector de la base canónica se define como $\mathbf{e}_j^i = \delta_{ij}$ para cada $j \in M$.

Sería posible extender la definición de juego con grupos homogéneos, sin modificarla, para un conjunto infinito de tipos ($M = \mathbb{N}$) siempre que el soporte de la coalición total $\mathbf{n}$, $supp(\mathbf{n})$, sea finito.

El conjunto de todos los *Juegos con grupos homogéneos, o Juegos HG* para un valor fijo de m y $\mathbf{n}$, se denotará por $HG_{\mathbf{n}}^{m}$. Se puede considerar como el espacio euclídeo correspondiente $\mathbb{R}^{\prod_{i=1}^{m}(n_i+1)}$, donde los ejes se indexan por las diferentes coaliciones. Se trata por tanto de un espacio vectorial con las operaciones de la suma de juegos y el producto por escalares, definidos de manera natural. También, si consideramos el máximo y el mínimo para cada par de números naturales, a y b, $a \vee b := \max\{a, b\}$, y $a \wedge b := \min\{a, b\}$, el máximo y el mínimo de dos juegos de $HG_{\mathbf{n}}^{m}$, $f \vee f'$ y $f \wedge f'$, están bien definidos.

Ejemplo 5.4. *Sea* $(M, \mathbf{n}, f)$ *un juego con grupos homogéneos con* $M = \{1, 2\}$, *y* $\mathbf{n} = (3, 2)$, *es decir,* 3 *jugadores del tipo* 1 *y* 2 *del tipo* 2, *y cuya función característica es la siguiente:*

$$f(3,1) = 8, \ f(3,2) = 12, \ f(2,2) = 10, \quad y \ 0 \ \textit{en el resto de los casos.}$$

La figura 5.1 indica las coaliciones y los valores de la función característica.

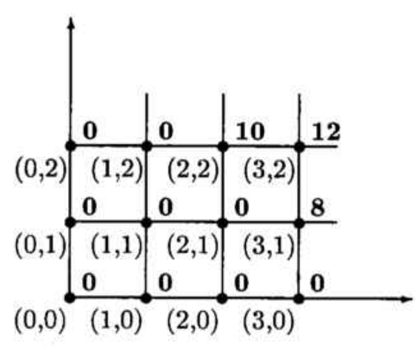

Figura 5.1: La malla entera entre $(0,0)$ y $(3,2)$ con los valores del juego del ejemplo 5.4

A cada juego cooperativo con grupos homogéneos se puede asociar, de forma natural, un juego cooperativo ordinario. Para ello debemos "nombrar" a los jugadores. Con la notación que hemos utilizado, cada tipo corresponde a un número, y cada jugador se representará como un par de números naturales, el primero indicando el tipo y el segundo el jugador dentro de este tipo. Formalmente, cada agente se denota por un par ordenado (i, j), donde $i \in M = \{1, 2, ..., m\}$ indica el tipo y $j \in \{1, 2, ..., n_i\}$ indica el jugador de dicho tipo (suponemos que $n_i > 0$). El conjunto

$$N = \{(i, j) \mid i \in M = \{1, 2, \ldots, m\}, \text{ y } j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}\}$$

es el conjunto de jugadores (téngase en cuenta que si $n_i = 0$, debemos considerar que no hay jugadores de tipo i), y para este conjunto definimos el siguiente juego cooperativo asociado:

Definición 5.5. *Para cada juego cooperativo con grupos homogéneos* $(M, \mathbf{n}, f) \in HG^m_{\mathbf{n}}$, *se define el* juego cooperativo asociado, (N, w_f), *donde el conjunto de jugadores es* $N = \bigcup_{i \in M} N^i$, *con* $N^i = \{(i, j) \mid j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}\}$, *para* $i \in supp(\mathbf{n})$, *y* $N^i = \emptyset$, *para* $i \notin supp(\mathbf{n})$, *y* w_f *es la función característica:*

$$w_f : 2^N \longrightarrow \mathbb{R},$$

que para cada coalición $S \in 2^N$, *se define como*

$$w_f(S) = f(s_1, s_2, ..., s_m) = f\left(\sum_{i=1}^{i=m} s_i \; \mathbf{e}^i\right),$$

donde $s_i = \# \left|S \cap N^i\right|$.

El conjunto G^N de todos los juegos cooperativos sobre el conjunto (finito) N se puede incluir dentro de la definición de los juegos cooperativos con grupos homogéneos, tomando simplemente $\mathbf{n} = e^N = (1, 1, ..., 1)$ (cada jugador es de un tipo distinto y tantos tipos como jugadores). Por ello, no es más que $HG^n_{\mathbf{n}}$, con $\mathbf{n} = e^N$.

También es obvio que los juegos cooperativos simétricos, es decir, aquellos juegos (N, v) tales que $v(S) = f(s)$, con $s = \# |S|$, se pueden identificar con los juegos homogéneos con un solo tipo.

5.4 Aplicaciones económicas

Antes de proseguir el estudio de la definición de los juegos con grupos homogéneos, vamos a estudiar algunos modelos clásicos en la teoría de juegos, y que se pueden observar a la luz de nuestra definición. Corresponden a funciones características "especiales", que permiten encontrar una especificación compacta.

El modelo de los juegos del mercado de los guantes (*glove-market games*)

Consideremos una economía de producción en la que cada agente posee una unidad de una de las dos materias primas que se necesitan para fabricar una unidad de producto, y que deben usarse en cantidades iguales. También se puede considerar una economía de intercambio que consiste en comerciantes de dos tipos y con dos bienes completamente complementarios A y B que solamente se pueden utilizar en cantidades iguales. Por ello los agentes pueden considerarse de dos subconjuntos disjuntos, y supondremos que cada uno de ellos posee inicialmente una unidad del bien A o B. Además el producto fabricado con una unidad de cada materia prima se puede vender con un beneficio de una unidad monetaria.

Por fijar las ideas, podemos suponer que algunos agentes disponen de un guante de la mano izquierda, mientras que otros disponen de un guante de la mano derecha. Se necesita la unión de un agente de cada tipo para obtener un guante completo. Por ello este modelo se denomina *glove-market game*, y una descripción completa puede hallarse en Driessen (1988) o en Owen (1995). Su estudio es habitual para ilustrar diversas ideas en teoría de juegos, y su utilización se puede rastrear en Shapley (1959), por ejemplo.

Consideremos que $M = \{1,2\}$: el tipo 1 corresponde a los jugadores que poseen un guante de la mano izquierda, y el tipo 2 es el de los jugadores que poseen un guante de la mano derecha.

Supongamos que tenemos p jugadores del tipo 1 y q jugadores del tipo 2; es decir, $\mathbf{n} = (p,q)$ con $(p,q) \neq (0,0)$. La función f se define de la siguiente manera

$$f(x,y) = \min\{x,y\}, \quad \text{para } 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q.$$

Es decir, el valor de una coalición es el número de guantes completos que puede conseguir.

Es evidente que esta situación puede verse, como se suele presentar usualmente (véase Owen, 1995) como un juego cooperativo donde el conjunto de jugadores N es la unión de los conjuntos P y Q. Un jugador de P posee un guante de la mano izquierda y un jugador de Q posee un guante de la mano derecha.

Este modelo puede ser modificado de varias maneras, entre las cuales vamos a señalar dos:

- Si no pensamos simplemente en los guantes, sino en la producción conjunta de cualquier bien, la proporción entre los dos componentes puede ser cambiada. Para tener un "guante" completo bastará modificar convenientemente la proporción de los bienes y por tanto la función característica. En este caso, la función f se define como

$$f(x,y) = \min\{x,\alpha y\}, \text{ para } 0 \le x \le p,\ 0 \le y \le q,$$

con $\alpha \geq 0$. Driessen (1988) estudia esta modificación del modelo. El caso $\alpha = 0,5$, $p = 2$, $q = 3$ de este tipo de juego puede ser interpretado (Maschler, 1976) de la siguiente manera:

"Cada uno de dos fabricantes posee dos máquinas que solamente pueden ser utilizadas por trabajadores con experiencia. Hay exactamente tres trabajadores con experiencia disponibles, cada uno de los cuales desea trabajar como máximo 8 horas al día [que es la jornada diaria también de las máquinas]. Cuando un trabajador utiliza la máquina durante 8 horas, produce un producto que puede ser vendido por una ganancia neta de media unidad monetaria."

En otras palabras, cada fabricante puede aprovechar como máximo dos trabajadores con experiencia al día.

- Se pueden considerar mercados de guantes en los que haya 3 o más tipos: en este caso estaremos en un ejemplo claro de juego con grupos homogéneos. Es lo que llamaremos **juego del mercado de guantes generalizado.**

  El conjunto de los tipos es $M = \{1, 2, ..., m\}$ y cada tipo corresponde a los jugadores que poseen una clase de materia prima.

  Suponemos que hay n_1 jugadores del tipo 1, n_2 jugadores del tipo 2, etc., es decir, $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbb{N}^m$ con $\mathbf{n} \neq 0$. La función f se define de la siguiente manera:

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \min_{i=1,...,m} \{x_i\}, \text{ para } 0 \leq x_i \leq n_i. \tag{5.1}$$

En términos económicos este modelo del mercado de los guantes describe la producción de un bien que requiere proporciones fijas de los distintos *inputs*, y si se piensa en términos de consumo, describe la complementariedad perfecta en el consumo de distintos bienes.

Apartsin y Holzman (2000) estudian el *core* y el conjunto de negociación (*bargaining set*) en juegos del mercado de guantes, definidos en sentido más amplio del que hemos visto aquí, demostrando que todos los juegos cooperativos ordinarios que son totalmente equilibrados se pueden representar de esta manera.

El modelo de los *Airport Cost Games*

Este problema fue analizado por Baker (1965) y Thompson (1971), proponiendo reglas de reparto de los costes de construcción y mantenimiento de un aeropuerto, dentro de sus investigaciones para determinación de las tasas de aterrizaje para los diferentes tipos de aeronaves.

Posteriormente, y aplicando la teoría de juegos cooperativos, este análisis fue llevado a cabo por Littlechild y Owen (1973), y Littlechild (1974), así como Dubey (1982). Se pueden encontrar otras referencias detalladas en Driessen

(1988) y Owen (1995) y en la exposición del modelo vamos a seguir esencialmente el libro de Owen.

Ha sido una aplicación clara del análisis de la teoría de juegos para la determinación de las tasas de aterrizaje, donde el principal objetivo es dar una lista de tarifa "justa" para los diversos tipos de aviones. La discusión trata del problema de la tarificación o imputación de costes en un aeropuerto, pero es evidente que esta discusión se puede hacer extensible al reparto de los costes de cualquier infraestructura común, lo que en economía e ingeniería tiene una gran tradición, y por supuesto, también el reparto del coste de un bien público.

En general, hay dos clases de gastos en un aeropuerto:

1. costes de operación variables (uso de la terminal, autobuses, electricidad, etc.), debidos al aterrizaje de aviones de diversos tipos, y que serán aproximadamente proporcionales al número de aviones que usen el aeropuerto (será ligeramente mayor para los aeroplanos más grandes),

2. coste de capital fijo, debido a la construcción de la terminal y de las pistas, que debe ser amortizado en un periodo dado.

Los costes de operación variables se pueden repercutir directamente a los aviones que usan el aeropuerto y por tanto no presentan ningún problema de tarificación, ya que la retribución será a base de coste-por-aterrizaje. El problema se presenta en la repercusión del coste del capital a los aviones. Generalmente resulta que el coste de capital de un aeropuerto depende, esencialmente, del mayor avión que se supone va a aterrizar en el aeropuerto, ya que es el que determinará el coste de la pista de aterrizaje. Si se diseña e introduce un nuevo modelo de avión mayor (es decir, que necesita una pista más larga), el coste de la construcción de esta pista más larga será el que marque la pauta.

Podemos dividir los aviones en m tipos distintos ($m \geq 1$). Ahora N_j es el conjunto de aterrizajes por los aviones del tipo j ($j = 1, 2, ..., m$) y $N := \bigcup\limits_{j=1}^{m} N_j$ el conjunto de todos los aterrizajes en el aeropuerto. Suponemos que hay n_j aterrizajes por aviones del tipo j.

Sea C_j el coste (anualizado o en el periodo) de la pista adecuada para aviones del tipo j ($j = 1, 2, ..., m$), y sin pérdida de generalidad, podemos ordenar los tipos de forma que los costes estén ordenados de manera que $0 = C_0 < C_1 < C_2 < ... < C_m$.

Sea $S \subseteq N$, $S \neq \emptyset$. Entonces el coste de una pista adecuada para recibir todos los aterrizajes de los aviones de S viene dada por

$$c(S) := \max \{C_j \mid 1 \leq j \leq m, \ S \cap N_j \neq \emptyset\}$$

mientras que $c(\emptyset) := 0$.

Si escribimos, para $S \subseteq N$,

$$j(S) := \max\{j \mid S \cap N_j \neq \emptyset\}$$

entonces $c(S) = C_{j(S)}$.

Vamos ahora a expresar este modelo en nuestro presupuesto teórico. Es obvio que la manera de encajar en el modelo de los juegos cooperativos con grupos homogéneos consiste en suponer que:

$M = \{1, 2, ..., m\}$ es el conjunto de los tipos,

$\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbb{N}^m$, donde $n_i = \# \ |N_i| \ i = 1, 2, \ldots, m$, es el número de aterrizajes de cada tipo, y

la función característica será:

$$f(x_1, x_2, ...x_m) := \begin{cases} 0 & \text{si todos los } x_k = 0 \\ C_j & \text{con } j := \max\{i \in M \mid x_i \neq 0\} \end{cases}$$

Las variables serán simplemente el número de elementos de cada tipo.

Un modelo actuarial: *Solvency cost share games*

Tal como hemos visto, el campo actuarial resulta especialmente adecuado para tratar los juegos con grupos homogéneos, especialmente debido al gran número de agentes que actúan, y donde cada uno lleva asociada una variable aleatoria de riesgo. A partir de los trabajos de Borch (1962) y Lemaire (1991), hemos desarrollado un modelo actuarial de reparto del coste de la solvencia. Por esta razón lo hemos denominado *Solvency cost share games*.

Supóngase que tenemos un colectivo de un cierto número (grande) de personas a los que deseamos asegurar. Cada individuo presenta un riesgo individual que sigue una variable aleatoria dicotómica (la misma), pero cuando consideramos el aspecto agregado podemos considerar la ley normal como aproximación de la distribución binomial. Por tanto, este colectivo está asociado a una distribución normal de un riesgo. Esta distribución normal está determinada solamente por dos parámetros, su media y su varianza: $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Siguiendo el ejemplo 5.1 mencionado, la prima cargada al colectivo con el recargo de seguridad para asegurar que la probabilidad de ruina sea menor de $0,001$ es:

$$P = \mu + 3\sigma.$$

Podemos ahora considerar que tenemos una serie de N colectivos, que pueden clasificarse en M tipos diferentes, y cada uno determinado por su distribución normal, es decir, tenemos $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m)$. El colectivo de tipo i sigue una ley normal, de parámetros $\mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$. Para calcular la prima a cargar a varios colectivos debemos sumar las variables aleatorias y evaluar la prima. Si convolucionamos variables aleatorias normales, resulta otra ley normal cuya esperanza es la suma de las esperanzas y varianza la suma de las varianzas. La prima cargada a cualquier coalición de colectivos $\mathbf{s} = (s_1, s_2, ..., s_m)$ será:

$$P(\mathbf{s}) = P(s_1, s_2, ..., s_m) = \sum_{i=1}^{i=m} s_i\mu_i + 3\sqrt{\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i^2}$$

Podríamos encontrar el juego de costes de la prima cargada asociada a cualquier coalición de colectivos, pero en su lugar, y para simplificar los cálculos, vamos a hallar el juego de ahorros correspondiente.

El valor de una coalición es el ahorro que sus miembros pueden conseguir a través de la colaboración; así, el valor de la coalición será el valor de la prima que pagarían por separado menos el valor de la prima que tendrán si se consideran como una sola entidad:

$$\begin{aligned} f(s_1, s_2, ..., s_m) &= \sum_{i=1}^{i=m} s_i\mu_i + 3\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i - \left[\sum_{i=1}^{i=m} s_i\mu_i + 3\sqrt{\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i^2}\right] = \\ &= 3\left[\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i - \sqrt{\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i^2}\right] \end{aligned} \tag{5.2}$$

Está claro que esta fórmula vale para cualquier coalición con

$$(0, 0, ..., 0) \leq (s_1, s_2, ..., s_m) \leq (n_1, n_2, ..., n_m),$$

y más adelante veremos que el juego así definido es convexo.

5.5 El conjunto de las imputaciones y el *core* de un juego con grupos homogéneos

Para definir el conjunto de las imputaciones de un juego cooperativo con grupos homogéneos, necesitamos definir en primer lugar la noción de reparto o distribución eficiente.

Distribuciones eficientes y las imputaciones

Un elemento $\mathbf{x} = (x_i)_{i \in supp(\mathbf{n})} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ se llama un *reparto o una distribución*. Se puede interpretar como una representación de la distribución de la fuerza o los ahorros entre los jugadores realmente existentes de forma que todos los jugadores del mismo tipo reciben el mismo pago. Debido a que los jugadores son homogéneos, solamente estamos interesados en distribuciones iguales-para-iguales (*equal-treatment-of-equals*, ETE), es decir, distribuciones que proporcionan a los jugadores del mismo tipo el mismo valor.

La restricción del vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ al espacio $\mathbb{N}^{supp(\mathbf{n})}$ se indicará por $\hat{\mathbf{n}}$, y análogamente para cualquier otro vector $\mathbf{s}$ de $\mathbb{N}^M$, de forma que

$$\hat{s}_i = s_i \quad \text{para cada } i \in supp(\mathbf{n}).$$

En un juego con grupos homogéneos, $(M, \mathbf{n}, f)$, una distribución $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ se llama *eficiente* si $\mathbf{x}$ proporciona un reparto del valor $f(\mathbf{n})$ entre los jugadores, es decir,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in M} n_i \cdot x_i = \sum_{i \in supp(\mathbf{n})} n_i \cdot x_i &= f(n_1, n_2, ..., n_m), \\ \text{o, brevemente,} \qquad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} &= f(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

Fijémonos que si fuera $n_i = 0$, y no hubiéramos considerado la restricción al conjunto $\mathbb{N}^{supp(\mathbf{n})}$, deberíamos decidir qué pago sería aceptable, ya que la igualdad no proporciona ninguna restricción. Podríamos suponer que si $n_i = 0$ entonces debería ser $x_i = 0$. No lo consideramos así por analogía con la teoría de los juegos cooperativos ordinarios.

Una distribución $\mathbf{x}$ se llama *individualmente racional* si para cada tipo i la distribución x_i supera el valor de un único jugador de dicho tipo, es decir,

$$x_i \geq f(\mathbf{e}^i) \text{ para cada } i \in supp(\mathbf{n}).$$

Sea $I^*(f)$ el conjunto de las distribuciones que son eficientes en el juego f, es decir,

$$I^*(f) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})} \mid \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = f(\mathbf{n}) \right\}.$$

Este conjunto se denomina el *conjunto de las preimputaciones*. Se trata de un hiperplano en $\mathbb{R}^m$, si todos los tipos presentan jugadores efectivos.

Sea $I(f)$ el conjunto de las distribuciones que son eficientes e individualmente racionales en el juego f, i.e.,

$$I(f) := \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})} \mid \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = f(\mathbf{n}) \text{ y } \quad \mathbf{x}_i \geq f(\mathbf{e}^i) \text{ para cada } i \in supp(\mathbf{n}) \right\}.$$

Este conjunto se denomina el *conjunto de las imputaciones* y sus elementos se denominan *imputaciones*.

Queda claro que $I(f)$ puede ser vacío (al igual que ocurre para los juegos cooperativos ordinarios). La condición necesaria y suficiente para que un juego tenga un conjunto de imputaciones no vacío, es la que cabe esperar:

$$\sum_{i \in supp(\mathbf{n})} n_i \cdot f\left(\mathbf{e}^i\right) \leq f\left(\sum_{i \in M} n_i \cdot \mathbf{e}^i\right) = f\left(\mathbf{n}\right).$$

El *core*

Si para una distribución eficiente $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ tenemos

$$\sum_{i \in supp(\mathbf{n})} s_i \cdot \mathbf{x}_i \geq f\left(s_1, s_2, ..., s_m\right),$$

o, de forma resumida,

$$\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x} \geq f\left(\mathbf{s}\right),$$

para toda coalición $\mathbf{s} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, el vector $\mathbf{x}$ se llama una distribución del *core* del juego $(M, \mathbf{n}, f)$. Se dice que verifica la racionalidad coalicional.

Definición 5.6. *Sea un juego con grupos homogéneos, $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^m$. El conjunto de todas las distribuciones eficientes y coalicionalmente racionales forma el* core *del juego y se escribirá $Core\left(f\right)$.*

$$Core\left(f\right) := \left\{ \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})} \mid \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = f\left(\mathbf{n}\right) \ \ y \ \ \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x} \geq f\left(\mathbf{s}\right) \ \ para \ \ \mathbf{0} \leq \mathbf{s} < \mathbf{n} \ \right\}.$$

Si el *core* es no vacío, hay un incentivo para cooperar y formar la gran coalición, ya que obviamente, si se elige una distribución del *core* se dificulta la formación de coaliciones menores.

El *core* es un poliedro convexo y compacto, y puede ser descrito como la envoltura convexa de un número finito de puntos, sus extremos.

Veremos ahora unos cuantos ejemplos de representación del *core*.

Ejemplo 5.7. *Considérese el juego siguiente $\Gamma = (M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^m$, con $|M| = m = 3$, $\mathbf{n} = (3, 4, 2)$ y $f(x, y, z) = ax + by + cz$.*

Se trata de un ejemplo de un juego aditivo y solo hay un elemento en el core, *que viene dado por (a, b, c). Es también el único elemento del conjunto de las imputaciones.*

Ejemplo 5.8. *Consideremos el juego de cinco jugadores de dos tipos distintos dado en el ejemplo 5.4. En él, $M = \{1, 2\}$, $\mathbf{n} = (3, 2)$, es decir, 3 jugadores del tipo 1 y 2 del tipo 2, y los valores de su función característica son los siguientes:*

$$f(3,1) = 8, \; f(3,2) = 12, \; f(2,2) = 10, \quad y \;\; 0 \;\; \textit{en el resto de los casos.}$$

La figura 5.2 indica las coaliciones y sus valores.

Hay solamente dos grupos homogéneos, y por tanto el core *está formado por*

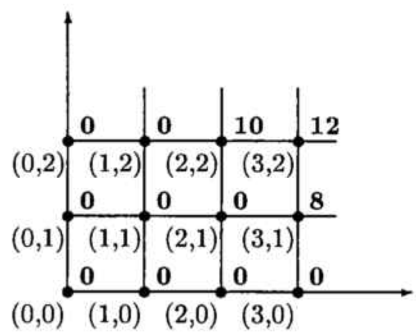

Figura 5.2: La malla entera entre $(0, 0)$ y $(3, 2)$ con los valores del juego del ejemplo 5.4

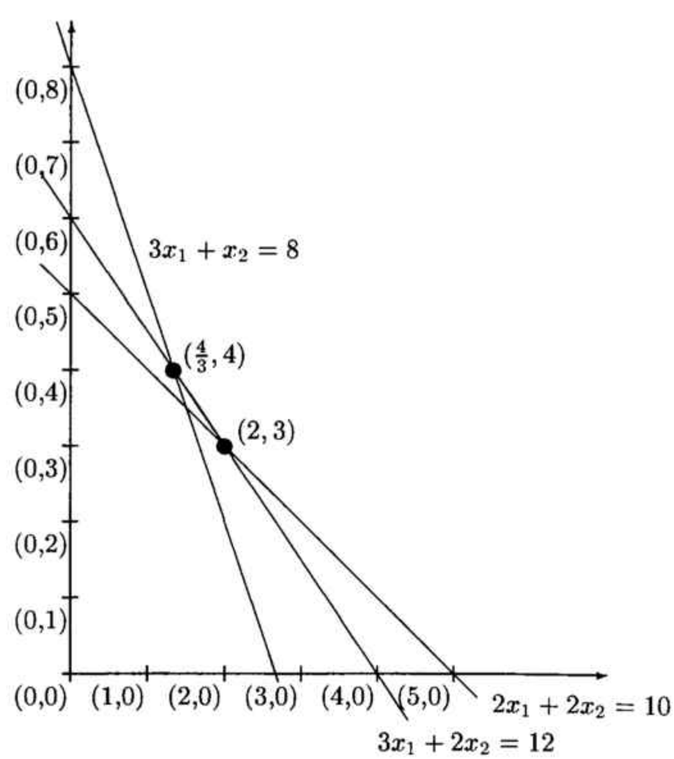

Figura 5.3: Representación del *core* del ejemplo 5.4

elementos $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. *Las restricciones del* core *son las siguientes:*

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ 3x_1 + x_2 &\geq 8 \\ 2x_1 + 2x_2 &\geq 10 \\ 3x_1 + 2x_2 &= 12, \end{aligned}$$

ya que las restantes desigualdades se reducen a éstas.

Si ahora las resumimos, el core *puede describirse como el siguiente segmento:*

$$Core\,(f) = \left\{ \ \mathbf{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \ \mid \ 3 \leq x_2 \leq 4, \ 3x_1 + 2x_2 = 12 \ \right\}.$$

Su representación gráfica se encuentra en la figura 5.3.

