

Capítol 2

DESCRIPCIÓ DEL MODEL

2.1 El doll

El primer element que intervé en l'establiment d'una pertorbació en el tub de l'instrument és el doll. El doll es genera quan, en la cavitat anterior al canal, el peu en els tubs d'orgue o la boca de l'instrumentista en les flautes, s'hi produeix una sobrepressió que fa que l'aire avanci a través del canal fins a desembocar a la llum. El model de doll que es presenta a continuació inclou la descripció de la distribució de velocitats que es genera un cop l'aire ha sortit de la llum i, per tant, es pressuposa que es té coneixement de la pressió de bufada p . A partir de la pressió de bufada p , l'equació de Bernoulli permet obtenir la velocitat de bufada v_0 que el doll té quan surt de la llum:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2p}{\rho}}, \quad (2.1)$$

on $\rho = 1,223 \text{ kg m}^{-3}$ és la densitat de l'aire en condicions estàndard de pressió i temperatura – 10^5 Pa i 15 °C –. Les dades de la pressió de bufada es poden obtenir a partir de mesures experimentals a intervals regulars de temps $p(i \Delta t)$ o bé establint una funció $p(t)$ que descriu, a grans trets, les característiques de la pressió de bufada real. La implementació utilitzada permetria, fins i tot, establir un model en temps real en què els valors de la pressió s'obtinguessin a partir de la mesura de la pressió de bufada d'un instrumentista.

Per descriure les característiques d'aquest doll d'aire que surt per la llum s'utilitzen els resultats obtinguts per Bickley (1937). Bickley obté una solució simplificada de l'equació de Navier-Stokes per al cas d'un doll sortint d'una obertura de gruix infinitesimal situada a la posició $x = 0$. Aquesta descripció del doll, que és utilitzada en la modelització d'instruments de

bisell per Fletcher i Thwaites (1979), serveix de base per definir el perfil de velocitats d'un doll sortint d'una obertura de gruix $2l$. El perfil de velocitats del doll és, doncs:

$$v(y) = V \operatorname{sech}^2\left(\frac{y}{b}\right), \quad (2.2)$$

on v és la velocitat a una distància y de la línia central del doll i b és una mesura de la meitat de gruix del doll (figura 2.1).

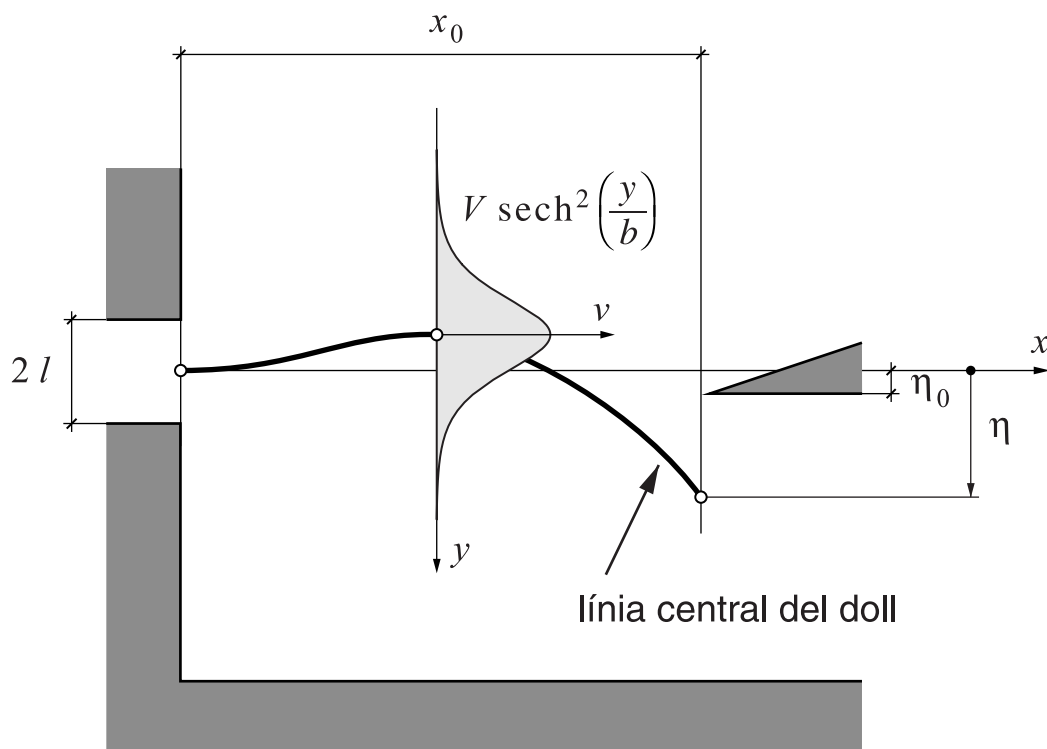


Figura 2.1: Descripció del perfil de velocitats del doll

La velocitat de la línia central del doll V depèn de la velocitat de bufada v_0 , de la distància x des de la llum i del gruix d'aquesta $2l$. Aquesta dependència s'obté a partir de la descripció feta per Fletcher i Thwaites (1979) en el cas d'una llum de gruix infinitesimal. En el cas considerat la velocitat de la línia central del doll és

$$V = v_0 \left[\frac{\delta}{x + \delta} \right]^{1/3}, \quad (2.3)$$

amb

$$\delta = 0,375 v_0 l^2 / \nu, \quad (2.4)$$

on $\nu \approx 1,5 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$ és la viscositat cinemàtica de l'aire. El coeficient numèric de l'equació 2.4 ha estat obtingut a partir de la formulació de Fletcher i Thwaites (1979).

