# Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas

Antonio Magaña Nieto

Terrassa, 1996

Departament
de Matemàtica
Aplicada II

UPC
UNIVERSITAT POLITÈCNICA
DE CATALUNYA

# Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas

Memoria presentada por

Antonio Magaña Nieto

para acceder al grado de doctor

Director: Dr. Francesc Carreras Escobar



UPC

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorado de Matemática Aplicada

Deseo dar las gracias a las personas que han hecho posible la elaboración de esta memoria:

Al profesor Dr. Francesc Carreras Escobar, que me ha introducido en el apasionante mundo de la investigación matemática y ha tenido la amabilidad y paciencia de dirigir este trabajo.

Al profesor Dr. Rafel Amer Ramon y a los demás compañeros del grupo de Teoría de Juegos, por su ayuda desinteresada y sus siempre acertadas sugerencias.

A Montserrat, por su comprensión, y a David, por su estímulo.

A mis padres.

# Indice

# Introducción

Usualmente, las diferentes ramas de las matemáticas han nacido como respuestas a problemas de índole práctica que se presentan en las actividades cotidianas del ser humano, como el comercio, la industria, la arquitectura, la navegación, etc. En su afán por comprender mejor el mundo en que vive, el hombre ha intentado siempre identificar los fenómenos u objetos de dichas actividades con los elementos de un cierto sistema matemático, creando así lo que se llama un *modelo matemático* de una situación real.

Una vez establecido el modelo, se traducen a su lenguaje los problemas surgidos en el mundo sensible, se analizan objetivamente y se les busca una solución (utilizando para ello las reglas de la deducción lógica), que se exportará después a la situación real o actividad de la cual provenía.

Para que un modelo matemático sea útil tiene que cumplir como mínimo dos condiciones. Por un lado, la identificación entre los entes matemáticos y los objetos reales que representan, así como las propiedades axiomáticas en las que se basa el modelo, deben ser intuitivamente satisfactorias. Por otro lado, los resultados teóricos que se deduzcan del sistema matemático, a medida que se vaya desarrollando, deben ajustarse a las conclusiones que se observen de forma empírica.

Hasta hace relativamente poco tiempo parecía que los modelos matemáticos eran adecuados sólo para describir situaciones surgidas en las ciencias físicas. Sin embargo, recientemente, las llamadas ciencias sociales también han progresado en el desarrollo y estudio de descripciones matemáticas de la conducta humana.

En este ámbito es donde nace la Teoría de Juegos, que, *grosso modo*, puede definirse como una parte de las matemáticas que se dedica al estudio de las situaciones conflictivas que aparecen cuando un colectivo de agentes, con intereses normalmente contrapuestos, tiene que tomar decisiones que les afectan mutuamente. Cada una de estas situaciones es lo que se denomina un juego.

Aunque los inicios de la Teoría de Juegos se remontan a la primera mitad del siglo pasado (en los trabajos de economía de Cournot en 1838 se han encontrado ciertos indicios), la idea de una teoría general de los juegos, con la cual formular matemáticamente procesos de decisión que se producen en actividades conjuntas de tipo competitivo, fue introducida por John von Neumann y Oskar Morgenstern en su clásico *Theory of Games and Economic Behavior*, publicado en el año 1944. Desde entonces la Teoría de Juegos ha evolucionado sustancialmente y se ha aplicado con profundidad a la economía, así como a otros campos entre los que destaca la ciencia política.

Aparte de economistas y politólogos, otros estudiosos de las ciencias sociales (filósofos, psicólogos,...) se han interesado por la Teoría de Juegos, y no es extraño puesto que uno de los grandes valores de esta disciplina radica en su potencia como base para la construcción de modelos sobre la conducta humana.

Hay muchos tipos de situaciones conflictivas en las cuales intervienen diversos agentes y, por tanto, también hay muchos tipos de juegos, aunque una primera clasificación los separa en cooperativos y no cooperativos.

La teoría de juegos no cooperativos estudia el comportamiento de los agentes en cualquier situación donde la elección o estrategia óptima de cada jugador depende de su pronóstico sobre las elecciones de sus oponentes, y está encaminada a maximizar sus propios intereses (sea lo que fuere lo que esto signifique para el jugador) sin preocuparse en absoluto de los intereses de los demás.

Si en el juego existen posibilidades de comunicación entre los jugadores con el fin de negociar o establecer acuerdos que permitan la formación de coaliciones, entonces el juego se denomina cooperativo. En este caso es habitual considerar como información básica la utilidad (entiéndase dinero o cualquier otro bien con el que se efectúen los pagos a los jugadores) que cada coalición puede obtener coordinando las estrategias de sus integrantes e independientemente de la actuación del resto de los agentes del juego.

En algunos juegos cooperativos se supone la existencia de un bien que debe distribuirse entre los jugadores, que puede ser cuantificado numéricamente y dividido tantas veces como sea necesario, y respecto del cual las preferencias de los agentes del juego son equiparables. Los posibles repartos de dicho bien entre los jugadores son los que dan lugar a incrementos y disminuciones de la utilidad de los mismos y, por esta razón, estos juegos cooperativos se denominan juegos con utilidad transferible o juegos TU. En estos casos se considera la utilidad *mínima* que cada coalición puede conseguir y se describe mediante un único número real.

En otros juegos cooperativos la utilidad representa preferencias personales sobre los posibles resultados del juego, y las posibilidades de cada coalición deben describirse utilizando no un número sino un subconjunto que contenga todas las utilidades que una coalición está en condiciones de garantizar a sus miembros. Estos son los llamados juegos con utilidad no transferible o juegos NTU.

Tradicionalmente, en los juegos cooperativos con utilidad transferible cada uno de los jugadores efectúa una elección entre dos posibles alternativas y, fijada una de ellas, la función característica del juego asigna un número real a la coalición formada por los jugadores que la han escogido, suponiéndose, además, que los jugadores de la coalición complementaria han optado por la otra. Este enfoque, correcto para describir algunas situaciones reales, no es aplicable cuando el número de opciones entre las que elige cada jugador es mayor que dos. Sin embargo, se han propuesto recientemente modelos que se ajustan a estas situaciones: los juegos cooperativos con múltiples alternativas. En éstos, una coalición puede obtener diversas utilidades dependiendo de la distribución de los restantes jugadores en el conjunto de las alternativas.

Esta memoria se centra en el estudio de los juegos cooperativos con utilidad transferible; tanto de los clásicos como de los juegos con múltiples alternativas. Por este motivo la hemos titulado *Formación de coaliciones en los juegos cooperativos y juegos con múltiples alternativas*, haciendo referencia a las dos partes bien diferenciadas de que consta. Ambas partes tienen como nexo los conceptos de valor de Shapley, índice de Banzhaf y extensión multilineal, lo cual confiere una unidad de estilo y metodología al trabajo. Este ha sido estructurado en cinco capítulos, que a continuación se resumen brevemente, y un apéndice en el que se destacan las conclusiones más relevantes.

Los tres primeros capítulos hacen referencia a los juegos cooperativos clásicos. En el primero, con el objetivo de que el trabajo sea autocontenido, se exponen las nociones que se utilizan en el resto de la memoria, con excepción de las relativas a los juegos con múltiples alternativas que, por cuestiones de homogeneidad, se explican en el capítulo cuarto. Concretamente, en el primer capítulo se recuerdan, entre otras nociones, dos importantes conceptos de solución para los juegos cooperativos clásicos: el valor de Shapley y el índice de Banzhaf–Coleman. Además, se revisan el valor coalicional y la extensión multilineal de Owen. Su contenido, por tanto, no es original.

En el segundo capítulo se utilizan el valor de Shapley y su extensión, el valor coalicional de Owen, como herramientas para decidir cuándo es ventajoso para un subconjunto de jugadores coaligarse y cuándo no lo es. Para ello se estudia previamente el juego cociente y su extensión multilineal. Se define después el valor de alianza de una coalición y se aplica para obtener un criterio que determine bajo qué condiciones es favorable para ciertos jugadores unirse. Por último, se estudian las alianzas binarias en los juegos simples y se caracterizan los juegos en los cuales dichas alianzas son lo más ventajosas posible y los juegos donde son lo más desfavorables posible.

En el tercer capítulo se hace un estudio similar al del capítulo segundo pero utilizando el índice de Banzhaf. Se obtienen resultados análogos que demuestran que los juegos simples donde las alianzas binarias son muy ventajosas o muy desfavorables son los mismos independientemente de que se utilice el valor de

Shapley o el índice de Banzhaf para medir el efecto de dichas alianzas. También se incluye en este capítulo la implementación del método que permite calcular el índice de Banzhaf modificado por una estructura de coaliciones a partir de la extensión multilineal del juego inicial. El capítulo se completa observando que una de las propiedades del índice de alianza de Banzhaf, junto con otras propiedades clásicas (títeres, simetría y aditividad), caracteriza al índice de Banzhaf en los juegos cooperativos.

La primera sección del capítulo 4 no es original ya que está dedicada a recordar los conceptos fundamentales de los juegos con múltiples alternativas. De hecho, se resume parte de los trabajos anteriores sobre el tema, adaptando su notación a nuestras necesidades posteriores. Se define después la noción de $r$–juego y se dota al conjunto de todos ellos de estructura de espacio vectorial real. También se introducen los $r$–juegos de unanimidad y se prueba que forman una base de dicho espacio. Se presentan, además, dos extensiones multilineales para los $r$–juegos, aunque, por su mayor simplicidad, una de ellas se preferirá más adelante. Se estudian después los $r$–juegos simples, para los cuales se generalizan conceptos fundamentales relativos a los juegos simples convencionales. Los $r$–juegos simples sirven como modelos para situaciones de votación que no eran descriptibles de forma precisa utilizando la teoría clásica, como, por ejemplo, las votaciones en las que se requiere mayoría simple para ganar y/o está permitida la abstención. El capítulo acaba con otra idea nueva, la de $r$–juego restringido, que aparece cuando se impone que alguno o algunos de los jugadores escojan obligatoriamente una determinada alternativa. Piénsese, por ejemplo, en las votaciones en las cuales se trata de elegir uno de entre los diversos candidatos que representan a diferentes partidos políticos. Es lógico suponer que cada partido que haya presentado un candidato votará por él.

En el capítulo final se caracterizan axiomáticamente dos conceptos de solución para los $r$–juegos cooperativos (y para los $r$–juegos simples), el valor de Shapley y el índice de Banzhaf, y se expone cómo calcularlos a partir de las extensiones multilineales definidas en el capítulo anterior. Además, se obtiene un método que permite extender otros valores conocidos para los juegos cooperativos clásicos al contexto de los juegos con múltiples alternativas.

La motivación y a la vez el objetivo más ambicioso de este trabajo, que se incluye en el ámbito de los juegos cooperativos con utilidad transferible, es contribuir al desarrollo de la Teoría de Juegos y sus aplicaciones a diversas disciplinas, especialmente a la economía y a la política. Otros objetivos más modestos son los siguientes:

(a) Analizar la formación efectiva de coaliciones, utilizando tanto el valor de Shapley y el valor coalicional de Owen como el índice de Banzhaf y su modificación por una estructura de coaliciones. Concretamente, determinar bajo qué condiciones es favorable para ciertos jugadores coaligarse.

(b) Definir nuevos modelos matemáticos con los que describir y examinar situaciones que no habían podido ser estudiadas de forma precisa con la teoría clásica de los juegos cooperativos.

(c) Estructurar convenientemente el conjunto de los juegos con múltiples alternativas, dotándolo de los conceptos y propiedades fundamentales que poseen los juegos tradicionales.

(d) Generalizar conceptos de solución conocidos para los juegos cooperativos clásicos a los juegos con múltiples alternativas, con su correspondiente caracterización axiomática.

Para acabar, tres breves comentarios. Primero, la mayoría de los ejemplos que se exponen en el trabajo intentan reflejar situaciones reales, ya sean económicas o políticas; alguno de ellos es analizado repetidamente pero desde diferentes puntos de vista. Segundo, cuando un concepto no original aparece por primera vez en el texto, va acompañado de su referencia bibliográfica (excepto en esta introducción). Tercero y último, la bibliografía contiene también otras referencias de trabajos que han sido consultados durante la elaboración y redacción de la memoria, aunque en ella no se citen de forma explícita.

# 1 Preliminares

En este primer capítulo se hace una exposición concisa de las ideas y conceptos de la Teoría de Juegos que constituyen el punto de partida para el desarrollo de esta memoria. Se trata de un resumen de resultados ampliamente divulgados y, por tanto, en él no se encontrará material inédito. Además permite establecer la notación que se usa en los capítulos posteriores.

## 1.1 Juegos cooperativos

**Definición 1.1** Un *juego cooperativo* es un par $(N, v)$ formado por un conjunto finito $N = \{1, 2, ..., n\}$ y una función $v : 2^N \longrightarrow \mathbb{R}$ que asigna a cada subconjunto $S$ de $N$ un número real $v(S)$ con la condición de que $v(\emptyset) = 0$.

Cada elemento del conjunto $N$ es un *jugador* y cada subconjunto de $N$ es una *coalición.* La función $v$ se llama función característica del juego ($v(S)$ se considera una medida de la expectativa de la coalición $S$) y, en los casos en los que no hay ambigüedades, se habla del juego $v$ sobreentendiéndose el conjunto de jugadores.

Como se puede observar, la definición de juego cooperativo es muy general. Añadiendo condiciones se obtienen diferentes e interesantes tipos de juegos cooperativos.

**Definición 1.2** Un juego cooperativo $(N, v)$ es *monótono* si $v(S) \leq v(T)$ cuando $S \subseteq T$.

Esta es una condición bastante razonable: a medida que aumenta el número de jugadores en una coalición, aumenta también su expectativa numérica.

Otra condición que se acostumbra a imponer a los juegos cooperativos es la superaditividad.

**Definición 1.3** Un juego cooperativo $(N, v)$ es *superaditivo* si $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$ cuando $S \cap T = \emptyset$.

Una clase de juegos cooperativos sencilla y a la vez muy útil es la de los juegos simples.

**Definición 1.4** Un juego cooperativo $(N, v)$ es *simple* si es monótono y $v(S) = 0$ o $1$ para todo $S \subseteq N$.

Puesto que los juegos simples ocupan un papel importante en este trabajo se les dedicará especial atención en la sección siguiente.

El conjunto de los juegos cooperativos de $n$ jugadores es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión $2^n - 1$. Una base está formada, por ejemplo, por los llamados *juegos de unanimidad* $u_S$, definidos para cada coalición no vacía $S$ por

$$u_S(T) = \begin{cases} 1 & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{si } S \not\subseteq T. \end{cases}$$

Un juego cooperativo $v$ de $n$ jugadores se escribe como combinación lineal de los juegos de unanimidad de la siguiente forma:

$$v = \sum_{\emptyset \neq S \subseteq N} C_S(v) u_S, \quad \text{donde} \quad C_S(v) = \sum_{R \subseteq S} (-1)^{s-r} v(R), \quad s = |S|, \quad r = |R|.$$

Los coeficientes $C_S(v)$ se denominan *dividendos de Harsanyi.*

Se acaba de ver que el conjunto de los juegos cooperativos con $n$ jugadores tiene la elegante estructura matemática de espacio vectorial real. Los dos ejemplos siguientes muestran que, tal y como se afirmaba en la introducción de esta memoria, estos entes matemáticos sirven como modelos para estudiar situaciones de tipo competitivo donde interviene un cierto número de jugadores.

**Ejemplo 1.5 (El problema de la bancarrota. Driessen, 1988)** El Talmud es un antiguo documento judío donde se han ido recopilando numerosos comentarios sobre la ley mosaica y en el que está fijada la enseñanza de las grandes escuelas rabínicas. De hecho, el Talmud consta de dos partes: el Mišná, donde se incluyen las leyes, y el Guemará, que contiene los comentarios e investigaciones sobre el Mišná de los rabinos de cada época. Precisamente, hacia el año 1140 a.C. el rabino Ibn Ezra proponía el siguiente problema en el Talmud: "Jacob muere y cada uno de sus cuatro hijos, Rubén, Simeón, Leví y Judá, presenta un escrito en el cual Jacob lo reconoce como su heredero y le lega, respectivamente, un cuarto, un tercio, la mitad y el total de sus bienes, que ascienden a 120 unidades. Todos los escritos tienen la misma fecha y, por tanto, ninguno tiene prioridad sobre los otros. ¿Cómo repartir las 120 unidades entre los cuatro hijos?"

Este es un ejemplo concreto de lo que se dado en llamar *el problema de la bancarrota* que, en general, puede ser enunciado así: sea $E$ un número real positivo, $d = (d_1, d_2, ..., d_n) \in \mathbb{R}^n$ tal que $d_i \geq 0$ para todo $i = 1, 2, ..., n$ y $E < \sum_{i=1}^{n} d_i$. Una interpretación posible es la que se daba en el párrafo anterior: una persona (o empresa) muere (quiebra) dejando $n$ deudas $d_1, d_2, ..., d_n$ cuya suma supera la totalidad de sus bienes $E$.

O'Neill [1982] utiliza por primera vez la Teoría de Juegos como marco en el que estudiar este problema y resolverlo. Para ello propone el juego cooperativo de $n$ jugadores siguiente:

$$v_{E;d}(S) = \max\{0, E - \sum_{j \in N \setminus S} d_j\} \text{ para toda } S \subseteq N;$$

es decir, cada coalición $S$ obtiene lo que cobraría en el peor de los casos, cuando todos los jugadores de $N \setminus S$ vayan a cobrar antes que los de $S$.

Obviamente, de la definición de $v_{E;d}$ se tiene que $v_{E;d}(N) = E$. Es decir, la coalición global se lleva la totalidad de los bienes.

En el caso particular anterior, sería: $E = 120$, $d_1 = 30$, $d_2 = 40$, $d_3 = 60$ y $d_4 = 120$. La función característica $v = v_{E;d}$ será entonces:

$$\begin{array}{lll} v(14) = 20, & v(24) = 30, & v(34) = 50, \\ v(124) = 60, & v(134) = 80, & v(234) = 90, \\ v(N) = 120, & \text{y } v(S) = 0 & \text{para las demás } S \subset N. \end{array}$$

**Ejemplo 1.6 (Asignación de costes y/o reparto de beneficios)** En determinadas situaciones algunas empresas pequeñas pueden estar interesadas en formar lo que se denomina un *grupo de compra*, esto es, una nueva empresa con personalidad jurídica propia que, dependiendo del volumen de compra que se consiga, llegue a tener todas las ventajas de las grandes empresas y donde, sin embargo, las empresas pequeñas que lo forman no pierdan su identidad y, en consecuencia, tampoco las ventajas de ser una pequeña empresa.

Por ejemplo, para competir con las grandes superficies, una serie de comercios pueden formar un grupo de compra de manera que al negociar con los distribuidores mayoristas dicho grupo de compra tenga una capacidad de negociación análoga a (o al menos competitiva con) la de las grandes cadenas. A veces, la unión no es duradera sino sólo puntual, con el fin de adquirir una serie de mercancías. Para fijar ideas, supóngase que cuatro empresas están empezando a negociar la formación de un grupo de compra. De un cierto bien de consumo, la empresa número 1 desea adquirir 600 unidades, la empresa número 2 necesita 500 unidades, la tercera 400 y la cuarta 300. Para simplificar, el precio de cada unidad de este bien será de 1 unidad monetaria (u. m.). El distribuidor mayorista tiene fijados unos descuentos en el precio final (*rappels*) que dependen del número de unidades que se desean comprar y que, en el caso que nos ocupa, podrían ser los siguientes:

- de 0 a 499 unidades no hay descuento,
- de 500 a 999 unidades hay un descuento del 5% en el precio final,
- de 1000 a 1499 unidades el descuento es del 10%,
- de 1500 a 1999 unidades es del 15%,
- de 2000 a 2499 unidades es del 20%, y
- de 2500 unidades en adelante hay un descuento del 25%.

Teniendo en cuenta estos rappels y las cantidades que cada empresa necesita, es inmediato calcular el desembolso que cada una de ellas deberá realizar si no forman el grupo de compra: la primera pagaría 570, la segunda 475, la tercera 400 y la cuarta 300 (entre las cuatro pagarían 1745). Si se ponen de acuerdo y forman el grupo de compra, por la misma cantidad de producto sólo pagarían 1440 u. m.

Sin embargo, surge un problema: si realmente se forma el grupo de compra, ¿cuánto le corresponde pagar a cada una de las empresas de las 1440 u. m.? Si se enfoca el problema desde otro punto de vista, suponiendo que todos ingresan en un fondo común lo que les corresponde pagar si van en solitario a comprar y pagan de este fondo al distribuidor, quedará un remanente de 305 u. m.: ¿cómo repartir estos *beneficios* entre las cuatro empresas?

Estas cuestiones deberían estar resueltas al redactar los estatutos de la nueva empresa que quieren formar, ya que en ellos se puede hacer constar la manera de efectuar el reparto de los beneficios que se derivan de la unión. Es usual que dicho reparto se realice de forma proporcional, bien a los gastos efectuados en cada operación, bien al capital aportado a la creación del grupo de compra (si éste se ha constituído así). En ambos casos, el reparto proporcional es discutible, como lo es cualquier otra solución que se proponga.

Este problema admite un estudio desde la óptica de la teoría de juegos cooperativos. De hecho, se han planteado dos situaciones diferentes que ahora se analizarán.

(a) La primera situación es una asignación de los costes entre cuatro jugadores y puede describirse mediante un juego cooperativo cuya función característica es:

$$\begin{array}{lll} v(1) = 570 & v(13) = 900 & v(123) = 1200 \\ v(2) = 475 & v(14) = 855 & v(124) = 1260 \\ v(3) = 400 & v(23) = 855 & v(134) = 1170 \\ v(4) = 300 & v(24) = 760 & v(234) = 1080 \\ v(12) = 990 & v(34) = 665 & v(1234) = 1440. \end{array}$$

Cada $v(S)$ representa la cantidad que abona la coalición $S$ al distribuidor suponiendo que se acumulan los pedidos de los integrantes de $S$ y se realiza, entonces, un pedido conjunto.

(b) La segunda es un reparto de beneficios y puede describirse también utilizando un juego cooperativo de cuatro jugadores cuya función característica es $b(S) = \sum_{i \in S} v(i) - v(S)$, siendo $v$ la función característica del apartado anterior. En este caso se tiene:

$$\begin{array}{lll} b(1) = 0 & b(13) = 70 & b(123) = 245 \\ b(2) = 0 & b(14) = 15 & b(124) = 85 \\ b(3) = 0 & b(23) = 20 & b(134) = 100 \\ b(4) = 0 & b(24) = 15 & b(234) = 95 \\ b(12) = 55 & b(34) = 35 & b(1234) = 305. \end{array}$$

Cada $b(S)$ representa el ahorro que consigue la coalición $S$ si llega a formarse.

## 1.2 Juegos simples

En la sección anterior se ha visto que un juego simple es un juego cooperativo monótono tal que la expectativa numérica de cada coalición es 0 o 1. Las coaliciones que obtienen 1 son las *ganadoras*; las que obtienen 0 son las *perdedoras*. $W$ representará el conjunto de todas las coaliciones ganadoras del juego simple $(N, v)$. Con esta nueva notación, la propiedad de monotonía puede escribirse ahora como:

$$S \in W, \quad S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad T \in W.$$

Una coalición $S \in W$ es ganadora *minimal* si para toda $T \subset S$, $T \notin W$. El conjunto de todas las coaliciones ganadoras minimales de un juego simple $(N, v)$ se denotará por $W^m$.

Si se conoce $W$ el juego queda totalmente determinado. De hecho, se puede definir un juego simple como un par $(N, W)$, $W \subseteq 2^N$, tal que $\emptyset \notin W$ y satisface la condición de monotonía:

$$S \in W, \quad S \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad T \in W.$$

Las coaliciones ganadoras minimales determinan el juego, y deben cumplir las siguientes propiedades:

- $\emptyset \notin W^m$
- $T \not\subset S \quad \forall T, S \in W^m$.

La clasificación de las coaliciones en ganadoras y perdedoras puede refinarse. Se obtiene una clasificación más detallada observando el carácter de la coalición complementaria:

(a) Una coalición $S$ es ganadora *decisiva* si $S \in W$ y $N \setminus S \notin W$.

(b) Una coalición $S$ es ganadora *conflictiva* si $S \in W$ y $N \setminus S \in W$.

(c) Una coalición $S$ es de *bloqueo* si $S \notin W$ y $N \setminus S \notin W$.

(d) Una coalición $S$ es *perdedora estricta* si $S \notin W$ y $N \setminus S \in W$.

Estas cuatro familias se denotarán por $D$, $C$, $Q$ y $P$ respectivamente.

También existen diferentes tipos de jugadores, dependiendo de su pertenencia o no a alguna de las clases de coaliciones anteriores:

(a) Un jugador $i \in N$ es *dictador* si $\{i\} \in D$.

(b) Un jugador $i \in N$ es *capaz* si $\{i\} \in C$.

(c) Un jugador $i \in N$ tiene *veto* si $\{i\} \in Q$.

Por otra parte, se dice que un jugador $i \in N$ es *nulo* si $\{i\} \notin S$, $\forall S \in W^m$.

Atendiendo a la naturaleza de las coaliciones de un juego simple, se obtienen las definiciones siguientes.

- Un juego simple $(N, W)$ es *propio* si no tiene coaliciones ganadoras conflictivas: $C = \emptyset$.
- Un juego simple $(N, W)$ es *fuerte* si no tiene coaliciones de bloqueo: $Q = \emptyset$.

Por tanto, el juego se denomina *impropio* si $C \neq \emptyset$ y *débil* si $Q \neq \emptyset$.

El *dual* de un juego $(N, W)$ donde $W \neq \emptyset$ es el juego $(N, W^*)$, siendo $W^* = D \cup Q$. Nótese que, en este caso, se cumple que $D^* = D$, $C^* = Q$, $Q^* = C$ y $P^* = P$.

Una clase especialmente interesante de juegos simples la forman los llamados juegos de mayoría ponderada.

**Definición 1.7** Un *juego de mayoría ponderada* es una terna $(N, w, q)$ donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores, $w = (w_1, w_2, ..., w_n)$ con $w_i \geq 0$ para $i = 1, 2, ..., n$ es una distribución de *pesos* y $q \in \mathbb{R}^+$ es la *cuota* (o mayoría exigida). En la práctica, se representa por $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$.

Todo juego de mayoría ponderada tiene asociado un juego simple: basta con definir $w(S) = \sum_{i \in S} w_i$ y considerar como conjunto de coaliciones ganadoras

$$W = \{S \subseteq 2^N \ : \quad w(S) \geq q\}.$$

Sin embargo, no todo juego simple proviene de un juego de mayoría ponderada. Sea $(N, W)$ el juego de cuatro jugadores cuyo conjunto de coaliciones ganadoras minimales es $W^m = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$, es decir, los subconjuntos formados por los jugadores 1 y 2 por un lado, y 3 y 4 por otro. Si existiesen $w_1, w_2, w_3, w_4$ y $q$ como en la definición anterior, deberían cumplirse las desigualdades siguientes:

$$\begin{cases} w_1 + w_2 \geq q, & w_1 + w_3 < q, \\ w_3 + w_4 \geq q, & w_2 + w_4 < q. \end{cases}$$

Sumando las dos de la izquierda se obtiene $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 \geq 2q$, y sumando las de la derecha $w_1 + w_2 + w_3 + w_4 < 2q$. Estas dos condiciones son incompatibles.

Un juego simple $(N, W)$ es *realizable* si proviene de un juego de mayoría ponderada (por abuso de lenguaje, se suele decir entonces que $(N, W)$ es un juego de mayoría ponderada). El ejemplo anterior prueba que existen juegos simples no realizables.

Pese a la sencillez de su definición, los juegos simples son de gran utilidad porque sirven como modelos para ciertos organismos de decisión que se rigen mediante votaciones.

**Ejemplos 1.8**

(a) De entre todos los parlamentos autonómicos actuales, quizá el más interesante, desde el punto de vista de la Teoría de Juegos, sea el del País Vasco, surgido de las elecciones autonómicas del 23 de octubre de 1994. Su composición es la siguiente:

| | **Partido** | **Diputados** |
|---|---|---|
| 1 | PNV (Partido Nacionalista Vasco) | 22 |
| 2 | PSE (Partido Socialista de Euskadi) | 12 |
| 3 | HB (Herri Batasuna) | 11 |
| 4 | PP (Partido Popular) | 11 |
| 5 | EA (Eusko Alkartasuna) | 8 |
| 6 | IU (Izquierda Unida) | 6 |
| 7 | UA (Unidad Alavesa) | 5 |

En total son 75 diputados y, por tanto, para conseguir la mayoría absoluta se necesitan al menos 38.

Situaciones típicas que pueden darse en este tipo de organismos, como, por ejemplo, la primera votación para la investidura del presidente del gobierno autonómico o la aprobación de una moción de censura, se describen mediante el juego de mayoría ponderada de 7 jugadores

$$[38; 22, 12, 11, 11, 8, 6, 5]$$

(cada partido es un jugador cuyo peso es su número de diputados).

El interés de este juego reside en el gran número y variedad de combinaciones posibles para llegar a la mayoría absoluta. Concretamente, el conjunto de coaliciones ganadoras minimales es

$$\begin{aligned} W^m = \; & \{\{1,2,3\},\{1,2,4\},\{1,2,5\},\{1,2,6\},\{1,2,7\},\{1,3,4\},\{1,3,5\}, \\ & \{1,3,6\},\{1,3,7\},\{1,4,5\},\{1,4,6\},\{1,4,7\},\{1,5,6,7\},\{2,3,4,5\}, \\ & \{2,3,4,6\},\{2,3,4,7\},\{2,3,5,6,7\},\{2,4,5,6,7\},\{3,4,5,6,7\}\}. \end{aligned}$$

(b) Otros organismos de decisión no pueden representarse como juegos de mayoría ponderada. Considérese, por ejemplo, el funcionamiento del Congreso de los Estados Unidos: para que una ley que cuente con el respaldo del presidente de la nación sea aprobada, es necesaria la mayoría de los votos de la Cámara de Representantes y del Senado; si el proyecto no cuenta con el apoyo presidencial, son necesarios dos tercios de los votos de cada una de las dos cámaras. La Cámara de Representantes tiene 435 miembros y el Senado 100.

No es difícil demostrar que no existe ningún juego de mayoría ponderada $[q; w_1, w_2, ..., w_n]$ que se ajuste a la estructura descrita. Sin embargo, sí es descriptible usando un juego simple de 536 jugadores cuyas coaliciones ganadoras minimales están formadas por el presidente, 51 senadores y 218 representantes, o por 67 senadores y 290 representantes.

## 1.3 Conceptos de solución para los juegos cooperativos

Sea $(N, v)$ un juego cooperativo de $n$ jugadores. Suponiendo que los jugadores llegan a algún tipo de acuerdo global entre ellos, al final tienen que repartirse la cantidad $v(N)$ (dinero o cualquier otro tipo de utilidad transferible), que es el total que puede conseguir la coalición formada por todos los jugadores. Una distribución de la cantidad $v(N)$ entre los jugadores se representa mediante una función real $x$ sobre el conjunto $N$ que verifique el *principio de eficiencia:* $\sum_{i \in N} x(i) = v(N)$. El número $x(i)$, que por comodidad se denota simplemente $x_i$, es la cantidad que recibe el jugador $i$ teniendo en cuenta la función de distribución de pagos $x$.

Los vectores $x \in \mathbb{R}^n$ tales que $\sum_{i \in N} x_i = v(N)$ se llaman vectores de pago eficientes para el juego $(N, v)$. Si además satisfacen el *principio de racionalidad individual*, según el cual cada jugador debe recibir un pago al menos igual a lo que podría conseguir por sí solo en el juego $(N, v)$, entonces dichos vectores de pago eficientes se denominan *imputaciones* del juego. El conjunto de todas ellas se denota por $I(v)$:

$$I(v) = \{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \sum_{i \in N} x_i = v(N), \quad x_i \geq v(i) \quad \forall i \in N\}.$$

Un concepto de solución para los juegos cooperativos es, en general, una regla que asigna a cada juego cooperativo de $n$ jugadores un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ siguiendo unas normas predeterminadas. En principio, este subconjunto podría ser vacío para algunos juegos.

Por ejemplo, se podría pedir que la solución fuese una imputación. Dependiendo de las normas que se impongan a la correspondencia mencionada se obtendrá una u otra solución para los juegos cooperativos.

Hay conceptos de solución que proporcionan todo un conjunto de vectores para cada juego, como por ejemplo los conjuntos estables de von Neumann y Morgenstern [1944] o el core (Gillies [1953]). Otros, sin embargo, seleccionan un único vector de pagos, como el valor de Shapley [1953a] o el nucleolo (Schmeidler [1969]).

Puesto que los juegos cooperativos simples se usan normalmente como modelos de organismos que toman decisiones mediante votaciones, un concepto de solución para esta clase de juegos se llama también *índice de poder*, y representa una medida abstracta del poder de cada jugador en el organismo que el juego describe.

Dos de los índices de poder más utilizados son el de Shapley–Shubik [1954] y el de Banzhaf [1965]. De hecho, el primero es la restricción del valor de Shapley a los juegos simples. El índice de Banzhaf surgió primero para esta clase de juegos y, posteriormente, fue extendido a todos los juegos cooperativos (Owen [1975]).

Esta memoria se centra, esencialmente, en los valores de Shapley y de Banzhaf y sus extensiones.

La idea de una solución única para cada juego cooperativo $(N, v)$ empieza postulando que cada jugador debe obtener un número real $\chi_i[v]$, donde $i$ denota el índice del jugador y $\chi$ es la función que asigna a cada juego $(N, v)$ su (único) vector de pagos. El problema que se plantea es decidir qué función se escoge. Cualquier definición arbitraria puede ser cuestionada. Un procedimiento usual en matemáticas consiste en especificar la función a través de las propiedades que se desea que cumpla. Es decir, definir la función axiomáticamente.

En la sección siguiente se expone un ejemplo de cómo se utiliza este método.

## 1.4 El valor de Shapley

El valor de Shapley es el primer concepto de solución que asigna a cada juego cooperativo un único vector de pago. Fue introducido y caracterizado axiomáticamente por Lloyd S. Shapley en el año 1953, y es, seguramente, el concepto de solución más estudiado y sobre el que más se ha escrito. Para entender bien las propiedades axiomáticas que lo caracterizan se necesitan dos nociones previas.

**Definición 1.9**

- Sean $(N, v)$ un juego cooperativo de $n$ jugadores y $\pi$ una permutación sobre $N$ (es decir, una aplicación biyectiva de $N$ en $N$). El juego $(N, \pi v)$ es aquel que, para cada coalición $S = \{i_1, i_2, ..., i_s\}$, está definido por

$$\pi v(S) = v(\pi(S)) = v(\{\pi(i_1), \pi(i_2), ..., \pi(i_s)\}).$$

- Un conjunto $K \subseteq N$ es *soporte* del juego $(N, v)$ si $v(S) = v(S \cap K)$ para toda coalición $S \subseteq N$.

Sea $G_n$ el espacio vectorial de los juegos cooperativos con $N = \{1, 2, ..., n\}$. El *valor de Shapley* es una aplicación

$$\Phi : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

que asigna a cada juego cooperativo $v$ un vector $\Phi[v] = (\Phi_1[v], \Phi_2[v], ..., \Phi_n[v])$ y cumple las propiedades siguientes:

**S1** Si $K$ es soporte del juego $v$ entonces $\sum_{i \in K} \Phi_i[v] = v(K)(= v(N))$.

**S2** Para todo juego $v$ y toda permutación $\pi$ de $N$ se cumple $\Phi_i[\pi v] = \Phi_{\pi(i)}[v]$.

**S3** Si $u, v \in G_n$ entonces $\Phi[u + v] = \Phi[u] + \Phi[v]$.

Las propiedades anteriores son las de eficiencia para soportes, simetría y aditividad, respectivamente, y determinan de forma unívoca el valor de Shapley.

**Teorema 1.10 (Shapley, 1953)** *Existe una única función $\Phi : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de eficiencia para soportes, simetría y aditividad, y es la dada por*

$$\Phi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \quad \textit{para cada} \quad i \in N.$$

**Observaciones 1.11**

(a) El pago que el valor de Shapley asigna a cada jugador es una media ponderada de las contribuciones marginales de dicho jugador a las coaliciones a las que pertenece.

(b) El valor de Shapley es siempre eficiente. Si el juego es superaditivo, entonces es una imputación.

(c) El valor de Shapley no tiene en cuenta factores tales como la existencia o no de una distribución de los jugadores en coaliciones, incompatibilidades entre jugadores o diferentes grados de cooperación entre los mismos. La consideración de factores de este tipo ha dado origen a otros conceptos de solución ligados al valor de Shapley (véase, por ejemplo, Amer [1995]).

El valor de Shapley ha sido caracterizado posteriormente utilizando diversos sistemas axiomáticos; pueden consultarse Young [1985] o Hart–MasColell [1989]. En este trabajo (Capítulo 5) usaremos la caracterización axiomática basada en las definiciones y propiedades siguientes:

- Se dice que un jugador $i \in N$ es un *títere* en el juego $v$ si $v(S \cup \{i\}) = v(S) + v(\{i\})$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i\}$.
- Dos jugadores $i, j \in N$ son *indiferentes* en el juego $v$ si $v(S \cup \{i\}) = v(S \cup \{j\})$ para toda coalición $S \subseteq N \setminus \{i, j\}$.
- Un concepto de solución $\Phi$ cumple la propiedad de *títeres* si $\Phi_i[v] = v(\{i\})$ para todo $v$ y todo títere $i$ en $v$.
- Un concepto de solución $\Phi$ cumple la propiedad de *indiferencia* si $\Phi_i[v] = \Phi_j[v]$ para todo $v$ y para todo par de jugadores $i, j$ indiferentes en $v$.

El valor de Shapley es la única solución para los juegos cooperativos que satisface las propiedades de eficiencia, títeres, indiferencia y aditividad (Bergantiños [1993]).

Por supuesto, en el caso de los juegos simples el axioma de aditividad no puede utilizarse ya que la suma de juegos simples no es, en general, un juego simple.

Dubey [1975] modificó el axioma de aditividad de Shapley y lo adecuó al contexto de los juegos simples. Para ello definió las operaciones siguientes entre juegos simples:

$$(u \vee v)(S) = \max\{u(S), v(S)\}$$

$$(u \wedge v)(S) = \min\{u(S), v(S)\}$$

Sea $\mathcal{S}_n$ el conjunto de juegos simples con $n$ jugadores. Con las operaciones anteriores $\mathcal{S}_n$ tiene estructura de retículo distributivo.

El axioma de aditividad puede sustituirse entonces en $\mathcal{S}_n$ por

**S3'** $\Phi[u \vee v] + \Phi[u \wedge v] = \Phi[u] + \Phi[v] \quad \forall u, v \in \mathcal{S}_n$.

En Feltkamp [1995] se dice que una solución que satisface **S3'** cumple la propiedad de *transferencia.*

**Teorema 1.12 (Dubey, 1975)** *Existe una única función $\Phi : \mathcal{S}_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de eficiencia, simetría y transferencia, y es el valor de Shapley.*

En este caso

$$\Phi_i[v] = \sum_{\substack{S \in W \\ i \in S,\, S \setminus \{i\} \notin W}} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} \quad \text{para cada} \quad i \in N.$$

**Ejemplos 1.13**

(a) Para el problema concreto de la bancarrota (Ejemplo 1.5) el valor de Shapley propone el siguiente reparto:

$$\Phi[v] = (14.16, 19.16, 29.16, 57.5).$$

(b) Para el problema de asignación de costes correspondiente a los grupos de compra que se planteó en el Ejemplo 1.6, el valor de Shapley nos da la solución:

$$\Phi[v] = (475.83, 390.83, 305, 268.33).$$

Si se trata de repartir beneficios (segundo enfoque) entonces la solución de Shapley es:

$$\Phi[b] = (94.16, 84.16, 95, 31.66).$$

Nótese que $\Phi_i[b] = v(\{i\}) - \Phi_i[v]$, como era de esperar por la aditividad.

(c) En el juego de mayoría ponderada correspondiente al Parlamento Vasco (Ejemplo 1.8 (a)) se obtiene el índice de poder de Shapley–Shubik

$$\Phi_1 = 0.3714, \quad \Phi_i = 0.1381 \quad i = 2,3,4 \quad \Phi_j = 0.0714 \quad j = 5,6,7,$$

que, tradicionalmente, se expresa en tanto por ciento. En este caso, pues, el primer partido tiene el 37.14% del poder, los partidos 2, 3 y 4 el 13.81% y cada uno de los otros el 7.14%.

