

Capítulo 5

Ecuación Constitutiva para Escolleras que Incluye el Efecto de la Succión

Además de realizar ensayos de laboratorio, para lograr un total entendimiento del comportamiento de escolleras es necesario plantear un modelo constitutivo. En el presente capítulo se hace un análisis de los datos obtenidos en el laboratorio, tratando de discernir características básicas de su comportamiento, para después proponer relaciones teóricas que ayudan a plantear un modelo elasto-plástico para escolleras. Los ensayos de compresión triaxial presentados en el capítulo anterior, el modelo constitutivo para compresibilidad de escolleras de Oldecop y Alonso (2001), y el conocimiento del comportamiento de arenas a altas tensiones, son la base del modelo constitutivo presentado en este capítulo.

5.1 Análisis

El modelo constitutivo propuesto en éste capítulo se plantea dentro de la teoría de la elasto-plasticidad. En tal formulación las deformaciones totales se dividen en las elásticas más las plásticas, $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$. Con base en lo explicado en el capítulo 2, podemos afirmar que en el caso de suelos granulares, los mecanismos de corte y de compresión isótropa son procesos de deformación que involucran mecanismos diferentes. Así que, en el presente desarrollo se considera que cada mecanismo tiene una contribución a las deformaciones plásticas. Las deformaciones plásticas totales son, por ende, la suma de las deformaciones plásticas de corte y las plásticas isótropas, $\varepsilon^p = \varepsilon_p^p + \varepsilon_q^p$. Como el modelo de Oldecop y Alonso (2001)

describe adecuadamente el comportamiento de las escolleras en estados de tensión edométricos, se aplica para describir la parte isótropa en la formulación presentada en este capítulo. Por tanto en el presente apartado, se limita el análisis, a establecer dependencias claras entre las tensiones de corte y las deformaciones de corte plásticas, que ayuden al desarrollo de un modelo elasto-plástico.

Para comenzar el análisis recordemos del capítulo 2, que el comportamiento de los materiales granulares depende de la densidad y de la tensión a la que se encuentran. Los modelos más avanzados que se han propuesto para arenas son tenso-denso dependientes. Para incluir esta mejora se valen de un parámetro de estado, valor que representa la condición del material con respecto a la línea de estado crítico. En el análisis de los resultados obtenidos en este apartado se utiliza un parámetro de estado, ya que el estado crítico para el material ensayado se puede aproximar bastante bien con los datos obtenidos de los ensayos triaxiales. Además, el estado crítico que se obtiene con estos datos tiene implícita la rotura de partículas del material, que a la vez depende de la succión.

Los estudios experimentales en arenas (Poorooshab *et. al.* 1996 y 1967), muestran que existe una relación directa entre el cambio de la relación de tensiones $\eta = q/p$ y las deformaciones de corte plásticas, ε_q^p . Los ensayos triaxiales en escolleras del presente trabajo también muestran ésta tendencia (ver **Figura 5.14** y 5.15). Con base en ésta dependencia, se han propuesto varios modelos constitutivos de arenas que utilizan parámetros de endurecimiento dependientes de las deformaciones plásticas de corte (Vermer 1978, Wood *et al.* 1994, Wan y Guo 1998).

Para el análisis de los resultados obtenidos se utiliza la ecuación de Wood *et. al.* (1994), ecuación (2.18), presentada en el capítulo 2. Se prefiere por su sencillez y capacidad de reproducir el comportamiento tenso-denso dependientes de las arenas. Este tipo de modelos sólo se han implementado en arenas, y pueden ser aplicables a materiales que presenten rotura de partículas, cuantificando la influencia de esta en los parámetros. Las curvas de resistencia al corte, obtenidas en los ensayos presentados en el capítulo anterior, tienen una característica especial, que a medida que la presión de confinamiento crece, la rigidez inicial del material y su comportamiento subsiguiente se ven fuertemente afectados

por la rotura de partículas (ver figuras 2.8, 4.11 y 4.13). Para analizar este factor de una manera cuantitativa, se utiliza la ecuación (2.18) mencionada, transcribiéndola:

$$\frac{\eta_s}{rM_{cr}} = \frac{\varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)} \quad (2.15 \text{ bis}) \quad (5.1)$$

La ecuación (5.1) representa una curva hiperbólica. El parámetro $r=1-k\psi_e$ normaliza la dilatancia que se presenta en los materiales densos. El cociente $\eta_s = q/p$ lleva las curvas de resistencia al corte con diferentes presiones de confinamiento a una misma escala donde se pueden comparar directamente. El valor de b es el inverso de la pendiente inicial de la curva que relación de tensiones $\eta_s=q/p$ normalizadas por rM_{cr} en función de la deformación de corte. Se esperan cambios en los parámetros debido a la presencia de la rotura de partículas y poder cuantificar su efecto mediante estas variaciones.

Si reescribimos la (5.1) como:

$$b + \varepsilon_q^p = \frac{rM_{cr}\varepsilon_q^p}{\eta_s} \quad (5.2)$$

se obtiene la ecuación de una recta. El término de la derecha tiene una variación lineal y está en función de las deformaciones plásticas de corte. En el término de la izquierda de la ecuación (5.2), b representa el valor de la ordenada cuando $\varepsilon_q^p = 0$, y como las deformaciones plásticas de corte no tienen ninguna constante que las multiplique, la pendiente de la recta es igual a 1. Los datos de los ensayos efectuados con deformación desviadora y HR constante se procesaron en una hoja de cálculo para obtener cada uno de los términos de la ecuación (5.2), enseguida se hizo una regresión lineal para obtener el parámetro b . A la vez, con la herramienta “solver” de la hoja de cálculo se obtuvo la mejor estimación de M_{cr} , aproximando lo más posible coeficiente de correlación a 1. Con el procedimiento anterior se obtuvieron los valores de b y M_{cr} , que se analizan en los párrafos siguientes.

Para poder calcular las deformaciones plásticas se obtuvo primero los módulos elásticos volumétrico y de corte, con las siguientes ecuaciones:

$$K = \frac{\nu p}{\kappa}; \quad G = \frac{3(1-2\nu)K}{2(1+\nu)} \quad (5.3)$$

donde ν y κ , son el relación de poisson y la pendiente de descarga-recarga del ensayo isótropo. El relación de poisson que se empleo, se obtuvo sacando el promedio de los obtenidos de la etapa de descarga-recarga de los ensayos triaxiales. Obteniendo las deformaciones elásticas de corte, con el módulo G , se pudieron restar de las totales para obtener las deformaciones plásticas de corte utilizadas en la ecuación (5.2).

Los valores de b , obtenidos de los datos correspondientes a los ensayos con deformación controlada y HR constante, se grafican en función de σ_3 en la **Figura 5.1**. Lo más notorio en esos resultados, es que los valores de b para los ensayos saturados son más grandes que para los ensayos con HR 36%. Además, b aumenta en la medida que σ_3 es incrementado. La evolución de b refleja cómo el comportamiento del material se ve afectado por la rotura de partículas; el inverso de b es menor cuando el material se encuentra en estado saturado y cuando σ_3 se incrementa. Los valores de b obtenidos para otras HR, se muestra también en la **Figura 5.1**. Tienen en general la tendencia a estar entre los valores límites manejados, con excepción del ensayo D3(92), que tiene un valor mayor que el ensayo S3, y el punto del ensayo D5(52) que esta ligeramente arriba del que corresponde al ensayo D5(75). En la Figura 5.2 se presenta la variación de b en función de la succión total, para los ensayos con presión de confinamiento de 0.5 MPa. Al examinar dicho grafico se deduce que el valor de b tiende a disminuir rápidamente hasta succiones totales de 50 MPa; para succiones mayores no hay una tendencia clara. La dispersión de los valores b no es muy grande. Se concluye que, en general este parámetro representa adecuadamente la variación de la pendiente inicial de la relación tensión desviadora–deformación de corte plástica, producida por la rotura de partículas.

Los resultados no se ven aparentemente afectados, por las pequeñas variaciones de la densidad inicial de la probeta. Los ensayos con HR de 100% tienen densidades iniciales muy parecidas por lo que se descarta alguna influencia en el valor de b . En los ensayos con HR de 36% existe una variación mayor en la densidad inicial que en los ensayos con HR de 100%, sin embargo no existe correspondencia con las variaciones de b . En los resultados de los ensayos con HR intermedia existe, como se comento anteriormente, una alteración en la tendencia del incremento de b (entre los ensayos D5(75) y D5(52)), este cambio no es imputable tampoco a la mínima variación de densidad inicial existente entre

ellos. Con los datos obtenidos no se puede establecer dependencia de b con la densidad inicial.

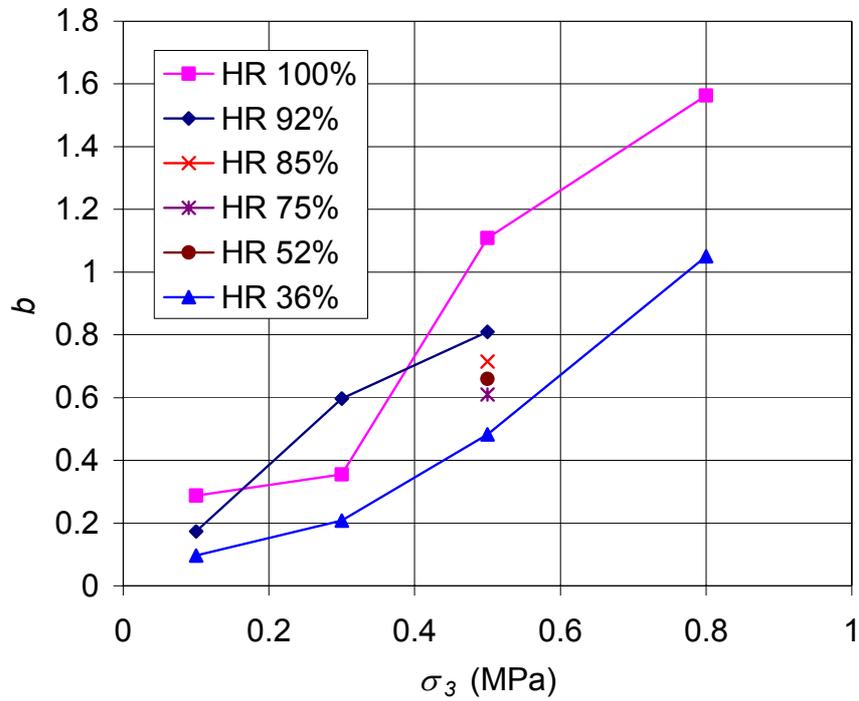


Figura 5.1 Variación del parámetro b para los ensayos con control de deformación.

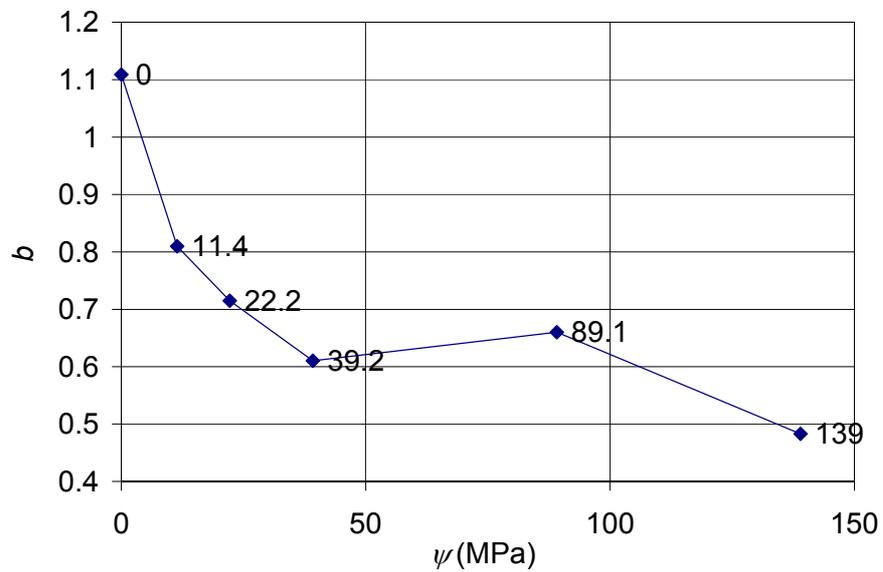


Figura 5.2 Variación de b en función de la succión total. El número sobre el punto indica la succión impuesta en MPa.

En el ajuste mencionado también se observó que M_{cr} no es constante. Los valores obtenidos se grafican en función del logaritmo de σ_3 en la **Figura 5.3**. Otra vez existe una diferencia marcada entre los ensayos con HR de 36% y 100%. Los valores intermedios no están uniformemente distribuidos, tienden a estar más cerca de la curva correspondiente a HR = 36%. El parámetro M_{cr} tiende a disminuir con el incremento de la presión de confinamiento y con el aumento de la HR. Esta tendencia se explica en base al fenómeno de la rotura de partículas.

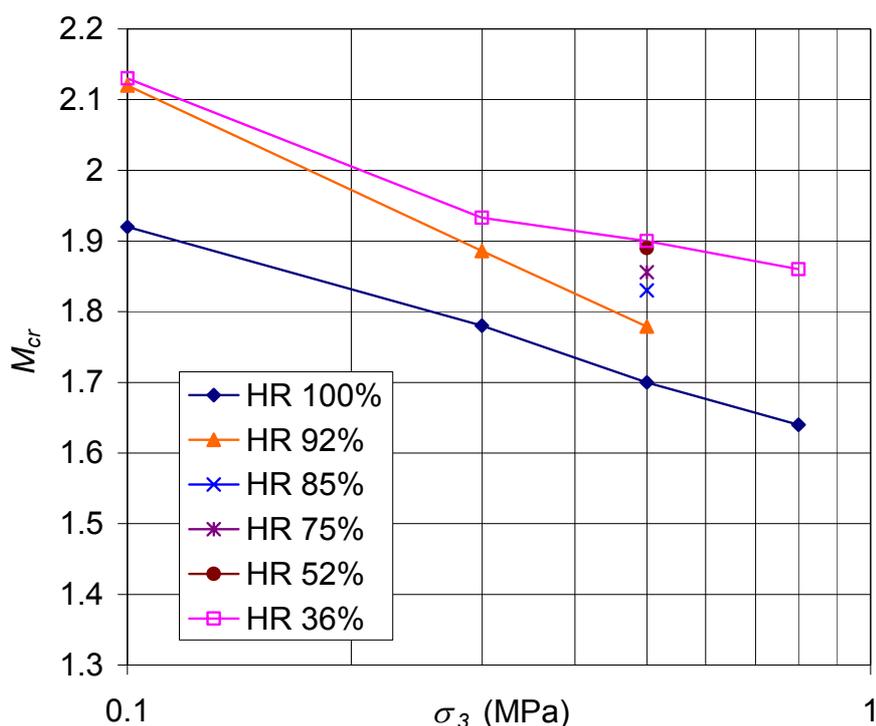


Figura 5.3 Variación de M_{cr} con la presión de confinamiento. Ensayos con deformación controlada.

Las variaciones en la relación de tensiones última, M_{cr} , producidas por el cambio de succión, pueden ser expresadas en porcentaje respecto a la relación de tensiones última correspondiente al ensayo saturado. En la **Figura 5.4** se presentan los resultados obtenidos al procesar los resultados del conjunto de ensayos D5, en los que se realizaron seis ensayos diferentes con distintas succiones. Se realiza una distinción entre los ensayos con succión intermedia y los realizados con succión límite de 0 y 139 MPa. La diferenciación obedece al cambio de comportamiento de los materiales utilizados en esos ensayos. Se utiliza una línea punteada para definir la tendencia de cada material. Es notoria la ganancia de

resistencia del Material 1 en comparación al Material 2. Pero la tendencia hiperbólica es clara para ambos materiales.

