Departament de Matemàtica Aplicada I
Universitat Politècnica de Catalunya

Categories de descens: aplicacions a la teoria K algebraica

Memòria presentada per Llorenç Rubió i Pons
per optar al grau de Doctor en Matemàtiques

Director: Pere Pascual Gainza

Barcelona, maig de 2008

Als meus pares.

Agraïments

Vull expressar en primer lloc el meu agraïment al meu director de tesi, Pere Pascual, pel seu suport, dedicació i paciència. Vull agrair també als companys del Departament de Matemàtica Aplicada I i en especial als altres becaris el seu acolliment.

El meu agraïment a l'Abdó Roig per aquelles converses i comentaris de profit, que faig extensiu a B. Rodríguez, F. Guillén, V. Navarro, Agustí Roig, G. Cortiñas, F. Muro i B. Shipley.

Gràcies família i amics pel vostre recolzament.

Finalment, cal fer constar que la realització d'aquesta tesi ha comptat amb el suport del Departament d'Innovació, Universitats i Empresa de la Generalitat de Catalunya i del Fons Social Europeu a través d'una beca FI, així com dels projectes BFM2003-06001/MATE (MCyT), 2005SGR-00557 (AGAUR) i MTM2006-14575 (MEC).

Índex

Introducció

Aquest treball s'emmarca en l'estudi cohomològic de les varietats algebraiques sobre un cos de característica zero. Més concretament se situa en l'ús cohomològic del teorema de resolució de singularitats d'Hironaka [39], pel qual donada X una varietat algebraica sobre k un cos de característica zero, existeix una varietat no singular $\tilde{X}$ i un morfisme $f : \tilde{X} \to X$ biracional i propi. Més encara, si Y és una subvarietat tancada de X, existeix una resolució $f : \widetilde{X} \to X$ tal que $\widetilde{Y} = f^{-1}(Y)$ és un divisor a creuaments normals dins $\widetilde{X}$ i f és un isomorfisme fora de la reunió de Y i el lloc singular de X.

S'han donat nombroses aplicacions del teorema de resolució de singularitats a l'estudi cohomològic de les varietats algebraiques. Ha estat utilitzat en particular per a estendre certs functors cohomològics definits a priori sobre una classe d'esquemes llisos a una classe més gran d'esquemes. La cohomologia de De Rham algebraica [26] [36] i la teoria de Hodge-Deligne [9] [10] són exemples d'aquestes extensions.

Deligne [9] [10] va introduir, prèviament al seu desenvolupament de la teoria de Hodge de les varietats algebraiques singulars, un mètode molt general i molt precís per a utilitzar la resolució de singularitats: el mètode del descens cohomològic simplicial. El mètode de Deligne fa ús dels hiperrecobriments simplicials, que permeten substituir una varietat X, possiblement singular, per una varietat simplicial augmentada sobre X formada per varietats no singulars.

La teoria de les hiperresolucions cúbiques de V. Navarro [29] és un instrument alternatiu al dels hiperrecobriments simplicials de Deligne i dóna un marc general per a l'ús cohomològic del teorema d'Hironaka. Les hiperresolucions cúbiques permeten substituir una varietat X, possiblement singular, per un diagrama cúbic de varietats llises. Un dels principals avantatges de les hiperresolucions cúbiques enfront als hiperrecobriments simplicials és la seva finitud. Entre les aplicacions desenvolupades a [29] referents a propietats d'extensió hi ha l'aplicació a la teoria de De Rham algebraica i l'extensió de la covariància de la teoria K de feixos coherents a morfismes propis.

Basant-se en la teoria de les hiperresolucions cúbiques, F. Guillén i V. Navarro [32] han provat un criteri d'extensió per a functors cohomològics definits en les varietats llises a functors cohomològics definits en totes les varietats.

El teorema d'extensió ha estat aplicat pels mateixos autors a l'homotopia de De Rham algèbrica, al complex filtrat de Hodge-De Rham i a la teoria de motius de Grothendieck. D'altres aplicacions han estat als grups de Chow [35] i als grups de

Chow additius [50].

Els functors cohomològics clàssics prenen valors en la categoria de grups abelians graduats, en la categoria de complexos de cadenes en una categoria abeliana o de fet en la categoria derivada. Per a aplicar el criteri d'extensió a situacions no abelianes, Guillén i Navarro introdueixen la noció de categoria de descens com una bona classe de categories on les teories cohomològiques prenen valors. La noció de categoria de descens és una variant més rígida de la de categoria triangulada de Verdier, adaptada a la formulació de les teories cohomològiques no additives, i que fa front a un dels inconvenients de les categories triangulades: la falta de functorialitat del con d'un morfisme.

Una categoria de descens cohomològic és una categoria cartesiana $\mathcal{D}$ amb objecte inicial juntament amb una classe saturada de morfismes E i un functor simple que transforma diagrames cúbics de $\mathcal{D}$ en objectes de $\mathcal{D}$, sotmesos a un conjunt d'axiomes. El principal exemple de categoria de descens cohomològic és la categoria de complexos de cocadenes en una categoria abeliana, amb els quasiisomorfismes com a classe saturada de morfismes. La categoria d'àlgebres diferencials graduades commutatives sobre k també té una estructura de categoria de descens cohomològic. Hi ha una noció dual, la de categoria de descens homològic. Els complexos de cadenes en una categoria abeliana amb els quasiisomorfismes i els espais topològics amb els isomorfismes en homologia són exemples de categories de descens homològic.

Un problema que apareix de manera natural és el de tenir més exemples de categories de descens. Per exemple, en vistes a l'aplicació a la teoria K algebraica sorgeix la qüestió de si la categoria d'espectres topològics té estructura de categoria de descens o més generalment si la tenen les categories de models estables. Les categories de models, introduïdes per Quillen [65], han estat profusament utilitzades en les darreres dècades com una axiomatització útil per a fer teoria d'homotopia. El primer problema que hem estudiat és el de la relació entre les categories de models i les categories de descens. Hem demostrat que la subcategoria d'objectes fibrants d'una categoria de models simplicial és una categoria de descens cohomològic si satisfà un criteri d'aciclicitat. Les categories de models estables satisfan aquest criteri d'aciclicitat i per tant donen exemples de categories de descens cohomològic. Hem demostrant en particular que la categoria d'espectres fibrants és una categoria de descens cohomològic amb el límit homotòpic.

El teorema d'extensió de Guillén i Navarro s'aplica a functors contravariants

$$G : \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathcal{D}$$

on $\mathbf{Sm}(k)$ és la categoria de varietats llises sobre k com a subcategoria de la categoria

$\mathbf{Sch}(k)$ d'esquemes reduïts, separats i de tipus finit sobre k, i $\mathcal{D}$ és una categoria de descens cohomològic. Per a poder estendre'l, cal que G sigui un functor de descens, condició que s'expressa a través dels quadrats acíclics. Un quadrat acíclic és un diagrama cartesià de $\mathbf{Sch}(k)$

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

tal que i és una immersió tancada i f és un morfisme propi que indueix un isomorfisme $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \to X \setminus Y$. Un quadrat acíclic elemental és un quadrat acíclic on els objectes són irreductibles i de $\mathbf{Sm}(k)$ i tal que $f : \widetilde{X} \to X$ és el *blow-up* de X a través de Y. Un functor

$$G : \mathbf{Sm}(k) \to \mathcal{D}$$

a valors en una categoria de descens és de descens si compleix

(F1) $G(\emptyset)$ és l'objecte final de $\mathcal{D}$ i $G(X \sqcup Y) \longrightarrow G(X) \times G(Y)$ és un isomorfisme

(F2) si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic elemental en $\mathbf{Sm}(k)$, aleshores $\mathbf{s}G(X_\bullet)$ és acíclic.

Si G és un functor de descens aleshores existeix una extensió en un functor Φ-rectificat

$$GD : \mathbf{Sch}(k) \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

que verifica la condició

(D) si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic de $\mathbf{Sch}(k)$, el simple de $GD(X_\bullet)$ és acíclic.

A més, aquesta extensió és única llevat isomorfisme únic de functors Φ-rectificats. L'extensió GD es defineix mitjançat les hiperresolucions. Hem estudiat quines propietats hereta GD de les propietats de G sobre les varietats llises. Així si G satisfà les propietats de Mayer-Vietoris i d'invariància homotòpica per a les varietats llises, s'obté que GD les satisfà per a totes les varietats.

La teoria K algebraica és un functor

$$\mathcal{K} : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathbf{Sp}$$

que pren valors en la categoria d'espectres. Els grups de teoria K s'obtenen a partir dels grups d'homotopia dels espectres. Les condicions d'extensió per a la teoria K són bàsicament conseqüència dels resultats de Thomason [73] per a la teoria K d'un *blow-up*, de manera que el teorema d'extensió és aplicable a la teoria K algebraica de les varietats llises. Així el functor $\mathcal{K}$ admet una extensió essencialment única de les varietats llises a totes les varietats, $\mathcal{KD}$, que satisfà descens.

