Apéndice A

Caracterización de $X'X$ y $X_u'X_u$.

A.1 Definición del problema.

Supongamos un proceso temporal $\{X_t\}$ que sigue un modelo autoregresivo de orden p , $AR(p)$.

$$X_t = a_0 + a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \dots + a_pX_{t-p} + \varepsilon_t$$

la estimación de los coeficientes supone la resolución del siguiente sistema de ecuaciones:

$$Y = X\beta + \varepsilon \tag{A.1}$$

donde

$$\beta = (a_0; a_1; a_2; \dots; a_p)'$$

$$X = \begin{matrix} & \text{0} & & & & \text{1} \\ \begin{matrix} \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \\ \vdots \\ \text{1} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{t_i \ 1} \\ x_{t+1_i \ 1} \\ x_{t+2_i \ 1} \\ \vdots \\ x_{n_i \ 1} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{t_i \ 2} \\ x_{t+1_i \ 2} \\ x_{t+2_i \ 2} \\ \vdots \\ x_{n_i \ 2} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{ccc} \\ \text{ccc} \\ \text{ccc} \\ \vdots \\ \text{ccc} \end{matrix} & \begin{matrix} x_{t_i \ p} \\ x_{t+1_i \ p} \\ x_{t+2_i \ p} \\ \vdots \\ x_{n_i \ p} \end{matrix} & \begin{matrix} \text{1} \\ \text{1} \\ \text{1} \\ \vdots \\ \text{1} \end{matrix} \end{matrix}$$

$$Y = (x_t; x_{t+1}; x_{t+2}; \text{ccc}; x_n)^0$$

$$u = (u_t; u_{t+1}; u_{t+2}; \text{ccc}; u_n)^0$$

x_t son las observaciones del proceso fX_t .

Así los valores estimados para β ; por el método de mínimos cuadrados condicionados, se obtienen como sigue

$$b = (X^0 X)^{-1} (X^0 Y)$$

A partir de la ecuación A.1 podemos obtener todas las posibles autoregresiones construidas a partir de los subconjuntos de $fX_{t_i \ 1}; X_{t_i \ 2}; \text{ccc}; X_{t_i \ p}$: El número de posibles subconjuntos es $2^p - 1$ y por tanto podemos plantearnos $2^p - 1$ autoregresiones.

De esta manera para cada régimen debemos resolver $2^p - 1$ sistemas de ecuaciones de la forma

$$Y_u = X_u \beta_u + u \tag{A.2}$$

donde el subíndice $u = 1; \text{ccc}; 2^p - 1$ nos informa del sistema de ecuaciones en que nos encontramos, es decir, nos permite identificar el subconjunto de variables regresoras que estamos considerando. Para un valor concreto u las variables regresoras son el subconjunto $X_{t_i \ p_1}; X_{t_i \ p_2}; \text{ccc}; X_{t_i \ p_k}$; donde $p_1; p_2; \text{ccc}; p_k$ están incluidos en el conjunto de los enteros $f1; 2; \text{ccc}; pg$

con $1 \leq p_1 < p_2 < \dots < p_k \leq p$: La matriz X_u ; que es una submatriz obtenida a partir de la matriz X ; se construye como sigue:

$$X_u = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & X_{t_i \ p_1} & X_{t_i \ p_2} & \dots & X_{t_i \ p_k} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{matrix} & \begin{matrix} X_{t+1_i \ p_1} & X_{t+1_i \ p_2} & \dots & X_{t+1_i \ p_k} \\ X_{t+2_i \ p_1} & X_{t+2_i \ p_2} & \dots & X_{t+2_i \ p_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n_i \ p_1} & X_{n_i \ p_2} & \dots & X_{n_i \ p_k} \end{matrix} \end{matrix}$$

Y_u es un subvector del vector Y

$$Y_u = (X_{t_i \ p_1+1}; X_{t+1_i \ p_1+1}; X_{t+2_i \ p_1+1}; \dots; X_{n_i \ p_1+1})'$$

y β_u el vector de coeficientes se puede expresar como

$$\beta_u = (a_{p_0}; a_{p_1}; a_{p_2}; \dots; a_{p_k})'$$

La solución del sistema de ecuaciones tiene ahora la forma:

$$\beta_u = (X_u' X_u)^{-1} (X_u' Y_u)$$

Conscientes de que nuestro interés se centra en obtener los β_u , vamos a construir para cada valor de u la matriz $X_u' X_u$ y el vector $X_u' Y_u$: Tanto la matriz como el vector pueden obtenerse de la matriz $X' X$ y el vector $X' Y$, ya que los primeros son, respectivamente, una submatriz y un subvector de estos últimos. La propia descomposición binaria del valor u nos permite conocer qué coeficientes de la matriz $X' X$ y el vector $X' Y$, formarán la correspondiente submatriz y subvector.