Ahora veremos un ejemplo de un juego basado en el modelo actuarial de los *Solvency cost share games.*

Ejemplo 5.9. *Consideremos el juego del reparto del coste de la solvencia entre siete jugadores.*

Tabla 5.3: Valor de la función característica para la función $f(s_1, s_2, s_3)$ del ejemplo 5.9

s_1	s_2	s_3	$f(s_1,s_2,s_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	0	2	14,0588745
0	1	0	0
0	1	1	18
0	1	2	36,6351173
0	2	0	26,3603897
0	2	1	45,9852957
0	2	2	65,8751083
1	0	0	0
1	0	1	15,5812546
1	0	2	32,7009934
1	1	0	20,9167309
1	1	1	39,8307512
1	1	2	59,14861
1	2	0	49,6437636
1	2	1	69,6629298
1	2	2	89,8847006

s_1	s_2	s_3	$f(s_1,s_2,s_3)$
2	0	0	17,5735931
2	0	1	35,2557696
2	0	2	53,6676892
2	1	0	43,1534156
2	1	1	62,6599668
2	1	2	82,4521439
2	2	0	73,5147073
2	2	1	93,8376647
2	2	2	114,322046
3	0	0	38,0384758
3	0	1	56,7636479
3	0	2	75,9355174
3	1	0	66,2613646
3	1	1	86,1920334
3	1	2	106,338406
3	2	0	97,8416164
3	2	1	118,407944
3	2	2	139,106806

Son de tres tipos distintos, y por tanto el juego tiene $M = \{1,2,3\}$, *y* $\mathbf{n} = (3,2,2)$, *es decir,* 3 *jugadores del tipo* 1, 2 *del tipo* 2 *y* 2 *del tipo* 3. *El jugador de cada tipo lleva asociada una variable aleatoria normal:* $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Cada jugador del tipo 1 *corresponde a un colectivo que sigue una ley normal de esperanza* $\mu_1 = 1000$ *y desviación típica* $\sigma_1 = 10$. *Los jugadores de tipo* 2 *siguen una ley de esperanza* $\mu_2 = 400$ *y desviación típica* $\sigma_2 = 15$, *mientras que los de tipo* 3 *siguen una de parámetros* $\mu_3 = 600$ *y* $\sigma_3 = 8$.

Los valores de la función característica del juego de ahorros se determinan de la siguiente manera, según la fórmula 5.2:

$$f(s_1, s_2, , s_3) = 3\left[\sum_{i=1}^{i=3} s_i\sigma_i - \sqrt{\sum_{i=1}^{i=3} s_i\sigma_i^2}\right],$$

y la tabla 5.3 indica las coaliciones y sus valores.

Podemos pues representar el core *de este juego, que está dibujado en la figura 5.4.*

Esta representación puede hallarse trabajando con las 34 *desigualdades que aparecen, más la igualdad de la eficiencia. Se trata, por supuesto, de una representación muy tediosa. Sin embargo, cabe avanzar que uno de los resultados más interesantes, en mi opinión, de este trabajo, hará que para encontrar y representar el* core *del juego anterior, no sea necesario utilizar todas las desigualdades. En realidad bastará con usar simplemente* 6 *desigualdades y la igualdad de la eficiencia. Es más, el* core *del juego anterior puede describirse como el* core *de un juego cooperativo clásico con* 3 *jugadores. Algo de eso se deja entrever en la figura 5.4, y en el capítulo siguiente se presenta la justificación con todo detalle.*

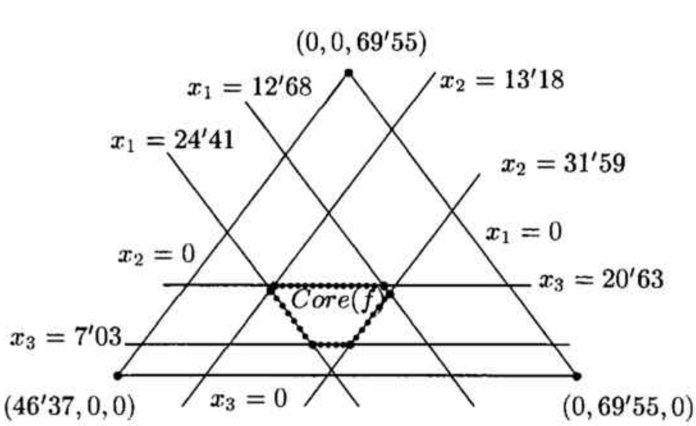

Figura 5.4: El *core* del juego del ejemplo 5.9

Colecciones equilibradas

La idea de las colecciones equilibradas[3] fue introducida por Shapley (1967), quien estudió la relación entre las colecciones equilibradas de un juego y las condiciones para determinar si un juego tiene o no el *core* vacío. Bondareva (1963) ya había analizado estas condiciones con anterioridad, si bien su trabajo no fue conocido por Shapley.

Debemos definir ahora, en el contexto de los juegos con grupos homogéneos qué se entiende por una colección equilibrada y cuáles son las condiciones para la definición de juego equilibrado en este caso.

Definición 5.10. *Sea M un conjunto finito y no vacío (de tipos),* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ $(\mathbf{n} \neq \mathbf{0})$, *y sea* $\mathcal{B} = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, ..., \mathbf{s}^k\}$ *una colección de coaliciones no vacías distintas en* $\mathbf{n}$, *i.e.,* $\mathbf{0} < \mathbf{s}^j \leq \mathbf{n}$, *para* $j = 1, 2, ..., k$.

La familia $\mathcal{B}$ se llama una familia equilibrada de coaliciones *si existe una colección $(\lambda_s)_{s\in\mathcal{B}}$ de números positivos para los cuales se cumple la igualdad*

$$\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot s_i = n_i, \qquad \textit{para cada } i \in M.$$

O, lo que es equivalente

$$\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot \mathbf{s} = \mathbf{n}.$$

Estos números positivos se llaman los *pesos* de la colección equilibrada $\mathcal{B}$.

Es fácil ver que $\sum\limits_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \geq 1$, puesto que si substituimos cada uno de los s_i por n_i se obtiene la desigualdad

$$\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot n_i \geq \sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot s_i = n_i$$

de donde

$$\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \geq 1. \tag{5.3}$$

Recuérdese que si $n_i = 1$ y $s_i \in \{0, 1\}$, se trata de la definición usual de colección equilibrada. A diferencia de los pesos de las colecciones equilibradas para los juegos cooperativos ordinarios, estos pesos pueden ser mayores que 1. Como ejemplo, podemos escribir:

$$\frac{1}{2}(2,0) + 2(1,1) = (3,2).$$

[3] Una colección $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ de subconjuntos no vacíos de N es una colección equilibrada si existen pesos $\alpha_{S_1}, \alpha_{S_2}, \ldots, \alpha_{S_k} \in \mathbb{R}, \alpha_{S_j} > 0$ $j = 1, 2, \ldots k$, tales que para todo $i = 1, 2, \ldots, n$ se cumple que $\sum\limits_{\{j|i\in S_j\}} \alpha_{S_j} = 1$.

Entonces la colección $\mathcal{B} = \{(2,0), (1,1)\}$ es equilibrada en el juego de $\mathbf{n} = (3,2)$.

La figura 5.5 indica la situación de las coaliciones de la colección equilibrada.

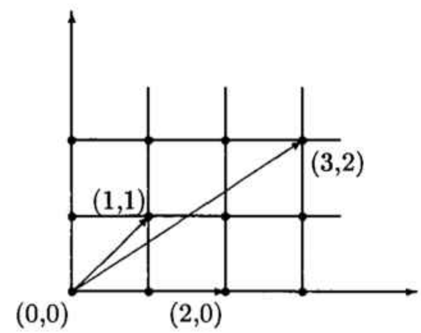

Figura 5.5: La colección equilibrada $\mathcal{B} = \{(2,0), (1,1)\}$ para $\mathbf{n} = (3,2)$

En algunos casos estos coeficientes serán únicos, y diremos que se trata de una colección equilibrada minimal. Es fácil ver que si los coeficientes no son únicos, es posible encontrar un subconjunto de $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, que también es una colección equilibrada y minimal. Y que se trata de una condición necesaria y suficiente de colección equilibrada minimal.

La interpretación dentro de la malla de las coaliciones que estamos considerando es que el vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ $(\mathbf{n} \neq \mathbf{0})$, se encuentra dentro del cono (desde el origen) generado por los vectores de $\mathcal{B} = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, ..., \mathbf{s}^k\}$. Como se trata de vectores dentro de $\mathbb{N}^M$ y menores que $\mathbf{n}$ queda claro lo que hemos señalado de las colecciones equilibradas minimales. Esta interpretación arroja luz sobre el significado de los pesos como coeficientes positivos de una combinación lineal de vectores, incluso para los juegos cooperativos ordinarios, que se pueden identificar con unos juegos con grupos homogéneos.

Juegos equilibrados

El concepto de colección equilibrada nos permite presentar la definición de juego equilibrado[4] .

Definición 5.11. *Un juego con grupos homogéneos,* $(M, \mathbf{n}, f) \in HG^m_{\mathbf{n}}$ *es* equilibrado *si cumple la condición*

$$\sum_{s \in \mathcal{B}} \lambda_s \cdot f(\mathbf{s}) \leq f(\mathbf{n})$$

[4] Un juego cooperativo (N, v) es equilibrado si para cualquier colección equilibrada de N $\mathcal{C} = \{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ de N con pesos $\alpha_{S_1}, \alpha_{S_2}, \ldots, \alpha_{S_k}$, se cumple que $\sum_{j=1}^{k} \alpha_{S_j} v(S_j) \leq v(N)$. Shapley demostró que esta condición es equivalente a que $Core(v)$ sea no vacío.

para cualquier colección equilibrada $\mathcal{B} = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \ldots, \mathbf{s}^k\}$ *con pesos correspondientes* $(\lambda_s)_{s\in\mathcal{B}}$.

La condición de equilibrio para un juego HG requiere que no es ventajoso con las ganancias del juego el dividir la coalición total en un conjunto de cualquier colección equilibrada de coaliciones (suponiendo que las ganancias se reparten de acuerdo con los pesos respectivos).

Otra posible interpretación de la colección de pesos $(\lambda_s)_{s\in\mathcal{B}}$ es la de considerar el peso λ_s como el periodo relativo de tiempo durante el cual cada tipo en la coalición s está en la cooperación. Estos tiempos forman una colección equilibrada si el tiempo total que un tipo está cooperando coincide con el número de réplicas de este tipo que está presente en el juego.

Hay una estrecha relación entre la condición de ser equilibrado y el hecho de que el *core* sea no vacío, estudiada por Bondareva (1963) y Shapley (1967) para los juegos cooperativos ordinarios. Vamos a verla en nuestro contexto:

Teorema 5.12. *Un juego con grupos homogéneos,* $f \in HG_{\mathbf{n}}^m$*, es equilibrado si* $Core(f) \neq \emptyset$.

Demostración:

Sea $\mathcal{B} = \{\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, ..., \mathbf{s}_k\}$ una colección equilibrada con pesos correspondientes $(\lambda_s)_{s\in\mathcal{B}}$. Como $\mathcal{B}$ es una colección equilibrada, $\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot s_i = n_i$, para cada $i \in M$.

Sea $\mathbf{x} \in Core(f)$, que existe ya que $Core(f) \neq \emptyset$. Entonces, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} = f(\mathbf{n})$, y $\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x} \geq f(\mathbf{s})$ para todas las coaliciones $\mathbf{s}\ (\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n})$, y en particular para aquellas que pertenecen a $\mathcal{B}$. Se cumple

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot f(\mathbf{s}) \ &\leq \ \sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s (\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{x}) \ = \ \sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \left(\sum_{i\in supp(\mathbf{n})} s_i \cdot x_i \right) \ = \\
\sum_{i\in supp(\mathbf{n})} \left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot s_i \right) \cdot x_i \ &= \ \sum_{i\in supp(\mathbf{n})} n_i \cdot x_i \ = \ \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{x} \ = \\
&= \ f(\mathbf{n}),
\end{aligned}$$

lo que acaba la demostración. □

El que el *core* sea no vacío es una condición necesaria para que el juego sea equilibrado. Ahora pasaremos a probar el teorema que señala que si un juego es equilibrado, tiene el *core* no vacío.

Teorema 5.13. *Si un juego con grupos homogéneos* $f \in HG_{\mathbf{n}}^m$ *es equilibrado; entonces* $Core(f) \neq \emptyset$.

Demostración:

Consideremos el juego cooperativo asociado (N, w_f), que, como se sabe, está definido sobre el conjunto $N = \bigcup_{i\in M} N^i$, donde $N^i = \{(i,j) \mid j \in \{1, 2, \ldots, n_i\}\}$, para $i \in supp(\mathbf{n})$, y $N^i = \emptyset$ para $i \notin supp(\mathbf{n})$. Para cada coalición $S \in 2^N$, el valor $w_f(S)$ se define como

$$w_f(S) = f(s_1, s_2, \ldots, s_m),$$

con $s_i = \# \left| S \cap N^i \right|$.

Veamos que el juego w_f es equilibrado.

En efecto, para cada colección equilibrada $\mathcal{B} = \{S^1, S^2, \ldots, S^r\}$ con pesos $(\mu_S)_{S \in \mathcal{B}}$, se induce una colección $\mathcal{B}' = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \ldots, \mathbf{s}^r\}$ de coaliciones de $\mathbb{N}^M$, formada por los vectores

$$\mathbf{s}^k = (s_1^k, s_2^k, \ldots, s_m^k), \quad k = 1, 2, \ldots, r,$$

donde $s_i^k = \# \left| S^k \cap N^i \right|$. Téngase en cuenta que si dos coaliciones distintas en N dan lugar a la misma coalición en $\mathbb{N}^M$, se cuenta una sola vez y se sumarán los coeficientes correspondientes.

La colección $\mathcal{B}'$ es una colección equilibrada para el juego con grupos homogéneos ya que:

$$\sum_{\substack{S \in \mathcal{B} \\ (i,j) \in S}} \mu_S = 1, \quad \text{para cada } (i,j) \in N,$$

lo que se traduce en

$$\sum_{(i,j) \in N^i} \left[\sum_{\substack{S \in \mathcal{B} \\ (i,j) \in S}} \mu_S \right] = n_i, \quad \text{para cada } i \in M.$$

que, teniendo en cuenta que en cada coalición aparecen s_i jugadores de cada tipo, se convierte en

$$\sum_{s \in \mathcal{B}'} s_i \cdot \mu_s = n_i, \quad \text{para cada } i \in M.$$

Entonces, como $f \in HG_{\mathbf{n}}^M$ es equilibrado, se cumple:

$$\sum_{s \in \mathcal{B}'} \mu_s \cdot f(\mathbf{s}) \leq f(\mathbf{n}).$$

Y con ello tenemos

$$\sum_{s \in \mathcal{B}} \mu_s \cdot w_f(S) \leq w_f(N),$$

con lo que el juego w_f es equilibrado.

Ya que hemos visto que el juego w_f es equilibrado, sabemos, por tanto, que $Core(w_f) \neq \emptyset$.

Si consideramos $x \in Core(w_f)$, cualquier x' obtenido al intercambiar los valores de $x_{(i,j)}$ con $x_{(i,j')}$ resulta que también pertenece al *core*, ya que se trata de jugadores del mismo tipo. Además el *core* es un conjunto convexo, y por ello, el punto $\hat{x} \in Core(w_f)$, donde

$$\hat{x}_{(i,j)} = \frac{1}{n_i}\sum_{k=1}^{n_i} x_{(i,k)} \quad \text{para cualquier } j \in \{1,2,\ldots,n_i\} \quad \text{y cualquier } i \in supp(\mathbf{n}).$$

Pero, si consideramos

$$x_i = \hat{x}_{(i,j)} \quad \text{para cualquier } i \in supp(\mathbf{n}),$$

obtenemos un vector de $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ que es de $Core\,(f)$.

Por tanto, $Core\,(f) \neq \emptyset$, lo que finaliza la demostración. □

Corolario 5.14. *Un juego* $f \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ *es equilibrado si y solo si* $Core(f) \neq \emptyset$.

Es una extensión de la relación ya conocida para juegos cooperativos TU debido a Bondareva (1963) y Shapley (1967). Hay otras demostraciones posibles haciendo uso del teorema de la dualidad para la Programación Lineal.

La clase de los juegos equilibrados con grupos homogéneos la denotaremos por $BHG_{\mathbf{n}}^{m}$. Estrechamente relacionado a la noción de juego equilibrado está la noción de juego totalmente equilibrado.

Definición 5.15. *Un juego* $f \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ *se dice que es* totalmente equilibrado *si los subjuegos*[5] *inducidos* $f_{|\mathbf{s}} \in HG_{\mathbf{s}}^{M}$ *son equilibrados para todas las coaliciones* $\mathbf{s}$, $\mathbf{0} < \mathbf{s} \leq \mathbf{n}$.

El juego cooperativo TU de los tipos

Un juego instrumental que será de mucha importancia en el estudio de los juegos con grupos homogéneos es el que se obtiene al considerar un juego cooperativo TU ordinario definido sobre el conjunto M de los tipos. En él supondremos que si un tipo está presente en una coalición, todos los jugadores de ese tipo participan en la determinación del valor de la coalición. Se trata de un juego cooperativo definido sobre los tipos existentes, es decir, sobre $supp(\mathbf{n})$, pero que normalmente podemos pensar que se define sobre M.

[5]Dado un juego con grupos homogéneos $f \in HG_{\mathbf{n}}^{m}$, el subjuego $f_{|\mathbf{s}} \in HG_{\mathbf{s}}^{M}$, cuyo conjunto de jugadores es $\mathbf{s} \leq \mathbf{n}$, no es más que la restricción a $\mathbf{s}$ del juego original, y se define de la siguiente manera: $f_{|\mathbf{s}}(\mathbf{t}) := f(\mathbf{t}) \quad$ para todo $\mathbf{t} \leq \mathbf{s}$.

Definición 5.16. *El juego cooperativo TU,* juego de los tipos, *asociado con el juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f)$, es el juego v_f^M, cuyo conjunto de jugadores es $supp(\mathbf{n}) \subseteq M$ y cuya función característica*

$$v_f^M : 2^{supp(\mathbf{n})} \longrightarrow \mathbb{R},$$

está definida por[6]

$$v_f^M(S) = f(\sum_{i \in S} n_i \mathbf{e}^i), \qquad para\ S \subseteq supp(\mathbf{n}).$$

Si observamos la relación entre el juego con grupos homogéneos f y el juego de los tipos v_f^M, veremos que este último solo tiene en cuenta el valor de las coaliciones en los vértices de la malla $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$. Vamos a denominar estos vértices $\tilde{\mathbf{e}}^S$ para cada subconjunto $S \subseteq supp(\mathbf{n})$, que se pueden definir de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{e}}_i^S := \begin{cases} n_i & \text{si} \quad i \in S, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Podemos escribir que

$$v_f^M(S) = f(\tilde{\mathbf{e}}^S).$$

Si consideramos ahora el operador que transforma vectores de $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ en vectores de $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ multiplicando cada componente por n_i, éste viene dado por el producto de Hadamard (producto componente a componente) usado en la teoría de las matrices, y se define de la siguiente manera:

$$\tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{n}} \odot \mathbf{x},$$

con $\tilde{\mathbf{x}}_j = n_j x_j$ para cada $j \in supp(\mathbf{n})$.

Esta transformación será señalada mediante el signo ˜. Se trata de una transformación biyectiva, ya que $n_i > 0$ para todo $i \in supp(\mathbf{n})$ (es una homotecia).

Dado cualquier conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$, la notación $\widetilde{R}$ significará el conjunto de los vectores transformados por la aplicación ˜ de los de R.

Se verifica que

$$\widetilde{I^*(f)} = I^*(v_f^M),$$

ya que la definición del conjunto de preimputaciones de f es justamente

$$I^*(f) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})} \mid \sum_{i \in supp(\mathbf{n})} n_i \cdot \mathbf{x}_i = f(\mathbf{n})\}.$$

Respecto al *core* del juego con grupos homogéneos f y el correspondiente del juego de los tipos v_f^M, podemos enunciar el siguiente teorema.

[6] $v_f^M(\emptyset) = f(0, 0, \ldots, 0) = 0.$

Teorema 5.17. *Sea el juego cooperativo con grupos homogéneos* $(M, \mathbf{n}, f)$. *Y sea* $(supp(\mathbf{n}), v_f^M)$ *el juego cooperativo asociado de los tipos. Entonces se cumple que*

$$\widetilde{Core}(f) \subseteq Core(v_f^M) \subseteq Web(v_f^M).$$

Demostración:

Si tomamos $\tilde{\mathbf{x}} \in \widetilde{Core}(f)$, es el transformado de algún $\mathbf{x} \in Core(f)$, que cumple las desigualdades del *core*, y en particular las siguientes desigualdades (que son solamente algunas, para las coaliciones que forman los vértices de la malla), y la eficiencia:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^S & \geq & f(\tilde{\mathbf{e}}^S), \quad \text{para cada subconjunto } S \subseteq supp(\mathbf{n}) \\ \mathbf{x} \cdot \tilde{\mathbf{e}}^{supp(\mathbf{n})} & = & f(\tilde{\mathbf{e}}^{supp(\mathbf{n})}). \end{array}$$

Por tanto, su transformado $\tilde{\mathbf{x}}$ cumple:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^S & \geq & f(\tilde{\mathbf{e}}^S) = v_f^M(S), \\ \tilde{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{e}^{supp(\mathbf{n})} & = & f(\tilde{\mathbf{e}}^{supp(\mathbf{n})}) = v_f^M(supp(\mathbf{n})), \end{array}$$

que son justamente las desigualdades del $Core(v_f^M)$.

Por otra parte la inclusión del *core* en el conjunto de Weber se verifica para cualquier juego cooperativo. □

El *core* de los juegos de unanimidad

Para los juegos cooperativos T.U. ordinarios, el juego de unanimidad asociado a cada coalición $S \subseteq N$ se define de manera que la función característica vale 1 para las coaliciones que contienen a S y 0 en caso contrario. Se trata de juegos simples monótonos con solamente una coalición minimal ganadora.

En el caso de los juegos cooperativos con grupos homogéneos, se pueden definir de una manera similar y vamos a hacerlo más formalmente. Para ello necesitamos considerar el conjunto de juegos cooperativos con grupos homogéneos de los mismos parámetros $HG_{\mathbf{n}}^m$. En este conjunto, definiremos lo que son los juegos de unanimidad, que de manera directa dan lugar a una base del espacio vectorial de los juegos con grupos homogéneos.

Definición 5.18. *Para cada vector* $\mathbf{l} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, *definimos el* juego de unanimidad $u_{\mathbf{l}} \in HG_{\mathbf{n}}^m$, *de la siguiente manera:*

$$u_{\mathbf{l}}(\mathbf{s}) = \begin{cases} 1 & si \;\; \mathbf{l} \leq \mathbf{s}, \\ 0 & en\ otro\ caso, \end{cases}$$

para cada coalición $\mathbf{s} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$.

De la definición queda claro que la coalición $\mathbf{l}$ cumple que $\mathbf{0} < \mathbf{l} \leq \mathbf{n}$ (i.e., $0 \leq l_i \leq n_i$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$, y al menos una de las desigualdades $0 \leq l_i$ es estricta).

Para los juegos de unanimidad en los juegos cooperativos ordinarios se puede asegurar que éstos son equilibrados, siendo su *core* siempre no vacío, y reparte el valor de la coalición total entre los jugadores que pertenecen al conjunto que determina el juego de unanimidad. Esto no ocurre en el caso de los juegos de unanimidad sobre los juegos cooperativos con grupos homogéneos, en cuyo caso solamente son equilibrados aquellos juegos que están en la frontera de Pareto del retículo $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, como veremos a continuación:

Proposición 5.19. *Sea $\mathbf{l} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, y sea $u_{\mathbf{l}} \in HG_{\mathbf{n}}^m$ el juego de unanimidad correspondiente. Entonces $u_{\mathbf{l}}$ es equilibrado si y solo si $l_i = n_i$ para algún índice $i \in \{1, 2, ..., m\}$.*

Demostración:

Observemos en primer lugar que si $\mathbf{x} \in Core(u_{\mathbf{l}})$ debe cumplirse que $x_i \geq 0$ para todo $i \in \{1, 2, ..., m\}$. Además, se cumplirá

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 1$$

y también

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{x} \geq 1,$$

de donde se deduce directamente que

$$(\mathbf{n} - \mathbf{l}) \cdot \mathbf{x} = 0.$$

Por ello, para todos los índices $i \in \{1, 2, ..., m\}$ tales que $l_i \neq n_i$ debe cumplirse que $x_i = 0$.

Ahora se ve claro que si $l_i \neq n_i$ para todo índice $i \in \{1, 2, ..., m\}$, el único punto del *core* sería $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, lo que es incompatible con la igualdad de la eficiencia, y por lo tanto el *core* es vacío.

Por otra parte, si $l_{i^*} = n_{i^*}$ para algún índice $i^* \in \{1, 2, ..., m\}$, bastará tomar como elemento del *core* el vector $\mathbf{x}$ definido por

$$x_i = \begin{cases} \frac{1}{n_{i^*}} & \text{si} \quad i = i^*, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

□

Se ve claro ahora que el papel que juegan los juegos de unanimidad como base del espacio vectorial de los juegos cooperativos, especialmente para la axiomatización del valor de Shapley, será sensiblemente diferente en el caso de los juegos cooperativos ordinarios que en el caso de los juegos cooperativos con grupos homogéneos.

5.6 Funciones totalmente equilibradas en $\mathbb{N}^m$

Podemos preguntarnos cómo se pueden caracterizar algunas funciones, definidas sobre la malla entera $\mathbb{N}^M$, tales que la restricción a cualquier $\mathbf{n}$ resulte en un juego equilibrado. En este caso, una vez se fija el número de tipos, no importa el número de agentes presentes de cada tipo, ya que se puede asegurar que el *core* es no vacío. Especialmente interesante sería poder encontrar condiciones que puedan ser de aplicación para ciertos modelos genéricos.

La condición de que el *core* sea no vacío se puede "traducir" en una condición que aparece en el estudio del monopolio natural (Sharkey, 1982) y las funciones de costes para empresas con múltiples *outputs* que llevan a él.

En nuestro contexto podemos definir de forma precisa este concepto, que denominaremos función totalmente equilibrada:

Definición 5.20. *Sea $f : \mathbb{N}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre la malla entera del primer cuadrante, con $f(\mathbf{0}) = 0$. La función f es* totalmente equilibrada *si, para cada $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ existe un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$, que depende de $\mathbf{n}$, de forma que*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} &= f(\mathbf{n}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{s} &\geq f(\mathbf{s}) \quad \textit{para} \quad 0 \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n}. \end{aligned}$$

Queda claro de esta definición que la condición de que f sea totalmente equilibrada es exactamente lo mismo que decir que el juego con grupos homogéneos, $(M, \mathbf{n}, f) \in HG^m_{\mathbf{n}}$, es equilibrado para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$. El vector $\hat{\mathbf{a}} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ definido como $\hat{\mathbf{a}}_i = \mathbf{a}_i$ para $i \in supp(\mathbf{n})$ es justamente un elemento del *core*.

Desde el punto de vista geométrico, si representamos la función f (en $\mathbb{R}^{m+1}$) lo que tenemos es que hay un plano que pasa por el origen y por $(\mathbf{n}, f(\mathbf{n}))$ y que deja el resto de valores de la función por debajo, sobre la malla indicada, $\mathcal{L}^m_{\mathbf{n}}$.