És ben conegut que la teoria K algebraica de les varietats no satisfà descens. C. Haesemeyer ha provat en [34] que la teoria K homotòpica $\mathcal{KH}$, introduïda per Weibel en [78], satisfà descens per a varietats sobre un cos de característica zero. Per la unicitat de l'extensió $\mathcal{KD}$ i el resultat de Haesemeyer se segueix que per a tota varietat X sobre un cos de característica zero els espectres $\mathcal{KD}(X)$ i $\mathcal{KH}(X)$ són feblement equivalents.

La demostració de Haesemeyer utilitza la teoria de les *cd*-topologies associades a quadrats commutatius desenvolupada per Voevodsky [76], aplicada a l'estructura de categoria de models de prefeixos d'espectres de Jardine [45], de manera que els functors que satisfan la propietat de descens són quasifibrants en aquesta estructura. L'estructura de categoria de models permet definir el reemplaçament fibrant d'un prefeix d'espectres considerant una certa topologia i per tant sorgeix la qüestió de comparar l'extensió de Guillén i Navarro amb el reemplaçament fibrant amb la topologia dels *blow-ups* abstractes. Hem demostrat que quan són comparables, coincideixen.

Seguint [32] hem trobat també una extensió de $\mathcal{K}$ a un functor a suport compacte, $\mathcal{K}^c$, que novament per unicitat és feblement equivalent a la teoria K algebraica a suport compacte introduïda per Gillet i Soulé en [19].

Aportacions

1) S'ha demostrat que donada una categoria de models simplicial $\mathcal{M}$ que compleix un criteri d'aciclicitat, la categoria d'objectes fibrants $\mathcal{M}_f$ té una estructura de categoria de descens cohomològic amb les equivalències febles com a classe saturada de morfismes i el límit homotòpic com a functor simple.
   Es diu que un objecte $X \in \mathcal{M}$ és acíclic si $* \to \mathcal{M}$ és una equivalència feble, i un diagrama és acíclic si el seu simple és acíclic. La fibra homotòpica d'un morfisme $f : X \to Y$ és el límit homotòpic de $(X \to Y \leftarrow *)$.

   La part fonamental de la prova és veure que són equivalents:

   - Criteri d'aciclicitat: Un morfisme $f : X \to Y$ d'objectes fibrants és una equivalència feble si i només si la fibra homotòpica és acíclica.
   - Criteri d'aciclicitat estès: Un $\square_n^+$-diagrama augmentat $\mathbf{X}^+$ d'objectes

fibrants és acíclic si i només si el morfisme $\mathbf{X}_0 \to \mathrm{holim}_{\Box_n} \mathbf{X}$ és una equivalència feble.

Dualment s'obté que els objectes cofibrants d'una categoria de models simplicial $\mathcal{M}$ tenen una estructura de categoria de descens homològic amb les equivalències febles com a classe saturada de morfismes i el colímit homotòpic com a functor simple.

2) Aplicacions dels resultats anteriors:

   a) La categoria d'objectes fibrants d'una categoria de models estable és de descens cohomològic, amb les equivalències febles i el límit homotòpic.
   b) La categoria d'objectes cofibrants d'una categoria de models estable és de descens homològic, amb les equivalències febles i el límit homotòpic.
   c) La categoria d'espectres fibrants és una categoria de descens cohomològic amb les equivalències febles i el límit homotòpic.
   d) Donada h_* una teoria d'homologia generalitzada, la categoria de conjunts simplicials amb el colímit homotòpic i les h_*-equivalències és una categoria de descens homològic.
   e) Donada h_* una teoria d'homologia generalitzada, la categoria d'espais topològics cofibrants amb el colímit homotòpic i les h_*-equivalències és una categoria de descens homològic.

En el cas de complexos de cocadenes, hi ha una equivalència feble entre el simple d'un diagrama cúbic de complexos de cocadenes de R-mòduls i el seu límit homotòpic (considerant l'estructura de categoria de models quasisimplicial dels complexos de cocadenes).

3) Donat $\mathbf{X}$ un $\Box_n$-diagrama d'espectres fibrants, hi ha una successió espectral convergent
$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q(\mathbf{X}_\alpha) \Longrightarrow \pi_{q-p}(s_{\Box_n}\mathbf{X}).$$

4) Donat F un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$ tal que compleix les hipòtesis del teorema d'extensió de Guillén i Navarro, hi ha un morfisme (en $\mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$)
$$FD \longrightarrow F^{abs}$$
tal que $FD(X) \longrightarrow F^{abs}(X)$ és una equivalència feble per tota varietat X, on F^{abs} és l'aproximació fibrant en la categoria de models de prefeixos d'espectres amb la topologia dels *blow-ups* abstractes.

Si a més F té la propietat de descens de Nisnevich per a varietats llises, aleshores hi ha un morfisme (en Ho**Sp**)

$$FD \longrightarrow F^{cdh}$$

tal que $FD(X) \longrightarrow F^{cdh}(X)$ és una equivalència feble per tota varietat X, on F^{cdh} és l'aproximació fibrant en la categoria de models de prefeixos d'espectres amb la topologia *cdh*.

5) Hi ha un functor Φ-rectificat $\mathcal{KD} : \mathbf{Sch}(k) \to \mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$, únic llevat isomorfisme de functors Φ-rectificats, que coincideix amb la teoria K per a les varietats llises i que satisfà la propietat de descens

   (D) Si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic, aleshores $\mathcal{KD}(X_\bullet)$ és acíclic.

   La teoria $\mathcal{KD}$ té les següents propietats:

   a) coincideix amb $\mathcal{K}$ per a les varietats llises.
   b) té la propietat de Mayer-Vietoris.
   c) és homotòpicament invariant.
   d) Donada $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica d'una varietat algebraica X, hi ha una successió espectral convergent

   $$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} K_q(X_\alpha) \Longrightarrow KD_{q-p}(X).$$

   Aquesta successió indueix una filtració en els grups $KD_n(X)$ que no depèn de la hiperresolució, de manera que hi ha una filtració finita functorial i ben definida F^p en $KD_n(X)$ que és trivial per a varietats llises.

   e) coincideix amb la teoria K homotòpica de Weibel, ja que Haesemeyer [34] ha demostrat que $\mathcal{KH}$ satisfà la propietat (D) de descens.

6) Hi ha una extensió de $\mathcal{K}$ a un functor a suport compacte, $\mathcal{K}^c$, que és feblement equivalent a la teoria K algebraica a suport compacte introduïda per Gillet i Soulé en [19].

Els principals resultats dels capítols 1 i 2 d'aquest treball apareixeran publicats en [68] Llorenç Rubió i Pons. *Model categories and cubical descent.* Bol. Soc. Mat. Mexicana, 13(2), 2007.

Alguns dels resultats dels capítols 3 i 4, els principals llevat dels referents a les *cd*-topologies, apareixen en el preprint
[63] Pere Pascual Gainza i Llorenç Rubió i Pons. *Algebraic K-theory and cubical descent.* Preprint Arxiv math.AG/2257, juny de 2007.

Contingut

Capítol 1: El primer capítol conté els preliminars sobre diagrames cúbics, categories de models i límit homotòpic que es necessitaran posteriorment.
En la secció 1.1 recordem la definició de tipus cúbic de diagrama i de tipus cúbic augmentat.
En la secció 1.2 detallem les definicions de categoria de models i de categoria de models simplicial que utilitzem i remarquem algunes propietats que farem servir.
Dediquem la secció 1.3 a la definició de límit homotòpic d'un diagrama en una categoria de models simplicial i a les seves propietats.
La secció 1.4 recull els elements sobre categories de models de categories de diagrames que farem servir.
En la secció 1.5 veiem com es poden obtenir definicions equivalents de límit homotòpic i ho apliquem al cas d'un diagrama cúbic.

Capítol 2: En el segon capítol es recorda la noció de categoria de descens i es demostra que la categoria d'objectes fibrants d'una categoria de models simplicial és una categoria de descens si satisfà un criteri d'aciclicitat.
La secció 2.1 està dedicada a definició de categoria de descens cohomològic, que s'obté dualitzant la definició de categoria de descens homològic que és la que apareix explícitament en [32]. S'introdueixen abans les categories $Codiag_{\Pi}\mathcal{D}$ i $Coreal_{\Pi}\mathcal{D}$ de codiagrames i corealitzacions amb el tipus variant dins de la categoria de tipus cúbics.
En la secció 2.2 es demostra que la categoria d'objectes fibrants d'una categoria de models simplicial és una categoria de descens cohomològic si satisfà un criteri d'aciclicitat, prenent el límit homotòpic com a functor simple i les equivalències febles com a classe saturada de morfismes. També s'obté el resultat dual: la categoria d'objectes cofibrants d'una categoria de models simplicial és una categoria de descens homològic si satisfà el criteri d'aciclicitat dual, prenent el colímit homotòpic com a functor simple.
La secció 2.3 està dedicada a l'obtenció d'exemples de categories de descens usant el resultat anterior. Primer de tot (secció 2.3.1) es tracten les categories de models simplicials estables i es prova que donen categories de descens cohomològic i homològic. Com a cas particular hi ha la categoria d'espectres de conjunts simplicials, que es tracta separadament en la secció 2.3.2. En la secció 2.3.3 es tracten els espais topològics i els conjunts simplicials i es demostra que donen categories de descens homològic prenent com a classe saturada de morfismes les equivalències en una teoria d'homologia. Els complexos de cocadenes de R-mòduls es tracten en la secció 2.3.5. El fet que les estructures de categories de models de què disposen no

siguin simplicials sinó quasisimplicials ens obliga a tractar el límit homotòpic en una categoria de models quasisimplicial just abans (secció 2.3.4).
En la secció 2.4 es tracta la relació de les categories de models amb les categories de descens cosimplicial de B. Rodríguez [67].