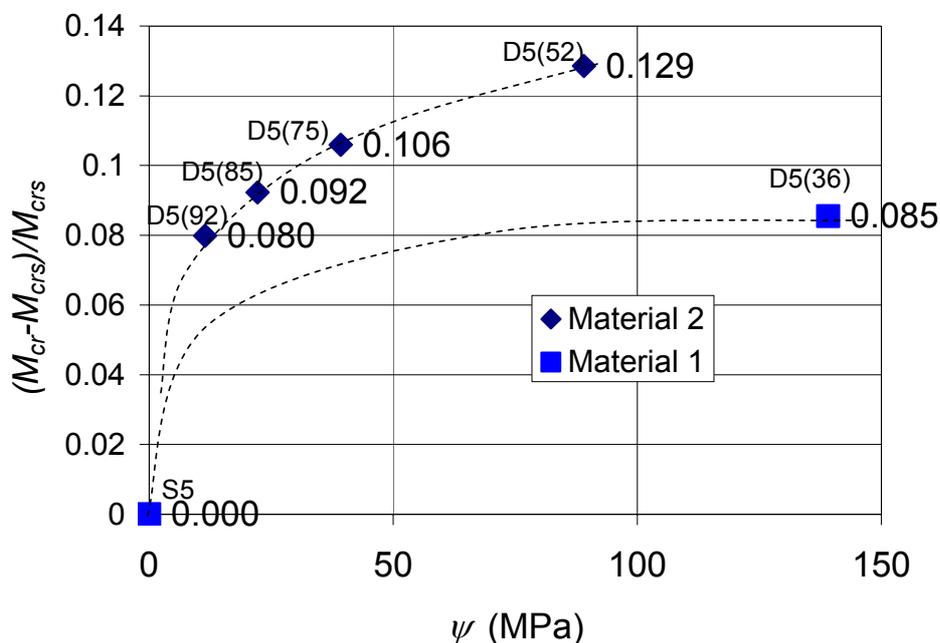


Figura 5.4 Ganancia de resistencia en función de la succión respecto al material saturado. Ensayos con $\sigma_3 = 0.5$ MPa.

Como se observa en este análisis, los valores de b y M_{cr} varían con la presencia de la rotura de partículas. Debido a la variación tan significativa, éste mecanismo se ha de tener en cuenta en la implementación de un modelo constitutivo para escolleras. La ecuación de Wood *et al.* (1994) resultó de gran utilidad en las cuantificaciones realizadas. Las variaciones obtenidas con este procedimiento son cuantificables, y pueden ser representadas por una curva de ajuste. No obstante, hasta ahora no se ha realizado una comparación directa de la variación de estos parámetros con la rotura de partículas. La energía que se disipa en la deformación de las escolleras, puede ser un parámetro adecuado para relacionarlo con la rotura de partículas; y a su vez relacionarla con la variación de los parámetros b y M_{cr} . La cuantificación de la energía disipada se realiza mediante el cálculo del trabajo plástico disipado durante el ensayo del material, y se define como:

$$\delta W^p = p \delta \varepsilon_p^p + q \delta \varepsilon_q^p \quad (5.4)$$

El trabajo plástico ha sido utilizado en modelos constitutivos para representar la disipación de energía que se produce cuando se presenta la rotura de partículas (Rahma 1996,

Daouadji y Hicher 1997). Sin embargo, no todo el trabajo plástico esta ligado directamente a la rotura de partículas del material; en el proceso están mezclados los mecanismos de reacomodo y rotura de partículas (ver apartado 2.1). Bajo un estado de pequeñas tensiones el material sólo se reacomoda, si siguen incrementándose las tensiones se puede llegar a superar la resistencia de las partículas; lo que provoca un reacomodo general y redistribución de las tensiones. Es necesario detectar el límite donde se inicia la rotura de partículas, para poder cuantificar el trabajo plástico utilizado sólo en acomodo de partículas. En los ensayos edométricos en escolleras hechos por Oldecop (2000) se detectó un límite σ_y , donde inicia la rotura de partículas. El mecanismo de rotura de partículas en un ensayo triaxial es diferente que el edométrico, pero los ensayos triaxiales en arenas a altas tensiones hechos por Yamamuro y Lade (1996), dejar ver que también existe un límite donde se inicia la rotura de partículas (ver Figura 2.3).

Con el objetivo de establecer una relación entre la rotura de partículas con el trabajo plástico, en la **Figura 5.5** se grafica el índice de rotura de partículas de Hardin efectivo (el que se obtiene restando la rotura que se produce en la compactación B_{rc}) en función el trabajo plástico total; para el conjunto de ensayos realizados con HR de 100, 92 y 36%. La variación que se obtiene es aproximadamente lineal. La curva de ajuste que representa los ensayos con HR 36% intercepta el eje de las ordenadas en un valor igual a 0.0758, lo que significa que existe un trabajo plástico que no produce rotura de partículas sólo reacomodo. La disposición de los ejes de la figura mencionada facilita la obtención del trabajo límite a partir del cual se produce rotura de partículas. El trabajo plástico que produce la rotura de partículas lo llamaremos, trabajo plástico efectivo W_E^P , y lo definiremos como el excedente de trabajo plástico resultado de restar el trabajo plástico de reacomodo inicial W_R^P al trabajo plástico total W_T^P . Se observa en la **Figura 5.5** además, que el trabajo plástico efectivo es función de la HR. Matemáticamente queda definido como:

$$W_E^P = W_T^P - W_R^P \quad (5.5)$$

Los ensayos con una HR de 85, 75 y 52%, sólo se realizaron con una presión de confinamiento de 0.5 MPa, y no se tiene manera de saber si cruzan el eje de las ordenadas en un valor positivo. Así que se estimó la pendiente que tendría en función de los datos existentes de las otras HR. Para ello se supuso que las pendientes varían con la HR con una

tendencia lineal. Con los resultados obtenidos se completaron la familia de rectas que relaciona la rotura de partículas con el trabajo plástico, y se verifica que sólo los ensayos a los que se le impuso una HR de 36% tienen un trabajo de reacomodo de las partículas asociado.

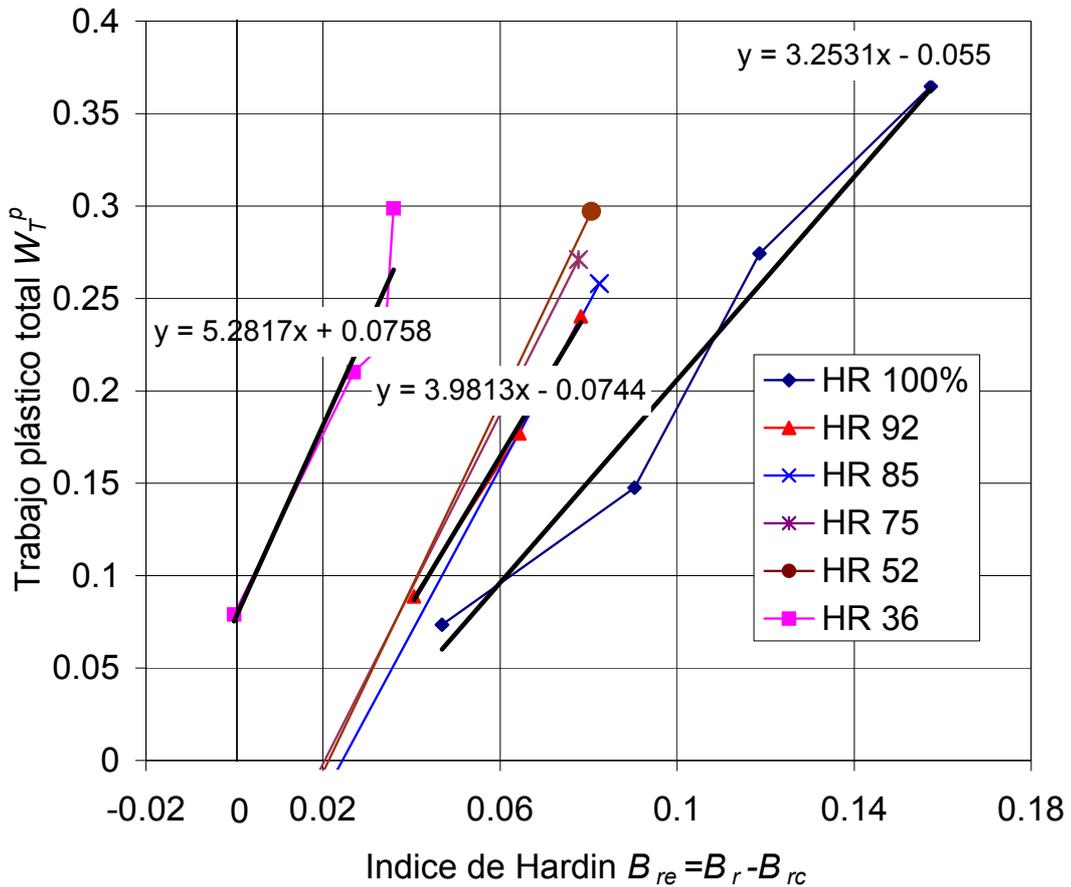


Figura 5.5 Rotura de partículas efectiva vs. trabajo plástico total.

La agrupación tan estrecha de los resultados de los ensayos con HR intermedia (92, 85, 75 y 52%) obedece a que el Material 2 tiene una rotura de partículas muy similar a distintas HR. En Material 1, con el que fueron hechos los ensayos con HR de 100 y 36%, la rotura de partículas tiene un rango mayor de variación con respecto a la HR. Estos datos corroboran que el Material 2 es más compresible que el Material 1. Esta diferencia en comportamiento se debe de tener en cuenta a la hora de modelar los resultados, ya que se observa que el comportamiento puede modificar los parámetros de ajuste de las curvas.

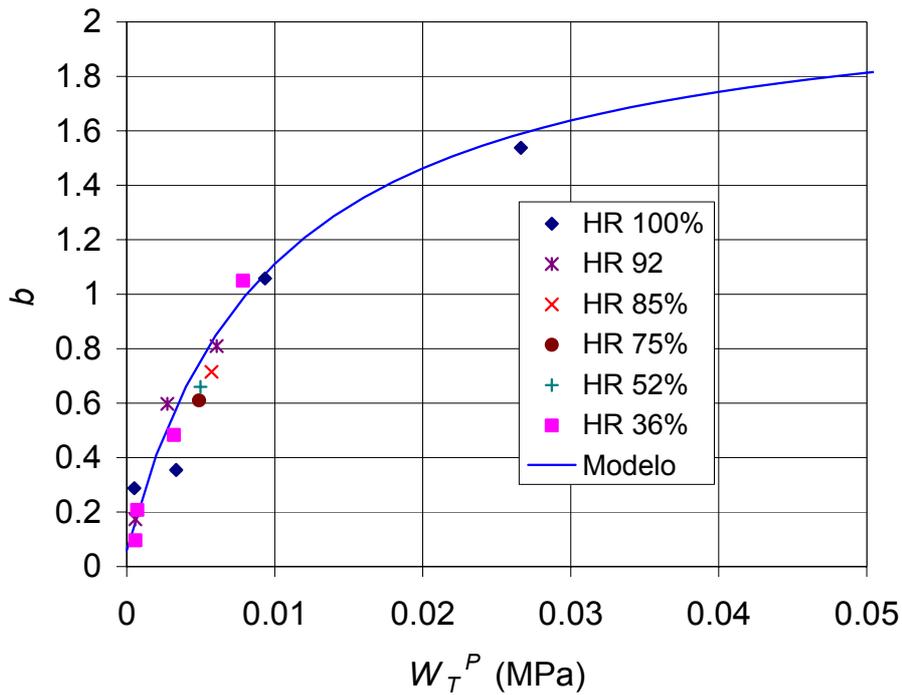


Figura 5.6 Variación del parámetro b con el trabajo plástico.

La **Figura 5.6** presenta la dependencia de b con el trabajo plástico total antes de aplicar la tensión desviadora. La tendencia es hiperbólica y presenta una dispersión muy pequeña. No se observa influencia de la humedad relativa. Por ello se acepta que el parámetro b varía en función del trabajo plástico total realizado durante la compresión isótropa previa a la aplicación del desviador.

Al trabajo plástico total se le resta el trabajo plástico de acomodación de partículas obtenido en la **Figura 5.5**. Sólo se realizó la operación con los datos correspondientes a los ensayos con HR de 36%, en los otros casos la rotura de partículas comenzó desde el inicio de proceso de carga isótropa. Se toman los datos de M_{cr} , obtenidos anteriormente, y se grafican en función trabajo plástico efectivo en la **Figura 5.7**. Se observa que M_{cr} disminuye cuando aumenta el trabajo plástico efectivo, y varía claramente con la HR. Los ensayos con HR = 36 % presentan inconsistencia con los ensayos de HR intermedia (52, 75, 85 y 92%). Pero analizando sólo la tendencia de los ensayos con HR intermedia y los saturados, se observa un aumento de M_{cr} con la disminución de la HR. La curva formada por los puntos que corresponden a los ensayos saturados tiene una ligera concavidad hacia

arriba, detalle con el que se verifica que existe una tendencia a la disminución en la variación de M_{cr} en la medida que el trabajo plástico efectivo aumenta.

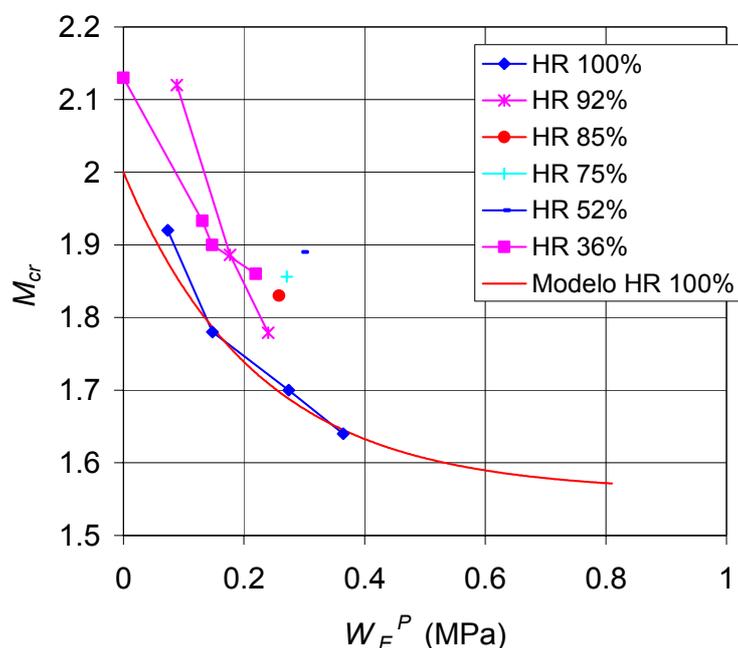


Figura 5.7 Variación de M_{cr} con W_E^P .

Para analizar la relación que guardan las tensiones con los incrementos de deformación se utiliza el plano $R-D$, donde $R = \sigma_1/\sigma_3$ y $D = 1 - \delta\varepsilon_p^p/\delta\varepsilon_t^p$. Como se explica en el apartado 2.3.4 cuando la curva que representa la evolución de un ensayo tiene valores de D mayores a 1, la tendencia del material es a dilatarse y en el caso contrario a contraerse. A los datos obtenidos en los ensayos se les eliminó el ruido normal que se presenta en el ensayo, suavizando las curvas para obtener la tendencia general de los parámetros R y D . Los resultados de los ensayos de compresión triaxial saturados (S1, S3, S5 y S8) se muestran en la **Figura 5.8**. Estas trayectorias siguen un claro comportamiento de compresión al inicio y al final tienden al estado crítico $D=1$. El zigzag de las trayectorias está asociado al proceso de rotura del material. Durante la deformación de la probeta, las partículas tienden a cabalgar unas sobre otras (dilatancia, incremento de D), lo que induce que las tensiones desarrolladas entre partículas sean mayores, incluso puedan superar la resistencia de las partículas. En el caso en el que se rompan las partículas se presenta un reacomodo posterior, que se presenta como una tendencia hacia la contractancia en el plano $R-D$ (disminución de D).