Veremos ahora algunas consecuencias del hecho de que al restringir la definición a cualquier malla $\mathcal{L}^m_{\mathbf{n}}$ (a cualquier $\mathbf{n}$) resulte en un juego equilibrado. Estos son los resultados que presentamos a continuación.

Para ello necesitamos precisar dos conceptos que serán importantes como condición necesaria para que una función f sea totalmente equilibrada. Se trata de conceptos conocidos, pero que expondremos con detalle.

Definición 5.21. *Una función $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es* superaditiva *si*

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \quad \textit{para todo} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^m.$$

Esta definición es la que es congruente con la definición correspondiente a los juegos cooperativos ordinarios, donde la función característica está evaluada sobre el retículo de las partes del conjunto de jugadores.

También vamos a definir lo que se entiende por función superhomogénea para las funciones definidas sobre la malla entera del primer cuadrante, y posteriormente para las funciones definidas sobre todo el primer cuadrante de $\mathbb{R}^m$:

Definición 5.22. *Sea $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre la malla entera del primer cuadrante tal que $f(\mathbf{0}) = 0$. La función f es* superhomogénea *si para todo $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^m$ tales que $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{x}$ con $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 1$, se cumple*

$$\alpha \cdot f(\mathbf{x}) \leq f(\alpha\mathbf{x}) = f(\mathbf{y}).$$

De forma análoga podemos también definir función superhomogénea para funciones definidas sobre el primer cuadrante de $\mathbb{R}^m$: si $\alpha \cdot f(\mathbf{x}) \leq f(\alpha\mathbf{x})$, para todo $\alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 1$, y para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^M_+$.

En particular, podemos escribir esta condición de la siguiente manera:

$$f(\mathbf{x}) \leq \frac{f(\alpha\mathbf{x})}{\alpha}, \quad \text{para} \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad \alpha \geq 1.$$

Y también como

$$f(\beta\mathbf{x}) \leq \beta f(\mathbf{x}),$$

para todo $\beta \in \mathbb{R}, \quad \beta \leq 1$, y todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m_+$.

Esta definición pone de manifiesto que en los rayos desde el origen de coordenadas que pasa por dos puntos de la malla entera, la función debe ser más que lineal[7]. Por esta razón, y siguiendo a Newman (1969), utilizaremos la expresión superhomogénea.

Podemos, pues, determinar algunas consecuencias necesarias para que una función definida sobre la malla entera dé lugar a juegos equilibrados.

Proposición 5.23. *Sea $f : \mathbb{N}^M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre la malla entera del primer cuadrante, con $f(\mathbf{0}) = 0$. Si la función es totalmente equilibrada, entonces la función es superaditiva.*

Demostración:

Para cualquier par de vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^M$, consideremos el vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, y el vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$ que le corresponde. Se cumple

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} &\geq f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} &\geq f(\mathbf{y}), \\ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{y}) &= f(\mathbf{x} + \mathbf{y}). \end{aligned}$$

[7]Este tipo de funciones son denominadas por Rosenbaum (1950) funciones cuasi-homogéneas (QH), mientras que Newman (1969) las señala como superhomogéneas. En el contexto de función de costes, a sus opuestas Sharkey (1982) las denomina *declining ray average cost*, si bien con algún error en su definición. Por otra parte, Sharkey y Telser (1978) usan la terminología subhomogénea para las opuestas, mientras que Panzar y Willig (1977) las denominan *least ray average cost*. En estos últimos contextos no se suele exigir que $f(0) = 0$.

De aquí se deduce la condición de superaditividad:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a}\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{y} \geq f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}).$$

□

Y también se desprende de las definiciones que toda función totalmente equilibrada debe ser superhomogénea.

Proposición 5.24. *Sea $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre la malla entera del primer cuadrante, con $f(\mathbf{0}) = 0$. Si la función es totalmente equilibrada, entonces es superhomogénea.*

Demostración:

Consideremos $\mathbf{x}, \alpha\mathbf{x} \in \mathbb{N}^m$ con $\alpha \geq 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Si la función es totalmente equilibrada, es decir, si el juego con grupos homogéneos, $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^m$ es equilibrado para todo $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$, entonces resulta que $\{\mathbf{x}\}$ es una colección equilibrada con peso α en el juego $(M, \alpha\mathbf{x}, f)$. Por tanto,

$$\alpha \cdot f(\mathbf{x}) \leq f(\alpha\mathbf{x}).$$

□

Estas son propiedades necesarias para que una función del primer cuadrante corresponda a un juego equilibrado para cualquier vector de la malla entera. Sin embargo, no son suficientes para asegurar que la función sea totalmente equilibrada.

La caracterización de las funciones totalmente equilibradas se presenta como un problema difícil, si bien una vía de análisis se encontrará cuando extendamos la definición a funciones definidas sobre el primer cuadrante de $\mathbb{R}^m$, especialmente porque podremos utilizar las herramientas del análisis convexo clásico, y la diferenciabilidad en su caso. Por otra parte, no es de extrañar la dificultad, puesto que esencialmente se trataría de encontrar una caracterización de los juegos cooperativos ordinarios que sean totalmente equilibrados, teniendo en cuenta solamente su función característica.

Ante esta dificultad, nos vamos a concentrar en el estudio de un tipo de juego que es totalmente equilibrado y que corresponde a un modelo económico, que generaliza otros modelos anteriores. Para ello, vamos a ver en primer lugar una condición suficiente para asegurar que los juegos sean equilibrados.

Proposición 5.25. *Sea el juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f)$. Si para algún vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^M$, con $a_i > 0$ para todo $i \in supp(\mathbf{n})$, se cumple que $\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}$ es creciente*[8] *sobre $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, entonces $Core(f) \neq \emptyset$.*

[8] Una función definida sobre $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$ a valores reales es creciente si se verifica que $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ implica $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$ con $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$. Queda claro que se trata de un crecimiento no estricto y que se indica también como no–decreciente.

Demostración:

Consideremos el cociente

$$\frac{f(\mathbf{n})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}} = k.$$

Para la coalición $\mathbf{n}$ tenemos:

$$k\mathbf{a}\cdot\mathbf{n} = f(\mathbf{n}).$$

Además, para cualquier otra coalición $\mathbf{0} < \mathbf{s} \leq \mathbf{n}$ se verifica que

$$\frac{f(\mathbf{s})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{s}} \leq \frac{f(\mathbf{n})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{n}},$$

y por tanto

$$f(\mathbf{s}) \leq k\mathbf{a}\cdot\mathbf{s},$$

donde debe tenerse en cuenta que $\mathbf{a}\cdot\mathbf{s} > 0$, puesto que $\mathbf{s} \neq \mathbf{0}$ y también $a_i > 0$, para todo $i \in M$.

Hemos visto que la función f es totalmente equilibrada. Además, el vector $k\hat{\mathbf{a}}$ pertenece al *core* del juego $(M, \mathbf{n}, f)$. □

En particular, la proposición anterior se puede aplicar al caso de los juegos financieros desarrollados por Izquierdo (1996), y extendidos a los grupos homogéneos, que luego Izquierdo y Rafels (2001) denominan *average monotonic games*.

El mismo trabajo de Izquierdo indica que este modelo incluye los modelos bien conocidos de los juegos de bancarrota (O'Neill, 1982).

El modelo de los juegos de depósitos bancarios con restricciones de participación

Vamos a definir un modelo simple que generaliza el modelo de los juegos cooperativos de valores medios crecientes respecto de un vector, que Izquierdo (1996) denomina juegos financieros, indicando cómo se puede imponer restricciones adicionales a la participación.

El modelo de los juegos financieros consiste en suponer que tenemos una serie de tipos de jugadores $i \in M$ dotados cada uno de unos recursos $C_i > 0$.

Por otra parte, tenemos una función $\tilde{\imath} : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ con $\tilde{\imath}(0) = 0$ y creciente, que sirve para valorar las coaliciones del juego cooperativo. Su interpretación consiste en suponer que una vez se ha conseguido un capital total x, la recompensa que obtendremos será justamente el producto del capital que hemos puesto por el interés $\tilde{\imath}(x)$ que corresponde. Y suponemos que este tanto de interés es creciente con el capital del que disponemos.

Si tenemos $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ jugadores, donde n_i es el número de jugadores de dotación C_i, cualquier coalición será un vector $\mathbf{s} \in \mathcal{L}^m_{\mathbf{n}}$, y para determinar el valor de una coalición $\mathbf{s}$ se valora la suma de capitales de los miembros de la coalición, que en este caso será:

$$f(\mathbf{s}) = \left(\sum_{i\in M} s_i \cdot C_i\right) \cdot \tilde{\imath} \left(\sum_{i\in M} s_i \cdot C_i\right).$$

En la definición de su modelo (para juegos con un solo jugador por tipo), Izquierdo (1996) demuestra que se trata de un juego cooperativo siempre totalmente equilibrado, si bien hay juegos equilibrados que no proceden de un juego financiero.

En el modelo extendido a los juegos con grupos homogéneos, siendo jugadores del mismo tipo los que disponen del mismo capital, resulta que el vector de los capitales $(C_i)_{i\in M}$ es el que se necesita para aplicar la proposición 5.25, y por ello también se trata de un juego totalmente equilibrado para cualquier vector $\mathbf{n}$.

Si ahora lo deseamos, podemos extenderlo al caso siguiente: un modelo en el que la determinación del tipo de interés no solo dependa del capital total que se consiga, sino también del número de agentes involucrados. Para ello consideremos:

(a) un conjunto (finito) de tipos M en el que cada tipo $i \in M$ lleva asociado un capital $C_i > 0$,

(b) una serie de puntos de restricción de la valoración $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_r \in \mathbb{N}^M$ de forma que $\mathbf{0} < \mathbf{p}_1 < \mathbf{p}_2 < \ldots < \mathbf{p}_r$,

(c) una función que valora cada coalición de agentes

$$\tilde{\imath} : \mathbb{R}_+^M \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$\tilde{\imath}(\mathbf{x}) = \begin{cases} i_r & \text{si } \mathbf{p}_r \leq \mathbf{x}, \\ i_{r-1} & \text{si } \mathbf{p}_{r-1} \leq \mathbf{x} \quad \text{y no} \quad \mathbf{p}_r \leq \mathbf{x}, \\ \vdots & \\ i_1 & \text{si } \mathbf{p}_1 \leq \mathbf{x} \quad \text{y no} \quad \mathbf{p}_2 \leq \mathbf{x}, \\ i_0 & \text{si } \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \quad \text{y no} \quad \mathbf{p}_1 \leq \mathbf{x}, \end{cases}$$

donde $0 < i_0 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{r-1} \leq i_r$.

Cada coalición se valora como:

$$f(\mathbf{s}) = \left(\sum_{i\in M} s_i \cdot C_i\right) \cdot \tilde{\imath}(\mathbf{s}).$$

Este modelo expresa que el tipo de interés depende de conseguir un número mínimo de participantes y se trata de una función creciente. Un esquema de

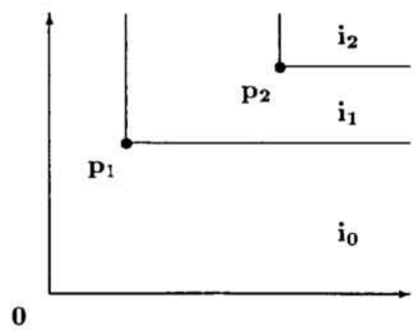

Figura 5.6: Un ejemplo del juego de los depósitos bancarios con restricciones de participación

su interpretación en el caso de dos tipos de capitales a invertir se señala en la figura 5.6.

Para cualquier vector (número) de agentes $\mathbf{n}$, el vector de los capitales $(C_i)_{i\in M}$ es el que se necesita para aplicar la proposición 5.25, y por ello también se trata de un juego totalmente equilibrado para cualquier vector $\mathbf{n}$.

Otra condición suficiente para asegurar que tenemos una
sobre todo el primer cuadrante de $\mathbb{R}^M$, que sean homogéneas[9] y superaditivas.

Proposición 5.26. *Sea $f : \mathbb{R}_+^M \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el primer cuadrante, con $f(\mathbf{0}) = 0$. Si f es homogénea (de grado 1) y superaditiva, entonces el juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f)$, para cualquier vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ es equilibrado.*

Demostración:

Sea una colección equilibrada $\mathcal{B} = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \ldots, \mathbf{s}^r\}$ con pesos $(\lambda_s)_{s\in\mathcal{B}}$ de coaliciones de $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$. Entonces tenemos

$$\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot \mathbf{s} = \mathbf{n}.$$

Podemos escribir

$$\begin{aligned} f(\mathbf{n}) &= f\left(\textstyle\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot \mathbf{s}\right) \geq \\ &\geq \textstyle\sum_{s\in\mathcal{B}} f(\lambda_s \cdot \mathbf{s}) = \\ &= \textstyle\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot f(\mathbf{s}). \end{aligned}$$

[9]Una función $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es homogénea (o linealmente homogénea) si $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha f(\mathbf{x})$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$.

La primera desigualdad es debida a que la función f es superaditiva y la segunda igualdad se sigue de que es homogénea. Hemos hallado la condición de juego equilibrado. □

5.7 Funciones totalmente equilibradas en $\mathbb{R}_+^m$

En el apartado anterior hemos definido el concepto de función totalmente equilibrada sobre $\mathbb{N}^m$. Con el mismo propósito, podemos estudiar funciones que estén definidas sobre todo el cuadrante $\mathbb{R}_+^m$, de forma que al restringirlas a $\mathbb{N}^m$ proporcionen funciones equilibradas, es decir, que proporcionen juegos equilibrados para cualquier vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$. El objetivo consiste en la posibilidad de utilizar las definiciones y teoremas del análisis convexo clásico, y que con ello se puedan hallar condiciones que permitan un estudio simple de esta clase de funciones.

Para esto vamos a enunciar la definición correspondiente a una función totalmente equilibrada:

Definición 5.27. *Sea $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el primer cuadrante, con $f(\mathbf{0}) = 0$. La función f es* totalmente equilibrada en $\mathbb{R}_+^m$ *si, para cada $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$, existe un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, que depende de $\mathbf{x}$, de forma que*

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} &= f(\mathbf{x}), \\ \mathbf{a} \cdot \mathbf{y} &\geq f(\mathbf{y}), \quad \textit{para} \quad 0 \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}. \end{aligned}$$

Está claro de esta definición que si una función es totalmente equilibrada en $\mathbb{R}_+^m$ también lo es sobre la malla $\mathbb{N}^m$. Sin embargo, es posible hallar funciones que no son totalmente equilibradas sobre $\mathbb{R}_+^m$ y en cambio sí lo son al restringirlas a $\mathbb{N}^m$.

Por esta razón, si una función es totalmente equilibrada sobre $\mathbb{R}_+^m$ el juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f)$, para cualquier vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$ es equilibrado.

Las funciones totalmente equilibradas son cerradas para la suma y para el producto por un número positivo, lo que enunciamos sin demostración.

Proposición 5.28. *Sean $f, g : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$, funciones totalmente equilibradas. Entonces:*

1. *$f + g$ es una función totalmente equilibrada.*
2. *Si $\lambda \in \mathbb{R}$ es una constante positiva, λf es una función totalmente equilibrada.*

Las condiciones que hemos deducido para las funciones totalmente equilibradas sobre $\mathbb{N}^m$, se cumplen también para las funciones totalmente equilibradas sobre $\mathbb{R}_+^m$. Las vamos a enunciar sin demostración.

Proposición 5.29. *Sea* $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida sobre el primer cuadrante, con* $f(\mathbf{0}) = 0$. *Si la función es totalmente equilibrada, entonces se cumple:*

1. *la función es superaditiva,*
2. *la función es superhomogénea.*

También es posible encontrar condiciones suficientes para que una función sea totalmente equilibrada, y alguna de estas condiciones será justamente el objeto del estudio del próximo capítulo.

En primer lugar podemos dar sin demostración una condición análoga a la ya estudiada sobre $\mathbb{N}^m$, en la proposición 5.25.

Proposición 5.30. *Sea* $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida sobre el primer cuadrante, con* $f(\mathbf{0}) = 0$. *Si para algún vector* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, *con* $a_i > 0$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$, *se cumple que* $\frac{f(\mathbf{x})}{\mathbf{a}\cdot\mathbf{x}}$ *es no decreciente sobre* $\mathbb{R}_+^m$, *entonces* f *es totalmente equilibrada sobre* $\mathbb{R}_+^m$.

Vamos a recordar la definición de función cuasi-cóncava, muy utilizada en el contexto de la matemática económica, que será necesaria en la próxima proposición.

Una función $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es *cuasi-cóncava* si para cada $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $B_\alpha = \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m \mid f(\mathbf{x}) \geq \alpha\right\}$ es convexo. Se suele denominar *conjunto contorno superior de* f *para el valor* α. Es fácil probar que esto es equivalente a que para cualesquiera $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}_+^m$ se cumple que $f(\lambda\mathbf{x} + (1-\lambda)\mathbf{y}) \geq \min\{f(\mathbf{x}), f(\mathbf{y})\}$ con $0 \leq \lambda \leq 1$.

Esta será una condición que necesitaremos para hallar una condición suficiente para que una función sea totalmente equilibrada, como se muestra en la siguiente proposición.

Proposición 5.31. *Sea* $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida sobre el primer cuadrante, con* $f(\mathbf{0}) = 0$. *Si* f *es creciente*[10] *(no estrictamente), cuasi-cóncava, y homogénea*[11] *de grado de homogeneidad* $k \geq 1$, *entonces* f *es totalmente equilibrada sobre* $\mathbb{R}_+^m$.

Demostración:

Debemos probar la condición de función totalmente equilibrada para todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$.

[10] f es creciente (no estricta) si $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ implica $f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y})$

[11] Una función $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$ es homogénea de grado de homogeneidad k, si $f(\alpha\mathbf{x}) = \alpha^k f(\mathbf{x})$, para toda $\alpha \in \mathbb{R}^+$ y todo $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_+^m$.

Excluiremos el caso en que $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ya que en este caso no hay nada que probar (la condición de totalmente equilibrada es trivial).

Caso 1

En primer lugar consideremos el caso en que $\mathbf{x}$ tenga todas las coordenadas positivas, es decir, que $x_i > 0$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Caso 1 a

Si $f(\mathbf{x}) = 0$, y dado que la función es creciente, para todos los vectores $\mathbf{y}$ con $\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, la función debe ser también nula: $f(\mathbf{y}) = 0$, y la condición de totalmente equilibrada se verifica trivialmente, tomando $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

Caso 1 b

Supongamos, de lo contrario, que $f(\mathbf{x}) > 0$. Como la función es cuasi-cóncava, para cada $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ el conjunto contorno superior

$$C_{\mathbf{x}} := \left\{\mathbf{x}' \in \mathbb{R}^m_+ \mid f(\mathbf{x}') \geq f(\mathbf{x})\right\}$$

es convexo y $\mathbf{x}$ está en la frontera de $C_{\mathbf{x}}$, puesto que la función es homogénea de grado $k \geq 1$ y creciente (obsérvese que para cualquier $\lambda < 1$ resulta que $f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x})$).

Por otra parte, si consideramos el conjunto[12]

$$B_{\mathbf{x}} := \left\{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m_+ \mid \mathbf{y} \ll \mathbf{x}\right\}$$

tenemos que para cualquier $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{x}}$ se cumple $f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x})$.

En efecto, si consideramos

$$\max_{i \in \{1,2,\ldots,m\}} \left\{\frac{y_i}{x_i}\right\} = \lambda,$$

se cumple, por la elección de $\mathbf{y}$, que $0 \leq \lambda < 1$.

Entonces, $\mathbf{y} \leq \lambda\mathbf{x} < \mathbf{x}$, y por ser f no decreciente,

$$f(\mathbf{y}) \leq f(\lambda\mathbf{x}),$$

mientras que por ser homogénea de grado $k \geq 1$, y $\lambda < 1$,

$$f(\lambda\mathbf{x}) = \lambda^k f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{x}),$$

con lo que

$$f(\mathbf{y}) < f(\mathbf{x}).$$

El conjunto $C_{\mathbf{x}}$ es convexo, el conjunto $B_{\mathbf{x}}$ también es convexo y ambos conjuntos son disjuntos. Podemos aplicar un teorema de separación de los conjuntos

[12] Para cualquier par de vectores $\mathbf{y}, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{y} \ll \mathbf{x}$ significa que $y_i < x_i$ para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

convexos (Teorema 2.4.10 de Webster, 1994) y existe un hiperplano que separa propiamente estos conjuntos:

$$H_{\mathbf{x}} = \left\{\mathbf{y}' \in \mathbb{R}_+^m \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{y}' = A\right\},$$

con $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ y de manera que

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{y} \leq A \leq \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}' \quad \text{para cualesquiera} \quad \mathbf{y} \in B_{\mathbf{x}} \text{ y } \mathbf{x}' \in C_{\mathbf{x}}.$$

Este hiperplano separador cumple:

(i) pasa por $\mathbf{x}$, es decir $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = A$, puesto que de lo contrario bastaría tomar $\lambda \mathbf{x}$ para $\lambda < 1$ y suficientemente próximo para violar la separación,

(ii) $p_i \geq 0$, para todo $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ ya que de lo contrario, si fuera $p_{i^*} < 0$ para algún i^*, podríamos tomar $\mathbf{x} + \mathbf{e}^{i^*}$, que pertenece a $C_{\mathbf{x}}$ (f es creciente), y tal que $\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{e}^{i^*}) = \mathbf{p} \cdot \mathbf{x} + p_{i^*} = A + p_{i^*} < A$, de forma que entra en contradicción con la condición de separación,

(iii) $A > 0$, puesto que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{x} = A$, las coordenadas de $\mathbf{x}$ son positivas y los coeficientes de $\mathbf{p}$ son positivos o nulos sin poderse anular todos ellos.

Por ello podemos modificar convenientemente los coeficientes para escribir este hiperplano separador como:

$$H_{\mathbf{x}} = \left\{\mathbf{y}' \in \mathbb{R}_+^m \mid \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}' = f(\mathbf{x})\right\}.$$

En particular, se cumple que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = f(\mathbf{x})$, porque este punto pertenece al hiperplano soporte y además, los coeficientes de $\mathbf{a}$ deben ser positivos o nulos.

Para cada elemento de $H_{\mathbf{x}}$, $\mathbf{y}' \in H_{\mathbf{x}}$, se cumple que

$$f(\mathbf{y}') \leq f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}',$$

puesto que de lo contrario, si $f(\mathbf{y}') > f(\mathbf{x})$ por la homogeneidad de grado $k \geq 1$ habría un múltiplo de $\mathbf{y}' : \lambda^* \mathbf{y}'$ con $\lambda^* < 1$ y $f(\lambda^* \mathbf{y}') > f(\mathbf{x})$, cuando $\mathbf{a} \cdot (\lambda^* \mathbf{y}') = \lambda^* (\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}') < f(\mathbf{x})$, lo cual es una contradicción.

Ahora vamos a probar que la función f es totalmente equilibrada en este caso, para unos coeficientes dados por el vector $\mathbf{a}$.

Si $f(\mathbf{y}) = 0$, se cumple trivialmente la desigualdad

$$f(\mathbf{y}) \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}, \quad \text{para} \quad \mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x},$$

puesto que hemos visto que los coeficientes del hiperplano soporte son positivos o nulos.

Por otra parte, para cada $\mathbf{y}$ con $\mathbf{0} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{x}$, y $f(\mathbf{y}) > 0$, existe un escalar $\alpha \geq 1$ de forma que $\alpha\mathbf{y} \in H_{\mathbf{x}}$, ya que la función es creciente $(0 < f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}))$ y por la homogeneidad de la función, siempre podemos encontrar un múltiplo (de coeficiente mayor o igual que 1) de $\mathbf{y}$ que se encuentre dentro de $C_{\mathbf{x}}$.

Por ser homogénea de grado $k \geq 1$:

$$f(\alpha\mathbf{y}) = \alpha^k f(\mathbf{y}) \geq \alpha f(\mathbf{y}),$$

y por estar sobre el hiperplano $H_{\mathbf{x}}$:

$$f(\alpha\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \alpha\mathbf{y}.$$

En resumen,

$$f(\mathbf{y}) \leq \mathbf{a} \cdot \mathbf{y}, \quad \text{para } \mathbf{0} < \mathbf{y} \leq \mathbf{x} \quad \text{y } f(\mathbf{y}) > 0,$$

Hemos hallado justamente la condición de totalmente equilibrada en $\mathbb{R}^m_+$.

Caso 2

Queda por probar el caso en que no todas las coordenadas de $\mathbf{x}$ sean positivas. En este caso podemos definir

$$M' := \{j \in \{1, 2, \ldots, m\} \mid \mathbf{x}_j > 0\},$$

y considerar la función f restringida a $\mathbb{R}^{M'}_+$, donde se siguen cumpliendo todas las hipótesis de la proposición y se puede aplicar el caso anterior. La extensión de los coeficientes desde $\mathbb{R}^{m'}$ a $\mathbb{R}^m$ no presenta ninguna dificultad, y se pueden completar con 0. □

Es inmediato que una función cóncava es cuasi-cóncava, y por ello la proposición anterior se puede aplicar para las funciones cóncavas.

De hecho, si la función definida sobre todo el primer cuadrante es cóncava y superhomogénea, podemos asegurar que proporciona juegos equilibrados, sin ser necesaria la condición de que la función sea creciente (se deduce de las otras condiciones) o que sea homogénea de grado k. En la próxima proposición daremos una demostración directa de este hecho:

Proposición 5.32. *Sea $f : \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida sobre el primer cuadrante, con $f(\mathbf{0}) = 0$. Si f es cóncava y superhomogénea, entonces el juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f)$, para cualquier vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ es equilibrado.*

Demostración:

Sea una colección equilibrada $\mathcal{B} = \{\mathbf{s}^1, \mathbf{s}^2, \ldots, \mathbf{s}^r\}$ con pesos $(\lambda_s)_{s\in\mathcal{B}}$ de coaliciones de $\mathbb{N}^M$. Entonces tenemos

$$\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot \mathbf{s} = \mathbf{n}.$$

Si calculamos:

$$\begin{aligned}
\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot f(\mathbf{s}) &= \left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s\right) \sum_{s\in\mathcal{B}} \frac{\lambda_s}{\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s} \cdot f(\mathbf{s}) \leq \\
&\leq \left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s\right) \cdot f\left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \frac{\lambda_s}{\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s} \cdot \mathbf{s}\right) \leq \\
&\leq \left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s\right) \cdot \frac{f\left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot \mathbf{s}\right)}{\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s} = \\
&= f\left(\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \cdot \mathbf{s}\right) = f(\mathbf{n}).
\end{aligned}$$

En la primera desigualdad hemos utilizado que la función f es cóncava y en la segunda que es superhomogénea. Además debe tenerse en cuenta que por la ecuación (5.3), $\sum_{s\in\mathcal{B}} \lambda_s \geq 1$. □

Veamos ahora algunos ejemplos de funciones que proporcionan juegos equilibrados.