(d) En el Congreso de los Estados Unidos (Ejemplo 1.8 (b)) el índice de poder es

$$\begin{aligned} \Phi_P &= 0.160470, \\ \Phi_S &= 0.437418, \\ \Phi_R &= 0.402112, \end{aligned}$$

siendo $P$ el presidente, $S$ el Senado y $R$ la Cámara de Representantes. Para calcular el poder individual de un senador o de un miembro de la Cámara de Representantes basta dividir por 100, en el primer caso, y por 435 en el segundo, ya que todos los senadores juegan un papel simétrico entre ellos, igual que los representantes. Proporcionalmente se tiene:

$$\Phi_P : \Phi_s : \Phi_r \approx 350 : 9 : 2,$$

donde $\Phi_s$ es el índice de poder de Shapley–Shubik de un senador y $\Phi_r$ el de un representante.

## 1.5 El índice de Banzhaf

Otro de los conceptos de solución para juegos cooperativos que asigna un único vector de pagos es el índice de Banzhaf. Menos estudiado que el valor de Shapley goza, sin embargo, de una posición privilegiada dentro de la Teoría de Juegos ya que fue aceptado como una medida válida de poder por un tribunal (se utilizó para determinar la representación del Consejo de Supervisores del condado de Nassau en el estado de Nueva York).

El índice de Banzhaf también ha sido caracterizado axiomáticamente en Owen [1978], Lehrer [1988] o Feltkamp [1995]. Por ser la más simple, al menos de describir, se recuerda seguidamente la axiomatización de Feltkamp.

**Definición 1.14** Un jugador $i \in N$ es *nulo* en el juego $v$ si $v(S) = v(S \setminus \{i\})$ para toda coalición $S \subseteq N$ que lo contenga.

Se dice que un concepto de solución $\Psi$ satisface la propiedad del jugador nulo si $\Psi_i[v] = 0$ para todo juego $v$ en el que $i$ es un jugador nulo.

Sea $v$ un juego con $n$ jugadores y considérese

$$\overline{\eta}[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{i \in N} \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

El *índice de Banzhaf* es una aplicación $\Psi : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que asigna a cada juego cooperativo $v$ un vector $\Psi[v] = (\Psi_1[v], \Psi_2[v], ..., \Psi_n[v])$ y cumple las propiedades de simetría, jugador nulo y aditividad y satisface $\sum\limits_{i \in N} \Psi_i[v] = \overline{\eta}[v]$.

**Teorema 1.15 (Feltkamp, 1995)** *Existe una única función $\Psi : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que satisface las propiedades de simetría, jugador nulo y aditividad y satisface $\sum\limits_{i \in N} \Psi_i[v] = \overline{\eta}[v]$, y es la dada por*

$$\Psi_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} \frac{1}{2^{n-1}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})] \quad \textit{para cada} \quad i \in N.$$

**Observaciones 1.16**

(a) De hecho, en Feltkamp [1995] se axiomatiza el índice de Banzhaf no normalizado

$$b_i[v] = \sum_{\substack{S \subseteq N \\ i \in S}} [v(S) - v(S \setminus \{i\})].$$

La demostración es análoga para el índice de Banzhaf normalizado e independiente de la adición de jugadores nulos, que es el que se estudia en este trabajo.

(b) El índice de Banzhaf también es una media ponderada de las contribuciones marginales de cada jugador a las coaliciones a las que pertenece. En este caso los coeficientes de ponderación son siempre iguales a $2^{1-n}$, mientras que para el valor de Shapley dependen del tamaño de la coalición.

(c) El índice de Banzhaf tampoco tiene en cuenta factores como los distintos grados de cooperación entre los jugadores o las incompatibilidades.

(d) Sustituyendo la propiedad de aditividad por la de transferencia, se caracteriza $\Psi$ en los juegos simples.

**Ejemplos 1.17**

(a) El índice de Banzhaf para el juego que describe el Parlamento Vasco de esta legislatura es

$$\Psi_1 = 0.6875, \quad \Psi_i = 0.2500 \quad i = 2,3,4, \quad \Psi_j = 0.1250 \quad j = 5,6,7.$$

Porcentualmente el primer partido tiene el 37.9310% del poder, los partidos 2, 3 y 4 el 13.7931% y cada uno de los restantes el 6.8966%.

(b) En el Congreso de los Estados Unidos los índices de poder del presidente, el Senado y la Cámara de Representantes, así como los porcentajes respectivos son

| **Indice de Banzhaf** | **Porcentaje** |
|---|---|
| $\Psi_P = 0.23010$ | 3.9% |
| $\Psi_S = 1.98973$ | 32.8% |
| $\Psi_R = 3.83139$ | 63.3% |

## 1.6 El valor coalicional

Los valores que se han descrito no tienen en cuenta factores tales como la existencia de una estructura de coaliciones en el juego o las diferentes situaciones de comunicación entre los jugadores.

Por supuesto, existen modelos para describir estas situaciones, con sus correspondientes conceptos de solución. A continuación se explica el propuesto por Owen [1977].

Sea $(N, v)$ un juego cooperativo con utilidad transferible. Una *estructura de coaliciones* definida sobre $N$ es una partición cualquiera de $N$. Un juego cooperativo con una estructura de coaliciones es una terna $(N, v, \mathcal{B})$ donde $(N, v)$ es un juego cooperativo y $\mathcal{B} = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ una estructura de coaliciones definida sobre el conjunto de jugadores, $N$.

Basándose en el valor de Shapley, Owen caracteriza axiomáticamente un nuevo valor, conocido ahora como valor coalicional de Owen o simplemente valor coalicional, que refleja las diferentes posibilidades de cada jugador dependiendo del subconjunto de la estructura de coaliciones al que pertenece. En el desarrollo de esta idea no se excluye la posibilidad de que los distintos bloques de la estructura de coaliciones cooperen entre sí. Al contrario, se considera que cada bloque elige un representante, $k$ para el bloque $B_k$, y son éstos los que negocian (juegan). Si $M = \{1, 2, ..., m\}$ es el conjunto formado por los representantes de los bloques de $\mathcal{B}$, entonces el *valor coalicional* de un jugador $i \in B_k$ es

$$\Phi_i[v; \mathcal{B}] = \sum_{S \subseteq B_k} \sum_{T \subseteq M} \gamma(m, t)\gamma(b_k, s)[v(\bigcup_{i \in T} B_i \cup S) - v(\bigcup_{i \in T} B_i \cup S \setminus \{i\})],$$

siendo $\gamma(a, b) = \frac{(a-b)!(b-1)!}{a!}$.

En Owen [1981] se define un valor similar pero basado en el índice de Banzhaf. En el Capítulo 3 se recuerda su construcción. En el momento de redactar esta memoria no conocemos ninguna caracterización axiomática para el índice de Banzhaf modificado por una estructura de coaliciones.

**Ejemplo 1.18 (Los grupos de compra)** La estructura de un grupo de compra acostumbra a ser más compleja de lo que se expuso en el Ejemplo 1.6. Normalmente, se forman pequeños grupos de compra en diversas ciudades de un mismo país que, para competir con las grandes superficies comerciales, aúnan esfuerzos formando un gran grupo de compra. Es decir, su funcionamiento se corresponde, en teoría, al de un juego cooperativo con estructura de coaliciones. Cada coalición sería, a su vez, un conjunto de pequeñas empresas que, para negociar con las demás, eligen un representante. Supóngase, por ejemplo, que el gran grupo de compra está formado por 3 subgrupos con 3, 2 y 1 empresas cada uno. Formalmente, la estructura de coaliciones será

$$\mathcal{B} = \{\{1,2,3\},\{4,5\},\{6\}\}.$$

Las necesidades de cada empresa son (en unidades de un cierto bien de consumo):

| **Empresa** | **Unidades** |
|---|---|
| 1 | 600 |
| 2 | 500 |
| 3 | 400 |
| 4 | 300 |
| 5 | 600 |
| 6 | 500 |

El precio de cada unidad de producto es de 1 u. m. y se continúan aplicando los descuentos del Ejemplo 1.6. Entonces, la función característica que indica los costes es:

| | | | |
|---|---|---|---|
| $v(\emptyset) = 0$ | $v(34) = 665$ | $v(234) = 1080$ | $v(1345) = 1615$ |
| $v(1) = 570$ | $v(35) = 900$ | $v(235) = 1275$ | $v(1346) = 1530$ |
| $v(2) = 475$ | $v(36) = 855$ | $v(236) = 1260$ | $v(1356) = 1680$ |
| $v(3) = 400$ | $v(45) = 855$ | $v(245) = 1260$ | $v(1456) = 1600$ |
| $v(4) = 300$ | $v(46) = 760$ | $v(246) = 1170$ | $v(2345) = 1530$ |
| $v(5) = 570$ | $v(56) = 990$ | $v(256) = 1360$ | $v(2346) = 1445$ |
| $v(6) = 475$ | $v(123) = 1275$ | $v(345) = 1170$ | $v(2356) = 1600$ |
| $v(12) = 990$ | $v(124) = 1260$ | $v(346) = 1080$ | $v(2456) = 1615$ |
| $v(13) = 900$ | $v(125) = 1445$ | $v(356) = 1275$ | $v(3456) = 1530$ |
| $v(14) = 855$ | $v(126) = 1360$ | $v(456) = 1260$ | $v(12345) = 1920$ |
| $v(15) = 1080$ | $v(134) = 1170$ | $v(1234) = 1530$ | $v(12346) = 1840$ |
| $v(16) = 990$ | $v(135) = 1360$ | $v(1235) = 1680$ | $v(12356) = 1950$ |

$$
\begin{array}{llll}
v(23) = 855 & v(136) = 1275 & v(1236) = 1600 & v(12456) = 1875 \\
v(24) = 760 & v(145) = 1275 & v(1245) = 1600 & v(13456) = 1920 \\
v(25) = 990 & v(146) = 1260 & v(1246) = 1615 & v(23456) = 1840 \\
v(26) = 900 & v(156) = 1445 & v(1256) = 1760 & v(123456) = 2175
\end{array}
$$

El valor de Shapley para este juego es

$$\Phi[v] = (440.416, 365, 313.75, 250, 416, 365),$$

y el valor coalicional

$$\Phi[v; \mathcal{B}] = (416.25, 365, 313.75, 262.5, 452.5, 365).$$

Nótese que la primera empresa se beneficia de la negociación conjunta; ello no es así para las empresas 4 y 5.

## 1.7 La extensión multilineal de un juego

Un juego cooperativo es, simplemente, una función real cuyo dominio es $2^N$, el conjunto formado por todos los subconjuntos de $N$. Este dominio puede interpretarse también como el conjunto de vectores

$$\{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_i = 0 \text{ o } 1, \quad i = 1, 2, ..., n\},$$

puesto que cada subconjunto $S \subseteq N$ está en correspondencia biunívoca con el vector de $\mathbb{R}^n$ cuyas componentes son $x_i = 1$ si $i \in S$ y $x_j = 0$ si $j \notin S$. Es decir, $2^N \equiv \{0,1\}^n$ y, por tanto, se puede pensar que $v$ es una función real definida en $\{0,1\}^n$. A partir de esta idea, Owen [1972] extiende dicha función a todo el cubo unidad

$$I^n = [0,1]^n = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ 0 \leq x_i \leq 1, \quad i = 1, 2, ..., n\},$$

de forma que la función resultante es lineal respecto a cada variable.

**Definición 1.19** Sea $(N, v)$ un juego cooperativo de $n$ jugadores. La *extensión multilineal* (EML) de $v$ es la función real de $n$ variables

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{j \in S} x_j \prod_{j \notin S} (1 - x_j) v(S).$$

Esta función está definida para cualesquiera valores reales de $x_j$ $(j = 1, 2, ..., n)$. En la práctica, sin embargo, se consideran sólo los valores de $f$ en el cubo unidad.

Teniendo en cuenta la identificación anterior entre subconjuntos de $N$ y vectores de $\{0,1\}^n$, no es difícil ver que $f$ coincide con $v$ en los vértices de $I^n$ (en el dominio de $v$). De esta manera queda justificada la afirmación de que $f$ es una extensión de $v$. Además, como la función $f$ es lineal respecto de cada variable $x_j$, se trata de una extensión multilineal de $v$. Es más, se demuestra que $f$ es la única aplicación multilineal definida en $I^n$ que coincide con $v$ en los vértices de $I^n$.

La EML de un juego $(N, v)$ admite una interesante interpretación probabilística. Si $X$ es una coalición aleatoria (un subconjunto de $N$ que debe formarse aleatoriamente), $x_j$ es la probabilidad de que el jugador $j$ pertenezca a $X$, para $j = 1, 2, ..., n$, y se supone que dichas probabilidades son independientes, entonces para cada $S \subseteq N$ se tiene

$$\text{Prob}\{X = S\} = \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j).$$

Por tanto

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = E[v(X)],$$

donde $E$ representa la esperanza matemática.

La EML de un juego es útil para calcular los dos valores descritos anteriormente.

**Teorema 1.20 (Owen, 1972 y 1975)** *Sean $(N, v)$ un juego cooperativo de $n$ jugadores y $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ su EML. Entonces:*

*(a) el valor de Shapley de un jugador $i \in N$ es*

$$\Phi_i[v] = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, ..., t)dt;$$

*(b) el índice de Banzhaf de un jugador $i \in N$ es*

$$\Psi_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, ..., \tfrac{1}{2}).$$

La EML puede utilizarse también para obtener otro tipo de información sobre el juego, por ejemplo, si es convexo (Rafels e Ybern [1995]), así como para calcular el valor coalicional de Owen (Owen y Winter [1992]) y el índice modificado de Banzhaf (en esta memoria).

# 2 El valor de Shapley para decidir la formación efectiva de coaliciones

En determinadas situaciones de votación, cuando ningún partido alcanza la mayoría absoluta, es usual que se realicen pactos para gobernar en coalición o se formen coaliciones de apoyo parlamentario. Este es el caso, por ejemplo, del Ayuntamiento de Terrassa, del Parlamento de Cataluña o del Congreso de los Diputados de la presente legislatura. Además, es lógico pensar, al menos en primera instancia, que la formación de una alianza en un juego cooperativo es siempre beneficiosa para los jugadores que deciden coaligarse y desfavorable para los demás. Sería deseable disponer de algún método que permita decidir, *a priori*, si es conveniente o no formar una alianza concreta. Para ello, se debe "medir" de alguna manera el posible beneficio o perjuicio. En este capítulo se aborda este problema y se utilizan el valor de Shapley y su extensión, el valor coalicional de Owen, como instrumentos de medida para decidir si se debe formar la alianza o no.

El análisis se basa, esencialmente, en el uso del juego cociente (Sección 2.1). Otra herramienta de trabajo es la EML del juego, que permite deducir las fórmulas que más adelante se usan. De hecho, uno de los resultados que se introducen es la obtención de la EML del juego cociente a partir de la EML del juego inicial

(Sección 2.2).

Las alianzas binarias en los juegos simples (organismos de decisión) son especialmente interesantes. Se estudian con detalle en la Sección 2.4.

## 2.1 El juego cociente

Normalmente, en Teoría de Juegos, el término coalición es sólo sinónimo de subconjunto de jugadores. No tiene connotaciones de alianza efectiva o compromiso entre sus miembros. Cuando una o más coaliciones (dos a dos disjuntas) deciden realmente actuar como bloques, los efectos de esa decisión se pueden describir de forma adecuada mediante el juego cociente.

Sea $G = (N, v)$ un juego cooperativo. Dada una estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ sobre $N$, el *juego cociente de $G$ respecto a $\mathcal{B}$* se define como $G_\mathcal{B} = (N_\mathcal{B}, v_\mathcal{B})$, donde $N_\mathcal{B} = \{1, 2, ..., m\}$ y

$$v_\mathcal{B}(I) = v\left(\bigcup_{r\in I} S_r\right) \quad \forall I \subseteq N_\mathcal{B}.$$

La proyección al cociente es la aplicación $q_\mathcal{B} : N \longrightarrow N_\mathcal{B}$ definida por $q_\mathcal{B}(i) = r$ para cada $i \in S_r$ y cada $S_r \in \mathcal{B}$.

El juego cociente se puede interpretar de la siguiente manera: en un juego cooperativo $G = (N, v)$, algunos de los jugadores de $N$ deciden formar coaliciones para actuar de manera conjunta a partir de ese momento; así se obtiene la estructura de coaliciones. Cada coalición elige entonces un representante, con lo cual se tienen $m$ representantes en total (si se habían formado $m$ coaliciones). Estos son los que, ahora, intervienen en el juego $v_\mathcal{B}$.

Dada una coalición no vacía $S \subseteq N$, la estructura de coaliciones formada por $S$ y todos los $\{i\}$ tales que $i \notin S$ se denotará por $\langle S\rangle$, y el juego cociente $G_{\langle S\rangle}$ simplemente por $G_S = (N_S, v_S)$; la proyección al cociente será $q_S$. Se dirá que $G_S$ es un *cociente elemental.* El juego cociente correspondiente a la estructura de coaliciones formada por $S$, $T$ (disjuntas) y todos los $\{i\}$ tales que $i \notin S \cup T$ será $G_{\langle S,T \rangle}$.

Al analizar $G_S$ se supone, sin pérdida de generalidad, que $S = \{1, 2, ..., s\}$. En este caso es útil tomar $N_S = \{0, s+1, ..., n\}$ con $q_S(i) = 0$ si $i \in S$ y $q_S(j) = j$ si $j \notin S$. Intuitivamente, se puede pensar que 0 es el representante elegido por la coalición $S$, mientras que los demás jugadores, por ser coaliciones individuales, se representan ellos mismos.

**Definición 2.1**

(a) Un *homomorfismo* $h : G = (N, v) \longrightarrow G' = (N', v')$ es una aplicación $h : N \longrightarrow N'$ tal que su extensión natural $h : 2^N \longrightarrow 2^{N'}$ cumple $v' \circ h = v$.

(b) Un *isomorfismo* $f : G = (N, v) \longrightarrow G' = (N', v')$ es un homomorfismo biyectivo. En este caso, la aplicación inversa también es un isomorfismo.

**Lema 2.2** *Sea $h$ un homomorfismo exhaustivo de $G = (N, v)$ en $\overline{G} = (\overline{N}, \overline{v})$, constante en $S \subseteq N$. Entonces, existe un único homomorfismo exhaustivo $f$ de $G_S$ en $\overline{G}$ tal que $f \circ q_S = h$.*

DEMOSTRACIÓN: Considérese el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "h"] \arrow[d, "q_S"'] & \overline{G} \\ G_S \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Si $t$ es una cualquiera de las clases del cociente $G_S = (N_S, v_S)$, se define $f(t) = h(q_S^{-1}(t))$. $f$ está bien definida, por ser $h$ constante en $S$, y es efectivamente un homomorfismo, es decir, $\overline{v} \circ f = v_S$, ya que, de la definición,

$$(\overline{v} \circ f)(T) = \overline{v}(h(q_S^{-1}(T))), \quad \forall T \subseteq N_S.$$

Por ser $h$ homomorfismo, esta igualdad se convierte en

$$(\overline{v} \circ f)(T) = v(q_S^{-1}(T)) = v_S(T).$$

La exhaustividad de $f$ es consecuencia de la de $h$.

Para demostrar la unicidad supóngase la existencia de $f'$ tal que $f' \circ q_S = h$. Sea $t \in N_S$ arbitrario: como $q_S$ es exhaustiva, se tiene $t = q_S(i)$ para algún $i \in N$ y, por lo tanto,

$$f'(t) = f'(q_S(i)) = h(i) = f(q_S(i)) = f(t).$$

Puesto que $t$ es arbitrario, debe de ser $f' = f$. □

**Proposición 2.3** *Dadas $S, T \subseteq N$, sea $G_{ST}$ el juego cociente $(G_S)_{T'}$, donde $T' = q_S(T)$. Se tiene:*

*(a) Existe un isomorfismo de $G_{ST}$ a $G_{TS}$.*

*(b) Si $S \cap T \neq \emptyset$, entonces $G_{ST}$ es isomorfo a $G_{S \cup T}$.*

*(c) Si $S \cap T = \emptyset$, entonces $G_{ST}$ es isomorfo a $G_{\langle S,T \rangle}$.*

*Todos los isomorfismos conmutan con las proyecciones correspondientes.*

DEMOSTRACIÓN: Para probar este resultado basta con aplicar repetidamente el lema anterior. Por ejemplo, para ver la demostración del apartado (a) se considera el diagrama siguiente:

$$\begin{tikzcd}
G_S \arrow[d, "q'_T"'] \arrow[drr, dashed, "f_1"] & G \arrow[l, "q_S"'] \arrow[r, "q_T"] \arrow[dr, "q_{TS}"] & G_T \arrow[d, "q'_S"] \\
G_{ST} \arrow[rr, dashed, "f"'] & & G_{TS}
\end{tikzcd}$$

Aplicando el lema anterior pero tomando $\overline{G} = G_{TS}$ se ve que existe un único homomorfismo exhaustivo, $f_1$, de $G_S$ en $G_{TS}$. Aplicando de nuevo el lema al triángulo formado por $G_S$, $G_{TS}$ y $G_{ST}$ se prueba la existencia de un homomorfismo exhaustivo $f$ de $G_{ST}$ a $G_{TS}$. La inyectividad es clara si se tiene en cuenta que $|N_{ST}| = |N_{TS}|$.

Los apartados (b) y (c) se demuestran de forma análoga. $\square$

La proposición anterior afirma que realizar dos cocientes elementales consecutivos en un juego $G$ es independiente, salvo isomorfismos, del orden en que se realicen. Una consecuencia inmediata es la que se expone ahora:

**Corolario 2.4** *El resultado de una serie de cocientes elementales sucesivos, $G_{S_1 S_2 \dots S_m}$, no depende del orden de formación; si $S_p \cap S_q \neq \emptyset$, estas dos coaliciones pueden reemplazarse por $S_p \cup S_q$. Además, existe un isomorfismo*

$$G_{\{S_1, S_2, \dots, S_m\}} \simeq G_{S_1 S_2 \dots S_m}$$

*que es natural en el sentido de que es compatible con las dos proyecciones desde $G$. Por tanto, cualquier cociente simultáneo puede obtenerse como una serie de cocientes elementales sucesivos.*

DEMOSTRACIÓN: Basta usar la proposición anterior y recurrencia sobre $m$. $\square$

## 2.2 La extensión multilineal del juego cociente

Sean $G = (N, v)$ un juego cooperativo de $n$ jugadores, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ su EML y $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ una estructura de coaliciones sobre $N$. En esta sección se verá que es posible obtener la EML del juego $(N_{\mathcal{B}}, v_{\mathcal{B}})$ a partir de $f$ (y cómo hacerlo).

**Observación 2.5** Sea $K \subseteq N$, que, por comodidad, se supone formado por $\{1, 2, ..., k\}$ con $k \leq n$. Para todo $S \subseteq N$ se cumple una y sólo una de las alternativas siguientes:

(1) $K \subseteq S$;

(2) $K \cap S = \emptyset$;

(3) $K \cap S \neq \emptyset$ pero $K \not\subseteq S$.

**Proposición 2.6** *La EML del juego $G_K = (N_K, v_K)$ se obtiene a partir de la EML del juego $G = (N, v)$ sustituyendo las variables $x_1, x_2, ..., x_k$ y sus productos por otra indeterminada, $x_0$, y dejando intactas las demás.*

DEMOSTRACIÓN: La EML del juego $G$ es, por definición,

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v(S).$$

Utilizando la observación anterior, la EML puede escribirse así:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, ..., x_n) \;=\; & \sum_{S:\, K \subseteq S} x_1 x_2 \cdots x_k \prod_{i \in S \setminus K} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v(S) + \\ & \sum_{S:\, S \cap K = \emptyset} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S \cup K} (1 - x_j)(1 - x_1) \cdots (1 - x_k)\, v(S) + \\ & \sum_{\substack{S:\, S \cap K \neq \emptyset \\ K \not\subseteq S}} x_m \prod_{\substack{i \in S \\ i \neq m \\ m \in K \cap S}} x_i \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq l \\ l \in K \setminus S}} (1 - x_j)(1 - x_l)\, v(S), \end{aligned}$$

siendo $m$ cualquier jugador de $K \cap S$ y $l$ otro cualquiera de $K \setminus S$. Si se sustituyen $x_1, x_2, ..., x_k$ y sus productos por $x_0$, se obtiene una nueva función:

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_0, x_{k+1}, ..., x_n) &= \sum_{S:\, K \subseteq S} x_0 \prod_{i \in S \setminus K} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v(S) + \\ &\sum_{S:\, S \cap K = \emptyset} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S \cup K} (1 - x_j)(1 - x_0)\, v(S),\end{aligned}$$

ya que $x_m(1 - x_l)$ se anula al efectuar la sustitución. Además, sustituir los productos de las variables $x_1, x_2, ..., x_k$ por $x_0$ es equivalente a reemplazar primero las variables por $x_0$ y después reducir a 1 el exponente que tenga $x_0$. Esto es lo que se ha hecho en el segundo sumatorio:

$$\begin{aligned}(1 - x_0)^k &= \binom{k}{0} - \binom{k}{1} x_0 + \binom{k}{2} x_0^2 - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} x_0^k = \\ &= \binom{k}{0} - \binom{k}{1} x_0 + \binom{k}{2} x_0 - \cdots + (-1)^k \binom{k}{k} x_0 = \\ &= 1 - \left[\binom{k}{1} - \binom{k}{2} + \cdots + (-1)^{k+1} \binom{k}{k}\right] x_0 = 1 - x_0.\end{aligned}$$

Existe una aplicación biyectiva entre los subconjuntos $S \subseteq N$ tales que $S \cap K = \emptyset$ y los subconjuntos $T \subseteq N$ tales que $K \subseteq T$. Por tanto, cada $S$ tal que $S \cap K = \emptyset$ puede escribirse (de forma única) como $S = T \setminus K$ con $K \subseteq T$. Haciendo abuso de notación, $T$ se denota nuevamente por $S$. Así pues,

$$\begin{aligned}\tilde{f}(x_0, x_{k+1}, ..., x_n) &= \sum_{S:\, K \subseteq S} x_0 \prod_{i \in S \setminus K} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v(S) + \\ &\sum_{S:\, K \subseteq S} \prod_{i \in S \setminus K} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)(1 - x_0)\, v(S \setminus K). \quad (2.1)\end{aligned}$$

Ahora se construirá la EML del juego $G_K$ a partir de la definición y se verá que coincide con (2.1).

Se utilizarán las notaciones que se han introducido previamente: el conjunto de jugadores del juego cociente será $N_K = \{0, k + 1, ..., n\}$, las variables correspondientes $x_0, x_{k+1}, ..., x_n$ y la EML $f_K$. Entonces,

$$f_K(x_0, x_{k+1}, ..., x_n) = \sum_{S \subseteq N_K} \prod_{i \in S} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v_K(S) =$$

$$= \sum_{0 \in S} x_0 \prod_{\substack{i \in S \\ i \neq 0}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v_K(S) + \sum_{0 \notin S} \prod_{i \in S} x_i \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq 0}} (1 - x_j)(1 - x_0)\, v_K(S). \quad (2.2)$$

Los subconjuntos $S \subseteq N$ tales que $0 \notin S$ se escriben también como $S \setminus \{0\}$ con $0 \in S$. De esta forma (2.2) queda así:

$$\sum_{0 \in S} x_0 \prod_{\substack{i \in S \\ i \neq 0}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v_K(S) + \sum_{0 \in S} \prod_{i \in S} x_i \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq 0}} (1 - x_j)(1 - x_0)\, v_K(S \setminus \{0\}). \quad (2.3)$$

Recordando que $v_K(S) = v(S \setminus \{0\} \cup K)$ y $v_K(S \setminus \{0\}) = v(S \setminus K)$ si $0 \in S$, de (2.3) se obtiene

$$\sum_{0 \in S} x_0 \prod_{\substack{i \in S \\ i \neq 0}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v(S \setminus \{0\} \cup K) + \sum_{0 \in S} \prod_{i \in S} x_i \prod_{\substack{j \notin S \\ j \neq 0}} (1 - x_j)(1 - x_0)\, v(S \setminus K).$$

En las expresiones anteriores se ha cometido un pequeño abuso de notación, ya que cuando se escribe $v_K(S)$, $S$ es un subconjunto de $N_K$; cuando se pone $v(S)$, $S$ es un subconjunto de $N$. Sin embargo, no hay ninguna ambigüedad porque los subconjuntos $S$ de $N_K$ que contienen al jugador 0 están en correspondencia biunívoca con los subconjuntos $S'$ de $N$ que contienen a $K$, y además $v_K(S) = v(S')$. Por lo tanto, la última suma se puede escribir de la manera siguiente:

$$\sum_{S:\, K \subseteq S} x_0 \prod_{\substack{i \in S \\ i \notin K}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)\, v(S) + \sum_{S:\, K \subseteq S} \prod_{\substack{i \in S \\ i \notin K}} x_i \prod_{j \notin S} (1 - x_j)(1 - x_0)\, v(S \setminus K).$$

Comparando esta fórmula con (2.1) se observa la igualdad que se deseaba comprobar: $\tilde{f} = f_K$. □

**Teorema 2.7** *Sean $(N, v)$ un juego cooperativo de $n$ jugadores, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ su extensión multilineal y $\mathcal{B} = \{S_1, S_2, ..., S_m\}$ una estructura de coaliciones sobre*

*$N$. La extensión multilineal del juego $(N_{\mathcal{B}}, v_{\mathcal{B}})$ puede obtenerse a partir de $f$ sustituyendo, para cada $S_i$ $(i = 1, 2, ..., m)$, las variables correspondientes a sus jugadores, así como los productos de éstas, por una nueva variable $y_i$.*

DEMOSTRACIÓN: Cualquier cociente simultáneo puede obtenerse como una serie de cocientes elementales sucesivos (Corolario 2.4). Por tanto, es suficiente con aplicar la proposición anterior de forma reiterada. □

A continuación se ilustra el uso de este método con dos ejemplos. El primero es un juego de mayoría ponderada con cuatro jugadores muy sencillo. En el segundo se estudia el Consejo de Seguridad de la ONU.

**Ejemplo 2.8** Sea $G$ el juego de mayoría ponderada de cuatro jugadores definido por $[3; 1, 1, 1, 1]$ y tomemos la estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{\{1,2\}, \{3,4\}\}$. La EML de $G$ es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4 - 3x_1x_2x_3x_4.$$

La EML del juego $G_{\mathcal{B}}$ es

$$f_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) = y_1y_2 + y_1y_2 + y_1y_2 + y_1y_2 - 3y_1y_2 = y_1y_2.$$

**Ejemplo 2.9** El Consejo de Seguridad de la Organización de las Naciones Unidas está formado por cinco miembros permanentes (Estados Unidos, Rusia, Gran Bretaña, Francia y China) y diez miembros más que se alternan periódicamente. Para aprobar una resolución se requiere el voto a favor de por lo menos nueve miembros (de los quince totales), y que ninguno de los cinco permanentes vote en contra. Sea $N = V \cup R$, donde $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ es el conjunto de miembros permanentes y $R = \{6, 7, ..., 15\}$ el conjunto de los rotatorios. Desde el punto de vista de la teoría clásica de los juegos cooperativos, se trata de un juego simple $(N, v)$ cuyas coaliciones ganadoras son las de la forma $V \cup T$ con $T \subseteq R$ y $t = |T| \geq 4$. No es difícil escribir $v$ como una combinación lineal de juegos de unanimidad:

$$\begin{aligned} v &= \sum_{\substack{T\subset R\\ t=4}} u_{V\cup T} - 4\sum_{\substack{T\subset R\\ t=5}} u_{V\cup T} + 10\sum_{\substack{T\subset R\\ t=6}} u_{V\cup T} - 20\sum_{\substack{T\subset R\\ t=7}} u_{V\cup T} + \\ &+ 35\sum_{\substack{T\subset R\\ t=8}} u_{V\cup T} - 56\sum_{\substack{T\subset R\\ t=9}} u_{V\cup T} + 84u_N \end{aligned}$$

(en esta fórmula aparecen $210+252+210+120+45+10+1=848$ juegos de unanimidad).

Es muy fácil encontrar la EML de un juego si está escrito como combinación lineal de juegos de unanimidad (Owen [1972]):

*Si $v=\sum_{R\subseteq N} c_R u_R$ es la expresión de un juego $v$ como combinación lineal de juegos de unanimidad, entonces la EML de $v$ es la función*

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{R\subseteq N} c_R \prod_{i\in R} x_i.$$

Aplicando este resultado y escribiendo $X_S=\prod_{i\in S} x_i$ para cada $S\subseteq N$, se obtiene la EML de $v$:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_{15}) = X_V \Bigg( &\sum_{\substack{T\subset R\\ t=4}} X_T - 4\sum_{\substack{T\subset R\\ t=5}} X_T + 10\sum_{\substack{T\subset R\\ t=6}} X_T - \\ &-20\sum_{\substack{T\subset R\\ t=7}} X_T + 35\sum_{\substack{T\subset R\\ t=8}} X_T - 56\sum_{\substack{T\subset R\\ t=9}} X_T + 84X_R \Bigg). \end{aligned}$$

(a) Si se considera la estructura de coaliciones $\mathcal{B}=\{V,\{6\},\{7\},...,\{15\}\}$, la EML del juego cociente asociado es

$$f_{\mathcal{B}}(y_1,y_6,...,y_{15}) = y_1 \Bigg( \sum_{\substack{T\subset R\\ t=4}} Y_T - 4\sum_{\substack{T\subset R\\ t=5}} Y_T + 10\sum_{\substack{T\subset R\\ t=6}} Y_T -$$

$$-20\sum_{\substack{T\subset R\\ t=7}} Y_T + 35\sum_{\substack{T\subset R\\ t=8}} Y_T - 56\sum_{\substack{T\subset R\\ t=9}} Y_T + 84Y_R\Bigg),$$

siendo $Y_T = \prod_{i\in T} y_i$ para cada $T \subseteq R$.

(b) Si se considera $\mathcal{B} = \{V, R\}$, la EML del juego cociente es la (sencilla) función de dos variables

$$\begin{aligned} f_{\mathcal{B}}(y_1, y_2) &= y_1\,(210y_2 - 4\cdot 252y_2 + 10\cdot 210y_2 - 20\cdot 120y_2 + \\ &+ 35\cdot 45y_2 - 56\cdot 10y_2 + 84y_2) = y_1y_2. \end{aligned}$$

## 2.3 El valor de alianza de Shapley

**Definición 2.10** Dados un juego $G = (N, v)$ y una coalición $S \subseteq N$, el *valor de alianza de Shapley* de $S$ en $G$ es

$$\Phi_S^a[G] = \begin{cases} \Phi_0[G_S] & \text{si } S \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } S = \emptyset, \end{cases}$$

donde $0 = q_S(S)$.

De las propiedades del valor coalicional se deduce la relación

$$\sum_{i\in S} \Phi_i[G; \langle S\rangle] = \Phi_0[G_S] = \Phi_S^a[G].$$

**Observaciones 2.11**

(a) Otras formas de calcular el valor de alianza de una coalición $S$ son:

$$\Phi_S^a[G] = \sum_{\{T:\, S\subseteq T\}} \frac{(t-s)!(n-t)!}{(n-s+1)!}[v(T) - v(T\setminus S)],$$

siendo $t = |T|$ y $s = |S|$, o, si se prefiere, utilizando la EML del juego $G_S$,

$$\Phi_S^a[G] = \int_0^1 \frac{\partial f_S}{\partial x_0}(t, t, ..., t)\, dt.$$

(b) El valor de alianza de un jugador aislado es su valor de Shapley en el juego original:

$$\Phi^a_{\{i\}}[G] = \Phi_i[G] \quad i = 1, 2, ..., n.$$

El valor coalicional de los jugadores que decidan formar $S$ puede ser mayor, igual o menor que su valor de Shapley inicial. Es interesante estudiar las diferencias

$$\Phi_i[G; \langle S \rangle] - \Phi_i[G] \quad \text{para } i \in S \text{ y}$$

$$\Phi_i[G] - \Phi_i[G_S] = \Phi_i[G] - \Phi_i[G; \langle S \rangle] \quad \text{para } i \in N \setminus S.$$

Es decir, estudiar las diferencias entre el valor de Shapley en el juego inicial y el valor coalicional en el juego $G_S$ de un jugador $i$, cuando es de $S$ y cuando no lo es. Intuitivamente parece que debería aumentar el valor de los jugadores que forman la coalición $S$ y disminuir el de los que quedan fuera. Esto no es siempre así: de hecho, puede ser muy favorable para un cierto jugador que otros decidan formar coalición.

La diferencia

$$\Delta_S[G] = \Phi^a_S[G] - \sum_{i \in S} \Phi_i[G]$$

proporciona una medida de la conveniencia o no de formar una coalición. Si la diferencia es positiva es beneficioso para los jugadores de $S$ actuar conjuntamente; no lo es si la diferencia es negativa.

**Definición 2.12** Una alianza $S$ es *positiva* si $\Delta_S[G] > 0$, *nula* si $\Delta_S[G] = 0$, y *negativa* si $\Delta_S[G] < 0$.

Unos sencillos ejemplos demuestran que dicha diferencia puede ser, efectivamente, positiva, cero o negativa.

**Ejemplos 2.13**

(a) Sean $G = [2; 1, 1, 1]$ y $S = \{1, 2\}$. Entonces $G_S = [2; 2, 1]$ y, por tanto,

$$\Delta_S[G] = \Phi^a_S[G] - \sum_{i \in S} \Phi_i[G] = 1 - 2/3 = 1/3 > 0.$$

La alianza es positiva: es beneficioso formar la coalición (para los jugadores 1 y 2, por supuesto; no lo es para el 3).

(b) Sea $G = (N, u_S)$ el juego de unanimidad con $S \subseteq N$ como soporte. En este caso, $G_S$ es la dictadura del jugador $0 = q_S(S)$. Así pues,

$$\Delta_S[G] = \Phi^a_S[G] - \sum_{i \in S} \Phi_i[G] = 1 - 1 = 0.$$

La alianza no tiene ningún efecto: es nula.

(c) Sea $G = [68; 43, 33, 23, 18, 14, 2, 1, 1]$ (juego de mayoría ponderada que refleja la situación del Parlamento de Cataluña al principio de la legislatura 1980–1984). Para $S = \{2, 6\}$ se tiene

$$\Delta_S[G] = \Phi^a_S[G] - \sum_{i \in S} \Phi_i[G] = 0.2810 - 0.2857 < 0.$$

La alianza es negativa: es preferible no formar la coalición $\{2, 6\}$.

Este último ejemplo muestra además que, en general, el valor de alianza no es superaditivo, ni siquiera tratándose de juegos superaditivos y monótonos:

$$\Phi^a_{R \cup T}[G] = \Phi^a_S[G] < \Phi_2[G] + \Phi_6[G] = \Phi^a_R[G] + \Phi^a_T[G],$$

siendo $R = \{2\}$ y $T = \{6\}$.

De hecho, hay ejemplos aún más obvios. Si $(N, W)$ es un juego simple propio y $R, T \in W$ entonces $R \cup T \in W$, así que

$$\Phi^a_{R \cup T}[G] = 1 \quad \text{y} \quad \Phi^a_R[G] = \Phi^a_T[G] = 1.$$

**Proposición 2.14** *Si una clase de juegos es cerrada por paso al cociente y cada juego $G = (N, v)$ de esta clase cumple:*

*(a)* $\Phi_i[G] \leq \Phi^a_{\{i,j\}}[G]$ *para todo $i \neq j$ de $N$;*

*(b)* $\Phi_i[G] = \Phi^a_{\{i,j\}}[G]$ *si, y sólo si, $j$ es nulo en $G$ ($i \neq j$),*

*entonces se satisface también:*

*(a')* $\Phi_S[G] \leq \Phi^a_T[G]$ *para* $S \subseteq T \subseteq N$*;*

*(b')* $\Phi_S[G] = \Phi^a_T[G]$ *si, y sólo si, los jugadores de* $T \setminus S$ *son nulos en* $G_S$*.*

DEMOSTRACIÓN: Como la clase es cerrada, para probar (a') se fragmenta el paso $G \longrightarrow G_T$ como sigue: suponiendo que $T \setminus S = \{t_1, ..., t_k\}$, entonces se considera

$$G \longrightarrow G_S \longrightarrow G_{S\cup\{t_1\}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow G_{S\cup\{t_1,...,t_k\}} = G_T.$$

Ahora está claro que (a') se deduce de (a) utilizando recurrencia sobre $k$.