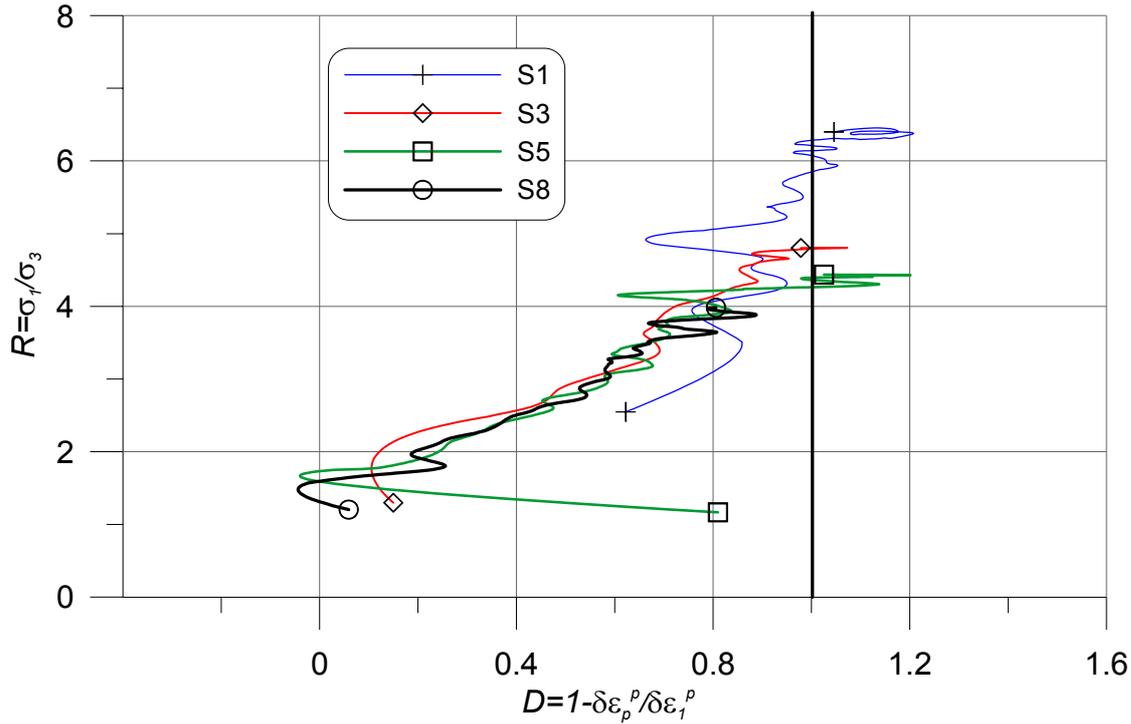


Figura 5.8 Trayectoria $R-D$ para los ensayos de compresión triaxial saturados.

Los ensayos con HR de 36% se presentan en la **Figura 5.9**. En general estos resultados presentan más dilatación que los mostrados en la **Figura 5.8**. En ensayo D1(36) comienza con un valor inicial de $D = 1$, después se presenta una dilatación muy grande, se vuelve a comprimir un poco y termina con una dilatación continua en zig-zag. Al final no alcanza el estado crítico, terminado el ensayo con $D = 1.5$. Las trayectorias de los ensayos D3(36) y D5(36) pasan la barrera de $D = 1$, para después regresar hacia la condición crítica. Sólo el ensayo D8(36) tiene una trayectoria toda ella en compresión. Los resultados de los ensayos con HR de 92% se muestran en la **Figura 5.10**. En este grupo de ensayos el D1(92) es el que tiene una mayor dilatación, los otros presentan una trayectoria totalmente en compresión. La comparación de las trayectorias de los ensayos con $\sigma_3 = 0.5$ MPa y diferentes HR, se presenta en la **Figura 5.11**. Se observa cómo las trayectorias de los ensayos con menor HR tienen una dilatación ligeramente mayor.

Previamente a cada ensayo se realiza una compresión isotrópica, y cuando más presión de confinamiento se aplique, se produce una densificación mayor de la probeta. Cuanto menor es la densidad, los resultados muestran mayor dilatación. Además, cuando se incrementa la presión de confinamiento se disminuye la dilatación. Esta influencia denso-dependiente

esta presente de alguna manera en estos gráficos aunque no aislada del todo. Como la tensión se incrementa la respuesta está influenciada por este incremento. Por otro lado, cuanto menor es la HR la dilatancia se incrementa. En resumen, podemos decir que las variables de estado que controlan el comportamiento de deformación de los materiales granulares son: la tensión, la densidad y la humedad relativa del material. Este análisis nos conduce a preferir la utilización de una regla de flujo que tenga un parámetro de estado, que ayude a reproducir el comportamiento del material granular de una manera más general.

Para poder reproducir el comportamiento denso-tenso dependiente con la influencia de la HR, es necesaria la introducción de un parámetro de estado que tenga como referencia el estado crítico. Debido a que en el capítulo anterior se encontró que la posición de la línea de estado crítico está determinada por la HR, la introducción del parámetro de estado tendría en cuenta implícitamente el cambio de la dilatancia que se produce con la variación de la HR.

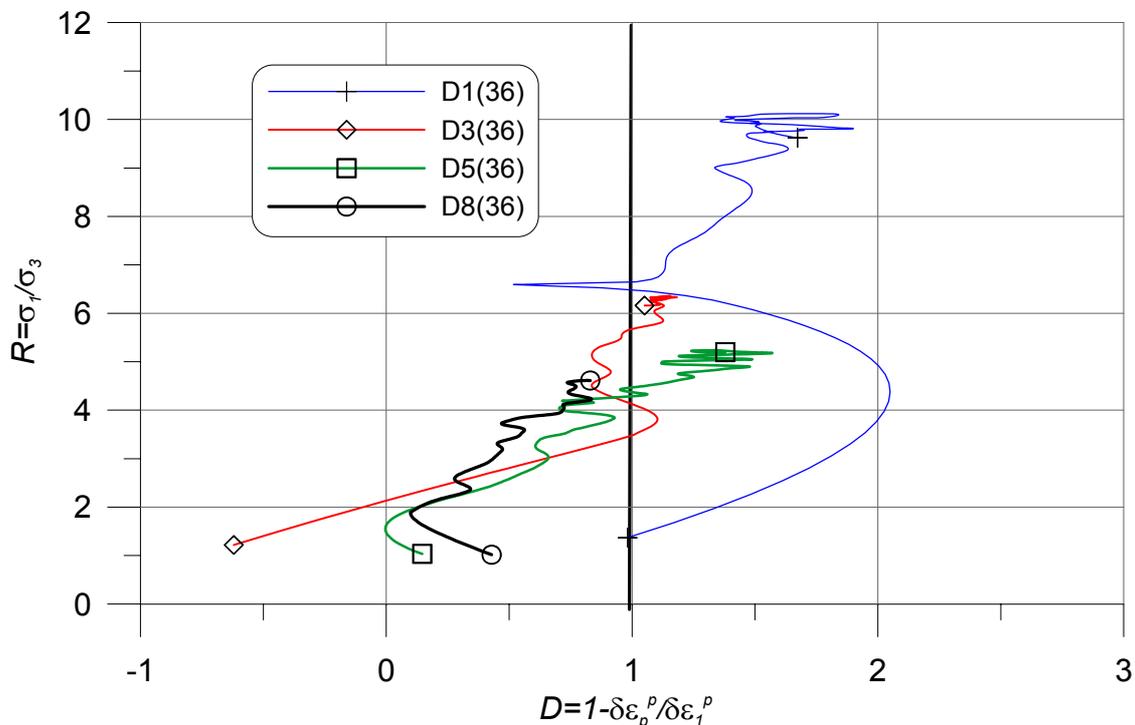


Figura 5.9 Trayectoria $R-D$ para los ensayos de compresión triaxial con HR de 36%.

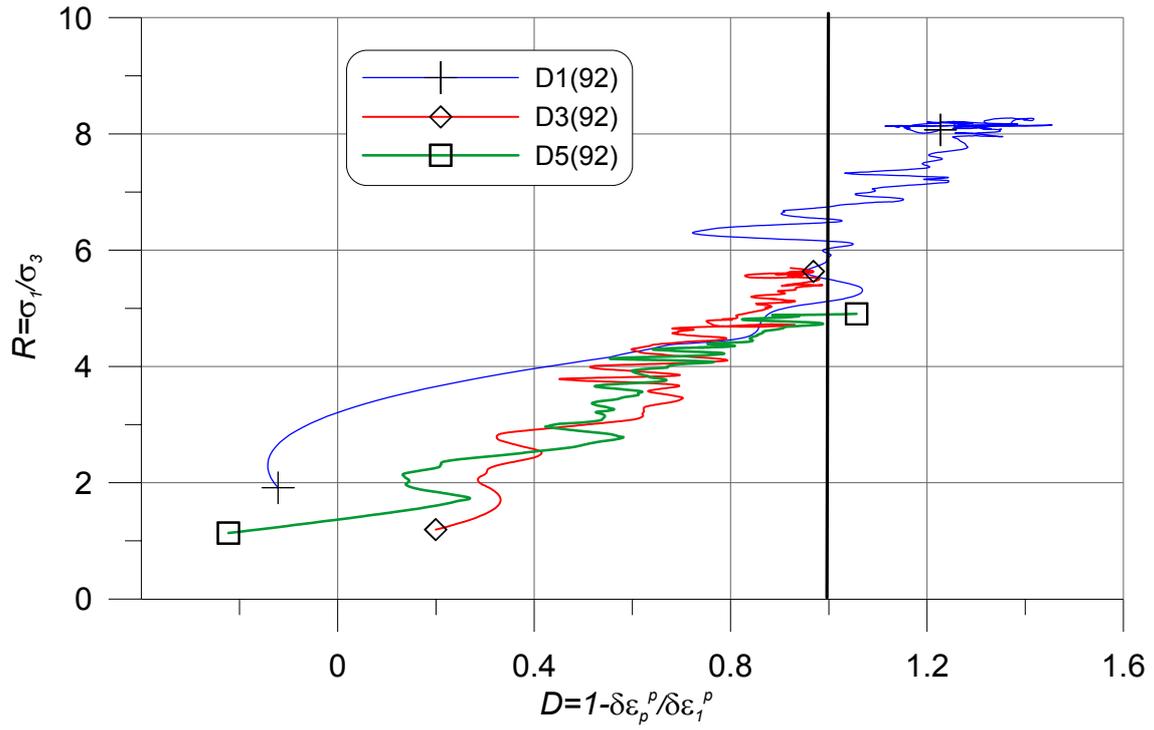


Figura 5.10 Trayectoria R - D para los ensayos de compresión triaxial con HR de 92%.

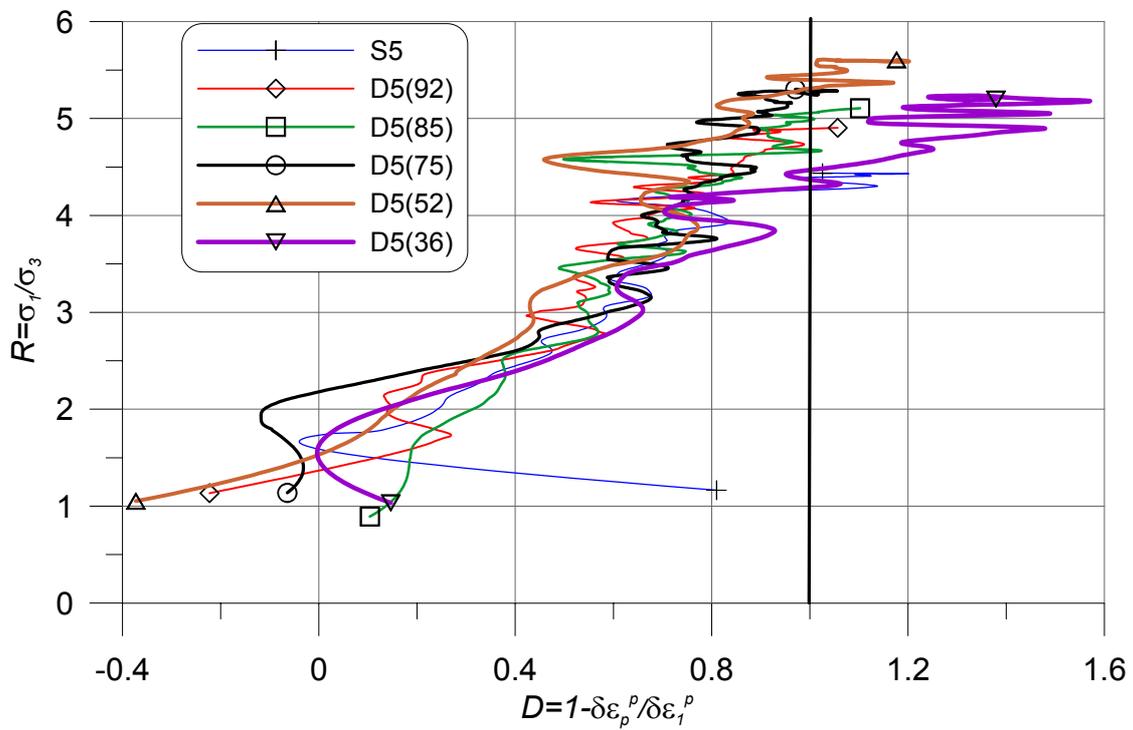


Figura 5.11 Trayectoria R - D para los ensayos de compresión triaxial con $\sigma_3 = 0.5$ MPa.

5.2 Ecuación Constitutiva

Durante la presentación de los resultados y su análisis, se maneja el término de humedad relativa en lugar de succión total, por compatibilidad con el proceso experimental. Para la formulación del modelo se prefiere utilizar la succión total ψ , que tiene unidades de tensión y se relaciona directamente con la humedad relativa por medio de la ley psicrométrica (ecuación 3.19).

Se hará la hipótesis de que el material de escollera puede alcanzar el estado crítico independientemente del estado de densidad y humedad relativa en el que se encuentre. La línea de estado crítico a su vez depende de la succión a que se encuentra el material.

En el inicio de cada ensayo se supone que no existe superficie de fluencia definida durante la compactación del material. Esta suposición es muy aproximada a la realidad ya que en las curvas de tensión-deformación de los ensayos se observa como el comportamiento irreversible comienza casi desde el inicio del ensayo; esto es provocado en parte a la rotura de partículas que se presenta a tensiones muy pequeñas. Por ello la superficie de fluencia es arrastrada desde el origen. El modelo utiliza dos superficies de fluencia rectas: una para la parte desviadora y otra para la parte volumétrica. Entre las dos forman un triángulo que puede estar aproximadamente inscrito en la superficie de fluencia encontrada en el capítulo 4.

El modelo se plantea con la teoría básica de la elasto-plasticidad. Se introduce, de acuerdo a la discusión del apartado previo, la dependencia de algunos parámetros del trabajo plástico. Se utilizan también parámetros de estado para mejorar la reproducción de resultados del modelo bajo distintos estados de densidad, tensión y succión.

5.2.1 Superficies de fluencia

Ya que la mecánica intergranular permite distinguir entre la dinámica las partículas que están sometidas a una carga isótropa, y la que se presenta cuando se les somete a una tensión de corte; se adopta una superficie de fluencia para cada mecanismo. Vermeer (1978) y Wan y Guo (1998) plantearon modelos constitutivos para arenas en base a este concepto. Cada superficie de fluencia tiene su parámetro de endurecimiento, y son

independientes entre si. La **Figura 5.12** presenta la propuesta de la superficie de fluencia en el plano p - q - ψ . Durante la consolidación isotrópica solo la superficie vertical está activa, con la aplicación del desviador se activa la superficie de corte y las dos crecen a la vez. El punto A es el estado de tensiones, en un momento dado de la trayectoria de carga que implica cambios en las tensiones media y de corte en un material saturado. En la Figura 4.37 se observó que la superficie de fluencia generada en un suelo no-saturado, tiene su homóloga en la zona de saturación; pero con un tamaño menor. Esto se refleja en la **Figura 5.12** donde la zona elástica del material con una succión diferente de cero es mayor. Adicionalmente, de acuerdo con los resultados de los ensayos presentados en el capítulo 4 (Figuras 4.11 y 4.13) el material tiene mayor resistencia, lo que se traduce en una relación de tensiones crítica, M_{cr} (ver Figura 4.25). En la zona no-saturada M_{cr} aumenta cuando se incrementa la succión. La curva $p(\psi)$ o LC es la que se obtiene al unir las tensiones medias de fluencia obtenidas en trayectorias como la 3-4, tras una etapa inicial 0-1-2 (ver **Figura 5.13**). Por analogía con lo que se ha obtenido en los suelos no saturados pero, sobre todo con la propuesta del modelo de Oldecop y Alonso (2001).