Pel que fa a l'expressió de b , que dóna idea de la meitat de gruix del doll, es pot obtenir a partir de la conservació de la quantitat de moviment total del doll per unitat de longitud, si es pressuposa que no hi ha gradient de pressió al llarg del doll. Del valor de la quantitat de moviment a la sortida del doll s'obté l'expressió següent:

$$\rho \int_{-\infty}^{+\infty} v^2 dy = \rho V^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \text{sech}^4\left(\frac{y}{b}\right) dy = \rho V^2 \frac{4}{3} b. \quad (2.5)$$

L'equació (2.5) condueix a

$$b = \frac{3}{2} l \left(\frac{v_0}{V}\right)^2. \quad (2.6)$$

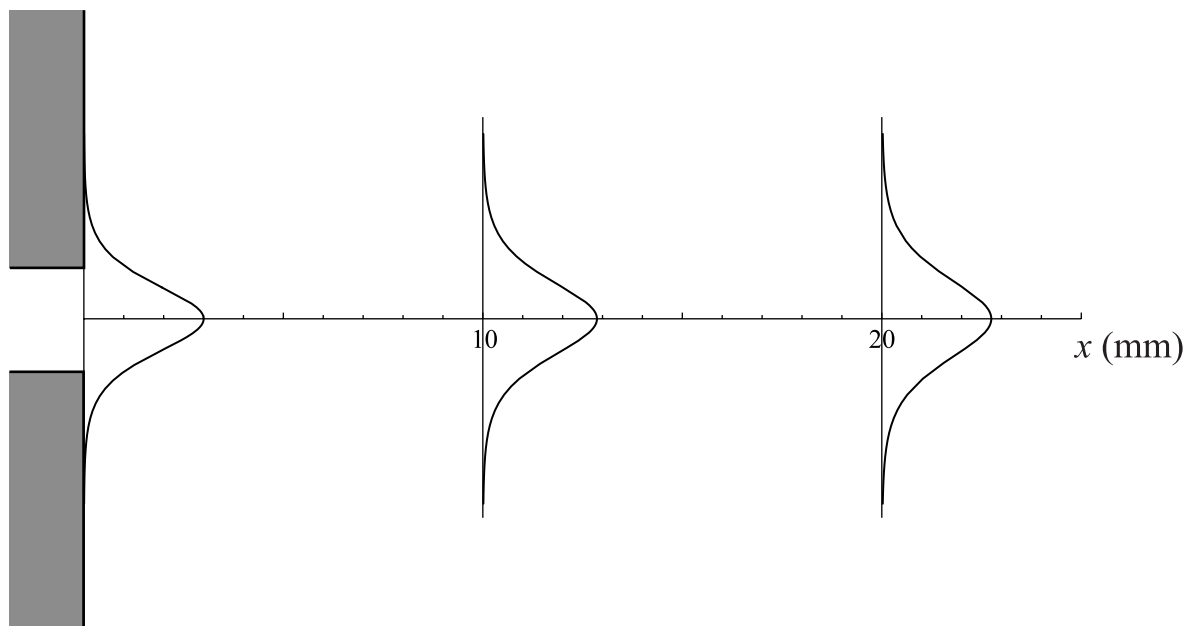


Figura 2.2: Perfil de velocitats per a $x = 0 \text{ mm}$, $x = 10 \text{ mm}$ i $x = 20 \text{ mm}$

La figura 2.2 mostra el perfil de velocitats d'un doll que surt d'una obertura de gruix 1 mm a diferents distàncies de la sortida. A la sortida de la llum, la velocitat de la línia central del doll és de 10 m/s, mentre que a una distància de 20 mm la velocitat de la línia central ha disminuït menys d'un 9%. Així es posa de manifest que, per a longituds típiques de la

finestra d'un instrument de bisell (en el cas d'una flauta de bec de l'ordre de 5 mm), la disminució de la velocitat del punt central del doll és gairebé negligible. A l'hora d'implementar un model senzill, i sempre tenint en compte les dimensions reals de l'instrument que s'ha de modelitzar, es podrà obviar aquesta variació de la velocitat de la línia central i prendre:

$$V = v_0 \quad \text{i} \quad b = \frac{3}{2} l. \quad (2.7)$$

Aquesta simplificació equival a suposar que el doll es mou en bloc, i que les variacions de la velocitat a la sortida de la llum afecten instantàniament tot el doll. Així, el que caldrà estudiar és el temps que tarda el doll en arribar per primer cop al bisell. Un cop hi hagi arribat, les variacions de la velocitat de bufada afectaran instantàniament el perfil de velocitats en el bisell. Aquesta simplificació serà més raonable com més petita sigui la velocitat del doll en comparació amb la velocitat del so. En una flauta de bec contralt els valors típics de la velocitat de sortida del doll són d'entre 10 i 40 m/s, mentre que la velocitat del so en l'aire és d'aproximadament 340 m/s.

