UNIVERSITAT DE BARCELONA

Estudi sobre la dinàmica dels sistemes estel·lars amb simetria cilíndrica

Ferran Sala Mirabet

ESTUDI SOBRE LA DINÀMICA DELS SISTEMES ESTEL·LARS AMB SIMETRIA CILÍNDRICA

Memòria presentada
per Ferran Sala per
optar al grau de
Doctor en Ciències
Secció de Matemàtiques.
Juny de 1986.

ÍNDEX.

INTRODUCCIÓ.

El propósit de l'astronomia estel.lar és l'estudi de l'estructura, els moviments i l'evolució dels sistemes estel.lars. La cinemàtica estel.lar i la dinàmica estel.lar són les encarregades d'estudiar el moviment global dels sistemes estel.lars i de les forces que hi actuen, considerant-los formats per un gran nombre d'objectes, les estrelles, que pel que fa referència al comportament de tipus estadístic considerarem amb propietats uniformes. El Sol forma part d'un d'aquests sistemes estel.lars, la galàxia anomenada Via Làctia, on ocupa una posició en el pla galàctic i considerablement allunyada del centre.

L'astronomia estel.lar depèn de les dades observacionals, sovint fragmentàries i de precisió insuficient, que esperem que en un próxim futur es vegin augmentades i millorades. Un paper important en aquesta millora el tindrà el catàleg obtingut com a resultat de la missió Hipparcos que s'està portant a terme per part de l'Agència Espacial Europea. Un altre pas fonamental el constitueix la formulació de models teórics que expliquin les dades observacionals de què es disposa, establerts a partir d'hipótesis adoptades com a conseqüència de quines hagin estat les dades obtingudes. De fet, Binney (1982) ha plantejat recentment la urgència de la construcció de models teórics provists de simetria axial.

L'objecte d'aquest treball ha estat l'establiment de dos d'aquests models, el segon d'abast més local i obtingut com a conseqüència del primer, que donen compte de la distribució de les velocitats de les estrelles dintre de la nostra galàxia d'acord amb les dades observacionals de què es diposa i que poden ésser igualment d'aplicació a altres galàxies.

El capítol 1 està dedicat a descriure els conceptes bàsics utilitzats en l'estudi de la dinàmica dels sistemes estel·lars, com ho són la funció de distribució de les velocitats, l'equació fonamental i les integrals primeres que pot presentar el sistema. En segon lloc es descriuen les hipòtesis de Chandrasekhar per a l'estudi dels sistemes estel·lars i s'introdueixen el tensor A, el vector $\underline{\Delta}$, el potencial U i la funció χ, que caracteritzen el problema. En tercer lloc s'estudien algunes propietats dels moments centrats de les funcions del tipus Schwarzschild generalitzat i es descriuen les bases en què s'expressen les distintes dades observacionals que figuren als catàlegs estel·lars. Finalment, s'aborda l'aproximació lineal del camp de velocitats estel·lars segons el mètode d'Ogorodnikov-Milne.

El capítol 2 està dedicat a l'estudi d'un model galàctic de Chandrasekhar, no estacionari i amb simetria cilíndrica en què les funcions del temps k_{ϖ} i k_{θ} són idènticament nul·les. Primerament es troben les formes del tensor A i del vector $\underline{\Delta}$. La determinació del potencial U i de la funció χ s'ha efectuat separant els casos corresponents a les funcions del temps k_1 i k_3 iguals (A) o distintes (B), tot distingint segons siguin proporcionals (B1) o no (B2). És especialment interessant la forma del potencial U trobada en el cas B2 i també el fet que l'existència d'una condició de compatibilitat ha permès l'obtenció de solucions per a les funcions k_1 i k_3. S'han determinat igualment les integrals primeres del model, la velocitat del centroide $\underline{V}_0$ i el diferencial del camp local de velocitats $D(\underline{V}_0)$ i s'han interpretat les relacions existents entre les seves components segons les equacions hidrodinàmiques de la dinàmica estel.lar.

El capítol 3 està dedicat a l'estudi d'un model galàctic de Chandrasekhar no estacionari, amb simetria cilíndrica i potencial separable, havent estat adoptada aquesta última hipótesi com a conseqüència de la forma obtinguda per al potencial en el cas B2 del capítol anterior, seguint la pauta marcada en el qual ha estat estudiat. S'han determinat igualment les equacions horàries del moviment de les estrelles, així com les projeccions de les seves trajectóries sobre el pla galàctic i sobre un pla meridià que gira amb la velocitat angular de la galàxia. El moviment dels centroides locals també ha estat estudiat, pel cas en què les funcions k_1 i k_3 són proporcionals. Finalment s'ha particularitzat el model per a una posició situada, com la del Sol, en el pla galàctic.

El capítol 4 ha estat dedicat a contrastar el model estudiat en el capítol anterior amb dades observacionals considerades representatives de l'entorn solar, obtingudes a partir d'una mostra d'estrelles de tipus espectrals F6 - F7, classe de lluminositat V i velocitat residual respecte el centroide de Delhaye inferior a 65 kms^{-1}. Els moments centrats fins a quart ordre obtinguts corroboren la validesa del model així com la situació del Sol en el pla galàctic. La determinació del diferencial del camp local de velocitats ha permès la descripció del comportament cinemàtic de la galàxia a l'entorn solar. Els resultats obtinguts presenten un notable acord amb els trobats per altres autors. Així mateix han estat determinats, per a la posició del Sol, altres paràmetres cinemàtics i dinàmics del model estudiat en el tercer capítol. Finalment han estat detallades les principals conclusions del present treball, essent possible destacar-ne la contribució a complertar l'estudi dels models de Chandrasekhar no estacionaris i amb simetria cilíndrica, començada per Català (1972), i la validesa d'un d'aquests models per a descriure el comportament cinemàtic i dinàmic de la galàxia a l'entorn solar.

No voldria acabar aquesta introducció sense agraïr al Doctor Juan José de Orús la direcció d'aquest treball, així com els seus valuosos consells i orientacions. També voldria agraïr els comentaris dels amics Gerard Gómez i Carles Simó sobre el seu contingut, així com l'acollida amb que l'ha rebut el Departament d'Equacions Funcionals. Agraeixo finalment als membres del Departament de Física de la Terra i del Cosmos, del qual soc membre, la seva ajuda, i molt especialment la dels amics Pere Cortés, Cesca Figueras, Jorge Núñez, Gaspar Rosselló i Jordi Torra.

1. CONCEPTES BÀSICS EN LA DINAMICA DELS SISTEMES ESTEL.LARS.

Aquest capítol està dedicat a descriure els conceptes bàsics utilitzats en l'estudi de la dinàmica dels sistemes estel·lars. En primer lloc s'estudia l'anomenada equació fonamental de la dinàmica estel·lar (1.4) que ens diu que, en absència de passos i col·lisions, la funció de distribució de velocitats del sistema estel·lar compleix el teorema de Liouville. A continuació s'aborda la importància del concepte d'integral primera en la determinació del moviment del sistema estel·lar, així com les hipòtesis que cal efectuar sobre la forma del potencial que el governa per tal d'obtenir les integrals primeres clàssiques de l'energia (1.9), de les àrees (1.10) i la descrita per (1.12).

El segon apartat està dedicat a les hipòtesis de Chandrasekhar per a l'estudi dels sistemes estel·lars, introduïnt el tensor A, el vector $\underline{\Delta}$, el potencial U i la funció χ que caracteritzen el problema, i plantejant finalment les vint equacions (1.23) ÷ (1.26) que caldrà resoldre per a descriure el sistema estel·lar.

En el tercer apartat s'estudien algunes de les propietats dels moments centrats de les funcions del tipus Schwarzschild generalitzat a les quals pertany la funció de distribució de velocitats residuals del sistema estel·lar establerta a partir de les hipòtesis de Chandrasekhar, segons les quals, coneixent el tensor A i el vector $\underline{\Delta}$ es poden determinar la densitat estel·lar (1.27) i els moments de segon ordre (1.28) i de quart ordre (1.29). Seguidament es descriuen les bases en què s'expressen les dades observacionals que figuren als catàlegs estel·lars i les distintes formes que adopten les seves expressions.

Finalment, en el quart apartat s'aborda l'aproximació lineal del camp de velocitats estel·lars segons el mètode d'Ogorodnikov-Milne, arribant-se a la formulació de les equacions la resolució de les quals permetrà la seva determinació.

1.1. Equació fonamental i integrals primeres.

Considerat un conjunt d'estrelles de la nostra galàxia, designarem per $\underline{r}$ i per $\underline{V}$ la posició i la velocitat galactocèntriques d'una estrella qualsevol. L'estat de moviment d'aquest conjunt d'estrelles el descriurem per mitjà d'una funció de distribució $f(t,\underline{r},\underline{V})$ de manera que el nombre d'estrelles $d\nu$ que en un instant t tenen la seva posició entre $\underline{r}$ i $\underline{r}+d\underline{r}$ i la seva velocitat entre $\underline{V}$ i $\underline{V}+d\underline{V}$ serà

$$d\nu = f(t,\underline{r},\underline{V})\, d\underline{r}\, d\underline{V}$$

Aleshores, el nombre d'estrelles per unitat de volum serà

$$N(t,\underline{r}) = \int_{\underline{V}} f(t,\underline{r},\underline{V})\, d\underline{V}$$

havent-se realitzat la integració sobre tot l'espai de velocitats $\underline{V}$, és a dir, R^3, i la velocitat del centroide, o centre de distàncies mitges del conjunt,

$$\underline{V}_0(t,\underline{r}) = \frac{1}{N(t,\underline{r})} \int_{\underline{V}} \underline{V}\, f(t,\underline{r},\underline{V})\, d\underline{V}$$

Definim moments centrats d'ordre n de la distribució de velocitats com els tensors d'ordre n

$$\mu_n(t,\underline{r}) = \frac{1}{N(t,\underline{r})} \int_{\underline{V}} (\underline{V}-\underline{V}_0(t,\underline{r}))^n \, f(t,\underline{r},\underline{V}) \, d\underline{V} \tag{1.1}$$

Si aquest conjunt d'estrelles constitueix un sistema conservatiu, sense passos ni col·lisions, tindrem que, aplicant el teorema fonamental de la mecànica estadística, la funció de distribució $f(t,\underline{r},\underline{V})$ verificarà l'equació de continuïtat en l'espai de les fases $\underline{r},\underline{V}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla_{\underline{r}} \cdot (f\dot{\underline{r}}) + \nabla_{\underline{V}} \cdot (f\dot{\underline{V}}) = 0 \tag{1.2}$$

Aquesta hipòtesi queda justificada pel fet que la distància per sota de la qual no serien negligibles els passos d'estrelles és, excepte per als punts situats en el nucli de la galàxia, de l'ordre d'una seixantena part de la distància mitja entre les estrelles (Ogorodnikov, 1965).

Com que les forces que governen el moviment de les estrelles són de caràcter gravitatori, degudes, per tant, a un potencial per unitat de massa $U(t,\underline{r})$ funció del temps t i de la posició $\underline{r}$, tindrem

$$\dot{\underline{V}} = -\nabla_{\underline{r}} U \tag{1.3}$$

i donat que $\underline{r}$ i $\underline{V}$ són independents, tindrem igualment

$$\nabla_{\underline{r}} \cdot \underline{V} = 0$$

$$\nabla_{\underline{V}} \cdot \dot{\underline{V}} = - \nabla_{\underline{V}} \cdot \nabla_{\underline{r}} U = 0$$

Aleshores, podem escriure (1.2) com

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{\partial f}{\partial t} + \underline{V}.\nabla_{\underline{r}} f + \underline{\dot{V}}.\nabla_{\underline{V}} f = 0 \tag{1.4}$$

expressió coneguda com equació fonamental de la dinàmica estel·lar. Aquesta equació fonamental constitueix l'anomenat teorema de Liouville: la funció de distribució es conserva al llarg de les trajectòries de les estrelles en l'espai de les fases.

En un sistema de coordenades cilíndriques que gira amb velocitat Θ al voltant de l'eix de simetria z, tenint en compte (1.3), tindrem

$$\underline{r} = \begin{bmatrix} \varpi \\ \theta \\ z \end{bmatrix} \qquad \underline{V} = \begin{bmatrix} \Pi \\ \Theta \\ Z \end{bmatrix} \qquad \underline{\dot{V}} = \begin{bmatrix} -\dfrac{\partial U}{\partial \varpi} + \dfrac{\Theta^2}{\varpi} \\ -\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial U}{\partial \theta} - \dfrac{\Pi\Theta}{\varpi} \\ -\dfrac{\partial U}{\partial z} \end{bmatrix}$$

i aleshores, l'equació fonamental (1.4) s'escriurà

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \Pi \frac{\partial f}{\partial \varpi} + \frac{\Theta}{\varpi}\frac{\partial f}{\partial \theta} + Z\frac{\partial f}{\partial z} - \left(\frac{\partial U}{\partial \varpi} - \frac{\Theta^2}{\varpi}\right)\frac{\partial f}{\partial \Pi} - \left(\frac{1}{\varpi}\frac{\partial U}{\partial \theta} + \frac{\Pi\Theta}{\varpi}\right)\frac{\partial f}{\partial \Theta} - \frac{\partial U}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial Z} = 0 \tag{1.5}$$

essent el seu sistema diferencial ordinari associat

$$dt = \frac{d\varpi}{\Pi} = \frac{d\theta}{\frac{\Theta}{\varpi}} = \frac{dz}{Z} = \frac{d\Pi}{-\frac{\partial U}{\partial \varpi} + \frac{\Theta^2}{\varpi}} = \frac{d\Theta}{-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial U}{\partial \theta} - \frac{\Pi\Theta}{\varpi}} = \frac{dZ}{-\frac{\partial U}{\partial z}} \tag{1.6}$$

L'equació fonamental (1.5) és una equació en derivades parcials en les set variables t, ϖ , θ , z, Π , Θ , Z. La seva solució general es pot escriure en termes de sis integrals primeres independents del seu sistema associat (1.6), constituït precisament per les equacions del moviment. Així doncs, si tenim

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \text{constant} \\
&\vdots \\
I_6 &= \text{constant}
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

corresponents a la solució més general de (1.6), la solució general de (1.5) serà

$$f(t,\underline{r},\underline{V}) = f(I_1,\ldots,I_6) \tag{1.8}$$

en què la f del segon membre és una funció arbitrària dels arguments especificats. El sistema, però, no és globalment integrable, no existint sis integrals primeres analítiques de tipus general, encara que localment poguem determinar-ne solucions.

Per tant, el problema és lluny d'haver estat resolt: en realitat (1.8) representa només una solució formal, ja que podriem donar la forma explícita de la solució general només en el cas en què coneguéssim les sis integrals primeres (1.7).

Si adoptem restriccions per al potencial $U(t,\underline{r})$ podrem trobar la forma explícita d'alguna d'aquestes integrals primeres, sempre a canvi d'una pèrdua de generalitat. Examinem, no obstant, alguns casos d'aquestes integrals primeres que es poden trobar explícitament i les restriccions sobre el potencial $U(t,\underline{r})$ que cal fer per a poder-les determinar.

Si suposem que el potencial $U(t,\underline{r})$ es estacionari, és a dir, que

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 0$$

aleshores, obtenim

$$I_1 \equiv V^2 + 2U = \text{constant} \tag{1.9}$$

que, excepte un factor 2, és l'anomenada integral de l'energia.

Quan suposem que el potencial $U(t,\underline{r})$ presenta simetria cilíndrica, és a dir, que

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$$

aleshores, tenim

$$I_2 \equiv \varpi\theta = \text{constant} \tag{1.10}$$

que és l'anomenada integral de les àrees.

Si suposem ara que el potencial $U(t,\underline{r})$ és separable de la forma

$$U(t,\underline{r}) = U_1(t,\varpi,\theta) + U_2(z) \tag{1.11}$$

hipótesi que resulta apropiada quan es consideren posicions a poca distància del pla galàctic, que, com després es veurà, és la situació del Sol dins de la nostra galàxia, aleshores, es compleix

$$I_3 \equiv Z^2 + 2U_2(z) = \text{constant} \tag{1.12}$$

que és, igualment excepte un factor 2, la integral corresponent a l'energia del moviment perpendicular al pla galàctic, que, donada la separabilitat del potencial $U(t,\underline{r})$ formulada a (1.11), és un dels dos en què es desdobla el sistema.

1.2. Hipótesis de Chandrasekhar per a l'estudi dels sistemes estel.lars.

L'equació fonamental (1.5) pot ésser considerada com una equació en derivades parcials, lineal i homogènia per a determinar la funció de distribució f a partir del potencial U: problema directe de Jeans, o bé com una equació en derivades parcials, lineal i no homogènia per a determinar el potencial U a partir de la funció de distribució f: problema invers de Jeans. Aquest problema invers de Jeans ha jugat un paper important en el desenvolupament históric de la dinàmica estel.lar, havent estat objecte de nombrosos treballs per part d'Eddington (1921), Oort (1928) i, posteriorment, per part de Chandrasekhar (1942) i von der Pahlen (1947), que desenvoluparen d'una forma gairebé paral.lela dues teories basades en prácticament les mateixes hipótesis.

En el cas de Chandrasekhar aquestes hipótesis són:

1) Per cada punt es pot definir de manera única un centroide local la velocitat $\underline{V}_o$ del qual és una funció contínua del temps t i de la posició $\underline{r}$. Posteriorment, veurem que aquesta funció no solament serà contínua sinó que haurà d'ésser, també, diferenciable.

2) La funció de distribució $f(t,\underline{r},\underline{V})$ és del tipus Schwarzschild generalitzat, és a dir,

$$f(t,\underline{r},\underline{V}) = f(Q+\sigma) \qquad (1.13)$$

on

$$Q = \underline{v}^T.A.\underline{v} \qquad (1.14)$$

essent

$$\underline{v} = \underline{V} - \underline{V}_0 \tag{1.15}$$

la velocitat residual d'una estrella,

$$A = A(t,\underline{r}) \tag{1.16}$$

un tensor simètric de segon ordre, funció del temps t i de la posició $\underline{r}$, i

$$\sigma = \sigma(t,\underline{r}) \tag{1.17}$$

un escalar, funció igualment del temps t i de la posició $\underline{r}$.

3) Els moviments de les estrelles estan governats per un potencial per unitat de massa $U(t,\underline{r})$, la qual cosa equival a dir que es verifica l'equació fonamental (1.4).

Segons aquestes hipòtesis la pregunta és: en quines condicions l'equació fonamental (1.4) admet una solució de la forma (1.13).

Doncs bé, a partir de (1.4) i (1.13) tindrem, segons Orús (1977),

$$\frac{Df}{Dt} \equiv \frac{df}{d(Q+\sigma)} \cdot \frac{D(Q+\sigma)}{Dt} = 0$$

i, per tant,

$$\frac{D(Q+\sigma)}{Dt} \equiv \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial t} + \underline{V}.\nabla_{\underline{r}}(Q+\sigma) - \nabla_{\underline{r}}U.\nabla_{\underline{V}}(Q+\sigma) = 0 \tag{1.18}$$

mentre que, a partir de (1.14) ÷ (1.17),

$$Q + \sigma = (\underline{V}-\underline{V}_0)^T.A.(\underline{V}-\underline{V}_0) + \sigma \tag{1.19}$$

Si definim ara

$$\underline{\Delta} = A.\underline{V}_0 \tag{1.20}$$

$$-\chi = \underline{V}_0^T.A.\underline{V}_0 + \sigma = \underline{\Delta}.\underline{V}_0 + \sigma \tag{1.21}$$

aleshores, (1.19) pren la forma

$$Q + \sigma = \underline{V}^T.A.\underline{V} - 2\underline{\Delta}.\underline{V} - \chi \tag{1.22}$$

Introduïm ara, segons Orús (1952), el tensor simètric de tercer ordre def A, deformació de A,

$$\text{def } A \equiv \frac{1}{3}\,[\nabla A + (\nabla A)^T + (\nabla A)^{TT}]$$

les components del qual són

$$(\text{def } A)_{ijk} = \frac{1}{3}\,\left(\frac{\partial A_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial A_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_k}\right)$$

i el tensor simètric de segon ordre def $\underline{\Delta}$, deformació de $\underline{\Delta}$,

$$\text{def } \underline{\Delta} \equiv \frac{1}{2}\,[\nabla\underline{\Delta} + (\nabla\underline{\Delta})^T]$$

de components

$$(\text{def } \underline{\Delta})_{ij} = \frac{1}{2}\,\left(\frac{\partial \Delta_j}{\partial x_i} + \frac{\partial \Delta_i}{\partial x_j}\right)$$

essent el vector def χ, deformació de χ, coincident amb $\nabla\chi$, gradient de χ,

$$(\text{def } \chi)_i = (\nabla\chi)_i = \frac{\partial \chi}{\partial x_i}$$

Doncs bé, si substituïm (1.22) a (1.18) obtindrem una forma de tercer grau en $\underline{V}$ que haurà d'ésser idènticament nul·la. Aleshores, obtindrem

$$\operatorname{def} A = 0 \tag{1.23}$$

equació tensorial que equival a deu equacions escalars,

$$\operatorname{def} \underline{\Delta} = \frac{1}{2}\frac{\partial A}{\partial t} \tag{1.24}$$

equació tensorial que equival a sis equacions escalars,

$$A.\nabla U + \frac{\partial \underline{\Delta}}{\partial t} = -\frac{1}{2}\nabla \chi \tag{1.25}$$

equació vectorial que equival a tres equacions escalars, i

$$\underline{\Delta}.\nabla U = \frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial t} \tag{1.26}$$

El problema quedarà, doncs, solucionat quan s'hagin resolt les vint equacions escalars (1.23) ÷ (1.26).

