

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Departament d'Enginyeria de Sistemes , Automàtica i Informàtica Industrial

APORTACIÓ A LA IDENTIFICACIÓ PARAMÈTRICA DE SISTEMES DINÀMICS

Memòria presentada per accedir al grau de
Doctor Enginyer Industrial

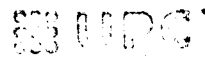
Teresa Escobet i Canal
1997

T 97/148

Aquesta tesi ha estat enregistrada
amb el n.ºm. 210

APORTACIÓ A LA IDENTIFICACIÓ PARAMÈTRICA DE SISTEMES DINÀMICS

Memòria presentada al departament
d'Enginyeria de Sistemes, Automàtica i Informàtica Industrial,
per accedir al grau de
Doctor Enginyer Industrial



BIBLIOTECA RECTOR GABRIEL FERRATÉ
Campus Nord

per
Teresa Escobet i Canal
1997

Director
Joseba Quevedo i Casín
Dept. ESAII

*Dedicada al meu marit i
a les meves filles.*

Agraïments

Finalment aquest treball ha arribat al seu termini. Com en tota tesi, hi ha hagut moments de treball intens i altres de desèncis. De tota manera, el treball desenvolupat no hauria estat possible sense el suport, tant científic com humà, de les persones que m'han envoltat aquests últims anys, a totes elles m'agradaria expressar el meu agraïment.

Primer de tot el meu agraïment més sincer al meu director de tesi en Joseba Quevedo per la confiança dipositada en mi al llarg d'aquests anys. El suport que m'ha donat en tot moment ha fet possible la realització d'aquest treball.

A la meua companya de feina Rosa Argelaguet i el meu germà Toni Escobet, gràcies per la seva ajuda desinteressada. I als membres dels grups de Terrassa i Manresa, on el bon ambient de companyerisme i el suport rebut han afavorit el desenvolupament d'aquest treball.

Estic molt agraïda també a Josep Aguilar, Ceri Evans i Michel Weiss, amb els quals els treballs conjunts realitzats han sigut molt enriquidors.

Un agraïment molt especial pel meu marit, Salvador, que m'ha donat els ànims i suport necessaris per tirar endavant la meua feina. I com no, al meus pares que sempre m'han ajudat en tot el que han pogut i als que estic profundament agraïda.

Resum de la Tesi Doctoral

Una de les eines de que disposa un enginyer per a la modelització d'un procés és la *Identificació*. En aquesta tesi s'estudien dos dels aspectes relacionats amb la *Identificació paramètrica de sistemes dinàmics*, des del punt de vista temporal. El primer d'ells està relacionat amb el disseny de l'experiment, concretament en decidir el tipus de senyal d'excitació i les condicions en que cal realitzar l'experiment perquè el model discret estimat sigui representatiu del procés continu. I el segon, tracta de la determinació de l'ordre del model a estimat.

Com a banc de proves s'ha utilitzat un procés reconegut mundialment "ECC bench-mark model". Es caracteritza per ser un procés complex, amb una dinàmica lenta i una de ràpida, retard pur, de fase no mínima, soroll colorat, saturacions a l'entrada i a la sortida, i pertorbacions de càrrega.

Per obtenir un bon model d'un procés real, utilitzant aquesta eina, cal primerament excitar correctament el procés. Els experts en identificació utilitzen senyals d'excitació diferents en funció de si es treballa en el domini temporal o freqüencial. En el domini temporal, els senyals majoritàriament utilitzats són senyals binaris pseudo aleatoris (PRBS), mentre que en el domini freqüencial els senyals d'excitació periòdics: multisinusoïdals i binaris de longitud màxima (MLBS) són els més emprats. L'aportació realitzada en aquest camp es fonamenta en la utilització de senyals periòdics però en el domini temporal i es resumeix en els següents punts:

- S'ha demostrat analíticament que els senyals periòdics milloren la relació senyal útil senyals soroll fent un filtrat freqüencial o la mitjana entre els diferents períodes.
- Per el disseny d'aquest tipus de senyals cal conèixer l'amplada de banda del procés estudiat, en aquest treball es presenta una forma ràpida per a la seva determinació.

- S'ha fet un estudi comparatiu dels models estimats resultants d'excitar el procés "ECC bench-mark", en presència de soroll colorat, amb senyals periòdics i no periòdics. S'ha observat que la qualitat del model estimat està directament relacionada amb l'energia total dels senyals d'excitació.
- S'ha introduït el terme filtrat freqüencial o selecció de les freqüències contingudes en el senyal d'excitació. S'ha demostrat que, per millorar la relació senyal útil senyal soroll i consegüentment la qualitat del model estimat, en el cas d'excitar un procés amb un senyal periòdic d'amplada de banda limitada (senyals multisinusoïdals) calia fer un filtrat freqüencial del senyal de sortida del procés.

Partint del fet de que la majoria dels processos a estudiar són de naturalesa contínua, s'ha avaluat en quines condicions cal realitzar l'experiment perquè els models discrets estimats siguin representatius d'un procés continu. Les aportacions realitzades en aquest camp són:

- S'ha demostrat analíticament i experimentalment que els zeros sobre estimats que apareixen en el numerador de la funció de transferència contínua, fruit de la transformació d'un model discret a continu, són menyspreables sempre que el seu valor sigui superior a una dècada de la pulsació màxima del senyal d'excitació.
- S'ha comprovat que la transformació de models discrets a continus no modifica la qualitat del model estimat sempre que l'adquisició de dades es realitzi en presència d'un mantenidor d'ordre zero.
- En el cas de no complir-se la condició anterior, s'ha observat que el model estimat és de poca qualitat. Analíticament s'ha demostrat que la relació entre un model discret en presència d'un mantenidor d'ordre zero i sense era deguda a la reconstrucció del mantenidor d'ordre zero. S'ha proposat un mètode per addicionar al senyal de sortida mostrat l'efecte d'un mantenidor d'ordre zero i millorar la qualitat del model estimat.

Una de les etapes més importants en la identificació de sistemes dinàmics és la de definir l'estructura i l'ordre del model paramètric. Aquesta etapa és merament subjectiva i per aquest motiu s'han desenvolupat molts test i criteris. En aquesta àrea, s'ha fet un estudi d'alguns d'aquest test i criteris, avaluant-se en quines circumstàncies són o no útils per a la determinació de l'ordre d'una estructura fixada prèviament. Cal destacar com a aportacions realitzades:

- La utilització de la resposta impuls finita no sols per estimar el valor del retard pur del procés, sinó per fixar un valor a partir del qual el primer paràmetre del numerador, b_0 , pot ser considerat o no significatiu.

- L'estudi experimental de quins són els millors criteris d'identificació en funció del mètode d'estimació emprat.
- La utilització de la matriu de covariància estimada per a obtenir informació sobre el retard pur del procés com a resultat d'utilitzar el test estadístic t_{Student} .
- L'estudi analític de la situació dels pols i zeros d'un model continu en funció de la relació entre l'amplada de banda del procés i la freqüència de mostreig.

Com a resum de tots els aspectes analitzats, s'ha desenvolupat i validat, amb processos reals i simulats, una metodologia que permet obtenir el model matemàtic discret d'un procés a partir de l'anàlisi dels senyals d'entrada i sortida. L'entorn escollit per a la seva implementació ha estat el programa MATLAB per ser un programa d'ús en augment, fàcil d'aconseguir i pot ser utilitzar en moltes plataformes diferents, és per aquest motiu que l'eina desenvolupada pot tenir un ús molt ampli.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Introducció a la Identificació com a eina per a la modelització de sistemes dinàmics ..	2
1.2	Problemes globals de la identificació.....	5
1.2.1	Problemàtica originada de l'estudi dels senyals excitació	5
1.2.2	La problemàtica de la determinació de l'estructura	5
1.3	Motivacions i objectius.....	6
1.4	Organització de la tesi	7
2	Senyals d'excitació periòdics. Propietats i disseny	9
2.1	Introducció	9
2.2	Propietats dels senyals d'excitació periòdics	9
2.2.1	Característiques generals.....	9
2.2.2	Propietats dels senyals periòdics.....	11
2.3	Descripció dels senyals periòdics	12
2.3.1	Senyals binaris de longitud màxima, MLBS.....	12
2.3.2	Senyals multisinusoidals	14

2.4	Avantatges dels senyals d'excitació periòdics per a l'estimació de sistemes.....	16
2.5	Disseny de senyals d'excitació periòdics	18
2.5.1	Estudi previ de les característiques d'un procés.....	18
2.5.2	Descripció dels senyals d'excitació periòdics dissenyats.....	22
2.5.2.1	Senyals Multisinusoïdals.....	22
2.5.2.2	Senyal binari de longitud màxima, ml7.....	26
2.6	Conclusions.....	28
3	Models i Mètodes d'estimació	29
3.1	Introducció	29
3.2	Els models i els mètodes d'estimació paramètrics discrets.....	31
3.2.1	Estructures dels models lineals discrets.....	31
3.2.2	Objectius dels mètodes d'estimació paramètrics	35
3.2.3	Selecció dels mètodes d'estimació	35
3.3	Mètode d'estimació per mínims quadrats, LS.	37
3.3.1	Descripció del mètode de mínims quadrats	37
3.3.2	Propietats del mètode LS	38
3.3.3	Solució de LS utilitzant l'equació normal.....	39
3.3.4	Solució de LS per triangulació ortonormal	39
3.4	Mètode de la variable instrument	41
3.4.1	Descripció del mètode de la variable instrument	41
3.4.2	Mètode IV òptim proposat per Ljung.....	43
3.4.3	Solució de l'estimació IV per triangulació ortogonal.....	44

3.5	Mètode d'error de sortida	45
3.5.1	Descripció del mètode d'error de sortida (OE).....	45
3.5.2	Algorisme de minimització iteratiu	48
3.6	Conclusions dels mètodes d'estimació.....	48
4	Estimació de models en el domini-S	51
4.1	Introducció	51
4.2	Estimació d'un model continu a partir de mesures discretes.....	52
4.2.1	Condició bàsica per a l'estimació discreta d'un procés continu.....	52
4.2.2	Conversió de models discrets a continus en presència d'un ZOH.....	54
4.2.2.1	Conversió d'un model discret a continu	55
4.2.3	Obtenció del model continu sense la presència d'un ZOH.....	58
4.2.3.1	Exemple d'aplicació	60
4.3	Criteris de comparació	61
4.3.1	Criteris paramètrics.....	61
4.3.2	Criteris error	63
4.4	Estimació d'un procés en temps continu.....	63
4.4.1	Descripció del procés.....	64
4.4.2	Comparació dels models estimats amb el procés sense soroll	65
4.4.2.1	Avaluació dels criteris paramètrics.....	66
4.4.2.2	Avaluació dels criteris error.....	67
4.4.3	Comparació dels models estimats amb el procés pertorbat per un soroll colorat	69

4.4.3.1	Comparació dels errors temporals.....	69
4.4.3.2	Comparació dels errors freqüencials	71
4.5	Conclusions.....	73
5	Comportament dels mètodes d'estimació temporals en processos no ideals	75
5.1	Introducció	75
5.2	Escenari amb pertorbació de càrrega no mesurable.....	76
5.2.1	Descripció de l'escenari	76
5.2.2	Resultats obtinguts amb els mètodes d'estimació OE i IV òptim.....	76
5.2.3	Transformació delta	78
5.2.4	Filtrat freqüencial.....	79
5.3	Escenari amb saturació a l'entrada	80
5.3.1	Descripció de l'escenari	80
5.3.2	Resultats obtinguts amb els mètodes d'estimació.....	81
5.4	Escenari amb saturació a la sortida	84
5.4.1	Descripció de l'escenari.....	84
5.4.2	Resultats obtinguts amb els mètodes d'estimació.....	84
5.5	Escenari amb actuator	87
5.5.1	Descripció de l'escenari	87
5.5.2	Resultats obtinguts amb els mètodes d'estimació.....	88
5.5.3	Obtenció del model continu sense la presència del ZOH.....	90
5.6	Conclusions.....	93
6	Determinació de l'estructura del model	95
6.1	Introducció	95

6.2	Noció d'ordre d'un model	95
6.3	Determinació de l'estructura a partir de l'anàlisi de correlació	97
6.3.1	Anàlisi de correlació.....	97
6.3.2	Determinació del retard pur del procés a partir de la resposta impuls	99
6.3.2.1	Validació del mètode proposat a partir de l'estudi d'un procés concret.....	100
6.3.3	Relació entre el model FIR i la funció de transferència.....	102
6.4	Determinació de l'estructura a partir de la funció residu.....	103
6.4.1	Evolució de la funció residu estimada amb el mètode mínims quadrats, V_{LS} ..	103
6.4.2	Evolució de la funció residu estimada pel mètode de la variable instrument òptim.	105
6.4.3	Evolució de la funció residu estimada pel mètode de la variable instrument utilitzant com a algorisme de càlcul la factorització QR.....	107
6.4.4	Evolució de la funció residu estimada pel mètode d'error de sortida (OE) ...	108
6.5	Criteris d'identificació	109
6.5.1	Descripció dels criteris d'identificació	109
6.5.2	Utilització dels criteris d'identificació per a la determinació de l'estructura del model.....	111
6.5.2.1	Mètode d'estimació LS	111
6.5.2.2	Mètode d'estimació IV òptim.....	113
6.5.2.3	Mètode d'estimació IV segons l'algorisme de càlcul QR.....	114
6.5.2.4	Mètode d'estimació OE.....	116

6.6	Coeficients del numerador i denominador del model estimat	118
6.6.1	Test estadístic t-Student	118
6.7	Situació dels pols i zeros del model estimat	119
6.7.1	Compensació entre pols i zeros	119
6.7.2	Situació dels pols i zeros de la funció de transferència discreta	120
6.7.2.1	Estudi dels pols reals	121
6.7.2.2	Pols complexes conjugats	121
6.8	Conclusions	125
7	Metodologia desenvolupada. Aplicacions a casos reals	127
7.1	Introducció	127
7.2	Metodologia proposada per a la determinació de l'estructura òptima	128
7.2.1	Estudi previ o anàlisi de correlació	128
7.2.2	Identificació del model	129
7.3	Interfícies amb l'usuari	131
7.3.1	Anàlisi de les dades d'entrada i sortida	131
7.3.2	Identificació de l'estructura, estimació dels paràmetres i validació	133
7.4	Aplicació a l'estudi de casos reals	136
7.4.1	Modelització del procés simulat "ECC bench-mark" amb soroll colorat	136
7.4.1.1	Resultats de la identificació	136
7.4.2	Modelització d'un procés de cabal	139
7.4.2.1	Descripció del procés	139
7.4.2.2	Disseny del senyal d'excitació	140

7.4.2.3	Anàlisi dels senyals d'entrada i sortida	141
7.4.2.4	Resultats d'identificació.....	143
7.4.3	Modelització d'un procés de temperatura	148
7.4.3.1	Descripció del procés	148
7.4.3.2	Anàlisi dels senyals d'entrada i sortida	149
7.4.3.3	Resultats d'identificació.....	151
7.4.3.4	Validació del model identificat.....	152
7.4.3.5	Estudi d'altres models per diferents posicions del mesurador de temperatura.....	153
7.4.4	Motor de corrent contínua	156
7.4.4.1	Descripció del procés	156
7.4.4.2	Anàlisi dels senyals d'entrada i sortida	157
7.4.4.3	Resultats d'identificació.....	157
7.5	Conclusions.....	160
8	Conclusions i Recerca	161
8.1	Conclusions.....	161
8.2	Recerca futura.....	163
A	Taules de resultats	165
A.1	Procés simulat sense soroll	165
A.2	Procés simulat amb soroll colorat	167
A.2.1	Dades normals.....	167
A.2.2	Senyal de sortida filtrat freqüencialment.....	170

A.3	Procés simulat amb pertorbació de càrrega	172
A.3.1	Dades normals.....	172
A.3.2	Dades tractades amb l'operador delta	174
A.3.3	Senyal de sortida filtrat freqüencialment.....	175
A.4	Procés simulat amb saturació a l'entrada.....	176
A.4.1	Dades normals.....	176
A.4.2	Dades escalades. Igual RMS.....	177
A.5	Procés simulat amb saturació a la sortida	178
A.5.1	Dades normals.....	178
A.5.2	Dades escalades. Igual RMS.....	179
A.6	Procés simulat amb un actuador de dinàmica ràpida	180
A.6.1	Senyal d'entrada al conjunt procés més actuador, $u(kT_s)$	180
A.6.2	Senyal d'entrada al procés, $x(kT_s)$	180
A.6.3	Senyals modificades freqüencialment	182
B	Simbologia i acrònims emprats	185
B.1	Simbologia emprada en aquest treball	185
B.2	Acrònims emprats.....	187
	Bibliografia	189

Índex de Figures

1.1	Etapes per a la identificació d'un procés	4
2.1	Generació d'un senyal MLBS	13
2.2	Diagrama de blocs d'un procés realimentat amb relè	18
2.3	Diagrama de Nyquist.....	19
2.4	Senyal de sortida del relè (—) i senyal de sortida del procés (---).....	21
2.5	Senyal multisinusoïdal sc70, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència	23
2.6	Senyal multisinusoïdal sc112, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència	24
2.7	Senyal multisinusoïdal lc70, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència	25
2.8	Senyal multisinusoïdal lc112, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència	26
2.9	Senyal MLBS ml7, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència	27
3.1	Classificació dels mètodes d'estimació paramètrics	30
3.2	Esquema blocs del model general (3.15).....	34
3.3	Relació entre mètodes d'estimació i models.....	36
3.4	Esquema de l'estimació OE.....	46

4.1	Diagrama de blocs del procés amb ZOH.....	53
4.2	Diagrama de blocs del procés mesurat en condicions BL	58
4.3	Diagrama de blocs del procés mesurat en presència d'un actuator amb dinàmica ràpida no menyspreable.....	59
4.4	Funció espectral de: $\frac{G_{ZOH}(\omega)}{G_{BL}(\omega)}$ i ... ZOH(ω)	61
4.5	Diagrama de blocs del procés simulat	64
4.6	Senyal Random: a) variació temporal; b) espectre.....	65
4.7	Valors del criteri paramètric dels pols no dominants en el domini Z	66
4.8	Valors del criteri paramètric dels pols no dominants en el domini S	67
4.9	Valors del criteri mitjana absoluta de l'error temporal (domini Z).....	68
4.10	Valors del criteri mitjana absoluta de l'error freqüencial en el domini S	68
4.11	Valors dels criteris errors obtinguts amb els senyals binaris	70
4.12	Valors dels criteris error temporal en funció dels senyals multisinusoïdals: sc70 i sc112, i del mètode d'estimació	70
4.13	Valors dels criteris error temporals en funció dels senyals multisinusoïdals: lc70 i lc112, i del mètode d'estimació.....	71
4.14	Valors dels criteris error freqüencial en el domini S en funció dels senyals: ml7, sc70 i lc70, i del mètode d'estimació.....	72
4.15	Valors dels criteris error freqüencial en el domini S en funció dels senyals multisinusoïdals: sc112 i lc112, i del mètode d'estimació.....	72
5.1	Diagrama de blocs de l'escenari amb pertorbació de càrrega	76
5.2	Evolució de $y(kT_s)$ amb un senyal excitació sc70 i amb pertorbació de càrrega	77
5.3	Comparació dels errors freqüencials en el domini S	77
5.4	Resposta freqüencial del model lineal () i quocient entre la transformada de Fourier de les dades (+).....	78

5.5	Valor dels errors freqüencials en el domini S. Dades modificats amb l'operador delta.....	79
5.6	Valors dels errors freqüencials en el domini S. Senyal de sortida filtrat freqüencialment.....	80
5.7	Diagrama de blocs del procés amb saturació a l'entrada	81
5.8	Error freqüencials en el domini S, mètode d'estimació OE.....	82
5.9	Modificació de l'espectre dels senyals d'entrada a la sortida d'una saturació: (—) senyal que teòricament entra al procés i (---) senyal real	83
5.10	Valor estimat del guany en funció de l'amplitud màxima de l'entrada, A	83
5.11	Diagrama de blocs del procés amb saturació a la sortida	84
5.12	Valors del criteri d'error freqüencial.....	85
5.13	Espectre de la sortida del procés ideal (—) i del procés amb saturació a la sortida (...), com a resultat d'aplicar al procés els senyals escalats.....	86
5.14	Variació temporal dels senyals d'entrada: sc70_e i lc70_e, amb el seu corresponent senyal de sortida.....	86
5.15	Diagrama de blocs del procés amb actuator	87
5.16	Valors dels criteris d'error freqüencial obtinguts amb les funcions de transferència estimades pel mètode OE: $\hat{G}_{yu}(s)$ i $\hat{G}_{yx}(s)$, i en funció del tipus de senyal excitació	88
5.17	Sortida a un graó unitari de: (—) $G_a(s)G_p(s)$ i (----) $\hat{G}_{yu}(s)$	89
5.18	Sortida a un graó unitari de: (—) $G_p(s)$ i (----) $G_{yx}(s)$	89
5.19	Guany i fase de la resposta freqüencial discreta: (----) estimada fent el quocient de la transformada de Fourier dels senyals $y(t)$ i $x(t)$; i (—) $G_p(\omega)$. Mitjana absoluta de l'error 0.129.....	91
5.20	Guany i fase de la resposta freqüencial discreta: (----) $G_{ZOH}(\omega)$; i (—) $G_p(\omega)$. Mitjana absoluta de l'error 0.009	92
5.21	Valors del criteri d'error freqüencial considerant els senyals $u(t)$ i $y_d(t)$	92

6.1	Diagrama de blocs del procés discret simulat	100
6.2	Funció d'autocovariància de l'entrada	101
6.3	Resposta impuls estimada segons el valor de SNR, (---) indica l'interval de confiança del 99% i (...) mostra l'interval de confiança del 95%.....	102
6.4	Valors de la funció residu, V_{LS} , per diferents valors de \hat{n} i $n\hat{k}$, cas B	104
6.5	Valors de la funció residu, V_{LS} , per diferents valors de \hat{n} i $n\hat{k}$, cas C	105
6.6	Valors de la funció residu, V_{IV} , per diferents valors de \hat{n} i $n\hat{k}$, cas B.....	106
6.7	Valors de la funció residu, V_{QR} , per diferents valors de \hat{n} i $n\hat{k}$, cas B.....	107
6.8	Valors de la funció residu, V_{OE} , per diferents valors de \hat{n} i $n\hat{k}$, cas B.....	108
6.9	Variació dels criteris d'identificació considerats en funció de d i N	111
6.10	Variació dels criteris d'identificació, W_{LS} , pel cas B i considerant $n\hat{k}=1$	112
6.11	Variació dels criteris d'identificació, W_{QR} , pel cas B i considerant $n\hat{k}=1$	115
6.12	Variació dels criteris d'identificació, W_{OE} , pel cas C i considerant $n\hat{k}=1$	117
6.13	Situació dels pols i zeros d'un model sobre-parametritzat, mètode d'estimació OE	120
6.14	Situació dels pols discrets per $0 < \xi < 1$ i en funció de α	124
7.1	Esquema per a la determinació aproximada del retard pur.....	129
7.2	Esquema per a la determinació de l'ordre del model	130
7.3	Menú de l'anàlisi de dades.....	132
7.4	Menú d'identificació del model.....	133
7.5	Informació obtinguda a partir de la resposta impuls estimada.....	134
7.6	Primera etapa per a la selecció de l'estructura del model.....	134
7.7	Segona etapa per a la selecció de l'estructura del model	135

7.8	Validació del model estimat a partir de la resposta freqüencial	135
7.9	Resum de les característiques del model identificat	136
7.10	Evolució temporal dels senyals d'entrada i sortida del procés simulat "ECC bench-mark".....	137
7.11	Informació obtinguda a partir de la resposta impuls estimada, procés simulat "ECC bench-mark"	137
7.12	Iteracions realitzades per a la identificació de l'estructura del model "ECC bench-mark".....	138
7.13	Resum dels resultats d'identificació del model "ECC bench-mark".....	139
7.14	Esquema del procés de cabal	140
7.15	Senyal de sortida del relè (—) i sortida del procés (---).....	141
7.16	Evolució temporal dels senyals d'entrada i sortida superposant els diferents períodes, procés de cabal.....	142
7.17	Contingut freqüencial dels senyals d'entrada i sortida, procés de cabal	142
7.18	Covariància del senyal de sortida, procés de cabal.....	143
7.19	Informació obtinguda a partir de la resposta impuls estimada, procés de cabal	144
7.20	Iteracions realitzades per a la identificació de l'ordre del model, procés de cabal..	144
7.21	Resum dels resultats d'identificació del procés de cabal, $n\hat{a} = 2$, $n\hat{b} = 2$ i $n\hat{k} = 5$.	145
7.22	Estructura del model, $n\hat{a} = 2$, $n\hat{b} = 2$ i $n\hat{k} = 5$, procés de cabal.....	146
7.23	Estructura del model $n\hat{a} = 2$, $n\hat{b} = 3$ i $n\hat{k} = 5$, procés de cabal.....	147
7.24	Resum dels resultats d'identificació del procés de cabal, model $n\hat{a} = 2$, $n\hat{b} = 3$ i $n\hat{k} = 5$	148
7.25	Esquema del procés de temperatura.....	148
7.26	Evolució temporal dels senyals d'entrada i sortida del procés de temperatura.....	149
7.27	Contingut freqüencial dels senyals d'entrada i sortida, procés de temperatura	150

7.28	Auto correlació de l'entrada i correlació creuada entre l'entrada i la sortida, procés de temperatura.....	150
7.29	Informació obtinguda a partir de la resposta impuls estimada, procés de temperatura.....	151
7.30	Iteracions per a la determinació de l'estructura del model, procés de temperatura	151
7.31	Resum dels resultats d'identificació del model, procés de temperatura.....	152
7.32	Resposta freqüencial estimada a partir dels senyals i del model estimat.....	153
7.33	Comparació de les respostes temporals reals i predites, procés de temperatura.....	153
7.34	Resum dels resultats d'identificació del model amb el mesurador de temperatura situat a la posició A.....	154
7.35	Situació dels pols i zeros del model estimat, error de predicció i estudi de la correlació entre l'entrada i l'error de predicció, procés de temperatura.....	155
7.36	Resposta freqüencial estimada a partir dels senyals i del model estimat, procés de temperatura.....	155
7.37	Comparació de les respostes temporals reals i predites, procés de temperatura.....	156
7.38	Motor de corrent continu	156
7.39	Evolució temporal dels senyals d'entrada i sortida del procés, motor cc.....	157
7.40	Informació obtinguda a partir de la resposta impuls estimada, motor cc.....	158
7.41	Resum dels resultats d'identificació, motor cc.....	158
7.42	Error de predicció i correlació entre l'entrada i l'error de predicció, motor cc.....	159
7.43	Comparació entre les respostes reals i predites per diferents rangs del senyal excitació, motor cc.....	159

Índex de Taules

3.1	Clarificació del terme linealitat.....	31
3.2	Relació entre el model general i els casos especials	34
5.1	Característiques dels nous senyals excitació	81
5.2	Comparació dels pols i zeros del procés real amb els del model estimat utilitzant el senyal d'entrada $sc70$ i el mètode d'estimació OE.....	90
6.1	Intervals de confiança per l'estudi de la independència dels senyals	100
6.2	Models identificats en funció del criteri d'identificació i el nivell de soroll, mètode d'estimació LS	112
6.3	Models identificats en funció del criteri d'identificació W_{IV} i el nivell de soroll	113
6.4	Valors dels diferents criteris d'identificació W_{IV} considerant $nk = 6$	113
6.5	Models identificats pel mètode QR segons els diferents criteris d'identificació	114
6.6	Valors dels diferents criteris d'identificació W_{IV} per $nk = 6$	115
6.7	Models identificats pel mètode OE segons els diferents criteris d'identificació	116
6.8	Valors dels diferents criteris d'identificació W_{OE} per $nk = 6$	116
6.9	Valors de t-Student dels models d'ordre: $n\hat{k} = 1$ i $\hat{n} = 6$ estimats a partir dels mètodes: LS, IV4 i OE.....	119

Capítol 1

Introducció

El funcionament dels processos industrials ha canviat dràsticament en les últimes dècades. Aquest canvi pot ser considerat com el primer resultat de l'evolució de la tecnologia de l'ordinador. L'automatització dels processos ha comportat un augment de la capacitat productiva d'alguns sectors industrials, obligant a la indústria a adaptar-se a la demanda del mercat i augmentar la seva competitivitat [Backx, 1993].