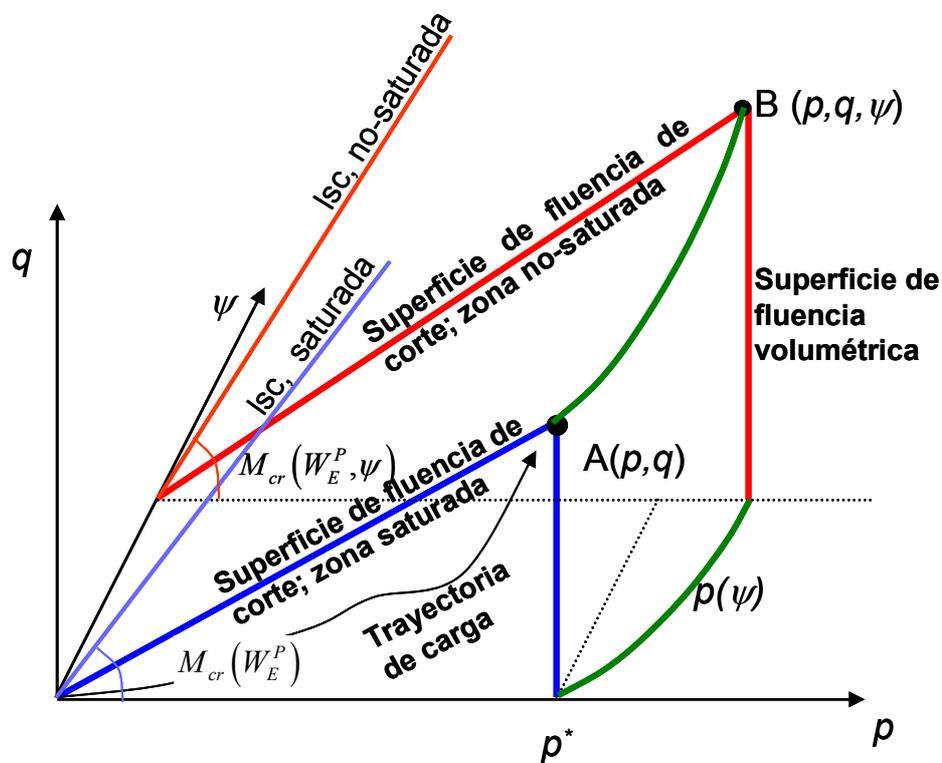


Figura 5.12 Superficies de fluencia del modelo elasto-plástico de escolleras.

Cuando el material se encuentra cerca de la saturación pueden formarse pequeños meniscos entre las partículas (succión matricial). Este fenómeno no se tiene en cuenta en el modelo, debido a que no se cuenta con la información necesaria para valorar su influencia en los ensayos triaxial. En todo caso las tensiones de origen capilar son muy pequeñas para el tamaño de granos inferiores a los propios de una grava con pequeñas cantidades de arena.

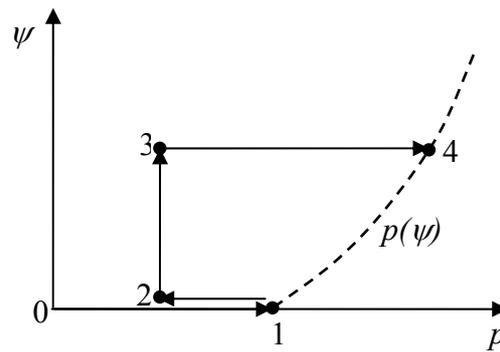


Figura 5.13 Trayectoria de para la obtención de la línea $p(\psi)$ o LC. Alonso *et. al.* (1990).

Analizando la dirección del incremento de las deformaciones plásticas, en las trayectorias p - q de los resultados de los ensayos saturados y con $HR = 36\%$, presentados en las Figuras 5.14 y 5.15, se observa que las deformaciones plásticas están relacionadas con el valor de $\eta_s = \text{cte}$. Con el fin de simplificar la formulación, se propone que la superficie de fluencia de corte esta representada por la ecuación:

$$f_q = \frac{q}{p} - \eta_s = 0 \quad (5.6)$$

donde η_s es el parámetro de endurecimiento dado por la ecuación (5.1) y reescrito como:

$$\frac{\eta_s}{rM_{cr}(W_E^P, \psi)} = \frac{\varepsilon_q^P}{b(W_E^P) + \varepsilon_q^P} \quad (5.7)$$

donde

$$r = 1 - k\psi_e = 1 - k(v - v_{cr}) \quad (5.8)$$

W_E^P es el trabajo plástico efectivo de los ensayos saturados y se obtiene de la ecuación (5.5). Se indica en esta relación la dependencia esperada de los parámetros.

El parámetro ψ_e de la ecuación (5.8) es el parámetro de estado definido por Been y Jefferies (1985) ver Figura 2.25; $v=1+e$ es el volumen específico en cada momento y v_{cr} , es el volumen específico crítico que corresponde al estado de tensiones actual, obtenido con la ecuación:

$$v_{cr} = y(\psi) - m_{cr} p \quad (5.9)$$

donde $y(\psi)$ es la posición de la línea de estados críticos en función de la succión total, y m_{cr} es la pendiente de la línea de estados críticos.

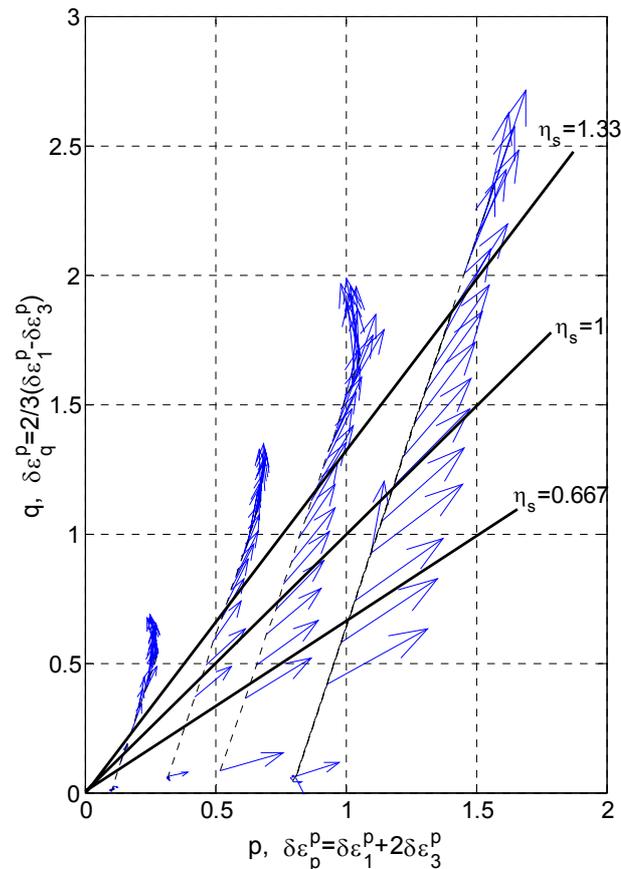


Figura 5.14 Dirección de los vectores de deformación plástica, ensayos S1, S3, S5 y S8.

De acuerdo con los ensayos realizados, la variación de la posición de la línea de estados críticos en función de la succión no es clara (ver Figura 4.24). Los valores de $y(\psi)$ se pueden obtener a partir de los puntos últimos de la trayectorias $v_{cr}-p$, mostradas en la Figura 4.24, y la pendiente promedio de las líneas de regresión que corresponden a las succiones extremas de la Figura 4.23. El valor de $y(\psi)$ así obtenido se compara directamente con la succión en la **Figura 5.16**. La curva muestra una cierta irregularidad, debida a que el material utilizado en los ensayos con succiones intermedias es algo

diferente. La línea recta de regresión que se presenta es una aproximación a los resultados experimentales.

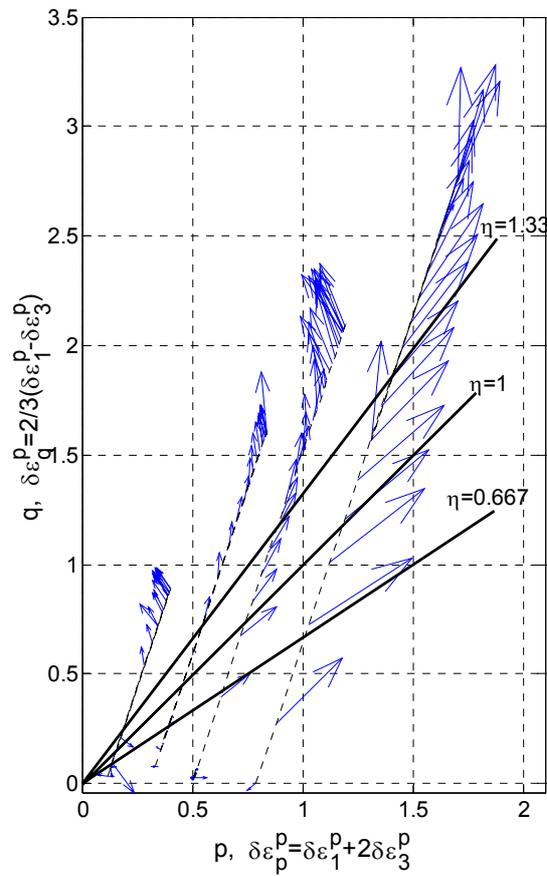


Figura 5.15 Dirección de los vectores de deformación plástica, ensayos D1(36), D3(36), D5(36) y D8(36).

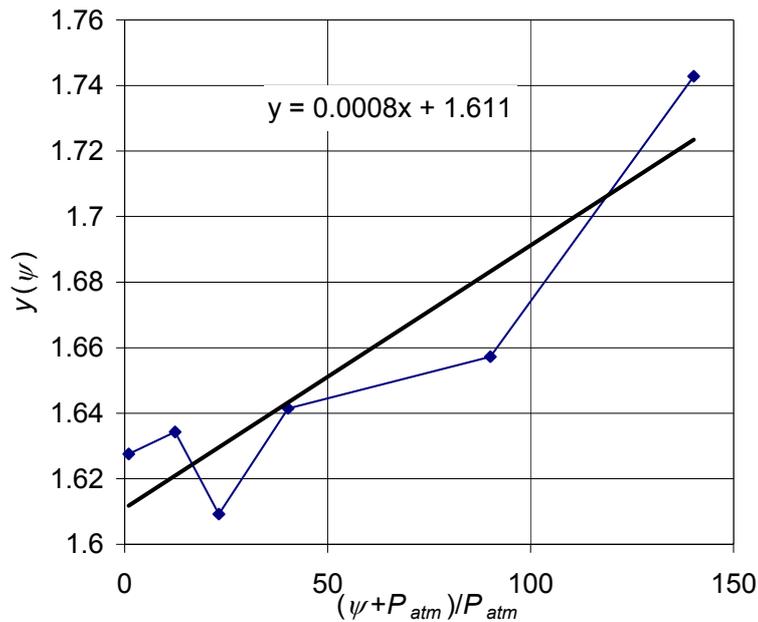


Figura 5.16 Variación de $y(\psi)$ con la succión en ensayos triaxiales de $\sigma_3 = 0.5$ MPa.

Los ensayos edométricos realizados por Oldecop (2000), son una fuente valiosa adicional para aclarar la variabilidad del parámetro $y(\psi)$. En estos ensayos se detectó una ley de variación lineal del colapso con el logaritmo de la succión (ver Figura 2.16). Aunque las líneas de estados críticos que se obtuvieron en los ensayos tienen una pendiente mayor que los resultados de las trayectorias isotropas, se asume que el mecanismo de desplazamiento por humedecimiento de la línea de estados críticos es idéntico al de colapso en los ensayos isotropos. En base a esta idea se supone una variación línea de $y(\psi)$ con el logaritmo de la succión:

$$y(\psi) = y_0 + \alpha_y \ln \left(\frac{\psi + p_{atm}}{p_{atm}} \right) \quad (5.10)$$

donde y_0 es posición de la línea de estados críticos para la condición saturada y α_y es el coeficiente de que controla la variación de la posición de la línea de estados críticos respecto a la succión. Se introduce la presión atmosférica para recuperar la condición saturada cuando $\psi = 0$. La ecuación (5.10) describe la variación del volumen específico crítico con la succión.

El parámetro M_{cr} , en la ecuación (5.7) es el valor de la relación de tensiones (q/p) en el estado crítico. Es función del trabajo plástico efectivo y de la succión. M_{crs} es el valor de M_{cr} en condiciones saturadas.

La forma en que varía la resistencia del material con la succión respecto a la muestra saturada, que se muestra en la **Figura 5.17**, tiene una variación hiperbólica. Los resultados del Material 1 se presenta con rombos y el los del Material 2 con cruces, se representa con línea continua el ajuste hiperbólico para los dos materiales.

Teniendo en cuenta la discusión del apartado anterior sobre la variación de M_{cr} en función de la succión, se opta por hacer depender M_{cr} del trabajo plástico efectivo en condición saturada. La variación de M_{cr} en función de la succión tiene una tendencia hiperbólica y tiene como referencia a M_{crs} . Por tanto la variación de M_{cr} queda expresada por:

$$M_{cr} (W_E^P, \psi) = M_{crs} (W_E^P) \left(1 + k_s \left(\frac{\psi}{b_k + \psi} \right) \right) \quad (5.11)$$

donde k_s , es el porcentaje de ganancia de resistencia máximo provocado por el incremento de la succión respecto a la condición saturada, b_k , es una constante del modelo.

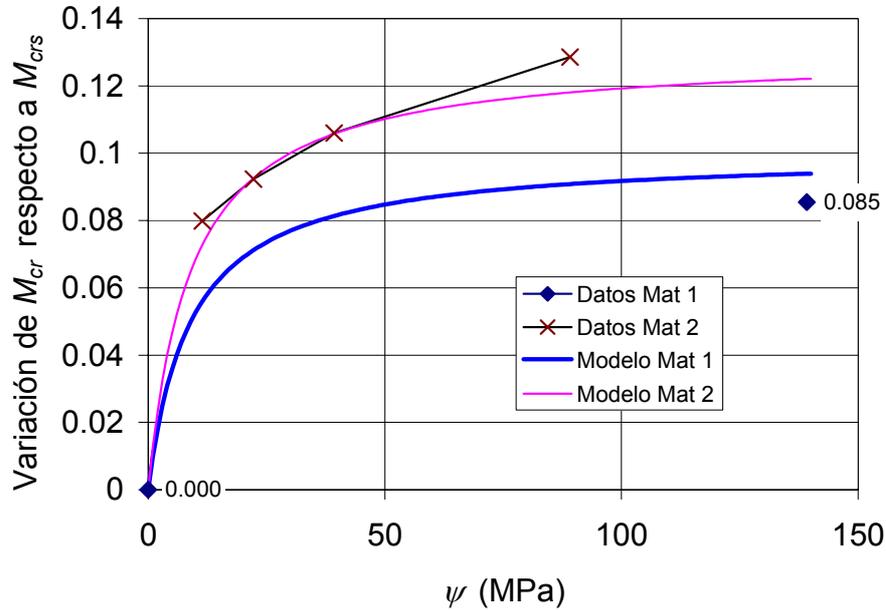


Figura 5.17 Ganancia de resistencia del material no saturado respecto al saturado.

De acuerdo a la **Figura 5.7**, M_{crs} puede ser representada por:

$$M_{crs}(W_E^P) = M_{c_{res}} + (M_{c_0} - M_{c_{res}}) e^{-aW_E^P} \quad (5.12)$$

donde $M_{c_{res}}$ es la relación de tensiones residual para un estado saturado. Corresponde a la relación de tensiones límite teórica cuando el trabajo plástico se acumula. M_{c_0} es el valor inicial de M_{crs} en condiciones saturadas para un trabajo plástico efectivo de cero. a es un parámetro del modelo. La ecuación (5.12) se ajustó a los datos obtenidos en los ensayos y se encuentra dibujada en la **Figura 5.7**. En general los ensayos saturados tienen muy buena correlación con la ecuación.