Para probar (b'), si cada $t_h \in T \setminus S$ es nulo en $G_S$, también lo es en los cocientes sucesivos. Usando repetidamente la parte directa de (b) se obtiene $\Phi^a_S[G] = \Phi^a_T[G]$. Recíprocamente: si se cumple la igualdad se toma $t \in T \setminus S$ y se ordena $T \setminus S$ de forma que $t = t_1$. Usando (a) se tiene que $\Phi^a_S[G] = \Phi^a_{S\cup\{t_1\}}[G]$. El recíproco de (b) implica que $t$ es nulo en $G_S$; esto completa la demostración de (b'). $\square$

Por comodidad, se supone que $S = \{1\}$ y $T = \{1,2\}$. De ahora en adelante, en esta sección y en la próxima, se usará la notación simplificada siguiente:

$$\begin{aligned} \Phi_0 &= \Phi_0[G_{\{1,2\}}] \\ \Phi_i &= \Phi_i[G] \text{ para } i = 1,2,3 \\ \hat{\Phi}_i &= \Phi_i[G; \langle\{1,2\}\rangle] \text{ para } i = 1,2,3 \qquad (\hat{\Phi}_3 = \Phi_3[G_{\{1,2\}}]). \end{aligned}$$

Además, si $i, j \in S$ se utilizará $S_i = S \setminus \{i\}$, $S_{ij} = S \setminus \{i,j\}$, y una notación análoga cuando $i, j, k \in S$.

**Lema 2.15** *Para cualquier juego* $G = (N, v)$*, se tiene:*

*(a)* $\Phi_0 = \sum\limits_{1,2\in S\subseteq N} \gamma(n-1, s-1)[v(S) - v(S_{12})].$

*(b)* $\Phi_1 = \sum\limits_{1,2\in S\subseteq N} \{\gamma(n,s)[v(S) - v(S_1)] + \gamma(n, s-1)[v(S_2) - v(S_{12})]\}.$

*(c)* $\Phi_0 - \Phi_1 = \sum\limits_{1,2\in S\subseteq N} \{\gamma(n, s-1)[v(S) - v(S_2)] + \gamma(n,s)[v(S_1) - v(S_{12})]\}.$

*(d)* $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) = \displaystyle\int_0^1 (1-2t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\bar{t})\,dt =$

$$= \sum_{1,2\in S\subseteq N} \frac{(s-2)!(n-s)!}{n!}(n-2s+2)[v(S)-v(S_1)-v(S_2)+v(S_{12})],$$

*siendo* $\bar{t} = (t,...,t)$, $s = |S|$ *y* $\gamma(n,s) = \dfrac{(s-1)!(n-s)!}{n!}$.

DEMOSTRACIÓN: Se recuerda primero la función beta de Euler

$$B(p,q) = \int_0^1 t^p(1-t)^q\,dt = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} \quad \forall p,q \in \mathbb{N},$$

que se utiliza con frecuencia.

(a) Como $\Phi_0 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f_K}{\partial x_0}(\bar{t})\,dt$, donde $f_K$ es la EML del juego $G_K$, basta con aplicar esta fórmula a la expresión de $\tilde{f}$ que se vio en la Proposición 2.6, teniendo en cuenta que $K = \{1,2\}$, y usar la función $B(p,q)$ adecuada.

(b) La EML de $v$ se puede escribir como suma de 4 términos, según la posición de los jugadores 1 y 2 respecto de cada subconjunto $S \subseteq N$:

$$\begin{aligned} f(x_1,x_2,...,x_n) \;=\; & \sum_{1,2\in S} x_1x_2 \prod_{\substack{i\in S\\ i\neq 1,2}} x_i \prod_{j\notin S}(1-x_j)\,v(S) + \\ & \sum_{\substack{1\in S\\ 2\notin S}} x_1 \prod_{\substack{i\in S\\ i\neq 1}} x_i \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq 2}}(1-x_j)(1-x_2)\,v(S) + \\ & \sum_{\substack{1\notin S\\ 2\in S}} x_2 \prod_{\substack{i\in S\\ i\neq 2}} x_i \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq 1}}(1-x_j)(1-x_1)\,v(S) + \\ & \sum_{1,2\notin S} \prod_{i\in S} x_i \prod_{\substack{j\notin S\\ j\neq 1,2}}(1-x_j)(1-x_1)(1-x_2)\,v(S). \end{aligned}$$

Recordando que $\Phi_1 = \displaystyle\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{t})\,dt$ se obtiene la fórmula que se quería probar.

(c) Basta restar las fórmulas de los apartados (a) y (b).

(d) Usando la simetría, se escribe una expresión para $\Phi_2$ similar a la de $\Phi_1$ dada en (b). Después de restar, unos cálculos sencillos permiten obtener la expresión de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ en forma de sumatorio.

Para la fórmula integral, considérese el desarrollo de Taylor de $f$ respecto de $x_1$ y $x_2$ en el punto $(0,0)$:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = \lambda_0(\overline{x}) + x_1\lambda_1(\overline{x}) + x_2\lambda_2(\overline{x}) + x_1x_2\lambda_{12}(\overline{x}),$$

siendo $\overline{x} = (x_3, ..., x_n)$. Por la Proposición 2.6, el desarrollo de Taylor de $\tilde{f}$ respecto de $x_0$ en el punto 0 es

$$\tilde{f}(x_0, x_3, ..., x_n) = \lambda_0(\overline{x}) + x_0[\lambda_1(\overline{x}) + \lambda_2(\overline{x}) + \lambda_{12}(\overline{x})].$$

Entonces, usando $\overline{t} = (t, ..., t)$, se obtiene

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) = \int_0^1 (1-2t)\lambda_{12}(\overline{t})\, dt = \int_0^1 (1-2t)\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\overline{t})\, dt. \quad \square$$

**Teorema 2.16** *En la clase de los juegos monótonos, el valor de alianza de Shapley cumple la condición de monotonía:*

$$\Phi_S^a[G] \leq \Phi_T^a[G] \qquad \forall G = (N, v) \ \textit{con}\ S \subseteq T \subseteq N.$$

*Además, esta desigualdad es una igualdad si, y sólo si, todos los jugadores de* $T \setminus S$ *son nulos en* $G_S$.

DEMOSTRACIÓN: La clase de los juegos monótonos es cerrada por paso al cociente. Las propiedades que se quieren probar son la (a') y la (b') de la Proposición 2.14. Ya se ha visto que es suficiente verificarlas para $|S| = 1$ y $|T| = 2$, es decir, suponiendo $S = \{1\}$ y $T = \{1,2\}$. Sin embargo, en este caso, $\Phi_S^a[G] = \Phi_1$ y $\Phi_T^a[G] = \Phi_0$ de acuerdo con las notaciones introducidas en esta sección. Si el juego es monótono, entonces $v(S) \geq v(S_2)$ y $v(S_1) \geq v(S_{12})$: esto prueba la condición 2.14 (a), o lo que es lo mismo, $\Phi_0 \geq \Phi_1$ (apartado (c) del Lema 2.15). Más aún, la igualdad $\Phi_0 = \Phi_1$ se cumplirá si, y sólo si, $v(S) = v(S_2)$ y $v(S_1) = v(S_{12})$ para cada $S \subseteq N$ tal que $1, 2 \in S$, y esto equivale a decir que 2 es un jugador nulo en $G$ (condición 2.14 (b)). $\square$

**Observación 2.17** De la fórmula 2.15 (c) se deduce que la desigualdad $\Phi_0 \geq \Phi_1$ es, en general, falsa, como puede verse en el ejemplo de alianza negativa siguiente.

**Ejemplo 2.18** Para una pareja, en la declaración de la renta acostumbra a ser más favorable optar por la declaración individual que por la declaración conjunta. Por ejemplo, en un matrimonio al primer miembro le corresponde una devolución de 100.000 pesetas, mientras que el segundo debe pagar a Hacienda 50.000 pesetas, y al declarar conjuntamente obtienen una devolución de 25.000 pesetas. A partir de estos datos se define el juego siguiente:

$$v(1) = 100000, \quad v(2) = -50000; \quad v(12) = 25000.$$

En este caso,

$$\Phi_0 - \Phi_1 = \frac{1}{2}[(25000 - 100000) + (-50000 - 0)] = -62500.$$

Obsérvese que, naturalmente, no se trata de un juego monótono.

**Ejemplo 2.19** Se estudia ahora un problema de asignación de costes. Sea 0 un distribuidor de una cierta materia prima con una red de distribución que une a cinco consumidores potenciales (1 a 5), como puede observarse en la Figura 1; los números sobre las aristas representan su coste (que es, por ejemplo, proporcional a las distancias).

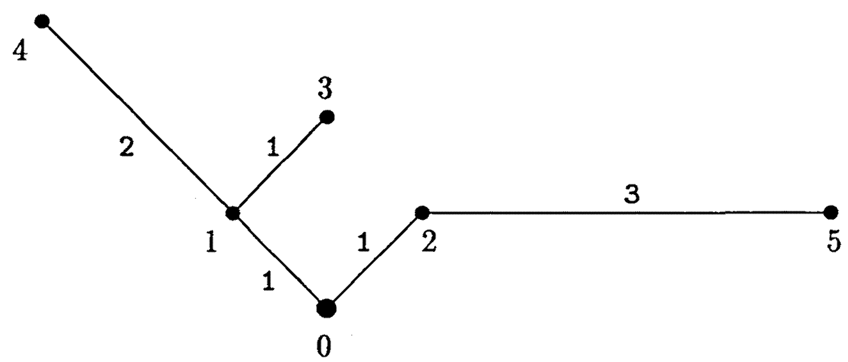


Figura 1.- La red de distribución.

Sea $G = (N, v)$ el juego definido sobre $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ por

$$v(S) = \sum_{i \in S} c(\{i\}) - c(S)$$

para cada $S \subseteq N$, donde $c(S)$ denota el coste del suministro parcial que concierne sólo a los miembros de $S$ y $c(\{i\})$ es el coste total de la unión desde 0 a $i$.

La EML de este juego es

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = x_2x_5 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_3x_4 - x_1x_3x_4,$$

y aplicando el Teorema 1.20 (Owen [1972]), se obtiene

$$\Phi[G] = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right).$$

Antes de considerar cuestiones de tipo coalicional en términos del valor de Shapley, nótese que el juego divide el conjunto de jugadores en dos clases, de acuerdo con su posición en la red de distribución: $C_1 = \{1,3,4\}$ y $C_2 = \{2,5\}$.

Es indiferente para los jugadores 2 y 5 formar la coalición $R = \{2,5\}$ ya que, usando el Teorema 2.7

$$f_{\mathcal{B}}(y_R, ...) = y_R + \cdots$$

y entonces

$$\Phi_R[G_{\mathcal{B}}] = 1 = \Phi_2[G] + \Phi_5[G]$$

para toda estructura de coaliciones de la forma $\mathcal{B} = \{R, ...\}$. Un argumento similar muestra que las únicas coaliciones ventajosas son aquéllas que contienen exactamente dos jugadores de $C_1$. Ninguna otra coalición puede por sí misma modificar el valor de Shapley de sus jugadores, y algunas incluso salen perjudicadas si se forma un bloque de dos elementos de $C_1$.

Si se forma la coalición $S = \{3,4,5\}$, los consumidores 1 y 2 no tienen nada que hacer; entonces

$$f_S(x_1, x_2, y_S) = (x_1 + x_2 + 1)y_S$$

y, por tanto,

$$\Phi_S[G_S] = 2 > \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2}, \quad \Phi_1[G_S] = \Phi_2[G_S] = \frac{1}{2}.$$

El regateo entre los jugadores que formen una coalición puede estar basado en diferentes reglas. Por ejemplo, los miembros de $S$ podrían escoger el valor coalicional como el criterio para su negociación. Utilizando el método de Owen y Winter [1992], se obtiene

$$g(x_3, x_4, x_5, r) = f(r, r, x_3, x_4, x_5) = r(x_5 + x_3 + x_4) + (1 - r)x_3x_4,$$
$$\alpha(x_3, x_4, x_5) = \int_0^1 g(x_3, x_4, x_5, r)\, dr = \frac{x_5 + x_3 + x_4 + x_3x_4}{2},$$

y

$$\Phi_j[G; \langle S \rangle] = \int_0^1 \frac{\partial \alpha}{\partial x_j}(t, t, t)\, dt \quad \text{para } j = 3, 4, 5,$$

así pues,

$$\Phi_3[G; \langle S \rangle] = \Phi_4[G; \langle S \rangle] = \frac{3}{4}, \quad \Phi_5[G; \langle S \rangle] = \frac{1}{2}.$$

También podrían decidir simplemente repartir $\Phi_S[G_S] = 2$ proporcionalmente a su valor de Shapley en $G$, y así cada uno de los jugadores 3 y 4 obtendría $8/11$ y el jugador 5 se quedaría con $6/11$ (un resultado bastante aproximado al valor coalicional). De hecho, los jugadores 3 y 4 no necesitan la participación del jugador 5 porque, si $T = \{3, 4\}$,

$$\Phi_T[G_T] = \frac{3}{2},$$

y tanto la proporcionalidad como el valor coalicional asignan $3/4$ a cada jugador de $T$.

## 2.4 Estudio de las alianzas binarias en los juegos simples

En esta última sección se determinará el máximo y el mínimo de la diferencia entre el valor de alianza de una coalición bipersonal y la suma de los valores de Shapley iniciales de sus jugadores cuando el juego es simple. Es decir, se verá cuándo una alianza binaria obtiene el máximo beneficio y el máximo perjuicio. Concretamente, y para simplificar la notación, se supone que la coalición es $\{1, 2\}$, y se encuentra el máximo y mínimo de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$.

Se estudian también los efectos de esta alianza en los otros jugadores (en el jugador 3, por ejemplo) y se obtienen el máximo y el mínimo de la diferencia entre su valor de Shapley y su valor coalicional ($\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$) así como los juegos donde se alcanzan. Para este fin se deducen previamente otros resultados referentes a juegos cooperativos en general que más adelante se adaptan al caso de los juegos simples.

**Lema 2.20** *Para cada juego $G = (N, v)$,*

*(a)* $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3 = \int_0^1 \frac{\partial^3 f}{\partial x_1 \partial x_2 \partial x_3}(\bar{t})\, dt =$

$$\sum_{1,2,3 \in S \subseteq N} \gamma(n, s-1)[-v(S) + v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) - v(S_{12}) - v(S_{13}) - v(S_{23}) + v(S_{123})].$$

*(b)* $\hat{\Phi}_1 - \Phi_1 = \frac{1}{2} \sum_{1,2 \in S \subseteq N} \frac{(s-2)!(n-s)!}{n!}(n - 2s + 2)[v(S) - v(S_1) - v(S_2) + v(S_{12})]$.

DEMOSTRACIÓN: (a) La expresión integral puede obtenerse de la misma manera que se hizo para el apartado (d) del Lema 2.15, atendiendo ahora al desarrollo de Taylor de $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ respecto de $x_1$, $x_2$ y $x_3$ en el punto $(0, 0, 0)$.

La fórmula del sumatorio se obtiene como se hizo en los apartados (a), (b) y (c) de dicho lema; en este caso es conveniente escribir $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ como la suma de ocho términos, de acuerdo con la posición relativa de los jugadores 1, 2 y 3 respecto cada $S \subseteq N$:

$$\sum_{\substack{1,2 \in P \\ 3 \in P}} x_3 \prod_{\substack{i \in P \\ i \neq 3}} x_i \prod_{j \notin P} (1 - x_j)\, v(P) + \sum_{\substack{1,2 \in P \\ 3 \notin P}} \prod_{i \in P} x_i \prod_{\substack{j \notin P \\ j \neq 3}} (1 - x_j)(1 - x_3)\, v(P) +$$

$$\sum_{\substack{1,2 \notin Q \\ 3 \in Q}} x_3 \prod_{\substack{i \in Q \\ i \neq 3}} x_i \prod_{j \notin Q} (1 - x_j)\, v(Q) + \sum_{\substack{1,2 \notin Q \\ 3 \notin Q}} \prod_{i \in Q} x_i \prod_{\substack{j \notin Q \\ j \neq 3}} (1 - x_j)(1 - x_3)\, v(Q) +$$

$$\sum_{\substack{1 \in R \\ 2 \notin R \\ 3 \in R}} x_3 \prod_{\substack{i \in R \\ i \neq 3}} x_i \prod_{j \notin R} (1 - x_j)\, v(R) + \sum_{\substack{1 \in R \\ 2 \notin R \\ 3 \notin R}} \prod_{i \in R} x_i \prod_{\substack{j \notin R \\ j \neq 3}} (1 - x_j)(1 - x_3)\, v(R) +$$

$$\sum_{\substack{1\notin S\\2\in S\\3\in S}} x_3 \prod_{\substack{i\in S\\i\neq 3}} x_i \prod_{j\notin S}(1-x_j)\,v(S) + \sum_{\substack{1\notin S\\2\in S\\3\notin S}} \prod_{i\in S} x_i \prod_{\substack{j\notin S\\j\neq 3}}(1-x_j)(1-x_3)\,v(S).$$

(b) Para calcular $\hat{\Phi}_1$ se utiliza el método de Owen y Winter [1992]. Las variables $x_3,...,x_n$ deben ser reemplazadas en $f$ por una nueva variable, $r$, por ejemplo. La substitución se llevará a cabo en la expresión de $f$ como suma de cuatro términos que se ha visto en la demostración del Lema 2.15 apartado (c). De esta forma se obtiene

$$g(x_1,x_2,r) = f(x_1,x_2,r,...,r) = \sum_{1,2\in S\subseteq N} r^{s-2}(1-r)^{n-s}[x_1x_2v(S)+$$

$$+x_1(1-x_2)v(S_2)+(1-x_1)x_2v(S_1)+(1-x_1)(1-x_2)v(S_{12})].$$

Se considera después la función:

$$\alpha(x_1,x_2) = \int_0^1 g(x_1,x_2,r)\,dr.$$

Usando $B(p,q)$ y derivando respecto de $x_1$ se tiene

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x_1} = \sum_{1,2\in S\subseteq N} \frac{(s-2)!(n-s)!}{(n-1)!}[x_2v(S)-x_2v(S_1)+(1-x_2)v(S_2)-(1-x_2)v(S_{12})].$$

Finalmente, el valor coalicional es

$$\hat{\Phi}_1 = \int_0^1 \frac{\partial\alpha}{\partial x_1}(\bar{t})\,dt = \frac{1}{2}\sum_{1,2\in S\subseteq N} \frac{(s-2)!(n-s)!}{(n-1)!}[v(S)-v(S_1)+v(S_2)-v(S_{12})].$$

Restando esta expresión de la que se vio en 2.15 (b) para $\Phi_1$ se obtiene la fórmula que se quería comprobar. □

### Observaciones 2.21

(a) La simetría de 2.20 (b) implica que, para cada juego $G$, las variaciones experimentadas en los valores de los jugadores 1 y 2 coinciden:

$$\hat{\Phi}_1 - \Phi_1 = \hat{\Phi}_2 - \Phi_2.$$

(b) Teniendo en cuenta el apartado anterior (o comparando los Lemas 2.15 y 2.20) se ve que

$$\hat{\Phi}_i - \Phi_i = \frac{1}{2}[\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)], \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

Esto quiere decir que $\Phi_0 \geq (\Phi_1 + \Phi_2)$ si, y sólo si, $\hat{\Phi}_1 \geq \Phi_1$ y $\hat{\Phi}_2 \geq \Phi_2$. Por tanto, el signo (+, 0 o −) de cualquier alianza binaria es el mismo que el de sus miembros de forma individual. Por supuesto esto no significa que $\hat{\Phi}_1 = \hat{\Phi}_2$, a menos que sea $\Phi_1 = \Phi_2$.

**Lema 2.22** *Sea $G$ un juego simple. Entonces*

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) = \sum_{S \in W^-_{1\cap 2}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2) + \sum_{S \in W^+_{1\cup 2}} \gamma_n(s)(2s - n - 2) -$$
$$- \sum_{S \in W^+_{1\cap 2}} \gamma_n(s)(2s - n - 2) - \sum_{S \in W^-_{1\cup 2}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2),$$

*donde* $s = |S|$, $\gamma_n(s) = \frac{(n-s)!(s-2)!}{n!}$ *y*

$$\begin{aligned}
W^-_{1\cap 2} &= \{S \in W \ / \ 1,2 \in S, \quad S_1, S_2 \notin W, \quad s < \frac{n}{2} + 1\}, \\
W^+_{1\cap 2} &= \{S \in W \ / \ 1,2 \in S, \quad S_1, S_2 \notin W, \quad s > \frac{n}{2} + 1\}, \\
W^-_{1\cup 2} &= \{S \in W \ / \ 1,2 \in S, \quad S_1, S_2 \in W, \quad S_{12} \notin W, \quad s < \frac{n}{2} + 1\}, \\
W^+_{1\cup 2} &= \{S \in W \ / \ 1,2 \in S, \quad S_1, S_2 \in W, \quad S_{12} \notin W, \quad s > \frac{n}{2} + 1\}.
\end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Como $G$ es simple, el apartado (d) del Lema 2.15 se reduce a

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) = \sum_{S \in W_{1\cap 2}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2) - \sum_{S \in W_{1\cup 2}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2)$$

siendo

$$\begin{aligned}
W_{1\cap 2} &= \{S \in W \ / \ 1,2 \in S, \quad S_1, S_2 \notin W\}, \quad \text{y} \\
W_{1\cup 2} &= \{S \in W \ / \ 1,2 \in S, \quad S_1, S_2 \in W, \quad S_{12} \notin W\}.
\end{aligned}$$

Descomponiendo $W_{1\cap 2} = W_{1\cap 2}^{-} \cup W_{1\cap 2}^{+}$ y $W_{1\cup 2}$ de forma similar (el caso $s = \frac{n}{2}+1$, que puede darse, no importa puesto que anula el factor $n - 2s + 2$) se obtiene inmediatamente la fórmula deseada. □

**Teorema 2.23** *Sea $G$ un juego simple. Entonces:*

*(a) El máximo de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ es*

$$\frac{k-1}{2k-1} \; si \; n = 2k, \qquad \frac{k}{2k+1} \; si \; n = 2k+1,$$

*y se alcanza en ambos casos en el juego $G = [2k; k, k, 1, \overset{n-2}{\ldots}, 1]$.*

*(b) El mínimo de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ es*

$$-\frac{k-1}{2(2k-1)} \; si \; n = 2k, \qquad -\frac{k}{2(2k+1)} \; si \; n = 2k+1,$$

*y se alcanza en ambos casos en el juego $G = [3k; k, k, 1, \overset{n-2}{\ldots}, 1]$.*

DEMOSTRACIÓN: (a) La expresión de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ que se obtuvo en el Lema 2.22 nos muestra cuatro sumatorios, todos ellos con términos mayores o iguales que cero. Así pues, para cualquier juego simple se tiene

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) \leq \sum_{S \in W_{1\cap 2}^{-}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2) + \sum_{S \in W_{1\cup 2}^{+}} \gamma_n(s)(2s - n - 2).$$

Si $G = (N, W)$ es un juego tal que

$$W_{1\cap 2} = W_{1\cap 2}^{-}, \qquad W_{1\cup 2} = W_{1\cup 2}^{+},$$

entonces se habrá determinado el máximo de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ y, por supuesto, este será el juego donde se alcanza. Para ello, es conveniente tratar separadamente los casos $n$ par y $n$ impar.

(a.1) Se estudia primero el caso $n = 2k$. Sea $S$ tal que $1, 2 \in S \in W$ en el juego sugerido. Entonces, el peso de $S$ es $2k + s - 2$. Si $S \in W_{1\cap 2}$ está claro que $k+s-2 < 2k$, por tanto $s \leq \frac{n}{2}+1$ y $S \in W_{1\cap 2}^{-}$ (o no contribuye a $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$). Si $S \in W_{1\cup 2}$, se tiene $k + s - 2 \geq 2k$; entonces, $s \geq \frac{n}{2} + 2$, $s > \frac{n}{2} + 1$ y $S \in W_{1\cup 2}^{+}$.

Falta ver que el máximo es realmente el valor que se ha dicho, pero para el juego descrito

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) = \sum_{S \in W^-_{1\cap 2}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2) + \sum_{S \in W^+_{1\cup 2}} \gamma_n(s)(2s - n - 2) =$$

$$= \sum_{s=2}^{k} \binom{2k-2}{s-2} \frac{(2k-s)!(s-2)!}{(2k)!}(2k-2s+2) + \sum_{s=k+2}^{2k} \binom{2k-2}{s-2} \frac{(2k-s)!(s-2)!}{(2k)!}(2s-2k-2) =$$

$$= \sum_{s=2}^{k} \frac{k-s+1}{k(2k-1)} + \sum_{s=k+2}^{2k} \frac{s-k-1}{k(2k-1)} = \frac{k-1}{2k-1}.$$

(a.2) Si $n = 2k + 1$, el argumento es análogo al anterior.

(b) En el caso del mínimo se sabe, por 2.22, que

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) \geq - \left( \sum_{S \in W^+_{1\cap 2}} \gamma_n(s)(2s - n - 2) + \sum_{S \in W^-_{1\cup 2}} \gamma_n(s)(n - 2s + 2) \right).$$

El razonamiento no es tan directo como en (a). En efecto, sean

$$\mathcal{S} = \{S \subseteq N \ / \ 1,2 \in S, \quad s < \frac{n}{2} + 1\}$$

$$\mathcal{B} = \{S \subseteq N \ / \ 1,2 \in S, \quad s > \frac{n}{2} + 1\}$$

las familias de *pequeñas* (respectivamente, *grandes*) coaliciones que contienen a los jugadores 1 y 2. Es fácil verificar los dos hechos siguientes:

(1) Existe una correspondencia biyectiva $\psi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{B}$ que asigna a cada $S \in \mathcal{S}$ su *pseudocomplementaria* respecto de $N' = N \setminus \{1,2\}$: si $S = \{1,2\} \cup H'$, con $H' \subseteq N'$, entonces $T = \psi(S) = \{1,2\} \cup (N' \setminus H')$. Es más, si $T = \psi(S)$,

$$\gamma_n(s)(n - 2s + 2) = \gamma_n(t)(2t - n - 2).$$

(2) Para cada juego $G = (N, W)$, si $S \subseteq T$ se tiene

$$S \in W^-_{1\cup 2} \iff T \notin W^+_{1\cap 2}.$$

La condición (2) nos dice que, en el caso presente, es imposible tener

$$W_{1\cap 2} = W_{1\cap 2}^{+}, \qquad W_{1\cup 2} = W_{1\cup 2}^{-}.$$

El teorema de Hall [1935] permite definir una aplicación biyectiva $\varphi : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{B}$ tal que $S \subseteq \varphi(S)$ y $|S|+|\varphi(S)| = n-2$ para todo $S \in \mathcal{S}$. Entonces, el mínimo de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ aparecerá cuando, de cada par $(S,T)$ con $S \in \mathcal{S}$ y $T = \varphi(S) \in \mathcal{B}$, sólo una de sus componentes sea de $W_{1\cap 2}^{+} \cup W_{1\cup 2}^{-}$. La condición (1) nos garantiza que no importa la componente que se escoja, y que el mínimo coincidirá con el opuesto de cualquiera de los sumatorios. De nuevo, es conveniente distinguir los casos $n$ par y $n$ impar.

(b.1) Si $n = 2k+1$, se debe verificar que el juego que se ha sugerido satisface

$$W_{1\cap 2} = W_{1\cap 2}^{+} = \mathcal{B}, \qquad W_{1\cup 2} = \emptyset.$$

Sea $S \subseteq N$ tal que $1,2 \in S$. Decir que $S \in W$, o lo que es lo mismo, $2k+s-2 \geq 3k$, es equivalente a $s > \frac{n}{2}+1$, por tanto $S \in W$ si, y sólo si, $S \in \mathcal{B}$. Es más, $k+s-2 \leq k+n-2 = 3k-1 < 3k$, por lo que $S_1$, $S_2 \notin W$ y si $S \in W$ entonces $S \in W_{1\cap 2}^{+}$, por consiguiente, $W_{1\cup 2} = W_{1\cap 2}^{-} = \emptyset$. Falta comprobar que el mínimo es el valor propuesto. Calculando, por ejemplo, el primer sumatorio se tiene

$$\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2) = -\sum_{S\in\mathcal{B}} \gamma_n(s)(2s-n-2) =$$

$$= -\sum_{s=k+2}^{2k+1} \binom{2k-1}{s-2} \frac{(2k+1-s)!(s-2)!}{(2k+1)!}(2s-2k-3) =$$

$$= -\sum_{s=k+2}^{2k+1} \frac{2s-2k-3}{2k(2k+1)} = -\frac{k}{2(2k+1)}.$$

(b.2) Si $n = 2k$, el razonamiento es análogo al anterior. □

**Teorema 2.24** *Sea $G$ un juego simple. Entonces:*

*(a) El máximo de $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$ es $1/3$, y se alcanza en el juego $G = [2;1,1,1,0,\overset{n-3}{\ldots},0]$ para todo $n$.*

(b) *El mínimo de* $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$ *es* $-1/6$, *y se alcanza en el juego* $G = [3; 1, 1, 1, 0, \overset{n-3}{\ldots}, 0]$ *para todo* $n$.

DEMOSTRACIÓN: Se usará la fórmula que se vio en el Lema 2.20 apartado (a):

$$\Phi_3 - \hat{\Phi}_3 = \sum_{1,2,3 \in S \subseteq N} \gamma(n, s-1)[-v(S) + v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) -$$

$$-v(S_{12}) - v(S_{13}) - v(S_{23}) + v(S_{123})],$$

donde $\gamma(n, s-1) = \frac{(s-2)!(n-s+1)!}{n!}$. Si $v(S) = 0$ o $v(S_{123}) = 1$ el término correspondiente se anula, quedando pues

$$\Phi_3 - \hat{\Phi}_3' = \sum_{\substack{1,2,3 \in S \in W \\ S_{123} \notin W}} \gamma(n, s-1)[v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) - v(S_{12}) - v(S_{13}) - v(S_{23}) - 1].$$

(a) Es obvio que el máximo se alcanza en el juego sugerido, ya que cada $S$ tal que $1, 2, 3 \in S$ verifica que $S \in W$, $S_{123} \notin W$, $S_1, S_2, S_3 \in W$, $S_{12}, S_{13}, S_{23} \notin W$. Un cálculo sencillo nos da dicho máximo: $1/3$.

(b) En este caso, es imposible que cada $S$ tal que $1, 2, 3 \in S$ satisfaga las condiciones óptimas, es decir, $S_{123} \notin W$, $S_1, S_2, S_3 \notin W$ y $S_{12}, S_{13}, S_{23} \in W$; está claro que si, por ejemplo, $S_{12} \in W$, entonces $S_1, S_2 \in W$ y la contribución de estas tres coaliciones a la expresión entre llaves es $1 + 1 - 1 = 1$. La mejor solución será, pues, que $S_1, S_2, S_3 \notin W$ o que $S_{12}, S_{13}, S_{23} \in W$; la primera corresponde al juego sugerido, pero ambas dan como valor mínimo $-1/6$, como puede verse fácilmente. □

**Observaciones 2.25**

(a) El máximo (respectivamente, el mínimo) de $\hat{\Phi}_1 - \Phi_1$ es la mitad del máximo (resp., el mínimo) de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$, y se alcanza en los mismos juegos. Por tanto, una alianza binaria será positiva si, y sólo si, el valor coalicional de cada uno de sus miembros supera su valor de Shapley en el juego inicial.

(b) Al contrario que en el caso de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$, ni el máximo ni el mínimo de $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$ dependen de $n$.

(c) Para $n = 3$ el máximo (respectivamente, el mínimo) de $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$ y de $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ coinciden y se alcanzan en los mismos juegos. Para $n = 4$ los juegos difieren, y para $n \geq 5$ ni siquiera los valores coinciden.

(d) Las demostraciones de los Teoremas 2.23 y 2.24 caracterizan todos los juegos simples donde $\Phi_0 - (\Phi_1 + \Phi_2)$ y $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$ alcanzan sus valores extremos.

(e) Es conveniente hacer notar que todos los juegos sugeridos en 2.23 y 2.24 son juegos de mayoría ponderada. Los de 2.23 (a) y 2.24 (a) son únicos, mientras que el juego dado en 2.23 (b) puede reemplazarse por su dual (y, de hecho, por otros juegos), lo mismo que el que se ha visto en 2.24 (b).

Se ha demostrado, por tanto, que las alianzas binarias en los juegos simples son positivas si, y sólo si, los dos jugadores obtienen más de lo que recibían en el juego original. De hecho,

$$\Delta_{\{1,2\}}[G] = 2(\hat{\Phi}_i - \Phi_i), \quad \text{para} \quad i = 1, 2.$$

La alianza será nula si $\hat{\Phi}_i = \Phi_i$, para $i = 1, 2$, y negativa cuando $\hat{\Phi}_i < \Phi_i$, para $i = 1, 2$.

**Ejemplo 2.26 (El Parlamento de Cataluña 1995–1999)** En las pasadas elecciones autonómicas catalanas del 19 de noviembre de 1995 se obtuvieron los resultados siguientes: Convergència i Unió (CiU) 60 diputados, Partit dels Socialistes de Catalunya (PSC) 34 diputados, Partit Popular (PP) 17 diputados, Iniciativa per Catalunya–Els verds (IC) 13 diputados y Esquerra Republicana de Catalunya (ERC) 11 diputados. Se estudian en el juego de mayoría ponderada $[68; 60, 34, 17, 13, 11]$ algunas posibles alianzas binarias. El índice de poder de Shapley–Shubik para este juego es

$$(0.6, 0.1, 0.1, 0.1, 0.1).$$

(a) Supóngase primero que se da la alianza CiU–PSC. En este caso, la coalición que forman es ganadora y, por lo tanto, su valor de alianza de Shapley es 1.

Es decir, se trata de una alianza positiva. El valor coalicional es

$$(0.75, 0.25, 0, 0, 0).$$

(b) De hecho, la alianza de CiU con cualquiera de los otros partidos es análoga, ya que éstos ocupan posiciones simétricas a la del PSC.

(c) Sin embargo, la alianza PSC–IC (o cualquier otra entre dos de los cuatro partidos menores) es negativa, ya que

$$\Phi_0 = 0.1666 < 0.1 + 0.1.$$

En este caso, el valor coalicional es

$$(0.5, 0.0833, 0.1666, 0.0833, 0.1666).$$

# 3 El índice de Banzhaf para decidir la formación efectiva de coaliciones

El objetivo de este capítulo es llevar a cabo un estudio análogo al del capítulo anterior, pero utilizando el índice de Banzhaf y su correspondiente modificación cuando en el juego se introduce una estructura de coaliciones.

La EML del juego desempeñó un papel importante en los razonamientos que se hicieron para deducir las fórmulas del Capítulo 2. También fue útil el método de Owen y Winter para calcular el valor coalicional a través de la EML (demostración del Lema 2.20). Se carecía, sin embargo, de un método similar para obtener el índice modificado de Banzhaf. Este se implementa en la Sección 3.1, y a partir de él se han deducido curiosas propiedades del índice modificado de Banzhaf.

Las demostraciones de los teoremas de este capítulo que son análogas a las del capítulo anterior han sido omitidas.

## 3.1 El índice modificado de Banzhaf y la EML

Primero se recuerda el razonamiento de Owen para definir el índice de Banzhaf modificado por una estructura de coaliciones (Owen [1981]), que tiene en cuenta el hecho de que la formación de algunas coaliciones es más factible que la de otras. El argumento es similar al del valor coalicional (Owen [1977]) y hemos preferido presentarlo sólo aquí.

Sean $\mathcal{B} = \{S_1, ..., S_m\}$ una estructura de coaliciones definida en el conjunto de jugadores $N$ y $v$ un juego cooperativo.

Para un $j \in M = \{1, 2, ..., m\}$ fijo, sea $K$ un subconjunto de $S_j$, y $K' = S_j \setminus K$ su complementario respecto de $S_j$. Owen define el juego $u_{S_j|K}$ para describir lo que pasaría en el juego cociente $v_{\mathcal{B}}$ si la coalición $S_j$ fuese reemplazada por $K$, es decir, si los miembros de $K'$ fueran, de alguna manera, excluídos. Entonces, para $L \subseteq M$, considera

$$u_{S_j|K}(L) = v(\bigcup_{l \in L} S_l \setminus K').$$

Después, define un nuevo juego $w_j$ en $S_j$:

$$w_j(K) = \Psi_j[u_{S_j|K}], \quad \forall K \subseteq S_j.$$

$w_j(K)$ es el *poder* (utilizando el índice de Banzhaf) del jugador $j$ (aquí la subcoalición $K$) en el juego $u_{S_j|K}$. En cierto sentido, $w_j(K)$ mide el poder de la coalición $K$ si ésta estuviese sola (sin sus compañeros de $K'$) regateando con las otras uniones.

Owen define el *índice de Banzhaf modificado por la estructura de coaliciones* $\mathcal{B}$ para cada $i \in S_j$ y cada $j$ como

$$\hat{\Psi}_i[v; \mathcal{B}] = \Psi_i[w_j].$$

Teniendo en cuenta este argumento y la definición de $\Psi_i$, se puede obtener una fórmula explícita para calcularlo:

$$\hat{\Psi}_i[v; \mathcal{B}] = 2^{2-m-s_j} \sum_{\substack{L \subseteq M \\ j \notin L}} \sum_{\substack{K \subset S_j \\ i \notin K}} [v(Q \cup K \cup \{i\}) - v(Q \cup K)], \qquad (3.1)$$

siendo $Q = \bigcup_{l \in L} S_l$.

Ahora se introduce otro método para obtener el índice modificado de Banzhaf utilizando la EML del juego. Después se aplicará al estudio de algunos ejemplos tomados de la realidad que pondrán de manifiesto propiedades singulares de este índice modificado.

**Teorema 3.1** *Sean $(N, v)$ un juego cooperativo y $\mathcal{B} = \{S_1, ..., S_m\}$ una estructura de coaliciones sobre $N$. Fijado un jugador $i \in S_j$, para calcular $\hat{\Psi}_i$ pueden seguirse las reglas siguientes:*

1. *Obtener la EML, $f(x_1, ..., x_n)$, del juego $v$.*
2. *Para cada $l \neq j$ y cada $m \in S_l$, reemplazar la variable $x_m$ por $y_l$. Así se tiene una nueva función de $x_i$ y $y_l$, siendo $i \in S_j$ y $l \neq j$.*
3. *En la función anterior, reducir a 1 todos los exponentes, es decir, sustituir cada $y_l^r$ $(r \geq 1)$ por $y_l$. Esto nos dará otra función multilineal*

$$g_j((x_k)_{k \in S_j}, (y_l)_{l \neq j}).$$

4. *Derivar $g_j$ respecto de $x_i$.*
5. *Por último, sustituir cada $x_k$ y cada $y_l$ por 1/2.*

Demostración: Sea $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ la EML del juego $v$. Aplicando las reglas 2 y 3, de la EML se obtiene otra función multilineal tal que cada término de la EML original indicado por una coalición $T \subseteq N$ que satisface $S_l \cap T \neq \emptyset$ y $S_l \cap T^c \neq \emptyset$ para algún $l \neq j$ se anula en la nueva función multilineal. El motivo es que la expresión $k(1 - y_l)^r$, para cualquier número real $k$ y cualquier entero positivo $r$, se reduce a $k(1 - y_l)$, por la regla 3. Análogamente, $ky_l^r$ se reduce a $ky_l$ y, por tanto, $ky_l^{r_1}(1 - y_l)^{r_2}$ se anula. Así pues, las únicas coaliciones $T \subseteq N$ para la cuales el término correspondiente de la EML inicial no se anula mediante las reglas 2 y 3 son las de la forma

$$T = K \cup Q,$$

donde $K \subseteq S_j$, $L \subseteq M \setminus \{j\}$ y $Q = \cup_{l \in L} S_l$. Es decir, $T$ debe contener sólo componentes enteras de la estructura de coaliciones, a excepción de $S_j$, que puede aparecer parcialmente.