CAPÍTOL 3: En el tercer capítol es tracta la definició i les propietats de l'extensió de Guillén-Navarro. En el cas de functors que prenen valors en la categoria d'espectres, s'estudia la successió espectral de Bousfield-Kan i es compara l'extensió de Guillén-Navarro amb el model fibrant en la categoria de models de prefeixos d'espectres associada a una *cd*-topologia.
En la secció 3.1 es tracten les hiperresolucions cúbiques, els functors rectificats i el teorema d'extensió. Seguidament es demostren algunes de les propietats que el functor estès hereta de les propietats del functor sobre les varietats llises. Es tracta també l'extensió amb suport compacte.
En la secció 3.2 es considera la successió espectral de Bousfield-Kan, la qual és convergent al límit homotòpic del cub. Aquesta successió s'aplica al descens de Čech per a un functor que pren valors en la categoria d'espectres.
En la secció 3.3 es miren els functors de varietats a espectres com a prefeixos d'espectres. Es repassa la teoria de les topologies associades a quadrats commutatius i les categories de models de prefeixos d'espectres. Es demostra que el reemplaçament fibrant en la categoria de models de prefeixos d'espectres amb la topologia dels *blow-ups* abstractes és feblement equivalent a l'extensió de Guillén-Navarro, amb certes hipòtesis.

CAPÍTOL 4: En el quart capítol s'aplica el teorema d'extensió a la teoria K algebraica, obtenint la teoria K de descens.
En la secció 4.1 detallem l'espectre de teoria K que utilitzem i les propietats de la teoria K de les varietats llises.
En la secció 4.2 provem que podem aplicar el teorema d'extensió i obtenim la teoria $\mathcal{KD}$. Amb els resultats de les seccions anteriors obtenim algunes propietats de $\mathcal{KD}$ i demostrem que és equivalent a la teoria K homotòpica de Weibel. Obtenim també una teoria K amb suport compacte.
En la secció 4.3 provem que hi ha una filtració finita functorial i ben definida F^p en $KD_n(X)$ que és trivial per a varietats llises.

1
Categories de models i límits homotòpics

En aquest capítol recollim alguns elements d'àlgebra homotòpica que farem servir posteriorment i fixem algunes notacions. Fonamentalment volem tractar el límit homotòpic d'un diagrama en una categoria de models. Estem interessats principalment en els tipus cúbics de diagrames, que introduïm en la primera secció. En la segona secció recollim la definició de categoria de models i de categoria de models simplicial. En la tercera secció exposem la definició de límit homotòpic que prenem i les seves propietats. En la quarta secció recollim els resultats referents a les estructures de categoria de models de les categories de diagrames. En la cinquena i darrera secció expliquem com podem modificar la definició de límit homotòpic per a un diagrama cúbic.

1.1 Tipus de diagrames i nervis

Anomenem *tipus de diagrama* a una categoria petita. En aquesta secció recordem la definició d'un tipus particular de diagrames: els diagrames cúbics i els diagrames cúbics augmentats. A continuació recordem la definició de nervi d'una categoria petita i descrivim els nervis dels tipus cúbics.

1.1.1 Tipus cúbics de diagrames i tipus cúbics augmentats

Recordem la definició de la categoria Π de tipus cúbics de diagrames [32, 1.1.1].

Donat el conjunt $\{0, 1, \ldots, n\}$, $n \geq 0$, se li associa el conjunt de les parts no buides, ordenat per la inclusió, el qual defineix la categoria $\square_n$. Anàlogament definim $\square_S$ per a qualsevol conjunt finit no buit S. Definim $dimS = card(S) - 1$.

Així, $\square_0$ és una categoria amb un únic element, $\square_1$ és la categoria representada pel diagrama

$$0 \to 01 \leftarrow 1,$$

i $\square_2$ és la categoria representada pel diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 012 & & 01 \arrow[ll] \\
02 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll] \arrow[ur] & \\
 & 12 \arrow[uu] & & 1 \arrow[ll] \arrow[uu] \\
2 \arrow[uu] \arrow[ur] & & &
\end{tikzcd} ,$$

on no s'han inclòs els morfismes identitat ni els que són composició de dos. En l'exemple 1.1.8 hi ha una altra representació de la mateixa categoria.

Donats S i T dos conjunts finits, tota aplicació injectiva $u : S \to T$ defineix un functor $\square_u : \square_S \to \square_T$.

Introduïm ara els productes $\square_S \times \square_T$. A una família $S = (S_i)_{i\in I}$, amb I un conjunt finit, se li associa el producte cartesià $\Pi_{i\in I}\square_{S_i}$ amb l'ordre producte. S'escriu $\square_S = \Pi_{i\in I}\square_{S_i}$. Definim $dimS = \sum_{i\in I} dimS_i$.

Per exemple, la categoria $\square_1 \times \square_1$ té l'estructura

$$\begin{tikzcd}
(0,0) \arrow[r] \arrow[d] & (0,01) \arrow[d] & (0,1) \arrow[l] \arrow[d] \\
(01,0) \arrow[r] & (01,01) & (01,1) \arrow[l] \\
(1,0) \arrow[r] \arrow[u] & (1,01) \arrow[u] & (1,1) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} ,$$

i la categoria $\square_1 \times \square_2$ té l'estructura mostrada a la figura 1.1.

Finalment definim la categoria Π. La categoria Π té per objectes les famílies $(S_i)_{i\in I}$ de conjunts finits no buits, amb I finit variable. Donats $S = (S_i)_{i\in I}$ i $T = (T_i)_{j\in J}$, un morfisme $u : S \to T$ de Π és una aplicació injectiva $u : \Pi_i S_i \to \Pi_j T_j$ tal que, per cada $\alpha = (\alpha_i) \in \square_S$, existeix $\beta = (\beta_j) \in \square_T$ tal que $u(\Pi\alpha_i) = \Pi\beta_j$.

Sigui u un morfisme en la categoria Π. Posem I' el conjunt de les $i \in I$ amb $dim(S_i) > 0$. Aleshores existeix una injecció $\nu : I' \to J$, i per cada $i \in I'$ una injecció $u_i : S_i \to T_{\nu(i)}$ tals que $\beta_{\nu(i)} = u_i(\alpha_i)$, i les β_j per $j \notin \nu(I')$ són constants reduïdes a un sol element.

Per exemple, en la figura 1.2 es mostren les imatges possibles d'un morfisme de $\square_1$ a $\square_1 \times \square_2$.

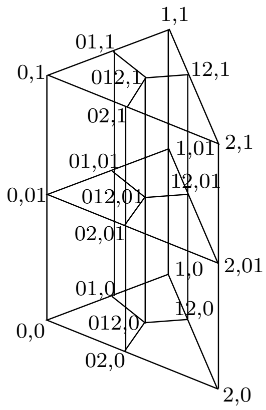

Figura 1.1: Categoria $\square_1 \times \square_2$

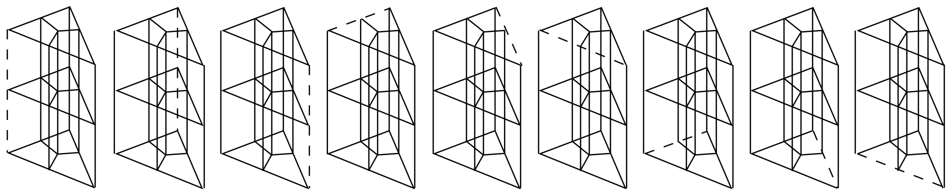

Figura 1.2: Possibles imatges d'un morfisme de $\square_1$ a $\square_1 \times \square_2$

1.1.1.1 Tipus cúbics augmentats

A un conjunt finit S, potser buit, se li associa el conjunt $\square_S^+$ de les parts de S, ordenades per la inclusió.