El temps que tarda el doll a arribar per primer cop al bisell o llavi superior es pot obtenir integrant l'equació de la velocitat. Com que es tracta d'un model unidimensional de l'instrument, es considera que el doll ha arribat al bisell quan hi ha arribat la seva línia central, sense tenir en compte la deflexió que experimenta el doll en el seu recorregut entre la llum i el bisell. Per tant, només és qüestió d'integrar, tenint en compte que $V = \dot{x}$, l'equació 2.3:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0 \left[\frac{\delta}{x + \delta} \right]^{1/3}, \quad (2.8)$$

$$\int_0^{x_0} \left[\frac{x + \delta}{\delta} \right]^{1/3} dx = \int_0^{\tau_0'} v_0 dt. \quad (2.9)$$

Si s'empra la simplificació expressada per l'equació 2.7, la integració resulta més senzilla:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v_0, \quad (2.10)$$

$$\int_0^{x_0} dx = \int_0^{\tau_0} v_0 dt. \quad (2.11)$$

Per resoldre les integrals 2.9 i 2.11, cal conèixer el valor de v_0 funció del temps. En el cas que la velocitat del doll v_0 sigui constant, els valors que s'obtenen són:

$$\tau'_0 = \frac{3}{4} \frac{\delta}{v_0} \left[\left(\frac{x_0}{\delta} + 1 \right)^{4/3} - 1 \right], \quad (2.12)$$

$$\tau_0 = \frac{x_0}{v_0}, \quad (2.13)$$

on x_0 és la longitud de la finestra.

Per a un doll amb velocitat $v_0 = 10$ m/s constant, que surt d'una llum de gruix $2l = 1$ mm, i per a una longitud de finestra de $x_0 = 5$ mm, la diferència $\tau'_0 - \tau_0$ és inferior a l'1 % del valor de τ_0 . Aquest fet corrobora la validesa de la simplificació representada per l'equació 2.7 per a les característiques típiques d'una flauta de bec contralt.

La figura 2.3 mostra el procediment que cal seguir per obtenir la velocitat del doll al bisell en el cas d'una velocitat de bufada qualsevol i fent ús de la simplificació expressada per l'equació 2.7.

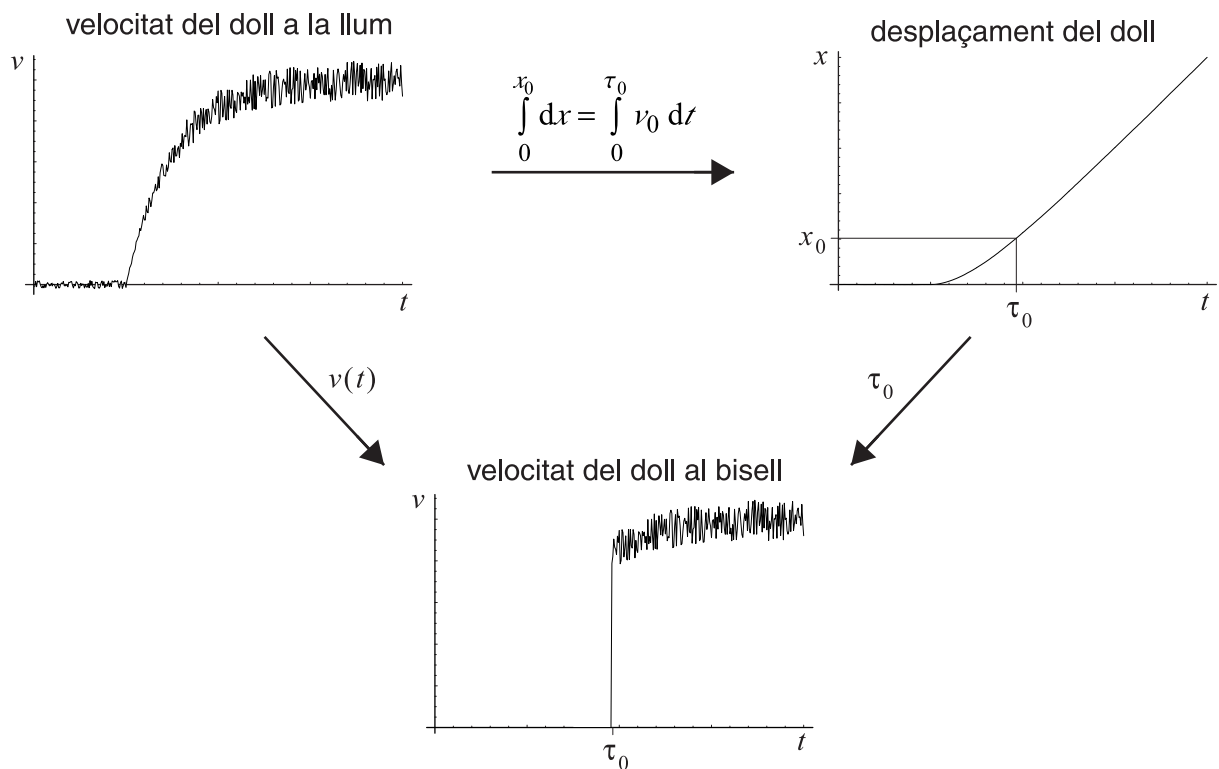


Figura 2.3: Esquema per obtenir la velocitat del doll al bisell

A més del procediment descrit, que pressuposa el coneixement dels valors numèrics de la velocitat de bufada, és útil disposar d'un model totalment analític. Com que en alguns instruments de bisell, com és el cas dels tubs d'orgue, l'inici de la bufada s'activa

mecànicament, mentre que en d'altres, com és el cas de les flutes, s'activa per l'acció de bufar desenvolupada per l'instrumentista, cal establir dos models analítics (Verge, 1995).

Per al primer model, d'activació ràpida, és raonable prendre la velocitat de bufada constant just a partir del moment en què s'inicia:

$$V = \begin{cases} v_0 & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

Seguint l'esquema de la figura 2.3 s'obté l'expressió següent per a la velocitat de la línia central del doll al bisell.

$$V = \begin{cases} v_0 & t \geq \tau_0 \\ 0 & t < \tau_0 \end{cases} \quad \text{amb} \quad \tau_0 = \frac{x_0}{v_0}. \quad (2.15)$$

Pel que fa al segon model, d'activació lenta, és raonable prendre una velocitat de bufada variable tal com la que es mostra a la figura 2.4.