1.3. Moments centrats de la distribució de velocitats.

Si, segons Orús (1977), efectuem un canvi de base de manera que la forma quadràtica (1.14) es transformi en una esfera

$$Q = s^2$$

i anomenem

$$\Phi_n(\sigma) = 2 \int_0^{\infty} s^{n+2} f(s^2+\sigma)\, ds$$

aleshores tindrem que

$$\mu_0 = \frac{2\pi}{N(\det A)^{1/2}} \Phi_0(\sigma)$$

d'on, donat que $\mu_0 = 1$, tindrem que el nombre d'estrelles per unitat de volum s'expressarà

$$N = \frac{2\pi}{(\det A)^{1/2}} \Phi_0(\sigma) \tag{1.27}$$

i els moments de segon ordre i de quart prendran la forma

$$\mu_{ij} = \frac{1}{3} \frac{\Phi_2(\sigma)}{\Phi_0(\sigma)} A^{-1}_{ij} \tag{1.28}$$

$$\mu_{ijkl} = \frac{1}{15} \frac{\Phi_4(\sigma)}{\Phi_0(\sigma)} (A^{-1}_{ij}A^{-1}_{kl} + A^{-1}_{ik}A^{-1}_{jl} + A^{-1}_{il}A^{-1}_{jk}) \tag{1.29}$$

que, segons (1.28), podem expressar

$$\mu_{ijkl} = \frac{3}{5} \frac{\Phi_0(\sigma)\, \Phi_4(\sigma)}{[\Phi_2(\sigma)]^2} (\mu_{ij}\mu_{kl} + \mu_{ik}\mu_{jl} + \mu_{il}\mu_{jk}) \tag{1.30}$$

a més de

$$\mu_n = 0 \quad \text{per} \quad n = \hat{2} + 1 \tag{1.31}$$

Les bases en què s'expressen les components U, V, W de les velocitats heliocèntriques $\underline{W}$ de les estrelles, així com els seus moviments propis μ_α i μ_δ i les seves velocitats radials V_ρ que figuren als catàlegs estel·lars i a partir dels quals les obtindrem són (Orús, 1977):

Base $B_1 \equiv (\hat{\underline{\rho}}, \hat{\underline{\alpha}}, \hat{\underline{\delta}})$, lligada a cada estrella E, de vectors unitaris $\hat{\underline{\rho}}$ en la direcció Sol - estrella, i $\hat{\underline{\alpha}}$ i $\hat{\underline{\delta}}$ tangents a les línies coordenades esfèriques equatorials heliocèntriques, en les direccions creixents de l'ascensió recta α i de la declinació δ, respectivament. És la utilitzada per a expressar els moviments propis i les velocitats radials de les estrelles.

Base $B_2 \equiv (\hat{\underline{e}}_1, \hat{\underline{e}}_2, \hat{\underline{e}}_3)$, ortonormal equatorial heliocèntrica, directa, amb $\hat{\underline{e}}_1$ en la direcció d'Aries i $\hat{\underline{e}}_3$ en la direcció del pol nord equatorial. En aquesta base s'expressen la velocitat residual del Sol i les correccions a les constants de la precessió.

Base $B_3 \equiv (\hat{\underline{g}}_1, \hat{\underline{g}}_2, \hat{\underline{g}}_3)$, ortonormal galàctica heliocèntrica, directa, de vectors $\hat{\underline{g}}_1$ paral·lel al pla galàctic i dirigit cap a l'eix de gir de la galàxia i $\hat{\underline{g}}_3$ dirigit cap al pol nord galàctic. És la utilitzada per a expressar, a més de la velocitat heliocèntrica del centroide, els moments de la distribució de velocitats, així com el diferencial del camp d'aquestes velocitats.

Base $B_4 \equiv (\hat{\underline{\varpi}}, \hat{\underline{\theta}}, \hat{\underline{z}})$, retrògrada, on

$$\begin{aligned} \hat{\underline{\varpi}} &= -\hat{\underline{g}}_1 \\ \hat{\underline{\theta}} &= \hat{\underline{g}}_2 \\ \hat{\underline{z}} &= \hat{\underline{g}}_3 \end{aligned}$$

en la qual $\hat{\underline{\theta}}$ té el sentit de rotació de la galàxia. És l'adequada per a expressar el moviments globals de la galàxia.

A la figura 1.1 es poden veure les bases B_1 i B_2 mentre que a la figura 1.2 estan representades les bases B_3 i B_4.

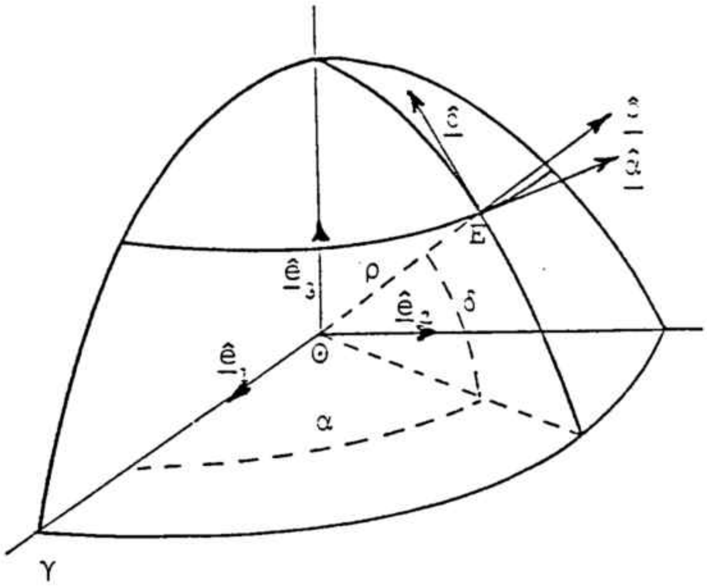

Figura 1.1. Sistemes de referència B_1 i B_2.

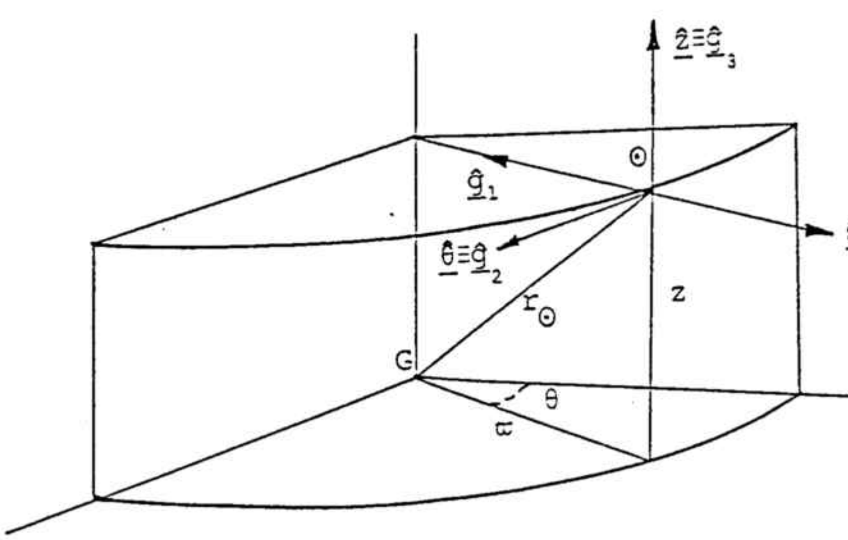

Figura 1.2. Sistemes de referència B_3 i B_4.

La velocitat heliocèntrica $\underline{W}$ d'una estrella serà

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} V_\rho \\ \kappa\rho\mu_\alpha \cos\delta \\ \kappa\rho\mu_\delta \end{bmatrix}_{B_1}$$

on ρ és la distància heliocèntrica medida en kpc, mentre que μ_α i μ_δ ho estan en "/secle, V_ρ en km/s, i

$$\kappa = 47.41 \frac{\mathrm{kms}^{-1}}{\text{"secle}^{-1}\mathrm{kpc}}$$

és el factor de conversió d'unitats.

Anomenant l la longitud galàctica, b la latitud galàctica i ϕ l'angle paral·làctic d'una estrella, considerem el sistema de referència de Blaauw (Allen, 1976) en què el pol nord galàctic P té coordenades equatorials

$$\alpha_P = 12\ \mathrm{h}\ 49\ \mathrm{m}$$
$$\delta_P = 27^\circ\ 24'$$

i el pol nord equatorial Q té longitud galàctica

$$l_Q = 123^\circ$$

Aleshores (Orús, 1977),

$$\begin{aligned}
\cos b \sin (l - l_Q) &= -\cos\delta \sin(\alpha - \alpha_P) \\
\cos b \cos (l - l_Q) &= -\cos\delta \sin\delta_P \cos(\alpha - \alpha_P) + \cos\delta_P \sin\delta \\
\sin b &= \cos\delta \cos\delta_P \cos(\alpha - \alpha_P) + \sin\delta_P \sin\delta \\
\cos b \sin\phi &= \cos\delta_P \sin(\alpha - \alpha_P) \\
\cos b \cos\phi &= -\cos\delta_P \sin\delta \cos(\alpha - \alpha_P) + \sin\delta_P \cos\delta
\end{aligned}$$

Si anomenem

$$\underline{W} = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}_{B_3} \tag{1.32}$$

es demostra (Núñez, 1981; Torra, 1984) que l'expressió de $\underline{W}$ en la base B_3 és

$$\begin{aligned} U &= V_\rho \cos l \cos b + \kappa\rho\mu_\alpha \cos\delta\,(\cos l \sin b \sin\phi - \sin l \cos\phi) - \\ &\quad - \kappa\rho\mu_\delta\,(\cos l \sin b \cos\phi + \sin l \sin\phi) \\ V &= V_\rho \sin l \cos b + \kappa\rho\mu_\alpha \cos\delta\,(\sin l \sin b \sin\phi + \cos l \cos\phi) - \\ &\quad - \kappa\rho\mu_\delta\,(\sin l \sin b \cos\phi - \cos l \sin\phi) \\ W &= V_\rho \sin b - \kappa\rho\mu_\alpha \cos\delta \cos b \sin\phi + \kappa\rho\mu_\delta \cos b \cos\phi \end{aligned} \tag{1.33}$$

Si considerem la velocitat heliocèntrica $\underline{W}_0$ del centroide d'un cert conjunt de k estrelles

$$\underline{W}_0 = \begin{bmatrix} U_0 \\ V_0 \\ W_0 \end{bmatrix}_{B_3} \tag{1.34}$$

tindrem que, tal com posa de manifest la figura 1.3,

$$\underline{W}_0 = -\underline{v}_\odot \tag{1.35}$$

i, per tant, podrem expressar (1.1), de manera discreta, com

$$\mu_n = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (\underline{W}_i - \underline{W}_0)^n \tag{1.36}$$

i, segons (1.32) i (1.34), com

$$\mu_{abc} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} (U_i - U_0)^a (V_i - V_0)^b (W_i - W_0)^c \tag{1.37}$$

amb $a + b + c = n$.

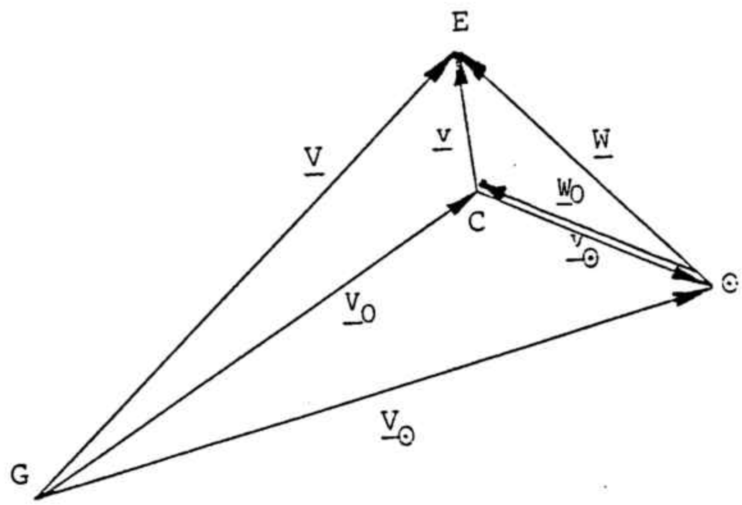

Figura 1.3. Diagrama de velocitats: G, centre galàctic; E, estrella; C, centroide; ⊙, Sol.

Els moments (1.37) són els moments de la mostra de k estrelles objecte d'estudi i són estimadors esbiaixats dels moments de la població (Kendall & Stuart, 1977). Donat que la mostra contindrà només alguns centenars d'estrelles els errors que s'introdueixen al considerar-los directament com estimadors dels moments de la població són inferiors a aquells que provenen de la grandària finita de la mostra. Per tant (Núñez, 1981; Torra, 1984), s'adopten els moments (1.37) com estimadors dels moments de la població.

Es considera que els moments (1.37) estan afectats únicament d'errors de tipus estadístic, donada la influència inferior al 10 % de l'error total que tenen els errors observacionals de les magnituds que intervenen en el seu càlcul (Núñez, 1981; Torra, 1984).

1.4. Aproximació lineal del camp de velocitats.

L'estudi del camp de velocitats a través d'un model tridimensional, que generalitzava el model pla d'Oort - Lindblad va ésser desenvolupat per Ogorodnikov (1932) i per Milne (1935).

Expressem la velocitat heliocèntrica $\underline{W}$ d'una estrella respecte un sistema inercial com

$$\underline{W} = \underline{W}^F + \underline{\omega}^F \wedge \underline{\rho} \tag{1.38}$$

on $\underline{W}^F$ és la velocitat de l'estrella respecte un sistema fonamental heliocèntric, expressant-se els termes precessionals del sistema fonamental respecte l'inercial (Núñez, 1976) com

$$\underline{\omega}^F = \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta n \\ -\Delta k \end{bmatrix}_{B_2} \tag{1.39}$$

i essent $\underline{\rho}$ el vector posició heliocèntrica de l'estrella, és a dir,

$$\underline{\rho} = \underline{r} - \underline{r}_{\odot}$$

Aleshores, a partir de la figura 1.3, tindrem, segons (1.38),

$$\underline{V} = \underline{V}_{\odot} + \underline{W}^F + \underline{\omega}^F \wedge \underline{\rho} \tag{1.40}$$

a més de

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \underline{V}_0(\underline{r}_{\odot} + \underline{\rho}) + \underline{v} \\ \underline{V}_{\odot} &= \underline{V}_0(\underline{r}_{\odot}) + \underline{v}_{\odot} \end{aligned} \tag{1.41}$$

Efectuem ara una aproximació lineal del camp de velocitats mitjançant $D(\underline{V}_\odot(\underline{r}_\odot))$, diferencial del camp de velocitats en la posició del Sol, que podrem descomposar en les seves parts simètrica $S(\underline{r}_\odot)$ i anti-simètrica $H(\underline{r}_\odot)$, estant aquesta última associada a una rotació definida per $\underline{\Omega}$.

Si introduïm

$$\underline{\omega} = \underline{\Omega} - \underline{\omega}^F \tag{1.42}$$

aleshores, de (1.40) ÷ (1.42), s'obté (Rius, 1974) que

$$\underline{W}^F = \underline{v} - \underline{v}_\odot + \underline{\omega} \wedge \underline{\rho} + S(\underline{r}_\odot)\underline{\rho} \tag{1.43}$$

Donat que l'expressió de $D(\underline{V}_\odot)$ és (Orús, 1977)

$$D(\underline{V}_0) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} & -\dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial \Pi_0}{\partial \theta} + \dfrac{\Theta_0}{\varpi} & -\dfrac{\partial \Pi_0}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} & \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} + \dfrac{\Pi_0}{\varpi} & \dfrac{\partial \Theta_0}{\partial z} \\ -\dfrac{\partial Z_0}{\partial \varpi} & \dfrac{1}{\varpi}\dfrac{\partial Z_0}{\partial \theta} & \dfrac{\partial Z_0}{\partial z} \end{bmatrix}_{B_3}$$

aleshores, les components del tensor S i del vector $\underline{\Omega}$ són

$$S_{11} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} \quad S_{12} = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \Pi_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} - \frac{\Theta_0}{\varpi}\right) \quad S_{13} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} + \frac{\partial Z_0}{\partial \varpi}\right)$$

$$S_{22} = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial \Theta_0}{\partial \theta} + \frac{\Pi_0}{\varpi} \quad S_{23} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial z} + \frac{1}{\varpi}\frac{\partial Z_0}{\partial \theta}\right) \quad S_{33} = \frac{\partial Z_0}{\partial z} \tag{1.44}$$

$$\Omega_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial z} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial Z_0}{\partial \theta}\right) \quad \Omega_2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} - \frac{\partial Z_0}{\partial \varpi}\right) \quad \Omega_3 = -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \Pi_0}{\partial \theta} + \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} + \frac{\Theta_0}{\varpi}\right)$$

(1.45)

on, quan es compleix la hipòtesi de simetria cilíndrica, S_{12}, Ω_3 i S_{23} són les clàssiques constants d'Oort A, B i C, respectivament.

Tenim, per tant, que l'equació (1.43) constitueix una equació vectorial de condició per a cada una de les k estrelles de la mostra, havent estat considerada la seva velocitat residual $\underline{v}$ com l'error efectuat en la determinació de la velocitat heliocèntrica de l'estrella respecte un sistema fonamental

$$\underline{W}^F = \begin{bmatrix} V_\rho \\ \kappa\rho\mu_\alpha \cos\delta \\ \kappa\rho\mu_\delta \end{bmatrix}_{B_1}$$

a partir de la velocitat residual del Sol

$$\underline{v}_\odot = \begin{bmatrix} x_\odot \\ y_\odot \\ z_\odot \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} u_\odot \\ v_\odot \\ w_\odot \end{bmatrix}_{B_3} \tag{1.46}$$

del vector (1.42)

$$\underline{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix}_{B_2}$$

de la posició heliocèntrica de l'estrella

$$\underline{\rho} = \begin{bmatrix} \rho\cos\delta\cos\alpha \\ \rho\cos\delta\sin\alpha \\ \rho\sin\delta \end{bmatrix}_{B_2} = \begin{bmatrix} \rho\cos b\cos l \\ \rho\cos b\sin l \\ \rho\sin b \end{bmatrix}_{B_3}$$

i de les components (1.44) del tensor $S(\underline{r}_\odot)$. Aleshores (Núñez, 1981; Torra, 1984), obtindrem

$$\frac{1}{\rho} V_\rho = \frac{1}{\rho} (- \cos\alpha \cos\delta\, x_\odot - \sin\alpha \cos\delta\, y_\odot - \sin\delta\, z_\odot) +$$
$$+ \cos^2 b \cos^2 l\, (S_{11} - S_{33}) + \cos^2 b \sin 2l\, S_{12} +$$
$$+ \sin 2b \cos l\, S_{13} + \cos^2 b \sin^2 l\, (S_{22} - S_{33}) +$$
$$+ \sin 2b \sin l\, S_{23} + S_{33}$$

$$\mu_\alpha \cos\delta = \frac{1}{\rho} (\sin\alpha\, x_\odot - \cos\alpha\, y_\odot) - \cos\alpha \sin\delta\, \omega_1 -$$
$$- \sin\alpha \sin\delta\, \omega_2 + \cos\delta\, \omega_3 +$$
$$+ \frac{1}{2} (\cos^2 l \sin 2b \sin\phi - \sin 2l \cos b \cos\phi\,)\, (S_{11} - S_{33}) +$$
$$+ (\cos 2l \cos b \cos\phi + \frac{1}{2} \sin 2l \sin 2b \sin\phi)\, S_{12} -$$
$$- (\cos l \cos 2b \sin\phi + \sin l \sin b \cos\phi)\, S_{13} +$$
$$+ \frac{1}{2} (\sin 2l \cos b \cos\phi + \sin^2 l \sin 2b \sin\phi)\, (S_{22} - S_{33}) +$$
$$+ (\cos l \sin b \cos\phi - \sin l \cos 2b \sin\phi)\, S_{23}$$

$$\mu_\delta = \frac{1}{\rho} (\cos\alpha \sin\delta\, x_\odot + \sin\alpha \sin\delta\, y_\odot - \cos\delta\, z_\odot) + \qquad (1.47)$$
$$+ \sin\alpha\, \omega_1 - \cos\alpha\, \omega_2 -$$
$$- \frac{1}{2} (\sin 2l \cos b \sin\phi + \cos^2 l \sin 2b \cos\phi)\, (S_{11} - S_{33}) +$$
$$+ (\cos 2l \cos b \sin\phi - \frac{1}{2} \sin 2l \sin 2b \cos\phi)\, S_{12} +$$
$$+ (\cos l \cos 2b \cos\phi - \sin l \sin b \sin\phi)\, S_{13} +$$
$$+ \frac{1}{2} (\sin 2l \cos b \sin\phi - \sin^2 l \sin 2b \cos\phi)\, (S_{22} - S_{33}) +$$
$$+ (\sin l \cos 2b \cos\phi + \cos l \sin b \sin\phi)\, S_{23}$$

i, per mitjà de la seva resolució simultània podrem determinar la totalitat de les incógnites que hi apareixen.

2. MODEL GALÀCTIC NO ESTACIONARI AMB SIMETRIA CILÍNDRICA.

Aquest capítol està dedicat a l'estudi d'un model de Chandrasekhar, no estacionari i amb simetria cilíndrica en què les funcions del temps k_5 i k_6 són idènticament nul·les. Les expressions per al tensor A i el vector $\underline{\Delta}$ figuren a (2.5) i (2.6) després d'haver estat resoltes les setze equacions (1.23) i (1.24). Es determina igualment que les funcions del temps k_1 i k_3 i les constants k_2 i k_4 han d'ésser positives.

El segon apartat està dedicat a la resolució de les quatre equacions (1.25) i (1.26) que permetran la determinació del potencial U i de la funció χ. En el cas en què les funcions k_1 i k_3 són iguals s'arriba a les solucions (2.30) i (2.34). Quan k_1 i k_3 són distintes, després de transformar el sistema (1.25) a la seva forma canònica s'obtenen les solucions (2.44) i (2.45). El fet que el model sigui no estacionari planteja la condició d'integrabilitat (2.49). Suposant ara la funció F, que apareix en la determinació tant de U com de χ, desenvolupable en sèrie de potències, s'arriba al sistema d'equacions en derivades parcials i d'equacions en diferències (2.53) ÷ (2.57). Les solucions (2.60) i (2.61) obtingudes en el cas B1, en què k_1 i k_3 són proporcionals, són del tipus descrit per Perek (1962). En el cas B2, en què k_1 i k_3 no són proporcionals, s'obtenen per a aquestes funcions les solucions (2.71), (2.73) i (2.75), havent-se de complir, respectivament, les condicions (2.72), (2.74) i (2.76), i, sumant les sèries de potències obtingudes, les solucions (2.81) i (2.82), respectivament, per al potencial

U i la funció χ. Les integrals primeres del sistema han estat igualment determinades, i són (2.83) ÷ (2.86) cas de què el potencial U sigui estacionari.