El coeficiente de $v(T)$ para tales coaliciones en la nueva función multilineal es

$$\prod_{k \in K} x_k \prod_{k \in S_j \setminus K} (1 - x_k) \prod_{l \in L} y_l \prod_{\substack{l \notin L \\ l \neq j}} (1 - y_l).$$

Esto prueba que la función multilineal obtenida aplicando 2 y 3 es

$$g_j((x_k)_{k \in S_j}, (y_l)_{l \neq j}) = \sum_{K \subset S_j} \sum_{\substack{L \subset M \\ j \notin L}} [\prod_{k \in K} x_k \prod_{k \in S_j \setminus K} (1 - x_k) \prod_{l \in L} y_l \prod_{\substack{l \notin L \\ l \neq j}} (1 - y_l)] v(Q \cup K).$$

Derivando respecto de $x_i$ (regla 4) se obtiene:

$$\frac{\partial g_j}{\partial x_i}((x_k)_{k \in S_j,\, k \neq i}, (y_l)_{l \neq j}) =$$

$$= \sum_{\substack{K \subset S_j \\ i \notin K}} \sum_{\substack{L \subset M \\ j \notin L}} [\prod_{k \in K} x_k \prod_{\substack{k \in S_j \setminus K \\ k \neq i}} (1 - x_k) \prod_{l \in L} y_l \prod_{\substack{l \notin L \\ l \neq j}} (1 - y_l)] \{v(Q \cup K \cup \{i\}) - v(Q \cup K)\}.$$

Siguiendo la regla 5, se sustituyen todas las variables por 1/2:

$$\sum_{\substack{K \subset S_j \\ i \notin K}} \sum_{\substack{L \subset M \\ j \notin L}} (\tfrac{1}{2})^k (\tfrac{1}{2})^{s_j - k - 1} (\tfrac{1}{2})^l (\tfrac{1}{2})^{m - l - 1} \{v(Q \cup K \cup \{i\}) - v(Q \cup K)\} =$$

$$= \sum_{\substack{K \subset S_j \\ i \notin K}} \sum_{\substack{L \subset M \\ j \notin L}} (\tfrac{1}{2})^{s_j + m - 2} \{v(Q \cup K \cup \{i\}) - v(Q \cup K)\},$$

donde $k = |K|$, $s_j = |S_j|$, $l = |L|$ y $m = |M|$.

Este es precisamente el índice de Banzhaf modificado por la estructura de coaliciones $\mathcal{B}$, $(\hat{\Psi}_i[v; \mathcal{B}])$, como puede comprobarse fácilmente comparando esta expresión con la fórmula (3.1). □

El método anterior se aplicará a continuación a dos ejemplos: el primero se incluye simplemente para ilustrar su uso; el segundo intenta reflejar una situación real.

**Ejemplo 3.2** Sea $v$ el juego de 4 personas definido por $v(S) = 4$ si $1 \in S \neq N$, $v(S) = 2^{s-1}$ si $1 \notin S$ y $v(N) = 8$. El índice ordinario de Banzhaf es $\Psi[v] = (23/8, 9/8, 9/8, 9/8)$. La estructura de coaliciones que se considera es $\mathcal{B} = \{\{1,2\},\{3,4\}\}$.

No cuesta demasiado deducir la EML de este juego:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = 4x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_1x_4 + x_2x_3x_4 + 3x_1x_2x_3x_4.$$

Para calcular primero $\hat{\Psi}_1$ y $\hat{\Psi}_2$ se cambian $x_3$ y $x_4$ por $y_2$. Después de eliminar los exponentes mayores que uno se obtiene la función

$$g_1(x_1, x_2, y_2) = 4x_1 + x_2 + 2y_2 - x_1x_2 - 2x_1y_2 + x_2y_2 + 3x_1x_2y_2.$$

Entonces,

$$\hat{\Psi}_1[v; \mathcal{B}] = \frac{\partial g_1}{\partial x_1}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 13/4 \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}_2[v; \mathcal{B}] = \frac{\partial g_1}{\partial x_2}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 7/4.$$

Para encontrar los otros dos índices modificados, se reemplazan $x_1$ y $x_2$ por $y_1$ en la EML. Reduciendo los exponentes, se tiene

$$g_2(y_1, x_3, x_4) = 4y_1 + x_3 + x_4 - y_1x_3 - y_1x_4 + 4y_1x_3x_4,$$

y, por tanto,

$$\hat{\Psi}_3[v; \mathcal{B}] = \frac{\partial g_2}{\partial x_3}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 3/2 \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}_4[v; \mathcal{B}] = \frac{\partial g_2}{\partial x_4}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = 3/2.$$

Comparando el índice modificado con el ordinario, se nota que todos los jugadores han mejorado al formarse la estructura de coaliciones $\mathcal{B}$. Ahora comparten 8 unidades de utilidad en vez de 6.25 ($\Psi$ no es siempre eficiente).

**Ejemplo 3.3** Ahora se usará el método para calcular el índice modificado de Banzhaf en el juego de mayoría ponderada que refleja la situación del Congreso de los Diputados en la legislatura 1993–1996. Este juego puede representarse por

$$[176; 159, 141, 18, 17, 5, 4, 2, 1, 1, 1, 1].$$

El conjunto de coaliciones ganadoras minimales es

$$W^m = \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3,4\}\},$$

y, por consiguiente, los siete últimos jugadores son nulos y tienen índice 0. El índice ordinario de Banzhaf para los cuatro jugadores no nulos es $\Psi = (\frac{3}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

(a) Considérese en primer lugar la estructura de coaliciones

$$\mathcal{B}_{14} = \{\{1,4\},\{2\},\{3\}\},$$

que se estableció durante los dos primeros años de legislatura: el partido 4 (CiU) apoyaba al gobierno del partido 1 (PSOE). (Obsérvese que en la estructura de coaliciones no aparecen los jugadores nulos puesto que su presencia o no en una coalición es irrelevante para el desarrollo del juego.)

La EML correspondiente es

$$f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3x_4 - x_1x_2x_3 - x_1x_2x_4 - x_1x_3x_4,$$

y la función $g_1(x_1,y_2,y_3,x_4)$ viene dada por

$$g_1(x_1,y_2,y_3,x_4) = x_1y_2 + x_1y_3 + x_1x_4 + y_2y_3x_4 - x_1y_2y_3 - x_1y_2x_4 - x_1y_3x_4.$$

Derivando y evaluando en el punto $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ se obtiene

$$\hat{\Psi}_1[v;\mathcal{B}_{14}] = \frac{3}{4} \text{ y } \hat{\Psi}_4[v;\mathcal{B}_{14}] = \frac{1}{4}.$$

Para calcular $\hat{\Psi}_2[v;\mathcal{B}_{14}]$ se reemplazan $x_1$ y $x_4$ por $y_1$ y $x_3$ por $y_3$ en $f$ y se reducen exponentes. Así se consigue la función

$$g_2(y_1,x_2,y_3) = y_1,$$

y, por tanto,

$$\hat{\Psi}_2[v;\mathcal{B}_{14}] = 0.$$

De forma similar, se obtiene $\hat{\Psi}_3[v;\mathcal{B}_{14}] = 0$. Es decir, $\hat{\Psi}[v;\mathcal{B}_{14}] = (\frac{3}{4},0,0,\frac{1}{4})$ (los jugadores nulos de un juego tienen índice nulo en cualquier juego cociente, sea cual sea la estructura de coaliciones; por eso, su índice modificado no se ha explicitado).

(b) Otras estructuras de coaliciones, más o menos plausibles políticamente, podrían haber sido las siguientes:

- $\mathcal{B}_{12} = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\}$ y $\mathcal{B}_{13} = \{\{1,3\},\{2\},\{4\}\}$, que son isomorfas a $\mathcal{B}_{14}$ y dan, pues, resultados análogos (permutando el papel de los jugadores, claro).
- $\mathcal{B}_{23} = \{\{1\},\{2,3\},\{4\}\}$, que da $\hat{\Psi}[v;\mathcal{B}_{23}] = (\frac{1}{2},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{2})$, y $\mathcal{B}_{24}$, $\mathcal{B}_{34}$, que son análogas a la anterior.
- $\mathcal{B}_{234} = \{\{1\},\{2,3,4\}\}$, para la que se obtiene $\hat{\Psi}[v;\mathcal{B}_{234}] = (0,\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})$.

Nótese que en los casos de $\mathcal{B}_{12}$, $\mathcal{B}_{13}$, $\mathcal{B}_{14}$ y $\mathcal{B}_{234}$ los jugadores que quedan aislados obtienen 0 ya que $\{1,2\},\{1,3\}$, $\{1,4\}$ y $\{2,3,4\}$ son coaliciones ganadoras en el juego original y los jugadores que no forman parte de ellas son nulos en el cociente.

Observando con detenimiento este último ejemplo se aprecian ciertas coincidencias entre los índices de diferentes estructuras coalicionales. Estas coincidencias no son fruto del azar.

**Proposición 3.4** *Si sólo se forma una coalición, por ejemplo, $K = \{1,2,...,k\}$, entonces los valores del índice de Banzhaf para los jugadores 1, 2,..., $k$ no varían. Es decir:*

$$\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}_K] = \Psi_i[v] \quad \textit{para } i = 1,2,...,k \;\; \textit{y cualquier} \;\; v,$$

*siendo $\mathcal{B}_K = \{\{1,2,...,k\},\{k+1\},...,\{n\}\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Siguiendo el método expuesto, si se desea calcular $\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}]$ para $i = 1,2,...,k$ se deben sustituir $x_{k+1}, x_{k+2},...,x_n$ por unas nuevas variables: $y_{k+1}$, $y_{k+2}$,...,$y_n$. Como la estructura coalicional es elemental, no hay que reducir exponentes. Así pues, la función $g(x_1,x_2,...,x_k,y_{k+1},...,y_n)$ coincide con $f(x_1,...,x_n)$ excepto en el nombre de las últimas $n-k$ variables. Si se deriva $g$ respecto de $x_i$ para $i = 1,2,...,k$ y se sustituyen todas las variables por $1/2$, se obtiene lo mismo que al hacer lo propio en la EML $f$, que es como se obtenía el índice ordinario de Banzhaf. □

Sin embargo, sí que pueden variar los índices de los jugadores que no son de $K$, como se ha visto en el ejemplo anterior.

**Proposición 3.5** *Considérense las estructuras de coaliciones*

$$\mathcal{B}_K = \{\{1,2,...,k\},\{k+1\},...,\{n\}\} \text{ y } \mathcal{B}_{K,N\setminus K} = \{\{1,2,...,k\},\{k+1,...,n\}\}.$$

*Entonces, para todo* $j \in N \setminus K$,

$$\hat{\Psi}_j[v;\mathcal{B}_{K,N\setminus K}] = \hat{\Psi}_j[v;\mathcal{B}_K].$$

*Es decir, si se ha formado una alianza $K$, los restantes jugadores no pueden modificar su propio poder formando la coalición complementaria.*

DEMOSTRACIÓN: Para cada $j \in N \setminus K$, el índice modificado $\hat{\Psi}_j[v;\mathcal{B}_K]$ se obtiene cambiando primero las variables $x_1, x_2, ..., x_k$ y sus productos por una nueva indeterminada $y_1$, por ejemplo, derivando después respecto de $x_j$ $(j > k)$, y sustituyendo todas las variables por $1/2$. Para calcular $\hat{\Psi}_j[v;\mathcal{B}_{K,N\setminus K}]$ el procedimiento a seguir es exactamente el mismo. □

Al igual que antes, sí que puede cambiar el valor para los miembros de $K$.

**Ejemplo 3.6** Se estudia el Consejo de Seguridad de la ONU, que ya ha sido descrito en la Sección 2.2. También allí se encontró la EML asociada a este juego, que aquí se usará para efectuar los cálculos.

El índice ordinario de Banzhaf es

$$\Psi_i[v] = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\tfrac{1}{2},...,\tfrac{1}{2}) = 212/2^{12} \quad \text{si } \ i \in V,$$

$$\Psi_j[v] = \frac{\partial f}{\partial x_j}(\tfrac{1}{2},...,\tfrac{1}{2}) = 21/2^{12} \quad \text{si } \ j \in R.$$

Nótese que $\Psi_i[v] \approx 10\Psi_j[v]$ (concretamente, en tanto por ciento, el poder de un miembro permanente es del 16.69%, mientras que el de un rotatorio es del 1.65%). Clásicamente, este hecho se interpreta diciendo que refleja la importancia del derecho a veto que tienen los miembros permanentes.

(a) Supóngase primero que dos miembros permanentes del Consejo de Seguridad, por ejemplo, los dos primeros, deciden unirse, y sean

$$\mathcal{B}_{12} = \{\{1,2\},\{3\},\{4\},...,\{15\}\} \text{ y } \overline{\mathcal{B}}_{12} = \{\{1,2\},\{3,4,...,15\}\}.$$

Entonces se obtienen los valores reflejados en las tablas siguientes:

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}_{12}]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i = 1,2$ | $212/2^{12}$ | 10.02% |
| $i = 3,4,5$ | $424/2^{12}$ | 20.04% |
| $i \in R$ | $42/2^{12}$ | 1.98% |

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\overline{\mathcal{B}}_{12}]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i = 1,2$ | $1024/2^{12}$ | 27.38% |
| $i = 3,4,5$ | $424/2^{12}$ | 11.34% |
| $i \in R$ | $42/2^{12}$ | 1.12% |

En la tercera columna de cada tabla se ha incluído el porcentaje del poder correspondiente a cada miembro del Consejo según el índice de Banzhaf para facilitar la comparación entre las posiciones estratégicas de los jugadores.

(b) Si tres miembros permanentes se ponen de acuerdo, entonces se estudian las estructuras de coaliciones

$$\mathcal{B}_{123} = \{\{1,2,3\},\{4\},\{5\},...,\{15\}\} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{B}}_{123} = \{\{1,2,3\},\{4,5,...,15\}\}.$$

Se obtiene ahora

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}_{123}]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i = 1,2,3$ | $212/2^{12}$ | 6.68% |
| $i = 4,5$ | $848/2^{12}$ | 26.73% |
| $i \in R$ | $84/2^{12}$ | 2.65% |

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\overline{\mathcal{B}}_{123}]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i = 1,2,3$ | $512/2^{12}$ | 12.57% |
| $i = 4,5$ | $848/2^{12}$ | 20.82% |
| $i \in R$ | $84/2^{12}$ | 2.06% |

(c) Si son cuatro permanentes los que deciden coaligarse, se consideran

$$\mathcal{B}_{1234} = \{\{1,2,3,4\},\{5\},\{6\},...,\{15\}\} \text{ y } \overline{\mathcal{B}}_{1234} = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,...,15\}\}.$$

Aquí

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}_{1234}]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i = 1,2,3,4$ | $212/2^{12}$ | 5.02% |
| 5 | $1696/2^{12}$ | 40.15% |
| $i \in R$ | $168/2^{12}$ | 3.98% |

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\overline{\mathcal{B}}_{1234}]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i = 1,2,3,4$ | $256/2^{12}$ | 5.81% |
| 5 | $1696/2^{12}$ | 38.54% |
| $i \in R$ | $168/2^{12}$ | 3.82% |

(d) Si todos los miembros permanentes actúan conjuntamente, sean

$$\mathcal{B}_V = \{V, \{6\}, \{7\}, ..., \{15\}\} \quad \text{y} \quad \overline{\mathcal{B}}_V = \{V, R\}.$$

En este caso

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}_V]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i \in V$ | $212/2^{12}$ | 4.80% |
| $i \in R$ | $336/2^{12}$ | 7.60% |

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\overline{\mathcal{B}}_V]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i \in V$ | $128/2^{12}$ | 3.20% |
| $i \in R$ | $336/2^{12}$ | 8.40% |

(e) Por último, si todos los miembros rotatorios se unen y los permanentes no se ponen de acuerdo, entonces aparece la estructura de coaliciones

$$\mathcal{B}_R = \{\{1\}, \{2\}, ..., \{5\}, R\},$$

y se obtiene

| Jugador | $\hat{\Psi}_i[v;\mathcal{B}_R]$ | Porcent. |
|---|---|---|
| $i \in V$ | $128/2^{12}$ | 15.06% |
| $i \in R$ | $21/2^{12}$ | 2.47% |

Si se compara el índice ordinario de Banzhaf con los resultados que se han encontrado en (a), (b), (c) y (d), se ve que formar una coalición ($\{1,2\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,3,4\}$, $V$ o sus complementarias) es siempre beneficioso para los jugadores restantes —con la única excepción de $R$, que perjudica a los miembros permanentes. Si sólo algunos de éstos deciden aliarse, los miembros permanentes que quedan salen muy beneficiados —véanse (a), (b) y (c)—, pero la proporción de diez a uno entre su poder y el de un miembro no permanente se mantiene.

## 3.2 El índice de alianza de Banzhaf

En esta sección se incluye un desarrollo paralelo al que se hizo en la Sección 2.3 y se utilizan notaciones análogas.

**Definición 3.7** Dados un juego $G = (N, v)$ y una coalición $S \subseteq N$, el *índice de alianza de Banzhaf* de $S$ en $G$ es

$$\Psi_S^a[G] = \begin{cases} \Psi_0[G_S] & \text{si } S \neq \emptyset; \\ 0 & \text{si } S = \emptyset, \end{cases}$$

donde $0 = q_S(S)$.

La relación que existe entre el valor coalicional de Shapley y su valor de alianza no se satisface en este caso, como puede observarse en el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 3.8** Sea $v$ el juego de mayoría ponderada $[3; 1, 1, 1, 1]$, y tomemos la estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{\{1,2,3\},\{4\}\}$. El índice ordinario de Banzhaf para este juego es $\Psi[v] = (3/8, 3/8, 3/8, 3/8)$. Si sólo se forma una coalición, como en este caso, sus miembros obtienen índice modificado igual al que tenían previamente (Proposición 3.4). Así pues, $\hat{\Psi}\,[v] = (3/8, 3/8, 3/8, 0)$, ya que el jugador 4 es nulo en el juego cociente. El índice de alianza de la coalición $S =$

$\{1,2,3\}$ es 1, por ser dictadora en el juego cociente $G_S$. No obstante,

$$\sum_{i=1}^{3} \hat{\Psi}\,[v;\langle S\rangle] = \frac{9}{8} \neq \Psi^a_{\{1,2,3\}}[G] = 1.$$

**Observaciones 3.9**

(a) Es fácil calcular el índice de alianza de Banzhaf de una coalición $S$:

$$\Psi^a_S[G] = \sum_{\{T:\, S\subseteq T\}} \frac{1}{2^{n-s}}[v(T) - v(T\setminus S)].$$

O, si se prefiere, utilizando la EML del juego $G_S$,

$$\Psi^a_S[G] = \frac{\partial f_S}{\partial x_0}(\tfrac{1}{2},...,\tfrac{1}{2}).$$

(b) El índice de alianza de un jugador es su índice de Banzhaf en el juego original:

$$\Psi^a_{\{i\}}[G] = \Psi_i[G] \quad i = 1,2,...,n.$$

De nuevo, la diferencia

$$\Lambda_S[G] = \Psi^a_S[G] - \sum_{i\in S} \Psi_i[G]$$

nos proporciona una medida de la conveniencia o no de formar una coalición.

**Definición 3.10** Una alianza es *positiva* si $\Lambda_S[G] > 0$, *nula* si $\Lambda_S[G] = 0$, y *negativa* si $\Lambda_S[G] < 0$.

Los tres ejemplos siguientes muestran que, realmente, la diferencia $\Lambda_S[G]$ puede ser positiva, cero o negativa también según el criterio del índice de Banzhaf.

**Ejemplos 3.11**

(a) Sean $G = [5;2,1,1,1,1]$ y $S = \{1,2,3,4\}$. Entonces $G_S = [5;5,1]$ y, por tanto,

$$\Lambda_S[G] = \Psi^a_S[G] - \sum_{i\in S} \Psi_i[G] = 1 - 7/8 = 1/8 > 0.$$

(b) Sean $G = [2; 1, 1, 1]$ y $S = \{1, 2\}$. En este caso, $G_S = [2; 2, 1]$ y

$$\Lambda_S[G] = \Psi^a_S[G] - \sum_{i \in S} \Psi_i[G] = 1 - 1 = 0.$$

La alianza no tiene ningún efecto: es nula.

(c) Sean $G = [3; 1, 1, 1, 1]$ y $S = \{1, 2, 3\}$.

$$\Lambda_S[G] = \Psi^a_S[G] - \sum_{i \in S} \Psi_i[G] = 1 - 9/8 < 0.$$

La alianza es negativa: es preferible no formar la coalición $\{1, 2, 3\}$.

El índice de alianza de Banzhaf tampoco es superaditivo (ni siquiera para juegos de mayoría ponderada) como se comprueba de forma inmediata con el ejemplo del apartado (c) tomando $\mathcal{B} = \{\{1, 2\}, \{3\}, \{4\}\}$. Sean $R = \{1, 2\}$ y $S = \{3\}$. Haciendo los cálculos pertinentes, se obtiene

$$1 = \Psi^a_{R \cup S}[G] < \Psi^a_R[G] + \Psi^a_S[G] = \frac{3}{4} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8}.$$

Afortunadamente, al igual que el valor de alianza de Shapley, el índice de alianza de Banzhaf cumple la propiedad de monotonía (en los juegos monótonos).

**Proposición 3.12** *Si una clase de juegos es cerrada por paso al cociente y cada juego $G = (N, v)$ de esta clase verifica:*

*(a)* $\Psi_i[G] \leq \Psi^a_{\{i,j\}}[G]$ *para todo $i \neq j$ de $N$;*

*(b)* $\Psi_i[G] = \Psi^a_{\{i,j\}}[G]$ *si, y sólo si, $j$ es nulo en $G$ ($i \neq j$),*

*entonces se verifica también:*

*(a')* $\Psi_S[G] \leq \Psi^a_T[G]$ *para $S \subseteq T \subseteq N$;*

*(b')* $\Psi_S[G] = \Psi^a_T[G]$ *si, y sólo si, los jugadores de $T \setminus S$ son nulos en $G_S$.*

DEMOSTRACIÓN: Es en todo análoga a la de la Proposición 2.14. □

Por comodidad, se supone que $S = \{1\}$ y $T = \{1,2\}$. En lo que queda de esta sección y en la próxima, se usarán las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \Psi_0 &= \Psi_0[G_{\{1,2\}}] \quad (= \Psi^a_{\{1,2\}}[G]); \\ \Psi_i &= \Psi_i[G] \quad \text{y} \quad \hat{\Psi}_i = \Psi_i[G; \langle\{1,2\}\rangle] \ \text{ para } i = 1,2,3. \end{aligned}$$

**Lema 3.13** *Para cualquier juego $G = (N, v)$, se tiene:*

*(a)* $\Psi_0 = \sum_{1,2 \in S \subseteq N} \frac{1}{2^{n-2}}[v(S) - v(S_{12})]$.

*(b)* $\Psi_1 = \sum_{1,2 \in S \subseteq N} \frac{1}{2^{n-1}}[v(S) - v(S_1) + v(S_2) - v(S_{12})]$.

$\Psi_2 = \sum_{1,2 \in S \subseteq N} \frac{1}{2^{n-1}}[v(S) - v(S_2) + v(S_1) - v(S_{12})]$.

*(c)* $\Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_2$.

DEMOSTRACIÓN: (a) Basta con recordar que $\Psi_0 = \frac{\partial f_{\{1,2\}}}{\partial x_0}(1/2, ..., 1/2)$, siendo $f_{\{1,2\}}$ la EML del juego $G_{\{1,2\}}$, y tener en cuenta el método de la Sección 2.2 para obtenerla.

(b) Aplicar que $\Psi_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}(1/2, ..., 1/2)$, siendo $f(x_1, ..., x_n)$ la EML del juego $G$ escrita como en la demostración del apartado (b) del Lema 2.15.

Análogamente para $\Psi_2$.

(c) Esta igualdad se obtiene sumando las dos expresiones del apartado (b). □

**Teorema 3.14** *En la clase de los juegos monótonos, el índice de alianza de Banzhaf satisface la condición de monotonía:*

$$\Psi^a_S[G] \leq \Psi^a_T[G] \qquad \forall G = (N, v) \ \text{ con } S \subseteq T \subseteq N.$$

*Además, esta desigualdad es una igualdad si, y sólo si, todos los jugadores de $T \setminus S$ son nulos en $G_S$.*

DEMOSTRACIÓN: Inmediata teniendo en cuenta la Proposición 3.12 y que $\Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_2$ ($\Psi_i \geq 0$ para $i = 1, 2$ en los juegos monótonos.)

Además, $\Psi_0 = \Psi_1$ si, y sólo si, $\Psi_2 = 0$, lo que para un juego monótono $G$ equivale a decir que el jugador 2 es nulo en $G$. □

**Observaciones 3.15**

(a) En este caso, $\Psi_0 \geq \Psi_1$ para todo $G = (N, v)$. Esto no es siempre cierto para el valor de alianza de Shapley.

(b) Para $|S| > 2$ no se cumple que $\Psi_0 = \sum_{i \in S} \Psi_i$, como puede verse en el Ejemplo 3.11 (a).

En Lehrer [1988] se presenta una interesante axiomatización del índice de Banzhaf. Es conveniente observar que, además de utilizar los axiomas clásicos de jugadores títeres, indiferencia y aditividad, se añade como cuarto axioma una de las propiedades que se han visto en este capítulo.

Concretamente, para cada juego $(N, v)$ y cada coalición $T$, Lehrer considera el cociente elemental $G_T$, cuya función característica $v_T$ está definida sobre el conjunto $(N \setminus T) \cup \{0\}$ de la siguiente manera:

$$v_T(S) = v(S), \quad v_T(S \cup \{0\}) = v(S \cup T) \quad \forall S \subseteq N \setminus T.$$

El sistema de axiomas que Leher [1988] impone y que caracteriza al índice de Banzhaf para los juegos cooperativos es:

**B1** Si $i \in N$ es un títere en $v \in G_n$, entonces $\Psi_i[v] = v(\{i\})$.

**B2** Si $i, j \in N$ son indiferentes en $v \in G_n$, entonces $\Psi_i[v] = \Psi_j[v]$.

**B3** Para cada $T = \{i, j\} \subseteq N$ y cada $v \in G_n$, $\Psi_i[v] + \Psi_j[v] \leq \Psi_0[v_T]$.

**B4** $\Psi[u + v] = \Psi[u] + \Psi[v]$ para $u, v \in G_n$.

En el caso de los juegos simples B4 debe sustituirse por la propiedad de transferencia de Dubey (véase el Teorema 1.12).

Nótese que en B3 se pide que, para cada coalición binaria, su índice de alianza sea mayor o igual que la suma de los índices de los jugadores que la forman. De hecho, en este capítulo se ha visto que la igualdad se cumple siempre.

## 3.3 Estudio de las alianzas binarias en los juegos simples

Puesto que $\Psi_0 = \Psi_1 + \Psi_2$, todas las alianzas binarias son nulas y no tiene sentido un teorema análogo al 2.23. Tampoco tiene sentido comparar $\Psi_i$ con $\hat{\Psi}_i$ para $i = 1, 2$, ya que coinciden. Sí se puede estudiar cómo afecta la alianza de los jugadores 1 y 2 a los demás (tomando, por comodidad, al jugador 3).

**Lema 3.16** *Para cualquier juego $G = (N, v)$ con $n > 2$, dada la estructura de coaliciones $\mathcal{B} = \{\{1,2\}, \{3\}, ..., \{n\}\}$ se tiene:*

$$\Psi_3 - \hat{\Psi}_3 = \sum_{1,2,3 \in S \subseteq N} \frac{1}{2^{n-1}} \, [-v(S) + v(S_1) + v(S_2) + v(S_3) \\ -v(S_{12}) - v(S_{13}) - v(S_{23}) + v(S_{123})].$$

DEMOSTRACIÓN: Es fácil obtener esta fórmula a partir de la EML del juego escrita como suma de ocho términos que se vio en la demostración del Lema 2.20. □

En general es difícil trabajar con esta expresión. Si el juego es simple se reduce bastante y se obtiene el resultado siguiente.

**Teorema 3.17** *Sea $G$ un juego simple. Entonces:*

*(a) El máximo de $\Psi_3 - \hat{\Psi}_3$ es $1/2$, y se alcanza en el juego de mayoría ponderada $G = [2; 1, 1, 1, 0, \overset{n-3}{\ldots}, 0]$ para todo $n$.*

*(b) El mínimo de $\Psi_3 - \hat{\Psi}_3$ es $-1/4$, y se alcanza en el juego de mayoría ponderada $G = [3; 1, 1, 1, 0, \overset{n-3}{\ldots}, 0]$ para todo $n$.*

DEMOSTRACIÓN: Es idéntica a la del Teorema 2.24. □

**Observaciones 3.18**

(a) Igual que en el caso del valor de alianza de Shapley, el máximo es menos dos veces el mínimo.

(b) El máximo y el mínimo de $\Phi_3 - \hat{\Phi}_3$ y $\Psi_3 - \hat{\Psi}_3$ se obtienen en los mismos juegos.

**Ejemplo 3.19** En el Parlamento Catalán, la alianza

$$S = \{\text{PSC, PP, IC, ERC}\}$$

es positiva según el índice de Banzhaf ya que

$$\Psi_S = 1 > 4 \cdot 0.125 = 0.5.$$

Esta alianza es la que permitió que la presidencia del Parlamento no recayese en CiU, sino que fuese a parar al PSC.

# 4 Juegos con múltiples alternativas

En Bolger [1993] se definen los juegos de $n$ jugadores y $r$ alternativas como posibles modelos para situaciones en las que los agentes o jugadores tienen dos o más opciones entre las que elegir y que, tal vez, no han sido estudiadas con la precisión suficiente por la teoría clásica de los juegos cooperativos. Problemas típicos de la Teoría de Juegos adquieren, en algunos casos, una nueva dimensión cuando se analizan desde el punto de vista de los juegos con $r$ alternativas. Para ilustrar esta afirmación, se introducen los ejemplos siguientes.

**Ejemplo 4.1** El Consejo de Seguridad de la ONU ha sido estudiado normalmente como un juego cooperativo simple donde los jugadores (las naciones que lo forman) tienen solamente dos opciones: votar a favor de una resolución o votar en contra (Ejemplo 2.9). En este supuesto, las coaliciones ganadoras están formadas por los cinco miembros permanentes y cuatro o más de los miembros rotatorios. La abstención de un miembro permanente, si se considera, debe interpretarse como un voto negativo y, por consiguiente, muy decisivo. Pero lo cierto es que no sólo las reglas reales del Consejo permiten la abstención, sino que se puede aprobar una resolución con la abstención de alguno o algunos de los miembros permanentes. Es decir, en realidad las naciones disponen de tres alternativas: votar a favor de la resolución, votar en contra o abstenerse.

**Ejemplo 4.2** Las elecciones en las que se debe escoger un candidato entre varios acostumbran a regirse por mayoría simple (relativa) en vez de mayoría absoluta. Estas situaciones no pueden estudiarse mediante un juego cooperativo clásico. Considérese, por ejemplo, el caso concreto siguiente: en Terrassa, después de las elecciones municipales de mayo del 95, cinco partidos políticos obtuvieron representación en el Ayuntamiento, con 13, 6, 4, 3 y 1 concejales, y se presentaron dos candidatos para alcalde ($a$ y $b$). El candidato que alcanzase mayor número de votos de los concejales, o $a$ en caso de empate, por ser el de mayor edad o cualquier otra razón que se quiera imponer para deshacer los empates, sería nombrado alcalde. Por supuesto, los concejales podían abstenerse si no deseaban votar a ninguno de los dos candidatos propuestos. Ningún juego de mayoría ponderada del tipo $[q; 13, 6, 4, 3, 1]$ refleja la situación anterior.

Estos dos sencillos ejemplos muestran que los juegos cooperativos clásicos son insuficientes para describir situaciones bastante comunes. Los juegos de $n$ jugadores con $r$ alternativas pretenden ser el marco conceptual en el que estudiar situaciones como las anteriores. En este capítulo se verá que utilizando los juegos con múltiples alternativas se puede, por ejemplo:

- incorporar la abstención en las votaciones como posible alternativa, o
- estudiar las votaciones en las que gana la mayoría simple.

Pero no sólo los juegos de votación admiten ser estudiados como juegos con $r$ alternativas: también problemas de tipo económico pueden ser analizados desde esta nueva perspectiva.

**Ejemplo 4.3** El problema de la bancarrota (Ejemplo 1.5) también admite un estudio desde el punto de vista de los juegos con múltiples alternativas. La función clásica

$$v_{E;d}(S) = \max\{0, E - \sum_{i \notin S} d_i\}$$

asigna a cada coalición lo que obtendría en el peor de los casos: si todos los acreedores de $N \setminus S$ pasan a cobrar su deuda antes que los de $S$. Obsérvese que *todos* los acreedores que no forman parte de $S$ acuden a cobrar. No se contempla la posibilidad de que alguno o algunos de estos acreedores no reclamen la deuda porque, por ejemplo, el coste de la reclamación sea superior a su importe. Se verá que este hecho puede tenerse en cuenta utilizando los juegos con $r$ alternativas.

Como es natural, a medida que el modelo se aproxima más a la realidad, también aumenta la complejidad en los cálculos. Esta es, sin duda, una notable dificultad en el análisis de los juegos con $r$ alternativas.

Se resume brevemente, a continuación, el contenido de este capítulo. En la Sección 4.1 se recuerdan los conceptos relativos a los juegos con $r$ alternativas. Posteriormente (Sección 4.2) se relacionan los juegos cooperativos clásicos con los juegos de dos alternativas. Más adelante se introducen los $r$–juegos, que simplifican el estudio de los juegos con $r$ alternativas. En la Sección 4.4 se estudia la extensión multilineal de un $r$–juego. Se analizan después los $r$–juegos simples y se extienden conceptos clásicos a este nuevo contexto. Para finalizar, se definen los $r$–juegos restringidos, que aparecen cuando uno o más subconjuntos están obligados a escoger determinadas alternativas.

## 4.1 El valor de Bolger para los juegos con $r$ alternativas

Precedentes de los juegos con $r$ alternativas de Bolger [1993] son los juegos en forma de función de partición introducidos por Lucas y Thrall [1963]. Un primer intento de trasladar la teoría del valor a esta clase de juegos se debe a Myerson [1977], que propone una cierta extensión del valor de Shapley. Más recientemente, Bolger [1983] utiliza un índice de tipo Banzhaf para juegos de votación con múltiples candidatos. En Bolger [1986] se modifica el índice anterior para hacerlo independiente de la adición de jugadores nulos y, para ello, se consideran particiones ordenadas. Esta es una idea esencial en el desarrollo de los juegos con múltiples alternativas. En ese mismo trabajo, Bolger sugiere una extensión del valor de Shapley diferente de la propuesta por Myerson (véanse también Bolger

[1987] y [1989]).

Por último, Bolger [1993] define y caracteriza axiomáticamente una nueva extensión del valor de Shapley *respecto a cada alternativa.* Esta relatividad es necesaria para evaluar correctamente los juegos con múltiples alternativas.

En esta sección se resume parte del trabajo de Bolger [1993] y se introduce la notación que se usa en este capítulo y en el próximo (y que no coincide del todo con la de Bolger). Se trata, por tanto, de una sección preliminar con material no original. Sin embargo, nos ha parecido conveniente por cuestiones de orden y homogeneidad recordar aquí y no en el Capítulo 1 el trabajo de Bolger.

Sean $N = \{1,2,...,n\}$ el conjunto de jugadores y $R = \{1,2,...,r\}$ $(r \geq 2)$ el conjunto de las alternativas entre las que puede escoger cada jugador de $N$. El conjunto de todas las particiones ordenadas de $N$ en exactamente $r$ subconjuntos, algunos de los cuales pueden ser vacíos, se denotará por $\mathcal{P}_r(N)$:

$$P = (P_1, P_2, ..., P_r) \in \mathcal{P}_r(N) \text{ sii } \bigcup_{j=1}^{r} P_j = N \text{ y } P_j \cap P_k = \emptyset \quad \forall j \neq k.$$

**Definición 4.4 (Bolger, 1993)** Un *juego con n jugadores y r alternativas* es una función $V$ de $\mathcal{P}_r(N)$ en $\mathbb{R}^r$ que asigna a cada partición $P = (P_1, P_2, ..., P_r)$ un vector de $\mathbb{R}^r$, $V(P) = (v_1(P), v_2(P), ..., v_r(P))$, con la condición de que $v_j(P) = 0$ si $P_j = \emptyset$.

La partición $P$ es simplemente una distribución de los jugadores según sus preferencias sobre las distintas alternativas. Cada componente de la función $V(P)$, $v_j(P)$, se interpreta como la cantidad que percibe la coalición $P_j$ (formada por los jugadores que eligen la alternativa $j$) teniendo en cuenta lo que escogen los restantes jugadores, los de $N \setminus P_j$.

Sean $\mathcal{G}_n^r$ el espacio vectorial de los juegos con $n$ jugadores y $r$ alternativas en el sentido de Bolger (para abreviar, *rB–juegos*) y $M_n^r(\mathbb{R})$ el conjunto de matrices de $n$ filas y $r$ columnas con coeficientes reales.

**Definición 4.5** Un *valor para los juegos con n jugadores y r alternativas* es una aplicación $\theta : \mathcal{G}_n^r \longrightarrow M_n^r(\mathbb{R})$ que asigna a cada $rB$–juego $V$ una matriz de números reales $(\theta_i^j[V])$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., r$.

Cada elemento de la matriz puede pensarse como la parte que le corresponde al jugador $i$ cuando $N$ elige la alternativa $j$. Bolger denota por $V(N; j)$ lo que obtiene la gran coalición $N$ al escoger la opción $j$.

**Definición 4.6 (Bolger, 1993)** Un valor $\theta$ es *$j$–eficiente* (o eficiente en la alternativa $j$) si para cada $rB$–juego $V$ se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} \theta_i^j[V] = V(N; j).$$

A partir de cuatro axiomas, tres de ellos semejantes a los que se utilizan para caracterizar el valor de Shapley, Bolger prueba la existencia de un único valor eficiente en cada alternativa para los $rB$–juegos. Para entender bien los axiomas se necesitan nuevos conceptos.

**Definición 4.7 (Bolger, 1993)**

- Sea $\pi$ una permutación de $N$. Se define $\pi V$ por $\pi V(P) = V(\pi P)$.
- Se dice que el jugador $i$ es *$j$–nulo* en el $rB$–juego $V$ si para toda partición $P$ tal que $i \in P_j$ se cumple que $v_j(P) = v_j(P^*)$, siendo $P^*$ la partición obtenida a partir de $P$ moviendo el jugador $i$ de $P_j$ a cualquier otro subconjunto $P_k$ de $P$.
- Un $rB$–juego es *simple* si $v_j(P) = 0$ o $1$ para todo $j = 1, 2, ..., r$. En este caso, la coalición $P_j$ se llama *ganadora respecto a la partición* $P = (P_1, P_2, ..., P_r)$ si $v_j(P) = 1$. Se llama *perdedora* si $v_j(P) = 0$.
- Un $rB$–juego simple es *monótono* si para toda coalición $P_j$ ganadora respecto de la partición $(P_1, P_2, ..., P_r)$, y para toda $T \subseteq N \setminus P_j$, la coalición $P_j \cup T$ es ganadora respecto de la partición $(P_1 \setminus T, ..., P_j \cup T, ..., P_r \setminus T)$.

- En un $rB$–juego simple, un jugador $i \in P_j$ es *pivote respecto de la partición* $P$ si $v_j(P) = 1$ y $v_j(P^*) = 0$ (donde $P^*$ es como antes).

El sistema de axiomas que Bolger utiliza para caracterizar un valor eficiente en cada alternativa es el siguiente.

**A1** Para cada $j$, si el jugador $i$ es $j$–nulo en $V \in \mathcal{G}_n^r$, entonces $\theta_i^j[V] = 0$.

**A2** Si $V, W \in \mathcal{G}_n^r$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

$$\theta^j[V + W] = \theta^j[V] + \theta^j[W] \;\text{ y }\; \theta^j[cV] = c\theta^j[V] \quad \forall j.$$

**A3** Si $\pi$ es una permutación de $N$, entonces $\theta_i^j[\pi V] = \theta_{\pi i}^j[V] \quad \forall j$.

**A4** Si $V, W \in \mathcal{G}_n^r$ y para cada partición $P$ tal que $i \in P_j$ se cumple que

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}[v_j(P) - v_j(P^k)] = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r}[w_j(P) - w_j(P^k)],$$

siendo $P^k$ la partición que se obtiene moviendo el jugador $i$ de $P_j \in P$ a $P_k \in P$, entonces $\theta_i^j[V] = \theta_i^j[W]$ para cada $j$.

Según Bolger, en el contexto de los $rB$–juegos simples y monótonos este último axioma dice que si, para cada partición, el número de *movimientos* en los que el jugador $i$ es pivote coincide en los dos juegos, entonces dicho jugador tiene el mismo valor respecto a la alternativa $j$ en ambos.

**Teorema 4.8 (Bolger, 1993)** *Existe un único valor $\theta$ eficiente en cada alternativa que satisface los axiomas anteriores. Además, el valor de un jugador $i \in N$ respecto a una alternativa $j$ en un $rB$–juego $V$ es*

$$\theta_i^j[V] = \sum_{\substack{P\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_j}} \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{r} \frac{(p_j-1)!(n-p_j)!}{n!(r-1)^{n-p_j+1}}[v_j(P) - v_j(P^k)],$$

*donde $p_j = |P_j|$ y $n = |N|$.*

Obsérvese que el enunciado del teorema postula la existencia de un único valor eficiente respecto a cada alternativa. Esto es equivalente a añadir un quinto axioma de eficiencia para cada alternativa.