Ejemplo 5.33. *Considérese el juego con dos grupos homogéneos ($M = \{1,2\}$), y cuya función que determina el juego es:*

$$f(x,y) = x^{\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}},$$

definida sobre $\mathbb{R}_+^2$. Se trata de una función cóncava, como se puede comprobar buscando la matriz hessiana. Además es una función homogénea de grado 1, y por ello superhomogénea. Por tanto, para cualquier vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^2$, el juego $(M, \mathbf{n}, f)$ es equilibrado.

Podemos afirmar más, todas las funciones de tipo Cobb-Douglas[13] con grado de homogeneidad al menos uno, proporcionan juegos equilibrados.

Ejemplo 5.34. *Considérese el juego con m grupos homogéneos ($M = \{1, 2, \ldots, m\}$), y cuya función que determina el juego es una función de tipo Cobb-Douglas:*

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m) = K \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdots x_m^{\alpha_m},$$

con $K > 0$, y $\alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, m)$.

Se trata de una función homogénea de grado $\sum\limits_{i\in M} \alpha_i$, y por ello es superhomogénea si $\sum\limits_{i\in M} \alpha_i \geq 1$. Además, todas las funciones Cobb-Douglas son monótonas crecientes y cuasi-cóncavas (véase Madden, 1986). Por tanto, podemos aplicar la proposición 5.31 y podemos afirmar que para cualquier vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$, el juego $(M, \mathbf{n}, f)$ es equilibrado.

[13] Las funciones Cobb-Douglas fueron introducidas por los economistas C. W. Cobb y P.H. Douglas en un artículo sobre la estimación de funciones de producción, publicado en 1927.

También la familia de funciones de elasticidad constante de substitución o funciones C.E.S. *(Constant Elasticity of Substitution)* (ver Madden, 1986) que se utilizan a menudo en el contexto de las funciones de producción, forman parte de las funciones que proporcionan juegos equilibrados.

Ejemplo 5.35. *Una función C.E.S. se define de la siguiente manera:*

$$f : \mathbb{R}^m_+ \longrightarrow \mathbb{R}$$

para $m > 1$, *con las condiciones* $f(\mathbf{0}) = 0$, *y*

$$f(\mathbf{x}) = k \left[\sum_{i=1}^{m} \delta_i x_i^{-\rho} \right]^{-\frac{\nu}{\rho}} \qquad \textit{en los demás casos}^{14},$$

siendo

(a) $k > 0, \quad \nu > 0,$

(b) $\rho > -1, \quad \rho \neq 0,$

(c) $\delta_i > 0$ *para cada* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *y* $\sum_{i=1}^{m} \delta_i = 1.$

Estas funciones son continuas en el dominio, diferenciables con continuidad dos veces en el interior del dominio, y homogéneas de grado de homogeneidad ν.

Al igual que las funciones Cobb-Douglas, las funciones C.E.S. son siempre cuasi-cóncavas, nunca son convexas, y son cóncavas si, y solamente si, su grado de homogeneidad es menor o igual que 1 *(es decir,* $\nu \leq 1$*).*

También se trata de una función creciente, y por ello podemos aplicar la proposición 5.31. Podemos afirmar, por tanto, que si $\nu \geq 1$, *la función C.E.S.* f *proporciona un juego* $(M, \mathbf{n}, f)$ *equilibrado para cualquier vector* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$.

En la definición de las funciones C.E.S. se ha eliminado el caso $\rho = 0$, por la razón evidente de que en tal caso hay un exponente no definido. Si se hace tender este parámetro $\rho \to 0$ la función C.E.S. se convierte en una función Cobb-Douglas del mismo grado de homogeneidad.

Por otra parte, cuando $\rho \to +\infty$ la función C.E.S. tiende a la función de Leontief o función de coeficientes fijos, que va a ser objeto de estudio en el siguiente ejemplo.

[14] Esta definición de la función C.E.S. puede presentar dificultades en el caso en que algún x_i sea 0. En este caso, alguna manipulación algebraica permite encontrar que el valor de la función debe ser nulo.

Ejemplo 5.36. *Una función de Leontief o función de coeficientes fijos se define de la siguiente manera:*

$$f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$f(\mathbf{x}) = \left\{ \min \left[\frac{x_1}{\gamma_1}, \frac{x_2}{\gamma_2}, \ldots, \frac{x_m}{\gamma_m} \right] \right\}^{\alpha}$$

siendo $\gamma_i > 0$ *para* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *y* $\alpha > 0$.

Se trata de una función continua en el dominio de definición, homogénea de grado α, *y siempre cuasi-cóncava. Además, jamás es convexa y es cóncava si, y solamente si,* $\alpha \leq 1$. *Sin embargo, no es diferenciable, ni siquiera en el interior,* $\mathbb{R}_{++}^m$. *Es creciente, y por todo ello, se puede aplicar la proposición 5.31.*

Podemos, pues, afirmar que para cualquier función f *de Leontief con* $\alpha \geq 1$, *el juego* $(M, \mathbf{n}, f)$ *es equilibrado para cualquier vector* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^m$.

Un caso particular de función de Leontief es justamente el mercado de los guantes generalizado, si tomamos el valor $\alpha = 1$ *y* $\gamma_i = 1$ *para todo* $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. *Por tanto también podemos asegurar que el mercado de los guantes generalizado es siempre equilibrado.*

Como señala Newman (1969), en una serie de teoremas para conos convexos de $\mathbb{R}^m$, si una función definida sobre $\mathbb{R}_+^m$ y con $f(\mathbf{0}) = 0$, es cóncava, entonces son equivalentes las siguientes propiedades:

superhomogénea,

homogénea de grado 1 (para valores positivos),

superaditiva.

Por ello podemos enunciar la siguiente proposición:

Proposición 5.37. *Sea* $f : \mathbb{R}_+^M \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función definida sobre el primer cuadrante, con* $f(0) = 0$. *Si* f *es cóncava y superaditiva, entonces el juego cooperativo con grupos homogéneos* $(M, \mathbf{n}, f)$, *para cualquier vector* $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$ *es equilibrado.*

Ya hemos visto un ejemplo en el que se puede asegurar que el *core* es no vacío, el modelo del juego de los guantes generalizado, de la página 115. Ahora lo analizaremos a la luz del último resultado:

Ejemplo 5.38. *Sea* $M = \{1, 2, ..., m\}$ *un conjunto finito no vacío, y consideremos la función* $f : \mathbb{R}_+^M \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida de la siguiente manera:*

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1, x_2, ..., x_m) = \min_{i \in M} \{x_i\}.$$

Para cada vector $\mathbf{n} \in \mathbb{N}^M$, *el juego* $(M, \mathbf{n}, f)$ *es un juego de los guantes generalizado.*

La función f *es cóncava, ya que es el mínimo de funciones lineales (luego cóncavas), y es homogénea de grado* 1 *(en particular, superhomogénea); por tanto, aplicando la proposición 5.32, el juego* $(M, \mathbf{n}, f)$ *es equilibrado.*

Podemos ver ahora algunos ejemplos de funciones que son cóncavas pero no superhomogéneas, o bien superhomogéneas pero no cóncavas, y cuyos juegos inducidos sobre la malla entera ya no son equilibrados.

Ejemplo 5.39. *Considérese el juego con dos grupos homogéneos (con* $M = \{1, 2\}$ *), y la función* $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$, *definida sobre el primer cuadrante de* $\mathbb{R}^2$. *Se trata de una función cóncava, como se puede comprobar buscando la matriz hessiana. Además es una función homogénea de grado* $\frac{2}{3}$, *y por ello no es superhomogénea. A causa de ello, es fácil ver que el juego* $(M, \mathbf{n}, f)$, *para* $\mathbf{n} = (2, 2)$, *no es equilibrado, ya que*

$$f(1,1) = 1 \ \ y \ \ \ f(2,2) = 2^{\frac{2}{3}}$$

Podemos escribir

$$2(1,1) = (2,2),$$

mientras que

$$2f(1,1) = 2 > f(2,2).$$

Ejemplo 5.40. *Considérese el juego con dos grupos homogéneos* ($M = \{1, 2\}$), *y la función dada por* $f(x, y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$, *y* $f(0,0) = 0$, *definida sobre el primer cuadrante de* $\mathbb{R}^2$. *Se trata de una función homogénea de grado* 1, *y por tanto superhomogénea, pero sin embargo no es cóncava. Es fácil ver que el juego* $(M, \mathbf{n}, f)$, *para* $\mathbf{n} = (1, 1)$, *no es equilibrado, ya que*

$$f(1,0) = 1, \ f(0,1) = 1, \ y \ \ \ f(1,1) = 1.$$

Podemos escribir

$$(1,0) + (0,1) = (1,1),$$

mientras que

$$f(1,0) + f(0,1) = 2 > f(1,1).$$

Se pueden obtener otras condiciones suficientes sobre la función para asegurar que el juego con grupos homogéneos correspondiente es equilibrado, y algunas se desarrollarán en el capítulo siguiente, al analizar la convexidad.

Por último, hay que señalar que en el estudio de las funciones de costes asociadas a la noción del monopolio natural aparece el concepto de función de costes "soportable" (Sharkey y Telser, 1978), quienes toman ideas ya analizadas por Panzar y Willig (1977).

Esencialmente, un monopolio natural se puede definir como una empresa que puede producir cualquier nivel de *output* a un coste total más bajo que lo que harían dos o más empresas independientes. Si la tecnología se puede definir en términos de una función de costes para cualquier empresa, la condición que acabamos de expresar se puede traducir indicando que la función de costes es subaditiva.

Por otra parte, de forma adicional, se señala que un monopolio es "natural" en un sentido ligeramente distinto. El monopolio es *sostenible* si puede cubrir el coste total de los *outputs* a un precio unitario de forma que cualquier empresa entrante en el mercado no encontraría ganancias incluso si fuera posible la entrada.

Las funciones de costes presentan ciertas dificultades en su estudio, especialmente si deseamos ver que un monopolio natural sea sostenible en el caso de la producción conjunta de varios *outputs*. La situación se convierte en muy compleja porque el entrante puede elegir entrar a fabricar todos los productos o bien solamente una parte de ellos, y además, la posibilidad de que existan elasticidades cruzadas de demanda implica que la demanda total del mercado dependa tanto del precio del monopolista como del entrante.

Sin embargo, pero como una condición necesaria, Sharkey y Telser (1978) introducen el concepto de soportabilidad (*supportability*) de una función de costes. Su definición es similar a la nuestra de funciones totalmente equilibradas, pero está definida sobre vectores de $\mathbb{R}_+^m$, y no sobre la malla $\mathbb{N}^m$, además da lugar a desigualdades definidas en el otro sentido, por lo que dará lugar a juegos de costes, y la función de costes puede tener costes fijos, es decir, no requiere que $C(\mathbf{0})$ sea 0.

Sharkey (1982) da una serie de condiciones suficientes para que una función de costes C sea soportable para cualquier valor del *output*, y Moulin (1988) describe también una condición similar a la de soportabilidad.

5.8 El conjunto de Weber para juegos con grupos homogéneos

Ya hemos estudiado con detalle la definición y características del conjunto de Weber para los juegos cooperativos ordinarios. Debemos ahora estudiar cómo se puede trasladar la definición del conjunto de Weber para los juegos con grupos homogéneos. Para ello debemos analizar en primer lugar cómo se construye un vector de contribuciones marginales, y para ello señalar qué se entiende por una contribución marginal. Una vez establecidos los vectores de contribuciones marginales, se puede definir el conjunto de Weber y el valor de Shapley a partir de ellos. El valor de Shapley, cuyo estudio será el objeto de la sección siguiente, podrá ser recuperado mediante una fórmula cerrada, al igual que en los juegos cooperativos ordinarios. Además el conjunto de Weber proporciona una característica elegante de los juegos convexos, porque veremos que en este caso coincide con el *core*.

Permutaciones sobre conjuntos y sobre multiconjuntos

Si N es un conjunto de n elementos, una permutación de N puede ser definida como una ordenación "alineada" $x_1, x_2, ..., x_n$ de los elementos de N (una 'palabra' de elementos). Si $N = \{y_1, y_2, ..., y_n\}$, entonces esta ordenación corresponde a la biyección $\pi : N \longrightarrow N$ definida por $\pi(y_i) = x_i$.

El conjunto de todas las permutaciones sobre N se escribe habitualmente como $\mathfrak{S}(N)$, $\Pi(N)$, o $S(N)$. Si $N = \{1, 2, ..., n\}$, es costumbre escribir $\mathfrak{S}_n$ o S_n en su lugar. Obviamente,

$$\# |S(N)| = n!$$

De forma análoga, podemos definir una *permutación sobre un multiconjunto* N de cardinalidad n que sea una ordenación "alineada" $x_1, x_2, ..., x_n$ de los 'elementos' de N ; intuitivamente un multiconjunto o *multiset* es un conjunto con elementos repetidos. Si queremos precisar esta noción, *un multiconjunto finito* N *sobre un conjunto no vacío* M es una función $n : M \longrightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$, tal que $1 \leq \sum_{x \in M} n(x) < \infty$. Para un estudio más detallado de los multiconjuntos, así como las permutaciones sobre los multiconjuntos, puede verse el libro de Stanley (1986).

El número $n(x)$ se puede ver como el número de repeticiones de x. Si $M = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ y $n(x_i) = a_i$, escribimos $N = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_m^{a_m}\}$.

A menudo las permutaciones sobre un multiconjunto se denominan multipermutaciones.

Si $N = \{x_1^{a_1}, x_2^{a_2}, \ldots, x_m^{a_m}\}$ y $\# |N| = n = \sum_{i \in M} a_i$, está claro que

$$\# \left| \tilde{S}(N) \right| = \binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_m},$$

donde $\tilde{S}(N)$ es el conjunto de todas las permutaciones sobre un multiconjunto N. Este número se denomina el coeficiente multinomial.

También puede ser definido como el número de maneras en que se puede asignar cada elemento de un conjunto N (con n elementos), a una de las categorías $C_1, C_2, \ldots, C_m$, de forma que exactamente a_i elementos se asignan a C_i. La fórmula para calcular el coeficiente multinomial [15] es:

$$\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdots a_m!}$$

Obsérvese también que es el coeficiente de $x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \cdots x_m^{a_m}$ en $(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n$.

Permutaciones sobre el conjunto de jugadores en un juego con grupos homogéneos

Consideremos un juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^m$. Como ya se ha mencionado anteriormente, el conjunto de jugadores puede ser considerado como el multiconjunto $N = \{1^{n_1}, 2^{n_2}, ..., m^{n_m}\}$. Una permutación de este multiconjunto $\pi \in \tilde{S}(N)$ es una ordenación de los $n = \sum_{i \in M} n_i$ elementos, conociendo que cada elemento i se repite n_i veces. Denotaremos en nuestro caso el conjunto de las multipermutaciones por

$$\tilde{S}(\mathbf{n}).$$

Esto es equivalente a tener una cadena de $n+1$ coaliciones [16]:

$$\mathbf{s}_0 \leq \mathbf{s}_1 \leq \ldots \leq \mathbf{s}_n$$

de manera que $\mathbf{s}_0 = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_n = \mathbf{n}$ y $\mathbf{s}_i - \mathbf{s}_{i-1} = \mathbf{e}^j$, si j es el elemento que aparece en el lugar i-ésimo de la permutación.

Corresponde a tener un camino minimal desde $\mathbf{0}$ a $\mathbf{n}$ siguiendo la malla entera: supóngase que la coalición $\mathbf{n}$ se forma paso a paso, añadiendo cada vez un nuevo jugador, empezando por $\mathbf{0}$ y en cada paso el jugador que se añade, de tipo j, suma el vector $\mathbf{e}^j$. Un ejemplo de camino en la malla entre $(0,0)$ y $(4,3)$ se muestra en el dibujo 5.7, que corresponde a la multipermutación (2, 2, 1, 1, 1, 2, 1).

Hay $\sum_{i \in M} n_i$ pasos y $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ maneras distintas de llegar a conseguir la coalición total $\mathbf{n}$.

Veamos un ejemplo de las diferentes multipermutaciones posibles en un juego de dos tipos y dos jugadores de cada tipo:

Tenemos $M = \{1, 2\}$ y $\mathbf{n} = (2, 2)$. Las multipermutaciones serán:

[15] El coeficiente binomial, $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}$, no es más que el coeficiente multinomial $\binom{n}{m, n-m}$

[16] Téngase en cuenta que $n = \sum_{i \in M} n_i$

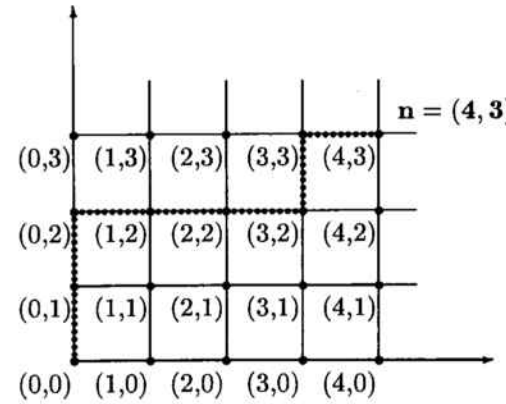

Figura 5.7: Un camino en la malla entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{n} = (\mathbf{4}, \mathbf{3})$

Multipermutación	Cadena de coaliciones
$1, 1, 2, 2$	$(0,0) \to (1,0) \to (2,0) \to (2,1) \to (2,2)$
$1, 2, 1, 2$	$(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (2,1) \to (2,2)$
$1, 2, 2, 1$	$(0,0) \to (1,0) \to (1,1) \to (1,2) \to (2,2)$
$2, 1, 1, 2$	$(0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (2,1) \to (2,2)$
$2, 1, 2, 1$	$(0,0) \to (0,1) \to (1,1) \to (1,2) \to (2,2)$
$2, 2, 1, 1$	$(0,0) \to (0,1) \to (0,2) \to (1,2) \to (2,2)$

Vectores de contribuciones marginales en un juego con grupos homogéneos

Para cada permutación $\pi \in \tilde{S}(\mathbf{n})$, podemos considerar la cadena asociada[17]

$$\mathbf{0} = \mathbf{s}_0^\pi \leq \mathbf{s}_1^\pi \leq \ldots \leq \mathbf{s}_n^\pi = \mathbf{n},$$

y asignamos a cada tipo la suma de las contribuciones marginales que se van añadiendo cada vez que un jugador de ese determinado tipo entra en la coalición. Al final, la suma alcanzada debe ser dividida entre todos los jugadores del mismo tipo. Para formalizar esta idea, necesitamos introducir alguna notación.

Para cada cadena, definimos $R_j^\pi = \left\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbf{s}_i^\pi - \mathbf{s}_{i-1}^\pi = \mathbf{e}^j\right\}$, el conjunto de todos los lugares (del camino) en los que se introduce el elemento de tipo j. Está claro que $\# \left|R_j^\pi\right| = n_j$.

Ahora estamos en condiciones de definir el vector de contribuciones marginales asociado a una multipermutación.

[17]Téngase en cuenta que $n = \sum_{i \in M} n_i$

Definición 5.41. *Sea* $(M, \mathbf{n}, f)$ *un juego con grupos homogéneos, y sea* $\pi \in \tilde{S}(\mathbf{n})$ *una multipermutación sobre* $\mathbf{n}$.

El vector de contribuciones marginales $m^{\pi}(f) \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ *se define como*

$$m_j^{\pi}(f) = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in R_j^{\pi}} \left[f\left(\mathbf{s}_i^{\pi}\right) - f\left(\mathbf{s}_{i-1}^{\pi}\right) \right], \quad \textit{para cualquier } j \in supp(\mathbf{n}). \tag{5.4}$$

Es fácil calcular que hay $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}$ vectores de contribuciones marginales, aunque pueden ser coincidentes.

Veamos ahora unos ejemplos:

Ejemplo 5.42. *Consideremos el juego del mercado de los guantes (ejemplo 5.4) con 2 poseedores de guantes de la mano derecha y dos de guantes de la mano izquierda, es decir con* $\mathbf{n} = (2, 2)$. *Para calcular los vectores de contribuciones marginales debemos sumar las contribuciones marginales que corresponden a cada uno de los tipos, a medida que vamos avanzando en la multipermutación:*

Multipermutación	*Tipo* 1	*Tipo* 2
$1,1,2,2$	$0+0$	$1+1$
$1,2,1,2$	$0+0$	$1+1$
$1,2,2,1$	$0+1$	$1+0$
$2,1,1,2$	$1+0$	$0+1$
$2,1,2,1$	$1+1$	$0+0$
$2,2,1,1$	$1+1$	$0+0$

De esta manera, solamente habrá tres vectores de contribuciones marginales distintos (recuérdese que debemos dividir por el número de jugadores de cada tipo):

$$\begin{aligned} m_1(f) &= (0, 1), \\ m_2(f) &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \\ m_3(f) &= (1, 0). \end{aligned}$$

La definición de vector de contribuciones marginales (expresión 5.4) se reduce a la definición estándar en el caso de permutaciones usuales. Su envoltura convexa será, pues, el conjunto de Weber para juegos con grupos homogéneos.

Definición 5.43. *Sea* $(M, \mathbf{n}, f)$ *un juego con grupos homogéneos. El* conjunto de Weber *de* f, *que se denotará por* $Web(f)$, *es la envoltura convexa de los vectores de contribuciones marginales:*

$$Web(f) = conv\left\{m^{\pi}(f)\right\}_{\pi \in \tilde{S}(\mathbf{n})}$$

Por definición se trata de un conjunto compacto y convexo de $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$, y por construcción, cada vector de contribuciones marginales es una preimputación:

Proposición 5.44. *Sea $f \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ un juego con grupos homogéneos, y $\pi \in \tilde{S}(\mathbf{n})$ una multipermutación sobre* $\mathbf{n}$. *Entonces $m^{\pi}(f)$ es una distribución eficiente.*

Podemos pasar a estudiar la relación entre el conjunto de Weber para juegos con grupos homogéneos y el conjunto de las imputaciones.

Un juego con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^{m}$ verifica la condición de *cero-monotonía* si cumple:

$$f(\mathbf{s}) + \sum_{i \in supp(\mathbf{n})} r_i f\left(\mathbf{e}^i\right) \leq f(\mathbf{t}) \quad \text{para toda } \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}, \quad \text{con } \mathbf{s} \leq \mathbf{t},$$

$$\text{donde } \mathbf{r} = \mathbf{t} - \mathbf{s} = \sum_{i \in supp(\mathbf{n})} r_i \mathbf{e}^i,$$

lo que es equivalente a que

$$f\left(\mathbf{s} + \mathbf{e}^j\right) \geq f(\mathbf{s}) + f\left(\mathbf{e}^j\right)$$

para todo $j \in supp(\mathbf{n})$ y para toda $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^m$, con $\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n} - \mathbf{e}^j$, ya que basta con pasar de la coalición $\mathbf{s}$ a la coalición $\mathbf{t}$ paso a paso. Es fácil ver que en este caso $Web(f) \subseteq I(f)$, aunque la cero-monotonía no es ahora una caracterización de esta inclusión.

Teorema 5.45. *Considérese un juego cooperativo con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$. Si f es cero-monótono, entonces $Web(f) \subseteq I(f)$.*

Demostración:

De la propia definición de $Web(f)$, para una multipermutación $\pi \in \tilde{S}(\mathbf{n})$ dada por la cadena $\mathbf{s}_0^{\pi} \leq \mathbf{s}_1^{\pi} \leq \ldots \leq \mathbf{s}_n^{\pi}$, con $\mathbf{s}_0^{\pi} = \mathbf{0}$, $\mathbf{s}_n^{\pi} = \mathbf{n}$ y $\mathbf{s}_i^{\pi} - \mathbf{s}_{i-1}^{\pi} = \mathbf{e}^j$, para algún $j \in M$,

$$m_j^{\pi}(f) = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in R_j^{\pi}} \left[f\left(\mathbf{s}_i^{\pi}\right) - f\left(\mathbf{s}_{i-1}^{\pi}\right)\right], \quad \text{para cualquier } j \in supp(\mathbf{n}).$$

Por tanto, y teniendo en cuenta que en la multipermutación el elemento j aparece exactamente n_j veces:

$$\begin{aligned} m_j^{\pi}(f) &= \tfrac{1}{n_j} \textstyle\sum_{i \in R_j^{\pi}} \left[f\left(\mathbf{s}_i^{\pi}\right) - f\left(\mathbf{s}_{i-1}^{\pi}\right)\right] \\ &\geq \tfrac{1}{n_j} \cdot n_j \cdot f\left(\mathbf{e}^j\right) = f\left(\mathbf{e}^j\right), \qquad \text{para todo } j \in supp(\mathbf{n}). \end{aligned}$$

□

Al contrario de lo que ocurre con los juegos cooperativos usuales, en que si un vector de contribuciones marginales es del *core*, se trata de un extremo de éste, aquí no se verifica que si $m^{\pi}(f) \in Core(f)$, es un extremo de él (en el sentido de los conjuntos convexos). Para ello vamos a mostrar un ejemplo:

Ejemplo 5.46. *Sea f un juego con grupos homogéneos con cuatro jugadores de dos tipos distintos, con $M = \{1, 2\}, \mathbf{n} = (2, 2)$, (dos jugadores de cada tipo) y cuyos valores de la función característica son:*

$$f(2,1) = 8, f(2,2) = 10, \quad y \quad 0 \text{ en el resto de los casos.}$$

Hay 6 permutaciones diferentes, pero solamente 3 vectores de contribuciones marginales distintos:

$$\{(0,5), (4,1), (5,0)\}.$$

El core *de este juego es el segmento que une los puntos $(3,2)$ y $(5,0)$. El vector $(4,1)$ es un vector de contribuciones marginales dentro del* core, *pero no un extremo del mismo.*

Veremos ahora otro ejemplo en que el conjunto de Weber coincide con el *core*, si bien hay vectores de contribuciones marginales que no son un extremo del *core*. Corresponde a un juego del modelo del mercado de los guantes.