El tercer apartat està dedicat, en els diferents casos, a l'obtenció de la velocitat del centroide $\underline{V}_\odot$ i de la funció σ, mentre que en el quart s'obtenen el nombre d'estrelles N per unitat de volum, els moments de segon ordre (2.94) i les components de la part simètrica i de la part anti-simètrica del diferencial del camp local de velocitats $D(\underline{V}_\odot)$, posant-se de manifest les relacions existents entre ells, interpretades segons les equacions hidrodinàmiques de la dinàmica estel.lar. S'obté igualment el caràcter no solenoidal del camp de velocitats dels centroides locals, així com l'expressió del terme K (2.109) que dóna compte de l'expansió galàctica.

2.1. Obtenció de A i de Δ.

Concretem ara el nostre estudi a un model de Chandrasekhar no estacionari i amb simetria cilíndrica que constitueix una generalització del model estacionari i igualment amb simetria cilíndrica desenvolupat per Orús (1977).

Siguin

$$A = \begin{bmatrix} A_{\varpi\varpi} & A_{\varpi\theta} & A_{\varpi z} \\ A_{\varpi\theta} & A_{\theta\theta} & A_{\theta z} \\ A_{\varpi z} & A_{\theta z} & A_{zz} \end{bmatrix} \qquad \underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_{\varpi} \\ \Delta_{\theta} \\ \Delta_{z} \end{bmatrix}$$

les expressions de (1.16) i de (1.20), respectivament, en coordenades cilíndriques. Tenint en compte que segons la hipòtesi adoptada

$$\frac{\partial}{\partial\theta} = 0$$

tindrem que (1.5), d'acord amb (1.18), prendrà la forma

$$\frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial t} + \Pi \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial\varpi} + Z \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial z} - \left(\frac{\partial U}{\partial\varpi} - \frac{\theta^2}{\varpi}\right) \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial\Pi} - \frac{\Pi\theta}{\varpi} \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial\theta} - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial(Q+\sigma)}{\partial Z} = 0 \tag{2.1}$$

mentre que (1.22) s'escriurà

$$Q + \sigma = A_{\varpi\varpi}\Pi^2 + 2A_{\varpi\theta}\Pi\Theta + 2A_{\varpi z}\Pi Z + A_{\theta\theta}\Theta^2 + 2A_{\theta z}\Theta Z + A_{zz}Z^2 - 2\Delta_{\varpi}\Pi - 2\Delta_{\theta}\Theta - 2\Delta_{z}Z - \chi \tag{2.2}$$

Substituïnt (2.2) a (2.1), al resoldre les deu equacions de (1.23) s'obté (Orús, 1977)

$$\begin{aligned} A_{\varpi\varpi} &= k_1 + 2k_5 z + k_4 z^2 \\ A_{\varpi\theta} &= 0 \\ A_{\varpi z} &= - k_5\varpi - k_4\varpi z \\ A_{\theta\theta} &= k_1 + 2k_5 z + k_2\varpi^2 + k_4 z^2 \\ A_{\theta z} &= k_6\varpi \\ A_{zz} &= k_3 + k_4\varpi^2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

essent $k_1, \dots, k_6$, en principi, funcions arbitràries del temps t.

Tenint en compte (2.3), les sis equacions (1.24) tenen per solució (Català, 1972)

$$\begin{aligned} \Delta_{\varpi} &= \frac{1}{2} \dot{k}_1\varpi + \dot{k}_5\varpi z \\ \Delta_{\theta} &= - \beta\varpi + \dot{k}_6\varpi z \\ \Delta_{z} &= \delta + \frac{1}{2} \dot{k}_3 z - \dot{k}_5\varpi^2 \end{aligned} \tag{2.4}$$

havent-se obtingut que k_2 i k_4 són constants.

Donat que per $\varpi = z = 0$, es compleix

$$\underline{V}_0 = 0$$

tindrem, segons (1.20) i (2.4),

$$\delta = 0$$

D'altra banda, el model en què les funcions del temps k_ϖ i k_δ no són nul·les ha estat desenvolupat per Català (1972) donant lloc a un potencial molt restrictiu excepte en el cas en què k_ϖ sigui una funció lineal del temps. Així doncs, adoptarem com hipòtesi que les funcions del temps k_ϖ i k_δ són idènticament nul·les.

Aleshores, (2.3) i (2.4) s'escriuran

$$\begin{aligned} A_{\varpi\varpi} &= k_1 + k_4 z^2 \\ A_{\varpi\theta} &= 0 \\ A_{\varpi z} &= - k_4 \varpi z \\ A_{\theta\theta} &= k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2 \\ A_{\theta z} &= 0 \\ A_{zz} &= k_3 + k_4 \varpi^2 \end{aligned} \tag{2.5}$$

i

$$\begin{aligned} \Delta_\varpi &= \frac{1}{2} \dot{k}_1 \varpi \\ \Delta_\theta &= - \beta \varpi \\ \Delta_z &= \frac{1}{2} \dot{k}_3 z \end{aligned} \tag{2.6}$$

La forma quadràtica (1.14) ha d'ésser definida (Ogorodnikov, 1965). De (2.5) tenim que, per tal que (1.14) sigui definida positiva (Ledermann & Vajda, 1980),

$$k_1 + k_4 z^2 > 0$$
$$(k_1 + k_4 z^2)\,(k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2) > 0$$
$$(k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2)\,(k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2) > 0$$

mentre que a fí que (1.14) sigui definida negativa,

$$k_1 + k_4 z^2 < 0$$
$$(k_1 + k_4 z^2)\,(k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2) > 0$$
$$(k_1 + k_2 \varpi^2 + k_4 z^2)\,(k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2) < 0$$

o sigui que, per a què (1.14) sigui definida, les funcions del temps k_1 i k_3 i les constants k_2 i k_4 han de tenir totes el mateix signe.

Ara bé, per $\varpi = z = 0$

$$\det A = k_1^2 k_3$$

i per tal que el nombre d'estrelles N per unitat de volum sigui real per $\varpi = z = 0$, tindrem (Català, 1972)

$$k_3 > 0$$

Per tant, les funcions del temps k_1 i k_3 i les constants k_2 i k_4 han d'ésser positives.

2.2. <u>Obtenció de U i de χ.</u>

Les tres equacions de (1.25) i la de (1.26) es convertiran en

$$(k_1 + k_4 z^2)\frac{\partial U}{\partial \varpi} - k_4 \varpi z \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\ddot{k}_1 \varpi = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \varpi} \qquad (2.7)$$

$$-\dot{\beta}\varpi = 0 \qquad (2.8)$$

$$-k_4 \varpi z \frac{\partial U}{\partial \varpi} + (k_3 + k_4 \varpi^2)\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\ddot{k}_3 z = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial z} \qquad (2.9)$$

$$\frac{1}{2}\dot{k}_1 \varpi \frac{\partial U}{\partial \varpi} + \frac{1}{2}\dot{k}_3 z \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad (2.10)$$

obtenint-se de (2.8), immediatament, que β és una constant. Si introduïm, seguint Chandrasekhar (1942),

$$\tau = \frac{1}{2}\varpi^2 \qquad \zeta = \frac{1}{2}z^2 \qquad (2.11)$$

les equacions (2.7), (2.9) i (2.10) es poden escriure

$$(k_1 + 2k_4\zeta)\frac{\partial U}{\partial \tau} - 2k_4\zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\ddot{k}_1 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \tau} \qquad (2.12)$$

$$-2k_4\tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + (k_3 + 2k_4\tau)\frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\ddot{k}_3 = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta} \qquad (2.13)$$

$$\dot{k}_1 \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \dot{k}_3 \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial t} \qquad (2.14)$$

Donat que $k_4 = 0$ comportaria la independència de (2.5) respecte z, podem suposar $k_4 \neq 0$. Així doncs, si derivem (2.12) respecte ζ, li restem la derivada de (2.13) respecte τ i dividim per $2k_4$, obtindrem

$$\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \left(\tau - \zeta - \frac{k_1 - k_3}{2k_4}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2\frac{\partial U}{\partial \tau} - 2\frac{\partial U}{\partial \zeta} = 0 \qquad (2.15)$$

Distingirem dos casos, segons k_1 i k_3 siguin iguals o distints entre si.

A) Cas $k_1 = k_3$.

Derivant (2.12) respecte t i sumant-li la derivada de (2.14) respecte τ, obtindrem

$$2\dot{k}_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} + (k_1 + 2k_4\zeta) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \tau} - 2k_4\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \zeta} + \frac{1}{2} \dddot{k}_1 + \dot{k}_1\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} + \dot{k}_1\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} = 0 \tag{2.16}$$

i derivant (2.13) respecte t i sumant-li la derivada de (2.14) respecte ζ,

$$2\dot{k}_1 \frac{\partial U}{\partial \zeta} - 2k_4\tau \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \tau} + (k_1 + 2k_4\tau) \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \zeta} + \frac{1}{2} \dddot{k}_1 + \dot{k}_1\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} + \dot{k}_1\zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} = 0 \tag{2.17}$$

Restant ara (2.16) menys (2.17), s'obté

$$\dot{k}_1 \left[\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - (\tau - \zeta) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau \partial \zeta} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right] + (k_1 + 2k_4\tau + 2k_4\zeta) \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \tau} - \frac{\partial^2 U}{\partial t \partial \zeta}\right) = 0 \tag{2.18}$$

Tenint en compte (2.15), i que

$$k_1 + 2k_4\tau + 2k_4\zeta \neq 0$$

de (2.18) obtenim que

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta}\right) = 0 \tag{2.19}$$

Segons (2.19), podem escriure (2.16) i (2.17) com

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[\dot{k}_1 U + k_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{k}_1 \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \dot{k}_1 \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\dddot{k}_1 (\tau + \zeta)\right] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[\dot{k}_1 U + k_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{k}_1 \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \dot{k}_1 \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\dddot{k}_1 (\tau + \zeta)\right] = 0$$

i tindrem, per tant,

$$\dot{k}_1 U + k_1 \frac{\partial U}{\partial t} + \dot{k}_1 \tau \frac{\partial U}{\partial \tau} + \dot{k}_1 \zeta \frac{\partial U}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\dddot{k}_1 (\tau + \zeta) = H(t) \tag{2.20}$$

on H(t) es pot prendre nul.la sense pèrdua de generalitat. Si denominem

$$F = k_1 U \tag{2.21}$$

i multipliquem (2.20) per k_1, obtindrem

$$k_1 \frac{\partial F}{\partial t} + \dot{k}_1 \tau \frac{\partial F}{\partial \tau} + \dot{k}_1 \zeta \frac{\partial F}{\partial \zeta} + \frac{1}{2}\dddot{k}_1 k_1 (\tau + \zeta) = 0$$

que és una equació diferencial en derivades parcials, lineal en F, el sistema associat de la qual és

$$\frac{dt}{k_1} = \frac{d\tau}{\dot{k}_1 \tau} = \frac{d\zeta}{\dot{k}_1 \zeta} = - \frac{dF}{\frac{1}{2}\dddot{k}_1 k_1 (\tau + \zeta)} \tag{2.22}$$

Dels tres primers membres de (2.22) tindrem

$$\frac{dk_1}{k_1} = \frac{d\tau}{\tau} = \frac{d\zeta}{\zeta} \tag{2.23}$$

amb dues integrals primeres independents

$$\frac{\tau}{k_1} = A_1 \qquad \frac{\zeta}{k_1} = A_2 \tag{2.24}$$

Per tant, de (2.22) ÷ (2.24) tindrem

$$\frac{dt}{k_1} = - \frac{dF}{\frac{1}{2}\,\dddot{k}_1 k_1^2\,(A_1 + A_2)}$$

és a dir,

$$\frac{dF}{dt} = - \frac{1}{2}\,(A_1 + A_2)\,\dddot{k}_1 k_1 \tag{2.25}$$

Ara bé, seguint Chandrasekhar (1942),

$$\dddot{k}_1 k_1 = \frac{d}{dt}\,(\ddot{k}_1 k_1 - \frac{1}{2}\,\dot{k}_1^2)$$

i, de (2.25), obtenim la integral primera

$$F + \frac{1}{2}\,(A_1 + A_2)\,(\ddot{k}_1 k_1 - \frac{1}{2}\,\dot{k}_1^2) = A_3 \tag{2.26}$$

Si tenim ara en compte que

$$\frac{d^2}{dt^2}\,k_1^{1/2} = \frac{1}{2}\,k_1^{-3/2}\,(\ddot{k}_1 k_1 - \frac{1}{2}\,\dot{k}_1^2)$$

anomenant

$$k_1 = \phi_1^2 \tag{2.27}$$

podem escriure (2.24) i (2.26) com

$$\frac{\tau}{\phi_1^2} = A_1 \qquad \frac{\zeta}{\phi_1^2} = A_2$$

$$F + \ddot{\phi}_1 \phi_1 (\tau + \zeta) = A_3$$

Per tant, la solució de F serà

$$F = - \ddot{\phi}_1 \phi_1 (\tau + \zeta) + U_1(\frac{\tau}{\phi_1^2}, \frac{\zeta}{\phi_1^2})$$

i, segons (2.21),

$$U = - \frac{\ddot{\phi}_1}{\phi_1} (\tau + \zeta) + \frac{1}{\phi_1^2} U_1(\frac{\tau}{\phi_1^2}, \frac{\zeta}{\phi_1^2}) \tag{2.28}$$

havent-se de complir la condició d'integrabilitat (2.15).

Si introduïm

$$\alpha = \frac{\tau}{\phi_1^2} \qquad \beta = \frac{\zeta}{\phi_1^2}$$

aleshores, (2.15) es pot escriure

$$\alpha \frac{\partial^2 U_1}{\partial \alpha^2} - (\alpha - \beta) \frac{\partial^2 U_1}{\partial \alpha \partial \beta} - \beta \frac{\partial^2 U_1}{\partial \beta^2} + 2 \frac{\partial U_1}{\partial \alpha} - 2 \frac{\partial U_1}{\partial \beta} = 0$$

formalment anàloga a l'obtinguda en el cas estacionari. La seva integral general serà, segons Orús (1977),

$$U_1 = V_1(\alpha + \beta) + \frac{1}{\alpha + \beta} V_2(\frac{\beta}{\alpha}) \tag{2.29}$$

Per tant, de (2.28) i (2.29), tindrem

$$U = - \frac{\ddot{\phi}_1}{\phi_1} (\tau + \zeta) + \frac{1}{\phi_1^2} V_1(\frac{\tau + \zeta}{\phi_1^2}) + \frac{1}{\tau + \zeta} V_2(\frac{\zeta}{\tau}) \tag{2.30}$$

Per tal d'obtenir χ, observem que

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} - \frac{\partial U}{\partial \zeta} = - \frac{1}{\tau^2} V_2' \tag{2.31}$$

Tenint en compte (2.31), podem escriure (2.12) i (2.13) com

$$k_1 \frac{\partial U}{\partial \tau} + 2k_4 \frac{\partial V_2}{\partial \tau} + \frac{1}{2} \ddot{k}_1 = - \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \tau}$$
$$k_1 \frac{\partial U}{\partial \zeta} + 2k_4 \frac{\partial V_2}{\partial \zeta} + \frac{1}{2} \ddot{k}_1 = - \frac{1}{2} \frac{\partial \chi}{\partial \zeta}$$

que té per solució

$$k_1 U + 2k_4 V_2 + \frac{1}{2} \ddot{k}_1 (\tau + \zeta) + H(t) = - \frac{1}{2} \chi \tag{2.32}$$

on $H(t)$ és una funció arbitrària del temps.

Segons (2.27) i (2.30) podem re-escriure (2.32) com

$$- \frac{1}{2} \chi = \dot{\phi}_1^2 (\tau + \zeta) + V_1 \left(\frac{\tau + \zeta}{\phi_1^2}\right) + \left(\frac{\phi_1^2}{\tau + \zeta} + 2k_4\right) V_2\left(\frac{\zeta}{\tau}\right) + H(t) \tag{2.33}$$

Derivant (2.30) i (2.33) i substituïnt a (2.14) obtenim que H és una constant amb la qual cosa (2.33) pren la forma

$$- \frac{1}{2} \chi = \dot{\phi}_1^2 (\tau + \zeta) + V_1\left(\frac{\tau + \zeta}{\phi_1^2}\right) + \left(\frac{\phi_1^2}{\tau + \zeta} + 2k_4\right) V_2\left(\frac{\zeta}{\tau}\right) + \text{constant} \tag{2.34}$$

B) Cas $k_1 \neq k_3$.

Considerem el sistema format per (2.12) i (2.13). La seva equació característica serà, com en el cas estacionari (Orús, 1977),

$$\lambda^2 - (k_1 + k_3 + 2k_4\tau + 2k_4\zeta)\,\lambda + k_1k_3 + 2k_1k_4\tau + 2k_3k_4\zeta = 0$$

Prenguem com noves variables les seves arrels

$$\underline{\lambda} \equiv \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{k_1 + k_3}{2} + k_4\tau + k_4\zeta + \left[\left(\dfrac{k_1 + k_3}{2} + k_4\tau + k_4\zeta\right)^2 - \right. \\ \qquad\qquad \left. - (k_1k_3 + 2k_1k_4\tau + 2k_3k_4\zeta)\right]^{1/2} \\ w = \dfrac{k_1 + k_3}{2} + k_4\tau + k_4\zeta - \left[\left(\dfrac{k_1 + k_3}{2} + k_4\tau + k_4\zeta\right)^2 - \right. \\ \qquad\qquad \left. - (k_1k_3 + 2k_1k_4\tau + 2k_3k_4\zeta)\right]^{1/2} \end{array}\right] \tag{2.35}$$

mentre que, aleshores,

$$\underline{s} \equiv \left[\begin{array}{l} \tau = \dfrac{k_3^2 - k_3\,(u + w) + uw}{2k_4\,(k_1 - k_3)} \\ \zeta = - \dfrac{k_1^2 - k_1\,(u + w) + uw}{2k_4\,(k_1 - k_3)} \end{array}\right] \tag{2.36}$$

Si anomenem J la matriu jacobiana de la transformació (2.35), es complirà

$$\nabla_{\underline{s}} = J.\nabla_{\underline{\lambda}} \tag{2.37}$$

Siguin

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} k_1 + 2k_4\,\zeta & - 2k_4\,\zeta \\ - 2k_4\,\tau & k_3 + 2k_4\tau \end{bmatrix} \qquad \underline{\ddot{k}} = \begin{bmatrix} \ddot{k}_1 \\ \ddot{k}_3 \end{bmatrix}$$

Aleshores, el sistema format per (2.12) i (2.13) es pot escriure

$$\bar{A}.\nabla_{\underline{s}} U + \frac{1}{2}\,\ddot{\underline{k}} = -\,\frac{1}{2}\,\nabla_{\underline{s}}\chi \tag{2.38}$$

Ara bé,

$$\frac{1}{2}\,\ddot{\underline{k}} = \frac{1}{2}\,\nabla_{\underline{s}}(\ddot{k}_1\tau + \ddot{k}_3\zeta)$$

o sigui que (2.38) s'escriurà

$$\bar{A}.\nabla_{\underline{s}} U + \frac{1}{2}\,\nabla_{\underline{s}}(\ddot{k}_1\tau + \ddot{k}_3\zeta) = -\,\frac{1}{2}\,\nabla_{\underline{s}}\chi$$

que, tenint en compte (2.36) i (2.37), es converteix en

$$J^{-1}.\bar{A}.J.\nabla_{\underline{\lambda}} U + \frac{1}{2}\,\nabla_{\underline{\lambda}}\left(\ddot{k}_1\,\frac{k_3^2 - k_3\,(u + w) + uw}{2k_4\,(k_1 - k_3)} - \right.$$
$$\left. -\,\ddot{k}_3\,\frac{k_1^2 - k_1\,(u + w) + uw}{2k_4\,(k_1 - k_3)}\right) = -\,\frac{1}{2}\,\nabla_{\underline{\lambda}}\chi$$

Per tant, anomenant

$$b_1 = \frac{-\,\ddot{k}_1 k_3 + \ddot{k}_3 k_1}{4k_4\,(k_1 - k_3)} \qquad\qquad b_2 = \frac{\ddot{k}_1 - \ddot{k}_3}{4k_4\,(k_1 - k_3)} \tag{2.39}$$

obtenim el sistema canònic

$$\begin{aligned} w\,\frac{\partial U}{\partial u} + b_1 + b_2 w &= -\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial\chi}{\partial u} \\ u\,\frac{\partial U}{\partial w} + b_1 + b_2 u &= -\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial\chi}{\partial w} \end{aligned} \tag{2.40}$$

Eliminant χ de (2.40), obtenim l'equació diferencial de segon ordre de tipus hiperbòlic

$$(u - w)\,\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial w} - \frac{\partial U}{\partial u} + \frac{\partial U}{\partial w} = 0 \tag{2.41}$$

anàloga a l'obtinguda en el cas estacionari (Orús, 1977).

Mitjançant

$$U = \frac{V}{u - w}$$

podem escriure (2.41) com

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u \partial w} = 0$$

que té per solució

$$V = F(t,u) + G(t,w)$$

d'on, aleshores,

$$U = \frac{F(t,u) + G(t,w)}{u - w} \tag{2.42}$$

Ara bé, segons (2.3_6) a cada punt del pla τ,ζ li corresponen dos punts del pla u,w simètrics respecte la bisectriu del primer quadrant. Per tant, tindrem igualment

$$U = \frac{F(t,w) + G(t,u)}{w - u} \tag{2.43}$$

Comparant (2.42) i (2.43), obtindrem

$$F(t,u) + G(t,u) = - F(t,w) - G(t,w)$$

o sigui que, forçosament,

$$G = - F$$

i, aleshores, tant (2.42) com (2.43) es converteixen en

$$U = \frac{F(t,u) - F(t,w)}{u - w} \tag{2.44}$$

que és un tipus de potencial anomenat d'Eddington (1915) i que ha estat trobat pel cas estacionari per altres autors, entre els quals, Oort (1928), Camm (1941), Fricke (1951) i Lindblad (1959).