Albizuri, Santos y Zarzuelo [1995] proponen otras caracterizaciones axiomáticas para el valor de Bolger.

## 4.2 Juegos con dos alternativas y juegos cooperativos clásicos

La idea de Bolger de introducir diversas alternativas para los juegos cooperativos es adecuada ya que, como se ha puesto de manifiesto, ello permite mejorar los modelos con los que el teórico de juegos cooperativos aproxima las situaciones reales. En un juego cooperativo clásico $(N, v)$, se acostumbra a interpretar $v(S)$ como la utilidad mínima que obtienen los miembros de la coalición $S$ independientemente de las acciones de los componentes de $N \setminus S$. Para ser precisos, se supone que si no están de acuerdo con $S$, entonces tienen sólo una alternativa: actuar contra $S$. Sin embargo, es habitual que los jugadores de $N \setminus S$ tengan diferentes alternativas y que la utilidad que obtiene la coalición $S$ dependa de las opciones que elijan los miembros de $N \setminus S$. Los juegos con $r$ alternativas permiten tener en cuenta estas consideraciones.

Piénsese, por ejemplo, en las votaciones. En la mayoría de ellas la abstención es posible y se convierte, por lo tanto, en una alternativa más para los jugadores. Aunque los juegos simples clásicos no describen adecuadamente todas las situaciones de votación (recuerdénse los Ejemplos 4.1 y 4.2), sí reflejan perfectamente las votaciones en las que se presenta a consideración una sola propuesta y se requiere un número fijo de votos para su aprobación. En estas circunstancias, la abstención está permitida pero cuenta en contra de la propuesta. Las mociones de censura son ejemplos típicos de estas situaciones. Los juegos simples tradicionales también sirven, por supuesto, cuando se escoge entre dos alternativas y se prohibe la abstención.

Anteriormente se ha señalado que en los juegos cooperativos clásicos los jugadores disponen, en esencia, de dos alternativas. Es interesante, pues, ver si existe alguna relación entre estos juegos y los $2B$–juegos, es decir, entre $G_n$ y $\mathcal{G}_n^2$. (Cada partición, en este caso, se escribirá $P = (S, N \setminus S)$.)

Dado un juego $v \in G_n$, hay diversas maneras de inyectarlo en $\mathcal{G}_n^2$. Por ejemplo, basta considerar el juego $U \in \mathcal{G}_n^2$ definido por

$$U(S, N \setminus S) = (v(S), 0),$$

aunque no parece fácil encontrarle una interpretación sugerente.

A continuación se proponen otras dos formas de inyectar $G_n$ en $\mathcal{G}_n^2$ que sí admiten interpretaciones.

La primera consiste en definir

$$V(S, N \setminus S) = (v(S), v(N \setminus S)),$$

y la segunda

$$W(S, N \setminus S) = (v(S), v(N) - v(S)).$$

**Definición 4.9**

(a) Un $2B$–juego $V = (v_1, v_2)$ es *de suma constante* si existe $k \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_1(S, N \setminus S) + v_2(S, N \setminus S) = k \quad \forall S \subseteq N.$$

(b) Un $2B$–juego simple $V = (v_1, v_2)$ es *propio* si, para $i \neq j$, $v_i(S, N \setminus S) = 0$ cuando $v_j(S, N \setminus S) = 1$.

Algunas de las propiedades de los $2B$–juegos $V$ y $W$ se resumen en las observaciones siguientes.

**Observaciones 4.10**

(a) $V$ y $W$ son $2B$-juegos simples monótonos si, y sólo si, $v$ es un juego simple clásico.

(b) $V$ es propio y monótono si, y sólo si, $v$ es propio.

(c) $W$ es de suma constante.

(d) $V = W$ si, y sólo si, $v$ es de suma constante, es decir,

$$v(S) + v(N \setminus S) = v(N) \quad \forall S \subseteq N.$$

(e) Si $v$ es simple, entonces $W$ es propio y monótono.

(f) $\theta_i^j[V] = \theta_i^j[W] = \Phi_i[v]$ para $i \in N$ y $j = 1, 2$.

Estas dos formas de asociar a cada juego clásico un $2B$-juego corresponden a las dos situaciones en las que un juego simple se puede interpretar correctamente como modelo de decisión y que ya han sido comentadas antes.

Concretamente:

- El juego $V$ corresponde al caso en que hay dos propuestas, $a$ y $b$, por ejemplo, y no se permite la abstención. Si $V$ es propio se evita que puedan salir elegidas simultáneamente $a$ y $b$.

- El juego $W$ corresponde al caso en que hay una única propuesta (alternativa $a$) para modificar un *status quo* previo (alternativa $b$). La abstención está permitida pero equivale a votar en contra de la propuesta y favorecer, de hecho, al *status quo*.

El ejemplo siguiente muestra que los juegos con dos alternativas también sirven para describir determinados supuestos económicos.

**Ejemplo 4.11** En una economía de mercado existen dos suministradores de un cierto bien de consumo y tres clientes potenciales que, en principio, pueden elegir libremente entre los dos suministradores. Estos, para captar el máximo número de clientes, ofrecen diversos descuentos que dependen del gasto que haga el cliente y de si éste viene acompañado por otro u otros. Así, por ejemplo, si el cliente número 1 elige el primer suministrador, cuando el 2 y el 3 eligen el segundo, consigue un descuento de 70 unidades, mientras los otros dos consiguen un descuento conjunto de 100. Teniendo en cuenta todas las posibilidades (que, para abreviar, no se describen literalmente), es posible construir un modelo para estudiar esta situación utilizando un $2B$–juego con una cierta función característica. En este hipotético caso podría ser

$$\begin{array}{ll} V(\emptyset,123)=(0,240), & V(1,23)=(70,100)\\ V(2,13)=(50,110), & V(3,12)=(50,110)\\ V(12,3)=(120,40), & V(13,2)=(120,40)\\ V(23,1)=(110,60), & V(123,\emptyset)=(210,0). \end{array}$$

El valor de Bolger para este juego es $\theta^1[V]=(80,65,65)$ y $\theta^2[V]=(90,75,75)$ y da una posible distribución de 210 entre los tres clientes si todos escogen la primera opción; o de 240 si eligen la segunda.

Nótese que, formalmente, este juego con dos alternativas es equivalente a dos juegos cooperativos clásicos de tres jugadores:

$$\begin{array}{ll} v_1(1)=70 & v_2(1)=60\\ v_1(2)=50 & v_2(2)=40\\ v_1(3)=50 & v_2(3)=40\\ v_1(12)=120 & v_2(12)=110\\ v_1(13)=120 & v_2(13)=110\\ v_1(23)=110 & v_2(23)=100\\ v_1(123)=210 & v_2(123)=240 \end{array}$$

El valor de Bolger correspondiente a la primera alternativa coincide con el valor de Shapley de $v_1$, y el de la segunda alternativa con el valor de Shapley de $v_2$.

Este ejemplo muestra que dados dos juegos cooperativos cualesquiera, $v_1$ y $v_2$, es posible definir un $2B$–juego

$$V(S, N \setminus S) = (v_1(S), v_2(N \setminus S)) \quad \forall S \subseteq N,$$

y que $\theta_i^1[V] = \Phi_i[v_1]$ y $\theta_i^2[V] = \Phi_i[v_2]$.

## 4.3 Los $r$–juegos cooperativos

Fijada una alternativa, la primera, por ejemplo, se denotarán las particiones $\mathbf{P} \in \mathcal{P}_r(N)$ por $(S, P)$, siendo $S \subseteq N$ el conjunto de jugadores que eligen la primera alternativa y $P$ la colección ordenada de los restantes subconjuntos de la partición $\mathbf{P}$. Es decir:

$$\mathbf{P} = (S, P) = (S, P_2, ..., P_r).$$

**Definición 4.12** Un *r–juego cooperativo* con $n$ jugadores y $r$ alternativas es una aplicación $v$ que a cada partición $(S, P) \in \mathcal{P}_r(N)$ le asigna un número real, $v(S, P)$, con la condición que $v(\emptyset, P) = 0$.

El número $v(S, P)$ representa la utilidad que obtiene la coalición $S$ cuando escoge la primera alternativa, teniendo en cuenta lo que han elegido los demás jugadores.

$G_n^r$ denotará el conjunto de $r$–juegos con $n$ jugadores. Por supuesto, un juego con $r$ alternativas en el sentido de Bolger es un vector formado por $r$ $r$-juegos (fijando convenientemente la alternativa a considerar) y, por tanto, los $r$–juegos son los *juegos componentes* de los juegos con $r$ alternativas de Bolger. Es decir

$$\mathcal{G}_n^r = G_n^r \times G_n^r \times \overset{r}{\cdots} \times G_n^r.$$

El estudio de los juegos con $r$ alternativas puede, pues, ser reducido al de los $r$–juegos, con las ventajas de notación y simplicidad que ello comporta.

**Ejemplo 4.13** El Consejo de Seguridad de la ONU puede estudiarse de forma correcta utilizando 3–juegos. Se utilizará la misma notación que se usó en el

Ejemplo 2.9: $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ representa el conjunto de los miembros permanentes y $R = \{6, 7, ..., 15\}$ el de rotatorios. La primera alternativa será votar a favor de una resolución, la segunda votar en contra y la tercera abstenerse. Considérense

$$v_1(S, P_2, P_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } |S| \geq 9 \text{ y } P_2 \cap V = \emptyset, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

y

$$v_2(P_1, S, P_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } |P_1| < 9 \text{ y } S \neq \emptyset, \text{ o bien si } S \cap V \neq \emptyset, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El 3–juego $v_1$ determina las particiones que pueden hacer que una resolución sea aprobada; el 3–juego $v_2$ determina las que hacen que sea rechazada.

Estos dos juegos son suficientes para describir de forma bastante aproximada el funcionamiento del Consejo de Seguridad de la ONU.

Nótese que si $S = \emptyset$ y $|P_1| < 9$ en $v_2$, la propuesta no es aprobada y, sin embargo, el 3–juego $v_2$ asigna valor 0 a las particiones de este tipo. Se puede interpretar que si nadie vota en contra de la propuesta, pero tampoco son suficientes los que votan a favor, entonces el resultado no es la derrota de la propuesta sino la apertura de un nuevo período de discusiones (o negociaciones) previo a una nueva votación.

Quizás el modelo no sea totalmente fiel a la realidad, pero es más aproximado que el clásico de los juegos simples. De hecho, la regla que postula el modelo en el caso de *impasse* para respetar la condición $v_2(P_1, \emptyset, P_3) = 0$ (nuevas negociaciones y posterior votación) parece más racional que la que se aplica realmente.

Conceptualmente, los $r$–juegos presentan una ventaja respecto de los juegos con $r$ alternativas propuestos por Bolger, al menos en las situaciones de votación, ya que no es necesario asignar un valor numérico al subconjunto de jugadores que se abstienen (arbitrariamente se le podría asignar 0). Es decir, distinguen entre el conjunto de alternativas entre las que pueden elegir los jugadores y el conjunto de alternativas *factibles* o posibles resultados del juego (en el ejemplo anterior las alternativas factibles son que se apruebe una resolución o que no se apruebe, mientras que la abstención es una de las posibilidades de las que disponen los jugadores: en la vida real la abstención no gana prácticamente nunca, pero el modelo de los $r$–juegos prevé incluso una salida bastante razonable en este caso, la vuelta a la discusión y la negociación).

Se define la suma de $r$–juegos de la manera siguiente: si $u, v \in G_n^r$, entonces $u+v$ es el $r$–juego tal que

$$(u+v)(S,P) = u(S,P) + v(S,P) \quad \forall (S,P) \in \mathcal{P}_r(N).$$

Análogamente se define el producto de un $r$–juego $v$ por un escalar $c \in \mathbb{R}$:

$$(c \cdot v)(S,P) = c \cdot v(S,P) \quad \forall (S,P) \in \mathcal{P}_r(N).$$

Con estas dos operaciones es claro que $G_n^r$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$.

Para cada $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$ con $S \neq \emptyset$ se considera el $r$–juego $e_{(S,P)}$ que, sobre los elementos $(T,Q) \in \mathcal{P}_r(N)$, actúa así:

$$e_{(S,P)}(T,Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } (T,Q) = (S,P), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

El conjunto $\{e_{(S,P)} : \quad (S,P) \in \mathcal{P}_r(N)\}$ es una base de $G_n^r$. De hecho, si $v \in G_n^r$ entonces:

$$v = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} v(S,P) e_{(S,P)}.$$

Para saber la dimensión de $G_n^r$ basta contar el número de elementos $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$ con $S \neq \emptyset$ o, razonando por complementariedad, contar las particiones que tienen uno de sus subconjuntos vacío: $(r-1)^n$. Por tanto, $\dim(G_n^r) = r^n - (r-1)^n$.

**Definición 4.14** Un $r$–juego $v$ es *independiente de la partición* si para toda coalición $S \subseteq N$ se cumple

$$v(S,P) = v(S,P') \quad \forall P \text{ y } P'.$$

**Observación 4.15** Sea $G_n$ el espacio vectorial de los juegos cooperativos clásicos con $n$ jugadores. Fijado $r \geq 2$, para cada $w \in G_n$ se define el $r$–juego $v$ dado por

$$v(S, P) = w(S) \quad \forall P,$$

que es independiente de la partición. La aplicación $\alpha : G_n \longrightarrow G_n^r$ definida por $\alpha(w) = v$ es claramente lineal. También es inyectiva porque $\ker(\alpha) = \{0\}$. Además, la imagen de $\alpha$ está formada por todos los $r$–juegos independientes de la partición, puesto que, dado un $r$–juego $v$ de este tipo, el juego dado por $w(S) = v(S, P)$, para cualquier $P$, está bien definido y es una antiimagen de $v$.

Por tanto, $G_n$ puede considerarse incluído en $G_n^r$ para todo $r \geq 2$ y cada juego de $G_n$ se identifica con un $r$–juego de una clase especial: la de los $r$–juegos independientes de la partición. Aunque no es la única inyección lineal de $G_n$ en $G_n^r$, obviamente, sí que es una inyección *natural* en el sentido de que se establece sin hacer referencia a bases concretas de ambos espacios.

Para $r = 2$, las dimensiones de $G_n$ y $G_n^r$ coinciden y, en consecuencia, $\alpha$ es biyectiva y $G_n$ puede identificarse canónicamente con $G_n^2$.

A continuación se extenderán conceptos típicos de los juegos cooperativos clásicos al contexto de los $r$–juegos. Para ello es importante trasladar a las particiones la relación de inclusión entre coaliciones.

**Definición 4.16** Dadas $(S, P), (T, Q) \in \mathcal{P}_r(N)$, se dirá que $(S, Q) \subseteq (T, Q)$ si

- $S \subseteq T$, y
- $Q_i \subseteq P_i$ para $i = 2, 3, ..., r$.

$(S, P) \subset (T, Q)$ significará que $(S, P) \subseteq (T, Q)$ pero $(S, P) \neq (T, Q)$.

La definición anterior nos dice que $(S, P) \subseteq (T, Q)$ si esta última se obtiene a partir de $(S, P)$ haciendo que algunos jugadores de $N \setminus S$ se unan a $S$, formando así la coalición $T$. Cualquier otro movimiento de los jugadores queda excluído. Cuando $r = 2$ la relación de inclusión que se acaba de definir coincide con la inclusión normal entre coaliciones ya que, en este caso, $(S, N \setminus S) \subseteq (T, N \setminus T)$ implica $S \subseteq T$ y $N \setminus T \subseteq N \setminus S$, condiciones que son equivalentes.

**Definición 4.17** Para $(S,P),(T,Q) \in \mathcal{P}_r(N)$,

$$(S,P) \cup (T,Q) = (N \setminus \{\bigcup_{j=2}^{r} U_j\}, U)$$

siendo $U_j = P_j \cap Q_j$ para $j = 2, 3, ..., r$, y $U = (U_2, U_3, \ldots, U_r)$.

Por ejemplo, si $N = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $(12,36,45),(23,1,456) \in \mathcal{P}_3(N)$, entonces

$$(12,36,45) \cup (23,1,456) = (1236, \emptyset, 45).$$

Nótese que $(12,36,45) \subseteq (1236,\emptyset,45)$ y $(23,1,456) \subseteq (1236,\emptyset,45)$ siendo ésta, además, la menor partición que las contiene. Este resultado es general.

**Proposición 4.18** *Dadas $(S,P),(T,Q) \in \mathcal{P}_r(N)$, la partición $(S,P) \cup (T,Q) \in \mathcal{P}_r(N)$ es la menor partición (en el sentido de la inclusión que se acaba de definir) que contiene a ambas.*

DEMOSTRACIÓN: Supóngase la existencia de una partición $(X,V)$ tal que $(S,P) \subseteq (X,V)$, $(T,Q) \subseteq (X,V)$ y $(X,V) \subset (S,P) \cup (T,Q)$. Entonces, $X \subset N \setminus \{\bigcup_{j=2}^{r} U_j\}$ y $P_j \cap Q_j \subset V_j$ para $j = 2,3,...,r$. Pero $(S,P) \subseteq (X,V)$ y $(T,Q) \subseteq (X,V)$ implican que $V_j \subseteq P_j$, $V_j \subseteq Q_j$, y por tanto $V_j \subseteq P_j \cap Q_j$, para $j = 2,3,...,r$, lo cual es contradictorio. $\square$

Con las definiciones anteriores, las particiones también satisfacen algunas de las propiedades de la unión e inclusión de conjuntos.

**Proposición 4.19** *Dadas tres particiones cualesquiera $(S,P),(T,Q),(X,V) \in \mathcal{P}_r(N)$ se cumplen:*

*(a)* $(S,P) \cup (S,P) = (S,P)$.

*(b)* $(S,P) \subseteq (T,Q) \iff (S,P) \cup (T,Q) = (T,Q)$.

(c) $(S,P) \cup (T,Q) \subseteq (X,V) \Longrightarrow (S,P) \subseteq (X,V)$ y $(T,Q) \subseteq (X,V)$.

(d) $(S,P) \subseteq (T,Q)$ y $(T,Q) \subseteq (X,V) \Longrightarrow (S,P) \subseteq (X,V)$.

DEMOSTRACIÓN: (a) Es obvia.

(b) Se demuestra primero la implicación directa. Si $(S,P) \subseteq (T,Q)$ entonces $S \subseteq T$ y $Q_j \subseteq P_j$ para $j = 2,3,...,r$. Sea $(X,V)$ la partición que se obtiene al hacer la unión de las dos particiones. Debe ser $V_j = P_j \cap Q_j = Q_j$ para $j = 2,3,...,r$ y, por tanto, $X = T$.

El recíproco es evidente si se tiene en cuenta la Proposición 4.18.

(c) Por hipótesis $V_j \subseteq P_j \cap Q_j$. Esto implica $V_j \subseteq P_j$ y $V_j \subseteq Q_j$ y, en consecuencia, $S = N \setminus \{\cup_{j=2}^r P_j\} \subseteq N \setminus \{\cup_{j=2}^r V_j\} = X$ y $T = N \setminus \{\cup_{j=2}^r Q_j\} \subseteq N \setminus \{\cup_{j=2}^r V_j\} = X$.

(d) Como $S \subseteq T \subseteq X$ y $V_j \subseteq Q_j \subseteq P_j$ para $j = 2,3,...,r$, se tiene $(S,P) \subseteq (X,V)$. $\square$

Ahora es posible definir de forma sencilla las nociones de $r$–juego monótono y $r$–juego superaditivo.

**Definición 4.20** Un $r$–juego $v$ es *monótono* si para cualesquiera particiones $(S,P),(T,Q) \in \mathcal{P}_r(N)$ tales que $(S,P) \subseteq (T,Q)$ se cumple que $v(S,P) \leq v(T,Q)$.

La proposición siguiente nos muestra que todo $r$–juego monótono es no negativo.

**Proposición 4.21** *Si $v$ es un $r$–juego monótono, entonces $v(S,P) \geq 0$ para toda $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$.*

DEMOSTRACIÓN: Para cualquier $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$ existe otra partición de la forma $(\emptyset,Q)$ tal que $(\emptyset,Q) \subseteq (S,P)$ (por ejemplo, la partición $(\emptyset, P_2 \cup S, P_3, ..., P_r)$). Por ser monótono, se tiene $0 = v(\emptyset,Q) \leq v(S,P)$. $\square$

**Definición 4.22** Un $r$–juego $v$ es *superaditivo* si para cualesquiera particiones $(S,P),(T,Q)\in\mathcal{P}_r(N)$ tales que $S\cap T=\emptyset$ se tiene

$$v(S,P)+v(T,Q)\leq v((S,P)\cup(T,Q)).$$

**Lema 4.23** *Si $(S,P)\subseteq(T,Q)$ y $(T',Q')$ es la partición $(T\backslash S,Q_2\cup S,Q_3,...,Q_r)$, entonces $(S,P)\cup(T',Q')=(T,Q)$.*

DEMOSTRACIÓN: La unión de $(S,P_2,...,P_r)$ y $(T\setminus S,Q_2\cup S,Q_3,...,Q_r)$ es una nueva partición $(X,V)$ tal que $V_2=P_2\cap(Q_2\cup S)=Q_2$, ya que $P_2\cap S=\emptyset$ y $Q_2\subseteq P_2$. Para $j=3,4,...,r$ también es $V_j=P_j\cap Q_j=Q_j$ porque $Q_j\subseteq P_j$. Por tanto, $(X,V)=(T,Q)$. □

**Proposición 4.24** *Todo r–juego superaditivo no negativo es también monótono.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $v$ un $r$–juego superaditivo no negativo y sean $(S,P)\subseteq(T,Q)\in\mathcal{P}_r(N)$. Considérese la partición $(T\setminus S,Q_2\cup S,Q_3,...,Q_r)=(T\setminus S,Q')$. Entonces se tiene:

$$v(S,P)\leq v(S,P)+v(T\setminus S,Q')\leq v((S,P)\cup(T\setminus S,Q'))=v(T,Q).$$

La primera desigualdad se cumple por ser $v$ no negativo y la segunda por ser superaditivo. La igualdad es consecuencia del lema anterior. □

El recíproco no es cierto, como prueba el ejemplo siguiente.

**Ejemplo 4.25** Sea el 3-juego definido para $N=\{1,2,3\}$ por

$$\begin{array}{llll}
v(1,2,3)=1, & v(1,3,2)=1, & v(1,23,\emptyset)=1, & v(1,\emptyset,23)=1,\\
v(2,1,3)=1, & v(2,3,1)=1, & v(2,13,\emptyset)=1, & v(2,\emptyset,13)=1,\\
v(3,1,2)=1, & v(3,2,1)=1, & v(3,12,\emptyset)=1, & v(3,\emptyset,12)=1,\\
v(12,3,\emptyset)=2, & v(12,\emptyset,3)=2, & v(13,2,\emptyset)=2, & v(13,\emptyset,2)=2,\\
v(23,1,\emptyset)=2, & v(23,\emptyset,1)=2, & v(123,\emptyset,\emptyset)=2. &
\end{array}$$

(Aunque hay 27 particiones ordenadas de $N = \{1,2,3\}$ en 3 subconjuntos sólo se especifica la imagen por $v$ para 19 de ellas, ya que las 8 restantes son las que tienen $\emptyset$ en su primera componente y, por tanto, la función característica les asigna 0.)

Este juego es monótono y no negativo pero no superaditivo ya que, por ejemplo,

$$v(1,23,\emptyset) + v(23,1,\emptyset) > v(123,\emptyset,\emptyset).$$

**Definición 4.26** Para cada partición $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$ con $S \neq \emptyset$, el *$r$–juego de unanimidad de* $(S,P)$ es el $r$–juego definido por

$$u_{(S,P)}(T,Q) = \begin{cases} 1 & \text{si } (S,P) \subseteq (T,Q), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Los $r$–juegos de unanimidad son monótonos y superaditivos. La monotonía es clara. Para probar la superaditividad sean $(T,Q)$ y $(X,U)$ tales que $T \cap X = \emptyset$. Se cumple que

$$u_{(S,P)}(T,Q) + u_{(S,P)}(X,U) \leq 1,$$

ya que si $(S,P) \subseteq (T,Q)$, entonces $(S,P) \not\subseteq (X,U)$, y si $(S,P) \subseteq (X,U)$, entonces $(S,P) \not\subseteq (T,Q)$. Además, si

$$u_{(S,P)}(T,Q) + u_{(S,P)}(X,U) = 1,$$

tiene que ser también $u_{(S,P)}((T,Q) \cup (X,U)) = 1$, por ser $(T,Q) \cup (X,U)$ una partición que contiene a $(T,Q)$ y a $(X,U)$ y cumplir la inclusión de particiones la propiedad transitiva.

**Proposición 4.27** *Los $r$–juegos de unanimidad forman una base de $G_n^r$.*

DEMOSTRACIÓN: Es suficiente probar que todo $r$–juego $v \in G_n^r$ puede expresarse como una combinación lineal de $r$–juegos de unanimidad, puesto que hay exactamente $r^n - (r-1)^n$ $r$–juegos de unanimidad diferentes. De hecho, se demuestra que

$$v = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)} u_{(S,P)}, \quad \text{siendo} \quad a_{(S,P)} = \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)} (-1)^{s-t} v(T,Q).$$

Sea $(X,U) \in \mathcal{P}_r(N)$; entonces

$$\sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)} u_{(S,P)}(X,U) = \sum_{(S,P)\subseteq(X,U)} a_{(S,P)} =$$

$$= \sum_{(S,P)\subseteq(X,U)} \left( \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)} (-1)^{s-t} v(T,Q) \right) =$$

$$= \sum_{(T,Q)\subseteq(X,U)} \left( \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)\subseteq(X,U)} (-1)^{s-t} \right) v(T,Q) =$$

$$= v(X,U) + \sum_{(T,Q)\subset(X,U)} \left( \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)\subseteq(X,U)} (-1)^{s-t} \right) v(T,Q) = v(X,U),$$

ya que para todo $(T,Q) \subset (X,U)$ se cumple que

$$\sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)\subseteq(X,U)} (-1)^{s-t} = \sum_{s=t}^{x} \binom{x-t}{s-t} (-1)^{s-t} =$$

$$= \sum_{s=t}^{x} \binom{x-t}{s-t} (-1)^{s-t} 1^{x-s} = (1-1)^{x-t} = 0. \quad \square$$

**Ejemplo 4.28** El 3–juego de unanimidad $u_{(1,2,3)}$ para 3 jugadores actúa de la forma siguiente: $u_{(1,2,3)}(S,P) = 0$ si $1 \notin S$ y

$$\begin{array}{ll} u_{(1,2,3)}(1,2,3) = 1, & u_{(1,2,3)}(12,\emptyset,3) = 1, \\ u_{(1,2,3)}(12,3,\emptyset) = 0, & u_{(1,2,3)}(13,2,\emptyset) = 1, \\ u_{(1,2,3)}(13,\emptyset,2) = 0, & u_{(1,2,3)}(123,\emptyset,\emptyset) = 1. \end{array}$$

Obsérvese que si

$$v = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)} u_{(S,P)},$$

entonces

$$\sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)} = v(N,\emptyset),$$

como se comprueba inmediatamente aplicando $v$, escrito como combinación lineal de los $r$-juegos de unanimidad, a la partición $(N,\emptyset)$.

## 4.4 La extensión multilineal para los $r$–juegos

En esta sección se definen dos funciones multilineales para cada $r$–juego $v \in G_n^r$ que, en el sentido que se verá, coinciden con $v$ en el dominio de éste. Para ello se seguirá un procedimiento análogo al de la extensión multilineal de Owen [1972] para los juegos cooperativos clásicos.

Es conveniente en esta primera parte, por cuestiones de notación, escribir los pares $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$ como $(P_1,P)$. Cada elemento del conjunto $\mathcal{P}_r(N)$ puede identificarse con una matriz de $n$ filas y $r$ columnas

$$X = \begin{pmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \cdots & x_1^r \\ x_2^1 & x_2^2 & \cdots & x_2^r \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^r \end{pmatrix} \in M_n^r(\mathbb{R})$$

formada por exactamente $n$ unos y $n(r-1)$ ceros. Por ejemplo, si $N=\{1,2,3\}$ y $r=3$, los elementos $(\{12\},\{\emptyset\},\{3\})$ y $(\{3\},\{1\},\{2\})$ de $\mathcal{P}_3(N)$ se identifican con

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

respectivamente.

Por supuesto, también se podrían interpretar los elementos de $\mathcal{P}_r(N)$ como puntos de $\mathbb{R}^{nr}$ $(X = (x_1^1, x_1^2, ..., x_1^r; \ldots; x_n^1, x_n^2, ..., x_n^r))$. Si $I^{nr}$ es la clausura convexa de estos puntos, entonces un $r$–juego $v$ es una función real definida en los vértices de $I^{nr}$. Existen diversas maneras de extender $v$ a $I^{nr}$. Se hará de forma que la función resultante sea lineal respecto de cada componente.

**Definición 4.29** Sea $v \in G_n^r$. La *superextensión multilineal* (SEML) de $v$ es la función

$$F(X) = \sum_{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)} \left[\prod_{j=1}^{r}\prod_{k\in P_j} x_k^j\right] v(P_1,P),$$

para $0 \leq x_i^j \leq 1$, $i = 1,2,...,n$ y $j = 1,2,...,r$.

**Ejemplos 4.30**

(a) Sea $v$ el 3–juego de 2 jugadores definido por

$$v(P_1,P) = |P_1|.$$

Su SEML es la función

$$F(X) = x_1^1x_2^2 + x_1^1x_2^3 + 2x_1^1x_2^1 + x_1^2x_2^1 + x_1^3x_2^1.$$

(b) La SEML del $r$–juego de unanimidad $u_{(T,Q)}$ es

$$F(X) = \sum_{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)} \left[\prod_{j=1}^{r}\prod_{k\in P_j} x_k^j\right] u_{(T,Q)}(P_1,P) = \sum_{(P_1,P)\supseteq(T,Q)} \prod_{j=1}^{r}\prod_{k\in P_j} x_k^j.$$

No es difícil comprobar que $F$ es la única función multilineal definida en $\mathbb{R}^{nr}$ que coincide con $v$ en el dominio de $v$.

Igual que en el caso de la EML de Owen, se puede dar una interpretación probabilística a la SEML de un $r$–juego $v$. Sea $(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}) = (\mathcal{X}_1,\mathcal{X}_2,...,\mathcal{X}_r)$ un elemento de $\mathcal{P}_r(N)$ que se forma aleatoriamente. Supóngase que el suceso $\{i \in \mathcal{X}_j\}$ tiene probabilidad $x_i^j$ para $i = 1,2,...,n$ y $j = 1,2,...,r$, con $\sum_{j=1}^{r} x_i^j = 1$ $(i = 1,2,...,n)$. Suponiendo además que estos sucesos son independientes, para un elemento fijo $(P_1,P) \in \mathcal{P}_r(N)$, se tiene

$$\text{Prob}\{(\mathcal{X}_1,\mathcal{X}) = (P_1,P)\} = \prod_{j=1}^{r}\prod_{k\in P_j} x_k^j$$

y, por consiguiente,

$$E[v(\mathcal{X}_1, \mathcal{X})] = F(X).$$

Esto significa que la SEML $F(X)$ es la esperanza matemática de $v(\mathcal{X}_1, \mathcal{X})$.

Para $r = 2$, si las particiones se escriben de la forma $(S, N \setminus S)$, entonces la SEML de un 2–juego $v$ es

$$F(X) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x_i^1 \prod_{j \in N \setminus S} x_j^2 v(S, N \setminus S).$$

Teniendo en cuenta la interpretación que se acaba de dar, se puede sustituir cada $x_j^2$ por $1 - x_j^1$ con lo cual se obtiene

$$F(x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1) = \sum_{S \subseteq N} \prod_{i \in S} x_i^1 \prod_{i \notin S} (1 - x_i^1) v(S, N \setminus S),$$

que es la EML de Owen para los juegos cooperativos.

Aunque la función anterior admite una interpretación probabilística interesante, es demasiado compleja como para recomendar su uso en el estudio de los $r$–juegos. La complejidad proviene, sobre todo, del elevado número de variables que intervienen en ella $(nr)$. Por eso, sería deseable disponer de una función *equivalente* cuyo manejo resulte más sencillo.

**Definición 4.31** Sea $v \in G_n^r$. La *extension multilineal* (EML) de $v$ es la función

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)} \prod_{j \in S} x_j \prod_{k \notin S} \frac{1 - x_k}{r - 1} v(S, P),$$

para $0 \leq x_i \leq 1$.

Es fácil comprobar que la EML de un juego $w \in G_n$, cuando se considera incluído en $G_n^r$, coincide con la EML de Owen de $w$.

## Ejemplos 4.32

(a) Sea $v$ el 3–juego del apartado (a) del ejemplo anterior. Su EML es

$$f(x_1, x_2) = 2x_1x_2 + x_1(1 - x_2) + (1 - x_1)x_2 = x_1 + x_2.$$

(b) La EML del $r$–juego de unanimidad $u_{(T,Q)}$ es

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} \left[ \prod_{j\in S} x_j \prod_{k\notin S} \frac{1 - x_k}{r-1} \right] u_{(T,Q)}(S,P) =$$

$$= \sum_{(S,P)\supseteq(T,Q)} \prod_{j\in S} x_j \prod_{k\notin S} \frac{1 - x_k}{r-1}.$$

La diferencia entre la SEML de un $r$–juego $v \in G_n^r$ y su EML estriba en que los coeficientes $\prod_{j=1}^r \prod_{k\in P_j} x_k^j$ de la primera permiten distinguir entre particiones que tengan la primera componente idéntica. Los coeficientes de la EML no hacen esta distinción.

En el capítulo siguiente se definen, entre otros, el valor de Shapley y el índice de Banzhaf para los $r$–juegos. Las dos extensiones multilineales anteriores proporcionarán métodos alternativos para el cálculo de estos valores.

Tanto la SEML como la EML para $G_n^r$ definen sendas funciones para $\mathcal{G}_n^r$, componente a componente en el segundo caso y de forma vectorial en el primero. Es decir, si $V = (v_1, v_2, ..., v_r)$ es un juego de Bolger, se tiene:

- La SEML de $V$ es la función

$$F(X) = \sum_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_r(N)} \left[ \prod_{j=1}^{r} \prod_{k\in P_j} x_k^j \right] V(\mathbf{P}),$$

  para $0 \leq x_i^j \leq 1$, $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ..., r$.

- La EML de $V$ es la función $F = (f_1, f_2, ..., f_r)$ tal que

$$f_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\mathbf{P}\in\mathcal{P}_r(N)} \prod_{i\in P_j} x_j \prod_{k\notin P_j} \frac{1 - x_k}{r-1} v_j(\mathbf{P}),$$

  para $0 \leq x_i \leq 1$.

## 4.5 Los $r$–juegos simples

**Definición 4.33** Un $r$–juego $v \in G_n^r$ es *simple* si es monótono y $v(S,P) = 0$ o 1 para toda $(S,P) \in \mathcal{P}_r(N)$.

No se exige $v(N, \emptyset) = 1$. En caso de que sea 0, entonces, por monotonía, $v$ será el $r$–juego nulo, que se admitirá como $r$–juego simple. Nótese que, a diferencia de los juegos simples introducidos por Bolger (Definición 4.7), se impone a los $r$–juegos simples que sean monótonos, como es habitual en la literatura sobre los juegos simples clásicos.

Los $r$–juegos de unanimidad son ejemplos de $r$–juegos simples.

$S_n$ y $S_n^r$ denotarán los conjuntos de juegos simples y de $r$–juegos simples, respectivamente. Es obvio que $S_n^r$ no es un espacio vectorial puesto que la suma de $r$–juegos simples y el producto por escalares no son, en general, juegos simples. Sin embargo, presenta otra estructura interesante.

**Proposición 4.34** *El conjunto $S_n^r$ es un retículo distributivo con las operaciones definidas por*

$$\begin{aligned} (u \vee v)(S,P) &= \max\{u(S,P), v(S,P)\} \\ (u \wedge v)(S,P) &= \min\{u(S,P), v(S,P)\} \end{aligned}$$

DEMOSTRACIÓN: Las operaciones anteriores satisfacen claramente las propiedades de idempotencia, conmutatividad y asociatividad. También cumplen la de absorción:

$$(1) \quad (u \vee (u \wedge v))(S,P) = \max\{u(S,P), (u \wedge v)(S,P)\} =$$

$$= \max\{u(S,P), \min\{u(S,P), v(S,P)\}\} = u(S,P).$$

$$(2) \quad (u \wedge (u \vee v))(S,P) = \min\{u(S,P), (u \vee v)(S,P)\} =$$

$$= \min\{u(S,P), \max\{u(S,P), v(S,P)\}\} = u(S,P).$$

Por último, se comprueba la distributividad:

$$(u \vee (v \wedge w))(S,P) = \max\{u(S,P), (v \wedge w)(S,P)\} =$$

$$= \max\{u(S,P), \min\{v(S,P), w(S,P)\}\} =$$

$$= \min\{\max\{u(S,P), v(S,P)\}, \max\{u(S,P), w(S,P)\}\} =$$
$$= ((u \vee v) \wedge (u \vee w))(S,P).$$

Análogamente se demuestra que

$$(u \wedge (v \vee w))(S,P) = ((u \wedge v) \vee (u \wedge w))(S,P). \quad \square$$

Aplicando la inyección canónica establecida en la Observación 4.15, dado un juego simple $w \in S_n$ se define, para todo $r \geq 2$, el $r$–juego simple independiente de la partición

$$v(S,P) = w(S) \quad \text{para toda partición } P \text{ de } N \setminus S.$$

En este sentido $S_n$ es un subconjunto de $S_n^r$ para todo $r \geq 2$.

Además, cada $rB$–juego simple monótono es una colección de $r$ $r$–juegos simples de los que se acaban de definir. Es decir, si $\mathcal{S}_n^r$ es el conjunto de $rB$–juegos simples monótonos de $n$ jugadores, entonces

$$\mathcal{S}_n^r = S_n^r \times S_n^r \times \overset{r}{\ldots} \times S_n^r.$$

Los $r$–juegos simples son eficaces para describir situaciones de votación donde hay diversas alternativas (una de las cuales puede ser, por ejemplo, la abstención).

**Definición 4.35** Un *$r$–juego de mayoría simple* es una terna $(N, \omega, v)$ donde $N = \{1, 2, ..., n\}$ es el conjunto de jugadores, $\omega = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n)$ es una distribución de pesos no negativos entre los jugadores y $v$ es un $r$–juego definido sobre $N$ de la manera siguiente: si $(S, P)$ es una partición de $N$ en $r$ subconjuntos y $\omega(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$, entonces

$$v(S,P) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(S) > \max\{\omega(P_j),\ j = 2, ..., r-1\}, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Puede interpretarse que $S$ es el subconjunto de jugadores que votan a favor de una determinada propuesta, $P_j$ para $j = 2, ..., r-1$ los de los que votan a favor de las otras y $P_r$ el de los que se abstienen o cuyo voto es nulo.

En diferentes ámbitos, tanto políticos como económicos o de otra índole, se encuentran ejemplos de organismos que toman decisiones mediante votaciones en las que se gana con mayoría simple. Sin ir más lejos, la Comisión Permanente de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Terrassa, que está formada por 30 miembros, actúa de esta forma, ya que, según dice el Reglamento, "los acuerdos se tomarán normalmente por mayoría simple de los votantes, entendiéndose por mayoría simple cuando los votos favorables a una opción superan los favorables a la otra o a cada una de las otras".

**Ejemplo 4.36** En el Ayuntamiento de Terrassa después de las elecciones municipales de 1995 (Ejemplo 4.2), cinco partidos políticos obtuvieron representación en el consistorio, con 13, 6, 4, 3 y 1 concejales. Se presentaron dos candidatos a alcalde: $a$ y $b$. Esta situación admite diversos estudios.

(a) Como juego de mayoría ponderada clásico: $[14; 13, 6, 4, 3, 1]$. Este modelo no es aplicable cuando se trata de escoger entre dos candidatos y se permite la abstención. Sí que puede aplicarse en situaciones en las que todos los partidos deben pronunciarse a favor o en contra de una determinada opción y se gana por mayoría absoluta, como pasa por ejemplo, si se presenta una moción de censura. En este caso la abstención, de producirse, cuenta a favor del candidato contra el que se presenta la moción.

(b) Como un 3–juego con alternativas $a$, $b$ y abstención.