El parámetro b de la ecuación (5.7) que es el inverso de la pendiente inicial de la curva, depende del trabajo plástico total, siguiendo los resultados de la **Figura 5.6** esta representado por:

$$b(W_T^P) = B_0 + B \left(\frac{W_T^P}{c + W_T^P} \right) \quad (5.13)$$

donde B es el máximo cambio de b , cuando el trabajo plástico total se incrementa, B_0 es valor mínimo del inverso de la pendiente inicial. La ecuación (5.13) define una variación hiperbólica de b cuando el trabajo plástico total tiende al infinito.

La superficie de fluencia y el parámetro de endurecimiento η_s , definen de una manera implícita un envolvente de rotura de curva, tanto en condiciones de pico como críticas.

La superficie de fluencia volumétrica la describe el modelo para compresibilidad de escolleras de Oldecop y Alonso (2001), descrito minuciosamente en el apartado 2.3.1. Escribiendo ahora el modelo en condiciones isotropas, p_y es la tensión media a la que comienza la rotura de partículas. Por debajo de este valor la succión no tiene influencia sobre la compresibilidad del material. Así que la superficie de fluencia en la zona que no existe rotura de partículas es:

$$p(\psi) = p(0) = p^* \quad (p < p_y) \quad (5.14)$$

$$f_p(p) = p - p^* = 0 \quad (p < p_y) \quad (5.15)$$

Para tensiones superiores a p_y , la superficie de fluencia está descrita por:

$$f_p(p, \psi) = p[\lambda^i + \lambda^d(\psi) - \kappa] - p_y \lambda^d(\psi) - p^*(\lambda^i - \kappa) \quad (5.16)$$

donde:

$$\lambda^d(\psi) = \lambda_0^d + \alpha_s \ln\left(\frac{\psi + p_{at}}{p_{at}}\right) \quad (5.17)$$

es la compresibilidad del material, que depende de la succión total aplicada, ψ . El parámetro λ_0^d representa la compresibilidad del material en condiciones saturadas, α_s es un parámetro del modelo, κ es la pendiente de la rama de descarga del material, λ^i es la compresibilidad instantánea del material sin rotura de partículas y p^* es el parámetro de endurecimiento del material; donde la ecuación:

$$dp^* = \frac{v}{\lambda^i - \kappa} d\varepsilon_p^p \quad (5.18)$$

controla su evolución. En el caso que el material presente un pequeño hinchamiento inicial en la etapa de saturación, como se presentó en los ensayos de Oldecop y Alonso (2001). Es posible predecirlo con la expresión siguiente:

$$d\varepsilon_p^v = \kappa_\psi \frac{d\psi}{\psi + p_{atm}} \quad (5.19)$$

donde κ_ψ es el índice de expansión volumétrica.

5.2.2 Potencial plástico

La propuesta original del potencial plástico de la parte desviadora presentada en Chávez y Alonso (2003) se ha modificado. Se utilizó en esa ocasión la ecuación siguiente:

$$Q_q = \frac{1}{2}q - \left(p + \frac{1}{6}q \right) \text{sen } \psi_m \quad (5.20)$$

esta ecuación es la de Mohr-Coulomb escrita en función de p y q . Se encuentra en función del ángulo de dilatancia $\psi_m = -\delta\varepsilon_p^p / \delta\varepsilon_q^p$. Remitiéndonos a la discusión del apartado 5.1 se recordamos que el ángulo de dilatancia depende de la densidad, las tensiones y la HR. Una manera sencilla de obtenerlo es adoptar la ecuación propuesta de Wan y Guo (1998):

$$\text{sen } \psi_m = \frac{\text{sen } \varphi_m - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_{cr}}{1 - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_m \text{sen } \varphi_{cr}} \quad (5.21)$$

donde, φ_m es el ángulo de fricción movilizado calculado a partir de η_s como,

$$\text{sen } \varphi_m = \frac{\eta_s}{(2 + 1/3\eta_s)} \quad (5.22)$$

φ_{cr} es el ángulo de fricción en el estado crítico, se obtiene con las ecuaciones (5.11) y (5.12). El parámetro ψ_m depende de la succión vía e_{cr} , ecuación (5.9). Como la ecuación tiene un parámetro de estado dependiente del estado crítico del material, que a su vez depende de la succión, se logra incorporar las dependencias planteadas en el apartado 5.1.

Analizando la derivada respecto a q de la ecuación (5.20) $(1/2 - 1/6 \text{sen } \psi_m)$, podemos deducir que el segundo término disminuye la proporción de las deformaciones de corte plásticas respecto a las volumétricas plásticas dadas por la ecuación (5.21). Esta modificación puede ser controlada por el parámetro α de la ecuación (5.21), pero la interpretación resulta complicada. Con el objetivo de mantener la simplicidad en la formulación se propone una ecuación alternativa a la (5.20), es la ecuación:

$$Q_q = q - p \text{sen } \psi_m \quad (5.23)$$

La derivada respecto a q será 1, y la variación de dilatación queda controlada por el $-\sin \psi_m$ de la ecuación (5.21).

Con este planteamiento se tiene un potencial plástico de la parte desviadora no asociado, que resulta atractivo para materiales granulares.

Finalmente se adopta una regla de flujo asociada para la parte volumétrica:

$$Q_p = f_p \quad (5.24)$$

5.3 Modelación de los resultados del laboratorio

De acuerdo a las expresiones presentadas, el modelo tiene un total de 19 parámetros. La **Tabla 5.1** contiene un resumen los parámetros, clasificados de acuerdo al mecanismo en el que están involucrados.

La obtención de los parámetros de la parte desviadora se hace en principio mediante el ajuste de las expresiones que se han descrito en el apartado 5.2. Para lograr una mejor reproducción de los datos del laboratorio, se puede hacer una segunda estimación de parámetros que gobierna la variación de b y M_{cr} . Para ello se puede utilizar como herramienta del modelo constitutivo. Su implementación en la hoja de calculo “Excel” es explicada más adelante. Se supone primeramente constante el valor de b o el de M_{cr} en toda la integración. En seguida, mediante la herramienta del “solver” de la hoja de cálculo Excel se estima el valor de b o M_{cr} que cumpla con el mejor ajuste de los datos de los ensayos. Una vez obtenidos los valores de b y M_{cr} para cada ensayo se grafica en función del trabajo plástico total y del trabajo plástico efectivo respectivamente y se obtienen los parámetros de la curvas de ajuste. Estos nuevos parámetros se introducen en la ecuación constitutiva para realizar los cálculos pertinentes y obtener la mejor reproducción de los datos obtenidos en el laboratorio.

En la **Figura 5.18** muestra las expresiones utilizadas en la obtención de parámetros de la línea de estado crítico. La obtención de los parámetros de la parte volumétrica del modelo de Oldecop y Alonso (2001) se explicó en el apartado 2.3.1. Los parámetros de la parte volumétrica se calculan en base a las deformaciones instantáneas obtenidas después de 30

min; que es el tiempo que dura el incremento de presión de confinamiento en la cámara triaxial durante los ensayos isótopos.

Tabla 5.1. Resumen de los parámetros del modelo.

A) COMPORTAMIENTO DE CORTE		
Superficie de fluencia y endurecimiento.		Ecuación donde se encuentra el parámetro
Normalización de relación de tensiones pico.	$k = 0.3$	(5.8)
Relación de vacíos crítica	$y_0 = 1.65; \alpha_y = 1.77e-7, 0.00515; m_{cr} = -0.175 \text{ (MPa)}^{-1}$	(5.10) y (5.9)
Relación de tensiones crítica. Influencia de la succión.	$k_s = 0.13, 0.1; b_k = 9 \text{ (MPa)}$	(5.11)
Relación de tensiones crítica. Influencia del trabajo plástico.	$M_{c0} = 2.3; M_{cres} = 1.6; a = 5 \text{ (MPa)}^{-1}$	(5.12)
Módulo de deformación inicial.	$B_0 = 0.2; B = 2.4; c = 0.006 \text{ (MPa)}$	(5.13)
Regla de flujo		
Angulo de dilatancia	$\alpha = 3$	(5.21)
B) COMPRESIÓN ISÓTROP(A)(CAP)		
Superficie de fluencia y endurecimiento.		
Tensión límite de rotura	$p_y = 0$	(5.15)
Índices de compresibilidad	$\lambda^i = 0.047; \lambda_0^d = 0.0833 \text{ (MPa)}^{-1}; \alpha_s = 0.0115 \text{ (MPa)}^{-1}$	(5.16)
C) Comportamiento elástico	$\kappa = 0.0158; \nu = 0.235$	(5.3)

Se intentó utilizar un solo grupo de parámetros que reprodujera todos los ensayos, pero la diferencia en comportamiento del nuevo material, obligó a proponer un segundo valor para dos parámetros: el parámetro k_s que representa el valor máximo de resistencia que puede ganar el material con la succión y α_y que proporciona la distancia de la línea de estado crítico cuando varía la succión.

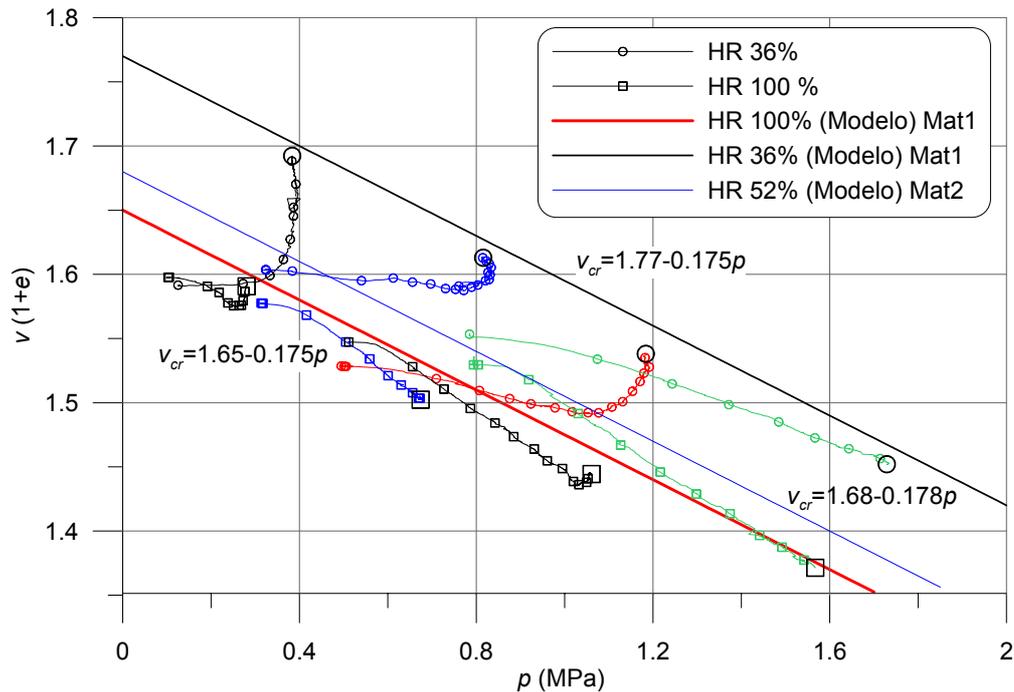


Figura 5.18 Líneas de estado crítico utilizadas en la modelación.

Tratando de entender el cambio de comportamiento presentado, entre el material anterior y el actual analizaremos la Figura 4.22. En específico analizando la curva que le corresponde un $\sigma_3 = 0.5$ MPa, se observa que los materiales con HR de 52, 75, 85 y 92%, tienen un valor del parámetro de rotura de partículas de Hardin muy similar (ensayos realizados con el Material 2). Si se comparan los valores consecutivos del parámetro de Hardin correspondientes a una HR de 36 y 52%, se observa un cambio significativo de la rotura de partículas a pesar de la cercanía entre las HR. Estos dos valores de rotura de partículas consecutivos pertenecen al Material 1 y Material 2 respectivamente. Este cambio tan importante en la tendencia de romperse implica que a pesar de la baja HR se genera más rotura de partículas en el ensayo D5(52). Como las HR relativas son semejantes, pero el material utilizado en el ensayo D5(52) se rompe más, se produce un incremento en el rozamiento entre partículas debido al aumento en el número de contactos. Lo que provoca un ligero aumento de resistencia al corte tal como se observa en la Figura 4.16. El aumento de la resistencia por la rotura de partículas también ha sido observado en arenas (Ueng y Chen 2000). La línea de estado crítico del ensayo D5(52) se localiza muy por debajo de la que le corresponde al ensayo D5(36), según se observa en la Figura 4.24. Esto presupone

que la línea de estado crítico en condiciones de succiones muy altas del Material 2, estará por debajo de la del Material 1. La curva adoptada se muestra en la **Figura 5.18**.

El análisis anterior está de acuerdo con los resultados de los ensayos de desgaste de Los Ángeles y la determinación del índice de lajas presentados en el capítulo anterior. El Material 2 es más susceptible a romperse que el Material 1. En el material nuevo las partículas son más alargadas y menos esféricas que el anterior (ver Figura 4.2). Ello explica también el cambio de la dilatancia del material, ya que en el material en vez de dilatar tiende a deslizar o a romper.

Las deformaciones elásticas se calcularon con el módulo de deformación volumétrica elástica $K = \nu p / \kappa$. El coeficiente de Poisson se supone constante. Su valor es el promedio de los obtenidos en los ensayos en la zona de descarga y recarga. El módulo de corte elástico se calcula con $G = 3(1-2\nu)K / (2(1+\nu))$.

La formulación de teoría de la plasticidad para dos superficies de fluencia se presenta en el anexo del capítulo. En ese apartado también se reúnen todas las expresiones utilizadas para la integración del modelo, incluyendo las derivadas.

La implementación del modelo se realizó en la hoja de cálculo "Excel", con ayuda de funciones complementarias programadas en "Visual Basic" para "Excel". La integración del modelo se realizó con el método de la rigidez tangente, utilizando incrementos de deformaciones pequeños para disminuir el error. Una vez realizado el incremento se verifica, si se está sobre la superficie de fluencia con las nuevas condiciones. Si no se está, se estima y se corrige el error. La secuencia anterior es un procedimiento iterativo que se realiza para disminuir el error.

El procedimiento empleado es el siguiente: una vez establecidas las condiciones iniciales $(\sigma_3, v_{inicial}, \psi, W_T^P)$ para cada ensayo, se calculan todos los parámetros y derivadas necesarias para formar la matriz elasto-plástica C_{ij}^{ep} , que relaciona el incremento de las deformaciones totales con el de las tensiones. Los ensayos triaxiales drenados con control de deformación realizados, siguen una trayectoria $p-q$ en cual se cumple que $\delta p = 1/3 \delta q$. La

implementación de la ecuación constitutiva, se hace aplicando deformaciones para poder reproducir el endurecimiento y el reblandecimiento que se presenta en los ensayos con succiones elevadas y presiones de confinamiento pequeñas. Se comienza por tanto, aplicando un incremento de deformación desviadora $\delta\varepsilon_q$, y el incremento de deformación volumétrica $\delta\varepsilon_p$. El incremento de deformación desviadora lo podemos suponer constante, pero el incremento de deformación volumétrica debe de ser tal, que asegure que las tensiones obtenidas cumplan la condición $\delta p=1/3\delta q$. Para lograrlo realizamos algunas operaciones con la ecuación siguiente:

$$\begin{bmatrix} \delta\varepsilon_p \\ \delta\varepsilon_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^{ep} & C_{12}^{ep} \\ C_{21}^{ep} & C_{22}^{ep} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta p \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (5.25)$$

Con base en la ecuación anterior se calcula la relación $\delta\varepsilon_p/\delta\varepsilon_q$ y se sustituye $\delta p=1/3\delta q$, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\delta\varepsilon_p}{\delta\varepsilon_q} = \frac{1/3\delta q C^{ep}(1,1) + \delta q C^{ep}(1,2)}{1/3\delta q C^{ep}(2,1) + \delta q C^{ep}(2,2)} \quad (5.26)$$

De la cual se pueden eliminar δq , y por último nos quedan una expresión que relaciona el incremento de deformación volumétrica con el incremento de la deformación de corte:

$$\delta\varepsilon_p = \frac{1/3 C^{ep}(1,1) + C^{ep}(1,2)}{1/3 C^{ep}(2,1) + C^{ep}(2,2)} \delta\varepsilon_q \quad (5.27)$$

Una vez obtenidos los incrementos de deformaciones adecuados para seguir la trayectoria de tensiones deseada, se aplican los incrementos de deformaciones y se obtienen los incrementos de tensiones buscados.