Ejemplo 5.47. *Sea f un juego con grupos homogéneos con cuatro jugadores de dos tipos distintos, con $M = \{1, 2\}, \mathbf{n} = (2, 2)$, (dos jugadores de cada tipo) y cuyos valores de la función característica son los que proporciona el juego del mercado de los guantes:*

$$f(x, y) = \min\{x, y\}.$$

En el ejemplo 5.42 se han calculado los 3 vectores de contribuciones marginales distintos:

$$\left\{(1,0), (0,1), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\}.$$

El core *de este juego es el segmento que une los puntos $(1,0)$ y $(0,1)$. El vector $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ es un vector de contribuciones marginales dentro del* core, *pero no un extremo del mismo.*

El conjunto de Weber del juego de los tipos

Si recordamos la definición del juego de los tipos, definido sobre el conjunto de los tipos realmente presentes, es decir, los elementos de $supp(\mathbf{n})$, podemos analizar qué relación hay entre el conjunto de Weber del juego con grupos homogéneos f y el del correspondiente juego de los tipos v_f^M.

El juego de los tipos v_f^M, solo tiene en cuenta el valor de las coaliciones en los vértices de la malla $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, que hemos denominado $\tilde{\mathbf{e}}^S$ para cada subconjunto $S \subseteq supp(\mathbf{n})$, ya que

$$v_f^M(S) = f(\tilde{\mathbf{e}}^S).$$

Además, hemos definido la transformación[18] $\tilde{}$, y dado cualquier conjunto $K \subseteq \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$, la notación $\widetilde{K}$ significará el conjunto de los vectores transformados por $\tilde{}$ de los de K.

Por la definición del juego v_f^M se verifica el siguiente teorema:

Teorema 5.48. *Sea el juego cooperativo con grupos homogéneos* $(M, \mathbf{n}, f)$. *Y* $(supp(\mathbf{n}), v_f^M)$ *el juego cooperativo asociado de los tipos. Entonces se cumple que*

$$Web(v_f^M) \subseteq \widetilde{Web(f)},$$

Demostración:

Consideremos cada uno de los vectores de contribuciones marginales del juego $(supp(\mathbf{n}), v_f^M)$ que corresponde a una ordenación

$$\theta \in \Pi_{supp(\mathbf{n})},$$

(donde i_k representará el jugador que ha entrado en el lugar k-ésimo), de los tipos presentes en $supp(\mathbf{n})$.

La contribución marginal de un tipo $i \in supp(\mathbf{n})$ será precisamente:

$$m_i^\theta(v_f^M) = v_f^M(P_{\theta,i} \cup \{i\}) - v_f^M(P_{\theta,i}), \text{ para cada } i \in supp(\mathbf{n}),$$

con $P_{\theta,i}$ el conjunto de predecesores de i en la permutación θ, que se transforma en la diferencia entre dos valores en los vértices de la malla:

$$m_i^\theta(v_f^M) = f\left(\tilde{\mathbf{e}}^{P_{\theta,i}\cup\{i\}}\right) - f\left(\tilde{\mathbf{e}}^{P_{\theta,i}}\right).$$

Por tanto, si consideramos la multipermutación $\pi \in \tilde{S}(\mathbf{n})$ que corresponde al camino por los vértices de la malla (los tipos entran seguidos y en el orden indicado por θ) obtenemos un vector de contribuciones marginales cuyo transformado $\widetilde{m^\pi(f)}$ es precisamente $m^\theta(v_f^M)$.

Y hemos demostrado que siempre se cumple:

$$Web(v_f^M) \subseteq \widetilde{Web(f)}.$$

$\square$

[18] La transformación $\tilde{}$ es un operador que se aplica a vectores de $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$, multiplicando cada componente por n_i, es decir, $\tilde{x}_j = n_j x_j$, para cada $j \in supp(\mathbf{n})$, y cada vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$.

La inclusión del *core* en el conjunto de Weber

En la teoría de los juegos cooperativos usuales, es bien conocido que el conjunto de Weber, $Web\,(v)$, para cualquier juego v, es un *catcher* del core, es decir, el core está siempre incluído en el conjunto de Weber. Esta inclusión se verifica también en nuestro caso, para los juegos cooperativos con grupos homogéneos.

Proposición 5.49. *Sea* $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ *un juego con grupos homogéneos. Entonces*

$$Core\,(f) \subseteq Web\,(f)\,.$$

Demostración:

Hemos visto que si consideramos el juego de los tipos tenemos, por la inclusión del teorema 5.17 :

$$\widetilde{Core(f)} \subseteq Core(v_f^M) \subseteq Web(v_f^M).$$

Además, para los conjuntos de Weber tenemos la inclusión del teorema 5.48 :

$$Web(v_f^M) \subseteq \widetilde{Web(f)}.$$

Si ahora combinamos estas inclusiones hemos demostrado que

$$\widetilde{Core(f)} \subseteq \widetilde{Web(f)}.$$

Pero además la transformación $\tilde{}$ es biyectiva, y por tanto la proposición está probada. □

Al igual que para los juegos cooperativos ordinarios, podemos señalar que la intersección será no vacía entre los conjuntos de Weber de juegos con grupos homogéneos tales que uno es mayor que el otro y con la misma eficiencia.

Proposición 5.50. *Sean* $(M, \mathbf{n}, f_1)$ *y* $(M, \mathbf{n}, f_2)$ *dos juegos con grupos homogéneos de los mismos parámetros, tales que* $f_1\,(\mathbf{s}) \leq f_2\,(\mathbf{s})$ *para toda* $\mathbf{s} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$, *y* $f_1\,(\mathbf{n}) = f_2\,(\mathbf{n})$. *Entonces,*

$$Web\,(f_1) \cap Web\,(f_2) \neq \emptyset.$$

Demostración:

De la definición del juego de los tipos está claro que los juegos f_1^M y f_2^M sobre el conjunto $supp(\mathbf{n})$ verifican las hipótesis del teorema 3.4 del capítulo 2. Por ello,

$$Web(f_1^M) \cap Web(f_2^M) \neq \emptyset.$$

Si ahora tenemos en cuenta que

$$Web(f_1^M) \subseteq \widetilde{Web(f_1)},$$

y

$$Web(f_2^M) \subseteq \widetilde{Web(f_2)},$$

se cumple:

$$\widetilde{Web(f_1)} \cap \widetilde{Web(f_2)} \neq \emptyset.$$

Como la transformación $\widetilde{\ }$ es biyectiva, la proposición está probada. □

Como consecuencia directa de la proposición anterior, podemos obtener la inclusión del *core* en el conjunto de Weber.

Corolario 5.51. *Para cualquier juego con grupos homogéneos $f \in HG_{\mathbf{n}}^m$ se cumple*

$$Core\,(f) \subseteq Web\,(f)\,.$$

Demostración:

Podemos suponer que $supp(\mathbf{n}) = M$, ya que en otro caso el razonamiento se llevaría sobre $supp(\mathbf{n})$, y sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2, ..., x_m) \in Core\,(f)$ un vector arbitrario del *core*.

Definimos el juego $(M, \mathbf{n}, f_2)$, con $f_2\,(\mathbf{s}) = \mathbf{s} \cdot \mathbf{x} = \sum_{i=1}^m s_i x_i$, para cualquier coalición $\mathbf{s} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$.

Los juegos f y f_2 satisfacen las hipótesis de la proposición 5.50, y por tanto, usando dicha proposición, obtenemos $Web\,(f) \cap Web\,(f_2) \neq \emptyset$.

Pero $Web\,(f_2) = \{\mathbf{x}\}$, puesto que se trata de un juego modular, lo que implica que $\mathbf{x} \in Web\,(f)$. □

Se podría efectuar un estudio más general sobre las propiedades del conjunto de Weber en la línea de los capítulos 1 y 2, en el contexto de los juegos cooperativos con grupos homogéneos, pero sin embargo nos ha parecido más conveniente analizar el valor de Shapley y la convexidad, que serán el objeto de estudio en la sección y capítulo siguientes.

5.9 El valor de Shapley para los juegos con grupos homogéneos

El valor de Shapley es un concepto de solución puntual muy importante y conocido, que ha sido objeto de numerosos trabajos poniendo de relieve diversas propiedades y axiomatizaciones. Debemos ahora hallar la extensión apropiada del valor de Shapley (para los juegos cooperativos ordinarios) a los juegos con grupos homogéneos, de forma que se preserven las definiciones, propiedades y axiomatización de dicho valor. En primer lugar definiremos el valor de Shapley como el promedio de los vectores de contribuciones marginales, para obtener posteriormente una fórmula para su cálculo.

Definición 5.52. *Sea $f \in HG_{\mathbf{n}}^{m}$ un juego cooperativo con grupos homogéneos. El* valor de Shapley *se define como el promedio de todos los vectores de contribuciones marginales:*

$$Sh(f) = \frac{1}{\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}} \sum_{\pi \in \bar{S}(\mathbf{n})} m^{\pi}(f).$$

El valor de Shapley es un vector de $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$. Esta definición es una extensión de la definición para los juegos cooperativos ordinarios, como "media" de los vectores de contribuciones marginales. Además en el caso en que el juego tenga tantos tipos como jugadores y un jugador de cada tipo, los vectores de contribuciones marginales coinciden en su definición con los del juego TU ordinario, y la definición del valor de Shapley es exactamente la misma.

Por ello, el valor de Shapley se halla en el conjunto de Weber:

$$Sh(f) \in Web(f).$$

Podemos ver que el valor de Shapley puede ser calculado mediante una fórmula cerrada, sin necesitar el cómputo de todos los vectores de contribuciones marginales. El cálculo de esta fórmula es el objetivo de la siguiente proposición.

Proposición 5.53. *El* valor de Shapley *para un juego con grupos homogéneos $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ verifica la siguiente fórmula:*

$$Sh_i(f) = \sum_{\substack{\mathbf{0} \le \mathbf{s} \le \mathbf{n} - \mathbf{e}^i \\ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^M}} \gamma_{\mathbf{n}}^{i}(\mathbf{s}) \cdot \left[f\left(\mathbf{s} + \mathbf{e}^i\right) - f(\mathbf{s})\right] \qquad \text{para todo} \quad i \in supp(\mathbf{n}),$$

donde[19]

$$\gamma_{\mathbf{n}}^{i}(\mathbf{s}) = \frac{\binom{s}{s_1, s_2, \ldots, s_m}\binom{n-s-1}{n_1 - s_1, n_2 - s_2, \ldots, ni - s_i - 1, \ldots, n_m - s_m}}{n_i \cdot \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_m}}.$$

Suponemos en la fórmula que $n_i > 0$, dado que $i \in supp(\mathbf{n})$, y hemos usado la convención que $n = \sum_{i \in M} n_i$, y $s = \sum_{i \in M} s_i$.

Demostración:

De la definición de vector de contribuciones marginales sabemos:

$$m_j^{\pi}(f) = \frac{1}{n_j} \sum_{i \in R_j^{\pi}} \left[f\left(\mathbf{s}_i^{\pi}\right) - f\left(\mathbf{s}_{i-1}^{\pi}\right)\right], \qquad \text{para todo } j \in supp(\mathbf{n}).$$

Si miramos cuántas veces aparece en la definición del valor de Shapley el sumando

$$\left[f\left(\mathbf{s} + \mathbf{e}^j\right) - f(\mathbf{s})\right],$$

[19] El coeficiente multinomial está definido como $\binom{n}{a_1, a_2, \ldots, a_m} = \frac{n!}{a_1! \cdot a_2! \cdot \ldots \cdot a_m!}$.

debemos calcular cuántos caminos hay desde $\mathbf{0}$ hasta $\mathbf{n}$ que pasen por el tramo de la malla entera comprendido entre $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}+\mathbf{e}^j$. Hay

$$\binom{s}{s_1, s_2, ..., s_m} \cdot \binom{n-s-1}{n_1-s_1, n_2-s_2, ..., n_j-s_j-1, ..., n_m-s_m}$$

caminos distintos, ya que el primer factor son los caminos posibles entre $\mathbf{0}$ hasta $\mathbf{s}$, y el segundo los caminos desde $\mathbf{s}+\mathbf{e}^j$ hasta $\mathbf{n}$.

Por ello, en el valor de Shapley, que para cada $j \in supp(\mathbf{n})$ es:

$$Sh_j(f) = \frac{1}{\binom{n}{n_1, n_2, ..., n_m}} \sum_{\pi \in \bar{S}(\mathbf{n})} m_j^\pi(f),$$

podemos reescribir el sumatorio que queda:

$$\sum_{\pi \in \bar{S}(\mathbf{n})} m_j^\pi(f) =$$

$$= \frac{1}{n_j} \sum_{\substack{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n}-\mathbf{e}^j \\ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^m}} \binom{s}{s_1, \ldots, s_m} \cdot \binom{n-s-1}{n_1-s_1, \ldots, n_j-s_j-1, ..., n_m-s_m} \cdot \left[f\left(\mathbf{s}+\mathbf{e}^j\right) - f(\mathbf{s})\right].$$

Con lo que

$$Sh_j(f) = \sum_{\substack{\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n}-\mathbf{e}^j \\ \mathbf{s} \in \mathbb{N}^m}} \gamma_{\mathbf{n}}^j(\mathbf{s}) \cdot \left[f\left(\mathbf{s}+\mathbf{e}^j\right) - f(\mathbf{s})\right], \quad \text{para todo } j \in supp(\mathbf{n}).$$

□

En el caso en que $\mathbf{n} = (1, 1, \ldots, 1)$, la fórmula dada se convierte en la fórmula bien conocida del valor de Shapley, ya que entonces $N = M$ y $n = m$, y la identificación entre $HG_{\mathbf{n}}^n \longleftrightarrow G^n$ nos proporciona un juego (N, v) tal que:

1. Una coalición $\mathbf{s}$ se identifica con una coalición $S \subseteq N$, ya que $s_i \in \{0, 1\}$, y $S = \{i \in M = N \mid s_i = 1\}$,
2. $v(S) = f(\mathbf{s})$
3. $0 \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n} - \mathbf{e}^i$ es equivalente a $\emptyset \subseteq S \subseteq N \setminus \{i\}$,
4. $\binom{n}{1,1,...,1} = n!$, $\binom{s}{1,...,0,1,0,...,1} = s!$, $\binom{n-s-1}{0,...,1,0,1,...,0} = (n-s-1)!$

Por tanto la fórmula se convierte en la definición familiar del valor de Shapley:

$$Sh_i(v) = \sum_{\emptyset \subseteq S \subseteq N \setminus \{i\}} \frac{s! \cdot (n-s-1)!}{n!} \cdot [v(S \cup \{i\}) - v(S)] \quad \text{para todo } i \in N.$$

Podemos analizar ahora una interpretación de la fórmula:

Consideremos todos los caminos minimales en la malla que une las coordenadas enteras de $\mathbb{N}^m$ entre los vectores $\mathbf{0}$ y $\mathbf{n}$, y supóngase que cada camino tiene la misma probabilidad de ser escogido. Hay (siguiendo la notación anterior) $\binom{n}{n_1,n_2,\ldots,n_m}$ caminos diferentes. Para cada tipo i, se va añadiendo el valor marginal que se consigue cuando en camino va en su dirección. Una vez completado, se distribuye el total entre todos los n_i jugadores de tipo i.

El coeficiente $\gamma^i_{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$ refleja el número de caminos que incluyen el tramo entre $\mathbf{s}$ y $\mathbf{s}+\mathbf{e}^i$: los que van desde $\mathbf{0}$ a $\mathbf{s}$, seguidos por los que van desde $\mathbf{s}+\mathbf{e}^i$ a $\mathbf{n}$. Por tanto, este coeficiente refleja cuántas veces la contribución marginal $[f(\mathbf{s}+\mathbf{e}^i)-f(\mathbf{s})]$ se paga a los jugadores de tipo i. Posteriormente, esta contribución se divide de forma equitativa entre los jugadores de dicho tipo, i. Un ejemplo se muestra en el dibujo 5.8.

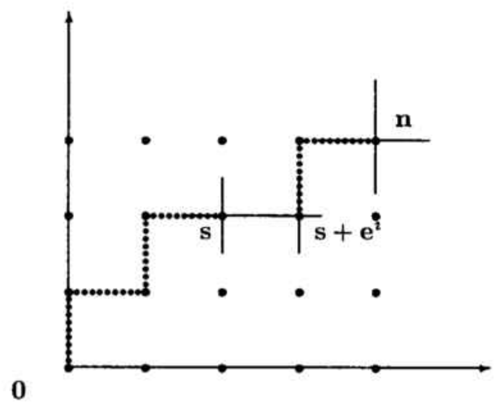

Figura 5.8: Cálculo del coeficiente $\gamma^i_{\mathbf{n}}(\mathbf{s})$

Veamos un ejemplo de cálculo del valor de Shapley, cuyos cálculos detallados omitimos, puesto que es una tarea tediosa (hay que computar 210 caminos, que corresponden a 27 contribuciones distintas para el tipo 1, por ejemplo). El interés de este ejemplo de cálculo corresponderá a su comparación, en el capítulo siguiente, con un valor de Shapley "aproximado", mucho más sencillo de calcular, y que es el valor de Shapley de otro juego cooperativo.

Ejemplo 5.54. *Si consideramos el juego del ejemplo 5.9 de reparto del coste de la solvencia, cuyos valores se encuentran en la tabla 5.3 (página 122), el valor de Shapley correspondiente será:*

$$\begin{aligned} Sh_1 &= 19{,}229\,, \\ Sh_2 &= 24{,}304\,, \\ Sh_3 &= 16{,}406\,. \end{aligned}$$

Se trata de una imputación del core *de dicho juego.*

Vamos a señalar algunas propiedades del valor de Shapley. En primer lugar, el valor de Shapley es eficiente, puesto que es un elemento del conjunto de Weber.

Teorema 5.55. (Eficiencia del valor de Shapley)
Para cualquier juego con grupos homogéneos $f \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$, *se cumple*

$$\sum_{i \in supp(\mathbf{n})} n_i \cdot Sh_i(f) = f(\mathbf{n})$$

Como se sabe, el valor de Shapley no tiene porqué ser una imputación. Sin embargo si el juego es cero-monótono, podemos estar seguros que se trata de una imputación, ya que hemos visto que todos los vectores de contribuciones marginales son imputaciones. En particular, si el juego es superaditivo, es cero-monótono, y podemos asegurar que el valor, $Sh(f)$, es una imputación (individualmente racional).

De la propia definición de valor de Shapley, es evidente que cumple la propiedad de la aditividad, puesto que también lo hacen los vectores de contribuciones marginales.

Teorema 5.56. (Aditividad del valor de Shapley)
Para cualesquiera dos juegos con grupos homogéneos, $f, f' \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$,*se cumple*

$$Sh(f + f') = Sh(f) + Sh(f')$$

Además, el valor de Shapley cumple también la propiedad del tratamiento del tipo falso: si un tipo no aporta ningún beneficio adicional al resto de los jugadores, tampoco debe recibir ningún pago adicional.

Teorema 5.57. (Tratamiento del tipo falso) *Sea un juego con grupos homogéneos* $f \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$. *Si un tipo* $i \in M$ *es* falso, *es decir, si* $f(\mathbf{s} + \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{s}) = f(\mathbf{e}^i)$ *para cualquier* $\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{n} - \mathbf{e}^i$, $\mathbf{s} \in \mathbb{N}^m$, *se cumple*

$$Sh_i(f) = f(\mathbf{e}^i)$$

Es un tema abierto hallar una axiomatización del valor de Shapley análoga a la conocida para los juegos cooperativos ordinarios, y que caracterice este valor.

El valor de Shapley del juego del mercado de los guantes

En el caso del juego del mercado de los guantes con dos tipos de guantes, se puede obtener el valor de Shapley de forma explícita. Las fórmulas se pueden encontrar en Shapley y Shubik (1969), y son las siguientes, para el caso de un juego con r guantes de la mano derecha y l guantes de la mano izquierda y $r \geq l$:

$$
\begin{aligned}
Sh_1(r,l) &= \tfrac{1}{2} - \tfrac{r-l}{2r} \sum_{k=0}^{k=l} \tfrac{r!\, l!}{(r+k)!(l-k)!}\ , \\
Sh_2(r,l) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{r-l}{2l} \sum_{k=1}^{k=l} \tfrac{r!\, l!}{(r+k)!(l-k)!}\ ,
\end{aligned}
$$

donde $Sh_1(r,l)$ es el valor de Shapley que corresponde a cada jugador con un guante de la mano derecha, y $Sh_2(r,l)$ es el valor de Shapley que corresponde a cada jugador con un guante de la mano izquierda.

Vamos a estudiar esta fórmula del valor de Shapley desde el punto de vista de los juegos cooperativos con grupos homogéneos. Para ello, supongamos que tenemos un juego del mercado de los guantes con $\mathbf{n} = (r,l)$ y $r \geq l$. Su función característica es:

$$f(x,y) = \min\{x,y\}.$$

Denominaremos $Sh_1(r,l)$ al valor de Shapley de un poseedor de un guante de la mano derecha, en la situación mencionada, en que hay r guantes de la mano derecha y l guantes de la mano izquierda. Para calcular el valor de Shapley podemos evaluar para cada camino cuánto vale la contribución marginal al primer tipo. De la forma de las curvas de nivel de la función, dicha contribución al valor de Shapley solamente será positiva cuando el camino pase por un tramo horizontal por encima de la bisectriz del primer cuadrante, y en ese caso la aportación será exactamente 1. Un ejemplo de un tramo de esta clase se puede ver en la figura 5.9.

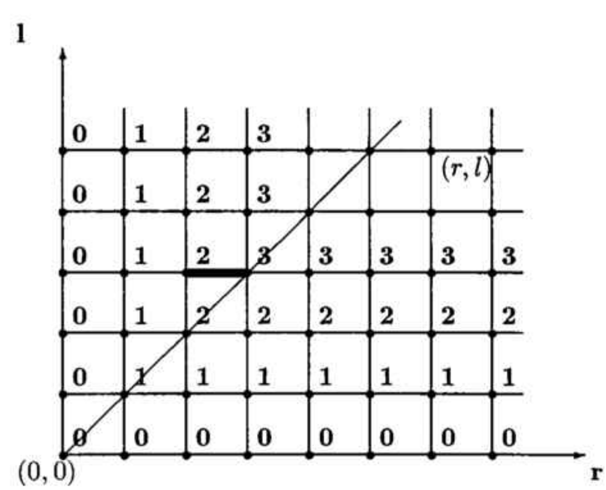

Figura 5.9: La malla entera entre $(0,0)$ y (r,l) con un tramo señalado

La función $F(r,l)$, con $r \geq l$, indicará el número de tramos en la dirección de e^1, por encima de la bisectriz del primer cuadrante, en todos los caminos que haya entre $(0,0)$ y (r,l). Podemos asegurar:

(a) Caminos totales entre $(0,0)$ y (r,l) : $\binom{r+l}{l}$,

(b) Tramos horizontales del total de caminos entre $(0,0)$ y (r,l) : $\binom{r+l}{l} \cdot r$,

(c) Tramos horizontales por encima de la bisectriz entre $(0,0)$ y (x,x) :

$$F(x,x) = \frac{1}{2}\binom{2x}{x} \cdot x, \tag{5.5}$$

(d) Relación entre el número de tramos horizontales por encima de la bisectriz que llegan a (r,l) con los que llegan a los puntos adyacentes:

$$F(r,l) = F(r-1,l) + F(r,l-1), \tag{5.6}$$

puesto que si un camino llega a (r,l) debe proceder de uno de los puntos adyacentes (y es necesario que $r-1 \geq l$),

(e) El valor de Shapley para el primer tipo será $(r \geq l)$:

$$Sh_1(r,l) = \frac{F(r,l)}{\binom{r+l}{l} \cdot r},$$

mientras que para el segundo:

$$Sh_2(r,l) = 1 - \frac{F(r,l)}{\binom{r+l}{l} \cdot l}.$$

Si analizamos la expresión 5.6, podemos encontrar una ecuación que permite hallar el valor de $F(r,l)$. Si escribimos la relación de otra manera y utilizamos la noción de diferencia primera[20] respecto de la primera variable, Δ_1^1, o diferencia segunda respecto la primera variable, Δ_1^2, tenemos:

$$\begin{aligned} F(r,l) - F(r-1,l) &= F(r,l-1), \\ \Delta_1^1 F(r-1,l) &= F(r,l-1). \end{aligned}$$

Y de la misma manera se llega a

$$\Delta_1^l F(r-l,l) = F(r,0) = 0$$

Si resolvemos la ecuación en diferencias finitas de forma recurrente, con las condiciones iniciales obtenidas de $F(x,x) = \frac{1}{2}\binom{2x}{x} \cdot x$, se puede obtener una expresión para F en función de r (y l).

[20] La diferencia primera en este caso, en que se trata de una función de dos variables, debe indicar cuál es la variable respecto de la que se halla. Está expresado en el subíndice. El superíndice señala el orden de la diferencia. Así, $\Delta_1^1 F(r,l) = F(r+1,l) - F(r,l)$.

Por ejemplo, las expresiones para los primeros valores de l son:

$$\begin{aligned}
F(r,0) &= 0,\\
F(r,1) &= 1,\\
F(r,2) &= r+4,\\
F(r,3) &= \frac{1}{2}r^2+\frac{9}{2}r+12,\\
F(r,4) &= \frac{1}{6}r^3+\frac{5}{2}r^2+\frac{43}{3}r+32.
\end{aligned}$$

Estas expresiones se indican en la figura 5.10.

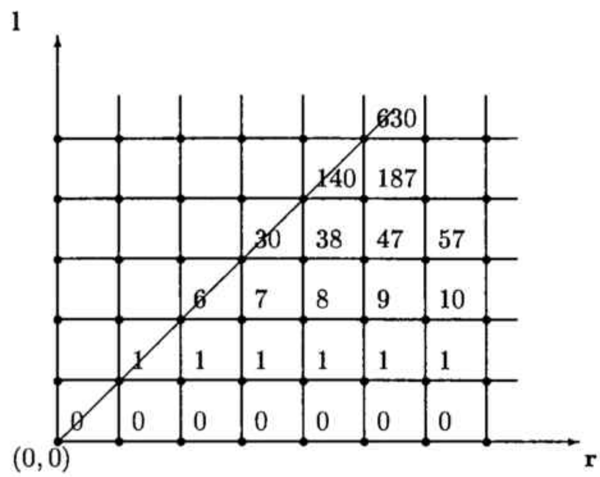

Figura 5.10: Valores de la función $F(r,l)$ en la malla entera

La solución para la relación recursiva (5.6), con las condiciones de contorno (5.5) y $F(r,0)=0$ es

$$F(r,l)=\frac{r}{2}\binom{r+l}{r}-\frac{r-l}{2}\sum_{k=0}^{k=l}\binom{r+l}{r+k},$$

como se puede comprobar por substitución.