(1) Si para ganar es necesaria la mayoría absoluta se define el 3–juego

$$u_1(S, P_2, P_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(S) \geq 14, \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

donde $S$ es el conjunto de los miembros del consistorio que votan al candidato $a$, $P_2$ el de los que votan a $b$, $P_3$ el de los que se abstienen y $\omega(S) = \sum_{i \in S} \omega_i$. El juego $u_1$ determina las particiones que hacen que el candidato $a$ gane por mayoría absoluta. Análogamente se define $u_2$ para el candidato $b$.

(2) Si se gana con mayoría simple, para el candidato $a$ se considera el 3–juego

$$v_1(S, P_2, P_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(S) > \omega(P_2), \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

De forma similar se define $v_2$ para el candidato $b$.

(3) Si se gana con mayoría simple y en caso de empate gana el candidato $a$ (por alguna razón predeterminada como, por ejemplo, ser el de mayor edad) entonces se considera

$$w_1(S, P_2, P_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(S) > 0 \quad \text{y} \quad \omega(S) \geq \omega(P_2), \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

para el candidato $a$ y

$$w_2(P_1, S, P_3) = \begin{cases} 1 & \text{si } \omega(S) > \omega(P_1), \\ 0 & \text{en caso contrario,} \end{cases}$$

para el candidato $b$.

**Definición 4.37**

- Una partición $(S, P) \in \mathcal{P}_r(N)$ es *ganadora* en un $r$–juego simple $v \in S_n^r$ si $v(S, P) = 1$. Es *perdedora* si $v(S, P) = 0$.
- Una partición $(S, P) \in \mathcal{P}_r(N)$ es *ganadora minimal* en un $r$–juego simple $v$ si $v(S, P) = 1$ y $v(T, Q) = 0$ para toda partición $(T, Q) \subset (S, P)$.

Dado un $r$–juego simple, $W_r$ y $W_r^m$ serán sus conjuntos de particiones ganadoras y particiones ganadoras minimales, respectivamente.

Es evidente que $v$ y $W_r$ se determinan mutuamente. Si $v$ es conocido entonces

$$W_r = \{(S, P) \in \mathcal{P}_r(N) \ : \ v(S, P) = 1\},$$

y, dado $W_r$, $v$ es el $r$–juego simple definido por

$$v(S,P) = \begin{cases} 1 \text{ si } (S,P) \in W_r; \\ 0 \text{ si } (S,P) \notin W_r. \end{cases}$$

Además, si se conoce $W_r^m$, por monotonía se determina $W_r$. Por tanto, un $r$–juego simple está unívocamente determinado por su conjunto de particiones ganadoras minimales.

**Lema 4.38** *Sean $u_{(S,P)}$ y $u_{(T,Q)}$ dos $r$–juegos de unanimidad. Entonces el $r$–juego simple $u_{(S,P)} \vee u_{(T,Q)}$ es aquél cuyas particiones ganadoras minimales son $(S,P)$ y $(T,Q)$ si ninguna de las dos está incluída en la otra o la menor de las dos en el caso de que una esté dentro de otra.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $(S,P) \subseteq (T,Q)$. Toda partición $(R,U)$ tal que $(R,U) \subseteq (S,P)$ obtiene 0 en el juego unión. Por tanto, $W_r^m = \{(S,P)\}$ para dicho juego.

Si $(S,P) \not\subseteq (T,Q)$ y $(T,Q) \not\subseteq (S,P)$ entonces $u_{(S,P)} \vee u_{(T,Q)}(R,U) = 1$ si, y sólo si, $(S,P) \subseteq (R,U)$ o $(T,Q) \subseteq (R,U)$. Puesto que no hay ninguna relación de inclusión entre $(S,P)$ y $(T,Q)$, será $W_r^m = \{(S,P),(T,Q)\}$. □

**Proposición 4.39** *Sea $v \in S_n^r$ con $W_r^m = \{(S_1,P^1),(S_2,P^2),...,(S_q,P^q)\}$. Entonces*

$$v = u_{(S_1,P^1)} \vee u_{(S_2,P^2)} \vee \cdots \vee u_{(S_q,P^q)}.$$

*Además, esta descomposición es aquélla en la que interviene el menor número posible de juegos de unanimidad.*

DEMOSTRACIÓN: Es evidente que $v$ coincide con $u_{(S_1,P^1)} \vee u_{(S_2,P^2)} \vee \cdots \vee u_{(S_q,P^q)}$. Si fuese

$$v = u_{(T_1,Q^1)} \vee u_{(T_2,Q^2)} \vee \cdots \vee u_{(T_p,Q^p)}$$

con $p < q$, entonces existiría $(S_k,P^k) \neq (T_j,Q^j)$ para $j = 1,2,...,p$. Como $v(S_k,P^k) = 1$, aplicando el lema anterior se tendría $(S_k,P^k) \subseteq (T_j,Q^j)$ para algún $j = 1,2,...,p$ y, por tanto, $(S_k,P^k)$ no sería minimal. □

**Proposición 4.40** *La intersección de juegos de unanimidad es un juego de unanimidad. Concretamente,*

$$u_{(S,P)} \wedge u_{(T,Q)} = u_{(S,P)\cup(T,Q)}.$$

DEMOSTRACIÓN: Supóngase que $u_{(S,P)} \wedge u_{(T,Q)}(A,B) = 1$. Eso quiere decir que $S \subseteq A$, $T \subseteq A$, $B_j \subseteq P_j$ y $B_j \subseteq Q_j$ para $j = 2,3,...,r$. Por tanto, $B_j \subseteq P_j \cap Q_j = U_j$ para $j = 2,3,...,r$. De aquí, $N \setminus (P_j \cap Q_j) \subseteq N \setminus B_j$ para $j = 2,3,...,r$ y, en consecuencia, $N \setminus \{\bigcup_{j=2}^{r}(P_j \cap Q_j)\} \subseteq N \setminus \{\bigcup_{j=2}^{r} B_j\} = A$.

Si $u_{(S,P)\cup(T,Q)}(A,B) = 1$ entonces $B_j \subseteq P_j \cap Q_j$ para $j = 2,3,...,r$. Esto implica que $B_j \subseteq P_j$ y $B_j \subseteq Q_j$ para todo $j = 2,3,...,r$. Por tanto, $\bigcup_{j=2}^{r} B_j \subseteq \bigcup_{j=2}^{r} P_j$ y $\bigcup_{j=2}^{r} B_j \subseteq \bigcup_{j=2}^{r} Q_j$. Es decir, $N \setminus A \subseteq N \setminus S$ y $N \setminus A \subseteq N \setminus T$ y, por consiguiente, $A \subseteq S$ y $A \subseteq T$. □

Para acabar esta sección se exponen tres resultados de carácter técnico que se usarán en el capítulo siguiente.

**Lema 4.41** *Si $(S,P) \cup (T,Q) = (X,U)$, entonces $|X| \geq \max\{|S|,|T|\}$.*

DEMOSTRACIÓN: Se tiene $|S| + \sum_{j=2}^{r} |P_j| = n$ y $|T| + \sum_{j=2}^{r} |Q_j| = n$. Además, $|P_j \cap Q_j| \leq \min\{|P_j|,|Q_j|\}$ para todo $j = 2,...,r$. Como $P_j \cap P_k = \emptyset$ para $j \neq k$, se cumple

$$|X| = |N \setminus \{\bigcup_{j=2}^{r} U_j\}| = n - \sum_{j=2}^{r} |P_j \cap Q_j| \geq n - \sum_{j=2}^{r} |P_j| = |S|.$$

Análogamente para $|T|$. □

Es posible que el cardinal de $X$ coincida con el de $S$ o con el de $T$, como ocurre en el ejemplo siguiente: $N = \{1,2,3,4,5\}$ y $(12,3,45),(123,\emptyset,45) \in \mathcal{P}_3(N)$.

$$(12,3,45) \cup (123,\emptyset,45) = (123,\emptyset,45).$$

**Lema 4.42** *Sean $(S,P),(S,P') \in \mathcal{P}_r(N)$ con $P \neq P'$. Si $(S,P) \cup (S,P') = (X,U)$, entonces $|X| > |S|$.*

DEMOSTRACIÓN: $X = N \setminus \{\bigcup_{j=2}^{r}(P_j \cap P'_j)\}$. Además, en este caso $\sum_{j=2}^{r} |P_j| = \sum_{j=2}^{r} |P'_j|$. Como $P \neq P'$, existe $k$ tal que $P_k \neq P'_k$. Para este $k$ será

$$|P_k \cap P'_k| < |P_k| \text{ o } |P_k \cap P'_k| < |P'_k|.$$

Si se cumple, por ejemplo, la primera de las desigualdades, entonces

$$|X| = n - \sum_{j=2}^{r} |P_j \cap P'_j| = n - \sum_{j \neq k} |P_j \cap P'_j| - |P_k \cap P'_k| \geq$$

$$\geq n - \sum_{j \neq k} |P_j| - |P_k \cap P'_k| > n - \sum_{j \neq k} |P_j| - |P_k| = n - \sum_{j=2}^{r} |P_j| = |S|.$$

Análogamente si se cumple la segunda. □

Por tanto, la intersección de dos $r$–juegos de unanimidad de la forma $u_{(S,P)} \wedge u_{(S,P')}$ es otro $r$–juego de unanimidad que corresponde a una partición cuya primera componente tiene cardinal estrictamente mayor que $|S|$.

Por último, es claro que para cualesquiera $u, v \in S_n^r$ se cumple

$$u + v = (u \vee v) + (u \wedge v),$$

resultado que se usará en el capítulo siguiente.

## 4.6 Los $r$–juegos restringidos

La función característica de un $r$–juego asigna un número real a cada una de las particiones del conjunto de jugadores $N$ en $r$ subconjuntos. Sin embargo, hay situaciones en las cuales no todas las particiones son admisibles ya que una o más alternativas están directamente relacionadas con determinados subconjuntos de $N$. Por ejemplo, cuando se presenta a votación una propuesta, ésta normalmente será respaldada por el grupo que la presenta (excepto en casos patológicos). También se produce una situación similar cuando diversos candidatos, que representan a diferentes partidos políticos, optan a un cargo que se elige mediante votación. Parece lógico suponer, al menos teóricamente, que cada partido que haya presentado un candidato votará por él. En esta sección se formalizan esta ideas.

Se considera primero el caso más sencillo posible y se ilustra con un ejemplo concreto.

**Ejemplo 4.43 (El Consejo de Seguridad de la ONU)** Supóngase que alguno de los miembros permanentes del Consejo, el jugador 1, por ejemplo, presenta a votación una propuesta que pretende sea aprobada. En este caso, parece en general absurdo que 1 no vote a favor de la propuesta. La regla de decisión está definida por los 3–juegos $v_1$ y $v_2$ del Ejemplo 4.13 (el primero se refiere a la alternativa votar a favor de la propuesta y el segundo a votar en contra).

Para reflejar el hecho de que el jugador 1 vota a favor y, por tanto, las particiones en las que esto no sea así no tienen sentido, se usarán los 3–*juegos restringidos* siguientes:

$$v_1^R(S, P_2, P_3) = \begin{cases} v_1(S, P_2, P_3) & \text{si } 1 \in S, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

definido sobre $N$ para la primera alternativa, y

$$v_2^R(P_1', S', P_3') = v_2(P_1' \cup \{1\}, S', P_3')$$

definido sobre $N' = N \setminus \{1\}$, para la segunda alternativa.

En $v_1^R$ se asigna valor cero a toda partición que no contenga al jugador 1 en el subconjunto de los que votan a favor de la propuesta. Con el 3–juego $v_2^R$ se estudia el comportamiento de todos los jugadores, excepto el 1, respecto de la segunda alternativa (el jugador 1 no la escoge nunca).

Ahora se generaliza esta idea. Supóngase que una regla de decisión viene dada por los $r$–juegos simples $v_1, v_2, \ldots, v_q$, donde $v_j$ representa el $r$–juego que decide sobre la alternativa $j$, para $j = 1, 2, ..., q$. Si un subconjunto no vacío $K_1 \subseteq N$

respalda la alternativa 1 se define sobre $N$ el *r–juego restringido*

$$v_1^R(S,P_2,...,P_r)=\begin{cases} v_1(S,P_2,...,P_r) & \text{si } K_1\subseteq S,\\ 0 & \text{si no;}\end{cases}$$

y los $r$–juegos sobre $N'=N\setminus K_1$ para $j=2,3,...,q$

$$v_j^R(P_1',...,\underset{j}{S'},...,P_r')=v_j(P_1'\cup K_1,...,\underset{j}{S'},...,P_r').$$

Los $r$–juegos restringidos $v_j^R$ están bien definidos y son también simples (su monotonía deriva de la de $v_1,v_2,...,v_q$).

Nótese que si $v_1$ no es el $r$–juego nulo, entonces $v_1^R(N,\emptyset)=1$. No obstante, $v_j^R(N,\emptyset)$ podría ser 0, en cuyo caso $v_j^R$ sería el $r$–juego nulo.

**Observación 4.44** Si se definiese $v_1^R(P_1',...,P_r')=v_1(P_1'\cup K_1,...,P_r')$ sobre el conjunto $N\setminus K_1$, entonces podría darse el caso de que

$$v_1^R(\emptyset,P_2',...,P_r')=v_1(K_1,P_2',...,P_r')$$

fuese diferente de cero (por ejemplo si se trata de un $r$–juego de mayoría simple y $\omega(K_1)>\omega(P_j')$ para $j=2,...,r-1$).

En otras situaciones de votación es usual que varios subconjuntos respalden diferentes alternativas. Sean $v_1,v_2,...,v_q$ los $r$–juegos que definen una regla de decisión respecto a las alternativas factibles $1,2,...,q$, respectivamente. Sean $K_1$ y $K_2$ dos subconjuntos disjuntos ligados a las alternativas 1 y 2 respectivamente: es decir, en cada votación $K_i$ escoge la alternativa $i$ para $i=1,2$.

Para describir esta situación se utilizarán los *r–juegos restringidos* siguientes. Primero

$$v_1^R(S',P_2',...,P_r')=\begin{cases} v_1(S',P_2'\cup K_2,...,P_r') & \text{si } K_1\subseteq S',\\ 0 & \text{si no,}\end{cases}$$

definido sobre $N' = N \setminus K_2$ y que permitirá estudiar el comportamiento de los jugadores de $N \setminus K_2$ (entre ellos los de $K_1$) respecto de la primera alternativa ($K_2$ no la escoge nunca).

Después el $r$–juego definido sobre $N'' = N \setminus K_1$ dado por

$$v_2^R(P_1'', S'', ..., P_r'') = \begin{cases} v_2(P_1'' \cup K_2, S'', ..., P_r'') & \text{si } K_2 \subseteq S'', \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

Por último, los $r$–juegos definidos sobre $N \setminus (K_1 \cup K_2)$ dados por

$$v_j^R(P_1, P_2, ..., \underset{j}{S}, ..., P_r) = v_j(P_1 \cup K_1, P_2 \cup K_2, ..., \underset{j}{S}, ..., P_r), \text{ para } j = 3, ..., q.$$

Es inmediato ver que los $r$–juegos restringidos son también simples.

La idea es generalizable de manera obvia cuando hay más de dos subconjuntos ligados a diferentes alternativas y, aunque sólo se han tratado los $r$–juegos simples, las definiciones anteriores también tienen sentido para los $r$–juegos cooperativos no negativos.

En el capítulo siguiente se estudian casos concretos en los que se aplican estos conceptos.

# 5 Valores para los r–juegos

Los ejemplos del capítulo anterior pretenden mostrar que los $r$–juegos no son sólo los componentes de los juegos con $r$ alternativas en el sentido de Bolger, sino que también tienen interés por sí mismos, puesto que sirven como modelos para determinadas situaciones. Por tanto, tiene pleno sentido estudiarlos de forma individual y dotarlos, en la medida de lo posible, de las mismas propiedades de que disfrutan los juegos cooperativos clásicos. Algunas de estas propiedades ya se han visto en el capítulo anterior. Sin embargo, no se han estudiado *soluciones* para los $r$–juegos, es decir, no se ha trasladado a $G_n^r$ la teoría del valor. Este es el objetivo principal del presente capítulo.

Un *valor para los r–juegos cooperativos* de $n$ jugadores es una regla que asigna a cada $r$–juego un vector de $\mathbb{R}^n$ siguiendo ciertas normas prefijadas. Dependiendo de las normas se obtendrá una u otra solución.

En principio se ha intentado extender a $G_n^r$ los valores más usuales en $G_n$. De esta forma se definen y caracterizan axiomáticamente el valor de Shapley y el índice de Banzhaf para los $r$–juegos. Se ha demostrado que, de hecho, cualquier valor lineal en $G_n$ puede generalizarse a $G_n^r$.

## 5.1 El valor de Shapley

En esta sección se introduce un valor para los $r$–juegos $\theta : G_n^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que representa una extensión natural del valor de Shapley en el sentido de que coincide con éste al aplicarlo a cualquier $v \in G_n$ (recuérdese la Observación 4.15). Antes de exponer las propiedades que se desea que cumpla el valor, se definirá una relación de equivalencia entre $r$–juegos.

Las posibilidades numéricas de una coalición $S \subseteq N$ están determinadas unívocamente por los valores de $v(S, P)$, es decir, dependen de $(r-1)^{n-s}$ números (uno para cada partición de $N \setminus S$). Es lógico, pues, que si en dos juegos diferentes las posibilidades de cada coalición son las mismas, estos juegos estén relacionados de alguna manera. Ello sugiere la siguiente idea.

**Definición 5.1** Dos $r$–juegos $u, v \in G_n^r$ son *equivalentes* si para toda coalición $S$ existe una aplicación biyectiva $f_S : \mathcal{P}_{r-1}(N \setminus S) \longrightarrow \mathcal{P}_{r-1}(N \setminus S)$ tal que $v(S, P) = u(S, f_S(P))$ para toda $P$.

En este sentido es claro que, fijada $T \subseteq N$, los juegos de unanimidad $u_{(T,Q)}$ y $u_{(T,U)}$ son equivalentes sean cuales sean las particiones $Q$ y $U$ de $N \setminus T$. Sean, por ejemplo, $(T, Q) = (T, Q_2, ..., Q_r)$ y $(T, U) = (T, U_2, ..., U_r)$. Dada una coalición $S \subseteq N$, pueden pasar dos cosas:

- Si $T \not\subseteq S$, entonces $u_{(T,Q)}(S, P) = u_{(T,U)}(S, P) = 0$ para todo par $(S, P) \in \mathcal{P}_r(N)$ (en este caso $f_S = Id$).
- Si $T \subseteq S$, el juego $u_{(T,Q)}$ asigna 1 a uno de los $(r-1)^{n-s}$ pares de $\mathcal{P}_r(N)$ de la forma $(S, P)$ y cero a los demás. Lo mismo ocurre con el juego $u_{(T,U)}$.

Nótese también que si $u \in G_n$ y $u, v$ son equivalentes, entonces $u = v$, es decir, la equivalencia se convierte en igualdad para los juegos de $G_n$.

El sistema de axiomas que permite caracterizar el valor de Shapley para los $r$–juegos es el siguiente:

**A1** Si $i \in N$ es un títere en $v \in G_n$, entonces $\theta_i[v] = v(\{i\})$.

**A2** Si los jugadores $i, j \in N$ son indiferentes en $v \in G_n$, entonces $\theta_i[v] = \theta_j[v]$.

**A3** Para todo $v \in G_n$, $\sum_{i\in N} \theta_i[v] = v(N)$.

**A4** $\theta[u + v] = \theta[u] + \theta[v] \quad \forall u, v \in G_n^r$.

**A5** Si $u$ y $v$ son dos $r$–juegos equivalentes, entonces $\theta[u] = \theta[v]$.

Los tres primeros axiomas hacen referencia sólo a $G_n$ que, como se ha visto, está inyectado de forma natural en $G_n^r$ para todo $r \geq 2$. Además, si existe un valor en $G_n^r$ que satisface las propiedades anteriores, entonces su restricción a $G_n$ satisface los axiomas de eficiencia (A3), títeres (A1), indiferencia (A2) y linealidad restringida a $G_n$ (A4), y debe ser, en consecuencia, el valor de Shapley: $\theta[w] = \Phi[w]$ para todo $w \in G_n$.

A continuación se verá cómo se comporta dicho valor (si existe) para los $r$–juegos de unanimidad.

**Proposición 5.2** *Sea $u_{(S,P)}$ un r–juego de unanimidad. Entonces*

$$\theta_i[u_{(S,P)}] = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \int_0^1 x^{s-1}[1 + (r-2)x]^{n-s} dx & si\ i \in S, \\ \frac{r-2}{(r-1)^{n-s}} \int_0^1 x^s[1 + (r-2)x]^{n-s-1} dx & si\ i \notin S. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Fijada $S \subseteq N$, se hace variar la partición del complementario $P'$; de esta manera se obtienen $(r-1)^{n-s}$ particiones diferentes. Sea $\mathcal{S} = \{(S, P') \in \mathcal{P}_r(N)\}$. Considérese el $r$–juego

$$u = \sum_{(S,P')\in\mathcal{S}} u_{(S,P')},$$

suma de los $(r-1)^{n-s}$ juegos de unanimidad equivalentes que hay fijada la coalición $S \subseteq N$.

Dado un par $(T, Q)$ con $S \subseteq T$, hay $(r-1)^{t-s}$ $r$–juegos de unanimidad de la forma $u_{(S,P')}$ que asignan 1 a dicho par. Por tanto

$$u(T,Q) = \begin{cases} (r-1)^{t-s} & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Es posible identificar el juego $u$ con el juego $\tilde{u} \in G_n$ definido por

$$\tilde{u}(T) = \begin{cases} (r-1)^{t-s} & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Aplicando los axiomas de aditividad (A4) y equivalencia (A5) se obtiene que

$$\theta[u] = \sum_{(S,P')\in\mathcal{S}} \theta[u_{(S,P')}] = (r-1)^{n-s}\theta[u_{(S,P')}],$$

siendo $(S, P')$ un elemento cualquiera de $\mathcal{S}$, en particular la partición del $r$–juego de unanimidad $u_{(S,P)}$.

Además, $\theta[u] = \Phi[\tilde{u}]$. Así pues,

$$\theta[u_{(S,P)}] = \frac{1}{(r-1)^{n-s}}\Phi[\tilde{u}].$$

Para calcular el valor de Shapley del juego $\tilde{u}$ se distinguirán dos casos:

(a) Si $i \in S$ será

$$\begin{aligned}
\Phi_i[\tilde{u}] &= \sum_{\substack{T\subseteq N \\ i\in T}} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}[\tilde{u}(T) - \tilde{u}(T\setminus\{i\})] = \\
&= \sum_{T\supseteq S} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}(r-1)^{t-s} = \\
&= \sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}(r-1)^{t-s} = \\
&= \sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s} \left[\int_0^1 x^{t-1}(1-x)^{n-t}\,dx\right](r-1)^{t-s} = \\
&= \int_0^1 \sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s} x^{t-1}(1-x)^{n-t}(r-1)^{t-s}\,dx = \\
&= \int_0^1 \sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s} [x(r-1)]^{t-s}(1-x)^{n-t}x^{s-1}\,dx = \\
&= \int_0^1 [1-x+(r-1)x]^{n-s}x^{s-1}\,dx = \int_0^1 x^{s-1}[1+(r-2)x]^{n-s}.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\theta_i[u_{(S,P)}] = \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \int_0^1 x^{s-1}[1+(r-2)x]^{n-s}dx, \quad \text{si } i \in S.$$

(b) Si $i \notin S$ se tiene

$$\begin{aligned}
\Phi_i[\tilde{u}] &= \sum_{\substack{T \supseteq S \\ i \in T \setminus S}} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!}[\tilde{u}(T) - \tilde{u}(T \setminus \{i\})] = \\
&= \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} \left[(r-1)^{t-s} - (r-1)^{t-s-1}\right] = \\
&= (r-2) \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1} \frac{(n-t)!(t-1)!}{n!} (r-1)^{t-s-1} = \\
&= (r-2) \int_0^1 \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1} x^{t-1}(1-x)^{n-t}(r-1)^{t-s-1}\, dx = \\
&= (r-2) \int_0^1 \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1} x^{s}(1-x)^{n-t}[x(r-1)]^{t-s-1}\, dx = \\
&= (r-2) \int_0^1 x^s[1+(r-2)x]^{n-s-1}\, dx.
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\theta_i[u_{(S,P)}] = \frac{r-2}{(r-1)^{n-s}} \int_0^1 x^{s}[1+(r-2)x]^{n-s-1}dx, \quad \text{si } i \notin S. \quad \square$$

**Observaciones 5.3**

(a) Si $S = N$, el par $(S,P)$ se denotará por $(N,\emptyset)$. Aplicando la fórmula anterior se obtiene:

$$\theta_i[u_{(N,\emptyset)}] = \frac{1}{n} \quad \text{para} \quad i = 1,2,...,n.$$

(b) Para $r > 2$ un jugador $i \notin S$ no obtiene 0 (al contrario de lo que ocurre en los juegos de unanimidad de $G_n$), porque $u_{(S,P)}(S,P) = 1$ y $u_{(S,P)}(S,P') = 0$ para toda $P' \neq P$ y, por tanto, cada $i \notin S$ tiene al menos $r-2$ movimientos en los que es pivote.

(c) Análogamente puede probarse que si $c \in \mathbb{R}$ y $u_{(S,P)}$ es un $r$–juego de unanimidad, entonces

$$\theta_i[c \cdot u_{(S,P)}] = c \cdot \theta_i[u_{(S,P)}]$$

para $i = 1, 2, ..., n$.

El teorema siguiente nos asegura la existencia y unicidad del valor de Shapley para los $r$–juegos.

**Teorema 5.4** *Existe un único valor $\theta$ para $G_n^r$ que satisface los cinco axiomas anteriores, y es el definido, para cada $i \in N$, por*

$$\theta_i[v] = \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!(r-1)^{n-s+1}}[v(S,P) - v(S\setminus\{i\}, P^k)],$$

*donde $P^k$ es la partición de $(N \setminus S) \cup \{i\}$ que se obtiene cuando el jugador $i \in S$ pasa desde $S$ al subconjunto $P_k$ de $P$.*

DEMOSTRACIÓN: (Unicidad) Cualquier $r$–juego $v \in G_n^r$ puede expresarse como una combinación lineal de los $r$–juegos de unanimidad:

$$v = \sum_{(T,Q)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(T,Q)} u_{(T,Q)} \quad \text{con} \quad a_{(T,Q)} = \sum_{(S,P)\subseteq(T,Q)} (-1)^{t-s} v(S,P).$$

Puesto que, si existe, el valor $\theta$ es lineal aplicando A4 y 5.3(c), se tiene que

$$\begin{aligned}
\theta_i[v] &= \sum_{(T,Q)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(T,Q)}\theta_i[u_{(T,Q)}] = \\
&= \sum_{(T,Q)\in\mathcal{P}_r(N)} \left[\sum_{(S,P)\subseteq(T,Q)} (-1)^{t-s} v(S,P)\right] \theta_i[u_{(T,Q)}] = \\
&= \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} \left[\sum_{(T,Q)\supseteq(S,P)} (-1)^{t-s} \theta_i[u_{(T,Q)}]\right] v(S,P).
\end{aligned}$$

Para calcular la suma que está entre corchetes se distinguen dos casos.

(a) Si $i \in S$ será también $i \in T$ y, por consiguiente,

$$\sum_{(T,Q)\supseteq(S,P)} (-1)^{t-s}\theta_i[u_{(T,Q)}] =$$

$$= \sum_{(T,Q)\supseteq(S,P)} (-1)^{t-s}\frac{1}{(r-1)^{n-t}}\int_0^1 x^{t-1}[1+(r-2)x]^{n-t}dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s}(-1)^{t-s}x^{t-1}\left[\frac{1+(r-2)x}{r-1}\right]^{n-t} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-x+\frac{1+(r-2)x}{r-1}\right]^{n-s} x^{s-1}dx = \int_0^1 x^{s-1}\left(\frac{1-x}{r-1}\right)^{n-s} dx =$$

$$= \frac{1}{(r-1)^{n-s}}\frac{(n-s)!(s-1)!}{n!}.$$

(b) Si $i \notin S$ puede ser que $i \in T$ o que $i \notin T$, por tanto,

$$\sum_{(T,Q)\supseteq(S,P)} (-1)^{t-s}\theta_i[u_{(T,Q)}] =$$

$$= \sum_{\substack{(T,Q)\supseteq(S,P)\\ i\in T}} (-1)^{t-s}\theta_i[u_{(T,Q)}] + \sum_{\substack{(T,Q)\geq(S,P)\\ i\notin T}} (-1)^{t-s}\theta_i[u_{(T,Q)}] =$$

$$= \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1}(-1)^{t-s}\frac{1}{(r-1)^{n-t}}\int_0^1 x^{t-1}[1+(r-2)x]^{n-t}dx +$$

$$+ \sum_{t=s}^{n-1} \binom{n-s-1}{t-s}(-1)^{t-s}\frac{r-2}{(r-1)^{n-t}}\int_0^1 x^{t}[1+(r-2)x]^{n-t-1}dx =$$

$$= \int_0^1 \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1}(-x)^{t-s-1}(-1)x^{t}\left[\frac{1+(r-2)x}{r-1}\right]^{n-t} dx +$$

$$+ \int_0^1 \sum_{t=s}^{n-1} \binom{n-s-1}{t-s}(-x)^{t-s}x^{t}\left(\frac{r-2}{r-1}\right)\left[\frac{1+(r-2)x}{r-1}\right]^{n-t-1} dx =$$

$$= \int_0^1 \left[-x+\frac{1+(r-2)x}{r-1}\right]^{n-s-1}(-1)x^{s}dx+$$

$$+ \quad \frac{r-2}{r-1}\int_0^1 \left[-x + \frac{1+(r-2)x}{r-1}\right]^{n-s-1} x^s dx =$$

$$= \quad \frac{-1}{r-1}\int_0^1 x^s \left(\frac{1-x}{r-1}\right)^{n-s-1} dx = \frac{-1}{(r-1)^{n-s}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!}.$$

Teniendo en cuenta los resultados anteriores se obtiene:

$$\begin{aligned} \theta_i[v] &= \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} \left[\sum_{(T,Q)\supseteq(S,P)} (-1)^{t-s}\theta_i[u_{(T,Q)}]\right] v(S,P) = \\ &= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S,P) - \\ &- \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \frac{(n-s-1)!s!}{n!} v(S,P). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Obsérvese que cada par $(S', P')$ con $i \notin S'$ puede obtenerse a partir de un par $(S, P)$ tal que $i \in S$ moviendo adecuadamente el jugador $i$. De hecho, hay $r-1$ pares de la forma $(S', P')$ con $i \notin S'$ que se obtienen a partir de cada $(S, P)$ con $i \in S$. Obsérvese también que $s' = s - 1$. Por tanto,

$$\sum_{\substack{(S',P')\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin S'}} \frac{-1}{(r-1)^{n-s'}} \frac{(n-s'-1)!s'!}{n!} v(S',P') =$$

$$= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{1}{(r-1)^{n-(s-1)}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S\setminus\{i\}, P^k).$$

Además,

$$\sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S,P) =$$

$$= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{1}{(r-1)^{n-s+1}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S,P).$$

Así pues,

$$\theta_i[v] = \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!(r-1)^{n-s+1}} [v(S,P) - v(S\setminus\{i\}, P^k)],$$

como se quería probar.

(Existencia) Se probará que el valor obtenido en el apartado anterior, $\theta$, satisface los axiomas. Es fácil ver que si $v$ es un $r$–juego identificado con un juego cooperativo clásico $\overline{v}$ mediante la aplicación $\alpha$ que se vio en la Observación 4.15, entonces

$$\theta_i[v] = \Phi_i[\overline{v}] \quad \forall i \in N$$

y, por consiguiente, $\theta$ satisface los axiomas A1–A3. También cumple claramente la propiedad de aditividad (A4). Respecto al axioma de equivalencia (A5), nótese que el coeficiente de $v(S,P)$ en la fórmula (5.1) depende sólo de $S$, no de $P$. Por lo tanto, si $u$ y $v$ son $r$–juegos equivalentes,

$$\sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} v(S,P) =$$

$$= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \frac{(n-s)!(s-1)!}{n!} u(S,f(P))$$

ya que $f$ es una aplicación biyectiva. Una igualdad análoga se cumple cuando $i \notin S$. Por tanto

$$\theta_i[u] = \theta_i[v] \quad \forall i \in N. \quad \square$$

**Observaciones 5.5**

(a) La fórmula (5.1) da otra forma de escribir el valor $\theta_i[v]$: separando las coaliciones que contienen al jugador $i$ de las que no lo contienen. Esta expresión se usará más adelante.

(b) Desde ahora, $\theta$ es el *valor de Shapley para los r–juegos.* Puede usarse de forma natural para definir un valor para los juegos con $r$ alternativas de Bolger poniendo:

$$\theta_i^j[V] = \theta_i[v_j] \quad \forall\, V \in \mathcal{G}_n^r, \quad V = (v_1, v_2, ..., v_r),$$

para $i = 1,2,...,n$ y $j = 1,2,...,r$. Obviamente, este valor coincide con el propuesto por Bolger [1993].

### El valor de Shapley para los r–juegos simples

Un sistema de axiomas que caracterice el valor de Shapley para los $r$–juegos simples no puede contener la propiedad de aditividad. Por lo tanto, ésta se sustituirá por otra donde aparecerán las operaciones $\vee$ y $\wedge$ (igual que en Dubey [1975]). Concretamente, se utilizarán los axiomas siguientes:

**S1** Para todo $v \in S_n$, $\sum_{i \in N} \theta_i[v] = v(N)$.

**S2** Si $i \in N$ es nulo en $v \in S_n$, entonces $\theta_i[v] = 0$.

**S3** Si los jugadores $i, j \in N$ son indiferentes en $v \in S_n$, entonces $\theta_i[v] = \theta_j[v]$.

**S4** $\theta[u \vee v] = \theta[u] + \theta[v] - \theta[u \wedge v] \quad \forall u, v \in S_n^r$.

**S5** Si $u$ y $v$ son dos $r$–juegos simples equivalentes, entonces $\theta[u] = \theta[v]$.

**Teorema 5.6** *Existe un único valor $\lambda$ que satisface los axiomas S1, S2, S3, S4 y S5 sobre $S_n^r$, y es $\lambda = \theta$, la restricción a $S_n^r$ del valor de Shapley para los $r$–juegos.*

DEMOSTRACIÓN: La existencia es clara ya que $\theta$ satisface los cinco axiomas. Los cuatro primeros son casos particulares de los $r$–juegos cooperativos. El quinto se satisface por ser $\theta$ lineal y cumplirse que

$$u + v = (u \vee v) + (u \wedge v).$$

La unicidad se probará primero para los $r$–juegos de unanimidad: $u_{(S,P)}$. La demostración se hará por retroinducción sobre el número de jugadores de $S$. Para $S = N$ nótese que el $r$–juego $u_{(N,\emptyset)}$ es equivalente al juego de unanimidad $u_N$ de $G_n$. Por lo tanto, se tiene $\lambda_i[u_{(N,\emptyset)}] = \frac{1}{n}$ (aplicando los axiomas de eficiencia S1, jugador nulo S2 e indiferencia S3). Así pues, el valor es único para $u_{(N,\emptyset)}$. Supóngase ahora que el valor es único para los $r$–juegos de unanimidad con cardinal superior a $s < n$. Se verá que, entonces, también lo es para los que tienen cardinal $s$. Para ello, fijada una coalición $S \subset N$, sea de nuevo $\mathcal{S} = \{(S, P') \in \mathcal{P}_r(N)\}$:

$$\mathcal{S} = \{(S, P^1), (S, P^2), ..., (S, P^q)\},$$

cuyo cardinal es, de hecho, $q = (r-1)^{n-s}$.

Considérese el juego

$$u = u_{(S,P^1)} \vee u_{(S,P^2)} \vee \cdots \vee u_{(S,P^q)},$$

unión de los $q$ juegos de unanimidad equivalentes que hay fijada la coalición $S \subseteq N$.

Es claro que $u$ es equivalente al juego de unanimidad $u_S$ de $G_n$. Por tanto, aplicando este resultado y S4 de forma reiterada, se tiene:

$$\lambda[u_S] = \sum_{l=1}^{q} \lambda[u_{(S,P^l)}] + \sum_{m=2}^{q} \sum_{i_1<\cdots<i_m} (-1)^{m-1} \lambda[u_{(S,P^{i_1})} \wedge \cdots \wedge u_{(S,P^{i_m})}].$$

Utilizando el axioma de equivalencia S5, la igualdad anterior se convierte en:

$$\lambda[u_S] = q\lambda[u_{(S,P)}] + \sum_{m=2}^{q} \sum_{i_1<\cdots<i_m} (-1)^{m-1} \lambda[u_{(S,P^{i_1})} \wedge \cdots \wedge u_{(S,P^{i_m})}],$$

donde $(S,P)$ es cualquiera de los elementos de $\mathcal{S}$.

La intersección de $r$–juegos de unanimidad del tipo $u_{(S,P^{i_1})} \wedge \cdots \wedge u_{(S,P^{i_m})}$ es otro $r$–juego de unanimidad $u_{(T,Q)}$ con $|T| > |S|$ (Lema 4.42). Por hipótesis de inducción, el valor es único para todos estos juegos. Por tanto, el valor de $u_{(S,P)}$ queda determinado unívocamente (basta con despejarlo de la fórmula anterior).

Para demostrar la unicidad del valor para un juego simple cualquiera, es suficiente escribirlo como unión de juegos de unanimidad:

$$v = u_{(S_1,P^1)} \vee u_{(S_2,P^2)} \vee \cdots \vee u_{(S_p,P^p)},$$

siendo $\{(S_1,P^1),(S_2,P^2),...,(S_p,P^p)\}$ el conjunto de particiones ganadoras minimales de $v$.

Aplicando de nuevo el cuarto axioma se observa que el valor para $v$ depende sólo de los valores de juegos de unanimidad y, en consecuencia, es único. □

**Observación 5.7** La fórmula del valor de Shapley restringida a los $r$–juegos simples es

$$\theta_i[v] = \sum_{\substack{S \ni i \\ (S,P) \in W_r}} \sum_{(S \setminus \{i\}, P^k) \notin W_r} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!(r-1)^{n-s+1}}.$$

Esta doble suma representa la frecuencia relativa del jugador $i$ como pivote en las posibles ordenaciones de $N$.

### El valor de Shapley y la EML

Seguidamente se darán dos métodos para calcular el valor de Shapley, $\theta$, para los $r$–juegos, uno utilizando la SEML y otro usando la EML.