Així $\square_0^+$ és la categoria $\emptyset \to 0$, $\square_1$ és la categoria representada pel diagrama

$$\begin{tikzcd}
01 & 1 \arrow[l] \\
0 \arrow[u] & \emptyset \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

i $\square_2^+$ és la categoria representada pel diagrama

$$\begin{tikzcd}
& 012 & & 01 \arrow[ll] \\
02 \arrow[ur] & & 0 \arrow[ll] \arrow[ur] & \\
& 12 \arrow[uu] & & 1 \arrow[ll] \arrow[uu] \\
2 \arrow[uu] \arrow[ur] & & \emptyset \arrow[ll] \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd},$$

on no s'han representat les identitats ni els morfismes composició de dos.

1.1.2 Nervis de categories sobre un objecte

En aquest apartat recordem la definició de nervi d'una categoria petita i de categoria sobre un objecte. Estem seguint les notacions de [40].

1.1.1 Definició *Si $\mathcal{C}$ és una categoria petita, el* nervi *de $\mathcal{C}$ (o* espai classificador *de $\mathcal{C}$) és el conjunt simplicial $B\mathcal{C}$ en què un n-símplex σ és una seqüència de morfismes de $\mathcal{C}$*

$$\alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n$$

i les cares i degeneracions vénen donades per

$$\begin{aligned}
d_0\sigma &= \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \alpha_2 \xrightarrow{\sigma_2} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n \\
d_i\sigma &= \alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \cdots \xrightarrow{\sigma_{i-2}} \alpha_{i-1} \xrightarrow{\sigma_i\sigma_{i-1}} \alpha_{i+1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n, \text{ per } 0 < i < n \\
d_n\sigma &= \alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-2}} \alpha_{n-1} \\
s_i\sigma &= \alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \cdots \xrightarrow{\sigma_{i-1}} \alpha_i \xrightarrow{1_{\alpha_i}} \alpha_i \xrightarrow{\sigma_i} \alpha_{i+1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n
\end{aligned}$$

Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ indueix una aplicació simplicial $BF : B\mathcal{C} \to B\mathcal{D}$ definida per

$$BF(\alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n) = F\alpha_0 \xrightarrow{F\sigma_0} F\alpha_1 \xrightarrow{F\sigma_1} \cdots \xrightarrow{F\sigma_{n-1}} F\alpha_n.$$

Hi ha un isomorfisme natural $B(\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \cong B\mathcal{C} \times B\mathcal{D}$ (cf. [40, 14.1.5]).

1.1.2 Definició *Si $\mathcal{C}$ és una categoria, i α n'és un objecte, la categoria $(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$ és la categoria que té per objectes els morfismes $\beta \to \alpha$, i un morfisme de $\beta \to \alpha$ a $\beta' \to \alpha$ és un morfisme $\beta \to \beta'$ en $\mathcal{C}$ tal que el triangle*

$$\begin{tikzcd}
\beta \arrow[rr] \arrow[dr] & & \beta' \arrow[dl] \\
& \alpha &
\end{tikzcd}$$

commuta.

Així, un n-símplex del conjunt simplicial $B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$ és una seqüència de morfismes

$$\alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n \xrightarrow{\sigma} \alpha.$$

Un morfisme $\alpha \to \alpha'$ indueix un functor $(\mathcal{C}\downarrow\alpha) \to (\mathcal{C}\downarrow\alpha')$ i una aplicació simplicial entre els corresponents espais classificadors.

1.1.3 Lema *Donades $\mathcal{C}$ i $\mathcal{D}$ dues categories petites, hi ha un isomorfisme natural*

$$B((\mathcal{C} \times \mathcal{D}) \downarrow (\alpha, \beta)) \cong B(\mathcal{C} \downarrow \alpha) \times B(\mathcal{D} \downarrow \beta).$$

DEMOSTRACIÓ: És clar a partir de les definicions. □

L'espai classificador d'una categoria $\mathcal{C}$ es pot recuperar a partir dels espais classificadors de les categories $(\mathcal{C} \downarrow \alpha)$:

1.1.4 Lema [6, XI, 2.3] *La correspondència*

$$(\alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n \xrightarrow{\sigma} \alpha) \mapsto (\alpha_0 \xrightarrow{\sigma_0} \alpha_1 \xrightarrow{\sigma_1} \cdots \xrightarrow{\sigma_{n-1}} \alpha_n)$$

indueix un isomorfisme

$$\operatorname*{colim}_{\alpha} B(\mathcal{C} \downarrow \alpha) \cong B\mathcal{C}.$$

1.1.2.1 Nervis de tipus cúbics de diagrames

Observem primer que donat S un conjunt finit no buit i $\alpha \in \square_S$ (i.e. α un subconjunt no buit de S), hi ha un isomorfisme de categories

$$(\square_S \downarrow \alpha) \cong \square_\alpha.$$

Sigui $\Delta[n]$ l'n-símplex estàndard. Hi ha un isomorfisme entre $\square_n$ i el conjunt parcialment ordenat dels símplexs no degenerats de $\Delta[n]$, ordenat per la relació cara, que notem $P\Delta[n]$. El nervi de $P\Delta[n]$ s'anomena la *subdivisió* de $\Delta[n]$ [22, p.182] i s'escriu

$$sd\Delta[n] = BP\Delta[n] = B\square_n.$$

Hi ha un homeomorfisme [22, III Lemma 4.1]

$$h : |sd\Delta[n]| \to |\Delta[n]|,$$

que estableix que $|sd\Delta[n]|$, i per tant $|B\square_n|$, és la subdivisió baricèntrica de $|\Delta[n]|$.

1.1.5 Definició *Donat S un conjunt finit no buit, notem Δ^S el* símplex estàndard *de $\mathbf{R}^S$:*

$$\Delta^S = \{(x_s)_s \in \mathbf{R}^S; \sum_{s \in S} x_s = 1, 0 \leq x_s \leq 1, \forall s \in S\}.$$

L'homeomorfisme h ens dóna el següent resultat:

1.1.6 Lema *Donat S un conjunt finit no buit i $U \in \Box_S$,*

$$|B(\Box_S \downarrow U)| = |B(\Box_U)| \cong \Delta^U.$$

1.1.7 Lema *Donat $S = (S_i)_{i\in I}$ i $U = (U_i)_{i\in I} \in \Box_S$, I un conjunt finit,*

$$|B(\Box_S \downarrow U)| = \Delta^U,$$

on $\Delta^U = \prod \Delta^{U_i}$.

DEMOSTRACIÓ: És clar a partir del lema anterior i del lema 1.1.3 $\Box$

1.1.8 Exemple Considerem la categoria $\Box_2$, que ve representada pel diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
02 \arrow[r] & 012 & 01 \arrow[l] \\
2 \arrow[u] \arrow[ur] \arrow[r] & 12 \arrow[u] & 1 \arrow[u] \arrow[ul] \arrow[l]
\end{tikzcd} .$$

Tenim que

$$\begin{aligned}
|B(\Box_2 \downarrow 012)| &= \Delta^2, \\
|B(\Box_2 \downarrow ij)| &= \Delta^1 = I, \\
|B(\Box_2 \downarrow i)| &= \Delta^0 = *,
\end{aligned}$$

on Δ^m és el símplex topològic de dimensió m. Els morfismes induïts pels morfismes en $\Box_2$ són inclusions de símplexs en la cara corresponent del símplex de dimensió superior.

1.2 Categories de models i categories de models simplicials

En aquesta secció recordem les nocions de categoria de models i de categoria de models simplicial.

1.2.1 Categories de models

Les categories de models foren introduïdes per Quillen [65]. La principal referència que utilitzem és la monografia de Hirschhorn [40, 7.1], on la definició de categoria de models té condicions més fortes que l'original: es demana que la categoria contingui tots els límits i colímits petits, no només els finits, i que les factoritzacions del cinquè axioma siguin functorials. D'altres referències utilitzades han estat [13], [41] i [22].

1.2.1 Definició *Una* categoria de models *és una categoria $\mathcal{M}$ juntament amb tres classes de morfismes,* equivalències febles, cofibracions *i* fibracions *(que usualment es denoten $\xrightarrow{\sim}$, $\rightarrowtail$ i $\twoheadrightarrow$ respectivament) que satisfà els següents axiomes:*

M1: (Límit) En la categoria $\mathcal{M}$ existeixen tots els límits i colímits petits.

M2: (Dos de tres) Si f i g són morfismes de $\mathcal{M}$ tals que gf està definit i dos dels morfismes f, g i gf són equivalències febles, aleshores ho és el tercer.

M3: (Retracte) Les equivalències febles, fibracions i cofibracions són tancades per retracte. Això és, si tenim el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] \arrow[rr, bend left, "1_A"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "1_B"'] & D \arrow[r] & B \end{tikzcd} ,$$

i g és una equivalència feble, fibració o cofibració, aleshores també ho és f.

M4: (Aixecament) Donat el diagrama commutatiu no puntejat en $\mathcal{M}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, tail, "i"'] & X \arrow[d, two heads, "p"] \\ B \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & Y \end{tikzcd}$$

on i és una cofibració i p és una fibració, el morfisme puntejat existeix si almenys un dels dos morfismes i o p és una equivalència feble.