Per augmentar la competitivitat ha sigut necessari desenvolupar noves tècniques: mètodes i eines per maximitzar l'eficiència dels processos, desenvolupar controladors de molta qualitat, i maximitzar la flexibilitat dels processos amb el menor ajust del maquinari. Per assolir aquestes demandes és imprescindible conèixer el comportament dinàmic del procés, principalment de les parts crítiques.

L'enginyeria de control té com a objectiu principal millorar el comportament dels processos addicionant *sensors*, que mesurin varis senyals del procés i els senyals de comandament, *controladors*, que a partir del processat dels senyals mesurats dirigeixin l'*actuador*, el qual modifica el comportament del sistema [Boyd, 1990]. L'enginyeria de control consta de diferents etapes: *modelització o identificació, configuració del control, llei de control o disseny del controlador, implementació del controlador, i avaluació i validació del sistema de control.*

Segons [Seborg, 1994], les estratègies actuals de disseny de controladors poden classificar-se en dos grups: control convencional (manual, PID, de relació, en cascada, en avenç) i control avançat. Les estratègies de control avançat les subdivideix en tres grups: tècniques de control convencionals (control desacoblat, control selectiu, control amb compensació del retard pur), tècniques de control basades en models numèrics (control predictiu, control adaptatiu, control robust, control amb model intern) i tècniques de control basades en coneixement (sistemes expert, control neuronal, control fuzzy).

El 90% dels controladors de processos industrials són actualment controladors convencionals [Seborg, 1994]. Per a la utilització de les tècniques de disseny de controladors convencionals i, amb més motiu, les tècniques de control basades en models, cal un model numèric acurat del procés estudiat. Per aquestes dues raons, en aquesta tesi s'està particularment interessat en l'obtenció d'un model matemàtic amb el qual poder, posteriorment, dissenyar un controlador utilitzant les diferents tècniques de control esmentades.

El desenvolupament de les tècniques de disseny de controladors basats en models numèrics i les tècniques de modelització de processos dinàmics a partir de les observacions d'entrada i sortida dels processos, tècniques anomenades identificació, esdevenen simultàniament [Backx, 1993]. L'inici de les tècniques d'identificació, aplicades a processos amb una entrada i una sortida, té lloc a principis dels anys setanta [Åström, 1970]. No és fins la dècada anterior, quan s'apliquen a la modelització dels processos industrials [Ljung, 1987; Söderström, 1989], alguna d'elles útils per l'estudi de sistemes multi entrada multi sortida (MIMO).

1.1 Introducció a la Identificació com a eina per a la modelització de sistemes dinàmics

En l'actualitat, cada cop més el treball d'un enginyer esdevé la realització de models matemàtics de processos o objectes estudiats [Ljung 1994]. Els models són emprats en àrees tant diverses com: bioenginyeria, construcció, economia, meteorologia, processos químics,... L'abast d'utilització d'aquests models és molt ampli, pot anar des del disseny i fabricació a tasques de detecció i prevenció. Com s'ha comentat anteriorment, la Teoria de Control clàssica i avançada, es fonamenta en el fet que el model del procés és conegut. Per aquests motius és molt important la construcció de models en els processos reals.

Hi dues formes per a la construcció de models. La primera es basa en el coneixement de les propietats i lleis físiques del procés estudiat, se l'anomena *model físic*. L'altre consisteix en expressar, per mitjà d'un model matemàtic, el comportament d'un procés, se l'anomena *identificació*. En aquesta segona aproximació és on s'ha centrat el desenvolupament de la tesi.

S'anomena *identificació* a la tècnica de construir i complementar models a partir de les dades mesurades de les variables d'un procés: entrades, sortides i, possiblement també, perturbacions. En principi, hi ha tres formes diferents d'utilitzar els mètodes d'identificació amb l'objectiu de modelitzar:

1. Fer diferents experiments per estructurar el problema: triar els senyals d'interès, observar la dependència entre diferents variables, grau de linealitat del procés estudiat,...
2. Construir un model que descriu el comportament entre les entrades i les sortides, prescindint del comportament físic del procés. Hi ha diferents formes d'abordar el

problema, originant el que s'anomenen: *models no paramètrics* i *models paramètrics*, objecte d'estudi d'aquesta tesi.

3. Utilitzar les dades per a determinar els paràmetres no coneguts del model físic obtingut. En aquest cas es parla de *models "tailor-made"* dels quals cal estimar sols els valors dels paràmetres del model no coneguts.

Un aspecte que cal tenir present abans d'endinsar-nos més a fons en la identificació de sistemes dinàmics, és decidir els tipus de models matemàtics que es volen indentificar. Hi ha varies formes de catalogar els models matemàtics [Ljung, 1994]: deterministes o estocàstics, dinàmics o estàtics, de paràmetres distribuïts o concentrats, lineals i no lineals, i de temps continu o temps discret. Els tipus de models a avaluar es caracteritzaran per ser:

- *deterministes*, ja que es vol estudiar la relació entre l'entrada i la sortida amb una part no modelitzable;
- *dinàmics*, perquè l'objectiu és conèixer el comportament dinàmic d'un procés;
- *de paràmetres concentrats*, no es considera la variació en funció de l'espai;
- *lineals*, ja que són els emprats per la gran majoria de mètodes de disseny de controladors (control robust, control predictiu generalitzat, assignació de pols i zeros, control adaptatiu, entre altres [Seborg, 1994; Wellstead, 1979; Boyd, 1990]);
- i *discrets*, pel fet que es preveu que les dades seran discretes i perquè un dels objectius de la tesi és el de determinar en quines condicions un model discret esdevé representatiu d'un model continu.

Un cop decidit que el tipus de model serà un model paramètric, cal seguir una sèrie d'etapes per aconseguir identificar-lo:

- *Disseny de l'experiment d'identificació*. En aquesta primera etapa cal decidir, entre altres aspectes: el tipus de senyals excitació, el millor període d'adquisició de dades, la quantitat de dades necessàries;
- *Observació i millora de la qualitat de les dades capturades*. Abans d'emprar els mètodes d'estimació de paràmetres cal: observar i reparar les dades errònies, filtrar les altes freqüències, eliminar offsets i tendències, ...;
- *Determinació de l'estructura del model*. En aquesta etapa cal definir el tipus de models a utilitzar: continus o discrets, amb soroll correlat o no. I cal adoptar un procediment per a determinar l'ordre del model.
- *Estimació dels paràmetres*. Etapa la majoria de les vegades molt relacionada amb l'anterior, en ella es presenta el problema de decidir el mètode o mètodes d'estimació a utilitzar pel càlcul dels valors dels paràmetres. En general es pot optar entre dues tècniques diferents: en el domini temporal i en el domini freqüencial.

- *Validació del model.* És l'etapa en que cal preguntar-se si el model identificat és suficientment representatiu del procés estudiat.

Actualment hi ha molts programes comercials [Cellier, 1986] que poden ajudar a l'enginyer en algunes de les etapes d'identificació, concretament en les tasques d'estimació dels paràmetres i avaluació de les propietats del model estimat. Hi ha altres tasques però que depenen exclusivament de l'usuari [Ljung, 1994]. Aquestes tasques es mostren a la figura 1.1.

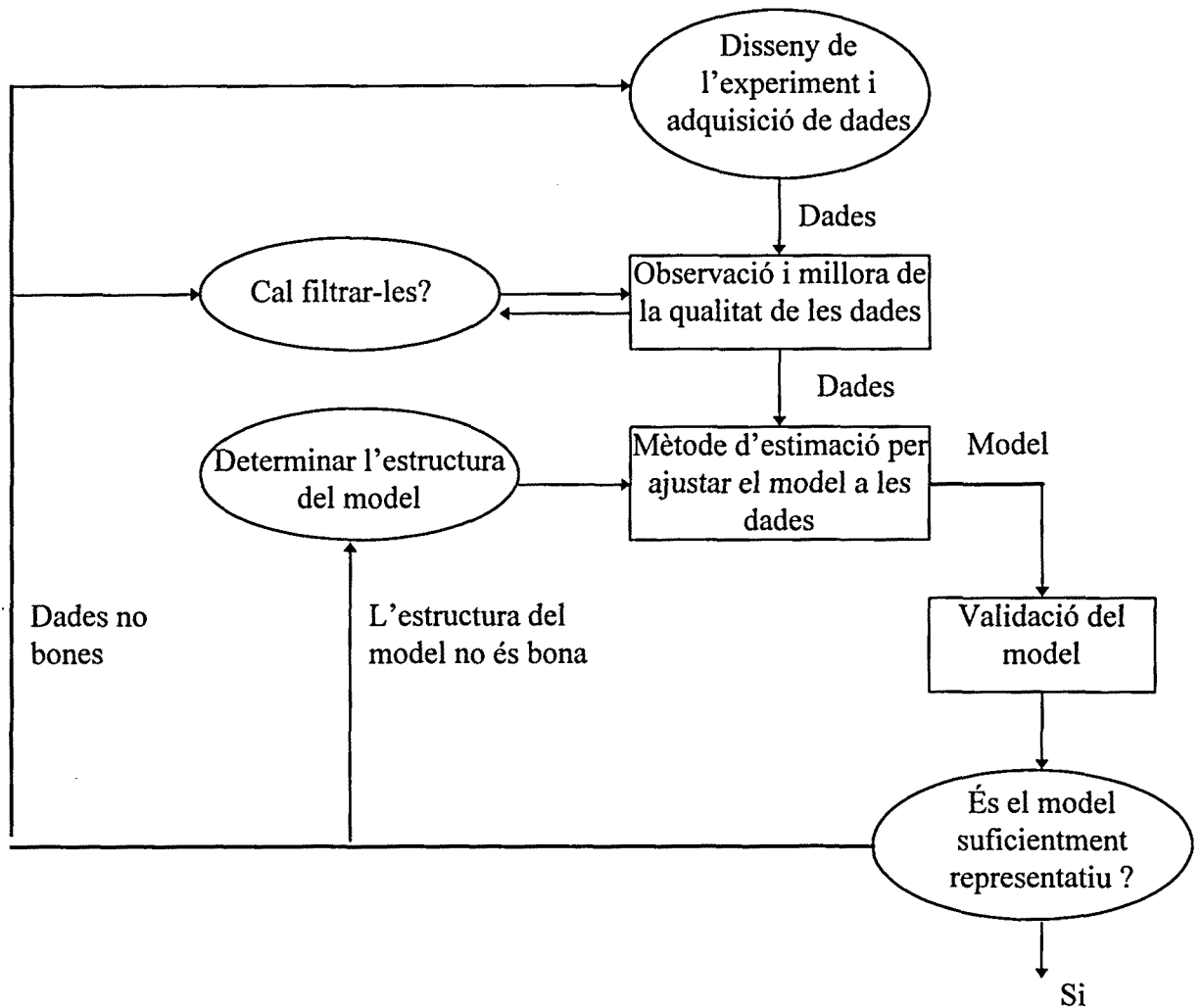


Figura 1.1. Etapes per a la identificació d'un procés. Els rectangles són generalment responsabilitat de l'ordinador. Els ovalats són responsabilitat de l'usuari.

1.2 Problemes globals de la identificació

Seràn dues de les etapes d'identificació conflictives, les estudiades en aquest treball. La primera d'elles està relacionada amb el disseny de l'experiment i en concret decidir el tipus de senyal d'excitació. I la segona, més general, tracta de la determinació de l'ordre del model. En aquest apartat es presenta la problemàtica de cadascun d'aquests aspectes.

1.2.1 Problemàtica originada de l'estudi dels senyals d'excitació

Com a resultat de comparar els mètodes d'identificació temporals i freqüencials [Evans, 1996], hom s'adona que ambdós mètodes minimitzen una funció pèrdua, definida com l'error quadràtic de modelització en el camp temporal o freqüencial, respectivament. La principal diferència recau en el tipus de senyals d'excitació utilitzats. Els primers utilitzen principalment senyals binaris pseudo-aleatoris i per els segons cal fer servir exclusivament senyals periòdics. L'article de [Schoukens, 1988], resumeix els tipus de senyals d'excitació útils en el domini freqüencial.

Els senyals periòdics presenten una sèrie d'avantatges respecte als que no ho són [Schoukens, 1994]. En motiu del seu estudi s'han plantejat aquestes qüestions: *són útils els senyals periòdics en el domini temporal?, com es comporten els senyals periòdics quan els processos estudiats són ideals? I quan són no ideals?* Aquestes qüestions s'intentaran resoldre en els primers capítols de la tesi.

Els senyals d'excitació periòdics s'han de caracteritzar per tenir un ample de banda que contingui l'ample de banda del procés. Conseqüentment, de la seva utilització es generen nous problemes: *de quina manera pot determinar-se l'ample de banda d'un procés real? quina relació s'ha d'establir entre l'ample de banda del procés i del senyal d'excitació?*

Si som capaços de proposar un mètode automàtic per a determinar de forma aproximada l'ample de banda del procés, quedaran resolts un seguit de qüestions relacionades amb el disseny de l'experiment: període d'adquisició de dades, nombre de dades a adquirir, ample de banda del senyal d'excitació,... Cal esmentar aquí que els mètodes manuals ja existeixen i es fonamenten en determinar, mitjançant la tècnica prova i error, la freqüència en que l'amplitud cau -3 dB.

1.2.2 La problemàtica de la determinació de l'estructura

Un segon problema derivat de la identificació de sistemes dinàmics està relacionat en *com determinar l'estructura del model*. Mentre que per a *l'estimació dels coeficients* s'utilitzen algorismes numèrics basats en càlculs matemàtics estrictes i precisos i, per tant, de fàcil

implementació, la *determinació de l'estructura* és una recerca qualitativa i, consegüentment, degut a la seva naturalesa empírica no ha acabat pas d'evolucionar en l'actualitat.

El primer dilema que es presenta en aquest camp és fixar una *estructura pel model*, per exemple: un model auto regressiu de variables exògenes (ARX) o un model d'error de sortida (OE) o un model auto regressiu de mitjana mòbil i variables exògenes (ARMAX). El fet de disposar de vàries estructures per ser avaluades ens condicionarà l'entorn de treballar. En el nostre cas s'ha optat pel programa MATLAB per ser una eina d'ús general, amb possibilitats de ser executat en una àmplia gamma d'estacions, i distingeix i analitza diferents estructures (ARX, OE, ARMAX, BJ, PEM, ...) que abasten pràcticament a tots els processos dinàmics amb possibilitats de ser linealitzats. Les estructures seleccionades hauran de complir com a requisits que representin una àmplia gamma de processos i que la informació a aportar sigui mínima. Un cop seleccionat el tipus d'estructura es planteja de nou un altre problema *quin és el millor ordre per aquesta estructura*.

Nombrosos autors han desenvolupat test i/o criteris que tenen per objectiu la determinació de l'estructura òptima d'un procés. Com a resultat d'un estudi anteriorment realitzat, en el que es comparaven diferents test d'estructura [Escobet, 1992], s'han seleccionat solament aquells a partir dels quals es van obtenir millors resultats. No s'ha considerat com a objectiu d'aquest treball desenvolupar nous criteris sinó extreure la màxima informació dels ja existents. Per aquest motiu, les preguntes formulades en aquest context han sigut, un cop seleccionat el tipus d'estructura: *quina informació pot deduir-se sobre l'ordre del model?, en quines circumstàncies són útils o no?*.

Amb l'objectiu de determinar l'estructura del model s'han desenvolupat sistemes experts com: OBJECT-SEXI [Szafnicki 1991], ESPION [Haest, 1990], i altres, sistemes que treballen en estacions UNIX i, per tant, d'alt cos i difícil generalització. La pregunta formulada en aquest àmbit ha sigut: *és possible desenvolupar una metodologia que permeti determinar l'estructura del model sense haver de recórrer a un sistema expert?*.

1.3 Motivacions i objectius

A raó de les divergències comentades en l'apartat anterior entre els experts en el domini temporal i freqüencial, es presenta el dilema de si els senyals periòdics, desenvolupats per estimar paràmetres en el domini freqüencial, són o no útils en el camp temporal. Per aquest motiu, **el primer objectiu de la tesi és l'estudi del comportament dels mètodes d'estimació paramètrics quan els senyals excitació tenen un ample de banda limitat.** Amb la finalitat d'avaluar si aquest tipus de senyals es comporten millor que els clàssics, s'han comparat els models estimats amb processos de comportament ideal i no ideal.

Els models obtinguts a l'utilitzar aquestes tècniques són models discrets. Per contra, els processos estudiats són, la gran majoria de les vegades, processos continus i consegüentment

el seu funcionament pot expressar-se amb equacions diferencials o models continus. És per aquest motiu de gran interès pensar en l'obtenció del model continu a partir dels models discrets identificats. **El segon objectiu de la tesi és analitzar en quines condicions el model discret serà representatiu del model continu.**

No tots els criteris i test desenvolupats són útils quan es vol ajustar el model a una estructura prefixada, en el nostre cas s'han considerat estructures del tipus OE i ARMAX, per la seva senzillesa i bons resultats. **Un tercer objectiu és analitzar quin o quins dels diferents test o criteris són útils per a la determinació de l'ordre òptim.**

La motivació d'aquesta tesi és proporcionar una eina de baix cost que ajudi en les tasques d'identificació de sistemes dinàmics. El quart objectiu (i més important) és desenvolupar una metodologia que permeti, de forma senzilla i automàtica, determinar el model matemàtic òptim d'un procés. Aquesta metodologia inclou: estudi previ del procés per aconseguir un valor aproximat de l'ample de banda, el disseny del senyals excitació i la selecció del període d'adquisició de dades, un cicle iteratiu per a la determinació de l'estructura i, finalment, un apartat per a la seva validació.

1.4 Organització de la tesi

La tesi està estructurada en vuit capítols, el contingut dels quals es resumeix a continuació:

Capítol 2 es descriuen dos tipus de senyals periòdics: els multisinusoidals i els binaris de longitud màxima (MLBS), comentant tant les seves propietats com les característiques de disseny. S'avaluen, també, els avantatges dels senyals periòdics i es proposa un procediment per determinar la banda de freqüències del procés a identificar. Es conclou dissenyant varis senyals excitació de diferents característiques: ampla de banda i tipus de disseny que seran utilitzats en capítols posteriors.

Capítol 3 és un capítol en el que s'avaluen els diferents mètodes d'estimació presents en el programa MATLAB. L'anàlisi es fa des de diferents aspectes: tipus de models que són capaços d'estimar, complexitat de l'algorisme de càlcul i coneixements a aportar per a la seva utilització. En funció d'aquest aspectes es seleccionen dues estructures pels models: ARMAX i OE, i tres mètodes d'estimació a testar: LS, IV i OE. En el capítol es fa una breu descripció dels aspectes fonamentals dels mètodes d'estimació seleccionats.

Capítol 4 té per objectiu estudiar en quines condicions els models discrets estimats són representatius dels processos continus. En ell es presenta una alternativa per estimar models discrets a partir de senyals excitació sense la presència d'un mantenidor d'ordre zero. A partir dels senyals excitació dissenyats en el segon capítol es compara el model continu estimat, a l'utilitzar els mètodes paramètrics seleccionats en el capítol anterior. La comparació entre el

procés real i el model estimat es fa en funció d'uns criteris de comparació que inclou: criteris paramètrics i criteris error.

Capítol 5 en ell s'avaluen els resultats obtinguts al fer servir els mètode d'estimació temporals quan el procés està sotmès a un comportament no ideal. Per a realitzar aquest estudi s'ha disposat d'un procés simulat "ECC bench-mark model". Com a senyals excitació s'han utilitzats alguns dels senyals periòdics dissenyats en el capítol segon. El motiu principal, de la inclusió aquest estudi, ha estat per a esbrinar si la utilització de senyals periòdics oferia o no avantatges sobre els senyals clàssics en aquestes circumstàncies. Els comportaments no ideals testats han estat: la presència de pertorbacions de càrrega, l'existència de saturacions a l'entrada o a la sortida del procés i, finalment, el fet de haver-hi un actuator amb dinàmiques ràpides no menyspreables.

Capítol 6 en aquest capítol es descriuen alguns dels test o criteris desenvolupats per a la determinació de l'estructura del model. Aquest test s'avaluen des de dos punts de vista: la informació que es pot obtenir a partir d'ells i en quines condicions són capaços de convergir a l'ordre òptim. Els test avaluats són: tècniques de correlació per a estimar la resposta impuls, la funció error obtinguda directament dels mètodes d'estimació, diferents criteris d'identificació que penalitzen d'una determinada forma la funció error per tal que el model sigui el més senzill possible, el grau de significació dels coeficients del numerador i, finalment, la situació dels pols i zeros del model estimat.

Capítol 7 la seva finalitat és descriure la metodologia proposada per a la identificació del model i la seva validació. En ell, es comenten les etapes per a la determinació del retard pur i de l'ordre del model, i es mostra la informació obtinguda amb el programa desenvolupat. En una segona part d'aquest capítol és valida aquesta metodologia amb l'estudi de diferents processos reals i simulats, aquest són la modelització de: el procés simulat "ECC bench-mark", un procés de cabal, un procés d'escalfament de la temperatura de l'aire que circula per un tub i un motor de corrent continu.

Finalment, el **Capítol 8** conté el resum dels resultats obtinguts, i presenta una llista de la possible recerca futura per ampliar el treball desenvolupat en aquesta tesi.

S'inclou, a més a més, un primer Annex en el que es mostren els valors de tots els criteris de comparació, entre el model real i els models estimats, dels diferents escenaris estudiats en els capítols 4 i 5. I en un segon Annex, s'exposen la simbologia i els acrònims emprats en aquest treball.

Capítol 2

Senyals d'excitació periòdics. Propietats i disseny

2.1 Introducció

Hi ha una gran varietat de senyals d'excitació útils per a l'estimació de sistemes dinàmics [Schoukens, 1988]. Aquests senyals es poden classificar en dos grups: periòdics i no periòdics.

En aquest capítol es comentaran primerament quines són les propietats dels senyals periòdics en general i seguidament es descriuran dos tipus de senyals periòdics: binaris de màxima longitud i multisinusoidals.

En un tercer apartat, s'avaluaran quins són els avantatges dels senyals periòdics quan són utilitzats per a l'estimació de sistemes dinàmics. A continuació s'analitzarà com dissenyar aquest tipus de senyals i es proposarà un procediment per a la determinació de l'interval de freqüències del procés a estimar.

2.2 Propietats dels senyals d'excitació periòdics

2.2.1 Característiques generals

La mitjana, μ , i la covariància, $r(\tau)$, d'un senyal estacionari determinista,

$$u(t), \quad t = T_s, 2 T_s, \dots, N T_s$$

on T_s és el període de mostreig, es defineixen com:

$$\begin{aligned}\mu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t) \\ r(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u(t+\tau) - \mu][u(t) - \mu]^T\end{aligned}\quad (2.1)$$

on N és el nombre de dades i τ és un enter entre 0 i N . Al valor de la covariància per $\tau=0$ se l'anomena variància, $r(\tau)$, i es caracteritza per ser una funció parell:

$$r(-\tau) = r(\tau)$$

L'energia total o RMS d'un senyal es calcula a partir de l'equació (2.2).

$$RMS_u = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t)^2} \quad (2.2)$$

La transformada de Fourier discreta (DFT) d'aquest senyal, $U_N(\omega)$, es defineix com:

$$U_N(\omega) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{t=1}^N u(t) e^{-j\omega t} \quad (2.3)$$

per valors de $\omega=2\pi k/N$, $k=1, \dots, N$. El senyal $u(t)$ es pot representar per la inversa de DFT:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^N U_N(2\pi k/N) e^{j2\pi kt/N} \quad (2.4)$$

El valor de $U_N(2\pi k/N)$ ens informa sobre el 'pes' que origina, la descomposició del senyal $u(t)$, a la freqüència $\omega=2\pi k/N$ pels diferents valors de k . El seu valor absolut quadràtic $|U_N(2\pi k/N)|^2$ és una mesura de la contribució energètica d'aquesta freqüència en el senyal. La relació de Parseval:

$$\sum_{t=1}^N |U_N(2\pi k/N)|^2 = \sum_{t=1}^N u^2(t) \quad (2.5)$$

reafirma la interpretació que l'energia d'un senyal pot ser descomposada en la contribució energètica de les diferents freqüències.