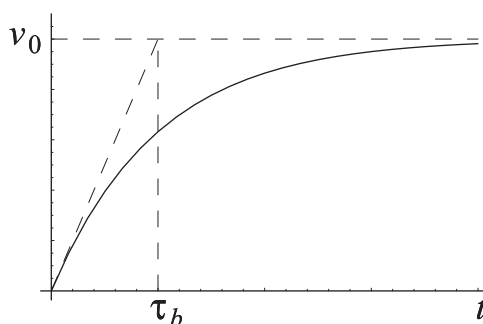


Figura 2.4: Model de velocitat de bufada variable

$$V = \begin{cases} v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_b}\right) \right) & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}, \quad (2.16)$$

on τ_b és un paràmetre del model que permet variar el ritme de creixement de la velocitat. La integració expressada en l'equació 2.11 condueix a l'equació següent:

$$x_0 = v_0 \left(\tau_0 - \tau_b + \tau_b \exp\left(-\frac{\tau_0}{\tau_b}\right) \right). \quad (2.17)$$

Així, utilitzant l'esquema de la figura 2.3, el valor de la velocitat de la línia central del doll al bisell adopta l'expressió:

$$V = \begin{cases} v_0 \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_b}\right) \right) & t \geq \tau_0 \\ 0 & t < \tau_0 \end{cases}, \quad (2.18)$$

on τ_0 és el valor que es pot obtenir en resoldre numèricament l'equació 2.17.

2.2 Deflexió del doll

Un cop descrit el perfil de velocitats del doll al bisell, cal calcular la deflexió que sofreix el doll en el seu pas a través de la finestra, per tenir la descripció completa del doll al bisell. Es considera que el doll és desplaçat transversalment pel camp acústic del tub. Com que el model que es vol establir és un model unidimensional, s'han de fer algunes aproximacions relatives al camp acústic. Es suposa que aquest és perpendicular a la direcció de la velocitat del doll i uniforme al llarg de tota la finestra.

Una interacció de tipus viscosos entre el doll i el camp acústic permet establir un model senzill per a la deflexió de la línia central del doll η :

$$\ddot{\eta} = \frac{1}{\tau_d} (v_A - \dot{\eta}), \quad (2.19)$$

on v_A és la velocitat del camp acústic a l'indret de la boca, definida amb signe positiu cap dins del tub, i τ_d és una constant de temps associada a la interacció viscosa. Aquest model d'interacció fa que, a la sortida de la llum ($x = 0$), el doll sigui accelerat perpendicularment però no desplaçat.

La solució de l'equació 2.19 pot expressar-se com una integral de convolució

$$\eta = D * v_A, \quad (2.20)$$

amb la funció nucli representada a la figura 2.5,

$$D = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_d}\right) \right) & 0 \leq t \leq \tau_0 \\ 0 & t > \tau_0 \end{cases}, \quad (2.21)$$

on τ_0 és el temps que tarda el doll a recórrer la finestra, que s'ha obtingut en l'apartat anterior.

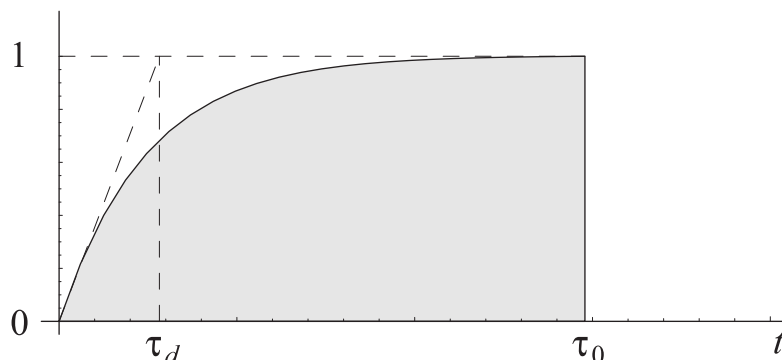


Figura 2.5: Funció nucli $D(t)$ utilitzada en el càlcul de la deflexió del doll

La solució proposada per Fletcher i Thwaites (1979), anomenada *aproximació d'alt guany*, correspon al cas $\tau_d = 0$. En aquesta solució la línia central del doll és vinculada al camp acústic just en sortir de la llum. Això fa que la deflexió del doll pugui experimentar un salt brusca, poc realista, i que el desplaçament del camp acústic i la deflexió del doll coincideixin en tot moment.