Por otra parte, si escribimos la relación entre los valores de F, traducida a los valores de Shapley, se obtiene:

$$Sh_1(r,l)=\frac{r-1}{r+l}Sh_1(r-1,l)+\frac{l}{r+l}Sh_1(r,l-1),$$

suponiendo que $r-1\geq l\geq 1$.

Los valores del valor de Shapley para el segundo tipo se obtienen por diferencia, ya que

$$Sh_2(r,l)=1-\frac{r}{l}Sh_1(r,l).$$

Capítulo 6

Convexidad para juegos con grupos homogéneos

El papel de la convexidad en los juegos cooperativos es sumamente importante. En esta clase de juegos, la retribución neta para cualquier subconjunto de agentes que actúan juntos, es decir, la evaluación de la función característica para cualquier coalición, es una función que presenta diferencias crecientes, lo que en el lenguaje de la Optimización Combinatoria, una parte del análisis discreto, se denomina supermodularidad. Los juegos cooperativos convexos fueron introducidos por primera vez por L. S. Shapley (1971) y forman una clase de juegos con propiedades matemáticas muy interesantes, así como con implicaciones económicas importantes. Los juegos cooperativos convexos tienen siempre *core* no vacío y éste coincide con el conjunto de Weber. Además en esta clase de juegos el valor de Shapley se encuentra en el "centro" del core, y existen *Population Monotonic Allocation Schemes* (Sprumont, 1990), dados por los vectores de contribuciones marginales. No suele haber confusión con el término de convexidad del análisis matemático, ya que del contexto se deduce que se aplica a subconjuntos de las partes de N. Por otra parte, como funciones discretas han sido estudiadas de forma sistemática por Edmonds (1970), si bien una primera referencia se puede hallar en Choquet (1955).

Para un juego cooperativo T.U. v, la convexidad exige que las contribuciones marginales de cada jugador:

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \quad \text{si} \quad i \notin S \subseteq N,$$

crezcan (aunque en sentido no estricto) si crece la coalición S. Es lo que se denomina el efecto de 'bola de nieve' y se demuestra que es equivalente a pedir que

$$v(S) + v(T) \leq v(S \cup T) + v(S \cap T) \quad \text{para toda} \quad S, T \subseteq N.$$

6.1 Funciones supermodulares y juegos convexos

Las funciones supermodulares, definidas sobre un retículo discreto o no, permiten la unificación de diversos conceptos de la economía. El mismo concepto de magnitudes complementarias se puede estudiar desde este punto de vista, como hace Topkis (1998), quien analiza de forma sistemática la utilización de las funciones supermodulares en diversos campos de la economía (y la matemática), tales como los modelos de decisión óptima, los juegos no cooperativos, y los juegos cooperativos. La función característica de un juego cooperativo con grupos homogéneos no es más que una función discreta definida sobre un retículo distributivo, y por tanto para estudiar el concepto de convexidad de los juegos y su traducción correcta a nuestro modelo, es necesario conocer lo que se entiende por función supermodular.

Si $f(x)$ es una función real definida sobre un retículo $(X, \vee, \wedge)$, decimos que es supermodular si

$$f(x') + f(x'') \leq f(x' \vee x'') + f(x' \wedge x'') \quad \text{para toda} \quad x', x'' \in X.$$

Obsérvese que justamente es la definición de convexidad para juegos cooperativos, donde el supremo de dos elementos del retículo (coaliciones) corresponde a su unión $(S \cup T)$, y el ínfimo corresponde a la intersección de conjuntos $(S \cap T)$. Bilbao (2000), en su estudio de las extensiones de los juegos a estructuras combinatorias, también utiliza las funciones supermodulares en conexión con la extensión de Lovász de un juego.

Extenderemos la noción de convexidad a los juegos cooperativos con grupos homogéneos. Podemos pensar, en primer lugar, que el enfoque correcto consiste en considerar el retículo de las coaliciones y definir la convexidad dentro de este retículo, lo que se denomina *supermodularidad*. Esta noción, la supermodularidad, también se puede denominar *l-convexidad* (*lattice convexity*), o convexidad sobre el retículo. Desgraciadamente este enfoque no será satisfactorio para extender la noción de juego convexo, y por tanto deberemos dar otra definición más adecuada de convexidad.

Por ello el concepto de juego supermodular se va a definir de una forma más formal.

Definición 6.1. *Sea* $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^{m}$ *un juego cooperativo con grupos homogéneos. El juego* f *es* supermodular *si*

$$f(\mathbf{s}) + f(\mathbf{t}) \leq f(\mathbf{s} \vee \mathbf{t}) + f(\mathbf{s} \wedge \mathbf{t}) \quad \textit{para toda coalición} \quad \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$$

donde $(\mathbf{s} \wedge \mathbf{t})_i = \min\{s_i, t_i\}$ *y*
$(\mathbf{s} \vee \mathbf{t})_i = \max\{s_i, t_i\}$ *para todo* $i \in M$.

Esta definición corresponde a la definición de una función supermodular definida sobre el retículo $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$.

Desgraciadamente, no es aceptable en nuestro contexto como equivalente a la convexidad de los juegos cooperativos. Para verlo es suficiente con analizar el siguiente ejemplo:

Ejemplo 6.2. *Consideremos el juego siguiente, con 2 grupos homogéneos y dos jugadores de cada grupo, es decir, con* $M = \{1, 2\}$ *y* $\mathbf{n} = (2, 2)$, *que vale*

$$\begin{aligned} f(1,1) &= 6, & f(1,2) &= 8, \\ f(2,1) &= 8, & f(2,2) &= 10, \end{aligned}$$

y 0 *para las restantes coaliciones.*

Si indicamos los valores de la función característica en la malla correspondiente, se obtiene la figura 6.1.

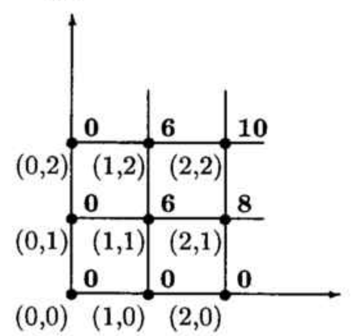

Figura 6.1: La malla entera entre $(0,0)$ y $(2,2)$ con los valores del juego del ejemplo 6.2

Resulta que es supermodular, pero en cambio tiene core *vacío, ya que un punto de core,* (x_1, x_2), *debe verificar:*

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geq & 6 \\ 2x_1 + 2x_2 & = & 10 \end{array}\right\}$$

que son incompatibles.

Además, para el caso en que $M = \{1\}$, es decir, solamente hay un tipo de jugador, cualquier función definida sobre $\mathbb{N}$ es supermodular, ya que

$$f(x) + f(y) \leq f(x \vee y) + f(x \wedge y)$$

porque el máximo y el mínimo de dos números serán forzosamente uno y el otro. Tenemos, pues, juegos cooperativos con grupos homogéneos cuya función característica es supermodular (todas lo son) y en cambio ni siquiera son monótonos ni tienen conjunto de imputaciones.

El motivo por el cual un juego supermodular como el del ejemplo 6.2 tiene el *core* vacío es justamente el siguiente: si examinamos una fila en la malla, por ejemplo la que une los puntos $(0,1),(1,1)$ y $(2,1)$ se ve claramente que el incremento al pasar desde $(0,1)$ a $(1,1)$ es $f(1,1)-f(0,1)=6-0=6$, mientras que al pasar desde $(1,1)$ a $(2,1)$ es $f(2,1)-f(1,1)=8-6=2$. Como vemos, el incremento que se produce no es creciente al crecer el "tamaño" de la coalición.

Este es el motivo de que fallen cuestiones tan elementales: la supermodularidad no es suficiente para asegurar que se cumplan las propiedades de los juegos convexos. Por ello vamos a introducir otro tipo de funciones, que además de ser supermodulares tengan otras características adicionales, como veremos en las diversas caracterizaciones.

6.2 Funciones f-convexas en $\mathbb{N}^m$

Ya hemos visto que la extensión a través de las funciones supermodulares en el retículo de las coaliciones en los juegos con grupos homogéneos no posee las propiedades que tienen los juegos cooperativos ordinarios convexos. Por ello vamos a estudiar otro enfoque, que sigue de forma más cercana el conjunto de los posibles jugadores dentro de las coaliciones, y será denominada *f-convexidad*. Indicará el hecho que expresamos todas las posibilidades de descomposición de la suma de dos coaliciones (*full decomposition*). Se trata de una nueva definición de convexidad para los juegos cooperativos con grupos homogéneos, que coincide con la supermodularidad si nos acercamos a un juego cooperativo ordinario (con tantos tipos distintos como jugadores), como en el primer enfoque, pero que resulta mucho más adecuado cuando se aplica a los grupos homogéneos.

Además este nuevo concepto de convexidad permite resolver de forma satisfactoria una observación que hace Shapley (1971), sobre la inadecuación, en algunos casos, de las funciones convexas en el sentido del análisis clásico cuando se aplican a definir juegos cooperativos. Por ello veremos la relación que se puede señalar entre la convexidad de una función real de una variable y la traslación de este concepto a las funciones de varias variables, que será la f-convexidad.

Definición 6.3. *Sea $f:\mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, una función definida sobre la malla entera. La función f es* f-convexa o full-convex *si*

$$\begin{array}{rcl} \textit{para todos} & \mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{t}\in\mathbb{N}^m & \textit{tales que} \\ & \mathbf{x}+\mathbf{y}=\mathbf{z}+\mathbf{t}, & \textit{con} \\ & \mathbf{z}\leq\mathbf{x}\leq\mathbf{t}, & \\ & \mathbf{z}\leq\mathbf{y}\leq\mathbf{t}, & \end{array}$$

se cumple

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{z}) + f(\mathbf{t}).$$

Hay que hacer notar que en la definición de función f-convexa, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pueden ser iguales.

La intuición que hay detrás de esta definición es justamente que la suma de dos coaliciones (dos vectores) se puede dividir en dos partes, de forma que una parte debe ser menor que las dos y la otra mayor que ambas; y que en este caso se debe cumplir una desigualdad del tipo de la que se pide para los juegos cooperativos convexos ordinarios. Además esto debe ser así para todas las descomposiciones posibles.

Obsérvese, en primer lugar, que la extensión de esta definición desde la malla de los naturales a $\mathbb{Z}^m$ es inmediata, y que también, por otra parte, esta definición se puede extender a funciones de $\mathbb{R}^m$, o definidas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^m$. Esta extensión permitirá responder a un comentario que Shapley (1971) pone a pie de página.

Shapley (1971) en su artículo *Cores of Convex Games*, en el que introduce el concepto de juego cooperativo convexo, señala que algunos juegos convexos se pueden generar a partir de funciones convexas, como veremos a continuación.

Los juegos v definidos por

$$v(S) = f(\mu(S)), \quad \text{para todo } S \subseteq N,$$

con μ una medida sobre el conjunto de las coaliciones, y f una función real que cumple $f(0) = 0$, resulta que son convexos (en el sentido de los juegos cooperativos) si f es una función convexa (en el sentido de las funciones). Todo juego de este tipo es convexo, si bien no todos los juegos convexos se pueden describir de esta manera con una función f y una medida μ adecuadas. La medida μ se puede interpretar como la distribución inicial de unos recursos entre los jugadores, mientras que f es una función de producción que se valora sobre el total de los recursos aportados por todos los jugadores. Shapley señala en una nota:

> Curiously, if f is a function of several variables and μ is a vector of measures, then convexity of f does not imply convexity of v, or even superadditivity. Indeed, in the case of a homogeneous function $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, it is concavity of f, not convexity, that implies superadditivity of v.

Nuestra nueva noción de convexidad permitirá resolver el problema que indica el comentario de Shapley, ya que si la función es full-convex (noción extendida a funciones definidas sobre un subconjunto de $\mathbb{R}^m_+$), se puede asegurar que el juego resultante será convexo.

Podemos buscar la relación entre la f-convexidad y la supermodularidad, y para ello recordar en primer lugar la definición de función supermodular sobre el retículo de la malla entera.

Definición 6.4. *Sea* $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, *una función definida sobre la malla entera. La función* f *es* supermodular *si*

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \text{ para todo par de vectores } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^m,$$

$$\text{donde } (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_i = \min\{x_i, y_i\} \text{ y}$$
$$(\mathbf{x} \vee \mathbf{y})_i = \max\{x_i, y_i\} \text{ para todo } i \in \{1, 2, ..., m\}.$$

Ahora es obvio que la *f-convexidad* implica la *supermodularidad*, ya que si tomamos $\mathbf{t}$ y $\mathbf{z}$ definidas por

$$\begin{aligned} t_i &= (\mathbf{x} \vee \mathbf{y})_i = \max\{x_i, y_i\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, ..., m\}, \\ z_i &= (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y})_i = \min\{x_i, y_i\}, \quad \text{para todo } i \in \{1, 2, ..., m\}, \end{aligned}$$

las condiciones de *f-convexidad* implican las condiciones de *supermodularidad* o *l-convexidad.*

Estas dos nociones no son equivalentes, como se puede observar en el ejemplo 6.2, donde la función es supermodular, pero no f-convexa.

Podemos ahora dar una caracterización equivalente a la f-convexidad, que después analizaremos a la luz de lo que se denominan diferencias crecientes (*increasing differences*).

Teorema 6.5. *Sea* $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, *una función definida sobre la malla entera. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f *es f-convexa,*

(ii) $\Delta_{ij} f(\mathbf{x}) \geq 0$, *para todo* $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^m$, *y todo* $i, j \in \{1, 2, ..., m\}$, [1]

(iii) $f(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{y} + \mathbf{e}^i) - f(\mathbf{y})$ *para todo* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{N}^m$, *tal que* $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$, *y todo* $i \in \{1, 2, ..., m\}$,

(iv) $f(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{s}) \leq f(\mathbf{s} + \mathbf{r} + \mathbf{r}') - f(\mathbf{s} + \mathbf{r}')$ *para todo* $\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{s} \in \mathbb{N}^m$,

(v) $f(\mathbf{s} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{s}) \leq f(\mathbf{t} + \mathbf{r}) - f(\mathbf{t})$ *para todo* $\mathbf{r}, \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{N}^m$, *tal que* $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$.

Demostración:

(i)$\rightarrow$ **(ii)**

La condición **(ii)** es

$$f\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j\right) - f\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}^i\right) - f\left(\mathbf{x} + \mathbf{e}^j\right) + f(\mathbf{x}) \geq 0,$$

[1] $\Delta_{ij} f(\mathbf{s}) = f\left(\mathbf{s} + \mathbf{e}^i + \mathbf{e}^j\right) - f\left(\mathbf{s} + \mathbf{e}^i\right) - f\left(\mathbf{s} + \mathbf{e}^j\right) + f(\mathbf{s})$ es la diferencia segunda, definida sobre la malla entera. Obviamente es posible que i y j sean iguales.

que se puede poner como

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^j\right)+f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right)\leq f\left(\mathbf{x}\right)+f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^j\right)$$

para cualquier par de índices $i,j\in\{1,2,...,m\}$, y para cualquier $\mathbf{x}\in\mathbb{N}^m$.

Pero justamente, para todo $\mathbf{x}\in\mathbb{N}^m$, y todo $i,j\in\{1,2,...,m\}$,

$$\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right)+\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^j\right)=\mathbf{x}+\left(\mathbf{e}^i+\mathbf{x}+\mathbf{e}^j\right),$$

y

$$\begin{array}{ccccc}\mathbf{x}&\leq&\mathbf{x}+\mathbf{e}^i&\leq&\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^j\\ \mathbf{x}&\leq&\mathbf{x}+\mathbf{e}^j&\leq&\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^j,\end{array}$$

con lo que, aplicando la f-convexidad el resultado está probado.

(ii)$\rightarrow$(iii)

La condición **(ii)**,

$$\Delta_{ij}f\left(\mathbf{x}\right)=f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^j\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^j\right)+f\left(\mathbf{x}\right)\geq 0$$

se puede aplicar a diversos valores i y j.

Si tenemos en cuenta que $\mathbf{y}=\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}+\mathbf{e}^{j_2}+...+\mathbf{e}^{j_r}$ y aplicamos repetidamente la condición **(ii)**, tenemos:

$$\begin{array}{rcl}f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^{j_1}\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}\right)+f\left(\mathbf{x}\right)&\geq&0\\ f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^{j_1}+\mathbf{e}^{j_2}\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^{j_1}\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}+\mathbf{e}^{j_2}\right)+f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}\right)&\geq&0\\ &\vdots&\end{array}$$

hasta obtener:

$$\begin{array}{rcl}f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^{j_1}+...+\mathbf{e}^{j_r}\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^{j_1}+...+\mathbf{e}^{j_{r-1}}\right)&&\\ -f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}+...+\mathbf{e}^{j_r}\right)+f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}+...+\mathbf{e}^{j_{r-1}}\right)&\geq&0.\end{array}$$

Al sumar estas desigualdades se convierte en:

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^{j_1}+...+\mathbf{e}^{j_r}\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right)-f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^{j_1}+...+\mathbf{e}^{j_r}\right)+f\left(\mathbf{x}\right)\geq 0,$$

y, en resumen, tenemos la desigualdad deseada:

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right)-f\left(\mathbf{x}\right)\leq f\left(\mathbf{y}+\mathbf{e}^i\right)-f\left(\mathbf{y}\right).$$

(iii)$\rightarrow$ (iv)

Considérese que el vector $\mathbf{s}$ es $\mathbf{x}$, y que $\mathbf{s}+\mathbf{r}'=\mathbf{y}$. Dado que $\mathbf{r}'\geq\mathbf{0}$, resulta ser $\mathbf{x}\leq\mathbf{y}$.

Además podemos descomponer el vector $\mathbf{r}$ en sus componentes:

$$\mathbf{r}=\sum_{i\in M}r_i\mathbf{e}^i\geq\mathbf{0}.$$

Entonces, podemos asegurar la desigualdad paso a paso, puesto que $\mathbf{r} = \mathbf{e}^{j_1} + \mathbf{e}^{j_2} + ... + \mathbf{e}^{j_r}$:

$$\begin{array}{rcl} f\left(\mathbf{s}+\mathbf{e}^{j_1}\right)-f\left(\mathbf{s}\right) & \leq & f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}'+\mathbf{e}^{j_1}\right)-f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}'\right) \\ f\left(\mathbf{s}+\mathbf{e}^{j_1}+\mathbf{e}^{j_2}\right)-f\left(\mathbf{s}+\mathbf{e}^{j_1}\right) & \leq & f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}'+\mathbf{e}^{j_1}+\mathbf{e}^{j_2}\right)-f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}'+\mathbf{e}^{j_1}\right) \\ & \vdots & \end{array}$$

hasta obtener

$$f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}\right)-f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}-\mathbf{e}^{j_r}\right) \leq f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}'+\mathbf{r}\right)-f\left(\mathbf{s}+\mathbf{r}'+\mathbf{r}-\mathbf{e}^{j_r}\right)$$

y sumando se obtiene el resultado deseado.

(iv)→ (v)

Dado que $\mathbf{s} \leq \mathbf{t}$, podemos denominar $\mathbf{r}' = \mathbf{t} - \mathbf{s} \geq \mathbf{0}$, con lo que aplicando la condición **(iv)** se obtiene inmediatamente la desigualdad deseada.

(v)→ (i)

Considérese $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{t} \in \mathbb{N}^m$, tales que $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{t}$, y

$$\mathbf{z} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{t}, \quad \text{y} \quad \mathbf{z} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{t}.$$

Si tomamos $\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{z} \geq \mathbf{0}$, y aplicamos la condición **(v)** a $\mathbf{z} \leq \mathbf{x}$, se obtiene:

$$f\left(\mathbf{z}+\mathbf{r}\right)-f\left(\mathbf{z}\right) \leq f\left(\mathbf{x}+\mathbf{r}\right)-f\left(\mathbf{x}\right).$$

Pero, $\mathbf{z} + \mathbf{r} = \mathbf{y}$ y $\mathbf{x} + \mathbf{r} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} - \mathbf{z}) = \mathbf{t}$, con lo que nos queda

$$f\left(\mathbf{y}\right)-f\left(\mathbf{z}\right) \leq f\left(\mathbf{t}\right)-f\left(\mathbf{x}\right),$$

que es precisamente la condición de la f-convexidad.

□

La condición **(ii)** se traduce, para el caso de funciones definidas sobre $\mathbb{R}^m_+$ y continuamente diferenciables dos veces, en que todas las derivadas parciales segundas sean no negativas, en cualquier punto del dominio.

Condiciones similares a la condición **(iv)** han sido analizadas entre otros contextos, para funciones de costes. Sharkey (1982) utiliza, para una función de costes C de una empresa con múltiples outputs, y que por tanto está definida sobre $\mathbb{R}^m_+$, la siguiente condición:

C cumple la *complementariedad de costes* (*cost complementarity*) si

$$C\left(x+z\right)-C\left(x\right) \geq C\left(x+y+z\right)-C\left(x+y\right)$$

siempre que $x, y, z \geq 0$.

Veáse que esta desigualdad es justamente la contraria a la que está establecida en la condición **(iv)**. Se trata de funciones de costes.

La condición **(v)** corresponde a lo que se ha denominado "efecto de bola de nieve", puesto que lo que indica es que añadir un vector $\mathbf{r}$ es más productivo (arrastra más producto) si se añade a vectores mayores, es decir, los incentivos para unirse crecen cuanto mayor es el vector al que se unen. En la teoría de los juegos cooperativos esta es una propiedad muy importante de los juegos convexos (*snowballing* o *bandwagon effect*). Por otra parte, la condición **(iii)** expresa este mismo efecto en términos de los vectores unitarios. En otras palabras, la función es f-convexa si tiene incrementos marginales crecientes respecto a los vectores unitarios.

Vamos a recordar ahora la definición de función convexa para funciones de una sola variable entera, y veremos cómo se relaciona con nuestra definición de función f-convexa:

Definición 6.6. *Sea* $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$, *una función definida sobre los números naturales. La función* f *es* convexa *si*

$$f(n+1) - f(n) \leq f(n+2) - f(n+1) \text{ para todo número natural } n \in \mathbb{N}.$$

Lo que expresa esta definición es justamente que las diferencias entre los valores consecutivos crecen. Es posible dar una defición equivalente en términos de las diferencias finitas segundas, y la condición resulta en que las diferencias segundas sean positivas.

Del teorema 6.5 queda claro que para las funciones definidas en $\mathbb{N}$, la f-convexidad es la condición de convexidad usual, puesto que si analizamos la condición **(iii)** de dicho teorema y tenemos en cuenta que si $m = 1$, hay un único vector en la base canónica de $\mathbb{R}$, dicha condición es exactamente la definición de función convexa.

Como consecuencia de la definición, es fácil demostrar que si f es una función convexa sobre $\mathbb{N}$, se cumple:

$$f(r) \leq \frac{n-r}{n} f(0) + \frac{r}{n} f(n) \text{ para } r, n \in \mathbb{N} \text{ con } r \leq n. \tag{6.1}$$

Esta propiedad será de utilidad cuando hallemos otras condiciones equivalentes a la f-convexidad.

Otras caracterizaciones de la f-convexidad serán las que nos ocupen ahora, relacionadas con la supermodularidad, donde se puede ver con claridad que la f-convexidad consiste en la supermodularidad añadiéndole algunas condiciones adicionales.

Teorema 6.7. *Sea* $f : \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, *una función definida sobre la malla entera. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) f *es f-convexa,*

(ii) $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ *es supermodular en* $(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbb{N}^m \times \mathbb{N}^m$.

Demostración:

(i) $\rightarrow$ (ii)

Consideremos dos pares $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ y $(\mathbf{x}',\mathbf{y}')$. Como la f-convexidad implica la supermodularidad, podemos aplicarla a los vectores $\mathbf{x}+\mathbf{y}$ y $\mathbf{x}'+\mathbf{y}'$, con lo que tenemos:

$$f(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + f(\mathbf{x}'+\mathbf{y}') \leq f[(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \vee (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')] + f[(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')] \tag{6.2}$$

Por otra parte, podemos observar que $\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}' \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{x} \vee \mathbf{x}'$ y análogamente para $\mathbf{x}'$. De la misma manera también tenemos que $\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}' \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{y} \vee \mathbf{y}'$, y análogamente para $\mathbf{y}'$.

Por ello, podemos escribir las siguientes desigualdades:

$$\begin{array}{rcccl} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}') & \leq & \mathbf{x}+\mathbf{y} & \leq & (\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \vee \mathbf{y}'), \\ (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}') & \leq & \mathbf{x}'+\mathbf{y}' & \leq & (\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \vee \mathbf{y}'), \end{array}$$

que permiten alcanzar las desigualdades siguientes:

$$\begin{array}{rcccl} (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}') & \leq & (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \vee (\mathbf{x}'+\mathbf{y}') & \leq & (\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \vee \mathbf{y}'), \\ (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}') & \leq & (\mathbf{x}+\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x}'+\mathbf{y}') & \leq & (\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \vee \mathbf{y}'). \end{array} \tag{6.3}$$

Pero se cumple que

$$[(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \vee \mathbf{y}')] + [(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}')] = (\mathbf{x}+\mathbf{x}') + (\mathbf{y}+\mathbf{y}'),$$

y también

$$[(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \vee (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')] + [(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')] = (\mathbf{x}+\mathbf{y}) + (\mathbf{x}'+\mathbf{y}'),$$

por lo que estamos en condiciones de aplicar la f-convexidad de la función f, al tener en cuenta las desigualdades de (6.3):

$$\begin{array}{l} f[(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \vee (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')] + f[(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x}'+\mathbf{y}')] \leq \\ f[(\mathbf{x} \vee \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \vee \mathbf{y}')] + f[(\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}') + (\mathbf{y} \wedge \mathbf{y}')] \end{array} \tag{6.4}$$

Si ahora unimos las desigualdades dadas por (6.2) y (6.4), obtenemos la condición de supermodularidad de la función $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ en $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, porque

$$\begin{array}{rcl} (\mathbf{x},\mathbf{y}) \vee (\mathbf{x}',\mathbf{y}') & = & (\mathbf{x} \vee \mathbf{x}', \mathbf{y} \vee \mathbf{y}') \\ (\mathbf{x},\mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x}',\mathbf{y}') & = & (\mathbf{x} \wedge \mathbf{x}', \mathbf{y} \wedge \mathbf{y}'). \end{array}$$

(ii) $\rightarrow$ (i)

Si $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ es supermodular en $(\mathbf{x},\mathbf{y})$, haciendo que $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ obtenemos que la función $f(\mathbf{x})$ es supermodular en $\mathbf{x}$.