La densitat espectral, $S(\omega)$, d'un senyal $u(t)$ es defineix com la transformada de Fourier de la funció covariància:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} r(\tau) e^{-i\tau\omega} \quad (2.6)$$

i per ser la covariància una funció parell:

$$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \sum_{\tau=0}^{\infty} r(\tau) \cos(\omega\tau) \quad (2.7)$$

Es pot establir una relació entre l'espectre i la transformada de Fourier discreta d'un senyal; aquesta ve donada per l'equació (2.8).

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi N} |U_N(\omega)|^2 \quad (2.8)$$

Els mètodes d'estimació paramètrics, necessiten que el senyal d'entrada sigui persistentment excitat. Per identificar els paràmetres d'un model d'ordre n , cal que $u(t)$ sigui persistentment excitat d'ordre $2n$ com a mínim. Es diu que un senyal és persistentment excitat d'ordre n si la seva densitat espectral no és nul·la en n valors [Söderström, 1989].

2.2.2 Propietats dels senyals periòdics.

Es considera que $u(t)$ és un senyal determinista periòdic amb un període M ,

$$u(t) = u(t-M) \text{ per tot } t$$

El valor mig μ i la funció de covariància $r(\tau)$, definits en (2.1), tenen l'expressió:

$$\begin{aligned} \mu &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N u(t) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M u(t) \\ r(\tau) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [u(t+\tau) - \mu][u(t) - \mu]^T = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M [u(t+\tau) - \mu][u(t) - \mu]^T \end{aligned} \quad (2.9)$$

per un senyal periòdic la funció de covariància val:

$$r(M + \tau) = r(\tau) \quad (2.10)$$

L'anti-transformada de Fourier discreta d'un senyal periòdic pot ser escrita, d'acord amb l'equació (2.4), com:

$$u(t) = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{k=1}^M A_k e^{j2\pi kt/M} \quad (2.11)$$

amb

$$A_k = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{t=1}^M u(t) e^{-j2\pi kt/M} \quad (2.12)$$

Si $u(t)$ és un senyal periòdic i conté N mostres, amb $N = \kappa M$ on κ és el nombre de períodes, es dedueix que la contribució energètica a les diferents freqüències val:

$$|U_N(\omega)|^2 = \begin{cases} \kappa |A_k|^2, & \text{si } \omega = \frac{2\pi k}{N}, \quad k = 0, \pm\kappa, \pm 2\kappa, \pm \dots, \pm \frac{N}{2} \\ 0, & \text{si } \omega = \frac{2\pi k}{N}, \quad k \neq 0, \pm\kappa, \pm 2\kappa, \pm \dots, \pm \frac{N}{2} \end{cases} \quad (2.13)$$

La funció espectral de senyals periòdics discrets, es pot avaluar com un conjunt d'impulsos Dirac a les freqüències presents en el senyals [Söderström, 1989]:

$$S(\omega) = \sum_{k=0}^{M-1} C_k \delta\left(\omega - 2\pi \frac{k}{M}\right) \quad (2.14)$$

on C_k és la matriu de coeficients a determinar en cada cas i poden ser calculats a partir de:

$$C_k = \frac{1}{M} \sum_{\gamma=0}^{M-1} \alpha^{-k\gamma} r(\gamma) \text{ amb } \alpha = e^{j2\pi/M} \quad (2.15)$$

2.3 Descripció dels senyals periòdics.

Hi ha diferents tipus de senyals periòdics [Schoukens, 1988]. Els més emprats a nivell freqüencial per la seva precisió i reduït temps càlcul són: els senyals binaris de longitud màxima i els multisinusoïdals.

2.3.1 Senyals binaris de longitud màxima, MLBS.

Un senyal binari es caracteritza per tenir sols dos valors, corresponents als nivells lògics 0 i 1, assignats generalment a +V i -V. El senyal binari més àmpliament emprat és el que s'anomena seqüència binària de màxima longitud (MLBS). Aquest pot generar-se fàcilment utilitzant el desplaçament dels registres amb una realimentació apropiada, figura 2.1, [Söderström, 1989].

El senyal és periòdic amb una longitud de seqüència:

$$M = 2^m - 1 \quad (2.16)$$

i període:

$$T_{MLBS} = M\Delta t \quad (2.17)$$

on m és el nombre de registres a desplaçar i Δt és el període de canvi de registres.

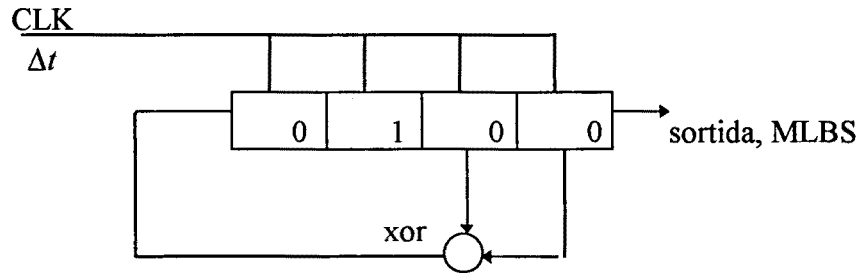


Figura 2.1. Generació d'un senyal MLBS

La funció de covariància d'aquest senyal, quan el període de mostreig és T_s , i considerant el cas en que $T_s < \Delta t$, val [Goodfrey, 1980]:

$$r_u(\tau) = \begin{cases} V^2 \left(1 - \frac{T_s}{\Delta t}\right) & T_s < \Delta t, \pm M\Delta t, \pm 2M\Delta t, \dots \\ -\frac{V^2}{M} & \text{per els altres valors} \end{cases} \quad (2.18)$$

La densitat espectral calculada a partir de l'equació (2.7) té per expressió

$$\begin{aligned} S_u(\omega) &= 2V^2 \int_0^1 \left(1 - \frac{M+1}{M}t\right) \cos(\omega t) dt + 2 \frac{V^2}{M} \int_1^M \cos(\omega t) dt \\ &= \frac{V^2}{M^2} (M+1) \frac{\sin^2(\omega/2)}{(\omega/2)^2} \\ &= \frac{V^2 (M+1)}{M^2} \frac{\sin^2(k\pi/M)}{(k\pi/M)^2} \quad \text{per } k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (2.19)$$

i la densitat espectral discreta [Söderström, 1989], calculada amb la fórmula (2.14) val:

$$S_u(\omega) = \frac{V^2}{M^2} \left[\delta(\omega) + (M+1) \sum_{k=1}^{M-1} \delta\left(\omega - 2\pi \frac{k}{M}\right) \right] \quad (2.20)$$

on k són els harmònics.

La freqüència dels harmònics està determinada per Δt i M :

$$f_k = \frac{k}{M\Delta t} \quad (2.21)$$

i la potència mitja de la banda passant del senyal es dona aproximadament a $0.443/\Delta t$ Hz [Evans, 1992]. Per tant és possible, ajustant el valor de M i Δt , cobrir apropiadament el rang de freqüències del sistema. L'espectre d'aquest senyal decreix amb la freqüència.

El disseny del senyal MLBS es pot fer de la següent manera:

1r- es selecciona un valor de Δt que origini la màxima freqüència d'interès en el punt -3dB

2n- amb Δt fixat, s'ajusta M tenint en compte dos aspectes, $M=2^m - 1$ i f_{\min} (calculada a partir de l'equació (2.21) per $k=1$) ha d'estar situada en el rang d'interès

3r- finalment es selecciona el nombre de dades a adquirir en cada canvi de registre, la freqüència de reconstrucció o de mostreig del senyal serà de: nombre de dades per registre/ Δt .

Aquesta forma de disseny, origina senyals amb unes característiques molt tancades:

- conjunts $\Delta t \approx 0.443/BW$, on BW representa el valor de la freqüència del procés a -3dB
- i $M \Delta t > Ts$, el temps d'establiment del procés.

En [Söderström, 1989] es demostra que aquest senyal és persistentment excitat d'ordre M .

2.3.2 Senyals multisinusoïdals

Aquest senyal consisteix en una suma arbitrària de cosinus amb harmònics connexos [Evans, 1992]

$$u(t) = \sum_{i=1}^F A_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i) \quad (2.22)$$

on A_i és l'amplitud de cada harmònic, F és el nombre d'harmònics, ϕ és el vector de fases i f és la freqüència, el vector i pot ser qualsevol seqüència de valors enters. El gran avantatge d'aquest senyal, a diferència dels senyals binaris, és que la seva potència està concentrada en un interval definit de freqüències. Són senyals de banda limitada.

La història temporal d'un senyal, pot mesurar-se quantitativament a partir del factor de cresta, CF , definit en (2.23) [Rees, 1992]. Quan tenim processos amb soroll, cal que els senyals d'excitació tinguin factors de cresta baixos. Ja que, amb factors de cresta baixos, s'aconsegueix que un senyal d'excitació tingui la màxima energia amb una amplitud acotada

$$CF = \frac{\max(|u(t)|)}{u(t)_{rms}} \quad (2.23)$$

A nivell de comparació direm que un senyal sinusoidal pur té un factor de cresta igual a 1.414, mentre que en el cas d'un senyal binari pseudo aleatori (PRBS), $CF=1$. Respecte els senyals multisinusoidals, el valor del factor de cresta depèn de la fase dels harmònics. En el cas de considerar fases nul·les, el factor de cresta del senyal és alt, $CF > 1$. Per minimitzar el CF d'aquest tipus de senyals, cal seleccionar amb molt de compte la fase de cada un dels harmònics [Rees, 1993].

Per analitzar quina és la influència del factor de cresta en els mètodes d'estimació de paràmetres, s'han considerat dos mètodes diferents pel disseny de la fase:

1r- El mètode proposat per Schroeder. La fase de cada harmònic es determina emprant la fórmula:

$$\phi_i = \frac{\pi k^2}{F} \quad (2.24)$$

on ϕ_i és la fase de l'harmònic i del senyal, k és el nombre del component, i F és el nombre total de components de l'espectre; els valors de i i k poden ser diferents si s'exclou algun dels harmònics del senyal multisinusoidal.

2n- El mètode proposat per Guillaume, L^∞ . Es minimitza el valor del CF, definit en aquest cas per l'expressió:

$$CF = \frac{I_\infty(u)}{I_2(u)} \quad (2.25)$$

on $I_\infty(u)$ és la norma de Chebyshev de $u(t)$ i la norma I_2 és el valor de RMS. S'utilitza el mètode de Gauss-Newton per minimitzar el valor de la norma I_∞ . Aquest mètode té l'inconvenient que el seu càlcul és molt llarg.

En el disseny dels senyals multisinusoidal s'han de considerar dos aspectes. El primer és que el senyal dissenyat ha de concentrar tota la potència en l'ample de banda del procés estudiat. El segon aspecte a tenir en compte, és que ha de tenir els suficients harmònics per aconseguir minimitzar el CF, cobrir l'espectre necessari i permetre la detecció d'errors en la modelització. El fet d'incloure molts harmònics és perjudicial ja que es redueix l'energia de cada test de freqüències i, en conseqüència, es disminueix la precisió de la resposta freqüencial.

La funció d'autocovariància, $r_u(\tau)$, d'una suma de sinusoides és una funció cosinus (2.26) tal com es demostra en [Söderström, 1989], on el valor del pesos C_i depèn del valor de $\omega_i = 2\pi f_i$ i de A^2 .

$$r_u(\tau) = \sum_{i=1}^F C_i \cos(\omega_i \tau) \quad (2.26)$$

amb:

$$SNR = \frac{r_x(0)}{r_v(0)} = \frac{r_y(0)}{r_v(0)} - 1 \quad (2.31)$$

la segona igualtat es dona sempre que els senyals $x(t)$ i $v(t)$ no estiguin correlats. A millor relació de SNR la qualitat de les dades observades és millor.

Els especialistes en identificació freqüencial de sistemes utilitzen aquest tipus de senyals perquè presenten, entre altres, els següents avantatges respecte els no periòdics [Schoukens, 1994]: milloren el SNR, permeten disminuir la quantitat de dades i, al mateix temps, incrementar el rang de freqüències estudiades, s'eliminen els problemes de l'estimació de l'estat inicial dels estimadors, simplifiquen la validació de models, ...

En el nostre treball ens interessa també millora la relació SNR però pel seu ús en el domini temporal. Les avantatges generades a partir d'aquesta millora s'estudiaran en el capítol 4r.

Un senyal d'excitació periòdic pot millorar notablement el SNR de les mesures perquè permet seleccionar freqüències i fer la mitjana en el domini temporal.

- Selecció de les freqüències.

Com s'ha definit en l'apartat 2.3, els senyals periòdics es caracteritzen perquè el seu contingut freqüencial és definit. En el cas de sistemes lineals, l'espectre dels senyals $u(t)$ i $x(t)$ és el mateix (2.29). Per aquests motius és possible, fent la DFT de les observacions $y(t)$, eliminar totes les freqüències no contingudes originàriament en l'experimentació, $u(t)$, i reconstruir el senyal mesurat fent la transformada inversa de Fourier. Aquest tractament l'anomenem **filtrat freqüencial** i millora la relació SNR. Aquest filtre no influeix sobre $x(t)$ i sí sobre $v(t)$, i, tal com es veurà en el capítol 4r, s'obté una millora de la convergència dels algorismes d'estimació iteratius.

- Mitjana en el domini temporal.

La naturalesa periòdica de l'excitació permet fer la mitjana entre els diferents períodes, fet que permet millorar la relació SNR.

Donada l'equació (2.30) en que el senyal $x(t)$ és un conjunt de m períodes de longitud M i variància :

$$r_x(0) = \frac{1}{M} \sum_{t=1}^M x^2(t) \quad (2.32)$$

i $v(t)$ és una variable aleatòria de mitjana zero i variància $r_v(0)$ no correlada amb $x(t)$; es demostra a partir de les propietats de la variància [Montgomery, 1991] que:

$$r_y(0) = r_x(0) + r_v(0) \quad (2.33)$$

$$C_i = \frac{A_i^2}{2} \quad \text{si } \omega_i \tau \neq \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

$$C_i = A_i^2 \sin^2 \phi_i \quad \text{si } \omega_i \tau = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

La densitat espectral discreta, per $0 \leq \omega_i \leq \pi$, té per expressió [Söderström, 1989]:

$$S_u(\omega) = \sum_{i=1}^F \frac{C_i}{2} (\delta(\omega - \omega_i) + \delta(\omega + \omega_i)) \quad (2.27)$$

A partir de l'equació (2.27) i en el interval de valors $[-\pi, \pi]$, es dedueix [Söderström, 1989] que aquest tipus de senyals són persistentment excitats d'ordre:

$$\begin{cases} 2F & \text{si } 0 < \omega_1, \omega_F < \pi \\ 2F - 1 & \text{si } 0 = \omega_1 \text{ o } \omega_F = \pi \\ 2F - 2 & \text{si } 0 = \omega_1 \text{ i } \omega_F = \pi \end{cases} \quad (2.28)$$

2.4 Avantatges dels senyals d'excitació periòdics per a l'estimació de sistemes

Un sistema lineal, $G(s)$, es caracteritza perquè al ser excitat per un senyal periòdic amb cert contingut de freqüències, la sortida conté la mateixa composició freqüencial i sols es modifica l'amplitud i la fase.

$$Y_N(\omega) = G(e^{j\omega})U_N(\omega) \quad (2.29)$$

No es pot fer la mateixa afirmació quan el sistema presenta no linealitats i sorolls.

Considerem el cas genèric en què tenim unes observacions o mesures d'un procés, $y(t)$, pertorbades per un senyal soroll aleatori, $v(t)$:

$$y(t) = x(t) + v(t) = g(t)u(t) + v(t) \quad (2.30)$$

on $g(t)$ és la resposta impuls del procés, $u(t)$ el senyal excitació i $x(t)$ la sortida real del procés.

La qualitat del model obtingut està molt relacionada amb la qualitat de les dades observades [Ljung, 1987]; a major qualitat millor model. Una mesura relativa de la qualitat de les dades observades és el que s'anomena proporció de senyal vers soroll (SNR) i es defineix com [Johansson, 1993]:

amb SNR definit en (2.31). Al fer el valor mig dels κ períodes s'obté:

$$r_{\bar{y}}(0) = r_{\bar{x}}(0) + r_{\bar{v}}(0) \quad (2.34)$$

de valors:

$$r_{\bar{x}}(0) = \frac{1}{\kappa^2} \left(\kappa r_x(0) + \frac{\kappa!}{(\kappa-2)!} r_x(0) \right) = r_x(0)$$

$$r_{\bar{v}}(0) = \frac{1}{\kappa^2} (\kappa r_v(0)) = \frac{1}{\kappa} r_v(0)$$

Per tant el nou valor de SNR serà:

$$SNR_m = \kappa \frac{r_x(0)}{r_v(0)} = \kappa SNR \quad (2.35)$$

S'observa una millora de la relació SNR dels senyals.

2.5 Disseny de senyals d'excitació periòdics

2.5.1 Estudi previ de les característiques d'un procés

L'inconvenient que presenten aquest tipus de senyals és que cal conèixer prèviament l'interval de freqüències o característiques, $[f_{\min} \text{ i } f_{\max}]$, del procés a estimar. Amb aquest objectiu cal realitzar, el que alguns autors anomenen, "estudi previ".

En la bibliografia es mostren diferents mètodes per realitzar l'estudi previ d'un procés. A nosaltres ens interessen aquells a partir dels quals es pot obtenir informació sobre la constant de temps aparent del procés. El mètode que proposem, tant per la seva senzillesa com pel reduït temps d'experimentació es basa en la tècnica de la resposta freqüencial del procés realimentat amb un relè amb histèresi [Åström, 1988].

Aquest mètode consisteix en connectar el procés de la forma indicada en la figura 2.2. En la majoria dels processos, s'origina una ona quadrada a la sortida del relè i una ona aproximadament sinusoidal a la sortida del procés.

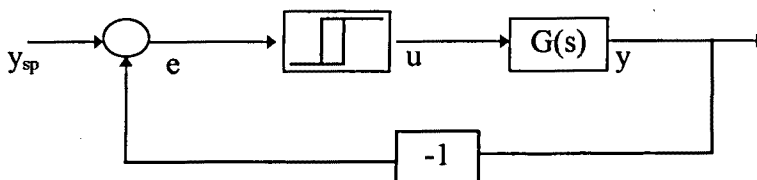


Figura 2.2. Diagrama de blocs d'un procés realimentat amb relè

Al descompondre en sèries de Fourier el senyal de la sortida del relè i considerant sols el primer harmònic s'obté que l'equació descriptiva del relè amb histèresi és [Cook, 1986]:

$$N(A_y) = \frac{4A_u}{\pi A_y} \left(\sqrt{1 - \frac{h^2}{A_y^2}} - i \frac{h}{A_y} \right) \quad (2.36)$$

on A_u és l'amplitud del relè; A_y és l'amplitud d'oscil·lació de la sortida; i h és la histèresi del relè.

Donat un procés que té per funció de transferència $G(s)$, les condicions d'oscil·lació vénen donades senzillament per:

$$N(A_y)G(i\omega) = -1 \quad (2.37)$$

que correspon al cas en que la funció de transferència avaluada en el camp freqüencial, $G(\omega j)$, s'intercepta amb $-1/N(A_y)$, veure figura 2.3.

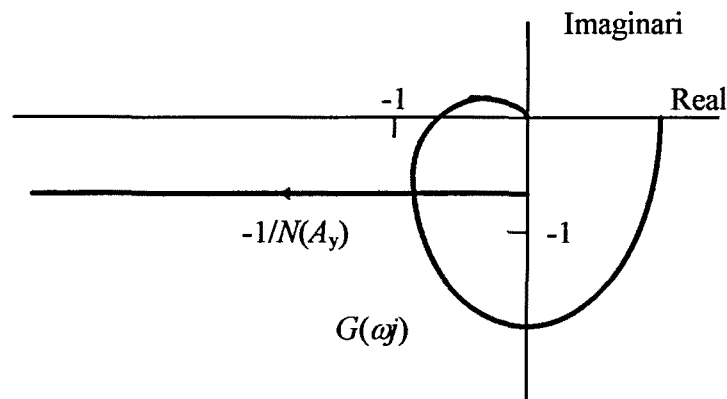


Figura 2.3. Diagrama de Nyquist.

L'equació (2.37) s'obté a partir del requeriment que una ona sinusoidal de freqüència ω es propaga a través de l'anell realimentat amb la mateixa amplitud i fase.

Conegut el valor de $N(A_y)$, es podrà estimar un punt de la resposta freqüencial, aquest punt es correspon amb la pulsació d'oscil·lació ω_h . El mòdul i la fase d'aquest punt es determinen a partir de la transformada de Fourier dels senyals:

$$\begin{aligned} |G(i\omega_h)| &= \left| \frac{Y(\omega_h)}{U(\omega_h)} \right| = K_h \\ \arg(G(i\omega_h)) &= \text{atan} \left(\frac{Y(\omega_h)}{U(\omega_h)} \right) = \phi_h \end{aligned} \quad (2.38)$$

La informació sobre la constant de temps del procés estudiat s'obté considerant que les seves característiques s'ajusten a una determinada funció de transferència. La funció de transferència utilitzada per la majoria dels autors és:

$$G(s) = \frac{k}{(Ts + 1)} e^{-Ls} \quad (2.39)$$

on k és el guany, T és la constant de temps del procés i L el retard pur.

Igualant les equacions (2.38) amb el mòdul i la fase de la funció de transferència (2.39) s'obtenen dues equacions amb tres incògnites. La solució s'obté realitzant un segon experiment amb un valor h , histèresi del relè, diferent. El conjunt d'equacions obtingudes són:

$$K_h = \frac{k}{\sqrt{T^2 \omega_h^2 + 1}} \quad (2.40)$$

$$\phi_h = -\text{atan}(T\omega_h) - L\omega_h$$

combinant l'equació del guany per dos valors diferents de h , es pot estimar el valor de la constant de temps aparent (2.41).

$$\begin{bmatrix} T^2 \\ k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -K_{h1}^2 \omega_{h1}^2 & 1 \\ -K_{h2}^2 \omega_{h2}^2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} K_{h1}^2 \\ K_{h2}^2 \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

El valor de T estimat, fixarà el valor màxim i mínim de les freqüències del sistema. Es selecciona com a freqüència mínima una dècada abans de la constant de temps aparent del procés.

$$f_{min} \approx \frac{0.1}{2\pi T} \quad (2.42)$$

Amb l'objectiu de comparar com repercuteix l'ampla de banda dels senyals periòdics s'han considerat dos intervals diferents per a la selecció de la freqüència màxima, f_{max1} i f_{max2} .

$$\frac{5}{2\pi T} < f_{max1} \leq \frac{10}{2\pi T} \quad (2.43)$$

$$f_{max2} > \frac{10}{2\pi T}$$

El procés que s'ha escollit com a banc de proves es descriu en l'apartat 4.4 de la tesi. La part lineal d'aquest procés té com a funció de transferència en Laplace, $Gp(s)$:

$$Gp(s) = \frac{225(s-1)}{(s+1)(s^2+30s+225)} e^{-0.2s} \quad (2.44)$$

Aquest sistema té una dinàmica ràpida corresponent als dos pols situats a: -15 i una dinàmica lenta que ve donada pel pol situat a -1. Això ens origina un rang de freqüències de:

$$\begin{array}{ll} p_1 = -15 & f_1 = 2.387 \text{ Hz} \\ p_2 = -1 & f_2 = 0.159 \text{ Hz} \end{array}$$

Amb el relè de característiques: $h_1 = \pm 0.8$ i $A_{u1} = \pm 5$, $h_2 = \pm 1$ i $A_{u2} = \pm 5$, s'ha fet oscil·lar el procés i s'han obtingut com a resultat de simulació les dades de la figura 2.4.

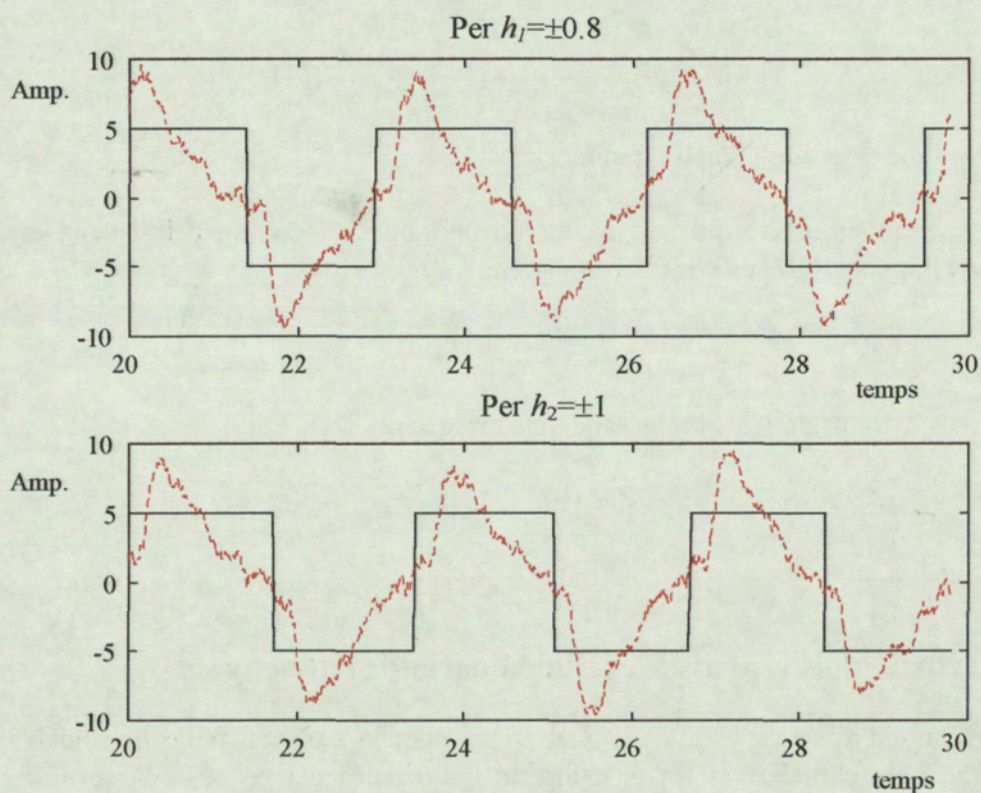


Figura 2.4. Senyal de sortida del relè (—) i senyal de sortida del procés (---)

Emprant el mètode descrit anteriorment, s'ha estimat, per a cada valor de la histèresi h , els valors de ω_h i K_h . La freqüència d'oscil·lació i el mòdul del primer harmònic de la transformada de Fourier obtinguts són:

h	± 0.8	± 1.0
$\omega_h(\text{rad/s})$	1.896	1.856
K_h	0.971	0.978

Els valors estimats de T i de k calculats amb l'equació (4.41) són:

$$\begin{aligned}\hat{T} &= 0.371 \\ \hat{k} &= 1.187\end{aligned}$$

L'interval de freqüències serà segons (2.43):

$$\begin{aligned}f_{min} &= 0.043 \text{ Hz} \\ 2.15 \text{ Hz} &< f_{max1} \leq 4.3 \text{ Hz} \quad \text{i} \quad f_{max2} > 4.3 \text{ Hz}\end{aligned}$$

f_1 i f_2 estan continguts en l'interval de freqüències.