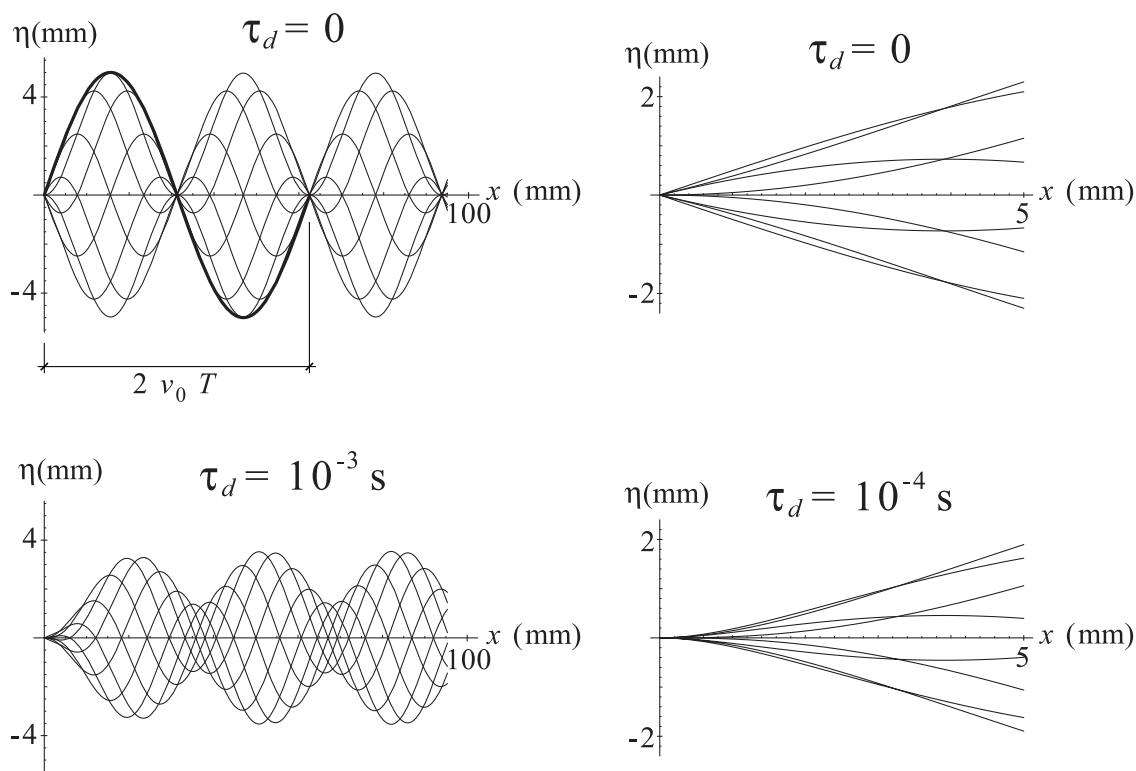


Figura 2.6: Deflexió del doll per a diferents valors de τ_d

La deflexió del doll depèn del paràmetre τ_d i del camp acústic a l'interior del tub. Per observar la incidència que el paràmetre τ_d té en el model, sense resoldre totalment el sistema, cal fer una suposició sobre el camp acústic.

La figura 2.6 presenta diferents posicions que ocupa la línia central del doll per a $\tau_d = 0$, $\tau_d = 10^{-3}$ s i $\tau_d = 10^{-4}$ s. S'ha considerat un camp acústic sinusoidal a l'interior del tub de període $T = 3,125 \cdot 10^{-3}$ s i amplitud $A = 5$ mm/s,

$$v_A(t) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T}\right), \quad (2.22)$$

i una velocitat de la línia central del doll constant $v_0 = 10$ m/s.

Per a $\tau_d = 0$, tal com es pot observar en la figura 2.6, l'envolupant de les diferents posicions que ocupa la línia central és sinusoidal de longitud d'ona $2 v_0 T$. Aquest fet ha estat la causa de nombroses confusions en els models freqüencials dels instruments de bisell.

2.3 Interacció doll-columna d'aire

Un cop descrit el perfil de velocitats del doll i la deflexió de la seva línia central quan arriba al bisell, només la fracció de doll que queda per sota el bisell és introduïda dins la columna d'aire de l'instrument. Per modelitzar la forma de la paret interior que queda just sota el bisell, es defineix un angle α representatiu de la deflexió que experimenta el doll en entrar al tub (figura 2.7).

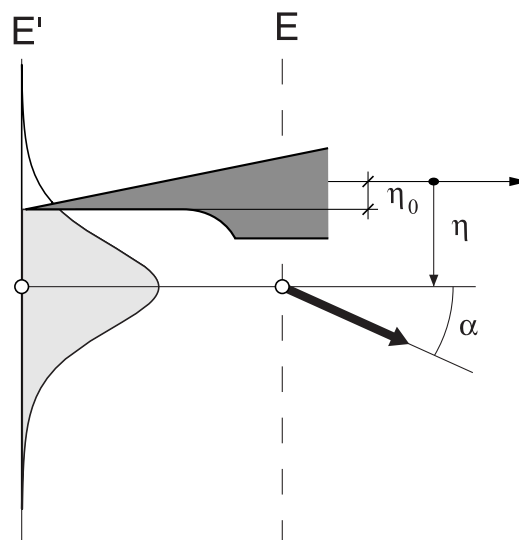


Figura 2.7: Interacció doll-columna

La quantitat d'aire introduït dins el tub pot modelitzar-se com una font de volum u i una font de quantitat de moviment m . Aquestes fonts, de volum i de quantitat de moviment, poden obtenir-se per integració a partir del perfil de velocitats del doll (2.2),

$$\begin{aligned} u &= w \int_{-(\eta-\eta_0)}^{\infty} v(y) dy = w V \int_{-(\eta-\eta_0)}^{\infty} \operatorname{sech}^2\left(\frac{y}{b}\right) dy = \\ &= w V b \left[1 + \tanh\left(\frac{\eta-\eta_0}{b}\right) \right] \equiv w V b 2 \varphi_u, \end{aligned} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} m &= \rho w \cos \alpha \int_{-(\eta-\eta_0)}^{\infty} v^2(y) dy = \rho w \cos \alpha V^2 \int_{-(\eta-\eta_0)}^{\infty} \operatorname{sech}^4\left(\frac{y}{b}\right) dy = \\ &= \rho w \cos \alpha V^2 \frac{2}{3} b \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta-\eta_0}{b}\right) \right) \tanh\left(\frac{\eta-\eta_0}{b}\right) \right] \\ &\equiv \rho w \cos \alpha V^2 \frac{2}{3} b 2 \varphi_m, \end{aligned} \quad (2.24)$$