Para la resolución de los sistemas de ecuaciones de la forma A.2 es importante conocer las características de las matrices de la forma $X_u' X_u$; en primer lugar analizamos las características de la matriz $X' X$, se puede demostrar a partir de su relación con la matriz de autocovarianzas γ_p definida para el modelo autoregresivo $AR(p)$, que $X' X$ es simétrica y semidefinida positiva. Utilizando las propiedades de las matrices γ_p y $X' X$ demostraremos que $X_u' X_u$ es también

simétrica y semidefinida positiva.

A.1.1 Definiciones previas.

Definición 1 Sea A una matriz simétrica y real, diremos que es definida positiva si y sólo si, sus valores propios son positivos.

Definición 2 Sea A una matriz simétrica y real, diremos que es definida positiva si y sólo si, existe una matriz Q no singular tal que $A = QQ^T$.

Definición 3 Si A es una matriz simétrica tal que $\forall x$ vector $x \neq 0; x^T Ax > 0$, se denomina matriz definida positiva.

Definición 4 Si A es una matriz simétrica tal que $\forall x$ vector $x \neq 0; x^T Ax \geq 0$, se denomina matriz semidefinida positiva.

Propiedad: Cualquier submatriz cuya diagonal principal sea un subconjunto de la diagonal principal de una matriz definida positiva (semidefinida positiva) es definida positiva (semidefinida positiva). En particular, cualquier submatriz cuadrada principal de una matriz definida positiva (semidefinida positiva) es definida positiva (semidefinida positiva).

A.2 Resultados:

A.2.1 $X^T X$ es simétrica y semidefinida positiva.

Con objeto de simplificar la demostración y sin perder la generalidad, podemos considerar que las variables $\{X_{t_1}; X_{t_2}; \dots; X_{t_p}\}$ están centradas respecto a la media, por lo que desaparece el término independiente de la ecuación A.1, ahora

$$X = (a_1; a_2; \dots; a_p)^T$$

$$X = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & & & & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} X_{t_i 1} & X_{t_i 2} & \dots & X_{t_i p} \\ X_{t+1_i 1} & X_{t+1_i 2} & \dots & X_{t+1_i p} \\ X_{t+2_i 1} & X_{t+2_i 2} & \dots & X_{t+2_i p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ X_{n_i 1} & X_{n_i 2} & \dots & X_{n_i p} \end{matrix} \end{matrix}$$

por lo que

$$X^0 X = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & & & & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \begin{matrix} \mathbb{P} & & & & \mathbb{P} \\ (X_{i 1})^2 & & & & (X_{i 1} \otimes X_{i p}) \\ \mathbb{P} & \mathbb{P} & & & \mathbb{P} \\ (X_{i 2} \otimes X_{i 1}) & (X_{i 2})^2 & & & (X_{i 2} \otimes X_{i p}) \\ \mathbb{P} & \mathbb{P} & \mathbb{P} & & \mathbb{P} \\ (X_{i 3} \otimes X_{i 1}) & (X_{i 3} \otimes X_{i 2}) & & & (X_{i 3} \otimes X_{i p}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbb{P} & \mathbb{P} & \mathbb{P} & & \mathbb{P} \\ (X_{i p} \otimes X_{i 1}) & (X_{i p} \otimes X_{i 2}) & \dots & & (X_{i p})^2 \end{matrix} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \end{matrix}$$

si dividimos por el número de observaciones n

$$\frac{1}{n} \sum_{i=t}^n (X_{i r} \otimes X_{i s}) = \text{Cov}(X_{t_i r}; X_{t_i s}) = \mathbf{b}(t_i s; t_i r) \quad \text{donde } r, s \in \{1, 2, \dots, p\}$$

obtenemos la estimación de la función de autocovarianza muestral $\hat{b}(\cdot; \cdot)$. Cuando el proceso $\{X_t\}$ es estacionario entonces:

$$\mathbf{b}(t_i s; t_i r) = \mathbf{b}(r_i s) = \mathbf{b}(s_i r)$$

Definimos la matriz de covarianzas $\mathbf{b}_p$

$$\mathbf{b}_p = \begin{matrix} & \begin{matrix} 0 & & & & 1 \end{matrix} \\ \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} & \begin{matrix} \mathbf{b}(0) & \mathbf{b}(1) & \mathbf{b}(2) & \dots & \mathbf{b}(p-1) \\ \mathbf{b}(1) & \mathbf{b}(0) & \mathbf{b}(1) & \dots & \mathbf{b}(p-2) \\ \mathbf{b}(2) & \mathbf{b}(1) & \mathbf{b}(0) & \dots & \mathbf{b}(p-3) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{b}(p-1) & \mathbf{b}(p-2) & \mathbf{b}(p-3) & \dots & \mathbf{b}(0) \end{matrix} \end{matrix}$$

la matriz $\mathbf{p}_p$ es una matriz simétrica y semidefinida positiva¹. También es sencillo demostrar que si

$$b(0) > 0 \quad \det(\mathbf{p}_p) > 0 \quad \mathbf{p}_p \text{ es definida positiva}$$

A.2.2 $X_u^0 X_u$ es simétrica y semidefinida positiva.

Como ya hemos comentado el proceso de estimación utilizado se basa en la resolución de p sistemas de ecuaciones

$$Y_u = X_u^{-1} u + \epsilon \quad \text{donde} \quad u = \begin{bmatrix} 2^0 \\ 2^0 + 2^1 \\ \vdots \\ 2^0 + 2^1 + \dots + 2^{p-1} \end{bmatrix}$$

esto nos lleva a calcular

$$\hat{u} = (X_u^0 X_u)^{-1} (X_u^0 Y_u)$$

Ya vimos en el Capítulo 7 que el valor u nos permite conocer las variables seleccionadas $f(X_{t_1-1}; X_{t_1-1}; X_{t_1-2}; \dots; X_{t_1-k})$ dentro del conjunto $f(X_{t_1-1}; X_{t_1-2}; \dots; X_{t_1-p})$, el teorema 25 nos asegura que los retardos de las variables seleccionadas serán consecutivos.

Las matrices $X_u^0 X_u$ obtenidas al plantear los diferentes sistemas de ecuaciones son submatrices de $X^0 X$; obtenidas al eliminar determinadas últimas filas y columnas. Al igual que la matriz $X^0 X$ se relacionaba íntimamente con la matriz $\mathbf{p}_p$; cada matriz $X_u^0 X_u$ se corresponde con una matriz $\mathbf{p}_{f_u}$ cuya diagonal principal es un subconjunto de la diagonal principal de $\mathbf{p}_p$ de la siguiente forma:

Si consideramos la matriz $\mathbf{p}_p$

$$\mathbf{p}_p = \begin{array}{c} \text{0} \\ \left[\begin{array}{cccc} b(0) & b(1) & b(2) & \dots \\ b(1) & b(0) & b(1) & \dots \\ b(2) & b(1) & b(0) & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{array} \right] \begin{array}{c} b(p-1) \\ b(p-2) \\ b(p-3) \\ \vdots \\ b(0) \end{array} \\ \text{1} \end{array}$$

¹ Ver demostración en Brockwell y Davis (1997).

a partir de ella obtenemos las submatrices

$$p_{u=1} = \begin{matrix} 3 \\ b(0) \end{matrix}$$

$$p_{u=3} = \begin{matrix} 0 & & 1 \\ @ & b(0) & b(1) & A \\ & b(1) & b(0) & \end{matrix}$$

$$p_{u=7} = \begin{matrix} 0 & & & & 1 \\ @ & b(0) & b(1) & b(2) & A \\ & b(1) & b(0) & b(1) & \\ & & & & \\ & b(2) & b(1) & b(0) & \end{matrix}$$

⋮

$$p_{u=2^i} = \begin{matrix} 0 & & & & & & 1 \\ @ & b(0) & b(1) & b(2) & \dots & b(p_i - 2) & A \\ & b(1) & b(0) & b(1) & \dots & b(p_i - 3) & \\ & b(2) & b(1) & b(0) & \dots & b(p_i - 4) & \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ & b((p_i - 2)) & b((p_i - 3)) & b((p_i - 4)) & \dots & b(0) & \end{matrix}$$

Por la propiedad demostrada en A.1.1 podemos asegurar que todas las matrices p_u son semidefinidas positivas y si $b(0) > 0$ podemos asegurar que son definitivas positivas.