Per tal de trobar χ, integrant (2.40) obtindrem

$$wU + b_1 u + b_2 uw + H_1(t,w) = -\frac{1}{2}\chi$$

$$uU + b_1 w + b_2 uw + H_2(t,u) = -\frac{1}{2}\chi$$

Segons (2.44), tindrem que

$$F(t,u) + H_2(t,u) - b_1 u = F(t,w) + H_1(t,w) - b_1 w = D_1(t)$$

i, per tant,

$$-\frac{1}{2}\chi = \frac{wF(t,u) - uF(t,w)}{u - w} + b_1(u + w) + b_2 uw + D_1(t) \tag{2.45}$$

Ara bé, l'equació (2.14) proporciona una condició per a la integrabilitat del sistema. Per tal d'expressar-la en les variables independents t,u,w, en les quals hem obtingut les expressions (2.44) i (2.45) de U i de χ, respectivament, tindrem

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial \tau} &= \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \tau} + \frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \tau} \\
\frac{\partial U}{\partial \zeta} &= \frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \zeta} + \frac{\partial U}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial \zeta} \\
\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_s &= \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_\lambda + \frac{\partial \chi}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial t}
\end{aligned} \tag{2.46}$$

De (2.35), (2.36) i (2.46) obtindrem

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = \frac{2k_4}{u-w}\left[(u-k_1)\frac{\partial U}{\partial u} - (w-k_1)\frac{\partial U}{\partial w}\right]$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta} = \frac{2k_4}{u-w}\left[(u-k_3)\frac{\partial U}{\partial u} - (w-k_3)\frac{\partial U}{\partial w}\right]$$

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_s = \left(\frac{\partial \chi}{\partial t}\right)_\lambda + \frac{-\dot{k}_1\,(u-k_3)\,(w-k_1) + \dot{k}_3\,(u-k_1)\,(w-k_3)}{(k_1-k_3)\,(u-w)}\frac{\partial \chi}{\partial u} + \frac{\dot{k}_1\,(u-k_1)\,(w-k_3) - \dot{k}_3\,(u-k_3)\,(w-k_1)}{(k_1-k_3)\,(u-w)}\frac{\partial \chi}{\partial w} \qquad (2.47)$$

mentre que, tenint en compte (2.36), (2.44), (2.45) i (2.47), si introduïm

$$D_2(t) = \frac{(\ddot{k}_1 k_3^2 + \ddot{k}_3 k_1^2)\,(\dot{k}_1 + \dot{k}_3) - 2k_1k_3\,(\ddot{k}_1\dot{k}_3 + \ddot{k}_3\dot{k}_1)}{4k_4\,(k_1-k_3)^2} + \dot{D}_1(t) \qquad (2.48)$$

la condició d'integrabilitat (2.14) es pot escriure

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial F(t,u)}{\partial t}\frac{w}{u-w} - \frac{\partial F(t,w)}{\partial t}\frac{u}{u-w} + \\
&+ \frac{\partial F(t,u)}{\partial u}\left[\frac{(u-k_1)(w-k_3)(-\dot{k}_1k_3+\dot{k}_1u+\dot{k}_3w) + (u-k_3)(w-k_1)(\dot{k}_3k_1-\dot{k}_3u-\dot{k}_1w)}{(k_1-k_3)\,(u-w)^2}\right] + \\
&+ \frac{\partial F(t,w)}{\partial w}\left[\frac{(u-k_1)(w-k_3)(\dot{k}_3k_1-\dot{k}_1u-\dot{k}_3w) + (u-k_3)(w-k_1)(-\dot{k}_1k_3+\dot{k}_3u+\dot{k}_1w)}{(k_1-k_3)\,(u-w)^2}\right] + \\
&+ \frac{F(t,u) - F(t,w)}{u-w}\left[\frac{(\dot{k}_1k_3-\dot{k}_3k_1)[(u-k_1)(w-k_3) + (u-k_3)(w-k_1)]}{(k_1-k_3)\,(u-w)^2}\right] + \\
&+ \frac{\dddot{k}_1 - \dddot{k}_3}{4k_4\,(k_1-k_3)}\,uw + \frac{-\dddot{k}_1k_3+\dddot{k}_3k_1}{4k_4\,(k_1-k_3)}\,(u+w) + D_2(t) = 0
\end{aligned} \qquad (2.49)$$

Efectuem ara la següent hipótesi: la funció F és analítica en el segon argument i els seus coeficients són funcions diferenciables del primer argument.

Aleshores, tindrem que

$$F(t,u) = \sum_{i\geq 0} a_i(t)u^i$$
$$F(t,w) = \sum_{i\geq 0} a_i(t)w^i \qquad (2.50)$$

i, com a conseqüència,

$$\frac{\partial F(t,u)}{\partial t} = \sum_{i\geq 0} \dot{a}_i(t)u^i$$
$$\frac{\partial F(t,w)}{\partial t} = \sum_{i\geq 0} \dot{a}_i(t)w^i$$
$$\frac{\partial F(t,u)}{\partial u} = \sum_{i\geq 0} (i+1)\, a_{i+1}(t)u^i \qquad (2.51)$$
$$\frac{\partial F(t,w)}{\partial w} = \sum_{i\geq 0} (i+1)\, a_{i+1}(t)w^i$$

mentre que, segons (2.50), podrem escriure (2.44) com

$$U = \frac{\sum_{i\geq 0} a_i(t)\,(u^i - w^i)}{u - w} = \sum_{i\geq 1} a_i(t)\,(u^{i-1} + u^{i-2}w + \dots + uw^{i-2} + w^{i-1})$$
$$(2.52)$$

Si substituïm (2.48), (2.51) i (2.52) a (2.49) obtindrem una sèrie formal en u i en w que haurà d'ésser idènticament nul.la, raó per la qual s'hauran de complir les relacions

$$\dot{D}_1(t) + \frac{-\ddot{k}_1\dot{k}_3k_3 + \ddot{k}_3\dot{k}_1k_1}{4k_4(k_1 - k_3)} + \frac{(-\ddot{k}_1k_3 + \ddot{k}_3k_1)(-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1)}{4k_4(k_1 - k_3)^2} +$$

$$+ a_3\frac{(-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1)k_1k_3}{k_1 - k_3} - a_2\frac{(-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1)(k_1 + k_3)}{k_1 - k_3} - \dot{a}_0 = 0 \qquad (2.53)$$

$$\frac{-\dddot{k}_1 + \dddot{k}_3}{4k_4(k_1 - k_3)} - 3a_3\frac{-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1}{k_1 - k_3} + 2a_2\frac{-\dot{k}_1 + \dot{k}_3}{k_1 - k_3} - \dot{a}_2 = 0 \qquad (2.54)$$

$$-(i+1)\,a_{i+1}\frac{-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1}{k_1 - k_3} + i\,a_i\frac{-\dot{k}_1 + \dot{k}_3}{k_1 - k_3} - \dot{a}_i = 0 \quad , \; i \geq 3 \qquad (2.55)$$

$$\frac{-\dddot{k}_1k_3 + \dddot{k}_3k_1}{8k_4} + (-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1)\,[a_4\,k_1k_3 - a_3\,(k_1 + k_3) + a_2] = 0 \qquad (2.56)$$

$$(-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1)\,[a_{i+2}\,k_1k_3 - a_{i+1}\,(k_1 + k_3) + a_i] = 0 \quad , \; i \geq 3 \qquad (2.57)$$

Cal remarcar que el coeficient a_1 no apareix en cap de les relacions (2.53) ÷ (2.57) mentre que, segons (2.52), el coeficient a_0 no és necessari per a la determinació del potencial U. Així doncs, aquest potencial U estarà determinat a menys d'una funció arbitrària a_1 del temps t.

En l'estudi de les relacions (2.53) ÷ (2.57) distingirem dos casos:

B1) Cas $-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1 = 0$.

La solució de

$$-\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1 = 0$$

és

$$k_1 = Ck_3$$

Aleshores, (2.53) ÷ (2.55) s'escriuran

$$
\begin{aligned}
&\dot{D}_1(t) + \frac{C\ddot{k}_3\dot{k}_3}{4k_4} - \dot{a}_0 = 0 \\
&-\frac{\dddot{k}_3}{4k_4k_3} - 2\frac{\dot{k}_3}{k_3}a_2 - \dot{a}_2 = 0 \\
&-i\frac{\dot{k}_3}{k_3}a_i - \dot{a}_i = 0 \quad , \quad i \geq 3
\end{aligned}
\tag{2.58}
$$

mentre que (2.56) i (2.57) són idènticament nul·les. Les solucions de (2.58) seran

$$
\begin{aligned}
a_0 &= D_1(t) + \frac{C\dot{k}_3^2}{8k_4} + c_0 \\
a_2 &= \frac{c_2}{k_3^2} + \frac{\dot{k}_3^2}{8k_4k_3^2} - \frac{\ddot{k}_3}{4k_4k_3} \\
a_i &= \frac{c_i}{k_3^i} \quad , \quad i \geq 3
\end{aligned}
$$

Per tant, segons (2.50), i donat que a_0 és una funció arbitrària del temps,

$$
\begin{aligned}
F(t,u) &= a_0(t) + a_1(t)\,u + \frac{\dot{k}_3^2 - 2\ddot{k}_3k_3}{8k_4k_3^2}\,u^2 + \sum_{i\geq 2}\frac{c_i}{k_3^i}\,u^i \\
F(t,w) &= a_0(t) + a_1(t)\,w + \frac{\dot{k}_3^2 - 2\ddot{k}_3k_3}{8k_4k_3^2}\,w^2 + \sum_{i\geq 2}\frac{c_i}{k_3^i}\,w^i
\end{aligned}
\tag{2.59}
$$

Les solucions formals (2.59) obtingudes constitueixen solucions efectives (Ledermann & Vajda, 1982) per

$$|u| < \frac{1}{k_3} \limsup_{i\geq 2} \{c_i^{1/i}\}$$

$$|w| < \frac{1}{k_3} \limsup_{i\geq 2} \{c_i^{1/i}\}$$

Així doncs, tenint en compte (2.39), (2.44), (2.45) i (2.59), obtenim

$$U = a_1(t) + \frac{\dot{k}_3^2 - 2\,\ddot{k}_3 k_3}{8k_4 k_3^2}(u + w) + \sum_{i\geq 2} \frac{c_i}{k_3^i}(u^{i-1}+u^{i-2}w+\dots+uw^{i-2}+w^{i-1}) \tag{2.60}$$

i

$$-\frac{1}{2}\chi = -a_0(t) - \frac{\ddot{k}_3}{4k_4}(u + w) + \frac{\dot{k}_3^2}{8k_4 k_3^2}uw + \\ + uw\sum_{i\geq 2} \frac{c_i}{k_3^i}(u^{i-2}+u^{i-3}w+\dots+uw^{i-3}+w^{i-2}) \tag{2.61}$$

Es interessant posar de manifest que el potencial (2.60) és semblant a algun dels descrits per Perek (1962), obtinguts per aquest autor a partir d'hipótesis sobre la funció de densitat de massa.

B2) Cas $-\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_3 k_1 \neq 0$.

En aquest cas, (2.56) i (2.57) es poden escriure

$$\frac{-\dddot{k}_1 k_3 + \dddot{k}_3 k_1}{8k_4(-\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_3 k_1)} + a_4\, k_1 k_3 - a_3\,(k_1 + k_3) + a_2 = 0 \tag{2.62}$$

$$a_{i+2}\, k_1 k_3 - a_{i+1}\,(k_1 + k_3) + a_i = 0 \quad , \quad i \geq 3 \tag{2.63}$$

Les relacions (2.62) i (2.63) constitueixen una successió recurrent de funcions reals de variable real. Segons Ledermann & Vajda (1980), tindrem que la solució general de (2.63) és

$$a_i = \frac{t_1}{k_1^{i-2}} + \frac{t_3}{k_3^{i-2}} \quad , \quad i \geq 3 \tag{2.64}$$

essent t_1 i t_3 funcions del temps t. Substituïnt a (2.55), s'obté

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{t}_1}{k_1^{i-2}} + \frac{2\dot{k}_1k_1 - 3\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1}{k_1 - k_3}\,\frac{t_1}{k_1^{i-1}} + \\ &+ \frac{\dot{t}_3}{k_3^{i-2}} + \frac{-\dot{k}_1k_3 + 3\dot{k}_3k_1 - 2\dot{k}_3k_3}{k_1 - k_3}\,\frac{t_3}{k_3^{i-1}} = 0 \quad , \quad i \geq 3 \end{aligned} \tag{2.65}$$

Ara bé, les solucions per a t_1 i t_3 han d'ésser independents de i, contràriament el sistema (2.65) serà incompatible. Amb aquest fi s'haurà de complir

$$\begin{aligned} &\frac{\dot{t}_1}{k_1^{i-2}} + \frac{2\dot{k}_1k_1 - 3\dot{k}_1k_3 + \dot{k}_3k_1}{k_1 - k_3}\,\frac{t_1}{k_1^{i-1}} = 0 \\ &\frac{\dot{t}_3}{k_3^{i-2}} + \frac{-\dot{k}_1k_3 + 3\dot{k}_3k_1 - 2\dot{k}_3k_3}{k_1 - k_3}\,\frac{t_3}{k_3^{i-1}} = 0 \end{aligned} \tag{2.66}$$

Les solucions de (2.66) són

$$t_1 = C_1\,\frac{k_1 - k_3}{k_1^3}$$

$$t_3 = -\,C_3\,\frac{k_1 - k_3}{k_3^3}$$

que al substituïr a (2.64) fan que

$$a_i = C_1 \frac{k_1 - k_3}{k_1^{i+1}} - C_3 \frac{k_1 - k_3}{k_3^{i+1}} \quad , \quad i \geq 3 \tag{2.67}$$

De (2.62) i (2.67) obtenim

$$a_2 = C_1 \frac{k_1 - k_3}{k_1^3} - C_3 \frac{k_1 - k_3}{k_3^3} + \frac{H(t)}{8k_4} \tag{2.68}$$

havent anomenat

$$H(t) = \frac{- \dddot{k}_1 k_3 + \dddot{k}_3 k_1}{\dot{k}_1 k_3 - \dot{k}_3 k_1}$$

Si substituïm a (2.54), obtenim la condició de compatibilitat

$$\dot{H}(t) + 2 \frac{- \ddddot{k}_1 k_3 + \ddddot{k}_3 k_1}{\dot{k}_1 k_3 - \dot{k}_3 k_1} = 0 \tag{2.69}$$

Ara bé, quan es compleix

$$H(t) = - \frac{\dddot{k}_1}{\dot{k}_1} = - \frac{\dddot{k}_3}{\dot{k}_3} = C \tag{2.70}$$

essent C una constant, es verifica la condició (2.69). Les solucions de (2.70) són

$$\begin{aligned} k_1 &= \alpha_1 \, e^{(-C)^{1/2} t} + \beta_1 \, e^{-(-C)^{1/2} t} + \gamma_1 \\ k_3 &= \alpha_3 \, e^{(-C)^{1/2} t} + \beta_3 \, e^{-(-C)^{1/2} t} + \gamma_3 \end{aligned} \tag{2.71}$$

amb les condicions, a fi que k_1 i k_3 siguin sempre positives,

$$\gamma_1^2 < 4\alpha_1\beta_1$$
$$\gamma_3^2 < 4\alpha_3\beta_3 \qquad (2.72)$$

quan $C < 0$,

$$k_1 = \alpha_1 t^2 + \beta_1 t + \gamma_1$$
$$k_3 = \alpha_3 t^2 + \beta_3 t + \gamma_3 \qquad (2.73)$$

complint-se les condicions

$$\begin{array}{ll} \alpha_1 > 0 & \alpha_3 > 0 \\ \gamma_1 > 0 & \gamma_3 > 0 \\ \beta_1^2 < 4\alpha_1\gamma_1 & \beta_3^2 < 4\alpha_3\gamma_3 \end{array} \qquad (2.74)$$

quan $C = 0$, i

$$k_1 = \alpha_1 \sin (C^{1/2} t + \beta_1) + \gamma_1$$
$$k_3 = \alpha_3 \sin (C^{1/2} t + \beta_3) + \gamma_3 \qquad (2.75)$$

complint-se que

$$\begin{array}{ll} \gamma_1 > 0 & \gamma_3 > 0 \\ \alpha_1^2 < \gamma_1^2 & \alpha_3^2 < \gamma_3^2 \end{array} \qquad (2.76)$$

quan $C > 0$.

Així doncs, segons (2.50), (2.67) i (2.68), tindrem

$$F(t,u) = a_0(t) + a_1(t)\, u + \frac{C}{8k_4} u^2 + \frac{C_1 (k_1 - k_3)}{k_1} \sum_{i \geq 2} \frac{u^i}{k_1^i} - \frac{C_3 (k_1 - k_3)}{k_3} \sum_{i \geq 2} \frac{u^i}{k_3^i}$$

$$F(t,w) = a_0(t) + a_1(t)\, w + \frac{C}{8k_4} w^2 + \frac{C_1 (k_1 - k_3)}{k_1} \sum_{i \geq 2} \frac{w^i}{k_1^i} - \frac{C_3 (k_1 - k_3)}{k_3} \sum_{i \geq 2} \frac{w^i}{k_3^i} \qquad (2.77)$$

sempre que es compleixi la condició de compatibilitat (2.69), que en el cas (2.70), té per solucions (2.71), (2.73) i (2.75) quan es satisfan les condicions (2.72), (2.74) i (2.76), respectivament.

Aquestes solucions formals (2.77) obtingudes constitueixen solucions efectives sempre que

$$|u| < \min\{k_1, k_3\}$$
$$|w| < \min\{k_1, k_3\}$$

de manera que quedi assegurada la convergència de les sèries de potències que figuren a (2.77) (Ledermann & Vajda, 1982). Si les sumem, podrem escriure (2.77) com

$$F(t,u) = a_0(t) + a_1(t)\,u + \frac{C}{8k_4}u^2 + \frac{C_1\,(k_1 - k_3)}{k_1^2}\,\frac{u^2}{k_1 - u} - \frac{C_3\,(k_1 - k_3)}{k_3^2}\,\frac{u^2}{k_3 - u} \tag{2.78}$$

$$F(t,w) = a_0(t) + a_1(t)\,w + \frac{C}{8k_4}w^2 + \frac{C_1\,(k_1 - k_3)}{k_1^2}\,\frac{w^2}{k_1 - w} - \frac{C_3\,(k_1 - k_3)}{k_3^2}\,\frac{w^2}{k_3 - w}$$

Aleshores, tenint en compte (2.11), (2.35), (2.39), (2.44), (2.45) i (2.78), anomenant

$$B_1 = -\frac{C_3}{k_4} \qquad B_2 = -\frac{C_1}{k_4}$$

$$G(t) = a_1(t) + \left(-\frac{C_1}{k_1^2} + \frac{C_3}{k_3^2}\right)(k_1 - k_3) + \frac{C}{8k_4}(k_1 + k_3)$$

i essent $K(t)$ una funció arbitrària del temps, obtenim

$$U = \frac{B_1}{\varpi^2} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{C}{8}(\varpi^2 + z^2) + G(t) \tag{2.79}$$

i

$$-\frac{1}{2}\chi = \frac{B_1(k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} + \frac{B_2(k_3 + k_4\varpi^2)}{z^2} + \left(\frac{Ck_1}{8} + \frac{\ddot{k}_1}{4}\right)\varpi^2 + \left(\frac{Ck_3}{8} + \frac{\ddot{k}_3}{4}\right)z^2 + K(t) \tag{2.80}$$

La dependència del potencial (2.79) respecte el temps queda reduïda al sumand $G(t)$, que és una funció arbitrària del temps i que pot ésser considerat nul sense pèrdua de generalitat. Aleshores, podrem escriure

$$U = \frac{B_1}{\varpi^2} + \frac{B_2}{z^2} + \frac{C}{8}(\varpi^2 + z^2) \tag{2.81}$$

Així doncs, hem obtingut que el potencial (2.81) corresponent al cas B2 és estacionari i separable de la forma (1.11).

D'altra banda, tenint en compte (2.80) i (2.81), i substituïnt a (2.10), obtenim que la funció K és una constant, amb la qual cosa podem re-escriure (2.80) com

$$-\frac{1}{2}\chi = \frac{B_1(k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} + \frac{B_2(k_3 + k_4\varpi^2)}{z^2} + \qquad (2.82)$$

$$+ \left(\frac{Ck_1}{8} + \frac{\ddot{k}_1}{4}\right)\varpi^2 + \left(\frac{Ck_3}{8} + \frac{\ddot{k}_3}{4}\right) z^2 + \text{constant}$$

L'única integral primera que presenta el model en els casos A i B1 és la que es dedueix de la hipòtesis adoptada de simetria cilíndrica, és a dir, la integral de les àrees (1.10).

En el cas B2, a més de la integral de les àrees (1.10) i donat que el potencial U és estacionari i separable de la forma (1.11), el model presenta la integral de l'energia (1.9) i la integral (1.12). Una altra integral primera del model en aquest cas B2 és l'anomenada integral de Kuzmin (1953), encara que anteriorment utilitzada per Camm (1941), Chandrasekhar (1942), Fricke (1951) i van Albada (1952).

Les expressions d'aquestes integrals primeres (1.9), que ha estat substituïda, mitjançant (1.12), per la integral de l'energia corresponent al moviment en el pla galàctic, (1.10) i (1.12) i de la integral de Kuzmin són, respectivament,

$$I_1 \equiv \Pi^2 + \Theta^2 + \frac{2B_1}{\varpi^2} + \frac{C}{4}\varpi^2 = \text{constant} \qquad (2.83)$$

$$I_2 \equiv \varpi\Theta = \text{constant} \qquad (2.84)$$

$$I_3 \equiv Z^2 + \frac{2B_2}{z^2} + \frac{C}{4} z^2 = \text{constant} \qquad (2.85)$$

$$I_4 \equiv (z\Pi - \varpi Z)^2 + z^2\Theta^2 + \frac{2B_1 z^2}{\varpi^2} + \frac{2B_2\varpi^2}{z^2} = \text{constant} \qquad (2.86)$$

2.3. Obtenció de V_0 i de σ.

Segons (1.20) i (1.21), tindrem

$$\underline{V}_0 = A^{-1}.\underline{\Delta} \qquad (2.87)$$

$$\sigma = -\underline{\Delta}.\underline{V}_0 - \chi \qquad (2.88)$$

En els casos A i B1, de (2.5), (2.6) i (2.87), obtindrem

$$\Pi_0 = \frac{1}{2}\frac{\dot{k}_1}{k_1}\varpi$$

$$\Theta_0 = -\frac{\beta\varpi}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} \qquad (2.89)$$

$$Z_0 = \frac{1}{2}\frac{\dot{k}_3}{k_3} z$$

complint-se, donat que en aquests casos

$$\frac{\dot{k}_1}{k_1} = \frac{\dot{k}_3}{k_3}$$

que l'expansió o compressió és central, és a dir,

$$\frac{\Pi_0}{\varpi} = \frac{Z_0}{z}$$

En el cas A, de (2.6), (2.34), (2.88) i (2.89) i tenint en compte que $k_1 = k_3$ i també (2.11) i (2.27), tindrem

$$\sigma = -\frac{\beta^2\varpi^2}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} + 2V_1\left(\frac{\varpi^2 + z^2}{2k_1}\right) + 4\left(\frac{k_1}{\varpi^2 + z^2} + k_4\right) V_2\left(\frac{z^2}{\varpi^2}\right) +$$

$$+ \text{constant}$$

mentre que en el cas B1, de (2.88) i (2.89) tindrem

$$\sigma = -\frac{1}{4}\frac{\dot{k}_1^2}{k_1}\varpi^2 - \frac{\beta^2\varpi^2}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} - \frac{1}{4}\frac{\dot{k}_3^2}{k_3} z^2 - \chi$$

havent-se de substituïr χ per l'expressió que es dedueix de (2.61).