Consideremos ahora vectores $\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z},\mathbf{t} \in \mathbb{N}^m$ tales que $\mathbf{x}+\mathbf{y} = \mathbf{z}+\mathbf{t}$, con $\mathbf{z} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{t}$ y $\mathbf{z} \leq \mathbf{y} \leq \mathbf{t}$.

Por una parte, si tenemos en cuenta la supermodularidad de f,

$$f(\mathbf{x}) + f(\mathbf{y}) \leq f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y});$$

y por otra, podemos aplicar la supermodularidad de $f(\mathbf{x}+\mathbf{y})$ en $(\mathbf{x},\mathbf{y})$ a los pares

$$(\mathbf{z}, (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \mathbf{z}) \qquad \text{y} \qquad (\mathbf{x} \vee \mathbf{y}, \mathbf{0}).$$

Entonces se obtiene, dado que $\mathbf{z} \leq (\mathbf{x} \vee \mathbf{y})$ y $\mathbf{0} \leq (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \mathbf{z}$, que

$$f(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + f(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \leq f[(\mathbf{x} \vee \mathbf{y}) + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) - \mathbf{z}] + f(\mathbf{z}+\mathbf{0}) = f(\mathbf{t}) + f(\mathbf{z}),$$

lo que acaba la demostración. □

Podemos ahora dar una caracterización de las funciones f-convexas en términos de la convexidad de cada variable.

Teorema 6.8. *Sea $f : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, una función definida sobre la malla entera. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es f-convexa,*

(ii) *f es supermodular y*

f es convexa en cada variable x_i, para cada $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$.

Demostración:

(i) $\rightarrow$ (ii)

Hemos visto que la f-convexidad implica la supermodularidad. Además, si mantenemos constantes todas las variables menos una, la condición de f-convexidad así restringida es la convexidad sobre una variable.

(ii) $\rightarrow$ (i)

En todo punto $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^m$, podemos observar que si $i \neq j$, $\; i,j \in \{1,2,...,m\}$, la supermodularidad implica:

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right) + f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^j\right) \leq f(\mathbf{x}) + f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^j\right),$$

porque $(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i) \vee (\mathbf{x}+\mathbf{e}^j) = \mathbf{x}+\mathbf{e}^i+\mathbf{e}^j$ y también $(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i) \wedge (\mathbf{x}+\mathbf{e}^j) = \mathbf{x}$.

Además, si f es convexa en cada variable x_i, se cumple (ver definición 6.6):

$$f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right) - f(\mathbf{x}) \leq f\left(\mathbf{x}+2\mathbf{e}^i\right) - f\left(\mathbf{x}+\mathbf{e}^i\right),$$

para todo $i \in \{1,2,...,m\}$.

Ambas desigualdades se pueden resumir en que

$$\Delta_{ij} f(\mathbf{x}) \geq 0, \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \mathbb{N}^m, \quad \text{y todo } i, j \in \{1, 2, ..., m\},$$

que si observamos la caracterización **(ii)** del teorema 6.5, permite finalizar la demostración. □

Además, las funciones f-convexas forman un cono para las operaciones usuales, lo que permite obtener nuevas funciones f-convexas a partir de otras, como se señala en la siguiente proposición, que damos sin demostración.

Proposición 6.9. *Sean* $f, g : \mathbb{N}^m \longrightarrow \mathbb{R}$, *funciones definidas sobre la malla entera f-convexas. Entonces:*

1. $f + g$ *es una función f-convexa.*
2. *Si* $\lambda \in \mathbb{R}$ *es una constante positiva,* λf *es una función f-convexa.*

Podemos ahora observar algunos ejemplos de funciones f-convexas.

Ejemplo 6.10. *Consideremos la siguiente función de tipo Cobb-Douglas, definida sobre* $\mathbb{N}^2$*:*

$$f(x, y) = x \cdot y.$$

Es una función supermodular y convexa en cada variable (de hecho, lineal), suponiendo la otra constante. Se trata, por tanto, de una función f-convexa. En cambio, como es sabido, no es una función ni cóncava ni convexa en $\mathbb{R}^m_+$.

Ejemplo 6.11. *Consideremos la siguiente función de tipo Cobb-Douglas, definida sobre* $\mathbb{N}^m$*:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = A \cdot x_1^{\alpha_1} \cdot x_2^{\alpha_2} \cdot ... \cdot x_m^{\alpha_m},$$

con $A > 0$ *y* $\alpha_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, ..., m)$. *Es un resultado bien conocido que las funciones de este tipo son supermodulares (véase, por ejemplo, Topkis (1998) ejemplo 2.6.2), y si consideramos la función de cada una de las variables, es convexa si y solo si* $\alpha_i \geq 1, \quad (i = 1, 2, ..., m)$.

Por tanto, las funciones Cobb-Douglas son f-convexas si y solo si $\alpha_i \geq 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$.

Ejemplo 6.12. *Las funciones del mercado de guantes generalizado:*

$$f(x_1, x_2, ..., x_m) = \min\{x_1, x_2, ..., x_m\},$$

no son f-convexas sobre $\mathbb{N}^m$, *puesto que, aunque son supermodulares, no son convexas en cada variable: llega un momento en que el incremento que se produce al aumentar una unidad en una dirección es nulo. De hecho es una función cóncava.*

Cuando analicemos juegos cooperativos con grupos homogéneos, deberemos restringirnos al retículo de las coaliciones, es decir a la parte de la malla entera comprendida entre $\mathbf{0}$ y $\mathbf{n}$. Esta malla es la que hemos denominado $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$. Este tipo de funciones, las funciones f-convexas, serán las que permiten extender el concepto de juego convexo para juegos cooperativos ordinarios a los juegos con grupos homogéneos.

6.3 Juegos convexos con grupos homogéneos

Puesto que la definición de función supermodular sobre el retículo es insuficiente para asegurar que se conservan las propiedades de la convexidad, debemos dar otra definición de juego convexo, dentro de nuestro modelo de los juegos con grupos homogéneos. Será justamente la que utiliza las funciones f-convexas sobre la malla. La siguiente definición tiene en cuenta las diversas posibles descomposiciones de la suma $\mathbf{s}+\mathbf{t}$.

Definición 6.13. *Sea* $(M,\mathbf{n},f) \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ *un juego con grupos homogéneos. El juego* f *es* convexo *si*

$$\begin{array}{lll} \textit{para todo} & \mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{v} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m} & \textit{tales que} \\ & \mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{u}+\mathbf{v}, & \textit{con} \\ & \mathbf{v} \le \mathbf{t} \le \mathbf{u}, & \\ & \mathbf{v} \le \mathbf{s} \le \mathbf{u}, & \end{array}$$

se cumple

$$f(\mathbf{s})+f(\mathbf{t}) \le f(\mathbf{u})+f(\mathbf{v}).$$

Obsérvese que si la función f es f-convexa sobre $\mathbb{N}^m$, al restringirla a la malla $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$ se siguen cumpliendo las condiciones de su definición, por ello el juego cooperativo que se obtiene es convexo, según nuestra definición.

Además téngase en cuenta que en la definición de juego convexo es posible que la suma $\mathbf{s}+\mathbf{t}$ esté fuera de la malla $\mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$, y que la igualdad se debe cumplir, eventualmente, fuera de ella, ya que tan sólo se pide que los vectores que intervienen, $\mathbf{s},\mathbf{t},\mathbf{u},\mathbf{v}$ estén en la malla.

Obsérvese que si el juego con grupos homogéneos $(M,\mathbf{n},f)$ es convexo, entonces el juego cooperativo T.U. ordinario asociado (N,w_f) es convexo en el sentido de los juegos cooperativos, ya que para cualquier par de coaliciones $S,T \subseteq N$, el valor del juego w_f es:

$$w_f(S)=f(\mathbf{s}),$$

donde $s_i = \#\left|S \cap N^i\right|$, para $i \in M$ y asimismo $w_f(T) = f(\mathbf{t})$, con $t_i = \#\left|T \cap N^i\right|$, para $i \in M$.

Para ver que el juego es convexo se debe probar que

$$w_f(S) + w_f(T) \leq w_f(S \cup T) + w_f(S \cap T) \quad \text{para toda} \quad S, T \subseteq N,$$

pero entonces, $S \cup T$ corresponde a un vector $\mathbf{u}$, donde $u_i = \# \left|(S \cup T) \cap N^i\right|$, para $i \in M$, y $S \cap T$ corresponde a un vector $\mathbf{v}$, de forma similar, y además, $\mathbf{s} + \mathbf{t} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$.

Por tanto si se aplica la definición de la convexidad del juego $(M, \mathbf{n}, f)$, resulta la convexidad del juego w_f.

Veamos ahora un ejemplo de un juego con grupos homogéneos que es equilibrado, pero que no es convexo:

Ejemplo 6.14. *Consideremos el juego del mercado de los guantes con dos guantes de cada clase. Los valores de la función característica son los que se señalan en la figura 6.2:*

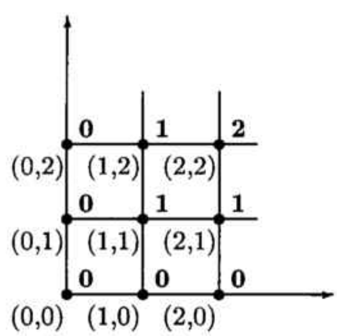

Figura 6.2: Valores del juego del mercado de los guantes entre $(0,0)$ y $(2,2)$

Se trata, como hemos visto, de un juego equilibrado (ver el ejemplo 5.38), pero sin embargo no se trata de un juego convexo, puesto que si consideramos los vectores $(1,1)$ *y* $(1,1)$, *y su descomposición en* $(0,1)$ *y* $(1,2)$, *resulta que*

$$f(1,1) + f(1,1) \not\leq f(0,1) + f(2,1).$$

Las condiciones que hemos encontrado equivalentes a que una función sea f-convexa siguen siendo válidas, imponiendo que todos los vectores que se evalúan estén en la malla $\mathcal{L}^m_{\mathbf{n}}$. Más adelante veremos algunos ejemplos de aplicación de las condiciones que caracterizan la convexidad.

En el contexto de los juegos cooperativos estándar, la convexidad coincide con la supermodularidad, ya que en un juego cooperativo ordinario, el vector $\mathbf{n} = e^M$, es decir $n_i = 1, \quad \text{para todo} \quad i \in M$.

Por ello, si se consideran dos coaliciones $\mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbb{N}^m, \quad \mathbf{s}, \mathbf{t} \leq \mathbf{n}$, debe ser forzosamente $0 \leq s_i \leq 1$ y $0 \leq t_i \leq 1$, y por ello hay una única descomposición posible de la suma

$$\begin{aligned} \mathbf{s}+\mathbf{t}=\mathbf{u}+\mathbf{v}, & \qquad \text{con} \\ \mathbf{0}\leq \mathbf{v}\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{u}\leq \mathbf{n}, & \\ \mathbf{0}\leq \mathbf{v}\leq \mathbf{s}\leq \mathbf{u}\leq \mathbf{n}, & \end{aligned}$$

que será con $\mathbf{u}$ y $\mathbf{v}$ definidas por

$$\begin{aligned} u_i &= (\mathbf{s}\vee\mathbf{t})_i = \max\{s_i,t_i\}, \quad \text{para todo} \ \ i\in M, \\ v_i &= (\mathbf{s}\wedge\mathbf{t})_i = \min\{s_i,t_i\}, \quad \text{para todo} \ \ i\in M, \end{aligned}$$

ya que:

si $(\mathbf{s}+\mathbf{t})_i = 2$ debe ser $s_i = 1$ y $t_i = 1$, con lo que $u_i = 1$ y $v_i = 1$;

si $(\mathbf{s}+\mathbf{t})_i = 1$ debe ser $s_i = 1$ y $t_i = 0$, (o al revés) con lo que $v_i = 0$ y por tanto $u_i = 1$;

y si $(\mathbf{s}+\mathbf{t})_i = 0$, debe ser $s_i = 0$ y $t_i = 0$, con lo que $v_i = 0$ y por tanto $u_i = 0$.

En suma, la condición de f-convexidad se transforma en la condición de supermodularidad.

Tanto la supermodularidad como la convexidad son conceptos cerrados frente a la suma de juegos y el producto por un escalar positivo. Por tanto, el conjunto de los juegos cooperativos con grupos homogéneos que cumplen la f-convexidad forman un cono convexo, al igual que los juegos supermodulares.

6.4 Caracterización de los juegos convexos con grupos homogéneos

La definición de la f-convexidad permite preservar alguna de las propiedades agradables que presentan los juegos convexos, como se deduce inmediatamente de las caracterizaciones de las funciones f-convexas.

Proposición 6.15. *Sea $(M,\mathbf{n},f) \in HG_{\mathbf{n}}^M$ un juego con grupos homogéneos. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) *f es convexo,*

(ii) *$f(\mathbf{s}+\mathbf{e}^i) - f(\mathbf{s}) \leq f(\mathbf{t}+\mathbf{e}^i) - f(\mathbf{t})$ para todo $\mathbf{s},\mathbf{t} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$, tal que $\mathbf{0}\leq \mathbf{s}\leq \mathbf{t}\leq \mathbf{n}-\mathbf{e}^i$, y todo $i \in supp(\mathbf{n})$,*

(iii) $f(\mathbf{s}+\mathbf{r}) - f(\mathbf{s}) \leq f(\mathbf{t}+\mathbf{r}) - f(\mathbf{t})$ *para todo* $\mathbf{s}, \mathbf{t}, \mathbf{r} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^{m}$, *tal que* $\mathbf{0} \leq \mathbf{s} \leq \mathbf{t} \leq \mathbf{n} - \mathbf{r}$.

Esta caracterización expresa lo que ya hemos comentado, el efecto de "bola de nieve", que indica que para una coalición es más interesante unirse a una coalición grande que a una pequeña, ya que la perspectiva de las ganancias asociadas es mayor. La condición **(ii)** lo expresa en términos de de los vectores unitarios, mientras que la condición **(iii)** lo expresa en términos agregados.

Podemos analizar ahora un ejemplo de juego con grupos homogéneos que no es convexo.

Ejemplo 6.16. *Consideremos el juego de cinco jugadores de dos tipos distintos dado en el ejemplo 5.4, con* $M = \{1,2\}$, $\mathbf{n} = (3,2)$, *es decir,* 3 *jugadores del tipo* 1 *y* 2 *del tipo* 2. *Los valores de su función característica son los siguientes:*

$$f(3,1) = 8, \ f(3,2) = 12, \ f(2,2) = 10, \quad y \ 0 \ \text{en el resto de los casos.}$$

La figura 6.3 indica las coaliciones y sus valores.

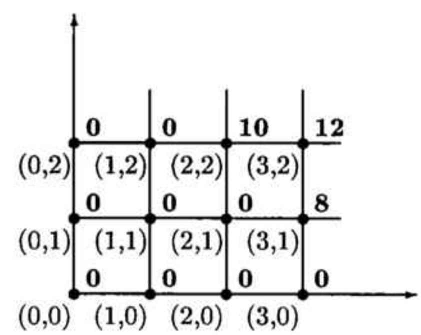

Figura 6.3: La malla entera entre $(0,0)$ y $(3,2)$ con los valores del juego del ejemplo 5.4

Si se analizan las contribuciones marginales, se observa que éstas no son crecientes, puesto que el incremento que se produce al pasar desde $(1,2)$ *a* $(2,2)$ *es* 10, *mientras que el incremento de* $(2,2)$ *a* $(3,2)$ *es solamente de* 2.

Si modificamos el valor de la coalición $(3,2)$, *ésta debe ser como mínimo de* 20 *para asegurar que tenemos un juego convexo.*

Para juegos convexos con grupos homogéneos, demostraremos después la condición estándar de la convexidad, es decir la igualdad entre el conjunto de Weber y el *core*.

Antes de proceder a probar el principal resultado de esta sección, necesitamos un lema técnico sobre sucesiones de números reales.

Lema 6.17. *Sea $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_k$ una sucesión finita de números reales. Entonces*

$$\sum_{i=1}^{j} a_i \leq \frac{j}{k}\sum_{i=1}^{k} a_i \quad \textit{para todo } j = 1, 2, \ldots, k.$$

Demostración:

Procederemos por inducción sobre k.

Si $k = 1$ no hay nada que probar, ya que tenemos la igualdad.

Supongamos que la afirmación se cumple hasta $k-1$, y tómese

$$a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_k.$$

Por la hipótesis de inducción, tenemos

$$\sum_{i=1}^{j} a_i \leq \frac{j}{k-1}\sum_{i=1}^{k-1} a_i \ \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

Si manipulamos esta desigualdad obtenemos:

$$k \cdot \sum_{i=1}^{j} a_i \leq j \cdot \sum_{i=1}^{k-1} a_i + \sum_{i=1}^{j} a_i \ \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k-1,$$

que se puede minorar

$$\leq j \cdot \sum_{i=1}^{k-1} a_i + j \cdot a_k = j \cdot \sum_{i=1}^{k} a_i \ \text{ para } j = 1, 2, \ldots, k-1.$$

El caso de que $j = k$ es una simple igualdad. □

Teorema 6.18. *Sea $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^{M}$ un juego cooperativo con grupos homogéneos convexo. Entonces, todos los vectores de contribuciones marginales están en el* core, *es decir,*

$$m^{\pi}(f) \in Core\,(f), \quad \textit{para toda} \quad \pi \in \tilde{S}\,(\mathbf{n}).$$

Demostración:

Para cada multipermutación π sobre $\mathbf{n}$, tenemos su cadena de coaliciones asociada:

$$\mathbf{s}_0^{\pi} \leq \mathbf{s}_1^{\pi} \leq \ldots \leq \mathbf{s}_n^{\pi},$$

$$\text{con } \mathbf{s}_0^{\pi} = \mathbf{0},\ \mathbf{s}_n^{\pi} = \mathbf{n} \quad \text{y} \quad \mathbf{s}_j^{\pi} - \mathbf{s}_{j-1}^{\pi} = \mathbf{e}^{i} \text{ para algún } i \in supp(\mathbf{n}).$$

La cardinalidad de cada coalición $\mathbf{s}$ se denotará por $s = \sum_{i\in M} s_i$. Además, la coalición $\mathbf{s}_j^{\pi}$ la denotaremos por $\mathbf{s}_j^{\pi,i}$ si en la cadena dada por π se cumple que $\mathbf{s}_j^{\pi} - \mathbf{s}_{j-1}^{\pi} = \mathbf{e}^{i}$.

De la notación previa de los vectores de contribuciones marginales hemos definido el conjunto

$$R_i^\pi = \left\{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \mathbf{s}_j^\pi - \mathbf{s}_{j-1}^\pi = \mathbf{e}^i \right\},$$

que indica los lugares de la cadena en los que ha introducido el tipo i.

La cardinalidad de este conjunto es $\# R_i^\pi = n_i$, y los elementos de R_i se pueden ordenar: $r_i^1 < r_i^2 < \ldots < r_i^{n_i}$.

El vector de contribuciones marginales $m^\pi(f) \in \mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$ está definido por:

$$m_i^\pi(f) = \frac{1}{n_i} \sum_{j \in R_i^\pi} \left[f\left(\mathbf{s}_j^\pi\right) - f\left(\mathbf{s}_{j-1}^\pi\right) \right], \qquad \text{para cada } i \in supp(\mathbf{n}).$$

En lo que sigue el superíndice π será suprimido si no ha lugar a confusión.

Para cada coalición $\mathbf{t}$, consideremos el siguiente proceso iterativo para obtener una cadena de coaliciones desde $\mathbf{0}$ a $\mathbf{t}$:

1. Definimos la coalición que ocupará el lugar t (recordemos que $t = \sum_{j \in M} t_j$):

   $$\mathbf{w}_t = \mathbf{t}$$

   y buscamos el primer lugar en la cadena de la multipermutación π que supere la coalición $\mathbf{t}$: $j(t) = \min \{ j \in \{1, 2, \ldots, n\} \mid \mathbf{w}_t \leq \mathbf{s}_j \}$.

   Este índice $j(t) \in R_i$ para algún $i \in supp(\mathbf{n})$.

2. Se define entonces la siguiente coalición en la cadena, la que se obtiene restando a $\mathbf{w}_t$ el vector que nos indica R_i: tenemos $\mathbf{w}_{t-1} = \mathbf{w}_t - \mathbf{e}^i$. Podemos escribir $\mathbf{w}_t^i = \mathbf{w}_t$, donde el superíndice $i \in supp(\mathbf{n})$ expresa que la diferencia entre $\mathbf{w}_t$ y $\mathbf{w}_{t-1}$ es precisamente $\mathbf{e}^i$.

3. Para esta coalición buscamos el primer lugar de la cadena π que la supera, y que será, claramente anterior al que hemos encontrado en el paso anterior, etc. y proseguimos recursivamente hasta llegar a que $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}$.

Por construcción $\mathbf{w}_k^i \leq \mathbf{s}_{j(k)}$, y $\mathbf{w}_{k-1} \leq \mathbf{s}_{j(k)-1}$.

Hemos construido una sucesión de coaliciones $\mathbf{w}_0 \leq \mathbf{w}_1 \leq \ldots \leq \mathbf{w}_t$, tales que

(a) $\mathbf{w}_0 = \mathbf{0}, \mathbf{w}_t = \mathbf{t}$

(b) $\mathbf{w}_k^i - \mathbf{w}_{k-1} = \mathbf{e}^i$, para $j(k) \in R_i$,

(c) $\mathbf{w}_k^i \leq \mathbf{s}_{j(k)}$, y $\mathbf{w}_{k-1} \leq \mathbf{s}_{j(k)-1}$,

(d) $\mathbf{s}_{j(k)} - \mathbf{s}_{j(k)-1} = \mathbf{e}^i$,

(e) $\mathbf{s}_{j(k)} - \mathbf{s}_{j(k)-1} = \mathbf{w}_k^i - \mathbf{w}_{k-1}$, y

(f) $\mathbf{s}_{j(k)} < \mathbf{s}_{j(k')}$ si $k < k'$.

Estamos ahora en condiciones de comprobar que se cumplen las condiciones del *core* para cualquier coalición[2] $\mathbf{t} \in \mathcal{L}_{\mathbf{n}}^m$:

$$m^\pi \cdot \hat{\mathbf{t}} = \sum_{i \in supp(\mathbf{n})} \frac{t_i}{n_i} \sum_{j \in R_i} \left[f(\mathbf{s}_j) - f(\mathbf{s}_{j-1}) \right]. \tag{6.5}$$

Por el lema previo 6.17, podemos minorar la expresión anterior por la suma de los primeros sumandos (dado que el juego es convexo, los sumandos son crecientes) y la expresión (6.5) se convierte en:

$$m^\pi \cdot \hat{\mathbf{t}} \geq \sum_{i \in supp(\mathbf{n})} \sum_{\substack{j \in R_i \\ j \leq r_i^{t_i}}} \left[f(\mathbf{s}_j) - f(\mathbf{s}_{j-1}) \right].$$

Teniendo en cuenta que cada $\mathbf{s}_j$ corresponde a una $\mathbf{s}_{j(k)}$, y usando que el juego f es convexo,

$$f\left(\mathbf{s}_{j(k)}\right) - f\left(\mathbf{s}_{j(k)-1}\right) \geq f(\mathbf{w}_k) - f(\mathbf{w}_{k-1}),$$

y por tanto:

$$m^\pi \cdot \hat{\mathbf{t}} \geq \sum_{k=1}^{t} \left[f(\mathbf{w}_k) - f(\mathbf{w}_{k-1}) \right] = f(\mathbf{t}).$$

Dado que la coalición $\mathbf{t}$ es cualquiera, el resultado queda probado. □

Como consecuencia de este hecho, queda claro que para un juego convexo f los vectores de contribuciones marginales pertenecen al core, es decir,

$$Web(f) \subseteq Core(f).$$

Por otra parte, la inclusión contraria se da para cualquier tipo de juego con grupos homogéneos, y por ello podemos enunciar el siguiente corolario.

Corolario 6.19. *Sea $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^M$ un juego cooperativo convexo con grupos homogéneos. Entonces, se cumple*

$$Web(f) = Core(f).$$

[2] Recuérdese que $\hat{\mathbf{t}}$ es la proyección de $\mathbf{t}$ sobre el espacio $\mathbb{R}^{supp(\mathbf{n})}$, es decir, conservar solamente los tipos realmente existentes.

Desgraciadamente no se trata de una caracterización, puesto que es posible tener la igualdad anterior sin necesidad de que el juego sea convexo, a diferencia de lo que ocurre con los juegos cooperativos ordinarios. Para ello basta con recordar el ejemplo 5.47 de un mercado de los guantes con dos guantes de cada mano. Hemos visto que (excepto en casos degenerados) los juegos del mercado de los guantes no son convexos porque la función no es f-convexa.

Por otra parte, en el capítulo anterior hemos visto las relaciones de inclusión entre el *core* y el conjunto de Weber de un juego con grupos homogéneos f, y el correspondiente juego de los tipos v_f^M, que corresponden a los teoremas 5.17 y 5.48. Estos teoremas se pueden resumir en la siguiente cadena de inclusiones:

$$\widetilde{Core}(f) \subseteq Core(v_f^M) \subseteq Web(v_f^M) \subseteq \widetilde{Web}(f).$$

Para los juegos convexos con grupos homogéneos, las inclusiones se convierten en igualdades. De hecho, el juego asociado de los tipos es también convexo. Podemos expresarlo en forma de proposición.

Proposición 6.20. *Sea $(M, \mathbf{n}, f) \in HG_{\mathbf{n}}^M$ un juego cooperativo convexo con grupos homogéneos, y $(supp(\mathbf{n}), v_f^M)$ el juego cooperativo asociado de los tipos. Entonces se cumple que*

$$\widetilde{Core}(f) = Core(v_f^M) = Web(v_f^M) = \widetilde{Web}(f).$$

Esta proposición justifica que, al estudiar el *core* de un juego convexo con grupos homogéneos, tan sólo sea necesario encontrar el *core* del juego de los tipos, ya que coincidirá con él (modificado por la transformación ˜).