on w és l'amplada de la finestra. φ_u i φ_m són funcions el valor de les quals està sempre entre 0 i 1 (figura 2.8),

$$\varphi_u = \frac{1}{2} \left[1 + \tanh\left(\frac{\eta-\eta_0}{b}\right) \right], \quad (2.25)$$

$$\varphi_m = \frac{1}{2} \left[1 + \left(1 + \frac{1}{2} \operatorname{sech}^2\left(\frac{\eta-\eta_0}{b}\right) \right) \tanh\left(\frac{\eta-\eta_0}{b}\right) \right]. \quad (2.26)$$

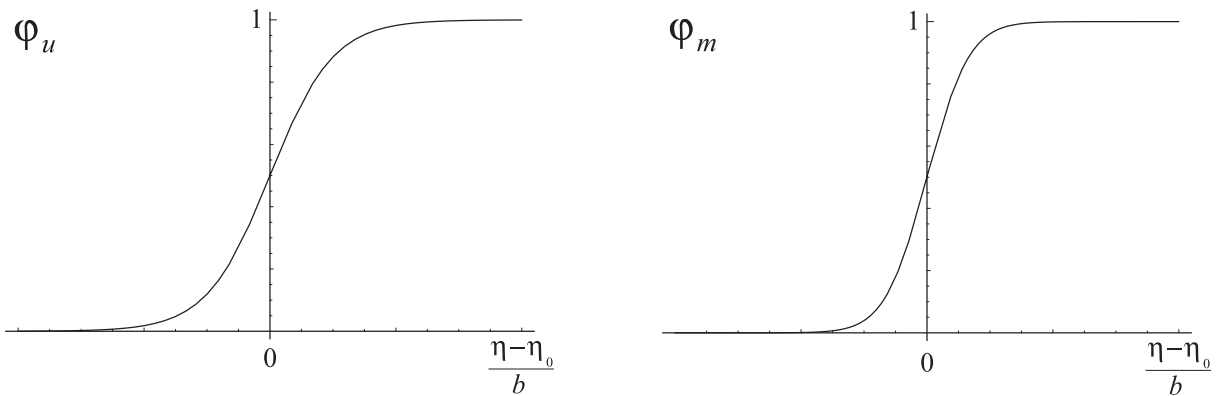


Figura 2.8: Funcions φ_u i φ_m

El tub de l'instrument es modelitza mitjançant una parella d'ones propagatives de velocitat, una que es propaga des de la boca cap al final de l'instrument i l'altra, en sentit contrari. Així, aquestes fonts, de volum i de quantitat de moviment, introdueixen un increment de velocitat en cadascuna de les dues ones propagatives. Si es suposa que la introducció d'aquests increments es produeix en una única secció cilíndrica d'àrea S (la secció E de la figura 2.7) i que l'aire de dins del tub està en repòs, l'increment per a l'ona propagativa que viatja des de la boca cap al final de l'instrument és:

$$\Delta v_- = \frac{1}{2} \frac{u}{S} + \frac{1}{2} \frac{m}{S Z_0} = V \frac{wb}{S} \left[\varphi_u + \frac{2}{3} \frac{V}{c} \cos \alpha \varphi_m \right], \quad (2.27)$$

on $Z_0 = \rho c$ és la impedància característica i c és la velocitat del so en l'aire. L'increment de velocitat que experimenta l'ona propagativa que viatja des del final de l'instrument cap a la boca és:

$$\Delta v_+ = -\frac{1}{2} \frac{u}{S} + \frac{1}{2} \frac{m}{S Z_0} = V \frac{wb}{S} \left[-\varphi_u + \frac{2}{3} \frac{V}{c} \cos \alpha \varphi_m \right]. \quad (2.28)$$

El primer terme de les equacions 2.27 i 2.28 correspon a l'aportació de la font de volum i el segon és l'aportació de la font de quantitat de moviment. Si es té en compte la forma de les funcions φ_u i φ_m (figura 2.8), el valor de c i que, per als instruments de bisell tipus flauta, els valors típics de V són d'entre 10 m/s i 40 m/s, es posa de manifest que el segon terme de les equacions 2.27 i 2.28 és negligible comparat amb el primer. Aquest fet és coherent amb els resultats de Coltman (1976, 1981), que conclou que la injecció de volum és predominant respecte a la transferència de quantitat de moviment.

Una millora a fer en la descripció de la interacció doll-columna anterior és el fet de considerar la introducció dels increments de velocitat, produïts per les fonts de volum i de quantitat de moviment, no en una única secció sinó de manera estesa al llarg d'una regió. Matemàticament, això es pot formular mitjançant una convolució de les equacions 2.27 i 2.28 amb una funció nucli d'àrea unitària que doni idea d'aquest escampament. Els nous increments de velocitat així obtinguts són:

$$\begin{aligned} \Delta v'_- &= E * \Delta v_- \\ \Delta v'_+ &= E * \Delta v_+ \end{aligned} \quad (2.29)$$

Una funció que compleix la condició d'integral unitària, sigui quin sigui el valor dels paràmetres τ_e i per a $0 \leq \lambda \leq 1$, és la que es presenta a la figura 2.9:

$$E(t) = \frac{4(t - \lambda \tau_e)^2}{\tau_e^3} \exp\left(-\frac{2(t - \lambda \tau_e)}{\tau_e}\right) \varepsilon(t - \lambda \tau_e), \quad (2.30)$$

on τ_e és el temps que tarda el doll a recórrer la distància x_e , que és la distància del bisell fins a la secció de màxima interacció (secció E de la figura 2.9). Per tant, τ_e serà, si s'utilitza la simplificació expressada per l'equació 2.7, el valor obtingut a partir de la integració següent:

$$x_e = \int_0^{\tau_e} v_0 dt. \quad (2.31)$$

L'equació 2.30, a més d'incorporar l'efecte de l'escampament del procés de barreja, incorpora un retard de valor $\lambda \tau_e$ que fa que els nous increments de velocitat de les ones propagatives s'incorporin directament a la secció E'.