En el cas B2, de (2.5), (2.6) i (2.87) obtindrem

$$\Pi_0 = \frac{1}{2}\frac{\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_1 k_4 \varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2}\varpi$$

$$\theta_0 = -\frac{\beta\varpi}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} \qquad (2.90)$$

$$Z_0 = \frac{1}{2}\frac{\dot{k}_3 k_1 + \dot{k}_1 k_4 \varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2} z$$

i aleshores, segons (2.6), (2.82), (2.88) i (2.90), tindrem que

$$\sigma = -\frac{1}{4}\frac{\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_1 k_4 \varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2}\dot{k}_1 \varpi^2 - \frac{\beta^2\varpi^2}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} -$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\dot{k}_3 k_1 + \dot{k}_1 k_4 \varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2}\dot{k}_3 z^2 + \frac{2B_1 (k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} +$$

$$+ \frac{2B_2 (k_3 + k_4\varpi^2)}{z^2} + \left(\frac{Ck_1}{4} + \frac{\ddot{k}_1}{2}\right)\varpi^2 + \left(\frac{Ck_3}{4} + \frac{\ddot{k}_3}{2}\right) z^2 + \text{constant}$$

Per finalitzar posarem de manifest que, en qualsevol dels casos estudiats,

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} + \underline{V}_0 \cdot \nabla\sigma = 0 \qquad (2.91)$$

és a dir, que σ és manté constant al llarg de les trajectòries dels centroides locals (Orús, 1952).

2.4. Propietats dels paràmetres cinemàtics del model.

Tenint en compte les propietats, estudiades en el capítol anterior, de les funcions de distribució del tipus Schwarzschild generalitzat, classe a la qual pertanyen les dels models construïts segons les hipótesis de Chandrasekhar i en particular el que és objecte del present estudi, tindrem que el nombre d'estrelles per unitat de volum, segons (1.27) i (2.5), s'expressarà

$$N = \frac{2\pi\ \Phi_0(\sigma)}{(k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2)^{1/2}\ (k_1 k_3 + k_1 k_4 \varpi^2 + k_3 k_4 z^2)^{1/2}}$$

mentre que pel que fa referència al tensor de segon ordre μ_{Ξ}, tindrem que, segons (1.28) i (2.5),

$$\mu_{\varpi\theta} = \mu_{\theta z} = 0 \tag{2.92}$$

i introduïnt

$$a = \frac{k_2}{k_1} \qquad b = \frac{k_4}{k_1} \qquad c = \frac{k_4}{k_3} \tag{2.93}$$

tots ells positius,

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{(1 + c\varpi^2)\ (1 + a\varpi^2 + bz^2)} = \frac{\mu_{\varpi z}}{c\varpi z\ (1 + a\varpi^2 + bz^2)} = \tag{2.94}$$

$$= \frac{\mu_{\theta\theta}}{1 + c\varpi^2 + bz^2} = \frac{\mu_{zz}}{\frac{c}{b}\ (1 + bz^2)\ (1 + a\varpi^2 + bz^2)}$$

Si anomenem

$$\Omega = -\frac{\beta}{k_1} \tag{2.95}$$

que representa la velocitat angular del centroide corresponent a l'origen i serà, per tant, positiu sempre que la velocitat de rotació es consideri positiva en el sentit de la rotació galàctica, tindrem que les components (2.89) de la velocitat del centroide en els casos A i B1 es podran escriure

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b}\varpi \tag{2.96}$$

$$\Theta_0 = \frac{\Omega\varpi}{1 + a\varpi^2 + bz^2} \tag{2.97}$$

$$Z_0 = -\frac{1}{2}\frac{\dot{c}}{c}z \tag{2.98}$$

essent en el cas A

$$b = c$$

mentre que en el cas B1, encara que $b \neq c$, es complirà també que

$$\frac{\dot{b}}{b} = \frac{\dot{c}}{c} \tag{2.99}$$

De (1.44), (1.45) i (2.96) ÷ (2.98) obtindrem que les constants d'Oort adquiriran les expressions

$$\begin{aligned} A &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial\varpi} - \frac{\Theta_0}{\varpi}\right) = \Omega\,\frac{a\varpi^2}{(1 + a\varpi^2 + bz^2)^2} \\ B &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Theta_0}{\partial\varpi} + \frac{\Theta_0}{\varpi}\right) = -\Omega\,\frac{1 + bz^2}{(1 + a\varpi^2 + bz^2)^2} \\ C &= \frac{1}{2}\frac{\partial\Theta_0}{\partial z} = -\Omega\,\frac{b\varpi z}{(1 + a\varpi^2 + bz^2)^2} \end{aligned} \tag{2.100}$$

havent d'ésser $A > 0$ i $B < 0$. De (2.100) obtindrem que

$$\frac{B}{B - A} = \frac{1 + bz^2}{1 + a\varpi^2 + bz^2} > 0 \qquad (2.101)$$

$$- \frac{C}{B - A} = - \frac{b\varpi z}{1 + a\varpi^2 + bz^2}$$

i, de (2.94) i (2.101),

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{zz}} B - \frac{\mu_{\varpi z}}{\mu_{zz}} C - \frac{\mu_{\theta\theta}}{\mu_{zz}} (B - A) = 0$$

$$\frac{\mu_{\varpi z}}{\mu_{zz}} B - C = 0 \qquad (2.102)$$

que, segons (2.100), podem re-escriure

$$\mu_{\varpi\varpi} \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} + \frac{\Theta_0}{\varpi}\right) + \mu_{\varpi z} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} - 2\mu_{\theta\theta} \frac{\Theta_0}{\varpi} = 0$$

$$\mu_{\varpi z} \left(\frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} + \frac{\Theta_0}{\varpi}\right) + \mu_{zz} \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} = 0$$

i que no són altres que les equacions hidrodinàmiques de segon ordre 110 i 011 (Sala et al., 1985) particularitzades pel model objecte d'estudi.

La resta de components del tensor S i del vector $\underline{\Omega}$ compleixen, tenint en compte (1.44), (1.45) i (2.96) ÷ (2.99),

$$S_{11} = S_{22} = S_{33}$$

$$S_{13} = \Omega_2 = 0$$

$$\Omega_1 = - C$$

En el cas B2, les components (2.90) de la velocitat del centroide s'escriuran, segons (2.93) i (2.95), com

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\dot b}{b} + \dfrac{\dot b}{b}c\varpi^2 + \dfrac{\dot c}{c}bz^2}{1 + c\varpi^2 + bz^2}\,\varpi \tag{2.103}$$

$$\Theta_0 = \frac{\Omega\varpi}{1 + a\varpi^2 + bz^2}$$

$$Z_0 = -\frac{1}{2}\,\frac{\dfrac{\dot c}{c} + \dfrac{\dot b}{b}c\varpi^2 + \dfrac{\dot c}{c}bz^2}{1 + c\varpi^2 + bz^2}\,z \tag{2.104}$$

A més de les relacions (2.102), ara es complirà que

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = \frac{\Pi_0}{\varpi} + \frac{Z_0}{z} \tag{2.105}$$

i també que

$$\begin{aligned}
&\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{zz}}(\Omega_2 - S_{13}) - (\Omega_2 + S_{13}) = 0\\
&\frac{\mu_{\varpi z}}{\mu_{zz}}(\Omega_2 - S_{13}) - (S_{11} - S_{22}) = 0\\
&\frac{\mu_{\theta\theta}}{\mu_{zz}}(\Omega_2 - S_{13})\,(B - A) + 2C\,(S_{11} - 2S_{22} + S_{33}) = 0
\end{aligned} \tag{2.106}$$

Segons (1.44), (1.45), (2.105) i (2.106) es poden re-escriure les equacions hidrodinàmiques de segon ordre 200, 101, 020 i 002 (Sala et al., 1985) com

$$\frac{\partial\mu_{\varpi\varpi}}{\partial t} + \Pi_0 \frac{\partial\mu_{\varpi\varpi}}{\partial\varpi} + Z_0 \frac{\partial\mu_{\varpi\varpi}}{\partial z} + 2\mu_{\varpi\varpi} \frac{\Pi_0}{\varpi} = 0$$

$$\frac{\partial\mu_{\varpi z}}{\partial t} + \Pi_0 \frac{\partial\mu_{\varpi z}}{\partial\varpi} + Z_0 \frac{\partial\mu_{\varpi z}}{\partial z} + \mu_{\varpi z} \left(\frac{\Pi_0}{\varpi} + \frac{Z_0}{z}\right) = 0$$

$$\frac{\partial\mu_{\theta\theta}}{\partial t} + \Pi_0 \frac{\partial\mu_{\theta\theta}}{\partial\varpi} + Z_0 \frac{\partial\mu_{\theta\theta}}{\partial z} + 2\mu_{\theta\theta} \frac{\Pi_0}{\varpi} = 0 \qquad (2.107)$$

$$\frac{\partial\mu_{zz}}{\partial t} + \Pi_0 \frac{\partial\mu_{zz}}{\partial\varpi} + Z_0 \frac{\partial\mu_{zz}}{\partial z} + 2\mu_{zz} \frac{Z_0}{z} = 0$$

i, a partir de (2.107), obtindrem que

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{\theta\theta}} = \frac{(1 + c\varpi^2)\,(1 + a\varpi^2 + bz^2)}{1 + c\varpi^2 + bz^2}$$

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}\mu_{zz}}{\mu_{\varpi z}^2} = \frac{(1 + c\varpi^2)\,(1 + bz^2)}{bc\varpi^2 z^2}$$

$$\frac{\mu_{\theta\theta}\mu_{zz}}{\mu_{\varpi z}^2} = \frac{(1 + bz^2)\,(1 + c\varpi^2 + bz^2)}{bc\varpi^2 z^2\,(1 + a\varpi^2 + bz^2)}$$

es conserven al llarg de les trajectòries dels centroides locals.

El camp de velocitats dels centroides locals no és solenoidal, donat que, segons (2.105),

$$\nabla.\underline{V}_0 = \frac{\partial\Pi_0}{\partial\varpi} + \frac{\Pi_0}{\varpi} + \frac{\partial Z_0}{\partial z} = 2\,\frac{\Pi_0}{\varpi} + \frac{Z_0}{z} \qquad (2.108)$$

és distint de zero. Podem, aleshores, introduïr el terme

$$K = \frac{1}{2}\,\nabla.\underline{V}_0 = -\,\frac{1}{4}\,\frac{\left(2\frac{\dot{b}}{b} + \frac{\dot{c}}{c}\right) + 3\frac{\dot{b}}{b}c\varpi^2 + 3\frac{\dot{c}}{c}bz^2}{1 + c\varpi^2 + bz^2} \qquad (2.109)$$

obtingut a partir de (2.103), (2.104) i (2.108).

3. MODEL GALACTIC NO ESTACIONARI, AMB SIMETRIA CILÍNDRICA I POTENCIAL SEPARABLE.

Aquest capítol planteja l'estudi d'un model igualment no estacionari i amb simetria cilíndrica en el qual donada la separabilitat del potencial (2.81) trobat en el model descrit en el capítol anterior, s'inclou aquesta propietat com una hipòtesi més en la seva formulació. El primer apartat està dedicat a caracteritzar el model, obtenint-se el potencial U i la funció χ, donats finalment per (3.27) i (3.28). La seva forma coincideix amb la trobada en el cas B2 del capítol anterior, independentment de quines siguin les relacions existents entre les funcions k_1 i k_3, per a les quals s'han determinat les seves expressions, que coincideixen amb les trobades en el capítol segon. Han estat igualment determinades les integrals primeres, la velocitat del centroide $\underline{V}_0$, la funció σ i les relacions descrites en l'apartat quart del passat capítol, que són igualment aplicables a aquest model.

En el segon apartat s'aborda la determinació de les trajectòries de les estrelles, integrant les equacions del moviment per mitjà de les integrals primeres que presenta el sistema. Les corbes que constitueixen les seves projeccions sobre el pla equatorial es mantenen dintre de la corona determinada per dues circumferències concèntriques, tal com indica la figura 3.1, mentre que en un pla meridià que gira amb la velocitat angular de la galàxia es mouen segons la quàrtica (3.56).

El tercer apartat està destinat a descriure, en un cas particular, donada la dificultat de fer-ho en el cas general, el moviment dels centroides locals, que projectats sobre el pla equatorial, es mouen igualment dintre de la corona determinada per dues circumferències concèntriques.

Finalment, en el quart apartat es particularitzen, d'acord amb la situació del Sol en el pla de la galàxia, les relacions descrites en el primer apartat, possibilitant-ne la seva utilització en el següent capítol.

3.1. Caracterització del model.

Considerem ara, donat que en el cas B2 del capítol anterior hem obtingut un potencial (2.81) separable, és a dir, que compleix

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varpi \partial z} = 0 \tag{3.1}$$

un model no estacionari, amb simetria cilíndrica, en què les funcions del temps k_5, k_6 i δ són igualment idènticament nul.les i en qual, per hipòtesi, suposem que el potencial U compleix la propietat (3.1).

El tensor A i el vector $\underline{\Delta}$ vindran determinats, com en el capítol segon, per (2.5) i (2.6), respectivament. Igualment es complirà que les funcions del temps k_1 i k_3 i les constants k_2 i k_4 hauran d'ésser positives, així com els paràmetres (2.93), i també (2.95) sempre que prenguem la component θ_0 de la velocitat del centroide positiva en el sentit de rotació de la galàxia. Per tal de determinar el potencial U i la funció χ caldrà plantejar el sistema (2.7) ÷ (2.10), del qual se'n deduïrà igualment el caràcter constant de β. Introduïnt (2.11) obtindrem també el sistema (2.12) ÷ (2.14) i podrem expressar (3.1) com

$$U = U_\tau(t,\tau) + U_\zeta(t,\zeta) \tag{3.2}$$

Si derivem (2.12) respecte ζ, li restem la derivada de (2.13) respecte τ i tenim en compte (3.2), obtindrem

$$\tau \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \zeta \frac{\partial^2 U}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial U}{\partial \tau} - 2 \frac{\partial U}{\partial \zeta} = 0$$

d'on, un cop més segons (3.2), s'haurà de complir

$$\tau \frac{\partial^2 U_\tau}{\partial \tau^2} + 2 \frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} = \frac{H(t)}{2} \qquad (3.3)$$

$$\zeta \frac{\partial^2 U_\zeta}{\partial \zeta^2} + 2 \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta} = \frac{H(t)}{2} \qquad (3.4)$$

essent H(t) una funció arbitrària del temps.

Si introduïm

$$V_\tau = \frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} \qquad (3.5)$$

i dividim (3.3) per τ, obtindrem

$$\frac{\partial V_\tau}{\partial \tau} + \frac{2}{\tau} V_\tau = \frac{H(t)}{2\tau}$$

que, a l'integrar, dóna

$$V_\tau = - \frac{B_1(t)}{2\tau^2} + \frac{H(t)}{4}$$

Aleshores, a l'integrar (3.5) i excepte una funció arbitrària del temps, tindrem que

$$U_\tau = \frac{B_1(t)}{2\tau} + \frac{H(t)}{4} \tau \qquad (3.6)$$

i, anàlogament, a partir de (3.4),

$$U_\zeta = \frac{B_2(t)}{2\zeta} + \frac{H(t)}{4}\zeta \qquad (3.7)$$

de manera que, segons (3.2), i excepte una funció arbitrària del temps que podrem suposar nul·la sense cap pèrdua de generalitat,

$$U = \frac{B_1(t)}{2\tau} + \frac{B_2(t)}{2\zeta} + \frac{H(t)}{4}(\tau + \zeta) \qquad (3.8)$$

Derivant (2.12) respecte t i sumant-li la derivada de (2.14) respecte τ, tot tenint en compte (3.8), obtindrem

$$-\frac{k_1\dot{B}_1}{2\tau^2} - \frac{k_4\dot{B}_1\zeta}{\tau^2} + \frac{k_4\dot{B}_2}{\zeta} + \frac{k_1\dot{H}}{4} + \frac{\dot{k}_1H}{2} + \frac{1}{2}\dddot{k}_1 = 0$$

que per tal d'ésser certa per qualsevol punt τ,ζ, haurà de complir

$$k_1\dot{B}_1 = 0 \qquad (3.9)$$

$$k_4\dot{B}_1 = 0 \qquad (3.10)$$

$$k_4\dot{B}_2 = 0 \qquad (3.11)$$

$$\frac{1}{4}k_1\dot{H} + \frac{1}{2}\dot{k}_1H + \frac{1}{2}\dddot{k}_1 = 0 \qquad (3.12)$$

De (3.9) ÷ (3.11) es dedueix que B_1 i B_2 són constants, mentre que, integrant (3.12), obtenim

$$\frac{H(t)}{4} = -\frac{\ddot{k}_1}{2k_1} + \frac{\dot{k}_1^2}{4k_1^2} + \frac{\delta_1}{k_1^2} \qquad (3.13)$$

essent δ_1 una constant.

Derivant ara (2.13) respecte t i sumant-li la derivada de (2.14) respecte ζ, tenint també en compte (3.8), obtindrem

$$-\frac{k_3\dot{B}_2}{2\zeta^2}+\frac{k_4\dot{B}_1}{\tau}-\frac{k_4\dot{B}_2\tau}{\zeta^2}+\frac{k_3\dot{H}}{4}+\frac{\dot{k}_3H}{2}+\frac{1}{2}\dddot{k}_3=0$$

i, per tal que sigui certa igualment per qualsevol punt τ,ζ, s'haurà de complir

$$k_3\dot{B}_2=0 \qquad (3.14)$$

$$k_4\dot{B}_1=0 \qquad (3.15)$$

$$k_4\dot{B}_2=0 \qquad (3.16)$$

$$\frac{1}{4}k_3\dot{H}+\frac{1}{2}\dot{k}_3H+\frac{1}{2}\dddot{k}_3=0 \qquad (3.17)$$

De (3.14) ÷ (3.16) obtenim també que B_1 i B_2 són constants, mentre que, integrant (3.17) arribem en aquest cas a

$$\frac{H(t)}{4}=-\frac{\ddot{k}_3}{2k_3}+\frac{\dot{k}_3^2}{4k_3^2}+\frac{\delta_3}{k_3^2} \qquad (3.18)$$

essent δ_3 una constant.

Si introduïm

$$k_1=\phi_1^2$$
$$k_3=\phi_2^2 \qquad (3.19)$$

tindrem que (3.13) i (3.18) es podran expressar

$$\frac{H(t)}{4}=-\frac{\ddot{\phi}_1}{\phi_1}+\frac{\delta_1}{\phi_1^4}=-\frac{\ddot{\phi}_2}{\phi_2}+\frac{\delta_3}{\phi_2^4} \qquad (3.20)$$

Aleshores podem escriure (3.8) com

$$U = \frac{B_1}{2\tau} + \frac{B_2}{2\zeta} + \frac{H(t)}{4}(\tau + \zeta) \tag{3.21}$$

havent de complir H(t) la condició (3.20).

Per tal d'obtenir χ, de (3.2) i (3.21) tindrem

$$\zeta\left(\frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} - \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}\right) = \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\frac{B_1 \zeta}{2\tau} + \frac{B_2 \tau}{2\zeta}\right)$$

$$-\tau\left(\frac{\partial U_\tau}{\partial \tau} - \frac{\partial U_\zeta}{\partial \zeta}\right) = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{B_1 \zeta}{2\tau} + \frac{B_2 \tau}{2\zeta}\right)$$

de manera que, aleshores, podrem escriure (2.12) i (2.13) com

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left[k_1 U_\tau + k_3 U_\zeta + k_4\left(\frac{B_1 \zeta}{\tau} + \frac{B_2 \tau}{\zeta}\right) + \frac{1}{2}(\ddot{k}_1 \tau + \ddot{k}_3 \zeta)\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \tau}$$

$$\frac{\partial}{\partial \zeta}\left[k_1 U_\tau + k_3 U_\zeta + k_4\left(\frac{B_1 \zeta}{\tau} + \frac{B_2 \tau}{\zeta}\right) + \frac{1}{2}(\ddot{k}_1 \tau + \ddot{k}_3 \zeta)\right] = -\frac{1}{2}\frac{\partial \chi}{\partial \zeta}$$

d'on

$$-\frac{1}{2}\chi = k_1 U_\tau + k_3 U_\zeta + k_4\left(\frac{B_1 \zeta}{\tau} + \frac{B_2 \tau}{\zeta}\right) + \frac{1}{2}(\ddot{k}_1 \tau + \ddot{k}_3 \zeta) + H_3(t) \tag{3.22}$$

essent $H_3(t)$ una funció arbitrària del temps.

Segons (3.21) i (3.22), substituïnt a (2.14) i tenint en compte (3.6), (3.7), (3.12) i (3.17) obtindrem que la funció $H_3(t)$ és una constant, amb la qual cosa, un cop més segons (3.6) i (3.7), podrem escriure (3.22) com

$$-\frac{1}{2}\chi = \frac{B_1 k_1}{2\tau} + \frac{B_2 k_3}{2\zeta} + k_4\left(\frac{B_1\zeta}{\tau} + \frac{B_2\tau}{\zeta}\right) + \frac{H(t)}{4}(k_1\tau + k_3\zeta) +$$

$$+\frac{1}{2}(\ddot{k}_1\tau + \ddot{k}_3\zeta) + \text{constant} \tag{3.23}$$

Tenint en compte (2.11) i adoptant

$$B_2 = 0$$

a fi d'evitar que tant el potencial U com la funció χ prenguin un valor infinit pels punts situats en el pla galàctic, podrem escriure (3.21) i (3.2$_3$) com

$$U = \frac{B_1}{\varpi^2} + \frac{H(t)}{8}(\varpi^2 + z^2) \tag{3.24}$$

$$-\frac{1}{2}\chi = \frac{B_1(k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} + \frac{H(t)}{8}(k_1\varpi^2 + k_3 z^2) +$$

$$+\frac{1}{4}(\ddot{k}_1\varpi^2 + \ddot{k}_3 z^2) + \text{constant} \tag{3.25}$$

havent de complir la funció H(t) les relacions (3.13) i (3.18).