Como se esta construyendo una curva que con pequeños segmentos de línea, se presenta un error en los incrementos de tensiones calculados inherente al método (ver **Figura 5.19**). Para su evaluación se sigue el método siguiente. Una vez calculados los nuevos incrementos de tensiones, se calcula el valor de η_s con la ecuación (5.7), con las deformaciones y los trabajos plásticos impuestos hasta este instante. En este momento se esta posición de estimar el $Error_1$ producido en el calculo de los incrementos de tensiones.

Para ello se igual el incremento en la relación de tensiones, por un lado, evaluado en base a los incrementos de tensiones obtenidos (con error incluido), y por el otro, en base al diferencial de η_s calculado en base a los resultados de la ecuación (5.7). La siguiente ecuación expresa matemáticamente lo que se comenta en el enunciado anterior:

$$\left(\frac{q + \delta q \cdot Error_1}{p + \delta p \cdot Error_1} - \frac{q}{p} \right) - \delta \eta_s = 0 \quad (5.28)$$

De esta ecuación se despeja el $Error_1$ y se corrigen los incrementos de tensiones δq y δp .

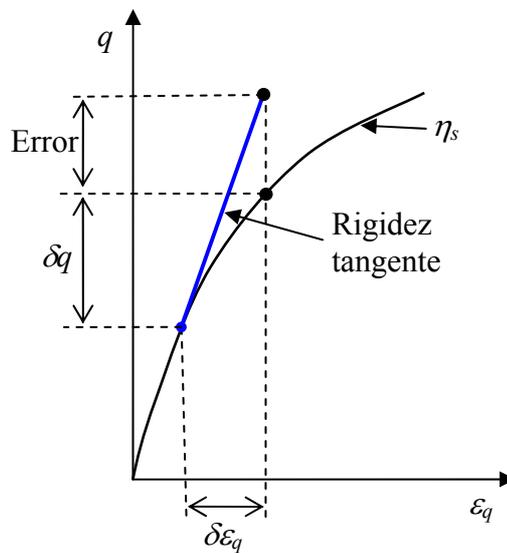


Figura 5.19 Error que se produce en el cálculo del incremento de tensiones.

Como el cálculo del incremento de deformación volumétrica se realizó en base a la matriz de rigidez C_{ij}^{ep} , tiene un error similar al comentado anteriormente. Para su corrección es necesario primero calcular el diferencial de las lambdas ($\delta\lambda_1$ y $\delta\lambda_2$) con la ecuación (A.14), sustituyendo los incrementos de tensiones corregidos. Se plantea la relación de incrementos de deformaciones plásticas con la ecuación siguiente:

$$\frac{\delta \varepsilon_p^p \cdot Error_2}{\delta \varepsilon_q^p} = \frac{\lambda_1 \frac{\delta Q_q}{\delta p} + \lambda_2 \frac{\delta Q_p}{\delta p}}{\lambda_1 \frac{\delta Q_q}{\delta q}} = -\text{sen} \psi_m + \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \frac{\delta Q_p}{\delta Q_q} \quad (5.29)$$

De donde se estima el $Error_2$ y se corrige $\delta\varepsilon_p^p$, se suman las deformaciones elásticas y se obtiene el $\delta\varepsilon_p$ corregido. Como el trabajo plástico efectivo utilizado para calcular η_s , fue estimado con los incrementos de tensiones sin corregir, se calcula otra vez el valor de η_s pero con las tensiones corregidas. En esta etapa, se repite el procedimiento de correcciones de errores hasta que los incrementos de tensiones obtenidos convergen a un valor. Normalmente se logra en los tres primeros ciclos. La integración termina hasta que se imponen deformaciones hasta alcanzar una deformación axial del 20%. Este procedimiento implica que la integración se realice con una succión constante. En el caso que se varía la succión, las tensiones permanecen constantes.

Los resultados de la reproducción de los ensayos con deformación controlada y presiones de confinamiento de 0.1 y 0.3 MPa, se muestran en la **Figura 5.20**. Los ensayos con deformación controlada y presión de confinamiento de 0.5 y 0.8 MPa en la **Figura 5.21**. Por último en la **Figura 5.22** se presenta el ensayo DC5 en comparación con los S5 y D5(36). El análisis de los resultados que se hace a continuación, parte de los ensayos saturados y se extiende después los no saturados, ya que el modelo es una extensión de la condición saturada. En todas las figuras mencionadas, los resultados experimentales se muestran con línea delgada y un símbolo; el símbolo sólo es distintivo. Los resultados del modelo se representan con líneas continuas de mayor grosor.

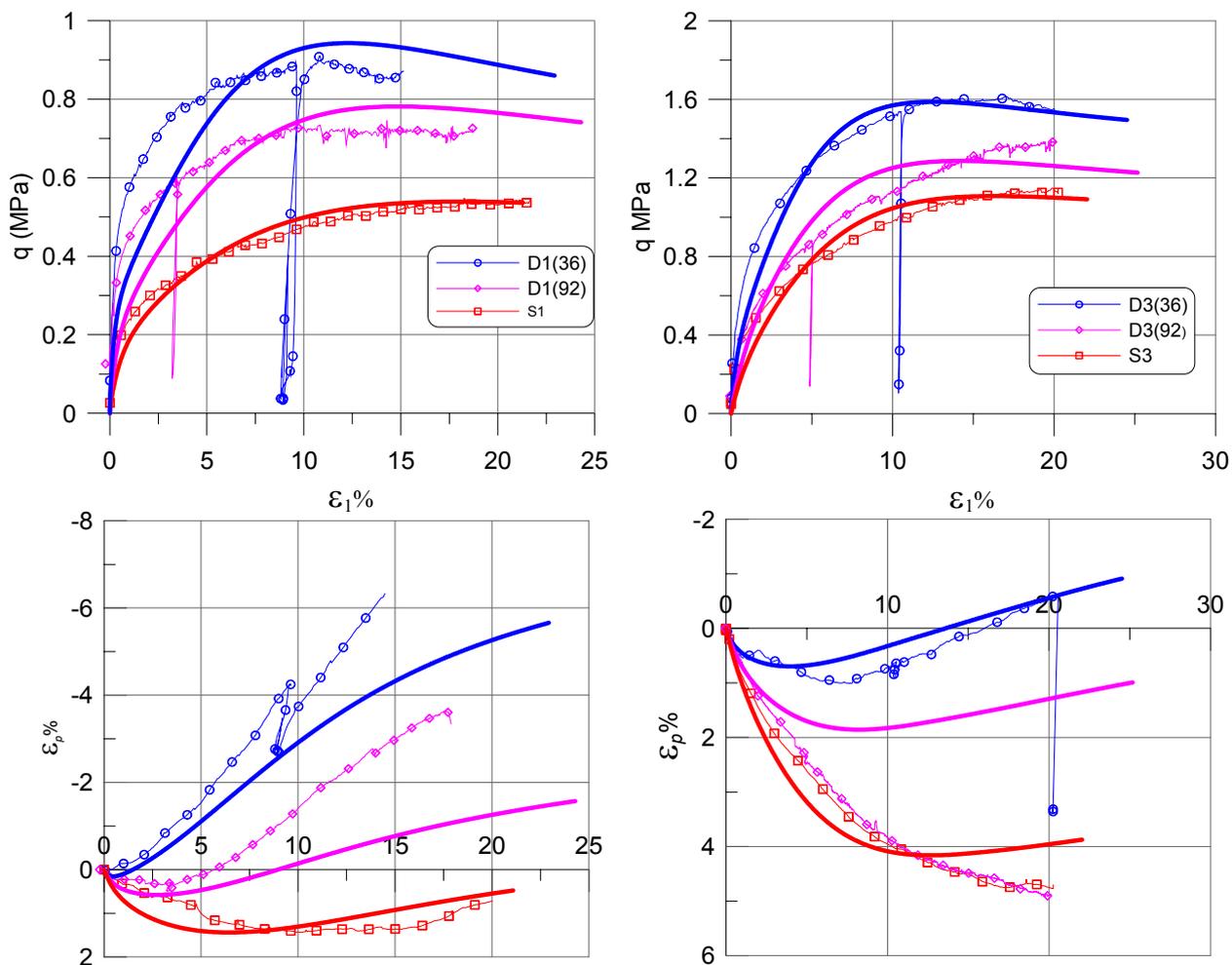


Figura 5.20 Comparación de los datos experimentales y la reproducción del modelo. Ensayos con $\sigma_3 = 0.1$ y 0.3 MPa.

Los ensayos saturados tienen en general muy buen ajuste. La resistencia al corte está bien reproducida en los ensayos con $\sigma_3 = 0.1$ y 0.3 MPa. Los otros dos tienen a sobreestimar la resistencia ligeramente para deformaciones entre 5 y 15%, al final de ensayo, subestimando la resistencia última. La deformación volumétrica se reproduce adecuadamente. Aunque existe una ligera sobre-estimación entre el 5 y 15 % de deformación que se corresponde con la sobreestimación de la resistencia.

En los ensayos con una succión de 139 MPa (HR=36%), se observan que en general el modelo sigue el comportamiento del material. Es apreciable también que se reproducen adecuadamente las etapas de endurecimiento y reblandecimiento que presenta el material. En los primeros cálculos realizados para el ensayo D1(36), se subestimaba la resistencia pico un 10%. Como los resultados experimentales tienen una rigidez inicial apreciable, se

concluyó que existía una pequeña superficie de fluencia generada por la compactación del material. Después de esta corrección, el modelo estimó la resistencia pico de una manera adecuada, pero la rigidez tangente posterior a la zona elástica se siguió subestimando. En los otros ensayos se tiene una aproximación adecuada en general. Siguiendo con más detalle las curvas del modelo y las de los ensayos D5(36) y D8(36), se observa que entre las deformaciones axiales de 2.5 y 7.5% se sobre estima la resistencia al corte del material y posteriormente se subestima. La dilatancia que se presenta en la deformación volumétrica es reproducida por el modelo en general, pero la del ensayo D5(36) no se ajusta adecuadamente.

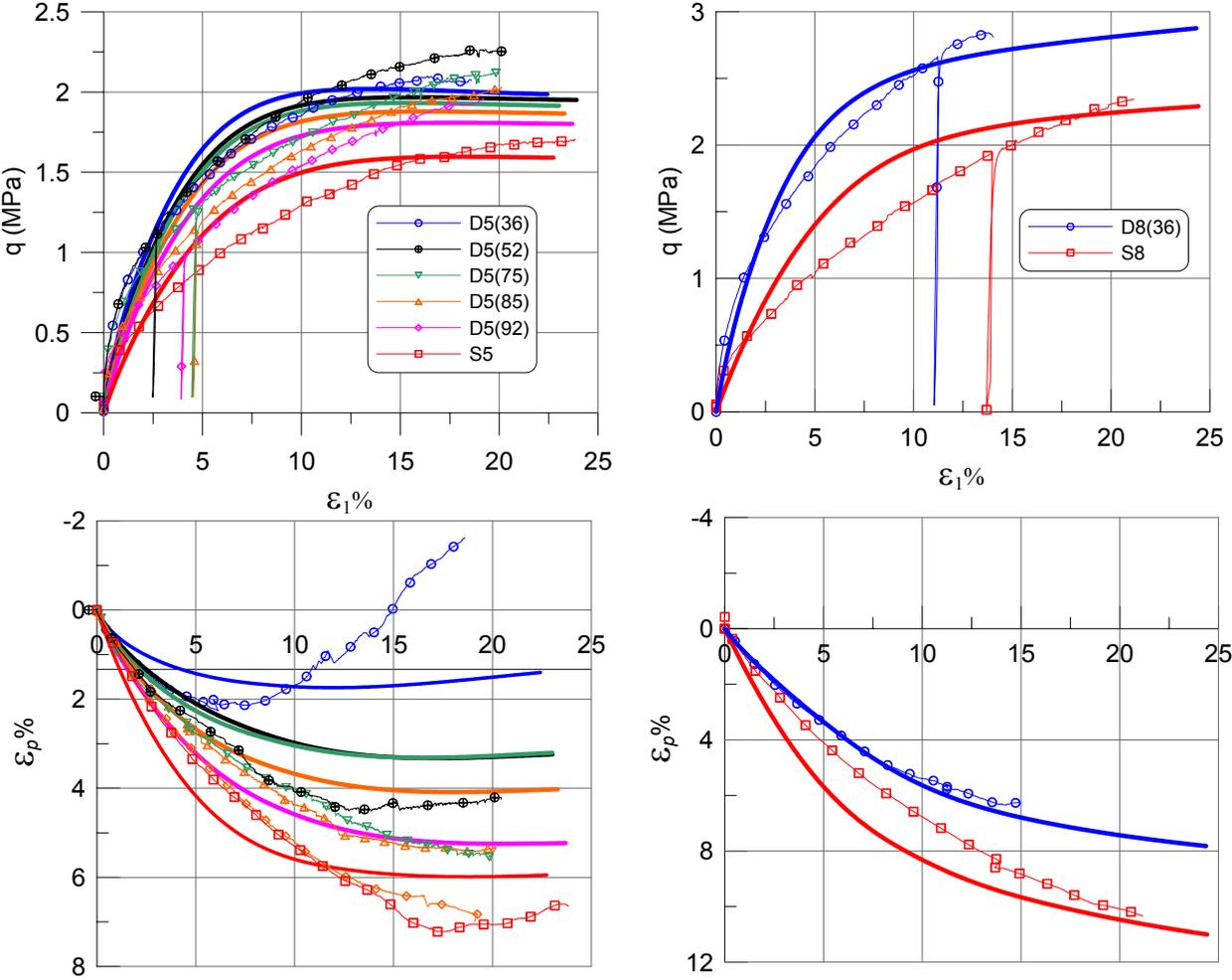


Figura 5.21 Comparación de los datos experimentales y la reproducción del modelo. Ensayos con $\sigma_3 = 0.5$ y 0.8 MPa

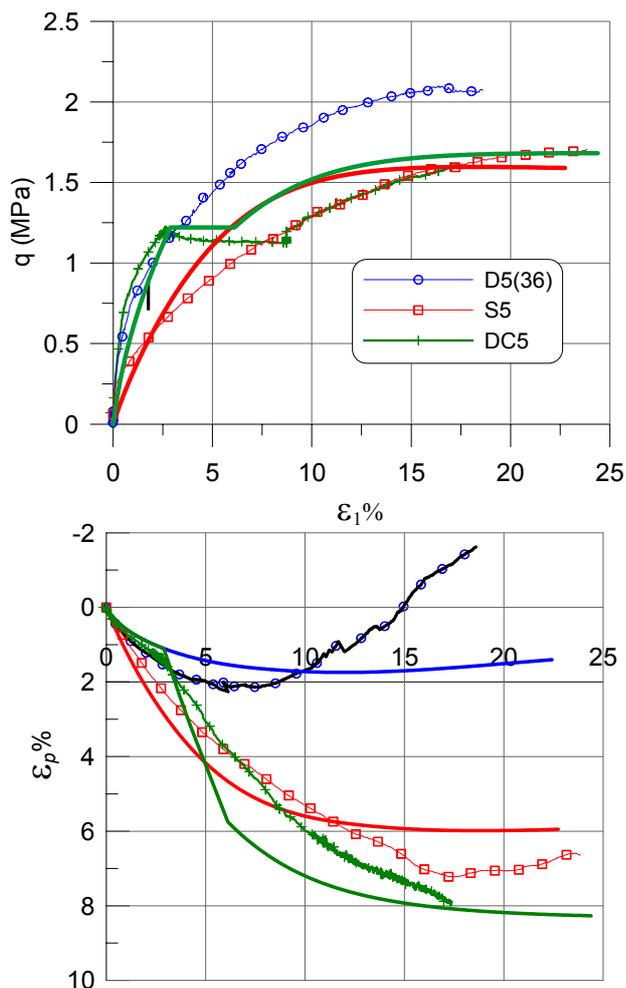


Figura 5.22 Comparación de los datos experimentales y la reproducción del modelo. Trayectoria de humedecimiento con desviador constante $\sigma_3 = 0.5$ MPa

Los ensayos con succión intermedia sobreestiman también la resistencia al corte en las deformaciones axial de 5 y 15% después terminan subestimándola. Las deformaciones volumétricas en general se reproducen adecuadamente, a excepción de la del ensayo D3(93), donde el modelo presenta demasiada dilatancia.