El valor de f_{max} ens és també útil per decidir un període de mostreig pel sistema estudiat. Aquest segons [Ogata, 1987] es pot seleccionar com:

$$8f_{max} \leq f_s \leq 10f_{max}$$

al considerar els extrems de f_{max1} , l'interval de mostreig serà:

$$f_s \approx [17, 43] \text{ Hz}$$

o

$$T_s \approx [0.02, 0.06] \text{ seg.}$$

2.5.2 Descripció dels senyals d'excitació periòdics dissenyats

Els senyals d'entrada dissenyats són cinc, quatre corresponen a senyals multisinusoïdals i un al senyal MLBS. Tots ells abasten tot el camp de freqüències del procés i la seva amplitud pertany a l'interval [+7.5,-7.5].

A continuació és descriuen cada un d'ells, s'indiquen les seves característiques i es mostra la seva variació tant temporal com freqüencial.

2.5.2.1 Senyals Multisinusoïdals

a) Multisinusoïdal d'harmònics consecutius, sc70. La fase d'aquest senyal està dissenyada emprant el mètode de Schroeder. Es visualitza en la figura 2.5.

Selecció de les freqüències:

freqüència fonamental, $f_0 = 0.04 \text{ Hz} \cong f_{\min}$

freqüència màxima, $f_{\max} = 2.8 \text{ Hz}$, pertany a l'interval de $f_{\max 1}$

freqüència de disseny del senyal, $f_d = 1000 \text{ Hz} \ll f_s$

Característiques del senyal:

nombre d'harmònics, $F = f_{\max}/f_0 = 70$

nombre total de dades adquirides, $N = f_d/f_0 = 25000$

amplitud mínima en el domini freqüencial, $|U_N(\omega)| = 0.75$

energia total, RMS = 4.42

factor de cresta, $CF = 1.69$

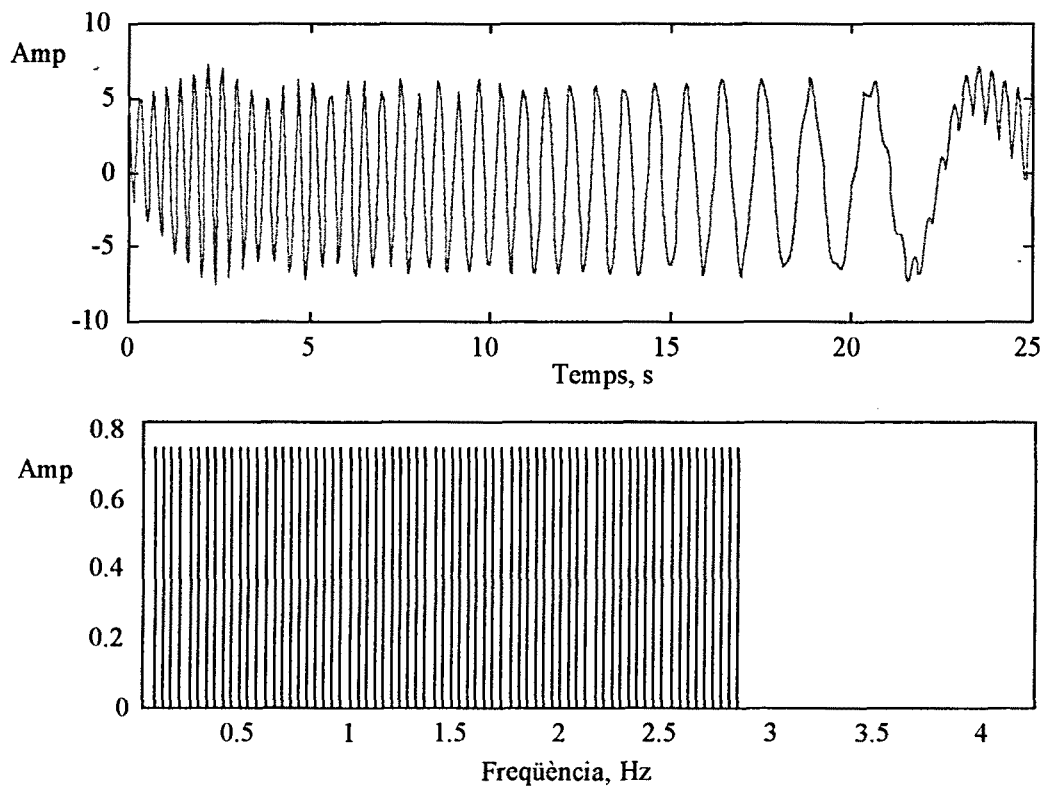


Figura 2.5. Senyal multisinusoidal sc70, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència

b) Multisinusoïdal d'harmònics consecutius, **sc112**. La fase d'aquest senyal està dissenyada, igual que l'anterior, emprant el mètode de Schroeder. Es visualitza en la figura 2.6.

Selecció de les freqüències:

freqüència fonamental, $f_0 = 0.05\text{Hz} \cong f_{\min}$

freqüència màxima, $f_{\max} = 5.6 > f_{\max 2}$

freqüència de disseny del senyal, $f_d = 1000\text{ Hz} \ll f_s$

Característiques del senyal:

nombre d'harmònics, $F = f_{\max}/f_0 = 112$

nombre total de dades adquirides, $N = f_d/f_0 = 20000$

amplitud mínima en el domini freqüencial, $|U_N(\omega)| = 0.59$

energia total, $\text{RMS} = 4.4$

factor de cresta, $CF = 1.68$

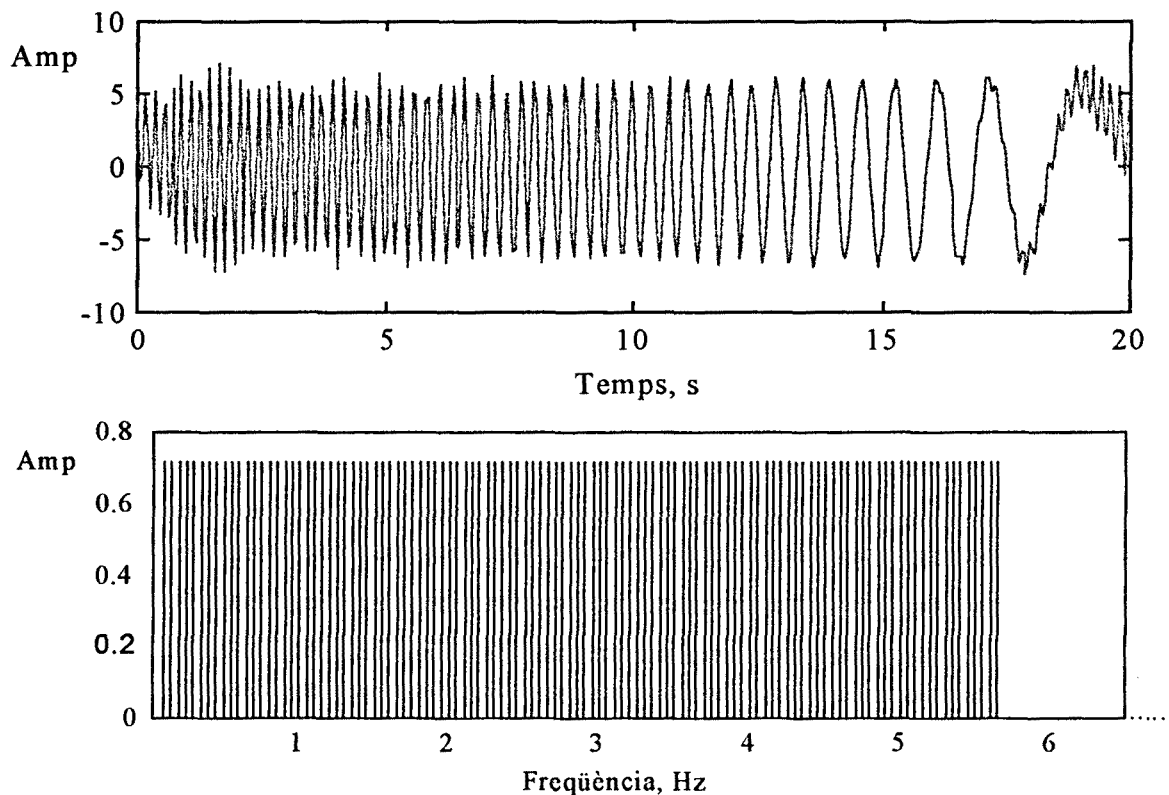


Figura 2.6. Senyal multisinusoïdal sc112, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència

- c) Multisinusoïdal d'harmònics consecutius, **lc70**. Es visualitza en la figura 2.7. Les freqüències de disseny són les mateixes que el senyal sc70, però la fase s'ha determinat utilitzant el mètode L_∞ . Té com a característiques:

amplitud mínima en el domini freqüencial, $|U_N(\omega)| = 0.92$

energia total, $RMS = 5.42$

factor de cresta, $CF = 1.38$

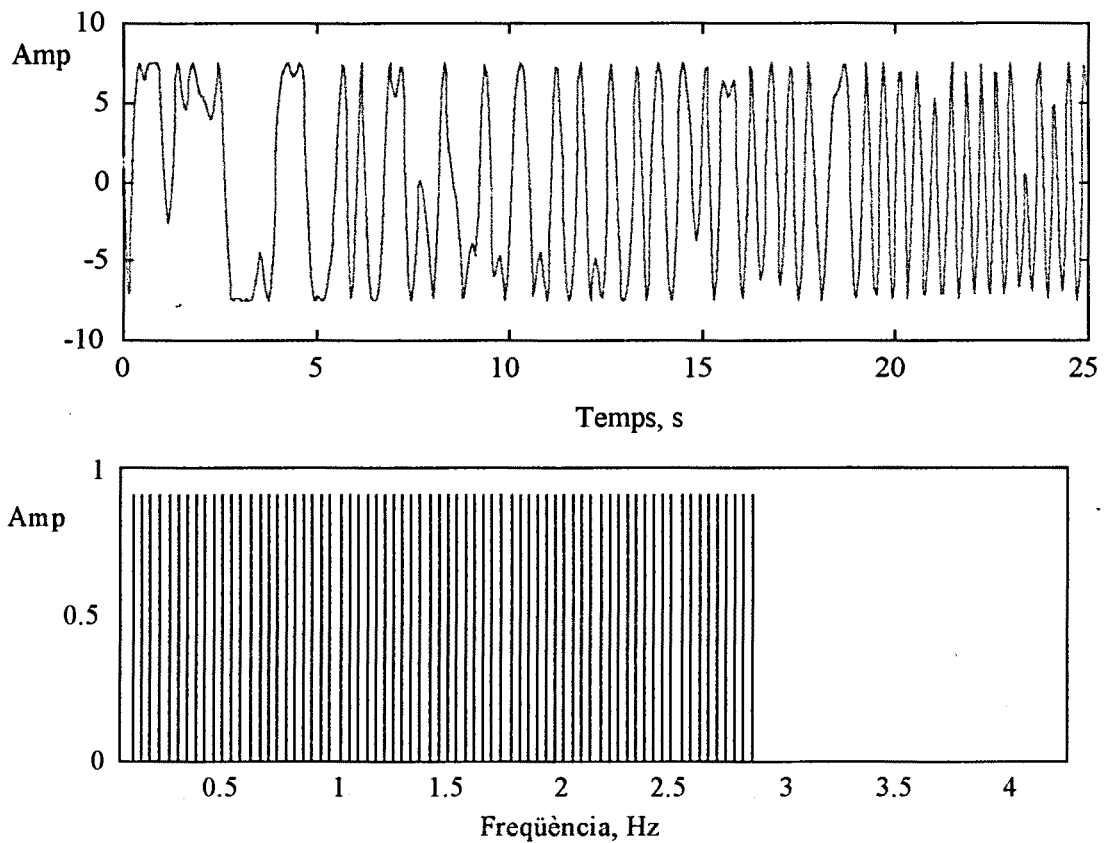


Figura 2.7. Senyal multisinusoïdal lc70, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència

- d) Multisinusoïdal d'harmònics consecutius, **lc112**. Es visualitza en la figura 2.8. Té les mateixes freqüències de disseny que el senyal sc112, però el mètode emprat pel càlcul de la fase és L_∞ . Les seves característiques són:

amplitud mínima en el domini freqüencial, $|U_N(\omega)| = 0.72$

energia total, $RMS = 5.39$

factor de cresta, $CF = 1.39$

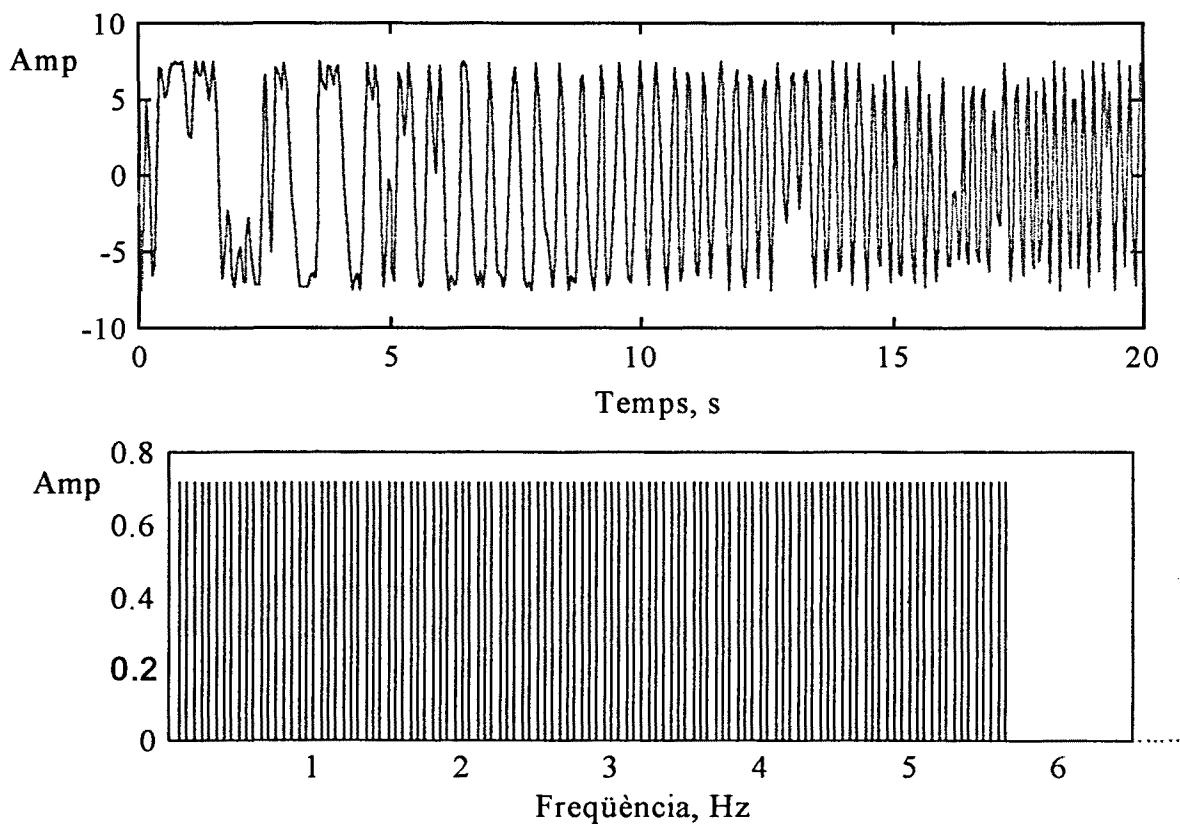


Figura 2.8. Senyal multisinusoidal lc112, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència

2.5.2.2 Senyal binari de longitud màxima, ml7.

El senyal dissenyat es visualitza en la figura 2.9. La freqüència de disseny del senyal, és igual que en els senyals anteriors, $f_d = 1000 \text{ Hz} \ll f_s$

Selecció del període per bit:

$$\Delta t \approx 0.443/f_{\max} = 0.443/2.15 = 0.1772 \text{ s}$$

escollim un valor de $\Delta t = 0.2 \text{ s}$

Selecció de la longitud de seqüència:

$$M \approx 1/(f_{\min} \Delta t) = 116.3$$

però al mateix temps $M=2^m - 1$; escollim $M=127$
registres, $m=7$

Característiques del senyal:

període, $T_{MLBS} = M \Delta t = 25.4$ s

freqüència fonamental, $f_0 = 1 / T_{MLBS} = 0.0393 \dots$ Hz

freqüència de l'harmònic 70 = $70 / T_{MLBS} \approx 2.756 \dots$ Hz, pertany a l'interval f_{max1}

total de dades adquirides, $N = f_d T_{MLBS} = 25400$

energia total, RMS = 7.5

factor de cresta, CF = 1

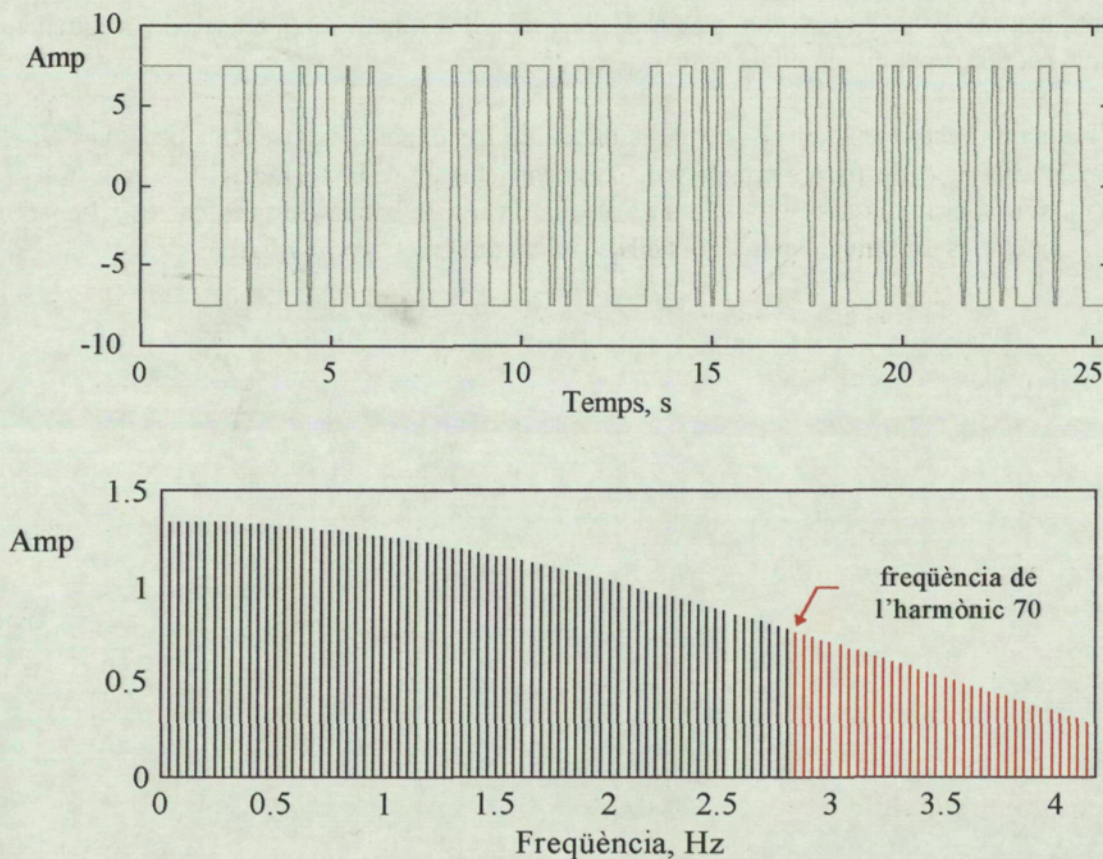


Figura 2.9. Senyal MLBS ml7, variació de l'amplitud respecte al temps i a la freqüència.

2.6 Conclusions

En aquest capítol s'ha demostrat que els senyals d'excitació periòdics presenten l'avantatge, respecte als no periòdics, de poder millorar la relació SNR fent un filtrat freqüencial o la mitjana entre els diferents períodes.

Pel disseny d'aquest tipus de senyals cal conèixer la banda passant del procés a estimar. La tècnica que es proposa per a la determinació de l'interval de freqüències consisteix en l'estudi freqüencial del sistema realimentat amb un relè amb histèresi. Aquesta tècnica permet deduir la constant aparent del sistema i, a partir d'ella, es pot estimar un interval de freqüències d'interès, necessari pel disseny dels senyals periòdics.

Amb l'objectiu d'estudiar la influència de la banda de freqüències dels senyals periòdics en els mètodes d'estimació de paràmetres, s'han dissenyat cinc senyals periòdics diferents. Quatre d'aquests són senyals multisinusoïdals, en els quals varia la banda de freqüències i l'energia total, i el cinquè és un senyal binari. Tots ells s'utilitzaran en el capítol quart.

Capítol 3

Models i mètodes d'estimació

3.1 Introducció

En l'actualitat hi ha desenvolupats un gran nombre d'algorismes d'estimació paramètrics. En l'entorn en què s'ha decidit treballar "System Identification Toolbox" del programa MATLAB, aquests algorismes es poden classificar segons el domini de treball en temporals o freqüencials; i segons el mètode de càlcul utilitzat en analítics o iteratius. En la figura 3.1. s'observen els diferents algorismes presents en la "Toolbox" d'identificació del programa MATLAB agrupats en aquests dos blocs.

Pel treball de recerca realitzat en aquesta tesi, s'està particularment interessat en els mètodes d'estimació en el domini temporal. Aquests mètodes presenten una sèrie d'avantatges respecte als freqüencials [Ljung, 1991]:

- És més natural treballar amb senyals en el domini temporal.
- Són mètodes menys sensibles al tipus de senyals d'excitació, mentre que els mètodes en el domini freqüencial originen problemes quan els senyals d'excitació no són periòdics.
- Certes no linealitats, com saturacions, són més fàcilment detectables.
- Poden ser utilitzats de forma recursiva.
- Permeten mesurar directament el comportament transitori dels sistemes.

Els mètodes d'estimació paramètrics estudiats, tenen la particularitat que a partir d'ells s'estimen models discrets (domini-Z). Conseqüentment, en el cas de desitjar el model continu (domini-S o equació diferencial) del sistema, caldrà fer la conversió dels models obtinguts: domini-Z a domini-S. Com s'estudiarà en el capítol 4, un sistema continu pot ser correctament representat per un model discret quan el senyal excitació es manté constant entre períodes de mostreig.

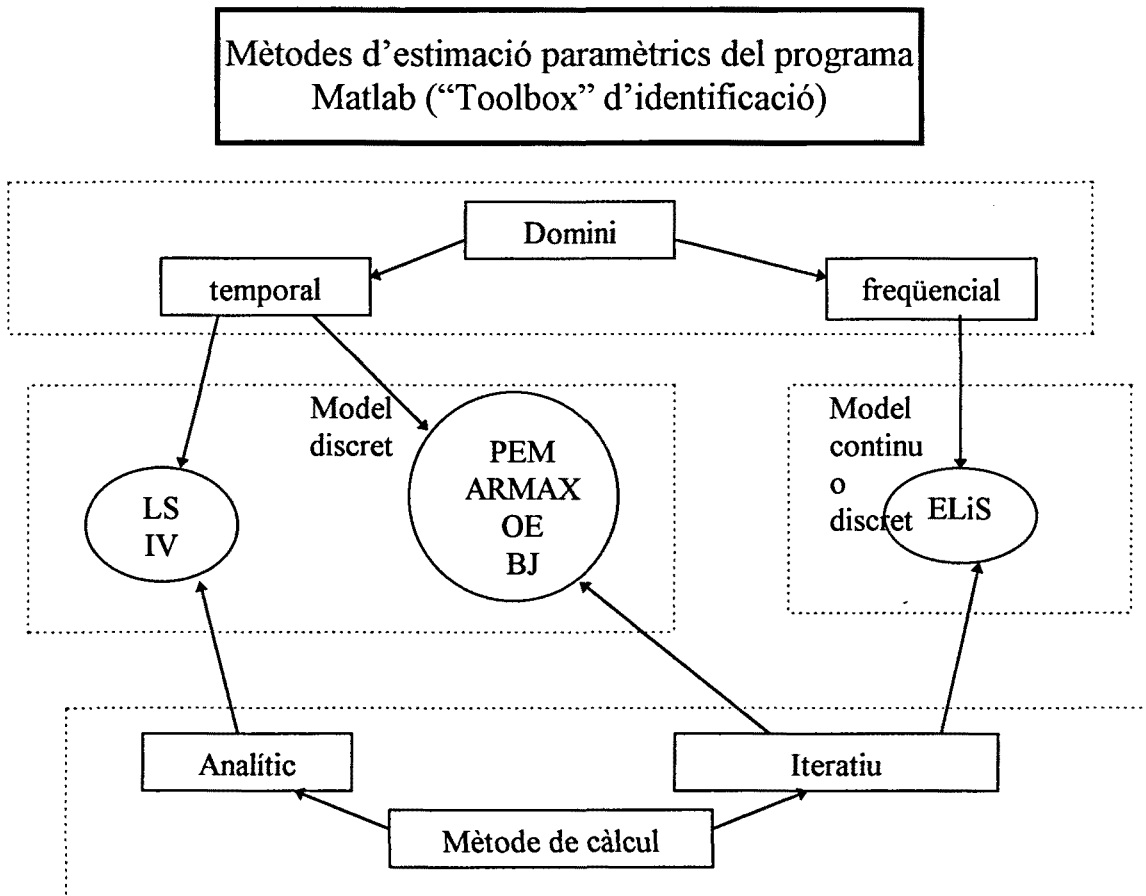


Figura 3.1. Classificació dels mètodes d'estimació paramètrics.