Un avantatge que pot presentar l'elecció d'una funció nucli com la de l'equació 2.30 és el fet que permet utilitzar un mètode de convolució recurrent a l'hora d'obtenir els nous valors dels increments de velocitat de les ones propagatives.

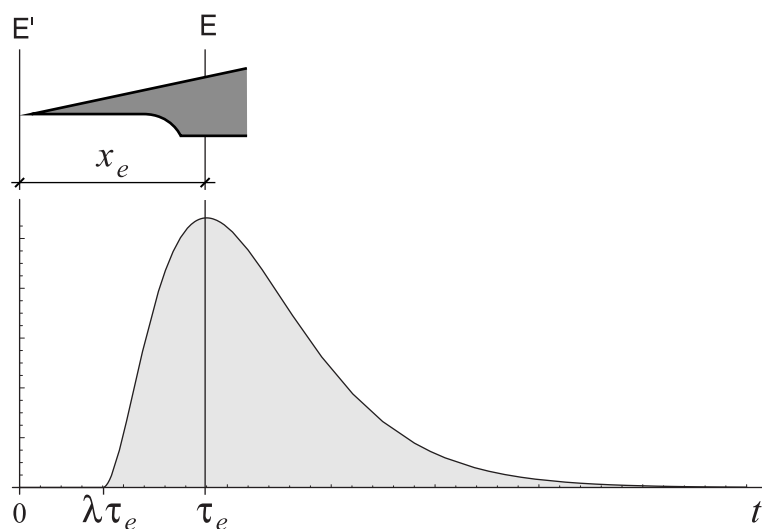


Figura 2.9: Funció nucli E(t)

Una altra funció que compleix la condició d'integral unitària és $E(t) = \delta(t - \tau_e)$, i correspon, òbviament, al cas presentat inicialment d'introducció dels increments de velocitat concentrada en una única secció.

2.4 Plantejament del sistema dinàmic

El model de bisell presentat anteriorment cal acoblar-lo amb la resta de l'instrument. La columna d'aire es representa com un tub axisimètric compost de diversos trams cilíndrics i cònics, tal com mostra la figura 2.10. La columna principal BB' es descriu mitjançant la funció de reflexió global R_-^B . L'aire que queda per sobre del bisell i proper a aquest és representat per la columna AA'. La funció de reflexió global R_+^A descriu matemàticament aquesta columna. I finalment, la regió d'interacció doll-columna és representada per la columna AB, que es considera de secció cilíndrica. Per descriure matemàticament aquest tram AB s'utilitzen les funcions de transmissió T_+ , per passar de B a A, i T_- , per passar d'A a B. El càlcul d'aquestes funcions de reflexió i de transmissió que modelitzen l'element lineal de l'instrument serà tractat en el proper capítol. Per als trams senzills, com són l'AA' i l'AB, pot obtenir-se una solució analítica, mentre que per als trams més complexos, com el BB', serà més raonable utilitzar una formulació numèrica de la funció de reflexió.

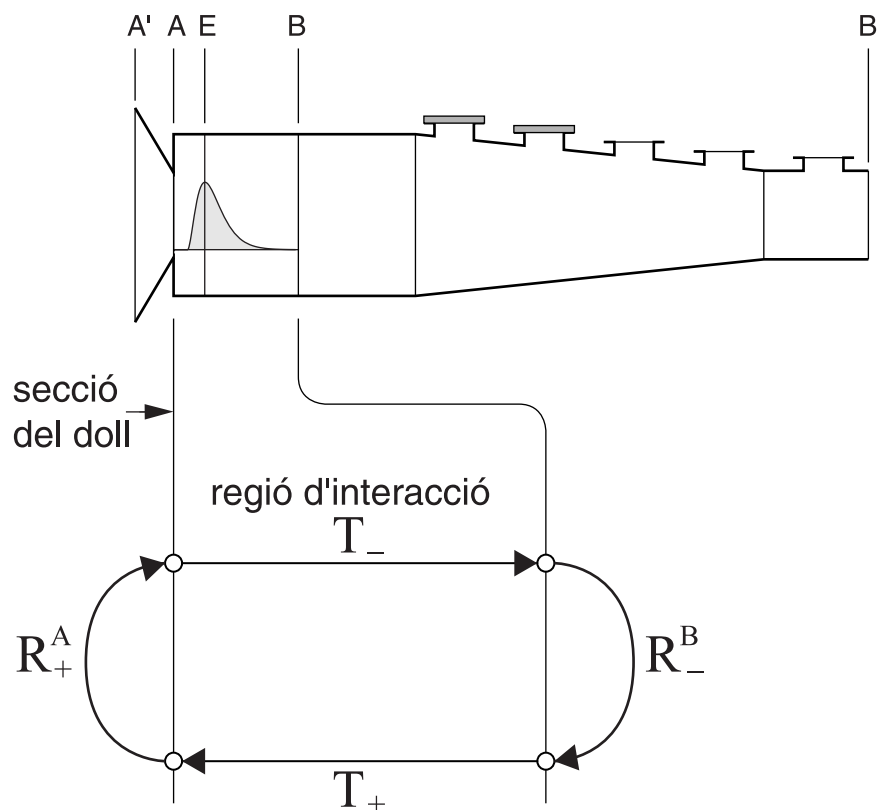


Figura 2.10: Sistema dinàmic: columna d'aire. Funcions de reflexió i transmissió

El procés s'inicia a partir de l'instant $t = 0$ en què comença a sortir el doll de la llum. Les ones propagatives de velocitat que circulen per dins el tub s'inicialitzen a zero. Es calcula