A partir de (2.5), (2.6) i (2.87) el model presentarà un centroide les components de la velocitat del qual seran (2.90), que presentaran la forma (2.89) cas de què k_1 i k_3 siguin iguals o proporcionals, mentre que, segons (2.5), (2.6), (2.88) i (3.25), la funció σ podrà ésser escrita com

$$\sigma = -\frac{1}{4}\,\frac{\dot{k}_1 k_3 + \dot{k}_1 k_4\varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4\varpi^2 + k_3 k_4 z^2}\,\dot{k}_1\varpi^2 - \frac{\beta^2\varpi^2}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} -$$

$$-\frac{1}{4}\,\frac{\dot{k}_3 k_1 + \dot{k}_1 k_4\varpi^2 + \dot{k}_3 k_4 z^2}{k_1 k_3 + k_1 k_4\varpi^2 + k_3 k_4 z^2}\,\dot{k}_3 z^2 + \frac{2B_1(k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} +$$

$$+\frac{H(t)}{4}(k_1\varpi^2 + k_3 z^2) + \frac{1}{2}(\ddot{k}_1\varpi^2 + \ddot{k}_3 z^2) + \text{constant}$$

que, cas d'ésser k_1 i k_3 iguals o proporcionals, prendrà la forma

$$\sigma = -\frac{1}{4}\frac{\dot{k}_1^2\varpi^2}{k_1} - \frac{\beta^2\varpi^2}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2} - \frac{1}{4}\frac{\dot{k}_3^2 z^2}{k_3} + \frac{2B_1\,(k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} +$$

$$+ \frac{H(t)}{4}\,(k_1\varpi^2 + k_3 z^2) + \frac{1}{2}\,(\ddot{k}_1\varpi^2 + \ddot{k}_3 z^2) + \text{constant}$$

i es complirà en qualsevol cas (2.91), és a dir, que σ es manté constant al llarg de les trajectòries dels centroides locals.

Les propietats dels paràmetres cinemàtics descrites a l'apartat quart del capítol segon seran igualment vàlides, corresponent les del model A al cas en què k_1 i k_3 siguin iguals, les del model B1 al cas en què siguin proporcionals i les del model B2 al cas en què no ho siguin.

Per a poder continuar el treball de forma adequada i donades les dades aportades per Oort (1965), farem la següent hipòtesi addicional

$$H(t) = 4k^2 > 0 \tag{3.26}$$

essent k una constant. Aleshores (3.24) i (3.25) prendran la forma

$$U = \frac{B_1}{\varpi^2} + \frac{k^2}{2}\,(\varpi^2 + z^2) \tag{3.27}$$

$$-\frac{1}{2}\chi = \frac{B_1\,(k_1 + k_4 z^2)}{\varpi^2} + \frac{k^2}{2}\,(k_1\varpi^2 + k_3 z^2) +$$

$$+ \frac{1}{4}\,(\ddot{k}_1\varpi^2 + \ddot{k}_3 z^2) + \text{constant} \tag{3.28}$$

mentre que la condició (3.20) s'expressarà

$$k^2 = -\frac{\ddot{\phi}_1}{\phi_1} + \frac{\delta_1}{\phi_1^4} = -\frac{\ddot{\phi}_2}{\phi_2} + \frac{\delta_3}{\phi_2^4} \tag{3.29}$$

amb solucions, tenint en compte (3.19),

$$\begin{aligned} k_1 &= \phi_1^2 = \alpha_1 \sin (2kt + \beta_1) + \gamma_1 \\ k_3 &= \phi_2^2 = \alpha_3 \sin (2kt + \beta_3) + \gamma_3 \end{aligned} \tag{3.30}$$

havent-se de complir

$$\begin{aligned} &\delta_1 > 0 & &\delta_3 > 0 \\ &\gamma_1 > 0 & &\gamma_3 > 0 \\ &\gamma_1^2 = \alpha_1^2 + \frac{\delta_1}{k^2} & &\gamma_3^2 = \alpha_3^2 + \frac{\delta_3}{k^2} \end{aligned} \tag{3.31}$$

a fi que (3.30) siguin sempre positius i constitueixin solucions de (3.29).

Basta comparar les solucions (3.30) i les condicions (3.31) amb les determinades per $C > 0$ en el cas B2 del capítol anterior, (2.75) i (2.76), respectivament, per tal de comprovar que les solucions obtingudes per aquest model coincideixen amb les trobades en el cas B2 del model estudiat en el segon capítol, amb independència ara de què k_1 i k_3 siguin iguals, proporcionals o no proporcionals.

El sumand

$$\frac{B_1}{\varpi^2}$$

del potencial (3.27) correspon (Jeans, 1923) al potencial necessari per tal que els braços de les galàxies espirals, considerats com línies de corrent, és a dir com trajectòries d'estrelles, segueixin una espiral logarítmica i es transformin amb el temps en una altra espiral logarítmica, mantenint-se, per tant, la seva forma (Orús, 1954). D'aquesta manera s'explicaria la freqüència de l'estructura espiral en les observacions de galàxies externes realitzades, així com el fet que, molt probablement, també és present en la nostra galàxia. Aquest sumand és igualment considerat per Ollongren (1962, 1965) en els seus estudis sobre òrbites estel·lars i és interpretat per ell com degut a una força centrífuga addicional introduïda per la utilització d'un sistema de coordenades mòbil.

D'altra banda, el sumand

$$\frac{k^2}{2}(\varpi^2 + z^2)$$

correspon al potencial creat en un punt interior a una esfera homogènia (Ogorodnikov, 1965). Recentment, Richstone (1979, 1980, 1982) ha estat utilitzant potencials d'aquest tipus com hipòtesis de treball en la construcció de models de galàxies. Aquest sumand correspon a la contribució efectuada per l'halo galàctic dintre del qual ens trobem immersos.

Les integrals primeres (2.83) ÷ (2.86) prendran ara la forma

$$I_1 \equiv \Pi^2 + \Theta^2 + \frac{2B_1}{\varpi^2} + k^2\varpi^2 = \text{constant} \tag{3.32}$$

$$I_2 \equiv \varpi\Theta = \text{constant} \tag{3.33}$$

$$I_3 \equiv Z^2 + k^2 z^2 = \text{constant} \tag{3.34}$$

$$I_4 \equiv (z\Pi - \varpi Z)^2 + z^2\Theta^2 + \frac{2B_1 z^2}{\varpi^2} = \text{constant} \tag{3.35}$$

designant-se aquestes constants amb la mateixa notació que les integrals primeres.

3.2. Trajectòries de les estrelles.

Per mitjà de (3.33), podem escriure (3.32) com

$$I_1 = \Pi^2 + k^2\varpi^2 + \frac{I_2^2 + 2B_1}{\varpi^2} \tag{3.36}$$

Aleshores, a partir de les definicions

$$\begin{aligned} \dot{\varpi} &= \Pi \\ \dot{\theta} &= \frac{\Theta}{\varpi} \\ \dot{z} &= Z \end{aligned} \tag{3.37}$$

i segons (3.33) i (3.37), tindrem

$$\dot{\varpi} = \frac{d\varpi}{d\theta}\,\dot{\theta} = \frac{I_2}{\varpi^2}\,\frac{d\varpi}{d\theta}$$

Si introduïm

$$u = \frac{1}{\varpi^2} \tag{3.38}$$

podrem escriure (3.36) com

$$I_1 = \frac{I_2^2}{4u}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + (I_2^2 + 2B_1)\,u + \frac{k^2}{u} \tag{3.39}$$

d'on obtenim

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + \frac{4\,(I_2^2 + 2B_1)}{I_2^2}\,u = \frac{2I_1}{I_2^2} \tag{3.40}$$

Si anomenem

$$L = 2 \frac{(I_2^2 + 2B_1)^{1/2}}{I_2^2}$$
$$M_1 = \frac{I_1}{2 (I_2^2 + 2B_1)} \qquad (3.41)$$

aleshores, tenint en compte (3.38),

$$\frac{1}{\varpi^2} = M_1 + M \cos L(\theta - \theta_0) \qquad (3.42)$$

és una solució de (3.40), havent-se de complir la condició

$$M^2 = M_1^2 - \frac{4k^2}{I_2^2 L^2} \qquad (3.43)$$

per tal que també ho sigui de (3.39).

L'equació (3.42), amb la condició (3.43), representa la projecció sobre el pla z = 0 de la trajectória d'una estrella. L'apocentre ϖ_A d'aquesta projecció vindrà donat, suposat $M > 0$, per

$$\frac{1}{\varpi_A^2} = M_1 - M \qquad (3.44)$$

i el pericentre ϖ_P per

$$\frac{1}{\varpi_P^2} = M_1 + M \qquad (3.45)$$

Es tracta d'una corba periplegmàtica que es manté dintre de la corona determinada per dues circumferències de radis ϖ_A i ϖ_P que ha estat representada a la figura 3.1 per ϖ_A = 10.5 kpc, ϖ_P = 6 kpc i per L = 6.2, corresponents a un cas particular que s'estudiarà al següent capítol.

Es interessant veure que, segons (3.41) i (3.43) ÷ (3.45),

$$\frac{1}{\varpi_A^2} \frac{1}{\varpi_P^2} = \frac{k^2}{I_2^2 + 2B_1}$$

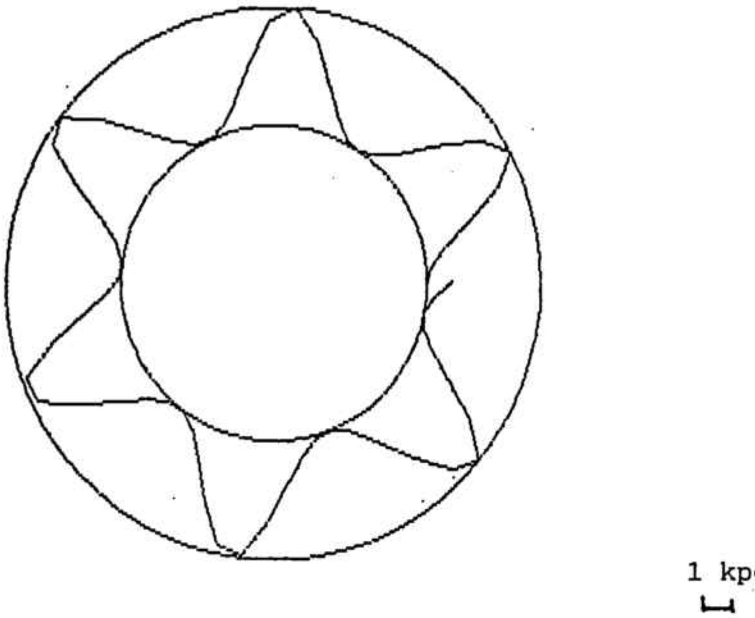

Figura 3.1. Projecció sobre el pla galàctic de la trajectòria d'una estrella d'apocentre $\varpi_A = 10.5$ kpc, pericentre $\varpi_P = 6$ kpc i L = 6.2.

i, per tant,

$$\varpi_A \varpi_P = \frac{(I_2^2 + 2B_1)^{1/2}}{k}$$

és independent de la integral de l'energia (3.32).

Segons (3.33) i (3.37),

$$\dot{\theta} = \frac{I_2}{\varpi^2} \tag{3.46}$$

i introduïnt ara

$$v = \varpi^2 \tag{3.47}$$

a partir de (3.42) i tenint en compte (3.46), es compleix que

$$LI_2 dt = \frac{dv}{[(M^2 - M_1^2)\, v^2 + 2M_1 v - 1]^{1/2}}$$

que, mitjançant (3.41) i (3.43), podem escriure com

$$2kdt = - \frac{dv_1}{(1 - v_1^2)^{1/2}} \tag{3.48}$$

on

$$v_1 = \frac{M_1}{M} - \frac{M_1^2 - M^2}{M}\, v \tag{3.49}$$

Integrant (3.48) i d'acord amb (3.47) i (3.49), podem escriure

$$\varpi^2 = \frac{M_1}{M_1^2 - M^2} - \frac{M}{M_1^2 - M^2} \cos\,(2kt + 1) \tag{3.50}$$

D'altra banda, de (3.34) i (3.37), tenim

$$\dot{z}^2 + k^2 z^2 = I_3 \tag{3.51}$$

d'on

$$\ddot{z} + k^2 z = 0$$

que, després d'haver estat integrada, dóna

$$z = D \cos\,(kt + m) \tag{3.52}$$

havent-se de complir la condició

$$D = \frac{I_3^{1/2}}{k} \qquad (3.53)$$

per tal que sigui una solució de (3.51).

Tenim, doncs, que (3.50), amb la condició (3.43), i (3.52), amb la condició (3.53), d'acord amb les definicions donades a (3.41), constitueixen les equacions horàries del moviment de les estrelles.

Cal fer notar que aquest moviment és periòdic, valent aquest període

$$P = \frac{2\pi}{k} \qquad (3.54)$$

La causa d'aquest fet resideix en la hipòtesi (3.26) que ens ha permès integrar les equacions del moviment. Els resultats obtinguts constitueixen una bona aproximació del moviment de les estrelles dintre de la galàxia, encara que no es diposi d'observacions que corroborin aquesta periodicitat.

Considerem ara, de (3.32) ÷ (3.34),

$$\Pi = \left(I_1 - k^2\varpi^2 - \frac{I_2^2 + 2B_1}{\varpi^2}\right)^{1/2}$$

$$Z = (I_3 - k^2 z^2)^{1/2}$$

Aleshores, substituïnt a (3.35), obtindrem

$$I_3^2\varpi^4 - 2\,(I_1 I_3 - 2k^2 I_4)\,\varpi^2 z^2 + (I_1^2 - 4k^2 I_2^2 - 8k^2 B_1)\,z^4 -$$
$$- 2I_3 I_4 \varpi^2 - 2\,(I_1 I_4 - 2I_2^2 I_3 - 4B_1 I_3)\,z^2 + I_4^2 = 0$$

que, anomenant

$$x = k\varpi$$

$$y = \frac{kz}{I_3^{1/2}}$$

$$A_1^2 = 4k^2 \frac{I_1 I_4}{I_3} - 4k^2 I_2^2 - 8k^2 B_1 - 4k^4 \frac{I_4^2}{I_3^2}$$

$$A_2 = I_1 - 2k^2 \frac{I_4}{I_3} \qquad (3.55)$$

$$A_3 = k^2 \frac{I_4}{I_3}$$

podem re-escriure

$$(x^2 - A_2 y^2 - A_3)^2 = A_1^2 y^2 (1 - y^2) \qquad (3.56)$$

que és l'equació que descriu el moviment de les estrelles en un pla meridià que gira amb la galàxia.

L'equació (3.56) correspon a una quàrtica simètrica respecte els eixos x i y, que intersecta l'eix x en els punts

$$x = \pm A_3^{1/2}$$

i els punts de la qual compleixen

$$-1 \leq y \leq 1$$

Així doncs, les estrelles es mouran, segons les equacions horàries (3.50) i (3.52), que hauran de complir, respectivament, les condicions (3.43) i (3.53), sobre torus centrats conjuntament amb la galàxia i la secció recta dels quals es deduïrà de (3.56), tot tenint en compte (3.55).

3.3. Trajectóries dels centroides locals.

Les equacions del moviment dels centroides locals vindran donades per

$$dt = \frac{d\varpi}{\Pi_0} = \frac{d\theta}{\frac{\theta_0}{\varpi}} = \frac{dz}{Z_0} \tag{3.57}$$

Per a poder continuar de forma adequada considerarem el cas en què k_1 i k_3 són proporcionals. Aleshores, les expressions (3.30) seran, en aquest cas,

$$\begin{aligned} k_1 &= C\alpha_3 \sin(2kt + \beta_3) + C\gamma_3 \\ k_3 &= \alpha_3 \sin(2kt + \beta_3) + \gamma_3 \end{aligned} \tag{3.58}$$

complint-se, tenint en compte (3.31),

$$\begin{aligned} &C > 0 \\ &\delta_3 > 0 \\ &\gamma_3 > 0 \\ &\gamma_3^2 = \alpha_3^2 + \frac{\delta_3}{k^2} \end{aligned}$$

i correspondran al cas en què k_1 i k_3 estan en fase.

D'altra banda, les components de la velocitat del centroide prendran la forma (2.89), considerant que es complirà que

$$\frac{\dot{k}_1}{k_1} = \frac{\dot{k}_3}{k_3}$$

Aleshores, podrem escriure (3.57) com

$$dt = \frac{d\varpi}{\frac{1}{2}\frac{\dot{k}_1}{k_1}\varpi} = \frac{d\theta}{\frac{\beta}{k_1 + k_2\varpi^2 + k_4 z^2}} = \frac{dz}{\frac{1}{2}\frac{\dot{k}_3}{k_3}z} \tag{3.59}$$

Integrant les igualtats formades pels dos primers membres de (3.59), i pel primer i l'últim, tindrem, segons (3.58),

$$\varpi^2 = m_1 \left[\alpha_3 \sin (2kt + \beta_3) + \gamma_3\right] \qquad (3.60)$$
$$z^2 = m_2 \left[\alpha_3 \sin (2kt + \beta_3) + \gamma_3\right]$$

complint-se, com a conseqüència,

$$\frac{\varpi^2}{z^2} = \frac{m_1}{m_2} = \text{constant}$$

que correspon a l'equació de dues rectes que passen per l'orígen del pla meridià ϖ,z i segons les quals es produïrà l'oscil·lació del centroide.

Si prenem la igualtat formada pel primer i el tercer membre de (3.59), tindrem, segons (3.58) i (3.60),

$$\frac{dt}{\alpha_3 \sin (2kt + \beta_3) + \gamma_3} = - \frac{1}{\beta} (C + k_2 m_1 + k_4 m_2)\, d\theta$$

a partir d'on, integrant,

$$\frac{\gamma_3 \tan (kt + \frac{\beta_3}{2}) + \alpha_3}{(\gamma_3^2 - \alpha_3^2)^{1/2}} = - \tan \left[\frac{k\, (\gamma_3^2 - \alpha_3^2)^{1/2} (C + k_2 m_1 + k_4 m_2)(\theta - \theta_0)}{\beta}\right]$$

Anomenant

$$q = \tan (kt + \frac{\beta_3}{2}) =$$
$$= - \frac{(\gamma_3^2 - \alpha_3^2)^{1/2}}{\gamma_3} \tan \left[\frac{k\, (\gamma_3^2 - \alpha_3^2)^{1/2} (C + k_2 m_1 + k_4 m_2)(\theta - \theta_0)}{\beta}\right] - \frac{\alpha_3}{\gamma_3}$$

tindrem, segons (3.60),

$$\varpi^2 = 2m_1\alpha_3 \frac{q}{1+q^2} + m_1\gamma_3$$

és a dir, que si suposem $\alpha_3 > 0$, la projecció de la trajectória del centroide local sobre el pla z = 0 tindrà, per q = 1, el seu apocentre ϖ_a, donat per

$$\varpi_a^2 = m_1\ (\gamma_3 + \alpha_3) \tag{3.61}$$

i, per q = -1, el seu pericentre ϖ_p, donat per

$$\varpi_p^2 = m_1\ (\gamma_3 - \alpha_3) \tag{3.62}$$

tendint, quan q augmenta en valor absolut, al valor

$$\varpi^2 = m_1\gamma_3$$

Es tracta, doncs, igualment, d'una corba periplegmàtica que es manté dintre de la corona determinada per dues circumferències de radis ϖ_a i ϖ_p, que compleixen, d'acord amb (3.61) i (3.62),

$$\varpi_a\varpi_p = m_1 \frac{\delta_3^{1/2}}{k}$$

3.4. Velocitat del centroide i altres paràmetres cinemàtics del model en el pla galàctic.

Quant a la posició del Sol, adoptarem que està situat a una distància del centre de la galàxia (Kerr & Lynden-Bell, 1985),

$$\varpi_{\odot} = 8.5 \pm 1.1 \text{ kpc} \qquad (3.63)$$

de l'ordre d'una desena de kpc, i donat que se li suposa una distància al pla galàctic en qualsevol cas inferior en valor absolut a 0.1 kpc, prendrem que

$$z_{\odot} = 0 \qquad (3.64)$$

Per arribar a resultats concrets, suposarem igualment que $k_1 = k_3$ i, per tant, segons (2.93), que b = c. Aleshores, les components de la velocitat del centroide (2.96) ÷ (2.98) s'escriuran

$$\Pi_0 = -\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b}\varpi \qquad (3.65)$$

$$\Theta_0 = \frac{\Omega\varpi}{1 + a\varpi^2} \qquad (3.66)$$

$$Z_0 = 0$$

i, per tant, tindrem que

$$\frac{\Pi_0}{\varpi} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b} \qquad (3.67)$$

$$\omega_0 = \frac{\Theta_0}{\varpi} = \frac{\Omega}{1 + a\varpi^2} \qquad (3.68)$$

Els gradients de les components de la velocitat del centroide $\underline{V}_0$ prendran la forma

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} = \frac{\partial Z_0}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b} \qquad \frac{\partial \Theta_0}{\partial \varpi} = \Omega \frac{1 - a\varpi^2}{(1 + a\varpi^2)^2}$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial z} = \frac{\partial \Theta_0}{\partial z} = \frac{\partial Z_0}{\partial \varpi} = 0 \tag{3.69}$$

La component radial Π_0 és, doncs, lineal en ϖ.

La corba $\Theta_0(\varpi)$ passa per l'orígen, té com asímptota horitzontal l'eix ϖ i presenta un màxim per

$$\varpi_M = a^{-1/2} \tag{3.70}$$

La component perpendicular Z_0 és nul·la, però no ho és la seva derivada respecte z.