La base de tots els mètodes d'estimació consisteix en minimitzar els residus $\varepsilon(t)$, definint com a $\varepsilon(t)$ la diferència entre el valor desitjat, $y(t)$, i el valor predit, $\hat{y}(t)$, que és funció del model estimat. La minimització es realitza generalment a partir d'un criteri quadràtic. La metodologia de càlcul a utilitzar dependrà de la relació entre $\varepsilon(t)$ i els paràmetres que es volen estimar. Donada una relació lineal es podrà fer servir un mètode de càlcul analític, mentre que si la relació no és lineal, el mètode de càlcul a emprar serà iteratiu.

Cal remarcar però, que els models estimats, tant en el domini temporal com en el freqüencial, seran models amb dinàmiques lineals. En la taula 3.1 es mostren amb més claredat aquests conceptes.

Taula 3.1. Clarificació del terme linealitat

DINÀMICA	PROCÉS	ERROR	
		lineal... ... respecte als coeficients \hat{a}	no-lineal ...
Lineal	$y' + ay = u$	$\varepsilon = y' + \hat{a}y - u$	$\varepsilon = y - w$ $w' + \hat{a}w = u$
No-lineal	$y' + ay^3 = u$	$\varepsilon = y' + \hat{a}y^3 - u$	$\varepsilon = y - w$ $w' + \hat{a}w^3 = u$

Aquest capítol té per objectiu:

1. Analitzar els diferents mètodes d'estimació discrets implementats en la "Toolbox" d'identificació del programa MATLAB des dels punts de vista: models discrets estimats, coneixements a aportar per a la seva utilització i complexitat de l'algorisme.
2. Seleccionar aquell o aquells mètodes que puguin estimar una gamma més àmplia de processos i en els quals els coneixements a aportar siguin mínims.

Un cop seleccionats, analitzarem i comentarem els seus avantatges i inconvenients.

3.2 Els models i els mètodes d'estimació paramètrics discrets

3.2.1 Estructures dels models lineals discrets

Abans de descriure els mètodes d'estimació paramètrics cal descriure les estructures dels models discrets més utilitzats. Cal remarcar primerament que es farà servir q^{-1} com a operador retard, definit com:

$$q^{-1}y(t) = y(t-1) \quad (3.1)$$

La forma general de representar l'estructura d'un model discret és segons [Ljung, 1987]:

$$y(t) = G(q^{-1})u(t) + H(q^{-1})e(t) \quad (3.2)$$

En (3.2), $y(t)$ és la sortida del sistema en l'instant t i $u(t)$ és l'entrada. Els errors de modelització s'inclouen en el terme $e(t)$. Aquests es consideren com una seqüència de variables Random independent uniformement distribuïda de mitjana nul·la (*soroll blanc*). $G(q^{-1})$ i $H(q^{-1})$ són filtres d'ordre finit que modelitzen la part determinista i la part estocàstica respectivament.

Una característica diferencial de les diferents estructures derivades de l'equació general (3.2), és la forma de modelitzar la part estocàstica o soroll. Per aquest motiu els models s'han agrupat en dos blocs:

- Models en que $H(q^{-1})=0$

a) Models de mitjana ajustada, MA:

$$y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t) \quad (3.3)$$

on: $G(q^{-1}) = B(q^{-1})$, nk representa el retard pur del procés.

$B(q^{-1})$ és un polinomi de grau nb que té la forma:

$$B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_{nb}q^{-nb} \quad (3.4)$$

Se'ls anomena també models de resposta impuls finita (FIR). Tenen l'inconvenient que, per representar el comportament d'un procés, cal un nombre elevat de coeficients.

b) Models d'error de sortida, OE:

$$y(t) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}u(t - nk) + e(t) \quad (3.5)$$

en aquest cas: $G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})}q^{-nk}$, i $F(q^{-1})$ és un polinomi autoregressiu d'ordre nf :

$$F(q^{-1}) = 1 + f_1q^{-1} + \dots + f_{nf}q^{-nf} \quad (3.6)$$

- Models en que $H(q^{-1}) \neq 0$

c) Models autoregressius amb variables exògenes, ARX:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + e(t) \quad (3.7)$$

en aquest model es considera que la part determinista i la part estocàstica tenen el mateix denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-nk}$$

$$H(q^{-1}) = \frac{1}{A(q^{-1})}$$
(3.8)

El polinomi $A(q^{-1})$ és el polinomi autoregressiu d'ordre na :

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}$$
(3.9)

d) Models autoregressius de mitjana mòbil i variables exògenes, ARMAX:

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t - nk) + C(q^{-1})e(t)$$
(3.10)

A l'igual de c, $G(q^{-1})$ i $H(q^{-1})$, tenen el mateix denominador:

$$G(q^{-1}) = \frac{B(q^{-1})}{A(q^{-1})} q^{-nk}$$

$$H(q^{-1}) = \frac{C(q^{-1})}{A(q^{-1})}$$
(3.11)

i $C(q^{-1})$ és un polinomi semblant a (3.9) d'ordre nc .

e) Altres models del terme error són:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t) + \frac{1}{D(q^{-1})}e(t)$$
(3.12)

sent $D(q^{-1})$ un polinomi autoregressiu d'ordre nd . A aquest model se l'anomena ARARX.

Un model més general és l'estructura ARARMAX:

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk}B(q^{-1})u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})}e(t)$$
(3.13)

f) Model Box-Jenkins, BJ:

$$y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t)$$
(3.14)

Una propietat particular d'aquesta estructura és que $G(q^{-1})$ i $H(q^{-1})$ no tenen paràmetres comuns.

- Resum dels diferents tipus de models

Tota aquesta família de models es pot representar pel model general (3.15) esquematitzat en la figura 3.2.

$$A(q^{-1})y(t) = q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) + \frac{C(q^{-1})}{D(q^{-1})} e(t) \quad (3.15)$$

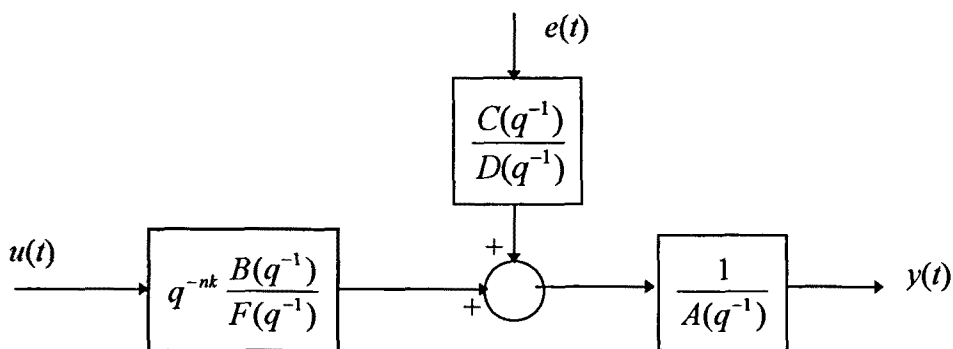


Figura 3.2. Esquema blocs del model general (3.15)

Aquesta estructura és molt general, però és útil a l'hora d'elaborar algorismes ja que els seus resultats cobreixen tots els casos especials. La relació entre el model general i els casos particulars es resumeix en la Taula 3.2.

Taula 3.2. Relació entre el model general i els casos especials

Polinomis utilitzats de (3.15)	Nom de l'estructura del model
B	FIR
AB	ARX
ABC	ARMAX
ABD	ARARX
ABCD	ARARMAX
BF	OE
BFCD	BJ

3.2.2 Objectius dels mètodes d'estimació paramètrics

Els mètodes d'estimació paramètrics tenen com a objectiu estimar els paràmetres dels polinomis: A , B , C , D i/o F segons el model considerat, de manera que l'error de predicció sigui mínim.

En el cas de l'equació general (3.15) l'error de modelització o residus es determina a partir de l'equació (3.16).

$$\varepsilon(t) = y(t) - \hat{y}(t) = \frac{D(q^{-1})}{C(q^{-1})} \left(A(q^{-1})y(t) - q^{-nk} \frac{B(q^{-1})}{F(q^{-1})} u(t) \right) \quad (3.16)$$

L'equació dels residus (3.16) es pot avaluar considerant dos termes:

- **Modelització de la part determinista.** S'observa que hi ha una relació lineal entre l'error de predicció i els coeficients dels polinomis A i B , mentre que respecte als coeficients del polinomi F la relació és no lineal. Aquest fet comporta que, per estimar els paràmetres del polinomi F , cal utilitzar un mètode de càlcul iteratiu, mentre que si sols cal estimar els paràmetres dels polinomis A i B , els mètodes de càlcul a utilitzar són analítics i, per tant, més senzills.
- **Modelització de la part estocàstica.** Els errors de modelització $\varepsilon(t)$ no són coneguts i la relació que hi ha entre els seus coeficients i els residus no és lineal. Conseqüentment, cal estimar els valors de $\varepsilon(t)$ al mateix temps que els valors dels paràmetres dels polinomis. En aquest cas, per tant, els mètodes de càlcul seran iteratius.

3.2.3 Selecció dels mètodes d'estimació

Per a la selecció del mètode o mètodes d'estimació cal tenir en compte dos aspectes:

- que el model estimat sigui el més general possible
- que la informació a aportar per a la seva utilització sigui mínima.

Per aquest motiu, a continuació s'exposa quina és la relació entre els models discrets i els mètodes d'estimació i quina és la informació que cal aportar per a la utilització dels diferents mètodes.

- Relació entre models i mètodes

La relació entre els mètodes implementats en el paquet MATLAB i els models discrets es mostra en la figura 3.3.

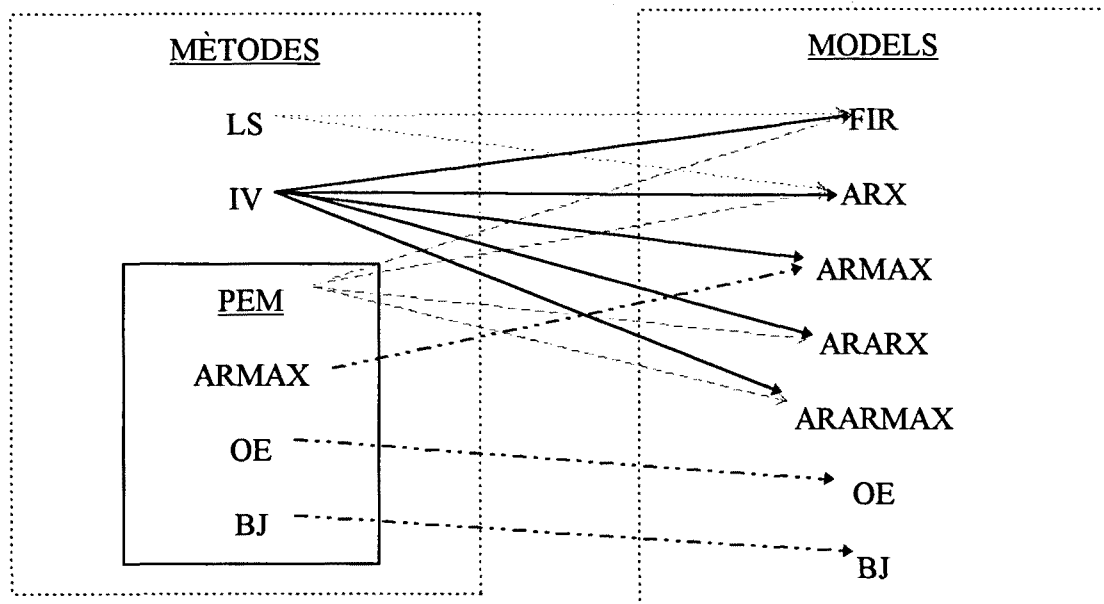


Figura 3.3. Relació entre mètodes d'estimació i models.

El mètode IV, com es veurà en l'apartat 3.4, sols s'ocupa de modelitzar la part determinada prescindint del terme estocàstic. En funció de com es selecciona la variable instrument es podran estimar models: ARX, ARMAX, ARARX o ARARMAX.

El mètode de predicció d'error (PEM) és considerat un mètode general de càlcul iteratiu [Ljung, 1987] que permet solucionar l'equació general (3.16). A l'estimació dels models més usuals (ARMAX, OE i BJ) se'ls ha anomenat pel seu nom, però la metodologia de càlcul és la mateixa que PEM.

- Informació que cal aportar per a la utilització dels diferents mètodes

La informació que cal aportar per a la utilització dels diferents mètodes d'estimació està relacionada amb l'ordre dels polinomis, d'aquest tema ens n'ocuparem en el capítol 6. Conseqüentment, en el cas de voler un model complet com pot ser BJ, caldrà determinar l'ordre de quatre polinomis, fet que comporta un increment important en el temps d'identificació d'un procés.

Per raó dels motius exposats s'han escollit com a mètodes d'estimació aquells en que la informació a aportar sigui mínima, en concret aquells que estimin un model considerant sols dos polinomis: LS, IV i OE. Com es veurà a continuació, el mètode LS és el que presenta més limitacions respecte al model a estimar però el seu estudi és d'interès per la seva senzillesa i serà un dels mètodes a considerar per a la determinació de l'ordre del model.

3.3 Mètode d'estimació per mínims quadrats, LS.

3.3.1 Descripció del mètode de mínims quadrats

El mètode LS estima models d'estructura ARX (3.7). Aquest model es pot representar per l'equació:

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + v(t) \quad (3.17)$$

on: $y(t)$ és el valor de la sortida en l'instant t , $\varphi(t)$ i θ són vectors de dimensió $d=na+nb$ de forma:

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= [-y(t-1) \cdots -y(t-na) \ u(t-nk-1) \cdots u(t-nb-nk)]^T \\ \theta &= [\alpha_1 \cdots \alpha_{na} \ b_1 \cdots b_{nb}] \end{aligned} \quad (3.18)$$

El problema a resoldre consisteix a estimar el vector de paràmetres, $\hat{\theta}$, partint de les N observacions realitzades: $y(1), \varphi(1), \dots, y(N), \varphi(N)$.

De l'equació (3.17) es dedueix un conjunt d'equacions lineals:

$$\begin{aligned} y(1) &= \varphi^T(1)\hat{\theta} \\ y(2) &= \varphi^T(2)\hat{\theta} \\ &\vdots \\ y(N) &= \varphi^T(N)\hat{\theta} \end{aligned} \quad (3.19)$$

que poden ser escrites en forma matricial segons:

$$Y = \Phi\hat{\theta} \quad (3.20)$$

on: Y és un vector de dimensió N , $Y = [y(1)y(2) \cdots y(N)]^T$; i Φ és una matriu de dimensió d/N , $\Phi = [\varphi(1)\varphi(2) \cdots \varphi(N)]^T$.

L'error de modelització o residu es defineix com:

$$\varepsilon = Y - \Phi\hat{\theta} \quad (3.21)$$

amb $\varepsilon = (\varepsilon(1) \dots \varepsilon(N))^T$.

L'estimador per mínims quadrats (LS), consisteix a minimitzar la funció residu, $V(\hat{\theta})$, definida per l'equació (3.22).

$$V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t) = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{2} \|\varepsilon\|^2 \quad (3.22)$$

Substituint l'equació (3.21) en (3.22), s'obté que la funció a minimitzar és:

$$\min_{\theta} V(\theta) = V(\hat{\theta}) = \frac{1}{2} [Y^T Y - Y^T \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y] \quad (3.23)$$

i es demostra que el valor dels paràmetres que minimitza $V(\hat{\theta})$ val:

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y \quad (3.24)$$

L'equació anterior es pot escriure com un producte de sumes finites:

$$\hat{\theta} = \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) \varphi(t)^T \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^N \varphi(t) y(t) \right] \quad (3.25)$$

de la qual, conegut l'ordre del model: na , nb i nk , es fàcilment calculable el valor dels seus paràmetres.

- Cal destacar que l'equació plantejada té solució si la matriu $\Phi^T \Phi$ és definida positiva o, equivalentment si el rang $\Phi \geq d$. En cas contrari l'equació té infinites solucions. *El requisit necessari per garantir una solució única de l'equació (3.24) és que el senyal d'excitació sigui persistentment excitat d'ordre major que d* [Söderström, 1989].

3.3.2 Propietats del mètode LS

Les propietats estadístiques d'aquest mètode demostren que donades unes dades que satisfan l'equació (3.26)

$$y(t) = \varphi^T(t) \theta_0 + e(t) \quad (3.26)$$

on θ_0 és el vector de paràmetres vertader i assumint que $e(t)$ és un soroll blanc de mitjana zero i variància λ^2 :

- $\hat{\theta}$ convergeix a θ_0 quan N tendeix a infinit
- la variable Random $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0)$ es comporta com una distribució normal de mitjana zero i covariància P_{LS}

$$P_{LS} = \hat{\lambda}^2 (\phi^T \phi)^{-1} \quad (3.27)$$

(iii) un estimador de λ^2 és :

$$\hat{\lambda}^2 = \frac{2V(\hat{\theta})}{N-d} \quad (3.28)$$

tal i com es demostra en el llibre de [Söderström, 1989].

- Cal destacar com a *principal avantatge* d'aquest mètode que la conversió a un mínim global està garantida i no existeixen mínims locals.
- Com a *inconvenient* cal destacar que si la pertorbació $v(t)$ no és un soroll blanc i, a més a més, la relació SNR (definida en l'equació 2.30) és important, la conversió al valor real de θ_0 no està garantida. Aquest fet limita la seva utilització com a mètode general d'estimació.

3.3.3 Solució de LS utilitzant l'equació normal

Com s'ha comentat en l'apartat anterior, l'estimació dels paràmetres amb el mètode LS es realitza a partir de l'equació (3.24), coneguda amb el nom d'*equació normal*.

$$\hat{\theta} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y$$

- Cal destacar com a *avantatge* que la resolució directe d'aquesta equació és senzilla i que els càlculs algebraics a realitzar són senzills.
- Presenta l'*inconvenient* que la matriu $\Phi^T \Phi$ pot estar mal condicionada, particularment si és de dimensió gran, la qual cosa comporta errors numèrics importants en la resolució de l'equació (3.24). És per aquest motiu que diferents investigadors han presentat alternatives per resoldre aquesta equació, una d'elles és per triangulació ortonormal.

3.3.4 Solució de LS per triangulació ortonormal

La triangulació ortonormal o transformació QR és una de les alternatives numèriques desenvolupades per resoldre l'equació lineal (3.20) i evitar els errors generats pel mal condicionament de la matriu $\Phi^T \Phi$ [Ljung, 1987].

Consisteix en multiplicar el sistema d'equacions original (3.20) per una matriu ortonormal Q :

$$Q\Phi\theta = QY \quad (3.29)$$

En aquestes condicions, la norma de la funció error no es veu afectada per la transformació aplicada, ja que si Q és ortogonal: $QQ^T = I$, per tant:

$$\begin{aligned}\|QY - Q\Phi\theta\|^2 &= \|Q(Y - \Phi\theta)\|^2 = (Y - \Phi\theta)^T Q^T Q (Y - \Phi\theta) \\ &= (Y - \Phi\theta)^T (Y - \Phi\theta) = \|Y - \Phi\theta\|^2\end{aligned}\quad (3.30)$$

L'objectiu es buscar una matriu ortogonal Q tal que:

$$Q\Phi = \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

on R és una matriu quadrada de dimensió d/d triangular per sobre. L'equació (3.31) es pot escriure com:

$$\Phi = Q^T \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

A l'equació (3.32) se l'anomena factorització QR de Φ . Una possible manera de construir la matriu Q és emprant la transformació de Householder [Ljung, 1987].

En aquestes condicions, el segon terme de l'equació (3.29), QY , es pot descompondre en dues matrius:

$$QY = \begin{bmatrix} Q_1 Y \\ Q_2 Y \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

i consegüentment calcular la funció pèrdua (3.22) com:

$$V(\hat{\theta}) = \|Q\Phi\hat{\theta} - QY\|^2 = \left\| \begin{bmatrix} R \\ 0 \end{bmatrix} \hat{\theta} - \begin{bmatrix} Q_1 Y \\ Q_2 Y \end{bmatrix} \right\|^2 = \|R\hat{\theta} - Q_1 Y\|^2 + \|Q_2 Y\|^2 \quad (3.34)$$

És fàcil de veure que $V(\hat{\theta})$ és minimitzat per θ quan:

$$R\hat{\theta} = Q_1 Y \quad (3.35)$$

i s'obté que el mínim de la funció pèrdua val:

$$\min_{\theta} V(\theta) = \|Q_2 Y\|^2 = (Q_2 Y)^T (Q_2 Y) \quad (3.36)$$

- Cal destacar com a *avantatges* d'aquesta metodologia de càlcul dos aspectes:

1r- el sistema lineal (3.35) està més ben condicionat que l'equació (3.24) i per tant és numèricament superior

2n- la funció pèrdua es calcula sense la necessitat d'estimar el valor dels seus paràmetres.

- Com a *inconvenients* cal destacar que requereix el doble de càlcul que el mètode directe.

Ponderant els avantatges i els inconvenients d'aquesta metodologia i tenint en compte que l'equació (3.24) dóna una precisió perfectament acceptable quan la dimensió del model no és molt gran, aquesta metodologia de càlcul no sembla realment superior a la resolució directa de les equacions normals.

Sí que s'observa, però, un aspecte que el fa especialment atractiu a l'hora d'identificar l'estructura del model i és la possibilitat de calcular la funció pèrdua sense estimar el valor dels paràmetres del model.

3.4 Mètode de la variable instrument

3.4.1 Descripció del mètode de la variable instrument

El mètode LS té com a inconvenient que els paràmetres convergeixen al valor real sempre que l'estructura del model sigui ARX o que la relació SNR sigui petita, fet que no es dóna en la majoria dels processos industrials.

El mètode de la variable instrument va néixer amb l'objectiu de superar aquestes limitacions i aprofitar els avantatges del mètode LS. Té com a inconvenient que, per a la seva utilització, cal definir una nova variable anomenada instrument, la qual cosa fa que es perdi la senzillesa del mètode LS.

El plantejament d'aquest mètode és molt senzill. Consisteix en multiplicar l'equació (3.17) per un vector instrument $z(t)$

$$z(t)y(t) = z(t)\varphi^T(t)\theta + z(t)v(t) \quad (3.37)$$

que s'ha de caracteritzar per no estar correlat (3.40) amb el soroll $v(t)$. Aquesta propietat permet plantejar el sistema d'equacions lineals:

$$z(t)\varepsilon(t) = z(t)[y(t) - \varphi^T(t)\hat{\theta}] \quad (3.38)$$

El vector de paràmetres que minimitza la funció pèrdua (3.22) val, en aquest cas:

$$\hat{\theta} = (Z^T \Phi)^{-1} Z^T Y \quad (3.39)$$

on Z és una matriu de la mateixa dimensió que Φ .

Perquè $\hat{\theta}$ convergeixi a θ_0 cal que la variable instrument tingui com a propietats:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t)\varphi^T(t) & \text{ sigui singular} \\ \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N z(t)v(t) & = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

En altres paraules, cal que la variable instrument estigui fortament correlada amb la variable regressió, $\varphi(t)$, però que no estigui correlada amb el soroll.

Aquest mètode, igual que el LS, presenta l'inconvenient que la matriu $Z^T \Phi$ pot estar mal condicionada quan és de dimensió gran. Per aquest motiu es pot fer servir també la triangulació ortonormal (apartat 3.4.3) per calcular el valor dels paràmetres.

Si es considera un model amb una estructura ARMAX, una forma de garantir les condicions (3.40) és considerant un vector instrument definit per:

$$z(t) = L(q^{-1})[-x(t-1) - x(t-2) \cdots - x(t-na) u(t-1) \cdots u(t-nb)]^T \quad (3.41)$$

on L és un filtre lineal i $x(t)$ es genera a partir del sistema lineal:

$$N(q^{-1})x(t) = M(q^{-1})u(t) \quad (3.42)$$

El problema consisteix a determinar el filtre, L , i el model lineal, $N(q^{-1})$ i $M(q^{-1})$. Una forma senzilla seria:

1r. aplicar LS

2n. emprar el model estimat com a polinomis N i M , i determinar $x(t)$ emprant (3.42)

3r. considerant $L=1$, definir $z(t)$ segons (3.41) i estimar el vector de paràmetres a partir de l'equació (3.39).

Ja que l'objectiu d'aquest estudi es comparar el mètode IV amb altres mètodes d'estimació, és d'interès determinar el vector instrument òptim. A causa de la interrelació que hi ha entre l'instrument i el sistema, la recerca òptima cal fer-la utilitzant un algorisme multi pas .

3.4.2 Mètode IV òptim proposat per Ljung

El mètode de la variable instrument òptim proposat per Ljung [Ljung, 1987], també anomenat variable instrument en quatre etapes, genera l'instrument, $z(t)$, i el filtre, L , estimant al mateix temps la funció de transferència de la part determinista i estocàstica. Aquest càlcul es realitza en quatre etapes:

1r. Considera l'estructura del model com un model ARX:

$$\hat{y}(t/\theta) = \varphi^T(t)\hat{\theta} \quad (3.43)$$

i s'utilitza LS per estimar θ . Als paràmetres estimats se'ls anomena $\hat{\theta}_N^{(1)}$.

A partir dels paràmetres s'obté la funció de transferència (3.44), on els subíndexs indiquen les iteracions realitzades.

$$\hat{G}_N^{(1)}(q) = \frac{\hat{B}_N^{(1)}(q)}{\hat{A}_N^{(1)}(q)} \quad (3.44)$$

2n- Amb la funció de transferència estimada i considerant $L=1$, es genera el vector instrument, $z^{(1)}(t)$, segons s'ha descrit en (3.41):

$$\begin{aligned} x^{(1)}(t) &= \hat{G}_N^{(1)}(q^{-1})u(t) \\ z^{(1)}(t) &= [-x^{(1)}(t-1) \dots -x^{(1)}(t-na) u(t-1) \dots u(t-nb)]^T \end{aligned} \quad (3.45)$$

L'equació (3.39) permet estimar un nou valor pels paràmetres $\hat{\theta}_N^{(2)}$, i obtenir la corresponent funció de transferència $\hat{G}_N^{(2)}$.