El cambio de succión a tensión vertical constante provoca una disminución volumétrica. Para el análisis de los resultados del modelo y experimentales, en la **Figura 5.22** se agregan los datos correspondientes a los ensayos S5 y D5(36) como referencia. Cuando se aplica el cambio de succión a tensión constante con la ecuación constitutiva, el modelo arroja una deformación axial que va desde la trayectoria del ensayo D5(36) hasta la del S5, tal como los resultados experimentales. La deformación volumétrica se sobreestima un 2% al final de la trayectoria, pero en general se sigue la tendencia del ensayo correctamente.

La envolvente de resistencia máxima obtenida con el modelo, se comparan con los datos experimentales la **Figura 5.23**. El modelo reproduce adecuadamente los resultados experimentales. En la figura se aprecia además, que el modelo imita la curvatura de la envolvente de rotura debida a la disminución de la dilatación provocada por la rotura de partículas.

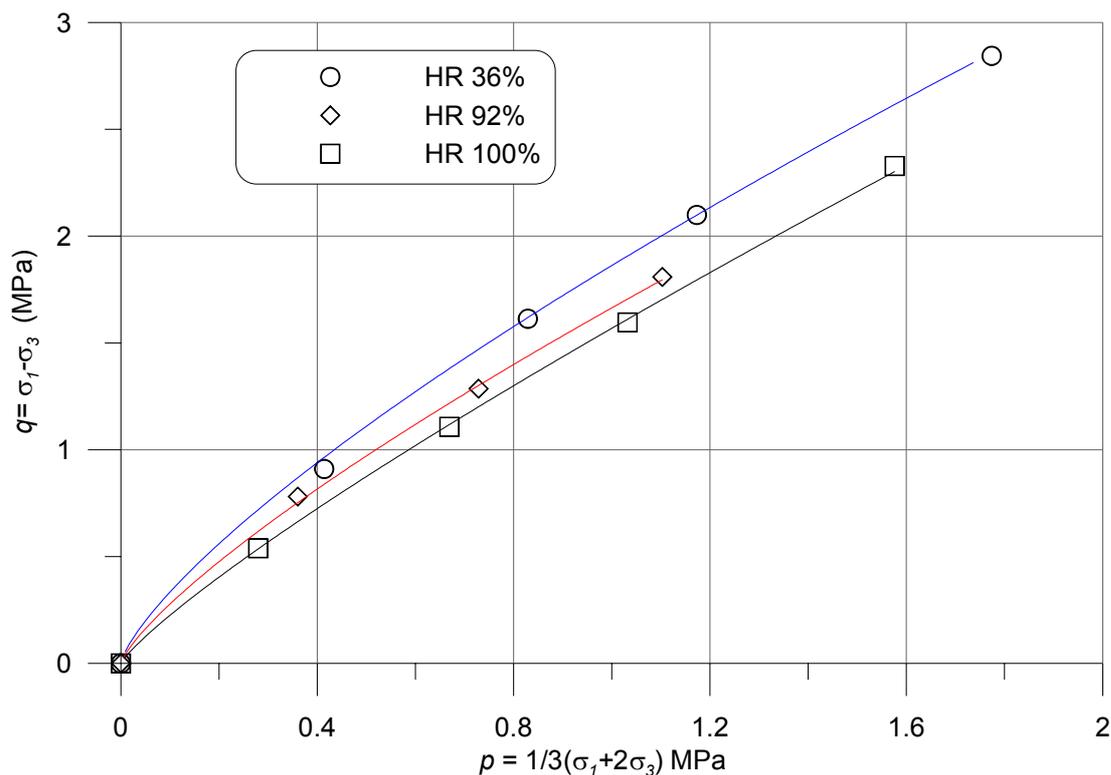


Figura 5.23. Envolventes de resistencia obtenidas con los resultados de los ensayos y del modelo. La línea continua representa el modelo, y los símbolos los resultados del ensayo.

5.4 Resumen del capítulo

Se realizó el análisis de los resultados presentados en el capítulo anterior, tratando de entender cómo la rotura de partículas de material afecta el comportamiento desviador y la dilatación del material de escollera.

Para ello, se ajustaron los datos experimentales de resistencia al corte a la ecuación hiperbólica utilizada por Wood *et al.* (1994) en arenas. Esta regresión permitió observar la variación de los parámetros b y M_{cr} . El parámetro b es el inverso de la pendiente inicial de la curva $\eta_s - \varepsilon_q$, y se observó que esta pendiente disminuye cuando aumenta la presión de

confinamiento. Por otro lado, se detectó que el parámetro M_{cr} , disminuye cuando la presión de confinamiento aumenta. La divergencia de los parámetros b y M_{cr} , se atribuye al efecto que produce la rotura de partículas del material.

La rotura de partículas se ve incrementada significativamente durante la aplicación de la tensión desviadora, y además tiene una dependencia clara del trabajo plástico. Con el objetivo de aislar el trabajo plástico que produce rotura de partículas del que produce sólo reacomodo, se definió el trabajo plástico efectivo como aquel que produce la rotura de partículas del material. Se encontró que el parámetro M_{cr} tiene una dependencia adecuada del trabajo plástico efectivo. En cambio, el parámetro b varía de una manera hiperbólica con el trabajo plástico total W_T^P .

Además, se observa claramente que la resistencia al corte se ve incrementada por la succión del material. Por ello se establece una dependencia M_{cr} con la succión, adoptando una tendencia hiperbólica. En contraste, el parámetro b no tiene dependencia con la succión.

El comportamiento volumétrico se analizó en el plano $R-D$, mismo que utilizó Rowe (1962) cuando propuso su teoría; para explicar la dilatancia de materiales granulares. Analizando las trayectorias obtenidas, se observó que el comportamiento volumétrico depende de la densidad, la tensión y RH. Se identificó asimismo, que el comportamiento volumétrico es afectado también por la rotura de partículas. No obstante, el material tiende a aproximarse o llegar al estado crítico, $D=1$.

Tomando como base los análisis mencionados de los ensayos triaxiales en materiales de tamaño medio y datos obtenidos de otros estudios en arenas y gravas, se planteó un modelo constitutivo elasto-plástico de escolleras; para reproducir trayectorias triaxiales. La formulación se basa en dos superficies de fluencia: una representa el mecanismo de ganancia de resistencia debida a la interacción entre las partículas cuando se aplica una deformación por corte, y la otra representa el mecanismo de contracción volumétrica de las partículas. Se adaptó la ecuación de Wood *et al.* (1994) como regla de endurecimiento para modelar el comportamiento desviador. En la expresión, los parámetros b y M_{cr} se hacen

depender del trabajo plástico total y efectivo respectivamente; M_{cr} varía además con la succión. La parte volumétrica es reproducida por el modelo de Oldecop y Alonso (2001).

Con la superficie de fluencia desviadora se utiliza un potencial plástico sencillo que depende del ángulo de dilatancia ψ_m . Este ángulo se estima de una manera convincente con la teoría de Rowe (1962) modificada por Wan y Guo (1998) para arenas. La mejora en la teoría de Rowe (1962) se basa en la implementación de un parámetro de estado. La utilización de este tipo de parámetros en la regla de flujo es ventajosa, porque con pocos parámetros se reproduce el comportamiento tenso-denso dependiente del material. Como el parámetro de estado tiene como referencia el estado crítico del material, que depende a la vez de la succión; la influencia del cambio de humedad en el material se incorpora de una manera natural. Por último, con la superficie volumétrica se usa un potencial plástico asociado a la superficie de fluencia volumétrica.

Se realiza la modelación de los ensayos con deformación controlada. Se obtuvo en general una reproducción adecuada, pero la rigidez de los ensayos no-saturados con un presión de confinamiento de 0.1 MPa se sub-estimó notoriamente. La resistencia de los ensayos con presión de confinamiento de 0.5 y 0.8 MPa, fue sobreestimada entre las deformaciones axiales de 5 y 15%. Para deformaciones mayores se subestimó. El comportamiento volumétrico fue en general reproducido adecuadamente.

5.5 Anexo

5.5.1 Formulación de la teoría de plasticidad de dos superficies.

Una vez definidas las bases para el modelo elasto-plástico (apartado 5.2), el siguiente paso es aplicar la teoría de la elasto-plasticidad. En este anexo se describe brevemente la teoría de la elasto-plasticidad para dos superficies (Chen y Mizuno 1990, Carol y Prat 1995, Potts y Zdravković 1999) y se presentan las derivadas necesarias para la implementación del modelo constitutivo.

En el presente caso, se tienen dos superficies de fluencia: la primera describe el comportamiento desviador y la otra el comportamiento volumétrico. Cada superficie depende de ciertos parámetros, y en forma matemática lo escribimos como;

$$f_q = (\sigma, \eta_s (W_E^p, \varepsilon, \psi)) = 0 \quad (\text{A.1})$$

$$f_p = (\sigma, p^* (\varepsilon, \psi)) = 0 \quad (\text{A.2})$$

donde η_s y p^* son los parámetros de endurecimiento de cada superficie de fluencia. Los incrementos de deformaciones totales se dividen en elásticos y plásticos. Al cálculo de los incrementos de deformaciones plásticas contribuyen los dos mecanismos, el desviador y el volumétrico, es decir:

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}^e + \sum_{i=q,p} \dot{\varepsilon}_{(i)}^p = \dot{\varepsilon}^e + \dot{\varepsilon}_q^p + \dot{\varepsilon}_p^p \quad (\text{A.3})$$

El punto sobre la letra indica que es un incremento, y en el caso de la ecuación anterior incrementos de deformaciones. El subíndice i toma los valores de q y p para los mecanismos de corte y volumétrico respectivamente. Los incrementos de tensiones, están relacionados con los incrementos de deformaciones elásticas mediante el módulo elástico E_0 :

$$\dot{\sigma} = E_0 \dot{\varepsilon}^e \quad (\text{A.4})$$

Si despejamos el incremento de deformaciones elásticas de la ecuación (A.3), y lo sustituimos en la ecuación (A.4), se obtiene la ecuación base de la elasto-plasticidad:

$$\dot{\sigma} = E_0 \left(\dot{\varepsilon} - \sum_{i=q,p} \dot{\varepsilon}_{(i)}^p \right) \quad (\text{A.5})$$

donde σ es el vector de tensiones formado con las componentes de p y q . Los incrementos de deformaciones plásticas están relacionados con las funciones de potenciales $Q_{(i)}$, que le corresponde a cada superficie, mediante la regla de flujo. La regla de flujo está dado por la ecuación:

$$\dot{\varepsilon}_i^p = \dot{\lambda}_{(i)} \frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \sigma} \quad (\text{A.6})$$

donde $\dot{\lambda}$ es la magnitud y $Q_{(i)}$ es la función de potencial plástico que determina la dirección del incremento de deformación plástica en cada superficie. Cuando las dos

superficies de fluencia están activas el estado de tensiones debe satisfacer ambas superficies, y se debe cumplir la ecuación de consistencia:

$$\dot{f}_q(\sigma, \eta_s(W_E^P, \varepsilon, \psi)) = \dot{f}_p(\sigma, p^*(\varepsilon_p, \psi)) = 0 \quad (\text{A.7})$$

Si se le aplica la regla de la cadena a la ecuación anterior se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{f}_q &= \left[\frac{\partial f_q}{\partial \sigma} \right]^T \dot{\sigma} + \left[\frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial \varepsilon_q^p} + \frac{\partial \eta_s}{\partial W_E^P} \frac{\partial W_E^P}{\partial \varepsilon_q^p} \right) \right] \dot{\varepsilon}_q^p + \left[\frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial \varepsilon_p^p} + \frac{\partial \eta_s}{\partial W_E^P} \frac{\partial W_E^P}{\partial \varepsilon_p^p} \right) \right] \dot{\varepsilon}_p^p + \frac{\partial f_q}{\partial \psi} \dot{\psi} \\ \dot{f}_p &= \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right]^T \dot{\sigma} + \left[\frac{\partial f_p}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varepsilon_q^p} \right] \dot{\varepsilon}_q^p + \left[\frac{\partial f_p}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varepsilon_p^p} \right] \dot{\varepsilon}_p^p + \frac{\partial f_p}{\partial \psi} \dot{\psi} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Si se sustituyen el incremento de deformaciones plásticas de la ecuación (A.8) por su equivalente, la ecuación (A.6), y se realizan algunas simplificaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{f}_q &= \left[\frac{\partial f_q}{\partial \sigma} \right]^T \dot{\sigma} - H_{(q,q)} \dot{\lambda}_{(q)} - H_{(q,p)} \dot{\lambda}_{(p)} + \frac{\partial f_q}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0 \\ \dot{f}_p &= \left[\frac{\partial f_p}{\partial \sigma} \right]^T \dot{\sigma} - H_{(p,p)} \dot{\lambda}_{(p)} - H_{(p,q)} \dot{\lambda}_{(q)} + \frac{\partial f_p}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

donde $H_{(i,j)}$ es el módulo de endurecimiento de la combinación representado por la ecuación siguiente:

$$\begin{aligned} H_{(q,q)} &= \frac{\partial f_q}{\partial \lambda_{(q)}} = - \left(\frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial \varepsilon_i^p} + \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial M_c} \frac{\partial M_c}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial W_E^P} + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial W_E^P} \right) \frac{\partial W_E^P}{\partial \varepsilon_i^p} \right) \right) \frac{\partial Q_q}{\partial \sigma} \\ H_{(p,p)} &= \frac{\partial f_p}{\partial \lambda_{(p)}} = - \frac{\partial f_p}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varepsilon_p^p} \frac{\partial Q_p}{\partial p} \\ H_{(q,p)} &= \frac{\partial f_q}{\partial \lambda_{(p)}} = 0 \\ H_{(p,q)} &= \frac{\partial f_p}{\partial \lambda_{(q)}} = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

En este caso se supone que no existe dependencia entre los mecanismos de endurecimiento, igualándose a cero los módulos de endurecimiento combinados. Sustituyendo las ecuaciones (A.5) y (A.6) en la ecuación (A.9), obtenemos:

$$\left[\frac{\partial f_{(i)}}{\partial \sigma} \right]^T E0 \left(\dot{\varepsilon} - \sum_{j=q,p} \dot{\lambda}_{(j)} \frac{\partial Q_{(j)}}{\partial \sigma} \right) - \sum_{j=q,p} H_{(i,j)} \dot{\lambda}_{(j)} + \frac{\partial f_{(i)}}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0$$

Simplificando se reduce en:

$$\left[\frac{\partial f_{(i)}}{\partial \sigma} \right]^T E_0 \dot{\varepsilon} - \bar{H}_{(i,j)} \dot{\lambda}_{(j)} + \frac{\partial f_{(i)}}{\partial \psi} \dot{\psi} = 0 \quad (\text{A.11})$$

donde:
$$\bar{H}_{(i,j)} = \sum_{j=q,p} \left(\left[\frac{\partial f_{(i)}}{\partial \sigma} \right]^T E_0 \frac{\partial Q_{(j)}}{\partial \sigma} + H_{(i,j)} \right)$$

Si a la inversa de $\bar{H}_{(i,j)}$ le llamamos $\bar{G}_{(i,j)}$ y despejamos $\dot{\lambda}_{(j)}$ de (A.11), obtenemos:

$$\dot{\lambda}_{(j)} = \sum_{k=q,p} \bar{G}_{(j,k)} \left(\left[\frac{\partial f_{(k)}}{\partial \sigma} \right]^T E_0 \dot{\varepsilon} + \frac{\partial f_{(k)}}{\partial \psi} \dot{\psi} \right) \quad (\text{A.12})$$

Sustituyendo (A.6) y (A.12) en (A.5), se obtiene:

$$\dot{\sigma} = \left(E_0 - \sum_{i=q,p} \sum_{j=q,p} \bar{G}_{(i,j)} E_0 \left[\frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \sigma} \right] \times \left[\frac{\partial f_{(j)}}{\partial \sigma} \right]^T E_0 \right) \dot{\varepsilon} + \left(\sum_{i=q,p} \sum_{j=q,p} \bar{G}_{(i,j)} E_0 \left[\frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial f_{(j)}}{\partial \psi} \right] \right) \dot{\psi} \quad (\text{A.13})$$

La expresión (A.13) relaciona el incremento de tensiones con la variación de la deformación y la succión a la que se encuentra el material.