el temps que tarda el doll a arribar per primer cop al bisell seguint l'esquema de la figura 2.3. La suma dels valors de les ones propagatives a la secció A dóna el valor de la velocitat de l'ona de dins el tub a la boca. Aquest valor s'utilitza per obtenir la deflexió del doll al bisell realitzant la convolució expressada per l'equació 2.20. El valor de la velocitat del doll al bisell i la deflexió del doll, també al bisell, permeten calcular les fonts de volum i de quantitat de moviment (equacions 2.23, 2.24, 2.25 i 2.26) i, amb aquestes, els increments de les ones propagatives de velocitat (equacions 2.27 i 2.28). Finalment, per modelitzar de manera estesa, i, per tant, més realista, la interacció del doll amb la columna d'aire es realitza la convolució expressada per l'equació 2.29. La figura 2.11 mostra un esquema de blocs del procediment de càlcul descrit.

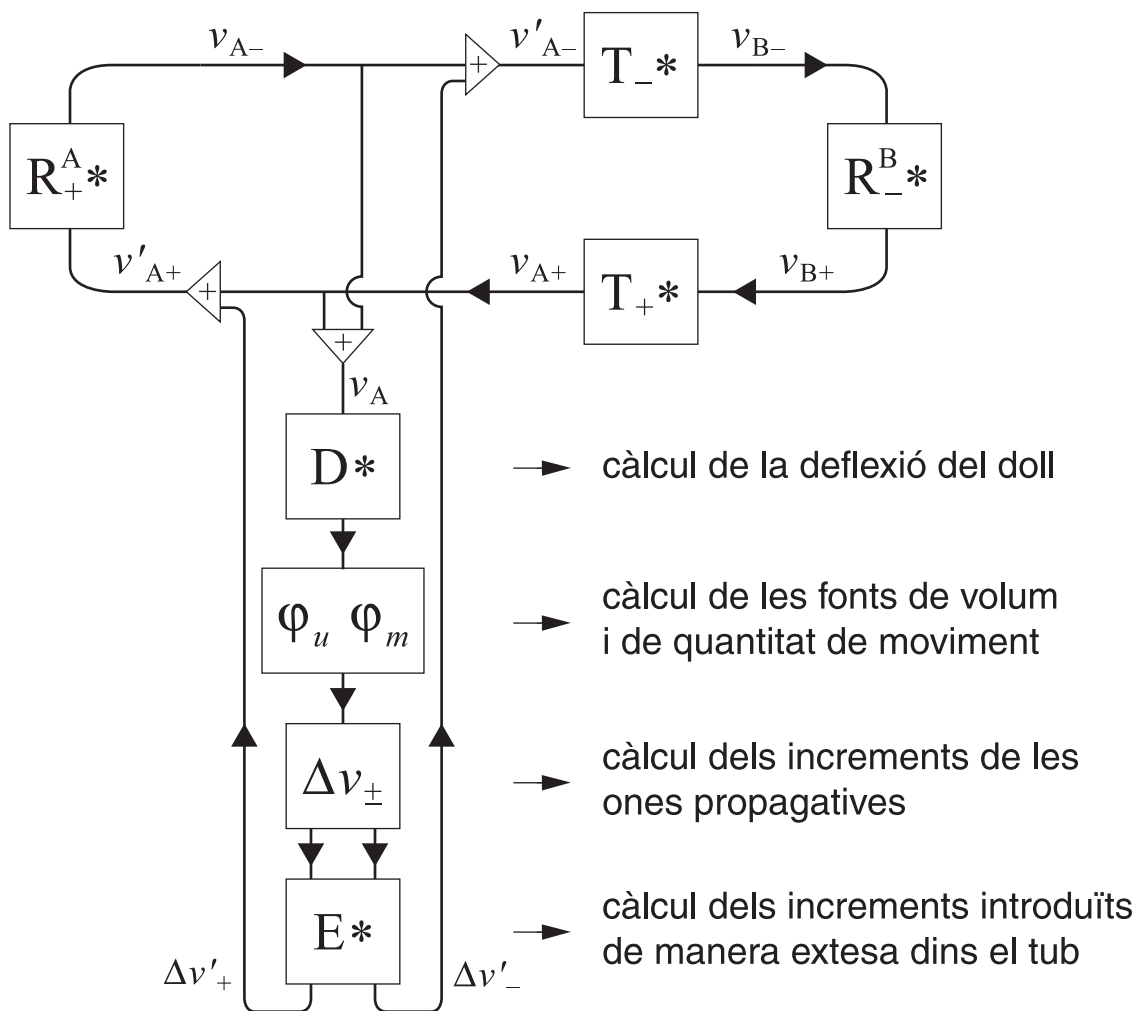


Figura 2.11: Esquema de blocs del procediment de càlcul