De (3.67) i (3.69) tindrem, aleshores,

$$\frac{\Pi_0}{\varpi} = \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} = \frac{\partial Z_0}{\partial z} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b} \tag{3.71}$$

Les expressions de les constants d'Oort (2.100) seran ara

$$A = \Omega \frac{a\varpi^2}{(1 + a\varpi^2)^2} > 0$$

$$B = -\Omega \frac{1}{(1 + a\varpi^2)^2} < 0$$

$$C = 0$$

i es compliran les relacions

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{zz}} = 1 + b\varpi^2$$

$$\mu_{\varpi z} = 0 \tag{3.72}$$

$$\frac{\mu_{\theta\theta}}{\mu_{zz}} = \frac{1 + b\varpi^2}{1 + a\varpi^2}$$

entre els moments de segon ordre, essent, per tant, vàlida la relació ja coneguda (Oort, 1965)

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{\theta\theta}} = \frac{B - A}{B} = 1 + a\varpi^2 \tag{3.73}$$

que és precisament l'equació hidrodinàmica de segon ordre 110 (Sala et al., 1985) particularitzada pel cas objecte d'estudi i que ja havia estat establerta per Lindblad (1927a, 1927b) i pel mateix Oort (1928).

L'expressió del terme K serà ara, segons (3.71),

$$K = \frac{1}{2} \nabla.\underline{V}_0 = - \frac{3}{4} \frac{\dot{b}}{b} \tag{3.74}$$

4. DETERMINACIÓ DELS PARAMETRES DEL MODEL GALÀCTIC NO ESTACIONARI, AMB SIMETRIA CILÍNDRICA I POTENCIAL SEPARABLE A L'ENTORN SOLAR.

Aquest capítol està dedicat a contrastar el model estudiat en el capítol anterior, i que en el seu darrer apartat ha estat particularitzat per a la posició del Sol en el pla galàctic, amb dades observacionals, considerades representatives de l'entorn solar. Aquestes han estat obtingudes a partir d'una mostra d'estrelles de tipus espectrals F6 - F7, classe de lluminositat V i velocitat residual respecte el centroide de Delhaye inferior a 65 kms^{-1}. En el primer apartat s'han calculat les components de la velocitat heliocèntrica del centroide així com els moments centrats fins a quart ordre. Els resultats obtinguts, que es troben a la taula 4.1, confirmen, d'una banda, la validesa de les hipótesis formulades en adoptar la funció de distribució que descriu les velocitats de les estrelles a l'entorn solar, i de l'altra, la validesa de la hipótesi de situar el Sol en el pla galàctic.

En el segon apartat s'ha calculat, en el marc del model objecte d'estudi, el diferencial del camp local de velocitats. Els resultats obtinguts, que figuren a les taules 4.2 i 4.3, descriuen el comportament cinemàtic de la galàxia a l'entorn solar i presenten un bon acord amb els determinats per altres autors, per molt diversos mètodes, amb els quals han estat contrastats. És de remarcar la presència, a l'entorn solar, d'una expansió en la direcció radial.

En el tercer apartat han estat determinats altres paràmetres cinemàtics i dinàmics del model. Alguns d'ells, que en general només és possible afitar, figuren a la taula 4.4, havent estat estimats després de suposar que les estrelles es mouen segons trajectòries les projeccions de les quals sobre el pla galàctic han estat dibuixades, en el capítol anterior, a la figura 3.1.

Finalment, el quart apartat resum les aportacions fonamentals del present treball, així com les conclusions que d'ell se'n poden extreure.

4.1. Moments centrats d'una mostra d'estrelles representativa de l'entorn solar.

S'han calculat, en la base B_3 (vegeu la figura 1.2), les components de la velocitat heliocèntrica del centroide $\underline{W}_0$, i dels moments centrats de segon, tercer i quart ordre μ_2, μ_3 i μ_4 segons el mètode i els programes descrits a Núñez & Torra (1982). En essència, a partir de les dades contingudes en el catàleg s'han obtingut les components de les velocitats heliocèntriques (1.33) de les estrelles. Les components de la velocitat heliocèntrica del centroide (1.34) han estat trobades mitjançant

$$\underline{W}_0 = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \underline{W}_i$$

i, a partir de (1.37), s'han determinat les $(n^2+3n+2)/2$ components dels moments centrats (1.36) per a $n = 2$, $n = 3$ i $n = 4$. S'han calculat, així mateix, les desviacions estàndard de les components de la velocitat heliocèntrica del centroide (1.34) i de les components dels moments centrats (1.36), segons les expressions que figuren detallades a Núñez & Torra (1982).

Per tal d'avaluar les condicions (1.31) i (2.92) i donada la hipótesi efectuada sobre el caràcter estadístic dels errors amb què s'han determinat els moments, s'ha adoptat el criteri de considerar que un dels moments (1.37) s'anul.la sempre que el seu valor absolut sigui inferior o igual a dues vegades la seva desviació estàndard, reduïnt, per tant, la probabilitat que el valor del moment estigui fora de l'interval considerat, que conté el valor nul, a 0.0455 (Trumpler & Weaver, 1953).

Així mateix, han estat avaluades les condicions

$$\mu_{\varpi\varpi\varpi\theta} = \mu_{\varpi\varpi\theta z} = \mu_{\varpi\theta\theta\theta} = \mu_{\varpi\theta zz} = \mu_{\theta\theta\theta z} = \mu_{\theta zzz} = 0 \qquad (4.1)$$

obtingudes a partir de (1.29) i (2.5), així com el valor

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{3}{5}\,\frac{\Phi_0(\sigma)\,\Phi_4(\sigma)}{[\Phi_2(\sigma)]^2} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}}{3\mu_{\varpi\varpi}^2} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\varpi z}}{3\mu_{\varpi\varpi}\mu_{\varpi z}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}}{\mu_{\varpi\varpi}\mu_{\theta\theta}} = \frac{\mu_{\varpi\varpi zz}}{\mu_{\varpi\varpi}\mu_{zz} + 2\mu_{\varpi z}^2} = \\ &= \frac{\mu_{\varpi\theta\theta z}}{\mu_{\varpi z}\mu_{\theta\theta}} = \frac{\mu_{\varpi zzz}}{3\mu_{\varpi z}\mu_{zz}} = \frac{\mu_{\theta\theta\theta\theta}}{3\mu_{\theta\theta}^2} = \frac{\mu_{\theta\theta zz}}{\mu_{\theta\theta}\mu_{zz}} = \frac{\mu_{zzzz}}{3\mu_{zz}^2} \end{aligned} \qquad (4.2)$$

deduït a partir de (1.30), igual a un terç de la curtosi, que ha estat estimat segons el mètode dels quadrats mínims (Kendall & Stuart, 1979), havent-se utilitzat un sistema de pesos dependents dels errors amb què s'hagin determinat els valors de cada un dels moments que intervenen a (1.30).

Aquests càlculs s'han efectuat sobre una mostra de 323 estrelles de tipus espectrals F6 - F7, classe de luminositat V i velocitat residual respecte el centroide de Delhaye (1965) inferior a 65 $\mathrm{kms^{-1}}$, obtingudes a partir d'un catàleg compilat per Figueras (1986). Aquest catàleg conté 12824 estrelles amb tots els paràmetres necessaris per al càlcul de la velocitat espacial de cada estrella, extretes del catàleg S.A.O. amb dades astrofísiques (Ochsenbein, 1980) i havent estat complertat quant a les paral.laxis que no hi figuraven.

La raó d'ésser tan restrictius quant a la mostra d'estrelles seleccionada està motivada pel diferent comportament cinemàtic de les estrelles amb característiques astrofísiques diferents (Mihalas & Binney, 1981) tal i com expliquem a continuació. Al prendre la velocitat residual repecte el centroide de Delhaye inferior a 65 kms^{-1}, excloem les estrelles d'alta velocitat que es mouen seguint òrbites molt excèntriques i tenen, per tant, característiques cinemàtiques pròpies. Al seleccionar estrelles de classe de lluminositat V, nanes de la seqüència principal, excloem les estrelles gegantes i supergegantes, menys nombroses i més allunyades, que cas d'haver estat incloses haurien donat lloc a una mostra de distribució espacial molt desigual.

Havent exclós estrelles dels primers tipus espectrals, eliminem estrelles més joves, pròpies dels braços espirals i que reflecteixen en gran mesura el moviment del gas a partir del qual han estat formades. Les estrelles anteriors a l'anomenada discontinuïtat de Parenago, situada en el tipus espectral F5, presenten moments bastant més baixos que les de tipus espectrals més avançats. La raó d'excloure estrelles dels últims tipus espectrals ve donada per tractar-se d'estrelles molt poc lluminoses, detectades en un nombre molt inferior a aquell que els correspondria segons la funció de lluminositat i situades molt a prop del Sol, amb la qual cosa donen compte sobre tot de les irregularitats locals del moviment de les estrelles de l'entorn solar.

Per tant, les estrelles escollides, que formen part de l'anomenada població jove del disc, amb potser alguna inclusió d'estrelles pertanyents a les components esferoidals de la galàxia, poden considerar-se estrelles representatives de l'entorn solar, tot i tenir en compte les limitacions dels catàlegs amb què es treballa i la necessitat de tenir una mostra amb un nombre suficient d'estrelles com per a què els resultats obtinguts tinguin significació. A la taula 4.1 es troben les components de la velocitat heliocèntrica del centroide $\underline{W}_{\odot}$ i dels moments centrats d'ordre dos i d'ordre quatre distints de zero de la citada mostra.

El fet d'haver obtingut per a la resta de moments centrats que compleixen les condicions (1.31), (2.92) i (4.1), així com haver estat determinat el paràmetre (4.2), el valor del qual

$$\rho = 0.92 \pm 0.03$$

és molt pròxim a 1, que seria el corresponent a una funció de distribució de Schwarzschild, corroboren la validesa de la funció de distribució adoptada per a descriure la mostra d'estrelles, representativa de l'entorn solar, objecte d'estudi. D'altra banda, segons la taula 4.1, el fet d'haver obtingut

$$\mu_{\varpi z} = \mu_{\varpi\varpi\varpi z} = \mu_{\varpi\theta\theta z} = \mu_{\varpi zzz} = 0$$

sosté la hipòtesi efectuada en situar el Sol en el pla galàctic.

4.2. Camp de velocitats d'una mostra d'estrelles representativa de l'entorn solar.

D'acord amb el model estudiat en el capítol anterior i que en el seu darrer apartat hem particularitzat per a una posició situada en el pla galàctic i pel cas en què les funcions del temps k_1 i k_3 són iguals, tindrem que, per a la posició del Sol $\underline{r}_{\odot}$,

U_0	$= -\ 8 \pm 1$	kms^{-1}
V_0	$= -\ 12 \pm 1$	
W_0	$= -\ 7 \pm 1$	
$\mu_{\varpi\varpi}$	$= 598 \pm 41$	$\mathrm{km}^2\mathrm{s}^{-2}$
$\mu_{\varpi z}$	$= -\ 5 \pm 17$	
$\mu_{\theta\theta}$	$= 218 \pm 21$	
μ_{zz}	$= 147 \pm 13$	
$\mu_{\varpi\varpi\varpi\varpi}$	$= 906929 \pm 51117$	$\mathrm{km}^4\mathrm{s}^{-4}$
$\mu_{\varpi\varpi\varpi z}$	$= 1902 \pm 31426$	
$\mu_{\varpi\varpi\theta\theta}$	$= 119648 \pm 14609$	
$\mu_{\varpi\varpi zz}$	$= 98840 \pm 14002$	
$\mu_{\varpi\theta\theta z}$	$= -\ 2409 \pm 7627$	
$\mu_{\varpi zzz}$	$= -\ 1442 \pm 10576$	
$\mu_{\theta\theta\theta\theta}$	$= 184109 \pm 11525$	
$\mu_{\theta\theta zz}$	$= 37387 \pm 6914$	
μ_{zzzz}	$= 74018 \pm 4096$	

Taula 4.1. Components de la velocitat heliocèntrica del centroide i dels moments centrats d'ordre dos i d'ordre quatre.

$$S_{11} = S_{22} = S_{33} \qquad S_{12} \equiv A \neq 0 \qquad S_{13} = S_{23} = 0$$
$$\Omega_1 = \Omega_2 = 0 \qquad \Omega_3 \equiv B \neq 0 \tag{4.3}$$

i, segons (3.73), es complirà la relació

$$B = - \frac{\mu_{\theta\theta}}{\mu_{\varpi\varpi} - \mu_{\theta\theta}} A \tag{4.4}$$

que s'ha utilitzat per a rebaixar el nombre d'incógnites en el sistema d'equacions a resoldre en lloc de constituïr una condició suplementària de tancament.

Com a conseqüència, tenint en compte (1.39), (1.42), (4.3) i (4.4), les equacions (1.47) adoptaran ara la forma

$$\frac{1}{\rho} V_\rho = \frac{1}{\rho} (- \cos\alpha \cos\delta \, x_\odot - \sin\alpha \cos\delta \, y_\odot - \sin\delta \, z_\odot) + \\ + \cos^2 b \sin 2l \, A + S_{11}$$

$$\mu_\alpha \cos\delta = \frac{1}{\rho} (\sin\alpha \, x_\odot - \cos\alpha \, y_\odot) + \sin\alpha \sin\delta \, \Delta n + \cos\delta \, \Delta k + \\ + \left[\left(\cos 2l + \frac{\mu_{\theta\theta}}{\mu_{\theta\theta} - \mu_{\varpi\varpi}}\right) \cos b \cos\phi + \frac{1}{2} \sin 2l \sin 2b \sin\phi\right] A \tag{4.5}$$

$$\mu_\delta = \frac{1}{\rho} (\cos\alpha \sin\delta \, x_\odot + \sin\alpha \sin\delta \, y_\odot - \cos\delta \, z_\odot) + \cos\alpha \, \Delta n + \\ + \left[\left(\cos 2l + \frac{\mu_{\theta\theta}}{\mu_{\theta\theta} - \mu_{\varpi\varpi}}\right) \cos b \sin\phi - \frac{1}{2} \sin 2l \sin 2b \cos\phi\right] A$$

La resolució del sistema de 3k equacions de les formes (4.5) per tal de determinar les components de la velocitat residual del Sol (1.46), les correccions a les constants de la precessió (1.39), totes dues en la base B_{Ξ}, i les components, en la base B_{Ξ}, de les parts simètrica i anti-simètrica del diferencial del camp de velocitats (4.3), tot tenint en compte la condició (4.4), s'ha efectuat pel mètode dels quadrats mínims (Kendall & Stuart, 1979) seguint el procediment utilitzat per Rius (1974), Núñez (1981) i Torra (1984).

En essència, si expressem el sistema a resoldre de forma matricial

$$AX = Y$$

la solució obtinguda pel mètode dels quadrats mínims és

$$\tilde{X} = T^{-1}A^{t}PY$$

essent

$$T = A^{t}PA$$

i on P és una matriu diagonal de pesos. L'error probable de l'estimació de la component i-èsima és

$$\Delta\tilde{X}_i = 0.6745 \left(\frac{V^{t}PV}{N - n} T^{-1}_{ii}\right)^{1/2}$$

on

$$V = A\tilde{X} - Y$$

N és el nombre d'equacions i n el d'incógnites.

El sistema d'equacions de les formes (4.5) ha estat resolt per al conjunt d'estrelles de la mostra considerada representativa de l'entorn solar utilitzada en l'apartat anterior. Els resultats obtinguts es troben a la taula 4.2. A partir d'ells, s'han determinat en la base B_3, les components de la velocitat residual del Sol $\underline{v}_{\odot}$ i de les parts simètrica i anti-simètrica del diferencial del camp de velocitats, que figuren a la taula 4.3.

Com es pot veure, la relació (1.35) entre la velocitat heliocèntrica del centroide i la velocitat residual del

$x_{\odot} = -0.02 \pm 0.01$ "/secle

$y_{\odot} = -0.30 \pm 0.01$

$z_{\odot} = 0.17 \pm 0.01$

$\Delta n = 0.37 \pm 0.25$

$\Delta k = -0.54 \pm 0.26$

$A = 0.34 \pm 0.22$

$S_{11} = 0.13 \pm 0.20$

Taula 4.2. Components de la velocitat residual del Sol (base B_2), correccions a les constants de la precessió (base B_2), constant d'Oort A i coeficient S_{11} (base B_3).

$u_{\odot} = 8.4 \pm 0.5$ kms^{-1}

$v_{\odot} = 11.8 \pm 0.5$

$w_{\odot} = 7.3 \pm 0.5$

$A = 16.1 \pm 10.4$ $kms^{-1}kpc^{-1}$

$B = -9.2 \pm 5.6$

$S_{11} = S_{22} = S_{33} = 6.2 \pm 9.5$

Taula 4.3. Components de la velocitat residual del Sol, constants d'Oort A i B i coeficients S_{11}, S_{22} i S_{33} (base B_3).

Sol, que es troben, respectivament, a les taules 4.1 i 4.3, es compleix amb exactitud, i està en perfecta concordància amb els seus valors estàndard

$$u_{\odot} = 9 \text{ kms}^{-1}$$

$$v_{\odot} = 12$$

$$w_{\odot} = 7$$

determinats per Delhaye (1965).

Pel que fa a les correccions a les constants de la precessió, determinades amb uns errors considerables, en el cas de Δn, és molt coincident amb l'admès internacionalment (Fricke, 1977),

$$\Delta n = 0.44 \pm 0.04 \text{ ''/secle}$$

mentre que, en el cas de Δk, encara que gairebé compatible, en el límit del seu error, amb el de Fricke (1977),

$$\Delta k = - 0.19 \pm 0.06 \text{ ''/secle}$$

és més gran en valor absolut, com també passa, entre d'altres, amb les determinacions de Morgan & Oort (1951),

$$\Delta k = - 0.40 \pm 0.10 \text{ ''/secle}$$

Vasilevskis & Klemola (1971),

$$\Delta k = - 0.78 \pm 0.09 \text{ ''/secle}$$

Asteriadis (1977),

$$\Delta k = - 0.36 \pm 0.02 \text{ ''/secle}$$

i Kharchenko et al. (1985),

$$\Delta k = -\ 0.46 \pm 0.16\ ''/\text{secle},$$

Les constants d'Oort A i B, encara que determinades amb un considerable error, són molt semblants a les acceptades internacionalment

$$A = \quad 15.0 \pm 0.8\ \text{kms}^{-1}\text{kpc}^{-1}$$

$$B = -\ 10.0 \pm 0.8$$

El valor obtingut per als coeficients S_{11}, S_{22} i S_{33} és, de molt, el més mal determinat. Si adoptem en lloc del valor clàssic ressenyat per Allen (1976),

$$\varpi_{\odot} = 10.0 \pm 0.8\ \text{kpc}$$

el més recent (3.63), de Kerr & Lynden-Bell (1985), tindrem a partir dels valors de la taula 4.3,

$$\Pi_0 = 50 \pm 80\ \text{kms}^{-1} \tag{4.6}$$

del mateix ordre del valors donats per Clube (1978),

$$\Pi_0 = 40\ \text{kms}^{-1}$$

i Núñez (1981),

$$\Pi_0 = 50 \pm 30\ \text{kms}^{-1}$$

que indiquen la presència a l'entorn solar d'una expansió radial de la galàxia. Aquesta expansió haurà de créixer amb la distància al centre de la galàxia segons

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} = 6.2 \pm 9.5\ \text{kms}^{-1}\text{kpc}^{-1} \tag{4.7}$$

A partir de les constants d'Oort tindrem

$$\theta_0 = (A - B)\,\varpi$$

i sempre suposant la distància al centre de la galàxia (3.63) donada per Kerr & Lynden-Bell (1985), obtindrem

$$\theta_0 = 215 \pm 105 \ \mathrm{kms}^{-1} \tag{4.8}$$

totalment coincident amb la donada per aquests autors

$$\theta_0 = 222 \pm 20 \ \mathrm{km\,s}^{-1}$$

Igualment a partir de les constants d'Oort, tindrem

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial\varpi} = -\,(A + B)$$

que, a l'entorn del Sol, pren el valor

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial\varpi} = -\,6.9 \pm 12.0 \ \mathrm{kms}^{-1}\mathrm{kpc}^{-1}$$

i, d'acord amb Kerr & Lynden-Bell (1985),

$$\omega_\odot = \frac{\theta_0}{\varpi_\odot} = 26.1 \pm 2.4 \ \mathrm{kms}^{-1}\mathrm{kpc}^{-1}$$

d'on es dedueix que l'any còsmic, per la distància del Sol al centre de la galàxia, té un valor aproximat de

$$P = 2.4 \times 10^8 \ \mathrm{anys} \tag{4.9}$$

D'acord amb la hipòtesi (3.64) tenim

$$Z_0 = 0 \tag{4.10}$$

tal com la majoria d'autors accepten (Núñez, 1981), mentre que aquesta velocitat creix amb la distància al pla galàctic segons

$$\frac{\partial Z_0}{\partial z} = 6.2 \pm 9.5 \ \mathrm{kms^{-1}kpc^{-1}}$$

resultant-ne una velocitat perpendicular positiva per sobre del pla galàctic i negativa per sota.