3r- Els nous polinomis, $\hat{A}_N^{(2)}$ i $\hat{B}_N^{(2)}$, obtinguts de la funció de transferència $\hat{G}_N^{(2)}$, serveixen per estimar la part estocàstica del procés:

$$\hat{v}_N^{(2)}(t) = \hat{A}_N^{(2)}y(t) - \hat{B}_N^{(2)}u(t) \quad (3.46)$$

Considerant que el soroll es comporta com un model autoregressiu (AR) d'ordre d , s'estima, amb el mètode LS, el filtre $\hat{L}(q^{-1})$:

$$\hat{L}(q^{-1})\hat{v}_N^{(2)}(t) = e(t) \quad (3.47)$$

4t- De la mateixa forma que en (3.45), es calcula novament $x^{(2)}(t)$ però considerant la funció de transferència $\hat{G}_N^{(2)}$. El vector instrument òptim ve donat per (3.48).

$$z^{(2)}(t) = \hat{L}_N(q^{-1})[-x^{(2)}(t-1) \dots -x^{(2)}(t-na) u(t-1) \dots u(t-nb)]^T \quad (3.48)$$

Aquest nou instrument juntament amb el filtre, serveix per estimar el valor final dels paràmetres:

$$\hat{\theta}_N = \left(\sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \varphi_F^T(t) \right)^{-1} \sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) y_F(t) \quad (3.49)$$

$$\varphi_F(t) = \hat{L}_N(q^{-1})\varphi(t), \quad y_F(t) = \hat{L}_N(q^{-1})y(t)$$

Les propietats estadístiques d'aquest mètode demostren que la variable Random $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0)$ tendeix a una distribució Normal de mitjana zero i variància, P_{IV} :

$$\frac{1}{N} P_{IV} = \hat{\lambda}_N \left[\sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \left[\sum_{t=1}^N z^{(2)}(t) \right]^T \right]^{-1} \quad (3.50)$$

$$\hat{\lambda}_N = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N [y_F(t) - \varphi_F^T(t) \hat{\theta}_N]^2$$

3.4.3 Solució de l'estimació IV per triangulació ortogonal

A l'igual de LS es genera una matriu ortogonal Q que s'ha de caracteritzar perquè el producte QZ sigui triangular per sobre. Amb aquesta propietat l'equació (3.39) es pot escriure:

$$Z^T Y = (QZ)^T Q \Phi \hat{\theta} \quad (3.51)$$

Al descompondre la matriu Q en:

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix}$$

on Q_1 és una matriu quadrada N/N . Es pot definir una matriu quadrada i triangular per sobre $Z_1 = Q_1 Z$. Si es defineix la matriu $\Phi_1 = Q_1 \Phi$ i ja que $Q_2 Z = 0$, l'equació (3.51) queda transformada en:

$$Z^T Y = Z_1^T \Phi_1 \hat{\theta} \quad (3.52)$$

En (3.53) es demostra que Z_1 és l'arrel quadrada de $Z^T Z$

$$Z^T Z = (QZ)^T QZ = Z_1^T Z_1 + [Q_2 Z]^T Q_2 Z = Z_1^T Z_1 \quad (3.53)$$

i per tant, l'equació (3.52) es pot escriure com:

$$Q_1 Y = \Phi_1 \hat{\theta} \quad (3.54)$$

L'error de modelització vindrà donat en aquest cas pel producte $Q_2 Y$ i la funció pèrdua queda definida com:

$$\min_{\theta} V(\theta) = \|Q_2 Y\|^2 = (Q_2 Y)^T Q_2 Y \quad (3.55)$$

- Cal destacar com a *avantatges* d'aquesta metodologia de càlcul dos aspectes: que el sistema lineal (3.54) està més ben condicionat que l'equació (3.39) i per tant és numèricament superior i que la funció pèrdua es calcula sense la necessitat d'estimar el valor dels seus paràmetres.
- Com a *inconvenients* cal destacar, com en l'apartat 3.3.4, que requereix el doble de càlcul que el mètode directe i complica molt el mètode IV òptim.

Conseqüentment i tenint en compte que l'equació (3.39) dona una precisió perfectament acceptable quan la dimensió del model no és molt gran, i que és vol utilitzar el mètode IV òptim, l'interès d'aquesta metodologia de càlcul es valorarà més com a mètode per identificar l'estructura del model que com a mètode per estimar el valor dels paràmetres (capítol 6).

3.5 Mètode d'error de sortida

3.5.1 Descripció del mètode d'error de sortida (OE)

Aquest mètode, també conegut amb el nom de mètode del model (MM), consisteix a minimitzar l'error de predicció al considerar una estructura OE (3.5). L'esquema de funcionament d'aquest mètode es visualitza en la figura 3.4 .

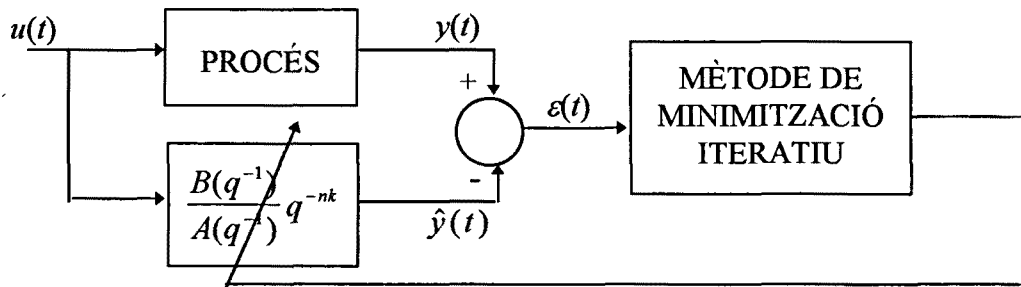


Figura 3.4. Esquema de l'estimació OE.

Cal observar que aquest mètode és aplicable a tot tipus de models. L'error de sortida es defineix com:

$$\varepsilon(t, \hat{\theta}) = y(t) - \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})} q^{-nk} u(t) = y(t) - \hat{y}(t) \quad (3.56)$$

Donada una seqüència de dades d'entrada i sortida i considerant que l'ordre del model és conegut, el mètode d'error de sortida [Zhu, 1993] estima el valor dels paràmetres minimitzant la funció pèrdua:

$$V_N(\hat{\theta}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon(t, \hat{\theta})^2 \quad (3.57)$$

L'error de sortida, definit en (3.56), és lineal respecte al polinomi B i no lineal respecte als paràmetres del polinomi A . La conseqüència d'aquesta no linealitat és que no existeix una solució analítica per minimitzar la funció pèrdua i, per tant, cal utilitzar un algorisme de minimització iterativa.

Pel fet d'utilitzar un algorisme de càlcul iteratiu, el temps de càlcul esdevé major que LS o IV, la seva utilització pot comportar problemes com la convergència a un mínim local o la no convergència, i l'anàlisi teòric esdevé més complicat.

Les propietats estadístiques demostren que donat un sistema representat per (3.56), amb una entrada persistentment excitada d'ordre $2d$, no correlada amb la pertorbació, i que la minimització de (3.57) convergeix a un mínim global per tot N :

- (i) $\hat{\theta}$ convergeix a θ_0 quan N tendeix a infinit
- (ii) la variable Random $\sqrt{N}(\hat{\theta} - \theta_0)$ es comporta com una distribució normal de mitjana zero i covariància P_{OEM} , segons [Söderström, 1989]:

$$P_{\text{OEM}} = \lambda^2 [E\psi(t)\psi^T(t)]^{-1} [EH_0(q^{-1})\psi(t)H_0(q^{-1})\psi^T(t)][E\psi(t)\psi^T(t)]^{-1} \quad (3.58)$$

on $\psi(t)$ és la derivada dels residus respecte als paràmetres:

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \varepsilon(t, \hat{\theta}) \right]_{\hat{\theta}=\theta}^T \\ &= \left(\frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})^2} u(t-1) \cdots \frac{\hat{B}(q^{-1})}{\hat{A}(q^{-1})^2} u(t-na) \frac{-1}{\hat{A}(q^{-1})} u(t-1) \cdots \frac{-1}{\hat{A}(q^{-1})} u(t-nb) \right)^T \end{aligned} \quad (3.59)$$

Alguns autors com [Ljung, 1987] i [Söderström, 1989] consideren aquest mètode com un cas particular del mètode general anomenat mètode de predicció d'error (PEM) que engloba també el mètode LS com a solució particular.

El mètode OE convergeix al model real independentment del tipus de pertorbacions presents en el procés. Si s'anomena a l'error de modelització:

$$\Delta G(q^{-1}) = G_0(q^{-1}) - \hat{G}(q^{-1}) \quad (3.60)$$

on G_0 indica el valor real de la funció de transferència, si $N \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} V_N &\rightarrow E[V_{OE}] = E[\Delta G(q^{-1})u(t) + v(t)]^2 \\ &= \Delta G(q^{-1})^2 E u(t)^2 + 2\Delta G(q^{-1})E[u(t)v(t)] + E v(t)^2 \\ &= \Delta G(q^{-1})^2 E u(t)^2 + E v(t)^2 \end{aligned} \quad (3.61)$$

l'ordre del model és correcte i la minimització convergeix a un mínim global, es té:

$$\Delta G(q^{-1})^2 \rightarrow 0 \quad \text{quan } N \rightarrow \infty$$

fet que implica que independentment del terme pertorbació:

$$\hat{G}(q^{-1}) \rightarrow G_0(q^{-1}) \quad \text{quan } N \rightarrow \infty$$

Això és equivalent a dir que:

$$\hat{\theta} \rightarrow \theta_0 \quad \text{quan } N \rightarrow \infty$$

El mètode OE comparat amb el mètode de predicció d'error, presenta l'avantatge de ser més senzill de càlcul i l'inconvenient de ser menys eficient. En unes circumstàncies concretes, cas en que el senyal excitació tingui el mínim nombre de components espectrals necessaris per la identificació de paràmetres, ambdós mètodes tenen la mateixa eficiència [Kabaila, 1983]. En utilitzar el mètode OE l'efecte de les pertorbacions pot ser despreciat sempre que l'entrada no estigui corralada amb les pertorbacions, és a dir en el cas d'experimentacions en anell obert.

3.5.2 Algorisme de minimització iteratiu

El mètode numèric d'optimització més utilitzat per a minimitzar la funció pèrdua és l'algorisme de Newton-Raphson:

$$\hat{\theta}^{(k+1)} = \hat{\theta}^{(k)} - \alpha_k [V_N''(\hat{\theta}^{(k)})]^{-1} V_N'(\hat{\theta}^{(k)})^T \quad (3.62)$$

En ella:

$\hat{\theta}^{(k)}$ és el vector de coeficients estimats en la iteració k ,
 α_k és un escalar i controla la longitud del pas de recerca,
 $V_N'(\hat{\theta})$ és el vector de gradients de $V_N(\hat{\theta})$,
 $V_N''(\hat{\theta})$ és la matriu Hessiana de $V_N(\hat{\theta})$

3.6 Conclusions dels mètodes d'estimació

En aquest apartat s'intentarà resumir les característiques principals dels mètodes descrits en el present capítol i que estan disponibles en la "Toolbox" d'identificació del programa MATLAB. Es farà particular èmfasi en les seves característiques diferencials amb l'objectiu de conèixer les seves restriccions en ser utilitzats per resoldre un problema particular d'identificació.

Dels algorismes implementats en el programa MATLAB, s'ha fet una selecció tenint en compte:

- la informació a aportar per part de l'usuari del mètode
- que el model estimat no tingui una estructura molt restrictiva.

De tots ells s'han seleccionat com a mètodes d'interès per a aquesta tesi:

- LS, per la seva senzillesa
- IV òptim, perquè és capaç d'estimar la part determinista del model independentment del terme soroll
- i OE, perquè igual que el mètode IV òptim és capaç de convergir al model estimat independentment del terme estocàstic.

La funció de transferència discreta d'un procés, es representa per:

$$G(q^{-1}) = \frac{q^{-nk} B(q^{-1})}{A(q^{-1})} = \frac{q^{-nk} (b_0 + b_1 q^{-1} + \dots + b_{nb} q^{-nb})}{1 + a_1 q^{-1} + \dots + a_{na} q^{-na}}$$

de la qual, conegut l'ordre dels polinomis i el valor del retard pur, (na, nb, nk) i definint el vector de coeficients no coneguts com:

$$\theta = [b_0 b_1 \dots b_{nb} a_1 a_2 \dots a_{na}]^T$$

es pot estimar el valor dels seus coeficients utilitzant un mètode de càlcul analític o iteratiu.

Els mètodes de càlcul avaluats en aquesta tesi es poden resumir amb les expressions:

$$\begin{aligned} \theta_{LS} &= \arg \min_{\theta} \sum_{t=n}^N [y(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta})]^2 \\ \theta_{IV} &= \arg \min_{\theta} \sum_{t=n}^N [z(t)(y(t) - \hat{y}(t, \hat{\theta}))]^2 \\ \theta_{OE} &= \arg \min_{\theta} \sum_{t=n}^N [y(t) - \hat{y}^*(t, \hat{\theta})]^2 \end{aligned}$$

on:

$$\hat{y}(t, \hat{\theta}) = -\hat{a}_1 y(t-1) - \dots - \hat{a}_{na} y(t-na) + \hat{b}_0 u(t-nk) + \hat{b}_1 u(t-nk-1) + \hat{b}_{nb} u(t-nk-nb)$$

$$\hat{y}^*(t, \hat{\theta}) = -\hat{a}_1 \hat{y}(t-1) - \dots - \hat{a}_{na} \hat{y}(t-na) + \hat{b}_0 u(t-nk) + \hat{b}_1 u(t-nk-1) + \hat{b}_{nb} u(t-nk-nb)$$

Com a resum d'aquests tres mètodes podem dir:

- El mètode **mínims quadrats** permet estimar un bon model del procés quan el terme pertorbació és un soroll blanc o correlat de baix nivell i no està correlat amb el senyal excitació, és a dir, quan es treballa en anell obert.
- El mètode de la **variable instrument** és un mètode d'estimació consistent, independentment del tipus de pertorbació i sempre que el procés s'avalui en anell obert. Per aconseguir una implementació òptima d'aquest mètode, cal utilitzar un procediment iteratiu.
- El mètode **d'error de sortida** és un mètode de recerca iterativa i, per tant, pot convergir a valors mínims locals de la funció criteri o pèrdua. Presenta errors de modelització quan el mínim local no coincideix amb el mínim global, la qual cosa es pot donar quan el nombre de dades a processar és reduït, quan el nivell de soroll és important i per tant les condicions inicials no són bones. L'eficiència d'aquest mètode depèn de l'estimació inicial.
- Comparant els mètodes OE i IV òptim, el mètode OE presenta una matriu de covariància dels paràmetres menor que IV, per aquest motiu la desviació del valor estimat dels paràmetres serà menor que el valor estimat pel mètode IV.

- Ni el mètode IV ni OE blanquegen els residus.
- En el cas que el procés s'avaluï en anell tancat caldrà seleccionar altres mètodes d'estimació com ARMAX, BJ o el mètode general PEM.

Capítol 4

Estimació de models en el domini-S

4.1 Introducció

La identificació de sistemes dinàmics lineals en temps continu és important per a l'estudi d'una gran varietat de problemes relacionats amb l'enginyeria de control. Per exemple, en les diferents tècniques de disseny analític de controladors, el model matemàtic de la planta es considera conegut; un model matemàtic pot millorar el coneixement físic d'un sistema o pot ser utilitzat amb el propòsit de simulador.

Durant molt temps, tots els models considerats eren de naturalesa contínua. Com a resultat de l'aparició dels ordinadors digitals i de targetes ADC i DCA de baix cost i alta qualitat, molta de la recerca realitzada en el camp de la identificació de processos s'ha encaminat cap a l'estudi de models de naturalesa discreta i no s'ha parat molta atenció a l'estudi de models en temps continu. Tots els mètodes d'estimació paramètrics comentats en el capítol anterior, formen part d'aquesta recerca.

La teoria discreta desenvolupada s'ha fonamentat en el fet de mantenir l'excitació constant entre els períodes de mostreig. En algunes circumstàncies però, es pot donar el cas que l'excitació d'un procés no es mantingui constant o que aquesta excitació no sigui perfectament coneguda. L'estudi d'aquests casos queda al marge de la teoria discreta desenvolupada. És per aquest motiu que, en el primer apartat d'aquest capítol, s'estudia la relació entre els models discrets i continus en funció que el senyal d'excitació es mantingui o no constant entre períodes de mostreig.

En el capítol precedent s'ha comentat que els mètodes d'estimació paramètrics són una eina molt útil per estimar models discrets. En aquest capítol s'avaluen també en quines condicions els models discrets estimats són representatius dels processos continus. És amb aquesta finalitat que, en el segon apartat d'aquest capítol, es descriuen els criteris de comparació adoptats per comparar els models estimats amb els models reals i, en el tercer, s'avaluen els resultats obtinguts en l'estudi d'un procés prova (benchmark) que ens servirà de base per a la comparació dels mètodes d'estimació seleccionats.

Una altre dels objectius d'aquest capítol és observar el comportament dels mètodes d'estimació discrets quan els senyals d'excitació emprats són senyals periòdics multisinusoidals i binaris. Aquesta comparació es fa en el tercer apartat i és una de les principals aportacions d'aquest treball a la identificació de sistemes dinàmics.

4.2 Estimació d'un model continu a partir de mesures discretes

A causa de la naturalesa discreta de les mesures d'un procés, es disposa de senyals que no contenen tota la informació sobre el comportament en temps continu del procés estudiat, a menys que es facin algunes assumpcions.

En aquest apartat s'estudia el model continu obtingut assumint, en primer lloc, que es disposa d'un mantenidor d'ordre zero, fet en que es basa la teoria de control digital; i en segon lloc, que es disposa de senyals excitació de banda limitada.

Cal comentar, a més a més, que la conversió de models continus a discrets és immediata, cosa que no es dona en el cas contrari. És per aquest motiu que cal estudiar quina és l'assumpció bàsica per realitzar una bona estimació discreta d'un sistema continu i què succeeix quan aquesta condició és violada.

4.2.1 Condició bàsica per a l'estimació discreta d'un procés continu

Per a l'estimació discreta d'un procés continu cal adquirir un conjunt discret de mostres dels senyals d'entrada i sortida. Per garantir que aquest conjunt de dades mostrades (mesures) continguin tota la informació del procés en temps continu cal exigir que l'adquisició de dades es realitzi en presència d'un mantenidor d'ordre zero (ZOH).

Un ZOH exigeix el compliment de dues condicions [Schoukens 94]:

1r. el senyal excitació, $u(t)$, s'ha de mantenir constant entre dos intervals de mostreig

$$u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_d(k) \text{zoh}(t - kT_s) \quad (4.1)$$

sent T_s el temps d'adquisició de dades, $u_d(k)$ una seqüència en temps discret, i

$$\text{zoh}(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < T_s \\ 0 & t \geq T_s \end{cases} \quad (4.2)$$

2n. el valor absolut de les parts imaginàries del pols i zeros del procés han de ser menors que π/T_s ;

La funció de transferència discreta resultant d'incorporar en el procés un ZOH és:

$$G_{\text{ZOH}}(z^{-1}) = \text{ZOH}\{G(s)\} = (1 - z^{-1}) \mathfrak{Z}\left\{\frac{G(s)}{s}\right\} \quad (4.3)$$

on \mathfrak{Z} indica la transformada zeta i $G(s)$ la funció de transferència del conjunt actuator i procés.

La mesura de G_{ZOH} es realitza segons el diagrama de blocs de la figura 3.1, on $G_y(s)$ és la funció de transferència del mesurador o sensor.

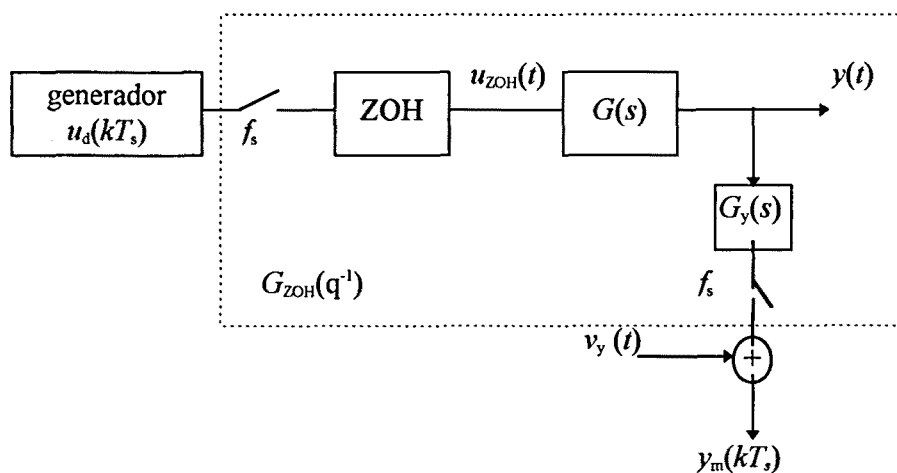


Figura 4.1. Diagrama de blocs del procés amb ZOH

En aquestes condicions, la relació espectral entre l'entrada i la sortida és de [Pintelon, 1994]:

$$Y_m(\omega) = U_d(\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega - k\omega_s) G_y(\omega - k\omega_s) \text{ZOH}\left(\frac{\omega}{\omega_s} - k\right) \quad (4.4)$$

amb $\omega_s = 2\pi/T_s = 2\pi f_s$ i

$$ZOH(x) = T_s \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} e^{-j\pi x} \quad (4.5)$$

Considerant que les mesures es realitzen idealment, $G_y(s)=1$, la funció de transferència freqüencial té per expressió:

$$G_{ZOH}(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{U_d(\omega)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega - k\omega_s) ZOH\left(\frac{\omega}{\omega_s} - k\right) \quad (4.6)$$

Els termes de la suma són deguts a l'efecte d'àlies del procés mostrat.

4.2.2 Conversió de models discrets a continus en presència d'un ZOH

La connexió entre les funcions de transferència del model continu i del model discret es descriuen millor en espai d'estat.

Un sistema que té com a funció de transferència en temps continu, $G(s)$, es representa en espai d'estat per les equacions:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) &= Cx(t) \end{aligned} \quad (4.7)$$

sent la funció de transferència:

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B$$

Un sistema en temps discret, amb una funció de transferència $G(z^{-1})$, té la següent descripció en espai d'estat:

$$\begin{aligned} x((k+1)T_s) &= \mathcal{A}(kT_s) + \mathcal{B}(kT_s) \\ y(t) &= Cx(kT_s) \end{aligned} \quad (4.8)$$

amb

$$G(z^{-1}) = C(I - z^{-1}\mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$$

Al considerar un mantenidor d'ordre zero es demostra [Rao, 1994] que la relació entre les dues representacions d'estat és de:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= e^{AT_s} \\ \mathcal{B} &= \left(\int_0^{T_s} e^{A\lambda} d\lambda \right) B = (\mathcal{A} - I)^{-1} AB \end{aligned} \quad (4.9)$$

Per tant la conversió de model discret a continu es podrà resoldre fent:

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{T_s} \ln(\mathcal{A}) \\ B &= (\mathcal{A} - I)^{-1} A \mathcal{B} \end{aligned} \quad (4.10)$$

Aquestes equacions tenen solució sempre que els pols del model discret siguin positius. Altres relacions entre la funció de transferència discreta i continua, considerant un T_s suficientment petit, es descriuen en [Rao, 1994].

4.2.2.1 Conversió d'un model discret a continu

Com a aplicació d'aquest mètode observem el cas senzill d'un sistema de segon ordre de funció de transferència:

$$G(s) = \frac{k}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (4.11)$$

La funció de transferència discreta serà, al considerar un ZOH:

$$G(z^{-1}) = \frac{b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{(1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2})}$$

o equivalentment en espai d'estat:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \begin{bmatrix} -a_1 & -a_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathcal{B} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \\ C &= [b_1 \quad b_2] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Es demostra que el denominador de la funció de transferència $G(s)$ té l'expressió:

$$\text{den}(G(s)) = s^2 - \frac{\ln(p_1) + \ln(p_2)}{T_s} s + \frac{\ln(p_1)\ln(p_2)}{T_s^2} \quad (4.13)$$

on p_1 i p_2 són els valors propis de la matriu \mathcal{A} . L'equivalència entre el denominador del domini \mathcal{Z} i el domini S és de:

$$\alpha_1 = -\frac{\ln(p_1)}{T_s} \quad \text{i} \quad \alpha_2 = -\frac{\ln(p_2)}{T_s} \quad (4.14)$$

El numerador de la funció de transferència $G(s)$ té l'expressió:

$$\text{num}(G(s)) = \frac{(p_2 - 1)(b_2 + p_1 b_1) \ln(p_1) - (p_1 - 1)(b_2 + p_2 b_1) \ln(p_2)}{T_s(p_1 - p_2)(1 + a_1 + a_2)} s + \frac{(b_1 + b_2) \ln(p_1) \ln(p_2)}{T_s^2(1 + a_1 + a_2)} \quad (4.15)$$

Respecte al numerador la relació no és tan immediata ja que s'obté un polinomi de primer ordre, i s'origina un zero que no es correspon amb el model en el domini S. La relació que cal establir entre (4.11) i (4.15) és:

$$\frac{(b_1 + b_2) \ln(p_1) \ln(p_2)}{T_s(1 + a_1 + a_2)} = k \quad (4.16)$$

i

$$\left[(p_2 - 1)(b_2 + p_1 b_1) \ln(p_1) - (p_1 - 1)(b_2 + p_2 b_1) \ln(p_2) \right] = 0 \quad (4.17)$$

Com a resultat de la conversió discreta de la funció de transferència contínua (4.11), es demostra que els valors de b_1 i b_2 valen:

$$b_1 = \frac{\alpha_2(1 - p_1) - \alpha_1(1 - p_2)}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)} \quad (4.18)$$

$$b_2 = \frac{\alpha_1 p_1 (1 - p_2) - \alpha_2 p_2 (1 - p_1)}{\alpha_1 \alpha_2 (\alpha_2 - \alpha_1)}$$

Al substituir (4.18) en (4.17), s'obté que el zero del numerador (4.15) és de:

$$z_1 = \frac{-(b_1 + b_2)(p_1 - p_2) \ln(p_1) \ln(p_2)}{\left[(p_2 - 1)(b_2 + p_1 b_1) \ln(p_1) - (p_1 - 1)(b_2 + p_2 b_1) \ln(p_2) \right] T_s} = \infty \quad (4.19)$$

En general, es pot dir que quan es dona la convergència de $\hat{\theta}$ a θ_0 el zero originat, com a resultat de la conversió del model discret a continu, tendeix a valors alts i per tant, de dinàmica menyspreable.