M5: (Factorització) Tot morfisme g de $\mathcal{M}$ té dues factoritzacions functorials:

1) $g = qi$, on i és una cofibració i q és una fibració trivial (i.e. una fibració que és una equivalència feble), i

2) $g = pj$, on j és una cofibració trivial (i.e. una cofibració que és una equivalència feble) i p és una fibració.

Si $\mathcal{M}$ és una categoria de models, els *objectes inicial i final* els notarem 0 i 1 respectivament. Es diu que un objecte de $\mathcal{M}$ és *cofibrant* si el morfisme des de l'objecte inicial és una cofibració i que és *fibrant* si el morfisme a l'objecte final és una fibració.

Remarquem les següents propietats que es dedueixen directament dels axiomes:

i) Les cofibracions i les cofibracions trivials són tancades per composició i per *pushout*. Tot isomorfisme és una cofibració.

ii) Les fibracions i les fibracions trivials són tancades per composició i per *pullback*. Tot isomorfisme és una fibració. En particular el producte d'objectes fibrants és fibrant.

iii) Dues de les tres classes de morfismes determina la tercera, per la propietat d'aixecament.

1.2.2 Exemple Notem per **Top** la categoria dels espais topològics Hausdorff compactament generats. Un morfisme $f : X \to Y$ d'espais topològics és

i) una *equivalència feble* si f és una equivalència homotòpica feble,

ii) una *fibració* si f és una fibració de Serre, i

iii) una *cofibració* si té la propietat d'aixecament per l'esquerra respecte tots els morfismes que són alhora fibracions i equivalències febles.

La categoria **Top** té una estructura de categoria de models amb aquestes equivalències febles, fibracions i cofibracions [40, 7.10.10] [13, Example 3.5]. Amb aquesta estructura tots els espais topològics són fibrants i els CW-complexos són cofibrants.

Notem per $\mathbf{Top}_*$ la categoria dels espais topològics puntejats. Si X és un espai topològic, notem per X^+ l'espai puntejat obtingut afegint un punt disjunt. La categoria $\mathbf{Top}_*$ té una estructura de categoria de models amb les corresponents classes de morfismes puntejats.

1.2.3 Exemple Notem per **Sset** la categoria dels conjunts simplicials. Un morfisme $f : X \to Y$ de conjunts simplicials és

i) una *equivalència feble* si la seva realització geomètrica $|f| : |X| \to |Y|$ és una equivalència feble d'espais topològics,

ii) una *fibració* si f és una fibració de Kan, i

iii) una *cofibració* si f és una inclusió.

La categoria **Sset** té una estructura de categoria de models amb aquestes equivalències febles, fibracions i cofibracions [40, 7.10.12] [22, I. Theorem 11.3]. Amb aquesta estructura tots els objectes són cofibrants. Els objectes fibrants s'anomenen conjunts simplicials de Kan.

Notem per $\mathbf{Sset}_*$ la categoria dels espais topològics puntejats. Si K és un conjunt simplicial, notem per K^+ el conjunt simplicial puntejat obtingut afegint un punt disjunt. La categoria $\mathbf{Sset}_*$ té una estructura de categoria de models amb les corresponents classes de morfismes puntejats.

La proposició següent ens diu que els axiomes de categoria de models són autoduals.

1.2.4 Proposició [40, 7.1.9] *Si $\mathcal{M}$ és una categoria de models, aleshores la categoria oposada $\mathcal{M}^{op}$ és una categoria de models on*

i) les equivalències febles en $\mathcal{M}^{op}$ són les oposades de les equivalències febles de $\mathcal{M}$,

ii) les cofibracions en $\mathcal{M}^{op}$ són les oposades de les fibracions en $\mathcal{M}$, i

iii) les fibracions en $\mathcal{M}^{op}$ són les oposades de les cofibracions en $\mathcal{M}$.

D'aquesta proposició es dedueix que tot enunciat que és vàlid per a totes les categories de models implica un enunciat dual on les cofibracions es canvien per fibracions, les fibracions per cofibracions, els colímits per límits i els límits per colímits.

Si $\mathcal{D}$ és una categoria i E una classe de morfismes de $\mathcal{D}$, notem per $\mathcal{D}[E^{-1}]$ la categoria localitzada de $\mathcal{D}$ segons E, i per

$$\gamma : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}[E^{-1}]$$

el functor de localització. El functor γ transforma els morfismes de E en isomorfismes. Aquesta localització sempre existeix en un univers convenient [18, I.1]. Diem que E és una *classe saturada* de morfismes si tot morfisme f de $\mathcal{D}$ tal que $\gamma(f)$ és un isomorfisme, és de E. En tota categoria de models la classe de les equivalències febles és saturada [40, 8.3.10].

Si $\mathcal{M}$ és una categoria de models, la *categoria homotòpica* de $\mathcal{M}$, Ho$\mathcal{M}$, és la categoria que s'obté localitzant segons les equivalències febles. Aquesta categoria és equivalent [40, 8.3.9] a la categoria $\pi\mathcal{M}_{cf}$ els objectes de la qual són els objectes cofibrants i fibrants alhora i els seus morfismes són les classes d'homotopia de morfismes de $\mathcal{M}$.

Usarem la terminologia següent:

1.2.5 Definició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models. Un objecte X és* acíclic per l'esquerra *si el morfisme natural $0 \to X$ és una equivalència feble, i és* acíclic per la dreta *si ho és el morfisme $X \to 1$.*

La diferenciació entre esquerra i dreta desapareix si la categoria de models és puntejada:

1.2.6 Definició *Una categoria de models és* puntejada *si els objectes inicial i final coincideixen.*

Per l'axioma 2 de 3, en una categoria de models puntejada les dues nocions d'aciclicitat coincideixen. Així un objecte X en una categoria de models puntejada és *acíclic* si el morfisme natural $* \to X$ o, equivalentment, el morfisme $X \to *$, és una equivalència feble.

Més endavant ens interessarà la subcategoria d'objectes fibrants d'una categoria de models, i que aquesta subcategoria contingui els objectes inicial i final. Evidentment l'objecte final sempre és fibrant. No passa el mateix amb l'objecte inicial:

1.2.7 Remarca En una categoria de models l'objecte inicial no té perquè ser fibrant. El següent exemple és de T.Goodwillie. Considerem $\mathcal{C}$ una categoria de models i $f : A \to B$ un morfisme. La categoria d'objectes entre A i B té per objectes les factoritzacions $A \to X \to B$, i per morfismes $(A \to X \to B) \to (A \to Y \to B)$ els diagrames commutatius

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & X \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d, "1"] \\ A \arrow[r] & Y \arrow[r] & B \end{tikzcd} .$$

És immediat comprovar que és una categoria de models amb cofibracions, fibracions i equivalències febles els morfismes tals que el morfisme en $\mathcal{C}$ corresponent és cofibració, fibració o equivalència feble. L'objecte inicial és $(A \to A \to B)$ i l'objecte final $(A \to B \to B)$. Si f no és una fibració en $\mathcal{C}$, aleshores l'objecte inicial no és fibrant.

Acabem aquesta secció apuntant que la noció útil d'equivalència entre categories de models és la d'equivalència de Quillen (vegeu [40, 8.5.19]). Una equivalència de Quillen dóna lloc a una equivalència de categories entre les categories homotòpiques.

1.2.2 Categories de models simplicials

Les categories de models simplicials són categories de models que a més tenen estructura de categoria enriquida sobre els conjunts simplicials, i de manera que les estructures interactuen com indiquem tot seguit.

Una categoria *simplicial* [40, 9.1.2], o categoria enriquida sobre els conjunts simplicials és una categoria $\mathcal{M}$ amb un conjunt simplicial $Map(X,Y)$ per a cada parella d'objectes X i Y de $\mathcal{M}$, amb $Map(X,Y)_0 \cong \mathcal{M}(X,Y)$ i una llei de composició, que compleix els axiomes d'associativitat i d'unitat.

Una categoria que és alhora categoria de models i categoria simplicial no és automàticament una categoria de models simplicial; cal que es compleixin els axiomes SM6 i SM7 de la definició següent.

1.2.8 Definició *Una* categoria de models simplicial *és una categoria de models $\mathcal{M}$ que és alhora una categoria simplicial i tal que es compleixen:*

SM6: Donats X i Y objectes de $\mathcal{M}$ i K un conjunt simplicial, hi ha objectes $X \otimes K$ i $F(K,Y)$ de $\mathcal{M}$ tals que hi ha isomorfismes de conjunts simplicials

$$Map(X \otimes K, Y) \cong Map(K, Map(X,Y)) \cong Map(X, F(K,Y))$$

que són naturals en X, Y i K.

SM7: Si $i : A \to B$ és una cofibració en $\mathcal{M}$ i $p : X \to Y$ és una fibració en $\mathcal{M}$, aleshores el morfisme de conjunts simplicials

$$Map(B,X) \xrightarrow{i^* \times p_*} Map(A,X) \times_{Map(A,Y)} Map(B,Y)$$

és una fibració que és trivial si o bé i o bé p és trivial.