La ecuación que relaciona el incremento de deformaciones con el de tensiones se empieza a deducir a partir de la ecuación (A.9), despejando $\dot{\lambda}_{(j)}$ y asumiendo que $G_{(i,j)} = [H_{(i,j)}]^{-1}$, tenemos:

$$\dot{\lambda}_{(j)} = \sum_{j=q,p} G_{(j,k)} \left[\frac{\partial f_{(k)}}{\partial \sigma} \right]^T \dot{\sigma} + \sum_{j=q,p} G_{(j,k)} \frac{\partial f_{(k)}}{\partial \psi} \dot{\psi} \quad (\text{A.14})$$

Como:

$$\dot{\varepsilon} = C_0 \dot{\sigma} + \dot{\varepsilon}^p = C_0 \dot{\sigma} + \dot{\lambda}_{(i)} \frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \sigma} \quad (\text{A.15})$$

donde $C_0 = E_0^{-1}$. Sustituyendo (A.14) en (A.15) y operando, se obtiene la ecuación buscada:

$$\dot{\varepsilon} = \left(C_0 + \sum_{i=q,p} \sum_{j=q,p} G_{(i,j)} \left[\frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \sigma} \right] \times \left[\frac{\partial f_{(j)}}{\partial \sigma} \right]^T \right) \dot{\sigma} + \sum_{i=q,p} \sum_{j=q,p} G_{(i,j)} \left[\frac{\partial Q_{(i)}}{\partial \sigma} \right] \left[\frac{\partial f_{(j)}}{\partial \psi} \right] \dot{\psi} \quad (\text{A.16})$$

5.5.2 Derivadas involucradas en la formulación. Parte desviadora

- Resumen de las ecuaciones involucradas en la superficie de fluencia desviadora:

$$f_q = \frac{q}{p} - \eta_s = 0 \quad (5.6)$$

$$\frac{\eta_s}{rM_{cr}(W_E^P, \psi)} = \frac{\varepsilon_q^P}{b(W_E^P) + \varepsilon_q^P} \quad (5.7)$$

$$r = 1 - k\psi_e = 1 - k(v - v_{cr}) \quad (5.8)$$

$$v_{cr} = y(\psi) - m_{cr}p \quad (5.9)$$

$$y(\psi) = y_0 + \alpha_y \ln \left(\frac{\psi + p_{atm}}{p_{atm}} \right) \quad (5.10)$$

$$M_{cr}(W_E^P, \psi) = M_{crs}(W_E^P) \left(1 + k_s \left(\frac{\psi}{b_k + \psi} \right) \right) \quad (5.11)$$

$$M_{crs}(W_E^P) = M_{c_{res}} + (M_{c_0} - M_{c_{res}}) e^{-aW_E^P} \quad (5.12)$$

$$b(W_E^P) = B_0 + B \left(\frac{W_T^P}{c + W_T^P} \right) \quad (5.13)$$

$$Q_q = q - p \text{sen } \psi_m \quad (5.23)$$

$$\text{sen } \psi_m = \frac{\text{sen } \varphi_m - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_{cr}}{1 - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_m \text{sen } \varphi_{cr}} \quad (5.21)$$

$$\text{sen } \varphi_m = \frac{\eta_s}{(2 + 1/3\eta_s)} \quad (5.22)$$

$$\text{sen } \varphi_{cr} = \frac{3M_{cr}}{6 + M_{cr}}$$

- Derivadas de la superficie de fluencia desviadora respecto a las tensiones $\frac{\partial f_q}{\partial \sigma}$:

$$\triangleright \frac{\partial f_q}{\partial p} = -\frac{q}{p^2} + \frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial v_{cr}} \frac{\partial v_{cr}}{\partial p} + \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{M_{crs}} \frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial W_T^P} \right) \frac{\partial W_E^P}{\partial p} \right) \quad (\text{A.17})$$

$$\frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} = -1 \quad (\text{A.18})$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial v_{cr}} = \frac{M_{cr} k \varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)} \quad (\text{A.19})$$

$$\frac{\partial v_{cr}}{\partial p} = -m_{cr} \quad (\text{A.20})$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} = \frac{r \varepsilon_q^p}{b + \varepsilon_q^p} \quad (\text{A.21})$$

$$\frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} = \left(1 + k_s \left(\frac{\psi}{b_k + \psi} \right) \right) \quad (\text{A.22})$$

$$\frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} = -a (M_{c0} - M_{c_{res}}) e^{-a W_E^P} \quad (\text{A.23})$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial b} = -\frac{r M_{cr} \varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)^2} \quad (\text{A.24})$$

$$\frac{\partial b}{\partial W_T^P} = \frac{Bc}{(c + W_T^P)^2} \quad (\text{A.25})$$

$$\frac{\partial W_E^P}{\partial p} = d \varepsilon_p^p \quad (\text{A.26})$$

$$\triangleright \frac{\partial f_q}{\partial q} = \frac{1}{p} + \frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{M_{crs}} \frac{\partial M_{crs}}{W_E^P} + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial W_T^P} \right) \frac{\partial W_E^P}{\partial q} \quad (\text{A.27})$$

$$\frac{\partial W_E^P}{\partial q} = d \varepsilon_q^p \quad (\text{A.28})$$

- Derivadas del potencial plástico desviador respecto a las tensiones $\frac{\partial Q_q}{\partial \sigma}$:

$$\begin{aligned} \triangleright \frac{\partial Q_q}{\partial p} &= -\text{sen } \psi_m + \frac{\partial Q_q}{\partial \text{sen } \psi_m} \\ &\left(\frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial e_{cr}} \frac{\partial e_{cr}}{\partial p} + \frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial \text{sen } \varphi_m} \frac{\partial \text{sen } \varphi_m}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial v_{cr}} \frac{\partial v_{cr}}{\partial p} + \frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} \frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} \frac{\partial W_E^P}{\partial p} + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial W_T^P} \frac{\partial W_T^P}{\partial p} \right) \right. \\ &\left. + \frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial \text{sen } \varphi_{cr}} \frac{\partial \text{sen } \varphi_{cr}}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial W_E^P} \frac{\partial W_E^P}{\partial p} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

$$\frac{\partial Q_q}{\partial \text{sen } \psi_m} = -p \quad (\text{A.30})$$

$$\frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial e_{cr}} = \frac{\alpha (e/e_{cr})^{\alpha-1} (e/e_{cr}^2) \text{sen } \varphi_{cr} (1 - \text{sen}^2 \varphi_m)}{(1 - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_m \text{sen } \varphi_{cr})^2} \quad (\text{A.31})$$

$$\frac{\partial v_{cr}}{\partial p} = \frac{\partial e_{cr}}{\partial p} = -m_{cr}$$

$$\frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial \text{sen } \varphi_m} = \frac{1 - (e/e_{cr})^{2\alpha} \text{sen}^2 \varphi_{cr}}{(1 - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_m \text{sen } \varphi_{cr})^2} \quad (\text{A.32})$$

$$\frac{\partial \text{sen } \varphi_m}{\partial \eta_s} = \frac{2}{(2 + 1/3 \eta_s)^2} \quad (\text{A.33})$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial v_{cr}} = \frac{M_{cr} k \varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)}$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} = \frac{r \varepsilon_q^p}{b + \varepsilon_q^p}$$

$$\frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} = \left(1 + k_s \left(\frac{\psi}{b_k + \psi} \right) \right)$$

$$\frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} = -a (M_{c0} - M_{cres}) e^{-a W_E^P}$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial b} = -\frac{r M_{cr} \varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)^2}$$

$$\frac{\partial b}{\partial W_T^P} = \frac{Bc}{(c + W_T^P)^2}$$

$$\frac{\partial W_E^P}{\partial p} = d \varepsilon_p^p$$

$$\frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial \text{sen } \varphi_{cr}} = \frac{(e/e_{cr})^\alpha (\text{sen}^2 \varphi_m - 1)}{\left(1 - (e/e_{cr})^\alpha \text{sen } \varphi_m \text{sen } \varphi_{cr}\right)^2} \quad (\text{A.34})$$

$$\frac{\partial \text{sen } \varphi_{cr}}{\partial M_{cr}} = \frac{18 + 3M_{cr}}{(6 + M_{cr})^2} \quad (\text{A.35})$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial Q_q}{\partial q} = 1 \\ \rightarrow & + \frac{\partial Q_q}{\partial \text{sen } \psi_m} \left(\frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial \text{sen } \varphi_m} \frac{\partial \text{sen } \varphi_m}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} \frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} \frac{\partial W_E^P}{\partial q} + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial W_T^P} \frac{\partial W_T^P}{\partial q} \right) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \text{sen } \psi_m}{\partial \text{sen } \varphi_{cr}} \frac{\partial \text{sen } \varphi_{cr}}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} \frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} \frac{\partial W_E^P}{\partial q} \right) \quad (\text{A.36}) \\ & \frac{\partial W_E^P}{\partial q} = d\varepsilon_q^p \end{aligned}$$

- Derivadas del módulo de endurecimiento $H_{(q,q)}$:

$$H_{(q,q)} = - \sum_{i=p,q} \left(\frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial \varepsilon_i^p} + \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} \frac{\partial M_{crs}}{\partial W_E^P} + \frac{\partial \eta_s}{\partial b} \frac{\partial b}{\partial W_T^P} \right) \frac{\partial W_E^P}{\partial \varepsilon_i^p} \right) \frac{\partial Q_q}{\partial i} \right)$$

$$\rightarrow \frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} = -1$$

$$\rightarrow \frac{\partial \eta_s}{\partial \varepsilon_q^p} = \frac{rM_{cr}b}{(b + \varepsilon_q^p)^2} \quad (\text{A.37})$$

$$\rightarrow \frac{\partial \eta_s}{\partial \varepsilon_p^p} = \frac{\partial \eta_s}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_p^p} \quad (\text{A.38})$$

$$\frac{\partial \eta_s}{\partial v} = - \frac{kM_{cr}\varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)} \quad (\text{A.39})$$

$$\frac{\partial v}{\partial \varepsilon_p^p} = -v \quad (\text{A.40})$$

$$\rightarrow \frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} = \frac{r\varepsilon_q^p}{b + \varepsilon_q^p}$$

$$\rightarrow \frac{\partial M_{cr}}{\partial M_{crs}} = 1 + k_s \left(\frac{\psi}{b_k + \psi} \right)$$

$$\begin{aligned}
\triangleright \frac{\partial M_{cr}}{\partial W_E^P} &= -a(M_{c0} - M_{c_{res}})e^{-aW_E^P} \\
\triangleright \frac{\partial \eta_s}{\partial b} &= -\frac{rM_{cr}\varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)^2} \\
\triangleright \frac{\partial b}{\partial W_T^P} &= \frac{Bc}{(c + W_T^P)^2} \\
\triangleright \frac{\partial W_E^P}{\partial \varepsilon_q^p} &= q \tag{A.41}
\end{aligned}$$

$$\triangleright \frac{\partial W_E^P}{\partial \varepsilon_p^p} = p \tag{A.42}$$

- Derivadas de la superficie de fluencia de corte respecto a la succión $\frac{\partial f_q}{\partial \psi}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f_q}{\partial \psi} &= \frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} \left(\frac{\partial \eta_s}{\partial v_{cr}} \frac{\partial v_{cr}}{\partial y(\psi)} \frac{\partial y(\psi)}{\partial \psi} + \frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} \frac{\partial M_{cr}}{\partial \psi} \right) \\
\triangleright \frac{\partial f_q}{\partial \eta_s} &= -1 \\
\triangleright \frac{\partial \eta_s}{\partial v_{cr}} &= \frac{M_{cr}k\varepsilon_q^p}{(b + \varepsilon_q^p)} \\
\triangleright \frac{\partial v_{cr}}{\partial y(\psi)} &= 1 \tag{A.43}
\end{aligned}$$

$$\triangleright \frac{\partial y(\psi)}{\partial \psi} = \frac{\alpha_y}{(\psi + p_{at})} \tag{A.44}$$

$$\begin{aligned}
\triangleright \frac{\partial \eta_s}{\partial M_{cr}} &= \frac{r\varepsilon_q^p}{b + \varepsilon_q^p} \\
\triangleright \frac{\partial M_{cr}}{\partial \psi} &= \frac{k_s M_{crs} b_k}{(b_k + \psi)^2} \tag{A.45}
\end{aligned}$$

5.5.3 Derivadas involucradas en la formulación. Parte volumétrica

- Resumen de las ecuaciones involucradas en la superficie de fluencia volumétrica:

$$f_p(p) = p - p^* = 0 \quad (p < p_y) \quad (5.15)$$

$$f_p(p, \psi) = p \left[\lambda^i + \lambda^d(\psi) - \kappa \right] - p_y \lambda^d(\psi) - p^* (\lambda^i - \kappa) \quad (5.16)$$

$$\lambda^d(\psi) = \lambda_o^d + \alpha_s \ln \left(\frac{\psi + P_{atm}}{P_{atm}} \right) \quad (5.17)$$

$$dp^* = \frac{vd \varepsilon_p^p}{\lambda^i - \kappa} \quad (5.18)$$

$$Q_p = f_p \quad (5.24)$$

- Derivadas de la superficie de fluencia desviadora respecto a las tensiones $\frac{\partial f_p}{\partial \sigma}$:

$$\triangleright \frac{\partial f_p}{\partial p} = 1 \quad \text{para } p < p_y \quad (A.46)$$

$$\triangleright \frac{\partial f_p}{\partial p} = \lambda^i + \lambda^d(\psi) - \kappa \quad \text{para } p > p_y \quad (A.47)$$

$$\triangleright \frac{\partial f_p}{\partial q} = 0 \quad (A.48)$$

- Derivadas del potencial plástico volumétrico respecto a las tensiones $\frac{\partial Q_p}{\partial \sigma}$:

$$\triangleright \frac{\partial Q_p}{\partial p} = 1 \quad \text{para } p < p_y \quad (A.49)$$

$$\triangleright \frac{\partial Q_p}{\partial p} = \lambda^i + \lambda^d(\psi) - \kappa \quad \text{para } p > p_y \quad (A.50)$$

$$\triangleright \frac{\partial Q_p}{\partial q} = 0 \quad (A.51)$$

- Derivadas del módulo de endurecimiento $H_{(p,p)}$:

$$H_{(p,p)} = \frac{\partial F_{(p)}}{\partial \lambda_{(p)}} = - \frac{\partial f_p}{\partial p^*} \frac{\partial p^*}{\partial \varepsilon_p^p} \frac{\partial Q_p}{\partial p}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial f_p}{\partial p^*} &= -1 && \text{para } p < p_y \\ \frac{\partial f_p}{\partial p^*} &= -(\lambda^i - \kappa) && \text{para } p > p_y \end{aligned} \quad (\text{A.52})$$

$$\rightarrow \frac{\partial p^*}{\partial \varepsilon_p^p} = \frac{\nu}{\lambda^i - \kappa} \quad (\text{A.53})$$

- Derivadas de la superficie de fluencia volumétrica respecto a la succión $\frac{\partial f_p}{\partial \psi}$:

$$\rightarrow \frac{\partial f_p}{\partial \psi} = \frac{\partial f_p}{\partial \lambda^d} \frac{\partial \lambda^d}{\partial \psi} \quad (\text{A.54})$$

$$\frac{\partial f_p}{\partial \lambda^d} = p - p_y \quad (\text{A.55})$$

$$\frac{\partial \lambda^d}{\partial \psi} = -\alpha_s \left(\frac{1}{\psi + P_{atm}} \right) \quad (\text{A.56})$$