Sea $v$ un $r$–juego y $F$ su SEML. Para un jugador fijo $i \in N$, $F$ puede pensarse como función solamente de las variables $(x_i^1, x_i^2, ..., x_i^r)$. Sean

$$\nabla_i F = \left( \frac{\partial F}{\partial x_i^1}, \frac{\partial F}{\partial x_i^2}, ..., \frac{\partial F}{\partial x_i^r} \right),$$

y

$$\mathbf{e} = \left(1, \frac{-1}{r-1}, ..., \frac{-1}{r-1}\right) \in \mathbb{R}^r.$$

**Teorema 5.8** *Teniendo en cuenta las notaciones anteriores, el valor del jugador $i \in N$ en el $r$–juego $v$ es:*

$$\theta_i[v] = \int_0^1 \nabla_i F(\bar{t}) \cdot \mathbf{e}\, dt,$$

*donde $\bar{t}$ es el resultado obtenido de $X$ cambiando las variables $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1$ por $t$ y las restantes por $\frac{1-t}{r-1}$, y el punto denota el producto escalar usual de $\mathbb{R}^r$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $i \in N$ un jugador cualquiera fijo.

$$F(X) = \sum_{(P_1,P) \in \mathcal{P}_r(N)} \left[ \prod_{k=1}^{r} \prod_{l \in P_k} x_l^k \right] v(P_1, P) =$$

$$= \sum_{\substack{(P_1,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in P_1}} \prod_{l \in P_1} x_l^1 \prod_{k=2}^{r} \prod_{l \in P_k} x_l^k v(P_1, P) + \sum_{\substack{(P_1,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \notin P_1}} \prod_{l \in P_1} x_l^1 \prod_{k=2}^{r} \prod_{l \in P_k} x_l^k v(P_1, P).$$

La derivada parcial de $F$ respecto de $x_i^m$ para $m = 1, 2, ..., r$ es

$$\frac{\partial F}{\partial x_i^m}(X) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_1}} \prod_{\substack{l\in P_1\\ l\neq i}} x_l^1 \prod_{k=2}^{r} \prod_{l\in P_k} x_l^k v(P_1,P) & \text{si } m=1; \\ \displaystyle\sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_m}} \prod_{l\in P_1} x_l^1 \prod_{\substack{l\in P_m\\ l\neq i}} x_l^m \prod_{k\neq 1,m} \prod_{l\in P_k} x_l^k v(P_1,P) & \text{si } m\neq 1. \end{cases}$$

Evaluando en el punto $\bar{t}$ y multiplicando escalarmente por $\mathbf{e}$ se tiene:

$$\nabla_i F(\bar{t}) \cdot \mathbf{e} = \sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_1}} t^{p_1-1} \left(\tfrac{1-t}{r-1}\right)^{n-p_1} v(P_1,P) -$$

$$-\tfrac{1}{r-1} \sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin P_1}} t^{p_1} \left(\tfrac{1-t}{r-1}\right)^{n-p_1-1} v(P_1,P).$$

Si se integra esta expresión entre 0 y 1 respecto de $t$, se obtiene:

$$\int_0^1 \nabla_i F(\bar{t}) \cdot \mathbf{e}\, dt = \sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_1}} \frac{1}{(r-1)^{n-p_1}} \int_0^1 t^{p_1-1}(1-t)^{n-p_1} v(P_1,P)\, dt$$

$$- \sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin P_1}} \frac{1}{(r-1)^{n-p_1}} \int_0^1 t^{p_1}(1-t)^{n-p_1-1} v(P_1,P)\, dt.$$

Recordando la función beta, la igualdad anterior se convierte en:

$$\int_0^1 \nabla_i F(\bar{t}) \cdot \mathbf{e}\, dt = \sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_1}} \frac{(p_1-1)!(n-p_1)!}{n!(r-1)^{n-p_1}} v(P_1,P) -$$

$$- \sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin P_1}} \frac{p_1!(n-1-p_1)!}{n!(r-1)^{n-p_1}} v(P_1,P),$$

que es precisamente $\theta_i[v]$. (Véase la expresión de $\theta_i[v]$ como diferencia de dos sumatorios en la fórmula 5.1 teniendo en cuenta el pequeño cambio de notación que se ha realizado: $p_1 = s$.) $\square$

**Observaciones 5.9**

(a) El teorema podría haber sido enunciado considerando no $\nabla_i F$ sino el gradiente de $F$. En este caso, e sería el vector de $\mathbb{R}^{nr}$ que tiene la componente $x_i^1 = 1$, las componentes $x_i^k = \frac{-1}{r-1}$ para $k = 2, 3, ..., r$ y las demás componentes $x_j^k = 0$. Aunque a primera vista parece extraño y poco intuitivo, este vector admite la interpretación siguiente: la componente $x_i^1 = 1$ indica que el jugador $i$ está en el subconjunto $P_1$, y las $x_i^k = \frac{-1}{r-1}$ indican que puede venir, con la misma probabilidad, de cualquiera de los otros $r-1$ subconjuntos de la partición $P$.

(b) La integral que calcula Owen para obtener el valor de Shapley en $G_n$ sigue el segmento que une los puntos $(0, 0, ..., 0)$ y $(1, 1, ..., 1)$ de $\mathbb{R}^n$, que representan el conjunto vacío y la coalición total, respectivamente. En este caso, la integral también se hace siguiendo un segmento. El punto final de éste es claro: el que tiene todas las componentes $x_i^1 = 1$ para $i = 1, 2, ..., n$ y las demás iguales a cero. El punto inicial, sin embargo, no es tan obvio ya que hay $(r-1)^n$ puntos posibles que tienen las componentes $x_i^1 = 0$. El punto inicial del segmento es el baricentro de estos últimos.

(c) En el capítulo anterior se vio que es posible definir la SEML para los juegos con $r$ alternativas de Bolger a partir de $F$. Por supuesto, también se puede calcular el valor de Bolger utilizando esta extensión.

Fijada una alternativa $j$, el valor de Bolger de un jugador $i$ respecto a dicha alternativa es

$$\theta_i^j[V] = \int_0^1 \nabla_i F_j(\bar{t}) \cdot \mathrm{e}_j \, dt,$$

siendo $F_j$ la $j$–ésima componente de la SEML de $V$, $\mathrm{e}_j$ el vector de $\mathbb{R}^r$ cuya componente $j$ es 1 y tiene las demás iguales a $\frac{-1}{r-1}$, y $\bar{t}$ el punto que se obtiene de $X$ cambiando las variables $x_1^j, x_2^j, ..., x_n^j$ por $t$ y las restantes por $\frac{1-t}{r-1}$.

Utilizar la SEML de un $r$–juego $v$ para calcular su valor de Shapley no es demasiado aconsejable dada la complejidad de la función. Es mucho más práctico utilizar la EML $f$ del juego $v$.

**Teorema 5.10** *El valor de Shapley para el jugador $i \in N$ en el r–juego $v$ es*

$$\theta_i[v] = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, \ldots, t)dt.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $i \in N$ un jugador fijo. Entonces

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in S}} x_i \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_j \prod_{k \notin S} \frac{1 - x_k}{r - 1} v(S, P) +$$

$$\sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \notin S}} \frac{1 - x_i}{r - 1} \prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{k \notin S \\ k \neq i}} \frac{1 - x_k}{r - 1} v(S, P).$$

La derivada parcial de $f$ respecto de $x_i$ es

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in S}} \prod_{\substack{j \in S \\ j \neq i}} x_j \prod_{k \notin S} \frac{1 - x_k}{r - 1} v(S, P) +$$

$$\tfrac{-1}{r-1} \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \notin S}} \prod_{j \in S} x_j \prod_{\substack{k \notin S \\ k \neq i}} \frac{1 - x_k}{r - 1} v(S, P).$$

Sustituyendo cada $x_i$ por $t$ se obtiene

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, \ldots, t) = \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in S}} t^{s-1} \left(\frac{1 - t}{r - 1}\right)^{n-s} v(S, P) +$$

$$\tfrac{-1}{r-1} \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \notin S}} t^s \left(\frac{1 - t}{r - 1}\right)^{n-s-1} v(S, P).$$

Integrando respecto de $t$ y recordando la función beta, se tiene

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, t, \ldots, t)dt \;&=\; \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in S}} \frac{1}{(r - 1)^{n-s}} \frac{(n - s)!(s - 1)!}{n!} v(S, P) - \\ &- \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \notin S}} \frac{1}{(r - 1)^{n-s}} \frac{(n - s - 1)!s!}{n!} v(S, P) = \theta_i[v]. \quad \square\end{aligned}$$

## 5.2 El índice de Banzhaf

En esta sección se define y caracteriza axiomáticamente una extensión natural del índice de Banzhaf a los $r$–juegos, es decir, una aplicación $\beta : G_n^r \longrightarrow \mathbb{R}^n$ cuya restricción a $G_n$ coincide con $\Psi$. También se verá cómo calcularlo utilizando la extensión multilineal del $r$–juego. Se omiten las demostraciones que son análogas a las de la sección anterior.

El conjunto de axiomas que permitirá caracterizar este valor para los $r$–juegos es el siguiente:

**C1** Si $i$ es un títere en $v \in G_n$, entonces $\beta_i[v] = v(\{i\})$.

**C2** Si $i, j$ son indiferentes en $v \in G_n$, entonces $\beta_i[v] = \beta_j[v]$.

**C3** Para cada $T = \{i, j\}$ y cada $v \in G_n$, $\beta_i[v] + \beta_j[v] = \beta_0[v_T]$.

**C4** $\beta[u + v] = \beta[u] + \beta[v]$ para todo $u, v \in G_n^r$.

**C5** Si $u, v \in G_n^r$ son equivalentes, entonces $\beta[u] = \beta[v]$.

Como en el caso del valor de Shapley, los tres primeros axiomas sólo hacen referencia a $G_n$. Si existe un valor que cumpla C1–C5, su restricción a $G_n$ satisfará las propiedades de caracterización de Lehrer (B1–B3, y B4 sólo para $u, v \in G_n$), y, en consecuencia, debe ser el índice de Banzhaf. Es decir, $\beta[w] = \Psi[w]$ para todo $w \in G_n$.

**Proposición 5.11** *Sea $u_{(S,P)}$ un r–juego de unanimidad. Si $\beta$ satisface C1–C5 entonces*

$$\beta_i[u_{(S,P)}] = \begin{cases} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \frac{r^{n-s}}{2^{n-1}} & si\ i \in S, \\ \\ \frac{r-2}{(r-1)^{n-s}} \frac{r^{n-s-1}}{2^{n-1}} & si\ i \notin S. \end{cases}$$

DEMOSTRACIÓN: Análoga a la de la Proposición 5.2. □

El juego de unanimidad $u_{(N,\emptyset)}$ otorga $\frac{1}{2^{n-1}}$ a cada jugador, igual que el juego de unanimidad clásico de la coalición $N$.

Un jugador $i \notin S$ tampoco obtiene 0 en $u_{(S,P)}$, como en el caso del valor de Shapley.

Tambiés es cierto que si $c \in \mathbb{R}$ y $u_{(S,P)}$ es un $r$–juego de unanimidad, entonces

$$\beta_i[c \cdot u_{(S,P)}] = c \cdot \beta_i[u_{(S,P)}] \text{ para } i = 1, 2, ..., n.$$

**Teorema 5.12** *Existe un único valor $\beta$ para $G_n^r$ que satisface los axiomas C1–C5, y, para cada $i \in N$, está definido por*

$$\beta_i[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{1}{(r-1)^{n-s+1}} [v(S, P) - v(S \setminus \{i\}, P^k)],$$

*siendo $P^k$ como en la sección anterior.*

DEMOSTRACIÓN: Análoga a la del Teorema 5.4. □

**Observaciones 5.13**

(a) Para cada jugador $i \in N$, el índice $\beta_i$ puede escribirse también como

$$\beta_i[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} v(S, P) - \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{(S,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \notin S}} \frac{1}{(r-1)^{n-s}} v(S, P).$$

(b) Desde ahora $\beta$ es el *índice de Banzhaf para los r–juegos.* Igual que en el caso del valor de Shapley, puede usarse de forma natural para definir un nuevo índice para los $rB$–juegos poniendo:

$$\beta_i^j[V] = \beta_i[v_j] \quad \forall\, V = (v_1, v_2, ..., v_r) \in \mathcal{G}_n^r,$$

para $i = 1, 2, ..., n$ y $j = 1, 2, ...r$.

### El índice de Banzhaf para los $r$–juegos simples

También es posible caracterizar el índice de Banzhaf en los $r$–juegos simples sustituyendo el axioma de aditividad por el de transferencia. El conjunto de propiedades que caracterizan entonces a $\beta$ es el siguiente:

**D1** Si $i$ es un títere en $v \in S_n$, entonces $\beta_i[v] = v(\{i\})$.

**D2** Si $i, j$ son indiferentes en $v \in S_n$, entonces $\beta_i[v] = \beta_j[v]$.

**D3** Para cada $T = \{i, j\}$ y cada $v \in S_n$, $\beta_i[v] + \beta_j[v] = \beta_0[v_T]$.

**D4** $\beta[u \vee v] + \beta[u \wedge v] = \beta[u] + \beta[v] \quad \forall u, v \in S_n^r$.

**D5** Si $u, v \in S_n^r$ son equivalentes, entonces $\beta[u] = \beta[v]$.

**Teorema 5.14** *Existe un único valor $\lambda$ que satisface los axiomas anteriores sobre $S_n^r$, y es $\lambda = \beta$, la restricción a $S_n^r$ del índice de Banzhaf para los r–juegos.*

DEMOSTRACIÓN: Análoga a la del Teorema 5.6. □

**Observación 5.15** La fórmula del índice de Banzhaf restringida a los $r$–juegos simples es:

$$\beta_i[v] = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{\substack{S \ni i \\ (S,P) \in W_r}} \sum_{(S \setminus \{i\}, P^k) \notin W_r} \frac{1}{(r-1)^{n-s+1}}.$$

## El índice de Banzhaf y la EML

**Teorema 5.16** *Utilizando las mismas notaciones del Teorema 5.8, el índice de Banzhaf del jugador $i \in N$ en el r–juego $v$ es:*

$$\beta_i[v] = \nabla_i F(\overline{1/2}) \cdot \mathbf{e},$$

*siendo $\overline{1/2}$ el punto obtenido de $X$ sustituyendo las variables $x_1^1, x_2^1, ..., x_n^1$ por $1/2$ y las demás por $\frac{1/2}{r-1}$.*

DEMOSTRACIÓN: Se aprovecha la primera parte de la demostración del Teorema 5.8. Una vez efectuado el producto escalar y la sustitución, se obtiene:

$$\nabla_i F(\overline{1/2}) \cdot \mathbf{e} = \sum_{\substack{(P_1,P) \in \mathcal{P}_r(N) \\ i \in P_1}} \left(\frac{1}{2}\right)^{p_1 - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-p_1} \left(\frac{1}{r-1}\right)^{n-p_1} v(P_1, P) -$$

$$-\tfrac{1}{r-1}\sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin P_1}}\left(\frac{1}{2}\right)^{p_1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-p_1-1}\left(\frac{1}{r-1}\right)^{n-p_1-1}v(P_1,P).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\nabla_i F(\overline{1/2})\cdot \mathbf{e} &= \frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in P_1}}\frac{1}{(r-1)^{n-p_1}}v(P_1,P)\\ &-\frac{1}{2^{n-1}}\sum_{\substack{(P_1,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin P_1}}\frac{1}{(r-1)^{n-p_1}}v(P_1,P). \quad \square\end{aligned}$$

Como en el caso del valor de Shapley, este método para calcular $\beta$ no es el más aconsejable. Se simplifican los cálculos usando la EML.

**Teorema 5.17** *El índice de Banzhaf del jugador $i\in N$ en el r–juego $v$ es*

$$\beta_i[v]=\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right).$$

DEMOSTRACIÓN: La primera parte de la demostración es igual que la del Teorema 5.10.

Una vez calculada la derivada parcial, sustituyendo cada $x_i$ por $\frac{1}{2}$ se tiene

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots,\frac{1}{2}\right) &= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}}\left(\frac{1}{2}\right)^{s-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-s}\left(\frac{1}{r-1}\right)^{n-s}v(S,P)+\\ &\tfrac{-1}{r-1}\sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin S}}\left(\frac{1}{2}\right)^{s}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-s-1}\left(\frac{1}{r-1}\right)^{n-s-1}v(S,P),\end{aligned}$$

que, después de simplificar, coincide con la expresión de $\beta_i[v]$ que se ha visto en la Observación 5.13 (a). $\square$

## 5.3 Semivalores para los $r$–juegos

El desarrollo de las dos secciones anteriores es similar. Por esta razón, parece natural preguntarse si otros conceptos de solución para $G_n$ admiten una extensión *directa* a $G_n^r$. La respuesta es afirmativa para todos los semivalores en $G_n$.

Un *semivalor* en $G_n$ (Dubey et al. [1981]) es un concepto de solución de la forma

$$\sigma_i[w] = \sum_{S \ni i} \delta_n(s)[w(S) - w(S \setminus \{i\})],$$

donde los coeficientes $\delta_n(s)$ son no negativos y satisfacen

$$\sum_{s=1}^{n} \delta_n(s) \binom{n-1}{s-1} = 1.$$

El valor de Shapley y el índice de Banzhaf son ejemplos de semivalores.

Sean $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$ un conjunto de axiomas que caracteriza a un semivalor $\sigma$ en $G_n$, $A_0$ la propiedad de aditividad en $G_n^r$ y $E$ el axioma de equivalencia (también en $G_n^r$).

Sea ahora $\mathcal{A}_r$ el conjunto que se obtiene a partir de $\mathcal{A}$ añadiendo $E$ y $A_0$ si para $i = 1, 2, ..., m$ ningún $A_i$ es el axioma de aditividad en $G_n$, o añadiendo $E$ y sustituyendo $A_i$ por $A_0$ en el caso de que $A_i$ sea la propiedad de aditividad en $G_n$.

**Teorema 5.18** *Existe un único semivalor $\tilde{\sigma}$ en $G_n^r$ caracterizado por $\mathcal{A}_r$, y para cada $v \in G_n^r$ y cada $i \in N$ está definido por*

$$\tilde{\sigma}_i[v] = \sum_{\substack{(S,P)\in \mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s+1}} [v(S,P) - v(S \setminus \{i\}, P^k)].$$

*Además, $\tilde{\sigma}$ restringido a $G_n$ coincide con $\sigma$.*

DEMOSTRACIÓN: (Existencia) Primero debe comprobarse que $\tilde{\sigma}$, tal y como está definido en el enunciado del teorema, coincide con $\sigma$ cuando $v \in G_n$. Para ello sean $w \in G_n$ y $v \in G_n^r$ tales que $v = \alpha(w)$ (como en la Observación 4.15). Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_i[v] &= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s+1}}[w(S) - w(S\setminus\{i\})] \\
&= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}}[w(S) - w(S\setminus\{i\})] \\
&= \sum_{S\ni i} \delta_n(s)[w(S) - w(S\setminus\{i\})] = \sigma_i[w].
\end{aligned}$$

Por tanto, $\tilde{\sigma}$ satisface los axiomas correspondientes a $G_n$. También cumple la propiedad de aditividad $(A_0)$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_i[u+v] &= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s+1}}[u(S,P) + v(S,P) \\
&- u(S\setminus\{i\},P^k) - v(S\setminus\{i\},P^k)] \\
&= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s+1}}[u(S,P) - u(S\setminus\{i\},P^k)] + \\
&+ \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \sum_{k=2}^{r} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s+1}}[v(S,P) - v(S\setminus\{i\},P^k)] = \tilde{\sigma}_i[u] + \tilde{\sigma}_i[v].
\end{aligned}$$

Por último, se comprueba el axioma de equivalencia $(E)$. Sean $u$ y $v$ dos $r$–juegos equivalentes. Utilizando un argumento análogo al que se vio en la demostración del Teorema 5.4, según el cual $\tilde{\sigma}_i$ puede escribirse como diferencia de dos términos:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma}_i[v] &= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}} v(S,P) - \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}} v(S,P) \\
&= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}} u(S,f_S(P)) - \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}} u(S,f_S(P)) \\
&= \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\in S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}} u(S,P) - \sum_{\substack{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)\\ i\notin S}} \frac{\delta_n(s)}{(r-1)^{n-s}} u(S,P) = \tilde{\sigma}_i[u].
\end{aligned}$$

La penúltima igualdad se cumple porque, para cada $S \subseteq N$, los coeficientes que acompañan a $u(S, f_S(P))$ no dependen de $P$, y $f_S$ es una aplicación biyectiva.

Así pues, $\tilde{\sigma}$ satisface todas las propiedades de $\mathcal{A}_r$.

(Unicidad) Como los $r$–juegos de unanimidad forman base de $G_n^r$, si se prueba que el semivalor es único para estos juegos también lo será para todos los $r$–juegos.

Igual que en el Teorema 5.4, se fija una coalición $S \subseteq N$ y se consideran $\mathcal{S} = \{(S, P') \in \mathcal{P}_r(N)\}$ y el $r$–juego

$$u = \sum_{(S,P') \in \mathcal{S}} u_{(S,P')}.$$

Ya se ha visto que $u$ es la imagen por la aplicación $\alpha$ del juego $\tilde{u} \in G_n$ definido por

$$\tilde{u}(T) = \begin{cases} (r-1)^{t-s} & \text{si } S \subseteq T, \\ 0 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

Además, aplicando $A_0$ y $E$, se obtiene

$$\tilde{\sigma}[u] = \sum_{(S,P') \in \mathcal{S}} \tilde{\sigma}[u_{(S,P')}] = (r-1)^{n-s} \tilde{\sigma}[u_{(S,P')}],$$

siendo $(S, P')$ un elemento cualquiera de $\mathcal{S}$.

En consecuencia,

$$\tilde{\sigma}[u_{(S,P)}] = \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \sigma[\tilde{u}].$$

Obsérvese que, utilizando un razonamiento análogo y la linealidad de $\sigma$, se obtiene que

$$\tilde{\sigma}[a \cdot u_{(S,P)}] = a \cdot \tilde{\sigma}[u_{(S,P)}] = \frac{a}{(r-1)^{n-s}} \sigma[\tilde{u}] \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

Como $\sigma$ es único en $G_n$, también lo es $\tilde{\sigma}$ para los $r$–juegos de unanimidad y, por tanto, en todo $G_n^r$. $\square$

**Observación 5.19** De hecho, para los $r$–juegos de unanimidad $u_{(S,P)}$ se tiene

$$\tilde{\sigma}_i[u_{(S,P)}] = \begin{cases} \displaystyle\sum_{t=s}^{n} \binom{n-s}{t-s} \frac{\delta_n(t)}{(r-1)^{n-t}} & \text{si } i \in S, \\ \displaystyle(r-2) \sum_{t=s+1}^{n} \binom{n-s-1}{t-s-1} \frac{\delta_n(t)}{(r-1)^{n-t+1}} & \text{si } i \notin S. \end{cases}$$

La demostración de la igualdad anterior se hace igual que la de la Proposición 5.2.

El semivalor para los $r$–juegos $\tilde{\sigma}$ puede ser utilizado para definir un semivalor para los juegos con $r$ alternativas de Bolger. Concretamente, basta considerar para cada $i \in N$ y cada $V = (v_1, v_2, \ldots, v_r)$

$$\tilde{\sigma}_i^k[V] = \tilde{\sigma}_i[v_k] \quad \text{para} \quad k = 1, 2, ..., r, \quad i \in N.$$

Un último comentario para finalizar esta sección: si el semivalor $\sigma$ de $G_n$ admite una caracterización axiomática para los juegos simples, ésta puede modificarse (como se hizo en las Secciones 5.1 y 5.2) para obtener una caracterización de $\tilde{\sigma}$ en los $r$–juegos simples.

## 5.4 Otros valores para los $r$–juegos

Se ha visto que todos los semivalores admiten una extensión natural a $G_n^r$. ¿Y los demás valores conocidos para $G_n$? En esta sección se da una respuesta parcial a esta cuestión.

Con esta finalidad se enuncian y demuestran dos resultados técnicos que se usarán después en la demostración del teorema que contesta, en parte, la pregunta que se ha planteado.

**Lema 5.20** *Sean $u, v \in G_n^r$ equivalentes. Si $u = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)} u_{(S,P)}$ y $v = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} b_{(S,P)} u_{(S,P)}$, entonces se cumple que*

$$\sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} a_{(S,P)} = \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} b_{(S,P)}, \quad \forall S \subseteq N,$$

*siendo $\mathcal{S}$ como antes.*

DEMOSTRACIÓN: Como $b_{(S,P)} = \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)}(-1)^{s-t}v(T,Q)$, se tiene

$$\begin{aligned}\sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} b_{(S,P)} &= \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}}\ \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)} (-1)^{s-t}v(T,Q) = \\ &= \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}}\ \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)} (-1)^{s-t}u(T,f_T(Q)) = \\ &= \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}}\ \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)} (-1)^{s-t}u(T,Q) = \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} a_{(S,P)}. \quad \square\end{aligned}$$

**Lema 5.21** *Sea $\tilde{u} \in G_n$ la antiimagen por $\alpha$ del $r$–juego $u = \sum_{(S,P')\in\mathcal{S}} u_{(S,P')}$. Entonces*

$$\tilde{u} = \sum_{S\subseteq X} (r-2)^{x-s} u_X,$$

*siendo $u_X$ el juego de unanimidad de la coalición $X$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado que los juegos de unanimidad forman una base de $G_n$

$$\tilde{u} = \sum_{X\subseteq N} c_X \cdot u_X \quad \text{siendo} \quad c_X = \sum_{Y\subseteq X} (-1)^{x-y}\tilde{u}(Y).$$

Recordando que

$$\tilde{u}(Y) = \begin{cases} (r-1)^{y-s} & \text{si } S \subseteq Y, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

se tiene

$$\begin{aligned}\tilde{u} &= \sum_{X\subseteq N}\left(\sum_{Y\subseteq X}(-1)^{x-y}\tilde{u}(Y)\right)u_X = \sum_{S\subseteq X}\left(\sum_{S\subseteq Y\subseteq X}(-1)^{x-y}(r-1)^{y-s}\right)u_X = \\ &= \sum_{S\subseteq X}\left(\sum_{y=s}^{x}\binom{x-s}{y-s}(-1)^{x-y}(r-1)^{y-s}\right)u_X = \sum_{S\subseteq X}(r-2)^{x-s}u_X. \quad \square\end{aligned}$$

Sea $\vartheta$ un valor lineal en $G_n$ caracterizado por el conjunto de axiomas $\mathcal{A}(\vartheta) = \{A_1, A_2, \ldots, A_m\}$, y sean $A_0$ la propiedad de aditividad en $G_n^r$ y $E$ el axioma de equivalencia.

Igual que en la sección anterior, sea $\mathcal{A}_r(\vartheta)$ el conjunto obtenido a partir de $\mathcal{A}(\vartheta)$ añadiendo $E$ y $A_0$ si para $i = 1, 2, ..., m$ ningún $A_i$ es el axioma de aditividad en $G_n$, o añadiendo $E$ y sustituyendo $A_i$ por $A_0$ si $A_i$ es la propiedad de aditividad en $G_n$.

**Teorema 5.22** *Con las notaciones que se acaban de introducir, existe un único valor $\tilde{\vartheta}$ en $G_n^r$ caracterizado por $\mathcal{A}_r(\vartheta)$. Además, $\tilde{\vartheta}$ restringido a $G_n$ coincide con $\vartheta$.*

DEMOSTRACIÓN: (Unicidad) Supóngase que existe un valor $\tilde{\vartheta}$ que satisface las propiedades de $\mathcal{A}_r(\vartheta)$. En particular, $\tilde{\vartheta}$ también satisface las propiedades de caracterización de $\vartheta$ en $G_n \subseteq G_n^r$ y, por consiguiente, $\tilde{\vartheta}[w] = \vartheta[w] \quad \forall w \in G_n$. Si se demuestra que $\tilde{\vartheta}$ es único para los $r$–juegos de unanimidad, también lo será para todos los $r$–juegos. Haciendo un razonamiento similar al que se hizo en la sección anterior se obtiene

$$\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \frac{1}{(r-1)^{n-s}}\vartheta[\tilde{u}],$$

siendo $\tilde{u}$ como antes. Por tanto $\tilde{\vartheta}$, si existe, es único.

(Existencia) Sea $\tilde{\vartheta}$ el valor que sobre los $r$–juegos de unanimidad actúa de la manera siguiente:

$$\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \frac{1}{(r-1)^{n-s}}\vartheta[\tilde{u}].$$

Como los $r$–juegos de unanimidad son base de $G_n^r$, se extiende $\tilde{\vartheta}$ por linealidad a todo $G_n^r$.

Dicho valor cumple el axioma de equivalencia ya que, si $u, v \in G_n^r$ son equivalentes, entonces

$$\tilde{\vartheta}[u] = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \sum_{S\subseteq N}\sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} a_{(S,P)}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}].$$

Dado que, fijada $S$, todos los $r$–juegos de unanimidad $u_{(S,P)}$ son equivalentes, se fija una partición $(S, P')$ cualquiera y se obtiene

$$\sum_{S\subseteq N}\sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} a_{(S,P)}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \sum_{S\subseteq N}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P')}]\sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} a_{(S,P)}.$$

Aplicando el Lema 5.20 se tiene

$$\sum_{S\subseteq N} \tilde{\vartheta}[u_{(S,P')}] \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} a_{(S,P)} = \sum_{S\subseteq N} \tilde{\vartheta}[u_{(S,P')}] \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} b_{(S,P)}.$$

Y por consiguiente

$$\sum_{S\subseteq N} \tilde{\vartheta}[u_{(S,P')}] \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} b_{(S,P)} = \sum_{S\subseteq N} \sum_{(S,P)\in\mathcal{S}} b_{(S,P)}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \tilde{\vartheta}[v].$$

Ahora se comprobará que $\tilde{\vartheta}$ restringido a $G_n$ coincide con $\vartheta$ y, por lo tanto, cumplirá las restantes propiedades de $\mathcal{A}_r(\tilde{\vartheta})$.

Sea $w \in G_n^r$ y $\overline{w} \in G_n$ tal que $w = \alpha(\overline{w})$, es decir, $w(S,P) = \overline{w}(S)$ $\forall P$. El $r$–juego $w$ se escribe de forma única como combinación de los $r$–juegos de unanimidad:

$$w = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)} u_{(S,P)},$$

siendo

$$a_{(S,P)} = \sum_{(T,Q)\subseteq(S,P)} (-1)^{s-t} w(T,Q) = \sum_{T\subseteq S} (1-r)^{s-t}\overline{w}(T),$$

ya que, fijada $(S,P)$, hay $(r-1)^{s-t}$ particiones $(T,Q)$ con $T$ fija tales que $(T,Q) \subseteq (S,P)$.

Entonces

$$\begin{aligned}
\tilde{\vartheta}[w] &= \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \\
&= \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} \left(\sum_{T\subseteq S}(1-r)^{s-t}\overline{w}(T)\right) \frac{1}{(r-1)^{n-s}}\vartheta[\tilde{u}] = \\
&= \sum_{S\subseteq N}(r-1)^{n-s} \left(\sum_{T\subseteq S}(1-r)^{s-t}\overline{w}(T)\right) \frac{1}{(r-1)^{n-s}}\vartheta[\tilde{u}] = \\
&= \sum_{S\subseteq N} \left(\sum_{T\subseteq S}(1-r)^{s-t}\overline{w}(T)\right) \vartheta[\tilde{u}].
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema 5.21, la expresión anterior se convierte en

$$
\begin{aligned}
\tilde{\vartheta}[w] &= \sum_{S\subseteq N}\left(\sum_{T\subseteq S}(1-r)^{s-t}\overline{w}(T)\right)\vartheta\left[\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\left(\sum_{T\subseteq S}(1-r)^{s-t}\overline{w}(T)\right)\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{X\subseteq N}\sum_{T\subseteq X}\overline{w}(T)\left(\sum_{T\subseteq S\subseteq X}(1-r)^{s-t}(r-2)^{x-s}\right)u_X\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{X\subseteq N}\sum_{T\subseteq X}\overline{w}(T)\left(\sum_{s=t}^{x}\binom{x-t}{s-t}(1-r)^{s-t}(r-2)^{x-s}\right)u_X\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{X\subseteq N}\left(\sum_{T\subseteq X}(-1)^{x-t}\overline{w}(T)\right)u_X\right] = \vartheta[\overline{w}]. \quad \square
\end{aligned}
$$

Según el teorema anterior, todos los valores de $G_n$ que sean lineales admiten una extensión a $G_n^r$. Ejemplos, que ya se han visto en este capítulo, son el valor de Shapley, el índice de Banzhaf y, de hecho, todos los semivalores.

Nótese que el razonamiento de la última demostración difiere de la del Teorema 5.18, del mismo modo que ésta no coincidía con la de los Teoremas 5.4 y 5.12. Por este motivo se han incluído las tres.

**Ejemplo 5.23 (Los valores ponderados de Shapley)** Una de las propiedades que caracterizan al valor de Shapley es la simetría. Puesto que se basa únicamente en la función característica del juego, jugadores simétricos respecto de esta función obtienen el mismo valor. No se considera, sin embargo, otro tipo de información como, por ejemplo, que uno de los jugadores represente a un colectivo de agentes mucho más numeroso que los que representan otros jugadores. Shapley [1953b] utiliza los sistemas de ponderación y los valores ponderados para describir estas situaciones no simétricas. Kalai y Samet [1987] los caracterizan axiomáticamente en un caso algo más general.

Como siempre, sea $N = \{1, 2, ..., n\}$ el conjunto de jugadores. Un *sistema de* *ponderación* $\omega$ es un par $(\lambda, \Omega)$ donde $\lambda \in \mathbb{R}^n$ es un vector que asigna un peso estrictamente positivo a cada jugador $i \in N$ y $\Omega = (S_1, S_2, ..., S_m)$ es una partición ordenada de $N$. El *valor ponderado de Shapley con sistema de ponderación* $\omega$ es una aplicación

$$\Phi^{\omega} : G_n \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

definida para cada juego de unanimidad $u_X$ de la siguiente manera: sean $k = \max\{j \ : \ S_j \cap X \neq \emptyset\}$ y $\overline{X} = X \cap S_k$; entonces

$$\Phi_i^{\omega}[u_X] = \begin{cases} \frac{\lambda_i}{\sum_{j \in \overline{X}} \lambda_j} & \text{si } i \in \overline{X}, \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

$\Phi^{\omega}$ se extiende por linealidad a todos los juegos de $G_n$.

Utilizando el Teorema 5.22 (y el Lema 5.21) se puede generalizar el valor ponderado de Shapley a los $r$–juegos. De hecho, se define $\tilde{\Phi}^{\omega}$ para los $r$–juegos de unanimidad y se extiende después linealmente al resto de los $r$–juegos. Con las notaciones anteriores:

$$\tilde{\Phi}_i^{\omega}[u_{(S,P)}] = \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \sum_{X \supseteq S} (r-2)^{x-s} \Phi_i^{\omega}[u_X].$$

## 5.5 El juego cooperativo asociado a un $r$–juego

A lo largo de esta memoria se ha visto que los $r$–juegos proporcionan modelos que se ajustan de forma aproximada a situaciones reales que difícilmente podían describirse mediante juegos cooperativos clásicos. Además, para profundizar en el análisis de dichas situaciones se han introducido y estudiado diversos valores para los $r$–juegos.

El hecho de que los $r$–juegos reflejen más fielmente la realidad que los juegos cooperativos clásicos es una ventaja de aquéllos sobre éstos, y puede suponer una satisfacción para los estudiosos de la Teoría de Juegos, que ahora disponen de otras herramientas con las que enfrentarse a los nuevos (y viejos) problemas.

Sin embargo, el gran inconveniente de los juegos con múltiples alternativas es la complejidad en los cálculos. En esta sección se verá cómo solucionar, en parte, este inconveniente.

A cada $r$–juego $v \in G_n^r$ se le asocia el juego cooperativo $\overline{v} \in G_n$ definido por

$$\overline{v}(S) = \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \sum_{(S,P')\in\mathcal{S}} v(S,P') \quad \forall S \subseteq N.$$

$\overline{v}$ asigna a cada coalición $S$ la media de lo que le asigna el $r$–juego $v$ teniendo en cuenta todas las posibles ordenaciones de $N \setminus S$ en las restantes alternativas.

**Teorema 5.24** *Si $\vartheta$ es un valor lineal en $G_n$ y $\tilde{\vartheta}$ es su correspondiente extensión a $G_n^r$, entonces para todo $v \in G_n^r$ se cumple*

$$\tilde{\vartheta}[v] = \vartheta[\overline{v}].$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $v \in G_n^r$.

$$\begin{aligned}
\tilde{\vartheta}[v] &= \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)}\tilde{\vartheta}[u_{(S,P)}] = \sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\vartheta[\tilde{u}] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{(S,P)\in\mathcal{P}_r(N)} a_{(S,P)}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\sum_{(S,P')\in\mathcal{S}} a_{(S,P')}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\right].
\end{aligned}$$

El último de los sumatorios no depende de $P'$. Por tanto, se obtiene

$$\begin{aligned}
&\vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\sum_{X\supseteq X}(r-2)^{x-s}u_X\sum_{(S,P')\in\mathcal{S}} a_{(S,P')}\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\sum_{(S,P')\in\mathcal{S}}\left(\sum_{(T,Q)\subseteq(S,P')}(-1)^{s-t}v(T,Q)\right)\right] = \\
&= \vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\sum_{T\subseteq S}\sum_{(T,Q')\in\mathcal{T}}(-1)^{s-t}v(T,Q')\right], \quad (5.2)
\end{aligned}$$

donde $\mathcal{T}$ es el conjunto de particiones de $\mathcal{P}_r(N)$ que tienen su primera componente igual a $T$.

Además notése que

$$\sum_{(T,Q')\in\mathcal{T}} v(T,Q') = (r-1)^{n-t}\overline{v}(T).$$

En consecuencia, la expresión (5.2) se convierte en

$$\vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\frac{1}{(r-1)^{n-s}}\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\sum_{T\subseteq S}(-1)^{s-t}(r-1)^{n-t}\overline{v}(T)\right] =$$

$$= \vartheta\left[\sum_{S\subseteq N}\sum_{X\supseteq S}(r-2)^{x-s}u_X\sum_{T\subseteq S}(-1)^{s-t}(r-1)^{s-t}\overline{v}(T)\right] =$$

$$= \vartheta\left[\sum_{X\subseteq N}\sum_{T\subseteq X}\overline{v}(T)\left(\sum_{T\subseteq S\subseteq X}(1-r)^{s-t}(r-2)^{x-s}\right)u_X\right] =$$

$$= \vartheta\left[\sum_{X\subseteq N}\sum_{T\subseteq X}\overline{v}(T)\left(\sum_{s=t}^{x}\binom{x-t}{s-t}(1-r)^{s-t}(r-2)^{x-s}\right)u_X\right] =$$

$$= \vartheta\left[\sum_{X\subseteq N}\left(\sum_{T\subseteq X}(-1)^{x-t}\overline{v}(T)\right)u_X\right] = \vartheta[\overline{v}]. \quad \square$$

Este resultado se ha aplicado para calcular los valores de la mayoría de los ejemplos que se exponen en la Sección 5.7.

## 5.6 Probabilidades en la formación de particiones

En el análisis que se ha hecho hasta ahora se ha supuesto, implícitamente, que todas las particiones son igualmente probables. Sin embargo, en algunas situaciones esta suposición puede no ser admisible. Recuérdense los $r$–juegos restringidos, por ejemplo. Tampoco es aplicable en otros casos.

**Ejemplo 5.25 (El problema de la bancarrota)** Una empresa quiebra dejando un capital $E = 5000$ u. m. y deudas $d_1 = 4000$, $d_2 = 3000$, $d_3 = 2000$ y

$d_4 = 100$ u. m. a cuatro acreedores. En el estudio clásico de este problema, todos los acreedores están obligados a reclamar su deuda, aunque podría darse el caso, por ejemplo, de que los costes de la reclamación fuesen superiores al montante de la deuda que se reclama. En este supuesto, el acreedor correspondiente se abstendría, probablemente, de efectuar la reclamación. Este hecho puede producirse también por otros motivos. Utilizando un 3–juego se describe esta situación: si $(S, P_2, P_3) \in \mathcal{P}_3(N)$, se define $v(S, P_2, P_3)$ como la cantidad que obtiene la coalición $S$ si los miembros de $P_2$ han ido a cobrar su deuda pero los de $P_3$ no. El valor de Shapley para los $r$–juegos da un posible reparto de las 5000 u. m. entre los cuatro jugadores:

$$\theta[v] = (2150, 1650, 1150, 50).$$

Curiosamente, este reparto coincide con el del juego cooperativo clásico. Parece, pues, que otorgar a *todos* los acreedores la posibilidad de renunciar a su deuda, y hacerlo de forma equiprobable, no altera el valor de Shapley del juego. No obstante, intuitivamente se observa que no todas las particiones son igualmente probables puesto que es mucho más plausible que el cuarto acreedor renuncie a reclamar su deuda que no que lo haga el primero. A continuación se formaliza esta idea.

**Definición 5.26** Un *índice de probabilidades* es una función $p : \mathcal{P}_r(N) \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $0 \leq p(S, P') \leq 1$.
- $\sum_{(S,P') \in \mathcal{S}} p(S, P') = 1$.

Puede interpretarse $p(S, P)$ como la probabilidad con la que $S$ cree que se formará la partición $P$.

Hay diversas maneras de hacer intervenir el índice de probabilidades en un $r$–juego $v$. Una consiste en multiplicar cada $v(S, P)$ por su correspondiente $p(S, P)$. De esta forma se obtiene un nuevo $r$–juego $v'$. Otra posibilidad es asociar a cada $r$–juego $v$ un juego cooperativo, como en la sección anterior, que asigne a cada coalición $S$ su "esperanza matemática" en el $r$–juego $v$. Es decir, considerar el juego $\overline{v_p} \in G_n$ definido por

$$\overline{v_p}(S) = \sum_{(S,P')\in \mathcal{S}} p(S,P')v(S,P').$$

La primera posibilidad ha sido descartada porque aplicar la teoría descrita anteriormente al $r$–juego $v'$ conlleva, de forma implícita, la introducción de la equiprobabilidad en la formación de particiones otra vez, con lo cual se estarían mezclando dos ideas aparentemente contradictorias.

Se ha optado, pues, por la segunda. Para ello, se debe construir primero un $r$–juego $v_p$ de forma que su juego cooperativo asociado sea $\overline{v_p}$. Por lo tanto, se considera

$$v_p(S,P) = v(S,P)p(S,P)(r-1)^{n-s}.$$

Se desea definir una regla $\mu$ que asigne a cada terna $(N,v,p)$ un vector de pagos eficiente y que represente, en cierto sentido, una generalización del valor de Shapley para los juegos cooperativos.