L'objecte $X \otimes K$ s'anomena *tensorització* de X per K i és covariant en X i en K. L'objecte $F(K,Y)$, que també es nota Y^K, s'anomena *cotensorització* de Y per K i és covariant en Y i contravariant en K.

1.2.9 Exemple Considerem **Top** la categoria dels espais topològics.

a) Si X i Y són espais topològics, sigui $Map(X,Y)$ el conjunt simplicial que en grau n és el conjunt d'aplicacions contínues de $X \times |\Delta[n]|$ a Y, amb cares i degeneracions induïdes pels morfismes estàndard entre els $\Delta[n]$.

b) Si X és un espai topològic i K un conjunt simplicial, definim $X \otimes K = X \times |K|$ i $F(K,X)$ l'espai de les aplicacions contínues de $|K|$ a X.

Amb aquestes definicions **Top** té l'estructura d'una categoria de models simplicial [40, 9.1.15].

1.2.10 Exemple Considerem $\mathbf{Top}_*$ la categoria dels espais topològics puntejats.

a) Si X i Y són espais topològics puntejats, sigui $Map(X,Y)$ el conjunt simplicial que en grau n és el conjunt d'aplicacions contínues de $X \wedge |\Delta[n]|^+$ a Y, amb cares i degeneracions induïdes pels morfismes estàndard entre els $\Delta[n]$.

b) Si X és un espai topològic puntejat i K un conjunt simplicial, definim $X \otimes K = X \times |K|^+$ i $F(K,X)$ l'espai de les aplicacions contínues de $|K|^+$ a X.

Amb aquestes definicions $\mathbf{Top}_*$ té l'estructura d'una categoria de models simplicial [40, 9.1.16].

1.2.11 Exemple Considerem **Sset** la categoria dels conjunts simplicials.

a) Si X i Y són conjunts simplicials, sigui $Map(X,Y)$ el conjunt simplicial que en grau n és el conjunt d'aplicacions simplicials de $X \times \Delta[n]$ a Y, amb cares i degeneracions induïdes pels morfismes estàndard entre els $\Delta[n]$.

b) Si X i K són conjunts simplicials, definim $X \otimes K = X \times K$ i $F(K,X) = Map(K,X)$.

Amb aquestes definicions **Sset** té l'estructura d'una categoria de models simplicial [40, 9.1.13]

1.2.12 Exemple Considerem $\mathbf{Sset}_*$ la categoria dels conjunts simplicials puntejats.

a) Si X i Y són conjunts simplicials puntejats, sigui $Map(X,Y)$ el conjunt simplicial que en grau n és el conjunt d'aplicacions simplicials de $X \times (\Delta[n]^+)$ a Y, amb cares i degeneracions induïdes pels morfismes estàndard entre els $\Delta[n]$.

b) Si X i Y són conjunts simplicials puntejats, sigui $Map_*(X,Y)$ el conjunt simplicial $Map(X,Y)$ amb punt base el morfisme constant $X \to * \to Y$.

c) Si X és un conjunt simplicial puntejat i K és un conjunt simplicial, definim $X \otimes K = X \wedge K^+$ i $F(X,K)$ és el conjunt simplicial puntejat $Map_*(K^+, X)$.

Amb aquestes definicions $\mathbf{Sset}_*$ té l'estructura d'una categoria de models simplicial [40, 9.1.14]

L'axioma SM7 és el *homotopy lifting extension theorem*, que era originàriament un teorema de D.Kan per a categories d'objectes simplicials [40, 9.1.7].

Si $\mathcal{M}$ és una alhora una categoria simplicial i de models que satisfà l'axioma SM6, aleshores l'axioma SM7 té les següents formulacions equivalents en termes de la tensorització i la cotensorització [40, 9.3.7]:

1) Si $i : A \to B$ és una cofibració en $\mathcal{M}$ i $j : L \to K$ és una inclusió de conjunts simplicials, aleshores el morfisme

$$A \otimes K \amalg_{A \otimes L} B \otimes L \to B \otimes K$$

és una cofibració en $\mathcal{M}$ que és trivial si o bé i o bé j és una equivalència feble.

2) Si $j : L \to K$ és una inclusió de conjunts simplicials i $p : X \to Y$ és una fibració en $\mathcal{M}$, aleshores el morfisme

$$F(K, X) \to F(L, X) \times_{F(L,Y)} F(K, Y)$$

és una fibració en $\mathcal{M}$ que és trivial si o bé j o bé p és una equivalència feble.

L'estructura addicional de les categories de models simplicials respecte les categories de models permet una definició explícita i senzilla del límit homotòpic, com veurem en la secció següent. Rezk, Schwede i Shipley demostren en [66] que les categories de models que satisfan un cert axioma de realització són equivalents de Quillen a una categoria de models simplicial.

A continuació remarquem algunes propietats elementals de la tensorització i cotensorització que seran utilitzades més endavant.

1.2.13 Lema *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial i $\mathcal{C}$ una categoria petita. Aleshores:*

i) Si $\mathbf{X} : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ és un functor i K un conjunt simplicial aleshores hi ha un isomorfisme natural

$$F(K, \lim \mathbf{X}) \cong \lim F(K, \mathbf{X}).$$

ii) Si X és un objecte de $\mathcal{M}$ i $\mathbf{K} : \mathcal{C} \to \mathbf{Sset}$ és un functor, aleshores hi ha un isomorfisme natural

$$F(\operatorname{colim} \mathbf{K}, X) \cong \lim F(\mathbf{K}, X).$$

DEMOSTRACIÓ: La demostració és anàloga a la de [40, 9.2.1]. Per les propietats de categoria de models simplicial tenim isomorfismes naturals

$$\mathcal{M}(Y, F(K, \lim \mathbf{X})) \cong \mathcal{M}(Y \otimes K, \lim \mathbf{X}) \cong \lim \mathcal{M}(Y \otimes K, \mathbf{X})$$

$$\cong \lim \mathcal{M}(Y, F(K, \mathbf{X})) \cong \mathcal{M}(Y, \lim F(K, \mathbf{X}))$$

i pel lema de Yoneda tenim (i). Anàlogament es demostra (ii). □

1.2.14 Lema *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial. Si K és un conjunt simplicial i X un objecte fibrant, aleshores $F(K, X)$ també és fibrant.*

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix de de la reformulació 2) de SM7 (vegeu més amunt). □

1.2.15 Lema *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial.*

a) Per tot objecte X de $\mathcal{M}$ hi ha isomorfismes naturals

$$X \otimes \Delta[0] \cong X \quad i \quad F(\Delta[0], X) \cong X.$$

b) Donat K un conjunt simplicial,

$$0 \otimes K \cong 0 \quad i \quad F(K, 1) \cong 1.$$

DEMOSTRACIÓ: L'apartat a) és [40, 9.1.10]. Quant a l'apartat b), per les propietats de categoria de models simplicial tenim un isomorfisme de conjunts

$$\mathcal{M}(X \otimes K, 1) \cong \mathcal{M}(X, F(K, 1))$$

Com que 1 és l'objecte final, hi ha un únic element en aquest conjunt, i per tant $F(K, 1)$ és també final. El segon isomorfisme es demostra anàlogament. □

1.3 Límit homotòpic d'un codiagrama

Donat un functor $\mathbf{X} : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, $\mathcal{M}$ una categoria de models, el límit $\lim_{\mathcal{C}} \mathbf{X}$ no té bones propietats respecte les equivalències febles. Per exemple, en la categoria d'espais topològics considerem el diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} S^1 \arrow[r] \arrow[d, "id"] & D^2 \arrow[d] & * \arrow[l] \arrow[d] \\ S^1 \arrow[r] & * & * \arrow[l] \end{tikzcd}$$

on $S^1 \to D^2$ és la inclusió de la circumferència en el disc i $* \to D^2$ és la inclusió d'un punt. Les aplicacions verticals són equivalències febles. El límit de la fila superior és $*$ i el límit de la fila inferior és S^1, de manera que no són feblement equivalents.

El límit homotòpic és una construcció que resol aquesta situació. En aquesta secció donem la definició de límit homotòpic d'un diagrama en una categoria de models simplicial i repassem les seves propietats, basant-nos fonamentalment en l'exposició de [40].

1.3.1 Codiagrames

Si $\mathcal{C}$ és una categoria petita i $\mathcal{M}$ és una categoria, un *$\mathcal{C}$-codiagrama de $\mathcal{M}$*, o *codiagrama de tipus $\mathcal{C}$*, és un functor $\mathcal{C} \to \mathcal{M}$ i denotem per $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ la categoria de codiagrames de tipus $\mathcal{C}$. Els morfismes de codiagrames són les transformacions naturals de functors.

Si X és un objecte de $\mathcal{M}$, notarem $\mathcal{C} \times X$ el codiagrama de tipus $\mathcal{C}$ constant (amb tots els morfismes iguals a la identitat de X).

Usem el prefix co- per a ser consistents amb la terminologia usada en [32], on un diagrama de tipus $\mathcal{C}$ és un functor contravariant $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{C}$.