Finalment, el terme K (3.74) pren el valor

$$K = 9.3 \pm 14.3 \ \mathrm{kms^{-1}kpc^{-1}}$$

menys elevat que el determinat per Torra (1984),

$$K = 12.3 \pm 2.5 \ \mathrm{kms^{-1}kpc^{-1}}$$

però més que els donats per Ogorodnikov (1965),

$$K = 6 \pm 2 \ \mathrm{kms^{-1}kpc^{-1}}$$

i per Tsioumis & Fricke (1979),

$$K = 4.4 \pm 0.9 \ \mathrm{kms^{-1}kpc^{-1}}$$

4.3. Determinació d'altres paràmetres del model a l'entorn solar.

Al llarg d'aquest apartat i donat el caràcter d'aproximació que tenen els valors utilitzats, prescindirem de donar els errors de què aquells estan afectats. Si adoptem per a la posició del Sol els valors (3.63) i (3.64),

$$\varpi_0 = 8.5 \text{ kpc}$$

$$z_0 = 0$$

aleshores, donada l'expressió (3.73),

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{\theta\theta}} = 1 + a\varpi^2$$

i a partir dels valors de $\mu_{\varpi\varpi}$ i $\mu_{\theta\theta}$ que figuren a la taula 4.1 tindrem que

$$a = 0.024 \text{ kpc}^{-2} \tag{4.11}$$

d'on, per mitjà de (3.66),

$$\theta_0 = \frac{\Omega\varpi}{1 + a\varpi^2}$$

i adoptant per a θ_0 el valor calculat (4.8), tindrem que la velocitat angular a l'orígen serà

$$\Omega = 70 \text{ kms}^{-1}\text{kpc}^{-1}$$

Segons (3.70) la corba $\theta_0(\varpi)$ presenta un màxim per

$$\varpi_M = a^{-\frac{1}{2}} = 6.5 \text{ kpc}$$

i com que, d'acord amb (1.44), (3.65) i (3.69),

$$S_{11} = -\frac{1}{2}\frac{\dot{b}}{b} \tag{4.12}$$

tindrem que, a partir de (3.66), (3.70) i del valor de S_{11} que figura a la taula 4.3,

$$\Pi_M = S_{11}\varpi_M = 40 \text{ kms}^{-1}$$

$$\Theta_M = \frac{1}{2}\,\Omega\varpi_M = 225 \text{ kms}^{-1}$$

i, segons (3.68) i (3.70),

$$\omega_M = \frac{1}{2}\,\Omega = 35 \text{ kms}^{-1}\text{kpc}^{-1}$$

d'on es dedueix un període de rotació

$$P_M = 1.8 \times 10^8 \text{ anys}$$

Tenint en compte (3.72),

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi}}{\mu_{zz}} = 1 + b\varpi^2$$

i a partir dels valors de $\mu_{\varpi\varpi}$ i μ_{zz} expressats a la taula 4.1, tindrem

$$b = 0.043 \text{ kpc}^{-2} \tag{4.13}$$

A partir del valor de S_{11} de la taula 4.3 i tenint en compte (2.93), (3.69) i (4.12), tindrem

$$\begin{aligned}\frac{\dot{b}}{b} = -\frac{\dot{k}_1}{k_1} &= -12.4 \text{ kms}^{-1}\text{kpc}^{-1} \\ &= -0.4 \times 10^{-15} \text{ s}^{-1} \\ &= -1.26 \times 10^{-8} \text{ any}^{-1}\end{aligned} \tag{4.14}$$

d'on, segons (4.13),

$$\dot{b} = -\,1.72 \times 10^{-17}\ \mathrm{kpc}^{-2}\mathrm{s}^{-1}$$
$$= -\,5.43 \times 10^{-10}\ \mathrm{kpc}^{-2}\mathrm{any}^{-1}$$

Una vegada estudiats aquests paràmetres cinemàtics, passem a descriure'n altres, relacionats aquests amb el potencial U. A partir de (3.27) tindrem

$$-\frac{\partial U}{\partial z} = k^2 z$$

i donat que, segons Mihalas & Routly (1968), tot recollint un treball d'Oort (1965), un valor de k^2 pot venir donat per

$$k^2 = 0.9 \times 10^{-29}\ \mathrm{s}^{-2} \tag{4.15}$$

obtindrem, d'una banda, que el període (3.54) de les equacions horàries del moviment de les estrelles serà

$$P = \frac{2\pi}{k} = 0.6 \times 10^8 \text{ anys}$$

mentre que, de (3.60), el període de les equacions horàries del moviment del centroide local serà

$$P_0 = \frac{2\pi}{2k} = 0.3 \times 10^8 \text{ anys}$$

aproximadament iguals, respectivament, a una quarta part i a una vuitena part de l'any cósmic (4.9) per la distància del Sol al centre de la galàxia.

A més, tindrem que, segons (3.13), (3.26) i (3.31),

$$-\frac{\ddot{k}_1}{2k_1} = k^2 - \frac{\dot{k}_1^2}{4k_1^2} - \frac{\delta_1}{k_1^2} < k^2 - \frac{\dot{k}_1^2}{4k_1^2}$$

d'on, segons els valors (4.14) i (4.15),

$$\frac{\ddot{k}_1}{k_1} > -1.8 \times 10^{-29}\ s^{-2} \tag{4.16}$$

Considerem ara la equació hidrodinàmica 100 (Sala et al., 1985), primera de les anomenades del moviment, que particularitzada pel model objecte d'estudi serà

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial t} + \Pi_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} - \frac{\Theta_0^2}{\varpi} + \mu_{\varpi\varpi} \frac{\partial \ln N}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mu_{\varpi\varpi}}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mu_{\varpi z}}{\partial z} + \frac{\mu_{\varpi\varpi} - \mu_{\theta\theta}}{\varpi} = -\frac{\partial U}{\partial \varpi} \tag{4.17}$$

L'avaluació de cada un dels termes que hi figuren permetrà obtenir un valor aproximat de la força radial $-\partial U/\partial \varpi$.

De (2.89), (3.63), (4.14) i (4.16), tindrem

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{k}_1}{k_1} - \frac{\dot{k}_1^2}{k_1^2}\right) \varpi > -73400\ km^2 s^{-2} kpc^{-1} \tag{4.18}$$

mentre que, de (4.6) i (4.7),

$$\Pi_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} = 300\ km^2 s^{-2} kpc^{-1} \tag{4.19}$$

i, de (3.63) i (4.8),

$$-\frac{\Theta_0^2}{\varpi} = -5400\ km^2 s^{-2} kpc^{-1} \tag{4.20}$$

Segons Stodólkiewicz (1973),

$$\frac{\partial \ln N}{\partial \varpi} = -0.1\ kpc^{-1}$$

Per tant, a partir del corresponent valor de la taula 4.1,

$$\mu_{\varpi\varpi} \frac{\partial \ln N}{\partial \varpi} = -60\ km^2 s^{-2} kpc^{-1} \tag{4.21}$$

Un valor per a la variació dels moments de segon ordre amb la distància l'hem obtingut de suposar constant la relació (2.94), tal com passaria si la funció de distribució fos de tipus Schwarzschild. Aleshores, segons aquesta relació (2.94), i tenint en compte (3.64),

$$\frac{\partial \mu_{\varpi\varpi}}{\partial \varpi} = 2\,(a\,\mu_{\theta\theta} + b\,\mu_{zz})\,\varpi$$

$$\frac{\partial \mu_{\varpi z}}{\partial z} = b\,\mu_{zz}\,\varpi$$

i, a partir de (3.63), (4.11), (4.13) i dels valors de la taula 4.1,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu_{\varpi\varpi}}{\partial \varpi} &= 100\ \mathrm{km^2 s^{-2} kpc^{-1}} \\ \frac{\partial \mu_{\varpi z}}{\partial z} &= \ \ 50\ \mathrm{km^2 s^{-2} kpc^{-1}} \end{aligned} \tag{4.22}$$

mentre que, igualment a partir de (3.63) i dels valors de la taula 4.1,

$$\frac{\mu_{\varpi\varpi} - \mu_{\theta\theta}}{\varpi} = 45\ \mathrm{km^2 s^{-2} kpc^{-1}} \tag{4.23}$$

Aleshores, substituïnt (4.18) ÷ (4.23) a (4.17), segons (3.27) obtindrem

$$-\frac{\partial U}{\partial \varpi} = \frac{2B_1}{\varpi^3} - k^2\varpi > -\ 78000\ \mathrm{km^2 s^{-2} kpc^{-1}} \tag{4.24}$$

on, segons (3.63) i (4.15),

$$-\ k^2\varpi = -\ 73000\ \mathrm{km^2 s^{-2} kpc^{-1}} \tag{4.25}$$

Així doncs, de (4.24) i (4.25), tindrem

$$\frac{2B_1}{\varpi^3} > -\ 5000\ km^2s^{-2}kpc^{-1} \tag{4.26}$$

i, segons (3.63),

$$B_1 > -\ 1.6 \times 10^{-27}\ kpc^4s^{-2} \tag{4.27}$$

Si introduïm ara, segons Mihalas & Routly (1968), la velocitat circular θ_C com

$$-\frac{\partial U}{\partial \varpi} = -\frac{\theta_C^2}{\varpi} \tag{4.28}$$

aleshores, d'acord amb (3.63), (4.24) i (4.28),

$$\theta_C < 810\ kms^{-1}$$

Ara bé, si tenim en compte (3.13), (3.26), (3.63), (4.18) i (4.25), obtindrem

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial t} = \frac{1}{2}\left(\frac{\ddot{k}_1}{k_1} - \frac{\dot{k}_1^2}{k_1^2}\right)\varpi > -\ 73400\ km^2s^{-2}kpc^{-1}$$

$$-\ k^2\varpi = -\left(-\frac{\ddot{k}_1}{2k_1} + \frac{\dot{k}_1^2}{4k_1^2} + \frac{\delta_1}{k_1^2}\right)\varpi = -\ 73000\ km^2s^{-2}kpc^{-1}$$

mentre que, segons (4.20) i (4.26),

$$-\frac{\theta_0^2}{\varpi} = -\ 5400\ km^2s^{-2}kpc^{-1}$$

$$\frac{2B_1}{\varpi^3} > -\ 5000\ km^2s^{-2}kpc^{-1}$$

per tant, donat l'ordre de magnitud dels altres termes (4.19) i (4.21) ÷ (4.23) que apareixen a (4.17), tindrem que, en primera aproximació

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial t} + \Pi_0 \frac{\partial \Pi_0}{\partial \varpi} + \mu_{\varpi\varpi} \frac{\partial \ln N}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mu_{\varpi\varpi}}{\partial \varpi} + \frac{\partial \mu_{\varpi z}}{\partial z} + \frac{\mu_{\varpi\varpi} - \mu_{\theta\theta}}{\varpi} =$$

$$= - \left(- \frac{\ddot{k}_1}{2k_1} + \frac{\dot{k}_1^2}{4k_1^2}\right) \varpi$$

$$- \frac{\theta_0^2}{\varpi} = \frac{2B_1}{\varpi^3} - \frac{\delta_1}{k_1^2} \varpi$$

O sigui que, depenent sempre de què el terme $\delta_1\varpi/k_1^2$ sigui petit, la força centrífuga $-\theta_0^2/\varpi$ està compensada pel terme $2B_1/\varpi^3$, corroborant la interpretació que en dóna Ollongren (1962), mentre que són la resta de termes de (4.17) qui compensen el terme $-k^2\varpi$ degut a l'halo. Quan això fos cert, la velocitat circular θ_c definida a (4.28) tindria un valor semblant a la component θ_0 de la velocitat del centroide.

Per tal d'obtenir el potencial U, a partir de (3.63), (3.64), (4.15) i (4.27), tindrem

$$\frac{B_1}{\varpi^2} > - 20000 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$$

$$\frac{k^2}{2} \varpi^2 = 309000 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$$

i, segons (3.27),

$$U = \frac{B_1}{\varpi^2} + \frac{k^2}{2} \varpi^2 > 289000 \text{ km}^2\text{s}^{-2} \tag{4.29}$$

A fi d'avaluar els paràmetres que fins ara només ha estat possible afitar, vegem quins valors prendran les integrals de l'energia (3.32) i de les àrees (3.33) per una estrella la velocitat de la qual sigui, a l'entorn solar, la del centroide local, que té components (4.6), (4.8) i (4.10). Aleshores, a partir de (3.32), (3.33), (3.63), (4.6), (4.8) i (4.29), tindrem que

$$\begin{aligned} I_1 &= \Pi^2 + \theta^2 + 2U > 621000\ \mathrm{km^2 s^{-2}} \\ I_2 &= \varpi\theta = 1870\ \mathrm{kms^{-1}kpc} \\ &= 6.1 \times 10^{-14}\ \mathrm{kpc^2 s^{-1}} \end{aligned} \qquad (4.30)$$

d'on, segons (3.41), (4.27) i (4.30), tindrem

$$L = 2\left(\frac{I_2^2 + 2B_1}{I_2^2}\right)^{1/2} > 0.89$$

i, per tant, el pas angular de la projecció de la trajectória de les estrelles sobre el pla galàctic complirà

$$P_L = \frac{2\pi}{L} < 7\ \mathrm{rad}$$

Ara bé, segons Oort (1965), donats els valors (4.6) i (4.8) de les components radial i tangencial de la velocitat de l'estrella considerada, uns valors aproximats de l'apocentre ϖ_A i del pericentre ϖ_P de la projecció de la seva trajectória sobre el pla galàctic, donats per (3.44) i (3.45), respectivament, són

$$\begin{aligned} \varpi_A &= 10.5\ \mathrm{kpc} \\ \varpi_P &= 6\ \ \mathrm{kpc} \end{aligned}$$

Aleshores, de manera gairebé anàloga al procés realitzat al llarg d'aquest apartat, podem obtenir els paràmetres encara no determinats, una estimació dels quals donem a la taula 4.4.

$$\frac{\ddot{k}_1}{k_1} = -\,0.42 \times 10^{-29}\ s^{-2}$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial t} = -\,1.9 \times 10^{-29}\ kpcs^{-2}$$

$$= -\,18000\ km^2 s^{-2} kpc^{-1}$$

$$-\frac{\partial U}{\partial \varpi} = -\,23000\ km^2 s^{-2} kpc^{-1}$$

$$\frac{2B_1}{\varpi^3} = 50000\ km^2 s^{-2} kpc^{-1}$$

$$B_1 = 1.6 \times 10^{-26}\ kpc^4 s^{-1}$$

$$\theta_C = 440\ kms^{-1}$$

$$\frac{B_1}{\varpi^2} = 210900\ km^2 s^{-2}$$

$$U = 515900\ km^2 s^{-2}$$

$$I_1 = 1082700\ km^2 s^{-2}$$

$$L = 6.2$$

$$P_L = 1\ rad$$

Taula 4.4. Paràmetres del model pel cas en què les projeccions de les trajectòries de les estrelles sobre el pla galàctic tenen apocentre ϖ_A = 10.5 kpc i pericentre ϖ_P = 6 kpc.

Cal posar de manifest el fet que $B_1 > 0$, la qual cosa comporta la presència en la força radial $-\partial U/\partial\varpi$ d'un important terme repulsiu $2B_1/\varpi^3$, tal com formula Ollongren (1962, 1965), que contraresta part de l'atracció $-k^2\varpi$ deguda a l'halo. Aquest fet és també la causa que la velocitat circular θ_C s'allunyi del valor de θ_0.

Quant al valor obtingut pel potencial, on la contribució del terme B_1/ϖ^2 és de l'ordre de dues terceres parts de la deguda a l'halo $k^2\varpi^2/2$, resulta considerablement més gran que els obtinguts per altres autors a partir de models basats en la funció de densitat de massa i de característiques diferents, com són

$$U = 185000 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$$

segons Caldwell & Ostriker (1981),

$$U = 97000 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$$

segons Rohlfs & Kreitschmann (1981), o el més antic

$$U = 41000 \text{ km}^2\text{s}^{-2}$$

degut a Schmidt (1956).

4.4. Conclusions.

Les aportacions originals del present treball abasten un doble vessant. D'una banda el model no estacionari i amb simetria cilíndrica estudiat en el capítol 2 descriu el cas k_1, k_2, k_3, k_4, $\beta \neq 0$, $k_5 = k_6 = \delta = 0$ dintre de la família de models de Chandrasekhar no estacionaris i amb simetria cilíndrica. Per aquest model s'han determinat el tensor A, el vector $\underline{\Delta}$, el potencial U i la funció χ que el determinen totalment. Han estat igualment determinades les seves integrals primeres, la funció σ, la velocitat del centroide $\underline{V}_o$ així com altres característiques d'interès. Aquest model, conjuntament amb els resultats obtinguts en el treball de Català (1972), així com els d'altres que s'estan portant a terme actualment, constitueix l'estudi general dels models de Chandrasekhar no estacionaris i amb simetria cilíndrica en què $k_{\varpi} = 0$, és a dir, aquells pels quals el sistema de coordenades cilíndriques $\bar{\omega}, \theta, z$ constitueix un sistema inercial (Català, 1972).

D'altra banda, pel model no estacionari, amb simetria cilíndrica i potencial separable desenvolupat en el capítol 3, adequat per a l'estudi de l'entorn solar, i pel qual han estat igualment determinades les funcions que el caracteritzen, així com altres també igualment d'interès, han estat establertes les equacions horàries del moviment de les estrelles, així com la projecció de la seva trajectòria sobre el pla galàctic i sobre un pla meridià que gira amb la galàxia. Aquestes equacions del moviment i la projecció de la trajectòria han estat igualment formulades per al centroide local en el cas en què k_1 i k_3 són proporcionals.

Finalment, s'han calculat, primerament, els moments centrats fins a quart ordre d'una mostra d'estrel·les representativa de l'entorn solar, que han confirmat, per una banda, la validesa de les hipòtesis exigides per al desenvolupament del model, i per l'altra, la validesa de la hipòtesi formulada en situar el Sol en el pla galàctic. Després, i en el marc del model, ha estat, per aquesta mateixa mostra d'estrelles, determinat el diferencial del camp local de velocitats. Els resultats obtinguts han permès obtenir valors per a paràmetres fonamentals del model que caracteritzen el comportament cinemàtic i dinàmic de la galàxia a l'entorn solar, i que mostren un notable acord amb els determinats per altres autors per molt diversos procediments.

Segons tot el que s'ha exposat, remarquem el fet d'haver complertat l'estudi d'una família de models de Chandrasekhar i la validesa d'un d'ells per a donar compte de la distribució de velocitats estel.lars a l'entorn solar.

5. BIBLIOGRAFIA.

Albada, G.B. van, 1952: Contributions from the Bosscha Observatory no. 1.

Allen, C.W., 1976: Astrophysical Quantities. Athlone. London.

Asteriadis, G., 1977: Astron. Astrophys. 56, 25.

Binney, J., 1982: Ann. Rev. Astron. Astrophys. 20, 399.

Caldwell, J.A.R. & Ostriker, J.P., 1981: Ap. J. 251, 61.

Camm, G.L., 1941: M.N.R.A.S. 101, 195.

Català, M.A., 1972: Urania no. 275.

Chandrasekhar, S., 1942: Principles of Stellar Dynamics. University of Chicago.

Clube, S.V.M., 1978: Vistas in Astronomy 22, 77.

Delhaye, J., 1965: Galactic Structure (Stars & Stellar Systems, vol. V). Ed. A. Blaauw & M. Schmidt. University of Chicago.

Eddington, A.S., 1915: M.N.R.A.S. 76, 37.

Eddington, A.S., 1921: A.N. Jubiläumsnummer 9.

Figueras, F., 1986: Treball no publicat.

Fricke, W., 1951: A.N. 280, 193.

Fricke, W., 1977: Veröffentlichungen des Astronomischen Rechen-Instituts no. 22. Heidelberg.

Jeans, J.H., 1923: M.N.R.A.S. 84, 60.

Kendall, M. & Stuart, A., 1977: The Advanced Theory of Statistics, vol. 1. Griffin. London.

Kendall, M. & Stuart, A., 1979: The Advanced Theory of Statistics, vol. 2. Griffin. London.

Kerr, F.J. & Lynden-Bell, D., 1985: Proceedings of the Nineteenth General Assembly. New Delhi, 1985. Transactions of the I.A.U., vol. XIX B. Reidel. Dordrecht.

Kharchenko, N.V., Onegina, A.B., Rybka, S.P. & Yatsenko, A.I., 1985: Proceedings of the Nineteenth General Assembly. New Delhi, 1985. Transactions of the I.A.U., vol. XIX B. Reidel. Dordrecht.

Kuzmin, G.G., 1953: Publikatsii Tartuskoi Astronomicheskoi Observatorii 32, 332.

Ledermann, W. & Vajda, S., 1980: Algebra (Handbook of Applicable Mathematics, vol. I). Wiley. Chichester.

Ledermann, W. & Vajda, S., 1982: Analysis (Handbook of Applicable Mathematics, vol. IV). Wiley. Chichester.

Lindblad, B., 1927a: M.N.R.A.S. 87, 553.

Lindblad, B., 1927b: Arkiv. f. Mat., Astr. o Fys. Ser. A, 20, no. 17.

Lindblad, B., 1959: Galactic Dynamics. Handbuch der Physik LIII. Springer. Berlin.

Mihalas, D. & Binney, J., 1981: Galactic Astronomy. Freeman. San Francisco.

Mihalas, D. & Routly, P.M., 1968: Galactic Astronomy. Freeman. San Francisco.

Milne, E.A., 1935: M.N.R.A.S. 95, 560.

Morgan, H.R. & Oort, J.H., 1951: B.A.N. 11, 379.

Núñez, J., 1976: Determinación del campo galáctico de velocidades a partir de la corrección a la constante de la precesión. Universitat de Barcelona.

Núñez, J., 1981: Cinemática galáctica local y constante de precesión. Universitat de Barcelona.

Núñez, J. & Torra, J., 1982: Astron. Astrophys. 110, 95.

Ochsenbein, F., 1980: Bull. Inf. C.D.S. 19, 74.

Ogorodnikov, K.F., 1932: Zs. f. Ap. 4, 190.

Ogorodnikov, K.F., 1965: Dynamics of Stellar Systems. Pergamon. Oxford.

Ollongren, A., 1962: B.A.N. 16, 241.

Ollongren, A., 1965: Galactic Structure (Stars & Stellar Systems, vol. V). Ed. A. Blaauw & M. Schmidt. University of Chicago.

Oort, J.H., 1928: B.A.N. 4, 269.

Oort, J.H., 1965: Galactic Structure (Stars & Stellar Systems, vol. V). Ed. A. Blaauw & M. Schmidt. University of Chicago.

Orús, J.J. de, 1952: Collectanea Mathematica vol. V.

Orús, J.J. de, 1954: Archives Internationales d'Histoire des Sciences, 27, 141.

Orús, J.J. de, 1977: Apuntes de Dinámica Galáctica. Universitat de Barcelona.

Pahlen, E. von der, 1947: Einführung in die Dynamik von Sternsystemen. Birkhäuser. Basel.

Perek, L., 1962: Advances in Astronomy and Astrophysics, vol. 1. Ed. Z. Kopal. Academic. New York.

Richstone, D.O., 1979: Ap. J. 234, 825.

Richstone, D.O., 1980: Ap. J. 238, 103.

Richstone, D.O., 1982: Ap. J. 252, 496.

Rius, A., 1974: Análisis tridimensional del campo galáctico de velocidades en el entorno del Sol. Universitat de Barcelona.

Rohlfs, K. & Kreitschmann, J., 1981: Astrophys. Spa. Sci. 79, 289.

Schmidt, M., 1956: B.A.N. 13, 15.

Sala, F., Torra, J. & Cortés, P., 1985: Astron. Astrophys. Suppl. Ser. 62, 321.

Stodólkiewicz, J.S., 1973: General Astrophysics with Elements of Geophysics. Elsevier. New York.

Torra, J., 1984: Cálculo de parámetros del campo de las velocidades estelares en el entorno del Sol. Universitat de Barcelona.

Trumpler, R.J. & Weaver, H.F., 1953: Statistical Astronomy. University of California. Berkeley.

Tsioumis, A. & Fricke, W., 1979: Astron. Astrophys. 75, 1.

Vasilevskis, S. & Klemola, A.R., 1971: A.J. 76, 508.