En este caso, puede ser muy conveniente (desde el punto de vista computacional) el hallar el valor de Shapley del juego de los tipos, ya que aunque no coincida forzosamente con el valor de Shapley del juego, es seguro que el valor de Shapley del juego de los tipos estará en el *core* del juego, transformado convenientemente.

El modelo actuarial del reparto del coste de la solvencia

Podemos revisar de nuevo el modelo actuarial de los *Solvency cost share games*, del cual se ha analizado un ejemplo numérico, el ejemplo 5.9, cuyo *core* se representa en la figura 5.4. Si se observa dicha representación, se puede ver que las únicas restricciones que proporcionan las paredes del *core* corresponden justamente a las del juego de los tipos asociado. Esto es debido a que, se trata de un modelo de juegos cuyas funciones son f-convexas, como vamos a ver a continuación.

Para ello vamos a enunciar un lema, en el que se relacionan las funciones sobre el cuadrante $\mathbb{R}_+^m$ con las funciones definidas sobre la malla $\mathbb{N}^m$.

Proposición 6.21. *Sea $f : \mathbb{R}_+^m \longrightarrow \mathbb{R}$, una función definida sobre el primer cuadrante y de clase C^2, es decir, diferenciable con continuidad dos veces en todos los puntos del dominio, y*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \geq 0 \quad \textit{para cualesquiera} \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$$

en todos los puntos del dominio.

Entonces, la función f es f-convexa sobre $\mathbb{N}^m$.

Demostración:

Si una función presenta derivadas parciales segundas positivas o nulas para índices distintos es supermodular en el retículo $\mathbb{R}_+^m$, como señala Topkis (1998) (sección 2.6).

Por otra parte, $\mathbb{N}^m$ es un subretículo de $\mathbb{R}_+^m$, y por ello la función f es supermodular en $\mathbb{N}^m$.

Además en cada variable la derivada segunda

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \geq 0 \quad \text{para} \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

es positiva en todos los puntos. Por tanto, en cada variable, la función es convexa.

Si consideramos la función restringida a $\mathbb{N}^m$, tenemos que es convexa en cada variable, y por el teorema 6.8, la función f es f-convexa sobre $\mathbb{N}^m$. □

Dentro del estudio de las funciones definidas sobre conjuntos parcialmente ordenados, se define la condición de función que tiene *increasing differences*. Esta condición, aplicada a funciones diferenciables dos veces y definidas sobre $\mathbb{R}_+^m$, corresponde a la que hemos señalado de las derivadas parciales segundas (cuando se refiere a índices distintos). Resulta equivalente a la condición de supermodularidad y se trata de una condición muy utilizada en el contexto de las funciones de utilidad para un sistema de productos complementarios.

Consideremos ahora de nuevo el modelo de reparto del coste de la solvencia (*Solvency cost share games*). La función correspondiente es la que figura en la página 118:

$$f(s_1, s_2, ..., s_m) = 3\left[\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i - \sqrt{\sum_{i=1}^{i=m} s_i\sigma_i^2}\right].$$

Se trata de una función con las derivadas parciales segundas positivas en cualquier punto. Por tanto, aplicando la proposición 6.21 se trata de una función f-convexa.

Por esta razón el *core* del juego con grupos homogéneos queda determinado solamente con las desigualdades que corresponden al juego de los tipos. Veremos ahora cómo queda reflejado en un ejemplo. Para ello, podemos retomar los valores

Tabla 6.1: Valor de la función característica para la función $f(s_1, s_2, s_3)$ del ejemplo 5.9

s_1	s_2	s_3	$f(s_1,s_2,s_3)$
0	**0**	**0**	0
0	0	1	0
0	**0**	**2**	14,0588745
0	1	0	0
0	1	1	18
0	1	2	36,6351173
0	**2**	**0**	26,3603897
0	2	1	45,9852957
0	**2**	**2**	65,8751083
1	0	0	0
1	0	1	15,5812546
1	0	2	32,7009934
1	1	0	20,9167309
1	1	1	39,8307512
1	1	2	59,14861
1	2	0	49,6437636
1	2	1	69,6629298
1	2	2	89,8847006

s_1	s_2	s_3	$f(s_1,s_2,s_3)$
2	0	0	17,5735931
2	0	1	35,2557696
2	0	2	53,6676892
2	1	0	43,1534156
2	1	1	62,6599668
2	1	2	82,4521439
2	2	0	73,5147073
2	2	1	93,8376647
2	2	2	114,322046
3	**0**	**0**	38,0384758
3	0	1	56,7636479
3	**0**	**2**	75,9355174
3	1	0	66,2613646
3	1	1	86,1920334
3	1	2	106,338406
3	**2**	**0**	97,8416164
3	2	1	118,407944
3	**2**	**2**	139,106806

de la función característica del ejemplo 5.9 de reparto del coste de la solvencia, cuyos valores se encuentran en la tabla 6.1.

Las desigualdades relevantes para la determinación del *core* son las de las coaliciones señaladas en negrita.

La representación de *core* será la de la figura 6.4. Este *core* coincide con la transformación correspondiente del *core* del juego de los tipos, que se ha representado en la figura 6.5.

Si recordamos los cálculos, el valor de Shapley correspondiente es:

$$\begin{aligned} Sh_1(f) &= 19,229 \, , \\ Sh_2(f) &= 24,304 \, , \\ Sh_3(f) &= 16,406 \, . \end{aligned}$$

Por supuesto se trata de un punto del *core* de dicho juego (el juego es convexo).

Si ahora consideramos el juego de los tipos :

$$\begin{array}{lllllll} v_f^M(1) &= 38,038 \, , & v_f^M(12) &= 97,842 \, , & & \\ v_f^M(2) &= 26,360 \, , & v_f^M(13) &= 75,936 \, , & v_f^M(N) &= 139,107 \, , \\ v_f^M(3) &= 14,059 \, , & v_f^M(23) &= 65,875 \, , & & \end{array}$$

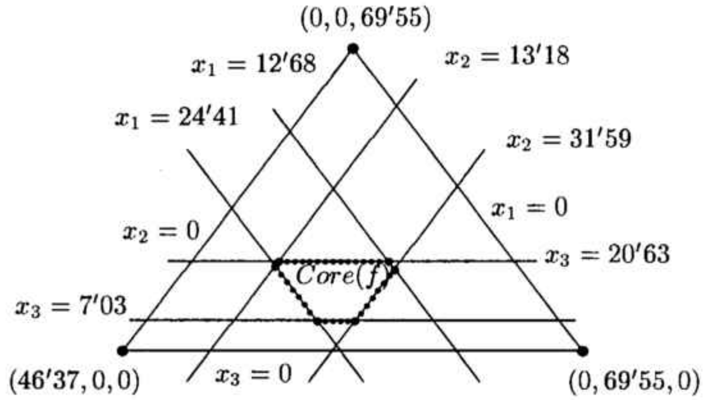

Figura 6.4: El *core* del juego del ejemplo 5.9

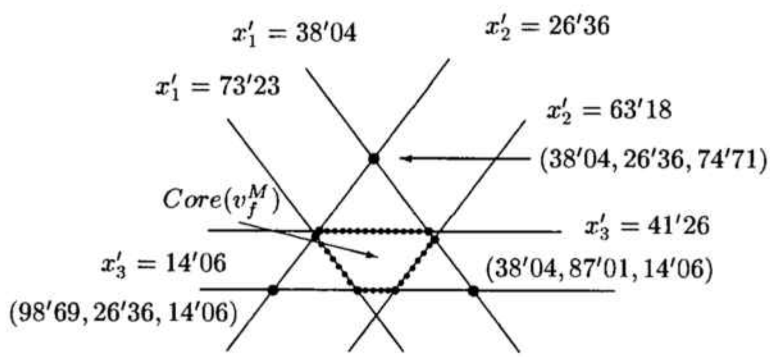

Figura 6.5: El *core* del juego de los tipos del ejemplo 5.9

y el valor de Shapley de ese juego (que solamente tiene tres jugadores y 7 coaliciones a valorar), se obtiene:

$$\begin{aligned} Sh_1(v_f^M) &= 59,316 \ , \\ Sh_2(v_f^M) &= 48,447 \ , \\ Sh_3(v_f^M) &= 31,343 \ . \end{aligned}$$

Ahora recuperamos el valor de Shapley que corresponde a cada jugador del mismo tipo, dividiendo por el número de elementos presentes en cada tipo (que en este caso son $(3, 2, 2)$):

$$\begin{aligned} Sh_1^*(f) &= 19,772 \ , \\ Sh_2^*(f) &= 24,223 \ , \\ Sh_3^*(f) &= 15,672 \ . \end{aligned}$$

Como se observa, el valor de Shapley teniendo en cuenta solamente el juego de los tipos no coincide con el valor de Shapley del juego original. Sin embargo, para una diferencia relativamente pequeña el esfuerzo computacional es mucho menor.

Si analizamos con más detalle la situación, se observa que en el cálculo de $Sh^*(f)$ solamente se utilizan las coaliciones extremales en la malla, mientras que en el valor de Shapley se utilizan todas ellas.

Bibliografía

[1] A. Alegre and M. M. Claramunt. Allocation of solvency cost in group annuities: Actuarial principles and cooperative game theory. *Insurance: Mathematics and Economics*, 17:19–34, 1995.

[2] Y. Apartsin and R. Holzman. The core and the bargaining set in glove-market games. Preprint, Technion- Israel Institute of Technology, Dep. of Mathematics, 2000.

[3] R.J. Aumann and J.H. Drèze. Cooperative games with coalition structures. *Int. J. Game Theory*, 3:217–237, 1974.

[4] R.J. Aumann and L.S. Shapley. *Values of non-atomic games*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1974.

[5] R.J. Aumann and M. Maschler. The bargaining set for cooperative games. In M. Dresher, L.S. Shapley, and A.W. Tucker, editors, *Advances in Game Theory, Annals of Mathematical Studies*, number 52, pages 443–471. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1964.

[6] M.J. Baker and Associates. Runway cost impact study. Technical report, Association of Local Transport Airlines, Jackson, Mississipi, 1965.

[7] R.E. Beard, T. Pentikainen, and E. Pesonen. *Risk Theory*. Chapman and Hall, 3rd. edition, 1987.

[8] Jesús Mario Bilbao. *Cooperative games on combinatorial structures*. Kluwer Academic Publishers, 2000.

[9] O.N. Bondareva. Some applications of linear programming methods to the theory of cooperative games. *Problemy Kibernetiky*, 10:119–139, 1963.

[10] K. Borch. Reciprocal reinsurance treaties. *ASTIN Bulletin*, 1(1):170–191, 1960.

[11] K. Borch. The safety loadings of reinsurance premiums. *Skandinavisk Aktuarietidskrift*, 1:163–184, 1960.

[12] K. Borch. Application of game theory to some problems in automobile insurance. *ASTIN Bulletin*, 2(2):208–221, 1962.

[13] P. Borm, G. Owen, and S. Tijs. On the position value for communication situations. *SIAM J. Discrete Math.*, 5(3):305–320, 1992.

[14] P. Borm, A. van den Nouweland, and S. Tijs. Cooperation and communication restrictions: A survey. In R.P. Gilles et al., editor, *Imperfections and behavior in economic organizations. Based on the conference on economic behaviour in an imperfect environment held in Tilburg, Netherlands, April 17–19, 1990.*, pages 195–227. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Nederlands , 1994.

[15] H. Bühlmann. An economic premium principle. *ASTIN Bulletin*, 11:52–60, 1980.

[16] H. Bühlmann. The general economic premium principle. *ASTIN Bulletin*, 14:13–21, 1984.

[17] V.K. Chetty, D. Dasgupta, and T.E.S. Raghavan. Power and distribution of profits. Technical report, Indian Statistical Institute, Delhi Centre, New Delhi, India, 1976.

[18] L. Choquet. Theory of capacities. *Annals of Inst. Fourier*, 5:131–295, 1955.

[19] Y. Crama, P.L. Hammer, and R. Holzmann. A characterization of a cone of pseudo-boolean functions via supermodularity-type inequalities. In Kall, P. et al., editor, *Methoden in den Wirtschaftswissenschaften*, pages 53–55. Springer Verlag, Berlin, Heidelberg , 1989.

[20] I.J. Curiel and S. Tijs. Minimarg and maximarg operators. *J. Optimization Theory and Applications*, 71(2):277–287, 1991.

[21] M. Davis and M. Maschler. Existence of stable payoff configurations for cooperative games. In Martin Shubik, editor, *Essays in Mathematical Economics in Honor of Oskar Morgenstern*, pages 39–52. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1967.

[22] J.J.M. Derks. A short proof of the inclusion of the core in the Weber set. *Int. J. Game Theory*, 21:149–150, 1992.

[23] J. Derks, H. Haller, and H. Peters. The selectope for cooperative games. *Int. J. Game Theory*, 29(1):23–38, 2000.

[24] J. Derks and H. Peters. A note on a consistency property for permutations. Working paper, Universiteit Maastricht. Faculty of Economics and Business Administration, P.O.Box 616. NL-6200 MD Maastricht, The Netherlands, 1998.

[25] T.S.H. Driessen and S.H. Tijs. The core and the τ-value for cooperative games with coalition structure. In B. Dutta, D. Mookherjee, T. Parthasaraty, T.E.S. Raghavan, D. Ray, and S. Tijs, editors, *Game Theory and Economic Applications. Proceedings of the International Conference held at the Indian Statistical Institute, New Delhi, India, December 18–22, 1990*, pages 146–169. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

[26] T. Driessen and S. Tijs. Game-theoretic solutions for some economic situations. *Cahiers du Cent. Etud. Rech. Oper.*, 26:51–58, 1984.

[27] T. Driessen. *Cooperative Games, Solutions and Applications.* Kluwer Academic Publishers, 1988.

[28] P. Dubey. The Shapley value as aircraft landing fees - revisited. *Management Science*, 28:869–874, 1982.

[29] J. Edmonds. Submodular functions, matroids and certain polyhedra. In R. Guy, H. Hanani, V. Saver, and J. Schönheim, editors, *Combinatorial Structures and their Applications, proc. of a conference at the Univ. of Calgary, June 1969*, pages 69–87. Gordon and Breach, New York, 1970.

[30] V. Fragnelli, I. García-Jurado, H. Norde, F. Patrone, and S. Tijs. How to share railways infrastructure costs? In F. Patrone, I. García-Jurado, and S. Tijs, editors, *Contributions from Applied Game Theory*, pages 69–87. Kluwer, Dordrecht, The Nederlands, 1999.

[31] A. Frank. An algorithm for submodular functions on graphs. *Ann. Discrete Math.*, 16:97–120, 1982.

[32] L.A. Gerard-Varet and S. Zamir. Remarks on the reasonable set of outcomes in a general coalition function form game. *Int. J. Game Theory*, 16:123–143, 1987.

[33] H.U. Gerber. *An introduction to mathematical risk theory.* S. S. Huebner Foundation for Insurance Education, Wharton School, University of Pennsylvania, Philadelphia, Penn., 1979.

[34] G. Hamiache. A value with incomplete communication. *Games Econ. Behav.*, 26(1):59–78, 1999.

[35] P.L. Hammer, U.N. Peled, and S. Sorensen. Pseudo-Boolean functions and game theory. I: Core elements and Shapley value. *Cahiers du Cent. Etud. Rech. Oper.*, 19:159–176, 1977.

[36] J.C. Harsanyi. A simplified bargaining model for the n-person cooperative game. *Int. Econ. Review*, 4:194–220, 1963.

[37] S. Hart and A. Mas-Colell. Potential, value and consistency. *Econometrica*, 57:589–614, 1989.

[38] S. Hart. Advances in Value Theory. In T. Ichiishi, A. Neyman, and Y. Tauman, editors, *Game theory and applications, Proc. Int. Conf., Columbus/OH (USA) 1987*, pages 166–175, 1990.

[39] Chih-Ru Hsiao and T.E.S. Raghavan. Multi–choice cooperative games. In B. Dutta, D. Mookherjee, T. Parthasaraty, T.E.S. Raghavan, D. Ray, and S. Tijs, editors, *Game Theory and Economic Applications. Proceedings of the International Conference held at the Indian Statistical Institute, New Delhi, India, December 18–22, 1990*, pages 170–188. Springer–Verlag, Berlin, 1992.

[40] C. Hsiao and T. Raghavan. Shapley value for multi–choice cooperative games (i). *Games Econ. Behav.*, 5:240–256, 1993.

[41] T. Ichiishi. Super-modularity: Applications to convex games and to the algorithm for L.P. *J. Econ. Theory*, 25:283–286, 1981.

[42] T. Ichiishi. Comparative cooperative game theory. *Int. J. Game Theory*, 19(2):139–152, 1990.

[43] J.Ma. Izquierdo Aznar. *Análisis de soluciones para Juegos Cooperativos de valores medios crecientes respecto a un vector: Juegos Financieros*. PhD thesis, Universitat de Barcelona, Barcelona, 1996.

[44] J.M. Izquierdo and C. Rafels. Average Monotonic Cooperative Games. *Games Econ. Behav.*, to appear, 2001.

[45] E. Kalai and D. Samet. On weighted Shapley values. *Int. Journal Game Theory*, 16:205–222, 1987.

[46] K. Kikuta. The kernel for reasonable outcomes in a cooperative game. *Int. Journal Game Theory*, 26(1):51–59, 1997.

[47] J. Lemaire. An application of game theory: Cost allocation. *ASTIN Bulletin*, 14(1):61–81, 1984.

[48] J. Lemaire. Cooperative game theory and its insurance applications. *ASTIN Bulletin*, 21(1):17–40, 1991.

[49] A. Levy and R. McLean. Weighted coalition structure values. *Games Econ. Behav.*, 1:234–249, 1989.

[50] S.C. Littlechild and G. Owen. A simple expression for the Shapley value in a special case. *Management Science*, 20:370–372, 1973.

[51] S.C. Littlechild. A simple expression for the nucleolus in a special case. *Int. J. Game Theory*, 3:21–30, 1974.

[52] P. Madden. *Concavidad y optimización en microeconomía.* Alianza Editorial, Madrid, 1987.

[53] J. Marín-Solano and C. Rafels. Convexity versus average convexity: Pmas, the Shapley value and simple games. Documents de treball de la Div. de Ciències Jurídiques, Econòmiques i Socials, Universitat de Barcelona, Spain, 1996.

[54] F.J. Martínez-de-Albéniz and C. Rafels. On the intersection between the imputation set and the Weber set. *Annals of Operations Research*, (84):111–120, 1998.

[55] M. Maschler. An advantage of the bargaining set over the core. *J. Econ. Theory*, 13:184–192, 1976.

[56] R. McLean. Random order coalition structure values. *Int. J. Game Theory*, 20:109–127, 1991.

[57] J.W. Milnor and L.S. Shapley. Values of large games II: Oceanic games. *Math. Oper. Res.*, 3:290–307, 1978.

[58] J.W. Milnor. Reasonable outcomes for n-person games. Internal report, The Rand Corp., Santa Monica, Ca. , USA, 1952.

[59] H. Moulin. *Axioms of cooperative decision making.* Number 15 in Econometrica Society Monographs. Cambridge University Press, 1988.

[60] H. Moulin. *Cooperative Microeconomics: A Game-Theoretic Introduction.* Prentice Hall/ Harvester Wheatsheaf, 1995.

[61] R.B. Myerson. Values of games in partition function form. *Int. J. Game Theory*, 6(1):23–31, 1977.

[62] R.B. Myerson. Conference structures and fair allocation rules. *Int. J. Game Theory*, 9(3):169–182, 1980.

[63] J.F. Nash. The bargaining problem. *Econometrica*, 18:155–162, 1950.

[64] E. Navarro. *Tablas de mortalidad de la población española 1982. Metodología y fuentes.* Mapfre, 1991.

[65] J. von Neumann and O. Morgenstern. *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton Univ. Press, Princeton, New Jersey, 1944–1947.

[66] J. von Neumann. Zur Theorie der Gesellschaftspiele. *Math. Annalen*, 100:295–320, 1928.

[67] P. Newman. Some properties of concave functions. *J. Econ. Theory*, 1:291–314, 1969.

[68] H. Nikaido. *Convex structures and economic theory*. Academic Press, New York-London, 1968.

[69] A. van den Nouweland, P. Borm, and S. Tijs. Allocation rules for hypergraph communication situations. *Int. J. Game Theory*, 20(3):255–268, 1992.

[70] A. van den Nouweland and P. Borm. On the convexity of communication games. *Int. J. Game Theory*, 19:421–430, 1991.

[71] M. Núñez and C. Rafels. On extreme points of the core and reduced games. *Annals of Operations Research*, 84:121–133, 1998.

[72] B. O'Neill. A problem of rights arbitration in the Talmud. *Mathematical Social Sciences*, 2:345–371, 1982.

[73] G. Owen. Multilinear extensions of games. *Management Science*, 18(5):64–79, 1972.

[74] G. Owen. Values of games with a priori unions. In R Henn and O. Moeschlin, editors, *Math. Economics and Game Theory. Essays in Honor of O. Morgenstern*, pages 76–88. Springer-Verlag, Berlin, 1977.

[75] G. Owen. Values of graph-restricted games. *SIAM J. Algebraic Discrete Methods*, 7(2):210–220, 1986.

[76] G. Owen. *Game Theory*. Academic Press, New York, 3rd edition, 1995.

[77] J.C. Panzar and R.D. Willig. Free entry and the sustainability of natural monopoly. *Bell Journal of Economics*, (8):1–22, 1977.

[78] J.A.M. Potters and S.H. Tijs. The nucleolus of a matrix game and other nucleoli. *Mathematics of Operations Research*, 17(1):164–174, 1992.

[79] C. Rafels et al. *Jocs cooperatius i aplicacions econ=miques*. Edicions Universitat de Barcelona, 1999.

[80] C. Rafels and S. Tijs. On the cores of cooperative games and the stability of the Weber set. *Int. J. Game Theory*, 26:491–499, 1997.

[81] C. Rafels and N. Ybern. Even and odd marginal worth vectors, Owen's multilinear extension and convex games. *Int. J. Game Theory*, 24:113–126, 1995.

[82] R.A. Rosenbaum. Subadditive functions. *Duke Math. J.*, 17:227–247, 1950.

[83] J. Rosenmüller. L.P.-games with sufficiently many players. *Int. J. Game Theory*, 11:129–149, 1982.

[84] J. Rosenmüller. The role of nondegeneracy and homogeneity in n-person game theory: An equivalence theorem. *J. Economics*, 47:367–389, 1987.

[85] J. Rosenmüller. Discrete concepts in n-person game theory: Nondegeneracy and homogeneity. In Ichiishi, T. and Neyman, A. and Tauman, Y., editor, *Game theory and applications, Proc. Int. Conf., Columbus/OH (USA) 1987*, pages 216–231, 1990.

[86] A.E. Roth, editor. *The Shapley Value: Essays in Honor of L.S. Shapley.* Cambridge University Press, 1988.

[87] L.S. Shapley. The solutions of a symmetric market game. *Ann. Math. Studies*, 40:145–162, 1959.

[88] L.S. Shapley and M. Shubik. Pure competition, coalitional power and fair division. *Int. Econ. Review*, 10(3):337–362, 1969.

[89] L.S. Shapley. A value for n-person games. In H.W. Kuhn and A.W. Tucker, editors, *Contributions to the theory of games II*, pages 307–317. Princeton University Press, 1953.

[90] L.S. Shapley. On balanced sets and cores. *Naval Research Logistic Quarterly*, 14:453–460, 1967.

[91] L.S. Shapley. Cores of convex games. *Int. J. Game Theory*, 1(3):11–26, 1971.

[92] L. Shapley. *Additive and non-additive set-functions.* PhD thesis, Department of Mathematics, Princeton University, Princeton, N.J., 1953.

[93] W.W. Sharkey. Cooperative games with large cores. *Int. J. Game Theory*, 11:175–182, 1982.

[94] W.W. Sharkey and L.G. Telser. Supportable cost functions for the multiproduct firm. *J. Econ. Theory*, 18:23–37, 1978.

[95] W.W. Sharkey. *The Theory of Natural Monopoly.* Cambridge University Press, 1982.

[96] Y. Sprumont. Population monotonic allocation schemes for cooperative games with transferable utility. *Games Econ. Behav.*, 2(4):378–394, 1990.

[97] R.P. Stanley. *Enumerative Combinatorics*, volume I. Wadsworth & Brooks/Cole, 1986.

[98] J. Suijs. *Cooperative Decision Making in a Stochastic Environment.* PhD thesis, Katholieke Universiteit Brabant, Maastricht, The Netherlands, 1998.

[99] G.F. Thompson. *Airport costs and pricing.* PhD thesis, University of Birmingham, England, 1971.

[100] S.H. Tijs. Bounds for the core and the τ-value. In O. Moeschlin and D. Palaschke, editors, *Game Theory and Mathematical economics*, pages 123–132. North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1981.

[101] D.M. Topkis. *Supermodularity and Complementarity.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1998.

[102] N.N. Vorob'ev. *Game Theory.* Springer-Verlag, 1977.

[103] R.J. Weber. Probabilistic values for games. Technical report, Yale University, New Haven, Conn., USA, 1978.

[104] R.J. Weber. Probabilistic values for games. In A.E.Roth, editor, *The Shapley Value: Essays in Honor of L.S. Shapley*, pages 101–119. Cambridge University Press, 1988.

[105] R. Webster. *Convexity.* Oxford University Press, Oxford, 1994.

[106] E. Winter. A value for cooperative games with levels structure of cooperation. *Int. J. Game Theory*, 18(2):227–240, 1989.

[107] E. Winter. The consistency and potential for values of games with coalition structure. *Games Econ. Behav.*, 4(1):132–144, 1992.

[108] H.P. Young. *Cost allocation: methods, principles and applications.* North-Holland, Amsterdam, 1985.

[109] H.P. Young. Monotonic solutions of cooperative games. *Int. J. Game Theory*, 14:65–72, 1985.

[110] H.P. Young. Cost allocation. In *Handbook of Game Theory*, volume II. North-Holland, Amsterdam, 1992. chapter 34.

[111] H.P. Young. *Equity: in theory and practice.* A Russell Sage Foundation Book. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1994.