1.3.2 Definició de límit homotòpic i exemples

1.3.1 Definició *Sigui $\mathbf{X} : \mathcal{C} \to \mathcal{M}$ un codiagrama de tipus $\mathcal{C}$ en una categoria de models simplicial $\mathcal{M}$. El* límit homotòpic *de $\mathbf{X}$,* $\operatorname{holim} \mathbf{X}$*, és l'equalitzador dels morfismes*

$$\prod_{\alpha \in Ob(\mathcal{C})} F(B(\mathcal{C}\downarrow\alpha), \mathbf{X}_\alpha) \quad \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \quad \prod_{(\sigma:\alpha\to\alpha')\in\mathcal{C}} F(B(\mathcal{C}\downarrow\alpha), \mathbf{X}_{\alpha'})$$

on la projecció de ϕ en el factor $\sigma : \alpha \to \alpha'$ és la composició de la projecció natural des del producte amb el morfisme

$$\sigma_*^{1_{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)}} : F(B(\mathcal{C}\downarrow\alpha), \mathbf{X}_\alpha) \to F(B(\mathcal{C}\downarrow\alpha), \mathbf{X}_{\alpha'})$$

i la projecció de ψ al factor $\sigma : \alpha \to \alpha'$ és la composició de la projecció natural des del producte amb el morfisme

$$F(B(\sigma_*), 1_{\mathbf{X}_{\alpha'}}) : F(B(\mathcal{C}\downarrow\alpha'), \mathbf{X}_{\alpha'}) \to F(B(\mathcal{C}\downarrow\alpha), \mathbf{X}_{\alpha'})$$

on $\sigma_* : (\mathcal{C}\downarrow\alpha) \to (\mathcal{C}\downarrow\alpha')$.

1.3.2 Remarca En una categoria de models general, no necessàriament de models simplicial, és possible definir el límit homotòpic mitjançant la tècnica dels *frames* [40, capítol 19]. En la secció 2.3.4 veurem com definir el límit homotòpic en una categoria de models quasisimplicial.

1.3.3 Exemple Com a il·lustració explicitem alguns límits homotòpics de codiagrames d'espais puntejats.

En el cas de codiagrames cúbics d'espais puntejats de tipus $\square_S$, amb S un conjunt finit no buit, el límit homotòpic d'un $\square_S$-diagrama d'espais puntejats X és el subespai de

$$\prod_{\emptyset\neq U\subseteq S} F(\Delta^{U^+}, X_U)$$

consistent en col·leccions de morfismes $\{\alpha_U\}$ tals que per tot morfisme $X_U \to X_{U\cup\{i\}}$ del diagrama, el quadrat

$$\begin{tikzcd} \Delta^{U^+} \arrow[r, "\alpha_U"] \arrow[d] & X_U \arrow[d] \\ \Delta^{U\cup\{i\}^+} \arrow[r, "\alpha_{U\cup\{i\}}"] & X_{U\cup\{i\}} \end{tikzcd}$$

commuta.

Així, el límit homotòpic del codiagrama $\mathbf{X}$ d'espais puntejats

$$X_1 \xrightarrow{g} X_{01} \xleftarrow{f} X_0$$

és:

$$\operatorname{holim}(\mathbf{X}) = \{(x_0, x_1, \alpha) \in X_0 \times X_1 \times F(I^+, X_{01}) : \alpha(0) = f(x_0), \alpha(1) = g(x_1)\}.$$

En particular, el límit homotòpic del codiagrama

$$* \to X_{01} \xleftarrow{f} X_0$$

és la fibra homotòpica de f.

Considerem ara X un $\square_2$-codiagrama d'espais puntejats:

$$\begin{tikzcd}
& & X_0 \arrow[dl, "f_0^{02}"'] \arrow[d] \arrow[dr, "f_0^{01}"] & & \\
& X_{02} \arrow[r, "g_{02}"] & X_{012} & X_{01} \arrow[l, "g_{01}"'] & \\
X_2 \arrow[ur, "f_2^{02}"] \arrow[urr] \arrow[rr, "f_2^{12}"] & & X_{12} \arrow[u, "g_{12}"] & & X_1 \arrow[ul, "f_1^{01}"'] \arrow[ull] \arrow[ll, "f_1^{12}"']
\end{tikzcd}$$

Aleshores $\mathrm{holim}(\mathbf{X})$ és el subespai de

$$X_0 \times X_1 \times X_2 \times F(I^+, X_{01}) \times F(I^+, X_{02}) \times F(I^+, X_{12}) \times F(\Delta^{2+}, X_{012})$$

definit pels punts $(x_0, x_1, x_2, \alpha_{01}, \alpha_{02}, \alpha_{12}, \alpha_{012})$ tals que

$$\begin{aligned}
\alpha_{01}(0) &= f_0^{01}(x_0), \quad \alpha_{01}(1) = f_1^{01}(x_1) \\
\alpha_{02}(0) &= f_0^{02}(x_0), \quad \alpha_{02}(1) = f_2^{02}(x_2) \\
\alpha_{12}(0) &= f_1^{12}(x_1), \quad \alpha_{12}(1) = f_2^{12}(x_2)
\end{aligned}$$

i, en les cares de Δ^2,

$$\alpha_{012} \text{ és } g_{01} \circ \alpha_{01}, g_{02} \circ \alpha_{02} \text{ i } g_{12} \circ \alpha_{12}.$$

1.3.3 Propietats del límit homotòpic

A continuació recordem les principals propietats del límit homotòpic en una categoria de models simplicial. Les propietats d'invariància homotòpica i de cofinalitat requereixen codiagrames d'objectes fibrants. Aquesta hipòtesi es podria eliminar si en la definició de límit homotòpic s'introduïssin reemplaçaments fibrants functorials. En tal cas les factoritzacions functorials en la definició de categoria de models serien imprescindibles.

En el que segueix fixem $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial.

1.3.3.1 Límit homotòpic dels diagrames constants

1.3.4 Lema *Si* $\mathbf{X}$ *és un* $\mathcal{C}$*-codiagrama de* $\mathcal{M}$ *constant, i.e.* $\mathbf{X}_\alpha = X$ *per tot* α *i tots els morfismes són la identitat, aleshores hi ha un isomorfisme*

$$\operatorname{holim} \mathbf{X} \cong F(B\mathcal{C}, X).$$

DEMOSTRACIÓ: Primer observem que l'expressió d'un límit mitjançant productes i equalitzadors (vegeu [54, V.2]) dóna que en el cas d'un diagrama constant hi ha un isomorfisme

$$\operatorname{holim} \mathbf{X} \cong \lim_{\alpha} F(B(\mathcal{C} \downarrow \alpha), X).$$

Ara pels lemes 1.2.13 i 1.1.4 tenim

$$\lim_{\alpha} F(B(\mathcal{C} \downarrow \alpha), X) \cong F(\operatorname{colim}_{\alpha} B(\mathcal{C} \downarrow \alpha), X) = F(B\mathcal{C}, X).$$

Per al cas particular de codiagrames de conjunts simplicials vegeu [6, XI,4.2]. □

1.3.3.2 Límit homotòpic com a *end*

El límit homotòpic d'un $\mathcal{C}$-codiagrama de $\mathcal{M}$ és l'*end* del functor $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, $(\alpha, \alpha') \mapsto F(B(\mathcal{C} \downarrow \alpha), \mathbf{X}_{\alpha'})$. Podem escriure [40, 18.3.2 i 18.3.6]

$$\operatorname{holim} \mathbf{X} = \int_{\alpha} F(B(\mathcal{C} \downarrow \alpha), \mathbf{X}_\alpha)$$

amb la notació de [54], o bé

$$\operatorname{holim} \mathbf{X} = hom^{\mathcal{C}}(B(\mathcal{C} \downarrow -), \mathbf{X})$$

amb la notació de [40]. Per tant tenim propietats dels *ends* com ara el teorema de Fubini [54, IX.8]:

1.3.5 Proposició (Fubini) *Sigui* $\mathbf{X} : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{M}$ *un* $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$*-codiagrama. Aleshores hi ha isomorfismes*

$$\operatorname{holim}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}} \mathbf{X} \cong \operatorname{holim}_{\mathcal{C}}(\operatorname{holim}_{\mathcal{D}} \mathbf{X}) \cong \operatorname{holim}_{\mathcal{D}}(\operatorname{holim}_{\mathcal{C}} \mathbf{X}).$$

1.3.3.3 Límit homotòpic de diagrames d'objectes fibrants

El límit homotòpic d'un codiagrama d'objectes fibrants és un objecte fibrant:

1.3.6 Proposició [40, 18.5.2] *Si* $\mathbf{X}$ *és un* $\mathcal{C}$*-codiagrama de* $\mathcal{M}$ *d'objectes fibrants, aleshores* $\operatorname{holim} \mathbf{X}$ *és fibrant.*

1.3.3.4 Propietats functorials

El límit homotòpic és functorial respecte les dues variables:

(i) Si $\mathbf{X}$ i $\mathbf{Y}$ són $\mathcal{C}$-codiagrames, un morfisme $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ indueix un morfisme

$$\operatorname{holim} f : \operatorname{holim} \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{Y}.$$

ii) Suposem que tenim $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor entre categories petites i $\mathbf{X}$ un $\mathcal{D}$-codiagrama. Tenim induït un $\mathcal{C}$-codiagrama $F^*\mathbf{X} = \mathbf{X} \circ F$. Aleshores hi ha un morfisme natural [40, 19.1.8]

$$\operatorname*{holim}_{\mathcal{D}} \mathbf{X} \to \operatorname*{holim}_{\mathcal{C}} F^*\mathbf{X}$$

induït pels morfismes $F_* : B(\mathcal{C}\downarrow\alpha) \to B(\mathcal{D}\downarrow F\alpha)$.