Teorema 3.1. Es considera que z_1 és insignificant quan:

- 1r. donat un senyal excitació de banda limitada entre $[f_{\min} f_{\max}]$, el seu valor sigui una dècada superior a la freqüència màxima del senyal excitació, $z_1 > 10 (2\pi f_{\max})$;
- 2n. o per la resta de senyals, quan $z_1 > 10 \frac{\omega_s}{2}$, on $\omega_s = 2\pi/T_s$.

Demostració. El Teorema 3.1 pot justificar-se fàcilment en el camp freqüencial.

Donada la funció de transferència:

$$G(s) = \frac{(k_1 s \pm k)}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)} \quad (4.20)$$

amb $k_1 \ll k$ i $z_1 = k/k_1 \gg 1$, tindrà com a funció de transferència freqüencial:

$$G(j\omega) = \frac{(k_1 j\omega \pm k)}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} = k_1 \frac{(j\omega \pm z_1)}{(j\omega + \alpha_1)(j\omega + \alpha_2)} \quad (4.21)$$

amb un valor absolut i una fase de:

$$|G(j\omega)| = k_1 \frac{|(j\omega \pm z_1)|}{|(j\omega + \alpha_1)||j\omega + \alpha_2|} = k_1 \frac{\sqrt{\omega^2 + z_1^2}}{\sqrt{\omega^2 + \alpha_1^2} \sqrt{\omega^2 + \alpha_2^2}} \quad (4.22)$$

$$\arg[G(j\omega)] = \pm \arctg\left(\frac{\omega}{z_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega}{\alpha_2}\right)$$

Si es considera el cas en que s'excita el procés amb un senyal de banda limitada ω_{\max} i que $z_1 = 10 \omega_{\max}$. El valor del guany i de la fase serà per $\omega = \omega_{\max}$ serà:

$$|G(j\omega_{\max})| = \frac{k}{10\omega_{\max}} \frac{\sqrt{\omega_{\max}^2 + 10^2 \omega_{\max}^2}}{\sqrt{\omega_{\max}^2 + \alpha_1^2} \sqrt{\omega_{\max}^2 + \alpha_2^2}}$$

$$= \frac{k}{10} \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{\omega_{\max}^2 + \alpha_1^2} \sqrt{\omega_{\max}^2 + \alpha_2^2}} \cong k \frac{1}{\sqrt{\omega_{\max}^2 + \alpha_1^2} \sqrt{\omega_{\max}^2 + \alpha_2^2}}$$

$$\arg[G(j\omega_{\max})] = \pm \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{10 \omega_{\max}}\right) - \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{\alpha_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{\alpha_2}\right)$$

$$= \pm 5.71^\circ - \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{\alpha_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{\alpha_2}\right) \cong - \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{\alpha_1}\right) - \arctg\left(\frac{\omega_{\max}}{\alpha_2}\right)$$

Conseqüentment, el comportament freqüencial d'un zero en el numerador una dècada major que ω_{\max} és insignificant. Per tant, segons la relació de Parseval (eq. 2.5), la seva incidència a nivell temporal també serà menyspreable.

4.2.3 Obtenció del model continu sense la presència d'un ZOH

En algunes circumstàncies no és possible avaluar directament del conjunt ZOH i $G(s)$ per estimar la funció de transferència discreta i, per tant, el senyal excitació disponible no es manté constant entre dos intervals de mostreig. S'estudia en aquest apartat el cas en què el senyals excitació disponible sigui de banda limitada (BL).

Es diu que un senyal mostrejat, $u(t)$, amb una energia espectral $S(\omega)$ és de banda limitada quan existeix un valor ω_{\max} tal que:

$$S(\omega)=0 \quad \forall |\omega| > \omega_{\max}$$

El fenomen estudiat es dona quan s'avaluen els següents casos:

- Mostreig dels senyals d'entrada i sortida del procés amb un filtre anti àlies [Pintelon, 1994]. El diagrama de blocs de la figura 4.2. representa aquest cas. En ell, $G(s)$ és la funció de transferència de la planta que es vol identificar, $G_u(s)$, $G_y(s)$ són les característiques dels canals de mesura inclòs el filtre anti àlies, $u_m(kT_s)$ i $y_m(kT_s)$ són els senyals d'entrada i sortida mesurats, $v_u(t)$ representa el soroll del mesurador del senyal d'entrada i $v_y(t)$ representa el soroll del procés i el mesurador del senyal de sortida.

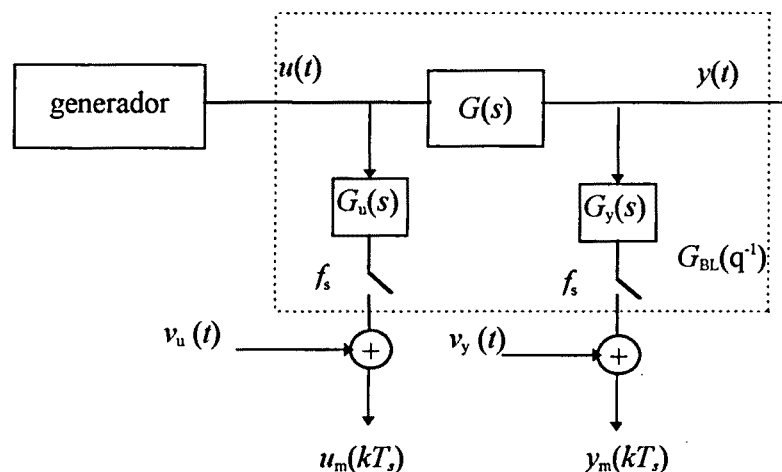


Figura 4.2. Diagrama de blocs del procés mesurat en condicions BL

- Mostreig dels senyals d'entrada i sortida d'un procés en que l'actuador té una dinàmica ràpida no menyspreable i mesurable. En aquestes circumstàncies, per realitzar una bona identificació del conjunt: actuador i procés, cal mostrejar a freqüències altes i, conseqüentment, s'origina una

pèrdua de precisió en el model del procés ja que els pols estimats estaran situats, majoritàriament, a l'entorn de 1 [Söderström, 1989]. Pels motius exposats i en el cas que l'interès sigui conèixer la funció de transferència del procés caldrà emprar com a senyal d'entrada la mesura de l'actuador. La figura 4.3 representa aquest cas. En ella, $G_p(s)$ és la funció de transferència del procés que es vol identificar, i $G_a(s)$ és la funció de transferència de l'actuador. Un exemple concret seria el cas d'una turbina de combustió, on l'actuador es correspondria amb l'alimentador de combustible i el procés amb la turbina [Evans, 1994].

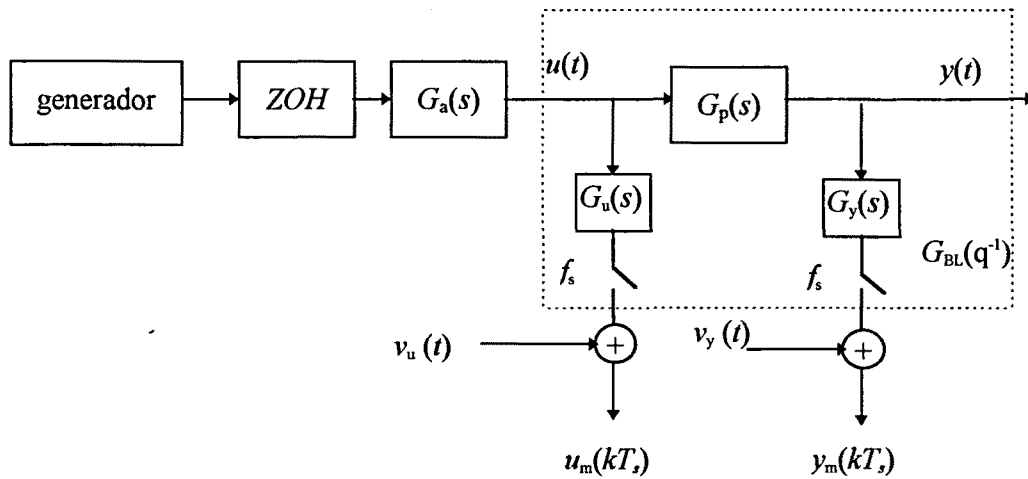


Figura 4.3. Diagrama de blocs del procés mesurat en presència d'un actuador amb dinàmica ràpida no menyspreable.

La resposta freqüencial d'aquest procés ve donada per la relació [Schoukens, 1994]:

$$G_{BL}(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{U_m(\omega)} = \frac{G_y(\omega)Y(\omega) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} G_y(\omega - jk\omega_s)Y(\omega - jk\omega_s)}{G_u(\omega)U(\omega) + \sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} G_u(\omega - jk\omega_s)U(\omega - jk\omega_s)} \quad (4.23)$$

A l'igual que en (4.6) els termes de la suma són deguts a l'efecte àlies del procés mostrat. En el cas de senyals excitació multisinusoidals el contingut espectral és definit i no es generen àlies (2.15) i en el cas de senyals MLBS l'àlies que genera és de valor reduït. Per tant, es pot simplificar l'equació (4.23), i s'obté en considerar $|\omega| < \omega_s/2$:

$$G_{BL}(\omega) = \frac{Y_m(\omega)}{U_m(\omega)} = \frac{G_y(\omega)Y(\omega)}{G_u(\omega)U(\omega)} = G(\omega) \frac{G_y(\omega)}{G_u(\omega)} \quad (4.24)$$

En el cas ideal en què $G_y(\omega) = G_u(\omega)$,

$$G_{BL}(\omega) = G(\omega) \quad (4.25)$$

Per la resta de senyals caldrà disposar d'un filtre anti àlies perquè l'equació (4.24) sigui certa.

La relació entre la funció de transferència obtinguda amb les dades BL i ZOH es determina fent el quocient entre les equacions (4.6) i (4.25):

$$\begin{aligned} \frac{G_{ZOH}(\omega)}{G_{BL}(\omega)} &= \frac{\sum_{k=-\infty}^{\infty} G(\omega - k\omega_s) ZOH\left(\frac{\omega}{\omega_s} - k\right)}{G(\omega)} \\ &= ZOH(\omega / \omega_s) + \frac{\sum_{k=-\infty, k \neq 0}^{\infty} G(\omega - k\omega_s) ZOH\left(\frac{\omega}{\omega_s} - k\right)}{G(\omega)} \end{aligned} \quad (4.26)$$

De l'equació (4.26) es dedueix que la relació entre G_{BL} i G_{ZOH} :

- és independent del tipus d'entrada
- el primer terme d'error correspon a la diferència més important, i és degut a l'espectre originat per la reconstrucció del ZOH
- i el segon terme error és degut als harmònics d'alta freqüència generats per la reconstrucció ZOH.

En el cas dels senyals multisinusoidals, ja que no generen àlies, es té la relació:

$$\frac{G_{ZOH}(\omega)}{G_{BL}(\omega)} = ZOH(\omega / \omega_s) \quad (4.27)$$

4.2.3.1 Exemple d'aplicació

L'exemple d'aplicació és un procés senzill de segon ordre representat per la funció de transferència:

$$G(s) = \frac{15}{(s+1)(s+15)}$$

El procés s'ha simulat en presència d'un ZOH (figura 4.1) i sense ZOH (figura 4.2). Com a senyal excitació s'ha utilitzat, en ambdós casos, el senyal multisinusoidal sc70 dissenyat en el capítol 2. Amb les dades resultats de la simulació s'ha estimat la funció de transferència freqüencial i s'han obtingut: G_{ZOH} i G_{BL} respectivament.

En la figura 4.4 s'observen:

- la funció espectral d'un mantenidor d'ordre zero per a les freqüències contingudes en el senyal excitació, $ZOH(\omega)$;
- la funció espectral obtinguda al fer el quocient entre les funcions de transferència estimades $G_{ZOH}(\omega)$ i $G_{BL}(\omega)$.

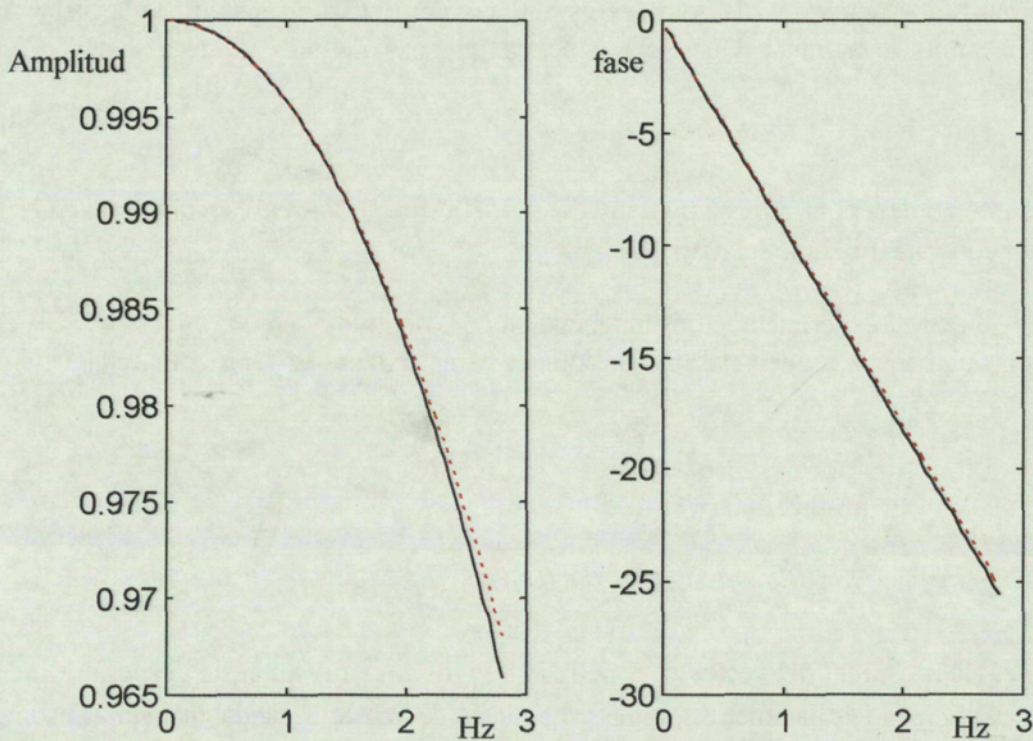


Figura 4.4. Funció espectral de: (—) $\frac{G_{ZOH}(\omega)}{G_{BL}(\omega)}$ i (·) $ZOH(\omega)$.

A partir d'aquests resultats s'observa que el quocient entre les dues funcions de transferència freqüencials coincideix amb la funció espectral d'un mantenidor d'ordre zero.

4.3 Criteris de comparació

Els criteris que s'han utilitzat per comparar els models estimats s'han dividit en dues categories: criteris paramètrics i criteris d'error. Ambdós poden ser estudiats amb el model discret, resultat directe de l'estimació paramètrica del procés, i el model continu, resultat de la transformació del model discret estimat a model continu.

4.3.1 Criteris paramètrics

Una mesura directe de la igualtat entre dos models és la comparació entre el valor dels pols, zeros i guany del model real amb l'estimat. Per tant, definirem com a criteri paramètric la distància entre els pols, zeros i guany dels models a comparar.

La distància entre dos punts del pla complex es defineix com el valor absolut de la distància complexa dels punts a estudiar. L'equació genèrica que ens defineix aquesta distància ve donada per:

$$\text{distància} = |\hat{x}_i - x_i| \quad (4.28)$$

on \hat{x}_i , representa un dels pols o zeros o guany del model estimat i x_i , representa un dels pols o zeros o guany equivalent del model real.

En el cas de realitzar m experimentacions independents de longitud N en un procés (anàlisi de Monte Carlo), s'obtenen m models paramètrics que es caracteritzen per tenir com a valor mig i variància dels seus paràmetres:

$$\begin{aligned} \bar{\theta} &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m \hat{\theta}_i \\ \hat{P}_\theta &= \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m (\hat{\theta}_i - \bar{\theta})(\hat{\theta}_i - \bar{\theta})^T \end{aligned} \quad (4.29)$$

on $\hat{\theta}_i$ indica el valor estimat del vector paràmetres obtingut com a resultat de l'experimentació i , i $\bar{\theta}$ conté el valor mig dels paràmetres estimats. La funció de transferència del model mig estimat serà:

$$\bar{G}(q^{-1}) = \frac{\bar{b}_1 q^{-1} + \dots + \bar{b}_{nb} q^{-nb}}{1 + \bar{a}_1 q^{-1} + \dots + \bar{a}_{na} q^{-na}} q^{-nk} \quad (4.30)$$

o, com a resultat de fer la descomposició factorial del numerador i denominador,

$$\bar{G}(q^{-1}) = \frac{\bar{k}(1 - \bar{z}_1 q^{-1}) \dots (1 - \bar{z}_{nb-1} q^{-1})}{(1 - \bar{p}_1 q^{-1}) \dots (1 - \bar{p}_{na} q^{-1})} q^{-(nk+1)} \quad (4.31)$$

on: \bar{k} , \bar{z}_i i \bar{p}_i , representen el valor mig del guany, el valor mig de cadascun dels zeros i el valor mig dels pols respectivament.

La distància s'avalua a partir del valor mig:

$$\text{distància} = |\bar{x}_i - x_i|$$

on \bar{x}_i representa el valor mig d'un dels pols o zero o guany dels models estimats.

4.3.2 Criteris error

Amb l'objectiu de comparar els diferents models estimats, s'han definit uns criteris error a partir dels quals s'obtenen uns valors escalars. Aquests criteris ens permeten avaluar tant els errors temporals com els freqüencials. Els criteris error que s'han considerat són:

- la mitjana absoluta de l'error que ens permet conèixer el valor mig de l'error
- la mitjana quadràtica que ens dóna informació sobre la dispersió d'aquest error.

Els índex temporals es determinen a partir de les equacions (4.32), on $y(t)$ és la sortida real del model simulat i $\hat{y}(t)$ és la sortida del model estimat, ambdós models comparats són discrets.

$$e_{\text{abs}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N |y(t_k) - \hat{y}(t_k)|$$

$$e_{\text{sqr}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (y(t_k) - \hat{y}(t_k))^2$$
(4.32)

Les equacions (4.33) permeten calcular els índexs d'error freqüencial; aquests índexs tenen en compte tant les desviacions d'amplitud com de fase i es calculen per cadascun dels harmònics presents en els senyals d'entrada. F és el nombre total d'harmònics. L'error és calculat considerant tant el model discret com el continu.

$$E_{\text{abs}} = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^F |H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k)|$$

$$E_{\text{sqr}} = \frac{1}{F} \sum_{k=1}^F (H(j\omega_k) - \hat{H}(j\omega_k))^2$$
(4.33)

En el cas de realitzar una anàlisi de Monte Carlo amb m experimentacions, s'avaluen els errors a partir del model mig estimat, $\bar{\theta}$, i, a més a més, es calcula la seva desviació estàndard.

4.4 Estimació d'un procés en temps continu.

En aquest apartat es fa un estudi comparatiu dels models estimats, tenint en compte que:

- l'estudi es realitza amb un procés simulat, conseqüentment la seva estructura és coneguda
- els mètodes d'estimació són els seleccionats en el capítol 3, OE i IV òptim
- els senyals excitació són senyals mutlisinusoidals i binaris (MLBS), el disseny dels quals s'ha exposat en el capítol 2.

4.4.1 Descripció del procés

El procés que s'ha utilitzat per estudiar el comportament dels mètodes d'estimació es representa en el diagrama de blocs de la figura 4.5.

Consta d'una part lineal determinista que té com a funció de transferència $Gp(s)$ i una part estocàstica o soroll $Gn(s)$. Al tenir com a objectiu l'estudi en temps discret del sistema, es disposa d'un mantenidor d'ordre zero (ZOH) i un discretitzador amb un període d'adquisició de dades, T_s , de 0.05 seg. (valor calculat en l'apartat 2.4.1).

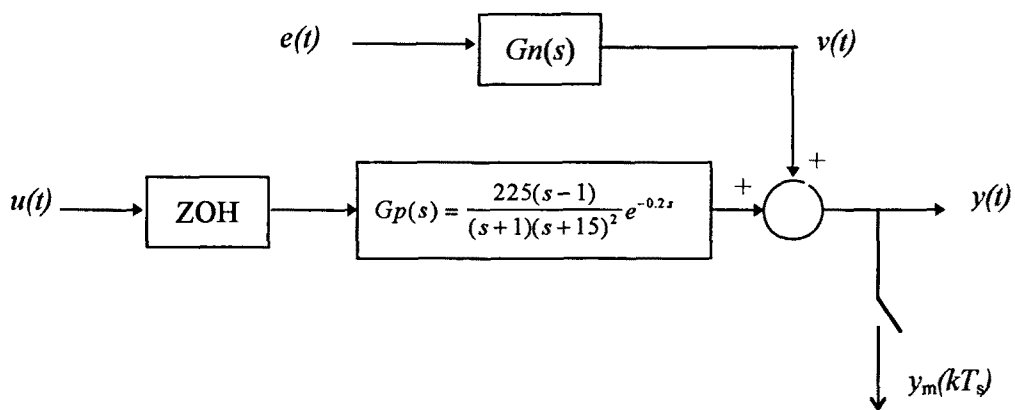


Figura 4.5. Diagrama de blocs del procés simulat.

Per a la simulació contínua d'aquest procés s'ha utilitzat el paquet informàtic SIMULINK amb un pas d'integració de 0.001 segons, això és 66 vegades menor que la menor constant de temps del sistema.

Com a senyal d'entrada, $u(t)$, s'ha disposat del conjunt de senyals periòdics dissenyats en l'apartat 2.4.2 i d'un senyal binari pseudo aleatori (PRBS). Tots ells es caracteritzen per tenir un valor absolut màxim de 7.5 V. La pertorbació incorporada al sistema, $e(t)$, és un soroll blanc de banda limitada a 40 Hz.

Els senyals d'excitació binaris pseudo aleatori són, segons bibliografia, els més emprats en l'estimació de models paramètrics discrets. La comparació dels resultats obtinguts a partir d'ells amb els altres senyals, permetrà avaluar si els senyals d'excitació amb banda de freqüència limitada tenen o no un comportament millor.

El senyal binari pseudo aleatori dissenyat es visualitza en la figura 4.5 i es caracteritza per tenir:

nombre de dades, $N = 500$
 freqüència mínima, $f_{\min} = 1/(N T_s) = 0.04$ Hz
 freqüència màxima, $f_{\max} = 10$ Hz
 potència, $\text{RMS} = 7.5$
 factor de cresta, $\text{CF} = 1$

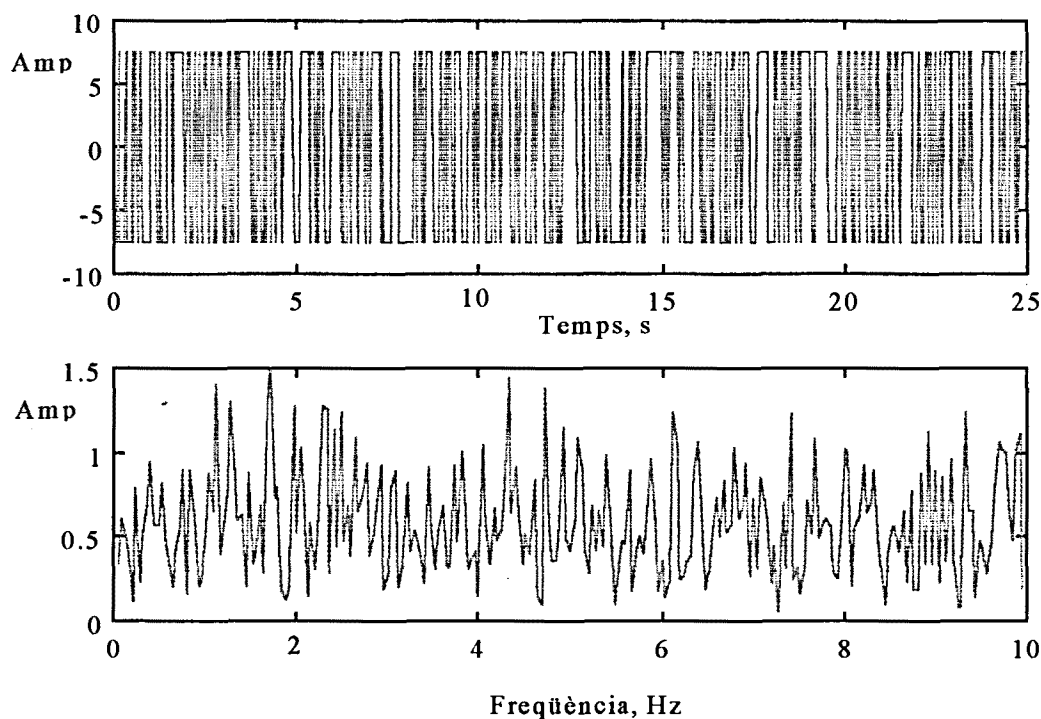


Figura 4.6. Senyal binari pseudo aleatori: a) variació temporal; b) espectre.

Per a l'estudi que ens ocupa s'han definit com a valors de la funció de transferència del soroll, $Gn(s)$:

- $Gn(s)=0$, procés sense soroll
- $Gn(s) = 10 / (s + 10)$, procés amb soroll colorat amb un $\text{RMS}_v=0.605$

Per millorar la precisió i estudiar la influència de la seqüència del soroll en l'estimació dels paràmetres s'han realitzat 150 simulacions del procés amb soroll colorat, emprant llavors diferents per a la generació de les seqüències aleatòries.