**Definición 5.27** El *valor de Shapley de $v \in G_n^r$ con índice de probabilidades $p$* es $\mu[v,p] = \theta[v_p]$.

**Observaciones 5.28**

(a) $\mu$ es eficiente. Para la partición $(N,\emptyset)$, debe de ser $p(N,\emptyset) = 1$ y, por lo tanto, $v_p(N,\emptyset) = v(N,\emptyset)$.

(b) Si $w \in G_n$ y $v \in G_n^r$ es su imagen por $\alpha$ (Observación 4.15), entonces $\overline{v_p} = w$ para todo índice de probabilidades $p$, ya que

$$v_p(S,P) = v(S,P)p(S,P)(r-1)^{n-s} = w(S)p(S,P)(r-1)^{n-s},$$

y, en consecuencia,

$$\overline{v_p}(S) = \frac{1}{(r-1)^{n-s}} \sum_{(S,P')\in \mathcal{S}} w(S)p(S,P')(r-1)^{n-s} = w(S).$$

(c) Si $p(S,P) = \frac{1}{(r-1)^{n-s}}$ para toda $S$ y toda $P$, entonces $v_p = \overline{v}$ (siendo $\overline{v}$ como en la sección anterior). Esta es la situación de equiprobabilidad que se está generalizando.

Como aplicación, en la sección siguiente se estudia el problema de la bancarrota suponiendo que algunas particiones son más probables que otras.

## 5.7 Ejemplos

### El Consejo de Seguridad de la ONU

El funcionamiento de este organismo ha sido descrito de forma bastante aproximada utilizando 3–juegos simples (Ejemplo 4.13). Los valores de Shapley y de Banzhaf para los $r$–juegos dan una medida de la distribución del poder respecto a las alternativas *sí* y *no*. Los resultados, en este caso, son los que aparecen en la Tabla 1.

**Tabla 1.-** Consejo de Seguridad de la ONU: 3–juegos

| **Valor de Shapley** | | |
|---|---|---|
| Jugador | $\theta_i[v_1]$ *sí* | $\theta_i[v_2]$ *no* |
| $i \in V$ | 0.163124 | 0.083320 |
| $i \in R$ | 0.018439 | 0.058340 |

| **Indice de Banzhaf** | | |
|---|---|---|
| Jugador | $\beta_i[v_1]$ *sí* | $\beta_i[v_2]$ *no* |
| $i \in V$ | 0.118601 | 0.001701 |
| $i \in R$ | 0.050692 | 0.000677 |

En la Tabla 2 se muestran los valores de Shapley y Banzhaf correspondientes al juego simple que tradicionalmente se utiliza como modelo para esta situación.

**Tabla 2.-** Consejo de Seguridad de la ONU: juego clásico

| Jugador | **Valor de Shapley** | **Indice de Banzhaf** |
|---|---|---|
| $i \in V$ | 0.196270 | 0.051758 |
| $i \in R$ | 0.001865 | 0.005127 |

Los 3–juegos describen el funcionamiento del Consejo de forma más aproximada que el juego simple clásico; por tanto, parece lógico pensar que la distribución del poder de la Tabla 1 es más precisa que la que aparece en la Tabla 2.

Para comparar las posiciones estratégicas de los miembros del Consejo no deben observarse las diferencias absolutas entre los valores de las tablas sino las proporciones.

Respecto al valor de Shapley, la espectacular proporción de 105.24 que se da entre un miembro permanente y uno no permanente en el enfoque clásico, se reduce a 8.85 en el caso de la alternativa *sí*, y a 1.43 en el caso del *no*. Respecto al índice de Banzhaf, se pasa de una proporción de 10.10 a 2.34 en el caso del *sí*, y a 2.51 para el *no*. Resumiendo, el uso de los $r$–juegos sugiere que el derecho a veto del que disponen los miembros permanentes no tiene los desorbitados efectos que los valores clásicos indican.

Si el jugador 1 presenta una propuesta a votación y la respalda abiertamente, entonces se utilizarán los 3–juegos restringidos $v_1^R$ y $v_2^R$ (Ejemplo 4.43). En la Tabla 3 se exponen tanto el valor de Shapley como el índice de Banzhaf de estos juegos. No tiene sentido calcular dichos valores para el jugador 1 respecto a la segunda alternativa.

**Tabla 3.-** Consejo de Seguridad de la ONU: 3–juegos restringidos

| **Valor de Shapley** | | |
|---|---|---|
| Jugador | $\theta_i[v_1^R]$ *sí* | $\theta_i[v_2^R]$ *no* |
| 1 | 0.302010 | — |
| $i \in V \setminus \{1\}$ | 0.142903 | 0.100229 |
| $i \in R$ | 0.012637 | 0.059908 |

| **Indice de Banzhaf** | | |
|---|---|---|
| Jugador | $\beta_i[v_1^R]$ *sí* | $\beta_i[v_2^R]$ *no* |
| 1 | 0.170563 | — |
| $i \in V \setminus \{1\}$ | 0.087799 | 0.005304 |
| $i \in R$ | 0.034744 | 0.001969 |

En cuanto a la primera alternativa, el aumento de poder del jugador 1 se debe a que tiene más movimientos en los cuales es pivote en el 3–juego restringido $v_1^R$ que en $v_1$. La proporción entre el poder de un miembro permanente (diferente del 1) y uno rotatorio también ha aumentado, pasando a 11.31 en el caso del valor de Shapley y a 2.53 para el índice de Banzhaf.

Respecto a la segunda alternativa ocurre algo similar: la proporción es ahora de 1.67 para el valor de Shapley y de 2.69 para el índice de Banzhaf.

### El Ayuntamiento de Terrassa

El consistorio lo componen cinco partidos políticos con 13, 6, 4, 3 y 1 representantes, y se presentaban dos candidatos para alcalde: *a* y *b*. Además del juego de mayoría ponderada $u = [14; 13, 6, 4, 3, 1]$, esta situación puede estudiarse desde diferentes perspectivas (Ejemplo 4.36) dependiendo de la regla que se utilice en la elección del alcalde.

(1) Utilizando los 3–juegos de mayoría absoluta $u_1$ y $u_2$.

(2) Usando los 3–juegos de mayoría simple $v_1$ y $v_2$.

(3) Aplicando los 3–juegos de mayoría simple con mecanismo de desempate que otorga la victoria al candidato $a$ cuando $a$ y $b$ obtienen el mismo número de votos ($w_1$ y $w_2$).

En cada uno de los casos (1) y (2) la distribución del poder debe ser la misma respecto a las dos alternativas, independientemente de la medida que se utilice. La tablas 4 y 5 muestran los valores de Shapley y los índices de Banzhaf de los juegos anteriores.

**Tabla 4.-** Valor de Shapley del Ayuntamiento de Terrassa

| Jug. (peso) | $\Phi_i[u]$ | $\theta_i[u_j]$ | $\theta_i[v_j]$ | $\theta_i[w_1]$ | $\theta_i[w_2]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 (13) | 0.6000 | 0.6000 | 0.5666 | 0.5510 | 0.5666 |
| 2 (6) | 0.1000 | 0.1000 | 0.1812 | 0.1812 | 0.1812 |
| 3 (4) | 0.1000 | 0.1000 | 0.1135 | 0.1292 | 0.1135 |
| 4 (3) | 0.1000 | 0.1000 | 0.0875 | 0.0979 | 0.0875 |
| 5 (1) | 0.1000 | 0.1000 | 0.0510 | 0.0406 | 0.0510 |

**Tabla 5.-** Indice de Banzhaf del Ayuntamiento de Terrassa

| Jug. (peso) | $\Psi_i[u]$ | $\beta_i[u_j]$ | $\beta_i[v_j]$ | $\beta_i[w_1]$ | $\beta_i[w_2]$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 (13) | 0.8750 | 0.8750 | 0.6250 | 0.5859 | 0.6250 |
| 2 (6) | 0.1250 | 0.1250 | 0.1719 | 0.1719 | 0.1719 |
| 3 (4) | 0.1250 | 0.1250 | 0.1172 | 0.1250 | 0.1172 |
| 4 (3) | 0.1250 | 0.1250 | 0.0937 | 0.1094 | 0.0937 |
| 5 (1) | 0.1250 | 0.1250 | 0.0547 | 0.0391 | 0.0547 |

Los hechos más relevantes de estas tablas se resumen a continuación. Primero, las coincidencias entre algunas columnas no son casuales. Por un lado, los resultados que se obtienen en el caso (1) deben coincidir con los correspondientes al juego de mayoría ponderada clásico (recuérdese la Observación 4.15). Por otro lado, es claro que hacer que el candidato $a$ gane en caso de empate no modifica las posiciones cruciales para los votantes del candidato $b$, así que la distribución del poder en los juegos $v_2$ y $w_2$ debe ser la misma.

Segundo, en los juegos $u$ y $u_j$ $(j = 1,2)$ los partidos con pesos 6, 4, 3 y 1 desempeñan un papel simétrico. Esta simetría desaparece en las situaciones que se regulan por mayoría relativa (juegos $v_j$ y $w_j$), donde la posición estratégica de cada jugador depende más sensiblemente de su peso.

Y, tercero, la regla de desempate (juego $w_1$) perjudica a los jugadores 1 y 5, no produce ningún efecto en el 2 y favorece al 3 y al 4, debido a que estos últimos son los que más aumentan el número de movimientos en los cuales son pivotes.

Ahora se supondrá que el primer partido respalda al candidato $a$ (o, si se prefiere, que el candidato $a$ representa al primer partido). Entonces se define sobre $N$ el 3–juego restringido

$$x_1^R(S, P_2, P_3) = \begin{cases} x_1(S, P_2, P_3) & \text{si } 1 \in S, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

y sobre $N \setminus \{1\}$

$$x_2^R(P_1', S', P_3') = x_2(P_1' \cup \{1\}, S', P_3'),$$

donde $x$ representa la regla de decisión que se escoja: mayoría absoluta ($u$), mayoría relativa ($v$) o mayoría absoluta con regla de desempate que favorece a la primera alternativa ($w$).

**Tabla 6.-** Valor de Shapley del A. de T. restringido (1 vota $a$)

| Jug. (peso) | $\theta_i[u_1^R]$ | $\theta_i[u_2^R]$ | $\theta_i[v_1^R]$ | $\theta_i[v_2^R]$ | $\theta_i[w_1^R]$ | $\theta_i[w_2^R]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 (13) | 0.8000 | — | 0.9750 | — | 0.9875 | — |
| 2 (6) | 0.0500 | 0.2500 | 0.0062 | 0.2500 | 0.0031 | 0.2500 |
| 3 (4) | 0.0500 | 0.2500 | 0.0062 | 0.2500 | 0.0031 | 0.2500 |
| 4 (3) | 0.0500 | 0.2500 | 0.0062 | 0.2500 | 0.0031 | 0.2500 |
| 5 (1) | 0.0500 | 0.2500 | 0.0062 | 0.2500 | 0.0031 | 0.2500 |

**Tabla 7.-** Indice de Banzhaf del A. de T. restringido (1 vota $a$)

| Jug. (peso) | $\beta_i[u_1^R]$ | $\beta_i[u_2^R]$ | $\beta_i[v_1^R]$ | $\beta_i[v_2^R]$ | $\beta_i[w_1^R]$ | $\beta_i[w_2^R]$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 (13) | 0.9375 | — | 0.9961 | — | 0.9961 | — |
| 2 (6) | 0.0625 | 0.1250 | 0.0078 | 0.1250 | 0.0039 | 0.1250 |
| 3 (4) | 0.0625 | 0.1250 | 0.0078 | 0.1250 | 0.0039 | 0.1250 |
| 4 (3) | 0.0625 | 0.1250 | 0.0078 | 0.1250 | 0.0039 | 0.1250 |
| 5 (1) | 0.0625 | 0.1250 | 0.0078 | 0.1250 | 0.0039 | 0.1250 |

Debido al gran peso del primer partido, se tiene $u_2^R = v_2^R = w_2^R$, lo cual queda reflejado en las tablas anteriores. Para que $b$ gane por mayoría relativa (cuando 1 vota $a$) es necesario que obtenga como mínimo 14 votos, igual que si ganase por mayoría absoluta. Además, el desempate cuenta a favor de $a$, no de $b$; por eso $v_2^R = w_2^R$.

La regla de desempate beneficia en este caso sólo al jugador 1 puesto que tiene un movimiento más en el que es pivote en $w_1^R$ que en $v_1^R$, mientras que los otros jugadores no aumentan el número de movimientos en los cuales son pivotes. Para que no gane $a$ deben ponerse de acuerdo los cuatro partidos minoritarios y votar a favor de $b$. Por eso todos ellos tienen el mismo índice de poder.

Para acabar este ejemplo, supóngase que el primer partido propone al candidato $a$ y el segundo partido propone al candidato $b$. En este caso se define sobre

$N' = N \setminus \{2\}$ el 3–juego

$$x_1^R(S', P_2', P_3') = \begin{cases} x_1(S', P_2' \cup \{2\}, P_3') & \text{si } 1 \in S, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

y sobre $N'' = N \setminus \{1\}$

$$x_2^R(P_1'', S'', P_3'') = \begin{cases} x_2(P_1'' \cup \{1\}, S'', P_3'') & \text{si } 2 \in P_2'', \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

siendo $x$ como antes. Nótese que también es $u_2^R = v_2^R = w_2^R$.

En este supuesto se obtienen los valores descritos en las tablas 8 y 9.

**Tabla 8.-** Valor de Shapley del A. de T. restringido (1 vota $a$ y 2 vota $b$)

| Jug. (peso) | $\theta_i[u_1^R]$ | $\theta_i[u_2^R]$ | $\theta_i[v_1^R]$ | $\theta_i[w_1^R]$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 (13) | 0.7500 | — | 0.9375 | 0.9687 |
| 2 (6) | — | 0.2500 | — | — |
| 3 (4) | 0.0833 | 0.2500 | 0.0208 | 0.0104 |
| 4 (3) | 0.0833 | 0.2500 | 0.0208 | 0.0104 |
| 5 (1) | 0.0833 | 0.2500 | 0.0208 | 0.0104 |

Como era de prever, el jugador 1 sale perjudicado cuando el 2 decide votar a favor de $b$ porque pierde movimientos en los que era pivote cuando estaba acompañado por el jugador 2 en la primera alternativa. El papel de los jugadores 3, 4 y 5 es totalmente simétrico ya que con el voto de uno cualquiera de ellos a favor de $a$ éste gana, y es necesario el voto conjunto de los tres para que gane $b$; por este motivo tienen el mismo índice de poder.

**Tabla 9.-** Indice de Banzhaf del A. de T. restringido (1 vota $a$ y 2 vota $b$)

| Jug. (peso) | $\beta_i[u_1^R]$ | $\beta_i[u_2^R]$ | $\beta_i[v_1^R]$ | $\beta_i[w_1^R]$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 (13) | 0.875000 | — | 0.968750 | 0.984375 |
| 2 (6) | — | 0.125000 | — | — |
| 3 (4) | 0.125000 | 0.125000 | 0.031250 | 0.015625 |
| 4 (3) | 0.125000 | 0.125000 | 0.031250 | 0.015625 |
| 5 (1) | 0.125000 | 0.125000 | 0.031250 | 0.015625 |

### El Parlamento de Cataluña

Tal y como se expuso en el Ejemplo 2.26, en las elecciones autonómicas catalanas del 19 de noviembre de 1995 se obtuvieron los resultados siguientes:

- Convergència i Unió (CiU) 60 diputados,
- Partit dels Socialistes de Catalunya (PSC) 34 diputados,

- Partit Popular (PP) 17 diputados,
- Iniciativa per Catalunya–Els verds (IC) 13 diputados,
- Esquerra Republicana de Catalunya (ERC) 11 diputados.

Esta situación se estudiará también desde varias perspectivas, como se hizo en el ejemplo anterior, y se usarán las mismas notaciones.

(1) Como juego de mayoría ponderada clásico: $u = [68; 60, 34, 17, 13, 11]$. Los pesos son diferentes a los del Ayuntamiento de Terrassa; no obstante, como juegos simples son equivalentes y, por lo tanto, la distribución clásica del poder será la misma.

(2) Utilizando los 3–juegos de mayoría absoluta $u_1$ y $u_2$.

(3) Usando los 3–juegos de mayoría relativa $v_1$ y $v_2$.

(4) En este caso, debido a los pesos, no se produce nunca el empate. Es decir, $w_j = v_j$ para $j = 1, 2$.

(5) Imponiendo un sistema de ponderación: el número de diputados de cada partido.

(6) Suponiendo que CiU apoya la primera alternativa.

(7) Suponiendo que CiU respalda la primera alternativa y el PSC la segunda.

(8) Suponiendo que CiU apoya la primera alternativa y los demás la segunda (caso real).

Los resultados se resumen en las Tablas 10, 11, 12, 13, 14, 15 y 16, excepto el caso (8) que, por su sencillez, se expone sin recuadros.

Nótese que ni los 3–juegos de mayoría simple $v_j$ para $j = 1, 2$ son iguales a los del Ayuntamiento de Terrassa, ni lo son los índices de poder correspondientes. Diferencias de pesos irrelevantes bajo mayoría absoluta pueden ser determinantes cuando se gana con mayoría relativa, como muestran los resultados de las Tablas 10 y 11.

**Tabla 10.-** Valor de Shapley del Parlamento Catalán

| Part. (peso) | $\theta_i[u_j] = \Phi_i[u]$ | $\theta_i[v_j] = \theta_i[w_j]$ |
|---|---|---|
| CiU (60) | 0.6000 | 0.521875 |
| PSC (34) | 0.1000 | 0.219792 |
| PP (17) | 0.1000 | 0.115625 |
| IC (13) | 0.1000 | 0.079167 |
| ERC (11) | 0.1000 | 0.063542 |

**Tabla 11.-** Indice de Banzhaf del Parlamento Catalán

| Part. (peso) | $\beta_i[u_j] = \Psi_i[u]$ | $\beta_i[v_j] = \beta_i[w_j]$ |
|---|---|---|
| CiU (60) | 0.8750 | 0.578125 |
| PSC (34) | 0.1250 | 0.218750 |
| PP (17) | 0.1250 | 0.125000 |
| IC (13) | 0.1250 | 0.085937 |
| ERC (11) | 0.1250 | 0.078125 |

En la Tabla 12 se exponen los valores ponderados de Shapley para estos $r$–juegos suponiendo que el sistema de ponderación es $\lambda = (60, 34, 17, 13, 11)$ y la partición es $\Omega = (N)$.

En los juegos de mayoría simple, el hecho de considerar el sistema de ponderación perjudica a CiU y beneficia a los otros cuatro partidos. No es así en los juegos de mayoría absoluta donde, además de CiU, también salen perjudicados IC y ERC.

**Tabla 12.-** Valores ponderados de Shapley del Parlamento Catalán

| Part. (peso) | $\tilde{\Phi}_i^\omega[u_j] = \Phi_i^\omega[u]$ | $\tilde{\Phi}_i^\omega[v_j] = \tilde{\Phi}_i^\omega[w_j]$ |
|---|---|---|
| CiU (60) | 0.5383389 | 0.3193930 |
| PSC (34) | 0.2044766 | 0.2744000 |
| PP (17) | 0.1051280 | 0.1827025 |
| IC (13) | 0.0818423 | 0.1291287 |
| ERC (11) | 0.0702142 | 0.0943758 |

Se supone ahora que CiU vota a favor de la alternativa $a$. Puesto que no hay empates, se tiene $v_1^R = w_1^R$ y $v_2^R = w_2^R$. En la tablas 13 y 14 pueden verse los valores de Shapley y de Banzhaf, respectivamente, de estos juegos restringidos.

En el juego de mayoría absoluta $u_2^R$, como la cuota continúa siendo 68, para que gane la alternativa $b$ es necesario que voten a su favor los cuatro partidos pequeños. Por eso se reparten por igual el poder respecto a esta alternativa.

En el juego de mayoría simple $v_1^R$, una vez que CiU decide apoyar la alternativa $a$, para que ésta gane basta con que la vote uno cualquiera de los otros cuatro. En $v_2^R$, cualquier coalición que se forme para superar a CiU debe contener necesariamente al PSC y al PP, pero es suficiente que contenga sólo a uno de los otros dos (IC o ERC); por eso estos dos partidos tienen menor índice de poder.

**Tabla 13.-** Valor de Shapley del P. C. restringido (CiU vota $a$)

| Part. (peso) | $\theta_i[u_1^R]$ | $\theta_i[u_2^R]$ | $\theta_i[v_1^R]$ | $\theta_i[v_2^R]$ |
|---|---|---|---|---|
| CiU (60) | 0.800000 | — | 0.962500 | — |
| PSC (34) | 0.050000 | 0.250000 | 0.009375 | 0.333333 |
| PP (17) | 0.050000 | 0.250000 | 0.009375 | 0.333333 |
| IC (13) | 0.050000 | 0.250000 | 0.009375 | 0.166666 |
| ERC (11) | 0.050000 | 0.250000 | 0.009375 | 0.166666 |

**Tabla 14.-** Indice de Banzhaf del P. C. restringido (CiU vota $a$)

| Part. (peso) | $\beta_i[u_1^R]$ | $\beta_i[u_2^R]$ | $\beta_i[v_1^R]$ | $\beta_i[v_2^R]$ |
|---|---|---|---|---|
| CiU (60) | 0.937500 | — | 0.988281 | — |
| PSC (34) | 0.062500 | 0.125000 | 0.011719 | 0.250000 |
| PP (17) | 0.062500 | 0.125000 | 0.011719 | 0.250000 |
| IC (13) | 0.062500 | 0.125000 | 0.011719 | 0.125000 |
| ERC (11) | 0.062500 | 0.125000 | 0.011719 | 0.125000 |

Supóngase que CiU vota $a$ y el PSC apoya a $b$. Los juegos $u_2^R$ y $v_2^R$ coinciden con los de la situación anterior y, por supuesto, también la distribución del poder.

**Tabla 15.-** Valor de Shapley del P. C. (CiU vota $a$ y PSC vota $b$)

| Part. (peso) | $\theta_i[u_1^R]$ | $\theta_i[u_2^R]$ | $\theta_i[v_1^R]$ | $\theta_i[v_2^R]$ |
|---|---|---|---|---|
| CiU (60) | 0.75000 | — | 0.90625 | — |
| PSC (34) | — | 0.25000 | — | 0.33333 |
| PP (17) | 0.08333 | 0.25000 | 0.03125 | 0.33333 |
| IC (13) | 0.08333 | 0.25000 | 0.03125 | 0.16666 |
| ERC (11) | 0.08333 | 0.25000 | 0.03125 | 0.16666 |

**Tabla 16.-** Indice de Banzhaf del P. C. (CiU vota $a$ y PSC vota $b$)

| Part. (peso) | $\beta_i[u_1^R]$ | $\beta_i[u_2^R]$ | $\beta_i[v_1^R]$ | $\beta_i[v_2^R]$ |
|---|---|---|---|---|
| CiU (60) | 0.875000 | — | 0.953125 | — |
| PSC (34) | — | 0.125000 | — | 0.250000 |
| PP (17) | 0.125000 | 0.125000 | 0.046875 | 0.250000 |
| IC (13) | 0.125000 | 0.125000 | 0.046875 | 0.125000 |
| ERC (11) | 0.125000 | 0.125000 | 0.046875 | 0.125000 |

Por último, si CiU vota $a$ y los demás $b$, se obtiene

$$\theta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \theta_i = \frac{1}{4} \quad \text{para} \quad i = 2,3,4,5,$$

$$\beta_1 = 0 \quad \text{y} \quad \beta_i = \frac{1}{8} \quad \text{para} \quad i = 2,3,4,5.$$

### El problema de la bancarrota

La empresa tenía (véase el Ejemplo 5.25) un capital $E = 5000$ u. m. y cuatro acreedores con deudas $d_1 = 4000$, $d_2 = 3000$, $d_3 = 2000$ y $d_4 = 100$ u. m. El 3–juego $v(S, P_2, P_3)$ otorga a cada coalición $S$ lo que cobraría si los jugadores de $P_2$ deciden reclamar su deuda pero los de $P_3$ no. El índice de probabilidades que se ha asignado a este juego (de forma más o menos arbitraria, pero suponiendo que la probabilidad de que los acreedores 1, 2 y 3 no reclamen su deuda es siempre mayor o igual que la del jugador 4) es:

- $p(1, 234, \emptyset) = p(1, 23, 4) = \frac{1}{2}$, $p(1, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(2, 134, \emptyset) = \frac{3}{4}$, $p(2, 13, 4) = p(2, 14, 3) = \frac{1}{8}$, $p(2, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(3, 124, \emptyset) = \frac{3}{4}$, $p(3, 12, 4) = \frac{1}{4}$, $p(3, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(4, 123, \emptyset) = 1$, $p(4, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(12, 34, \emptyset) = \frac{3}{4}$, $p(12, 3, 4) = \frac{1}{4}$, $p(12, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(13, 24, \emptyset) = \frac{3}{4}$, $p(13, 2, 4) = \frac{1}{4}$, $p(13, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(14, 23, \emptyset) = 1$, $p(14, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(23, 14, \emptyset) = \frac{3}{4}$, $p(23, 1, 4) = \frac{1}{4}$, $p(23, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(24, 13, \emptyset) = 1$, $p(24, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(34, 13, \emptyset) = 1$, $p(34, P) = 0$ para otras $P$.
- $p(123, 4, \emptyset) = \frac{3}{4}$, $p(123, \emptyset, 4) = \frac{1}{4}$.
- $p(124, 3, \emptyset) = 1$, $p(124, \emptyset, 3) = 0$.

- $p(134, 2, \emptyset) = 1$, $p(134, \emptyset, 2) = 0$.
- $p(234, 1, \emptyset) = 1$, $p(234, \emptyset, 1) = 0$.
- $p(1234, \emptyset, \emptyset) = 1$.

El valor de Shapley del $r$–juego $v$ con el índice $p$ anterior es

$$\mu[v, p] = (2154.16, 1654.16, 1154.16, 37.5),$$

mientras que el valor de Shapley para el juego cooperativo clásico $v_{E;d}$ y para el $r$–juego $v$ es

$$\Phi[v_{E;d}] = \theta[v] = (2150, 1650, 1150, 50).$$

El hecho de introducir el índice de probabilidades $p$ ha perjudicado al cuarto jugador, cuya deuda era la menor. Esto concuerda con las situaciones reales ya que, en la mayoría de casos, los acreedores con deudas relativamente pequeñas son los que cobran una parte proporcionalmente menor de su reclamación.

# Conclusiones

Los juegos cooperativos con utilidad transferible son excelentes modelos matemáticos con los que analizar situaciones de conflicto y cooperación que surgen en diversos ámbitos sociales. En ellos, el término coalición es, formalmente, sinónimo de subconjunto de jugadores, y no tiene connotaciones de alianza efectiva entre sus integrantes. Cuando realmente existe un pacto entre diferentes grupos de jugadores para actuar de manera conjunta, creando una estructura de coaliciones, entonces se utiliza el juego cociente para estudiar la nueva situación.

Además de proporcionar modelos matemáticos descriptivos, la Teoría de Juegos intenta aportar *soluciones* a dichas situaciones conflictivas. Hay muchos conceptos de solución para los juegos cooperativos, y aquí se ha trabajado, básicamente, con dos de ellos, el valor de Shapley y el índice de Banzhaf, así como con sus respectivos valores modificados por una estructura de coaliciones.

El primer capítulo es un compendio de los conceptos y resultados conocidos que constituyen el punto de partida de esta memoria.

En el segundo capítulo se estudia la formación efectiva de una alianza y, utilizando el valor de Shapley, se discute cuándo es favorable para los jugadores formar la alianza y cuándo no. Para ello, se introducen diversas propiedades del juego cociente y de la extensión multilineal (EML). Se demuestra que el juego cociente es independiente del orden de formación de la estructura de coaliciones, se deduce la EML del juego cociente a partir de la EML del juego inicial y se define el valor de alianza de una coalición. También se incluye en este capítulo una sección dedicada al estudio de las alianzas binarias en los juegos simples. Como éstos describen, fundamentalmente, organismos políticos de decisión regidos por votaciones, el estudio de dichas alianzas es, sin duda, interesante en tiempos en los que las mayorías absolutas parecen difícilmente alcanzables. Se ha determinado en qué juegos simples es más favorable (y en cuáles más desfavorable) formar una alianza binaria, estudiando, además, el efecto de ésta en los jugadores restantes (es decir, comprobando si ganan o pierden poder cuando otros dos se alían).

En el tercer capítulo se realiza un análisis similar al anterior pero utilizando el índice de Banzhaf. Se obtienen resultados análogos a los del Capítulo 2. Concretamente, los juegos simples en los que una alianza binaria es más favorable o más desfavorable para los jugadores que la forman, usando como medida el índice de Banzhaf, coinciden con los que se encontraron en el capítulo segundo usando el valor de Shapley. Para obtener los resultados de este capítulo ha sido necesario deducir previamente el método que permite calcular el índice de Banzhaf modificado por una estructura de coaliciones a partir de la EML del juego.

La segunda parte de esta memoria está dedicada a los juegos cooperativos con múltiples alternativas, con los cuales es posible estudiar situaciones, tanto políticas como económicas, cuya descripción no era factible mediante juegos cooperativos tradicionales o carecía de la precisión deseable.

En el Capítulo 4 se resume brevemente parte del trabajo de Bolger [1993] sobre los juegos con $r$ alternativas y se ve que su estudio puede reducirse, de hecho, al de sus juegos componentes o $r$–juegos. Estos se dotan de estructura de espacio vectorial real, y de conceptos y propiedades análogas a las de los juegos cooperativos clásicos. Por ejemplo, se ha extendido la relación de inclusión entre coaliciones a las particiones y se han definido los $r$–juegos de unanimidad, los $r$–juegos monótonos y los superaditivos. Especial atención merecen los $r$–juegos simples, con los que es posible estudiar órganos de decisión más complejos que los que permitían analizar los juegos simples convencionales.

El quinto y último capítulo está dedicado a definir y caracterizar axiomáticamente determinados conceptos de solución para los $r$–juegos. De hecho, se extienden a

$G_n^r$ todos los valores lineales en $G_n$. Para calcular estos valores generalizados, se asocia a cada $r$–juego $v$ un juego cooperativo $\overline{v}$, de forma que el valor extendido de $v$ coincide con el valor (clásico) de $\overline{v}$. El contenido teórico del capítulo finaliza con la introducción de probabilidades en la formación de las particiones, con la finalidad de que el modelo resultante refleje más fielmente la realidad.

Además de los resultados particulares que se han obtenido, y que se acaban de resumir brevemente, se exponen a continuación otros aspectos globales de la memoria que se desea destacar como conclusiones más relevantes.

Los desarrollos teóricos que se han realizado en los diferentes capítulos han sido motivados previamente mediante ejemplos, usando siempre que ha sido posible casos reales, a los cuales se les ha aplicado después las nuevas técnicas e ideas analizadas.

Aunque la memoria consta de dos partes bien diferenciadas en cuanto a temática, existen diversos elementos que se utilizan recurrentemente en ambas y le proporcionan unidad de estilo y metodología. Por supuesto, las dos partes también comparten un mismo objetivo: añadir herramientas a la Teoría de Juegos con las cuales contribuir al estudio de situaciones políticas, económicas o de otra índole.

En la primera parte se profundiza en la aplicación de conceptos bien conocidos a un problema central en la línea de los juegos cooperativos que es analizar la formación efectiva de coaliciones (entendidas como compromiso real o alianza entre sus miembros) sus efectos y su valoración por parte de sus integrantes. En este caso se han aprovechado los resultados teóricos existentes y se han implementado aquéllos que han sido necesarios para efectuar el análisis, sin renunciar a comparar los resultados derivados de técnicas de evaluación diferentes.

En la segunda parte se extrapolan ideas tradicionales para adaptarlas a un nuevo contexto, el de los juegos cooperativos con múltiples alternativas, cuyas perspectivas de aplicación a diferentes campos son muy amplias, como se ha puesto de manifiesto con los ejemplos que se incluyen en la memoria.

Además, se abre el camino a nuevas elaboraciones en diversas direcciones puesto que se sugieren, implícita o explícitamente, desarrollos y vías de extensión de algunos de los conceptos que se han estudiado. Por ejemplo, pueden derivarse de este trabajo las siguientes líneas de investigación:

- Estudio exhaustivo de las alianzas entre más de dos jugadores.
- Definición y caracterización axiomática del valor coalicional de Owen para los $r$–juegos. Análogamente para el índice modificado de Banzhaf.
- Extensión de otras nociones de solución a los $r$–juegos.
- Introducción de información adicional en los $r$–juegos como, por ejemplo, incompatibilidades entre los jugadores o índices de cooperación.
- Elaboración de programas informáticos que simplifiquen la tarea de efectuar los cálculos para los $r$-juegos.

Para finalizar, expresaremos un deseo más que una conclusión. Este trabajo intenta ser, en definitiva y sobre todo, una modesta contribución al desarrollo de la apasionante disciplina que es la Teoría de Juegos. Esta parece atravesar una etapa esplendorosa, como lo demuestran el creciente interés que despierta entre los más variados científicos, la celebración regular de congresos y simposios a los que concurren cada vez más participantes, o la inclusión de esta materia en los planes de estudio de nuevas titulaciones (por ejemplo en la de Ingeniería en Organización Industrial que se impartirá próximamente en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Terrassa).

# Bibliografía

[1] ALBIZURI, M. J.; SANTOS, J. C.; ZARZUELO, J. M. (1995)
*Estudio de un valor para juegos con n jugadores y r alternativas.*
Comunicación en el XXII Congreso Nacional de Estadística e I. O. Sevilla.

[2] AMER, R. (1995)
*Juegos, valores e índices de cooperación.*
Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada II. Universidad Politécnica de Cataluña.

[3] AUMANN, R. J.; MASCHLER, M. (1985)
*Game theoretic analysis of a bankrupty problem from the Talmud.*
Journal of Economic Theory 36, págs. 195–213.

[4] BANZHAF III, J. F. (1965)
*Weighted voting doesn't work: A mathematical analysis.*
Rutgers Law Review 19, págs. 317–343.

[5] BERGANTIÑOS, G. (1993)
*Aportaciones a la Teoría de Juegos.*
Tesis doctoral. Departamento de Estadística e Investigación Operativa. Universidad de Santiago de Compostela.

[6] BOLGER, E. M. (1983)
*The Banzhaf index for multicandidate presidential elections.*
SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods 4, págs. 442–458.

[7] BOLGER, E. M. (1986)
*Power indices for multicandidate voting games.*
International Journal of Game Theory 15, págs. 175–186.

[8] BOLGER, E. M. (1987)
*A class of efficient values for games in partition function form.*
SIAM Journal of Algebraic and Discrete Methods 8, págs. 460–466.

[9] BOLGER, E. M. (1989)
*A set of axioms for a value for partition function games.*
International Journal of Game Theory 18, págs. 37–44.

[10] BOLGER, E. M. (1993)
*A value for games with n players and r alternatives.*
International Journal of Game Theory 22, págs. 319–334.

[11] CARRERAS, F. (1991)
*Restriction of simple games.*
Mathematical Social Sciences 21, págs. 245–260.

[12] COLEMAN, J. S. (1971)
*Control of collectivities and the power of a collectivity to act.*
En: Social Choice (ed. por Liebermann, B.). Gordon and Breach, Nueva York, págs. 269–300.

[13] DAVIS, M. D. (1986)
*Introducción a la teoría de juegos, 4ª ed.*
Alianza Editorial, Madrid.

[14] DRIESSEN, T. (1988)
*Cooperative games, solutions and applications.*
Theory and Decision Library. Kluwer Academic Press, Holanda.

[15] DUBEY, P. (1975)
*On the uniqueness of the Shapley value.*
International Journal of Game Theory 4, págs. 131–139.

[16] DUBEY, P.; SHAPLEY, L. S. (1979)
*Mathematical properties of the Banzhaf power index.*
Mathematics of Operations Research 2, págs. 99–131.

[17] DUBEY, P.; NEYMAN, A.; WEBER, R. J. (1981)
*Value theory without efficiency.*
Mathematics of Operations Research 6, págs. 122–128.

[18] FELTKAMP, V. (1995)
*Alternative axiomatic characterizations of the Shapley and Banzhaf values.*
International Journal of Game Theory 24, págs. 179–186.

[19] FREIXAS, J. (1994)
*Estructura de los juegos simples.*
Tesis doctoral. Departamento de Matemática Aplicada III. Universidad Politécnica de Cataluña.

[20] FUDENBERG, D.; TIROLE, J. (1991)
*Game Theory.*
MIT Press, Massachussetts.

[21] GIBBONS, R. (1993)
*Un primer curso de Teoría de Juegos.*
Antoni Bosch, editor, Barcelona.

[22] GILLIES, D. B. (1953)
*Some theorems on n–person games.*
Tesis doctoral. Princeton University Press, Princeton, Nueva Jersey.

[23] HALL, P. (1935)
*On representatives of subsets.*
Journal of the London Mathematical Society 10, págs. 26–30.

[24] HART, S.; MAS–COLELL, A. (1989)
*Potential, value and consistency.*
Econometrica 57, págs. 589–614.

[25] KALAI, E.; SAMET, D. (1987)
*On weighted Shapley values.*
International Journal of Game Theory 16, págs. 205–222.

[26] LEHRER, E. (1988)
*An axiomatization of the Banzhaf value.*
International Journal of Game Theory 17, págs. 89–99.

[27] LUCAS, W. F.; THRALL, R. M. (1963)
*n–person games in partition function form.*
Naval Research Logistics Quarterly 10, págs. 281–298.

[28] MYERSON, R. B. (1977)
*Values of games in partition function form.*
International Journal of Game Theory 6, págs. 23–31.

[29] O'NEILL, B. (1982)
*A problem of rights arbitration from the Talmud.*
Mathematical Social Sciences 2, págs. 345–371.

[30] OWEN, G. (1972)
*Multilinear extensions of games.*
Management Science 18, págs. 64–79.

[31] OWEN, G. (1975)
*Multilinear extensions and the Banzhaf Value.*
Naval Research Logistics Quarterly 22, págs. 741–750.

[32] OWEN, G. (1977)
*Values of games with a priori unions.*
En: Essays in Mathematical Economics and Game Theory (ed. por Henn, R. y Moeschlin, O.). Springer–Verlag, págs. 76–88.

[33] OWEN, G. (1978)
*A characterization of the Banzhaf–Coleman index.*
SIAM Journal of Applied Mathematics 35, págs. 315–327.

[34] OWEN, G. (1981)
*Modification of the Banzhaf-Coleman index for games with a priori unions.*
En: Power, Voting and Voting Power (ed. por Holler, M. J.). Physica-Verlag, Wurzburg, págs. 232–238.

[35] OWEN, G. (1982)
*Game Theory, 2ª ed.*
Academic Press.

[36] OWEN, G.; WINTER, E. (1992)
*Multilinear extensions and the coalition value.*
Games and Economic Behavior 4, págs. 582–587.

[37] RAFELS, C.; YBERN, N. (1995)
*Even and odd marginal worth vectors, Owen's multilinear extension and convex games.*
International Journal of Game Theory 24, págs. 113–126.

[38] SCHMEIDLER, D. (1969)
*The nucleolus of a characteristic function game.*
SIAM Journal of Applied Mathematics 17, págs. 1163–1170.

[39] SHAPLEY, L. S. (1953a)
*A value for $n$ person games.*
En: Contributions to the theory of games II (ed. por Kuhn H. y Tucker A.). Princeton University Press. Princeton, págs. 307–317.

[40] SHAPLEY, L. S. (1953b)
*Additive and non-additive set functions.*
Tesis Doctoral. Departamento de Matemáticas. Universidad de Princeton.

[41] SHAPLEY, L. S.; SHUBIK, M. (1954)
*A method for evaluating the distribution of power in a committee system.*
American Political Science Review 48, págs. 787–792.

[42] SINGLETON, R. R.; TYNDALL, W. F. (1977)
*Introducción a la teoría de juegos y a la programación lineal.*
Editorial Labor, Barcelona.

[43] VON NEUMANN, J.; MORGENSTERN, O. (1944)
*Theory of games and economic behavior.*
Princeton University Press. Princeton, Nueva Jersey.

[44] YOUNG, H. P. (1985)
*Monotonic solutions of cooperative games.*
International Journal of Game Theory 14, págs. 65–72.

[45] ZARZUELO, J. M. (1989)
*Juegos Cooperativos: Soluciones no simétricas según el enfoque del valor.*
Tesis doctoral. Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales. Universidad del País Vasco.