4.4.2 Comparació dels models estimats amb el procés sense soroll

A partir dels senyals d'entrada, $u(t)$, i les respectives sortides, $y_m(kT_s)$ s'han estimat un conjunt de models discrets. Els mètodes d'estimació utilitzats han sigut IV òptim i OE, no s'ha

considerat el mètode LS perquè el soroll present en el procés és correlat i no meyspreable. En les taules A.1 i A.2 de l'annex A, es mostren els valors dels criteris resultants de comparar els models discrets estimats amb el model real. Aquests valors s'han classificat en funció del senyal excitació i del mètode d'estimació emprat.

El criteri que realment ens informa sobre la qualitat del model estimat és el criteri paramètric. Aquest criteri calcula la divergència entre els pols, zeros i guany del model estimat i real. De la seva utilització, s'obtenen tants valors com paràmetres a estimar. Per aquesta causa i considerant a més a més que tots els paràmetres estimats repercuteixen en el comportament del model estimat, és un criteri difícil d'avaluar. És per aquest motiu que interessa veure si els criteris error són comparables entre ells i, en general, quina és la relació entre ambdós criteris.

Aquest escenari, a més a més d'avaluar el comportament dels mètodes d'estimació testats quan els senyals excitació són de banda limitada, permet establir quina és la interrelació entre els criteris proposats.

4.4.2.1 Avaluació dels criteris paramètrics

En les taules de resultats (A.1a i A.2a) s'observa que la principal diferència entre els models estimats i el model real recau en els pols no dominants, motiu pel qual els criteris paramètrics sols s'avaluen respecte als pols no dominants. En les figures 4.7 i 4.8 es mostra la variació d'aquest criteri en el domini Z i S respectivament, en funció dels senyals excitació i del mètode d'estimació utilitzat.

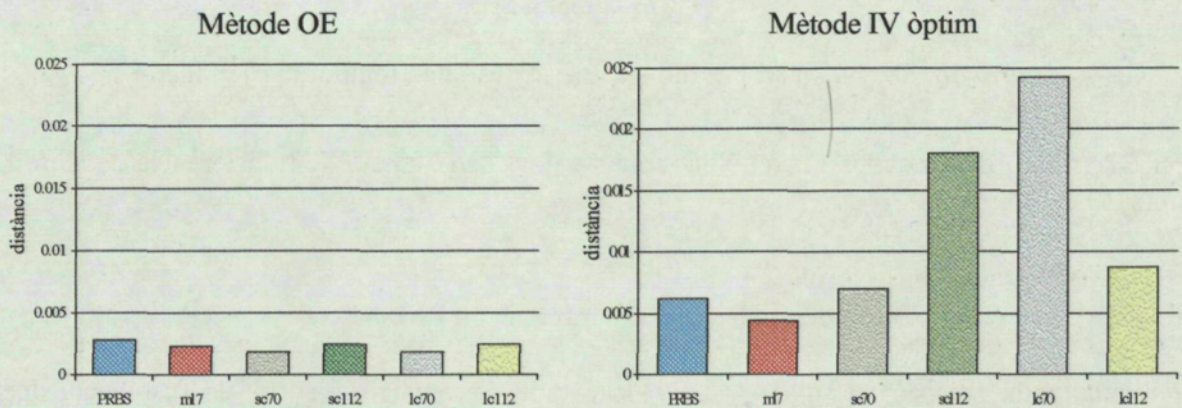


Figura 4.7. Valors del criteri paramètric dels pols no dominants en el domini Z .

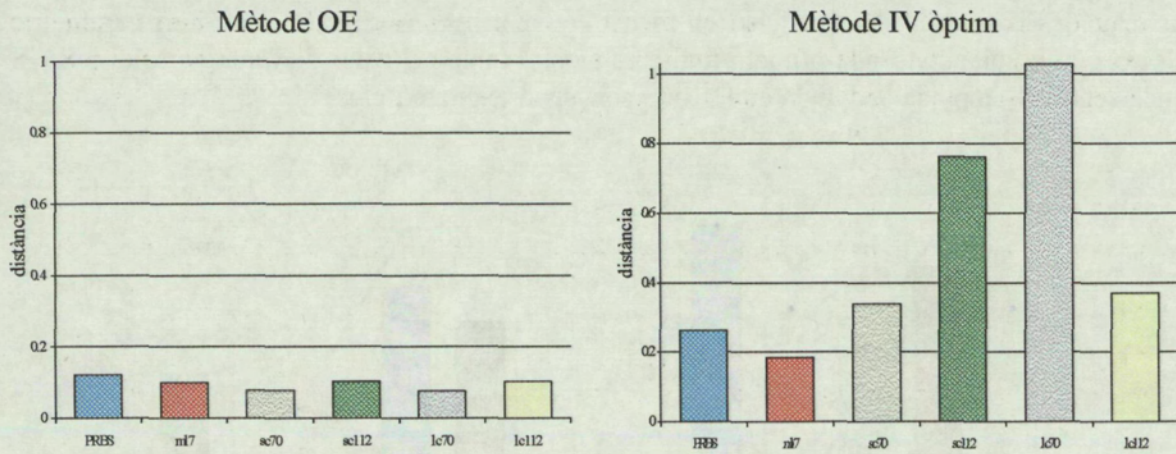


Figura 4.8. Valors del criteri paramètric dels pols no dominants en el domini S.

S'observa que:

- Independentment del tipus de senyal, *els models estimats amb el mètode OE són més propers al model real que els estimats amb el mètode IV.*
- *La informació obtinguda en el domini Z i domini S és equivalent.* El valor del criteri paramètric en el domini S és proporcional al valor en el domini Z, per cadascun dels senyals excitació i independentment del mètode d'estimació.
- Quan el mètode d'estimació utilitzat és OE, els senyals d'excitació a partir dels quals s'obté un model lleugerament millor són els senyals amb banda de freqüències limitada i propera a la banda del procés: sc70 i lc70.
- Quan el mètode d'estimació és IV, els senyals d'excitació que permeten obtenir un model de millor qualitat són els binaris: PRBS i ml7.

4.4.2.2 Avaluació dels criteris error

Respecte al valor dels criteris error (taules A.1b i A.2b) s'observa que hi ha una equivalència entre la mitjana absoluta dels errors i la mitjana quadràtica, és a dir, a major valor mitjà dels errors la seva dispersió és també major. Per aquest motiu sols s'han considerat els primers: l'error absolut mitjà.

Els errors freqüencials en el domini Z i S també són equivalents. Si es dona una bona convergència del model estimat discret al model real no es generen problemes en la conversió dels models i, en aquest cas, els errors freqüencials són del mateix ordre. Ja que el model real és continu, s'ha optat per comparar els errors freqüencials en el domini S.

En les figures 4.9 i 4.10 es mostren: el valor absolut mitjà de l'error temporal i el valor absolut mitjà de l'error freqüencial en el domini S, en funció del tipus de senyal d'entrada i el mètode

d'estimació. Els senyals s'han ordenat en forma creixent segons el valor del criteri paramètric dels pols no dominants. En la primera figura es mostra també el valor de l'energia total o RMS i en la segona l'amplada de banda en Hz dels senyals d'excitació.

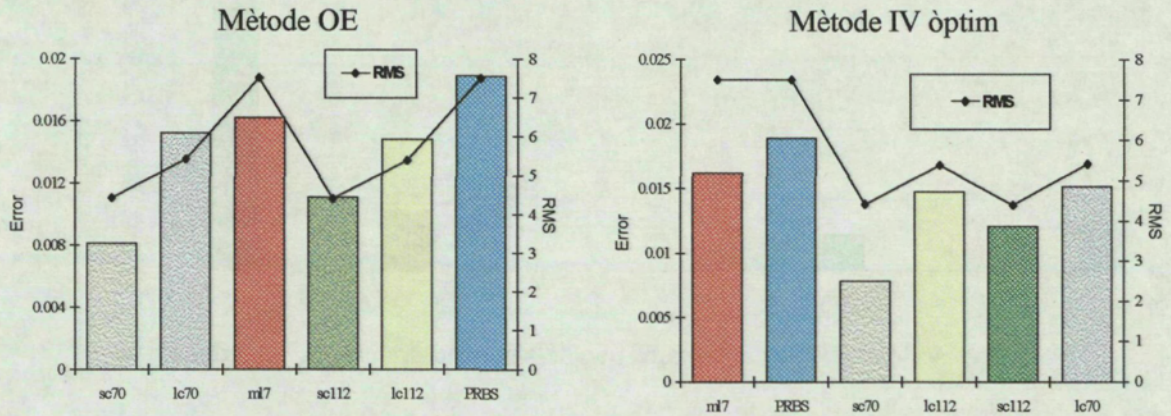


Figura 4.9. Valors del criteri mitjana absoluta de l'error temporal (domini Z)

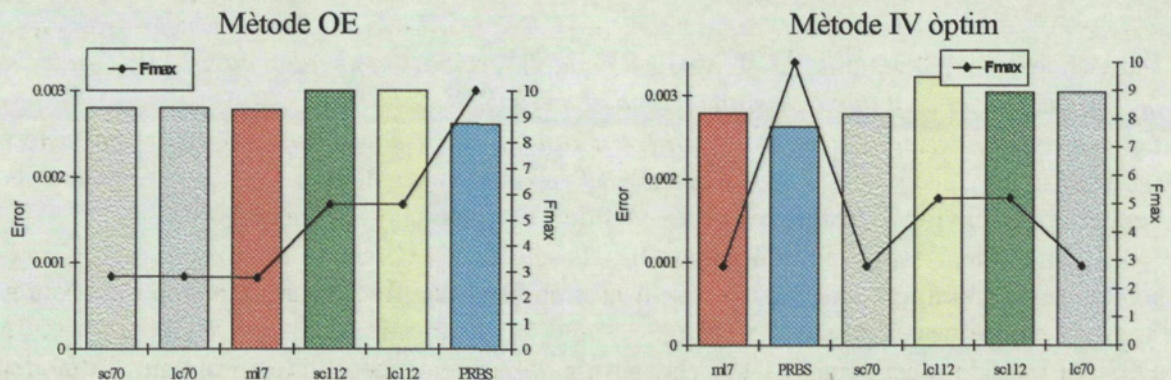


Figura 4.10. Valors del criteri mitjana absoluta de l'error freqüencial en el domini S

A partir dels valors s'observa:

- El criteri d'error temporal és útil per comparar models obtinguts amb senyals d'excitació d'igual RMS. S'observa en la figura 4.9 que la mitjana absoluta de l'error està directament relacionada amb el RMS dels senyals. Aquest fenomen es produeix perquè un senyal amb RMS gran excita més les dinàmiques no dominants del sistema i és en aquestes on hi ha la major diferència entre els models estimats i el real.
- El criteri d'error freqüencial és útil per comparar models en què el senyal d'excitació tingui el mateix nombre d'harmonics. S'observa que models de qualitat semblant excitats per un senyal amb el mateix contingut d'harmonics tenen el mateix error freqüencial, mentre que models de menor qualitat excitats per senyals amb major contingut d'harmonics donen errors freqüencials del mateix ordre que els primers

Amb motiu de les observacions realitzades es dedueix que la comparació de la qualitat dels models estimats mitjançant els criteris error s'ha de fer tenint en compte l'energia total i el nombre d'harmònics del senyal excitació. És per aquest motiu que s'han agrupat els senyals excitació en dos grups:

- *Errors temporals*, que permeten comparar la qualitat del model entre els senyals amb RMS semblant: sc70 i sc112; lc70 i lc112; PRBS i ml7.

- *Errors freqüencials*, en que els senyals a comparar contenen el mateix nombre d'harmònics dominants: sc70, lc70 i ml7; sc112 i lc112.

4.4.3 Comparació dels models estimats amb el procés pertorbat per un soroll colorat

En el cas de pertorbar el sistema amb soroll, s'observa que la qualitat del model estimat és funció tant de la seqüència del soroll com de la seva energia o RMS.

L'efecte que origina la seqüència soroll en l'estimació dels paràmetres d'un model es reflexa en l'annex A.2, taules A.3 i A.4. En elles es mostra, com a resultat d'analitzar els 150 models estimats:

- els valors del criteri paramètric, obtingut al comparar el model mig estimat amb el model real;
- els valors mitjos dels criteris error junt amb les seves desviacions estàndard.

Una forma de millorar el SNR dels senyals d'entrada periòdics és fent un filtrat freqüencial del senyal de sortida (apartat 2.4). És per aquest motiu que en aquest escenari s'han estimat també els models a partir dels senyals de sortida filtrats i de les entrades reals. Els resultats dels criteris de comparació dels nous models estimats es mostren en les taules A.5 i A.6.

4.4.3.1 Comparació dels errors temporals

Com s'ha deduït en l'apartat anterior, els errors temporals permeten comparar models que tenen per excitació senyals amb el mateix nivell d'energia total. Conseqüentment es comparen entre si tres parelles de models agrupats en funció del tipus de senyal excitació: senyals binaris i senyals multisinusoidals.

- *Comportament dels senyals binaris*

En la figura 4.11 es visualitzen els valors dels criteris d'error temporal generats en excitar el sistema amb els senyals binaris: PRBS i ml7, en funció del mètode d'estimació utilitzat. Es mostren també els valors obtinguts com a resultat de filtrar freqüencialment els senyals de sortida fruit d'excitar el procés amb l'entrada ml7, donat que és un senyal de banda limitada.

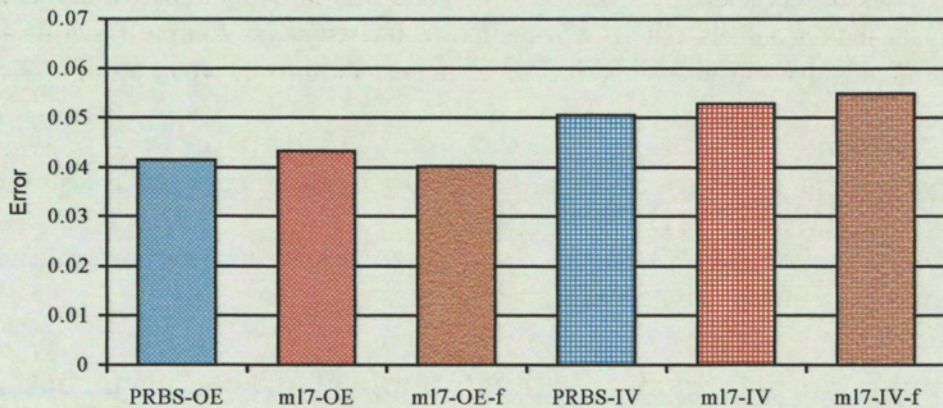


Figura 4.11. Valors dels criteris errors obtinguts amb els senyals binaris.

S'observa:

- Independentment del senyal d'excitació, amb el mètode d'estimació OE s'obtenen models de millor qualitat que amb el mètode d'estimació IV.
- Els mètodes d'estimació OE i IV òptim, proporciona uns resultats semblants per a qualsevol tipus de senyal d'excitació (PRBS, m17 o m17-f).

- Comportament dels senyals multisinusoidals.

En les figures 4.12 i 4.13 es visualitzen els valors dels criteris error obtinguts en estimar el sistema a partir dels conjunts de senyals: sc70 i sc112; lc70 i lc112 respectivament.

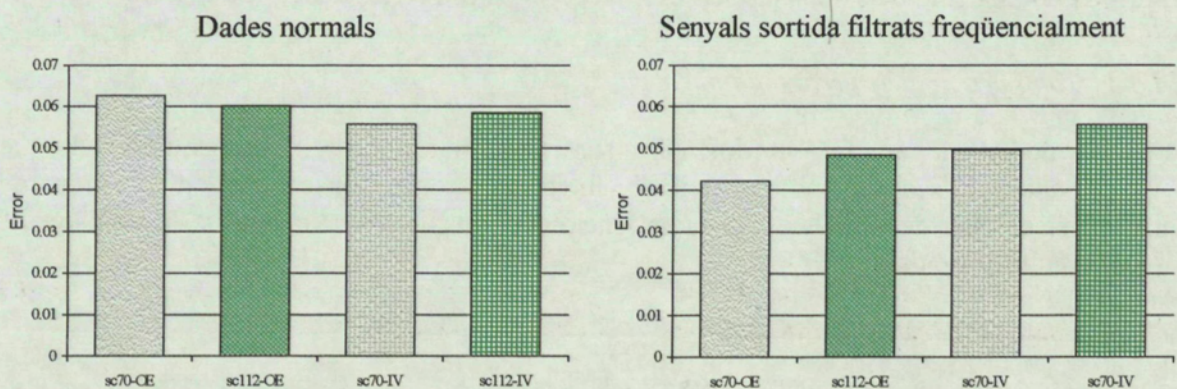


Figura 4.12. Valors dels criteris error temporal en funció dels senyals multisinusoidals: sc70 i sc112, i del mètode d'estimació.

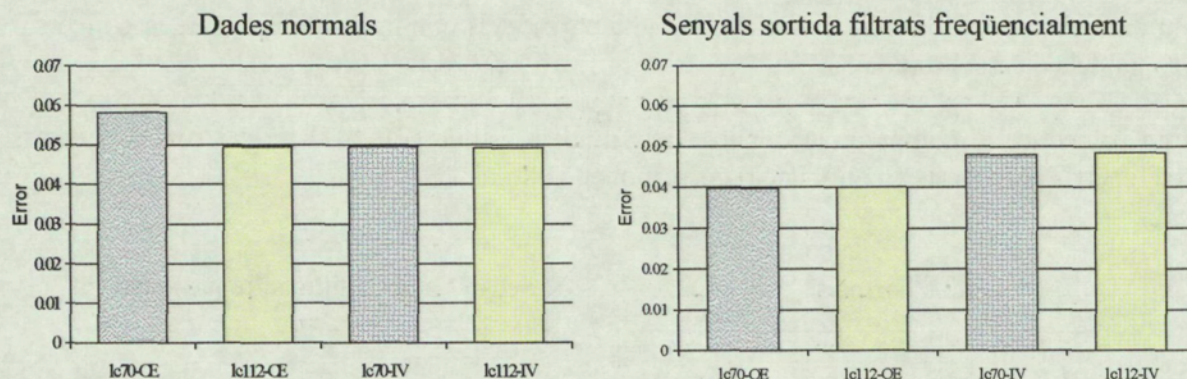


Figura 4.13. Valors dels criteris error temporal en funció dels senyals multisinusoïdals: lc70 i lc112, i del mètode d'estimació.

S'observa en funció del mètode d'estimació utilitzat que:

- El mètode OE estima models de millor qualitat amb els senyals de sortida filtrats freqüencialment. Aquesta millora és realment notable quan els senyals d'excitació contenen pocs harmònics: sc70 i lc70.
- El mètode IV presenta una lleugera millora de la qualitat del model estimat com a resultat de filtrar freqüencialment els senyals de sortida.

Com a resultat d'observar directament els resultats obtinguts (taules A3a i A3c), es detecta un valor elevat en la desviació estàndard dels criteris error i dels paràmetres quan els senyals excitació són els multisinusoïdals amb un baix contingut d'harmònics: sc70 i lc70. Aquest fet és degut que per algunes combinacions del soroll el mètode OE presenta problemes de convergència. El filtrat freqüencial resol els problemes de convergència d'aquest mètode i millora considerablement la qualitat del model obtingut. Hi ha una reducció del valor del criteri error i de la seva desviació estàndard (taules A.5a i A.5c). El mètode IV òptim no presenta problemes de convergència, perquè inclou un filtrat dels senyals (3.4.2).

En funció del senyal d'excitació és pot concloure que:

- quan el mètode d'estimació utilitzat no presenta problemes de convergència i quan l'energia del senyal excitació és baixa, s'observa una millora de la qualitat del model estimat quan l'ampla de banda del senyal es concentra en la regió d'interès.

4.4.3.2 Comparació dels errors freqüencials

Els errors freqüencials són útils per comparar senyals amb diferent energia total i amb la mateixa quantitat d'harmònics. Aquests errors (Taules A.3c, A.4c, A.5c i A.6c) s'han calculat

tant amb els models discrets estimats com amb els models continus, obtinguts de la conversió dels models discrets estimats.

Amb l'objectiu de comparar la qualitat dels models estimats amb el model real, els errors freqüencials comparats a continuació corresponen al domini S.

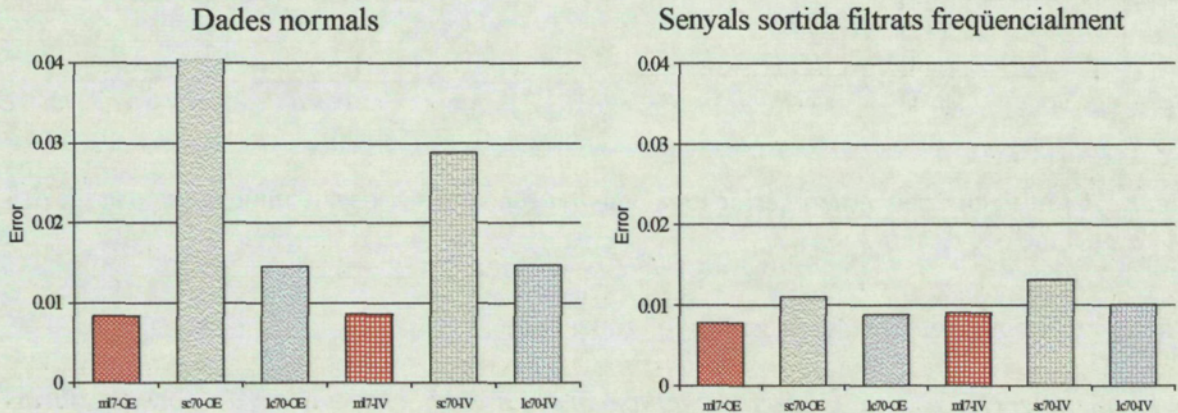


Figura 4.14. Valors dels criteris error freqüencial en el domini S en funció dels senyals: m17, sc70 i lc70, i del mètode d'estimació.

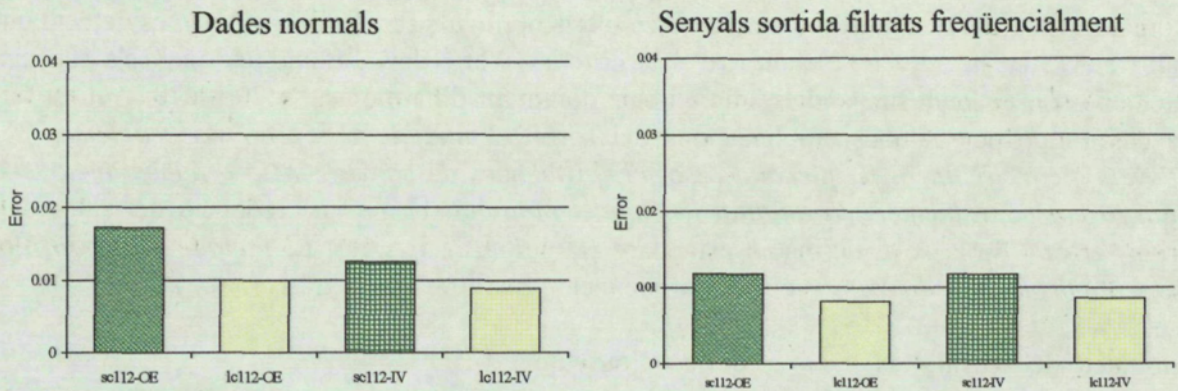


Figura 4.15. Valors dels criteris error freqüencial en el domini S en funció dels senyals multisinusoidals: sc112 i lc112, i del mètode d'estimació.

A partir dels resultats s'observa que:

- Els problemes de convergència del mètode OE amb el senyal excitació sc70 per algunes de les combinacions soroll, fa que l'error freqüencial en el domini S sigui elevat. El mètode IV òptim origina en aquests cas un error menor.

- Comparant els senyals normals, *el senyal d'excitació a partir del qual s'obté un error freqüencial menor és el binari. Com a resultat de filtrar els senyals de sortida els valors dels errors freqüencials són del mateix ordre.*
- *S'observa una millora del model estimat a l'augmentar el RMS del senyal d'entrada.*

4.5 Conclusions

Al complir-se la condició bàsica per a l'estimació discreta d'un sistema continu, és a dir disposar d'un ZOH, la conversió del model discret al model continu no repercuteix en la qualitat del model estimat. Aquest fet és cert sempre que els pols del model discret siguin de part real positiva, en cas contrari, es generen problemes de conversió i s'obtenen models continus de poca qualitat. S'ha demostrat que els zeros obtinguts com a resultat de transformar un model discret a continu són menyspreables sempre que siguin una dècada major que la freqüència màxima del senyal d'excitació.

En el cas de que les mesures dels senyals es realitzin sense la presència d'un ZOH, es genera un error en la funció de transferència estimada. Aquest error es degut a la reconstrucció del mantenidor d'ordre zero.

Al comparar la qualitat dels models estimats segons uns criteris error, cal tenir en compte que els seus resultats depenen del tipus de senyal d'excitació. Per aquest motiu cal utilitzar els errors temporals per comparar senyals amb el mateix RMS i els errors freqüencials per comparar senyals amb el mateix contingut d'harmònics.

Respecte els mètodes d'estimació testats, el mètode d'estimació OE permet estimar un model de millor qualitat que el mètode IV òptim.

Dels senyals d'excitació comparats, els que permeten estimar un model de millor qualitat són els senyals binaris. Els resultats obtinguts amb el senyal binari de banda limitada (MLBS) són comparables als obtinguts amb el senyal binari PRBS.

L'ús de senyals multisinusoïdals amb RMS baix per excitar processos amb soroll, repercuteix negativament en la qualitat del model estimat, independentment del mètode d'estimació emprat (OE o IV). Els models estimats amb senyals multisinusoïdals són de la mateixa qualitat que els binaris quan s'utilitza el senyal de sortida filtrat freqüencialment.

A partir dels resultats obtinguts es pot respondre la qüestió plantejada en el capítol 2, apartat 2.6. Una banda de freqüències limitada a la zona d'interès, repercuteix favorablement en el model estimat quan el RMS del senyal d'excitació és baix (cas de dissenyar la fase segons el mètode Shroeder), en els altres casos té poca incidència. L'energia total del senyal, RMS, té un efecte positiu respecte als mètodes d'estimació i repercuteix en un augment de la qualitat del model estimat.

En funció de les observacions realitzades, s'han seleccionat, per al proper capítol, els senyals excitació: ml7, sc70 i lc70.