Aquests morfismes no són en general equivalències febles. Per a codiagrames d'objectes fibrants tenim casos en què si que ho són, tal i com recullen la propietat d'invariància homotòpica (teorema 1.3.8) i el teorema de cofinalitat (teorema 1.3.11).

1.3.3.5 Comportament del límit homotòpic respecte equivalències febles i fibracions vèrtex a vèrtex

Donat un morfisme de codiagrames $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ que és una fibració vèrtex a vèrtex, el morfisme induït pel límit homotòpic és una fibració:

1.3.7 Proposició [40, 18.5.1] *Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ és un morfisme de $\mathcal{C}$-codiagrames d'objectes fibrants de $\mathcal{M}$ que és una fibració vèrtex a vèrtex, aleshores el morfisme induït en els límits homotòpics $f_* : \operatorname{holim} \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{Y}$ és una fibració.*

Donat un morfisme de codiagrames $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ que és una equivalència feble vèrtex a vèrtex, el morfisme induït pel límit homotòpic és una equivalència feble. Aquesta propietat fonamental del límit homotòpic l'anomenem propietat d'invariància homotòpica:

1.3.8 Teorema (invariància homotòpica) [40, 18.5.3] *Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ és un morfisme de $\mathcal{C}$-codiagrames d'objectes fibrants de $\mathcal{M}$ que és una equivalència feble vèrtex a vèrtex, aleshores el morfisme induït en els límits homotòpics $f_* : \operatorname{holim} \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{Y}$ és una equivalència feble d'objectes fibrants.*

1.3.3.6 Teorema de cofinalitat

1.3.9 Definició *Donat $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor i α un objecte de $\mathcal{D}$, la categoria* $(F \downarrow \alpha)$ d'objectes de $\mathcal{C}$ sobre α *és la categoria on un objecte és un parell (β, σ) on β és un objecte de $\mathcal{C}$ i σ és un morfisme $F\beta \to \alpha$ de $\mathcal{D}$, i un morfisme de (β, σ) a (β', σ') és un morfisme $\tau : \beta \to \beta'$ de $\mathcal{C}$ tal que el triangle*

$$\begin{tikzcd} F\beta \arrow[rr, "F\tau"] \arrow[dr, "\sigma"'] & & F\beta' \arrow[dl, "\sigma'"] \\ & \alpha & \end{tikzcd}$$

commuta.

Observem que si $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ i F és la identitat aleshores $(F \downarrow \alpha) = (\mathcal{C} \downarrow \alpha)$.

1.3.10 Definició *Un functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ entre categories petites és* homotòpicament cofinal per l'esquerra *(homotopy left cofinal) si per tot objecte α de $\mathcal{D}$ l'espai $B(F \downarrow \alpha)$ és contràctil.*

1.3.11 Teorema (cofinalitat) [40, 19.6.6.7b]

Sigui $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ un functor entre categories petites. Si F és homotòpicament cofinal per l'esquerra, aleshores per tot $\mathcal{D}$-codiagrama $\mathbf{X}$ d'objectes fibrants de $\mathcal{M}$ el morfisme natural

$$\operatorname*{holim}_{\mathcal{D}} \mathbf{X} \to \operatorname*{holim}_{\mathcal{C}} F^*\mathbf{X}$$

és una equivalència feble.

1.3.12 Corol·lari *Si 0 és un objecte inicial de $\mathcal{C}$ i $\mathbf{X}$ és un $\mathcal{C}$-codiagrama d'objectes fibrants de $\mathcal{M}$, aleshores el morfisme natural* $\operatorname{holim} \mathbf{X} \to \mathbf{X}_0$ *és una equivalència feble*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $*$ la categoria amb un objecte i sense morfismes que no siguin la identitat. Si $F_0 : * \to \mathcal{C}$ és el functor que porta l'objecte de $*$ a 0, aleshores per a tot objecte β de $\mathcal{C}$ la categoria $(F_0 \downarrow \beta)$ té un únic objecte i no té morfismes que no siguin la identitat. Per tant el resultat es dedueix del teorema de cofinalitat. $\square$

1.3.3.7 Morfisme del límit al límit homotòpic

1.3.13 Lema [6, XI,3.5] [40, 19.2.10] *Donat* $\mathbf{X}$ *un* $\mathcal{C}$*-codiagrama de* $\mathcal{M}$*, els morfismes* $B(\mathcal{C}\downarrow\alpha) \to *$ *indueixen un morfisme natural*

$$\lim \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{X}.$$

Aquest morfisme no és en general una equivalència feble, però hi ha casos en què sí, com els següents:

1.3.14 Lema [6, XI,4.1] [40, 19.9.4]

Si $\mathbf{X}$ *és el diagrama* $C \to A \leftarrow B$ *en* $\mathcal{M}$*, els objectes* A, B *i* C *són fibrants i almenys un dels morfismes* $B \to A$ *i* $C \to A$ *és una fibració, aleshores el morfisme natural* $\lim \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{X}$ *és una equivalència feble d'objectes fibrants.*

1.3.15 Lema *Si* $\mathcal{C}$ *és una categoria petita amb objecte inicial 0, i* $\mathbf{X}$ *és un* $\mathcal{C}$*-codiagrama d'objectes fibrants de* $\mathcal{M}$*, el morfisme natural* $\mathbf{X}_0 = \lim \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{X}$ *és una equivalència feble.*

DEMOSTRACIÓ: És fàcil veure que la composició $\mathbf{X}_0 \to \operatorname{holim} \mathbf{X} \to \mathbf{X}_0$ és la identitat, i el segon morfisme és una equivalència feble pel corol·lari 1.3.12. Aleshores el primer també ho és per M2. □

1.3.3.8 Comportament del límit homotòpic respecte límits

1.3.16 Proposició (cf.[71, 5.11]) *El functor* holim : $(\mathcal{C}, \mathcal{M}) \to \mathcal{M}$ *preserva límits. En particular preserva productes i* pullbacks.

DEMOSTRACIÓ: La propietat es dedueix de la definició de holim com a end, ja que els *ends* preserven límits i la cotensorització també (lema 1.2.13). □

Un límit de particular interès és la fibra d'un morfisme:

1.3.17 Definició *La* fibra *d'un morfisme* $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *d'objectes fibrants de* $\mathcal{M}$ *és el límit*

$$\lim(X \to Y \leftarrow 0).$$

Com a corol·lari obtenim que el límit homotòpic commuta amb les fibres:

1.3.18 Corol·lari *Sigui* $\mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ *un morfisme de* $\mathcal{C}$*-codiagrames d'objectes fibrants de* $\mathcal{M}$*. Suposem que per tot* $\alpha \in \mathcal{C}$*,* $\mathbf{X}_\alpha \to \mathbf{Y}_\alpha$ *és una fibració amb fibra* $\mathbf{F}_\alpha$*. Aleshores* $\operatorname{holim} \mathbf{F}$ *és la fibra de la fibració* $\operatorname{holim} \mathbf{X} \to \operatorname{holim} \mathbf{Y}$.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix de la proposició anterior i de la proposició 1.3.7. □

1.4 Categories de models de categories de codiagrames

Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models i $\mathcal{C}$ una categoria petita. La categoria de codiagrames $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ pot tenir diverses estructures de categoria de models.

Si $\mathcal{M}$ és una categoria de models cofibrantment generada [40, 11.6.1] aleshores $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ té una estructura de categoria de models [40, 11.6.1] on les equivalències febles i les fibracions es defineixen vèrtex a vèrtex. Aquesta estructura és cofibrantment generada i ens referirem a l'estructura cofibrantment generada de $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

Si $\mathcal{C}$ és una categoria de Reedy, $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ també té una estructura de categoria de models (vegeu la secció 1.4.1).

Si $\mathcal{C}$ és una categoria de Reedy i $\mathcal{M}$ és una categoria de models cofibrantment generada, les dues estructures de categoria de models de $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ no coincideixen en general. Totes dues tenen les mateixes equivalències febles, però l'estructura de Reedy té més cofibracions (vegeu [40, 15.6.3]).

1.4.1 Estructura de categoria de models de Reedy

En aquesta secció recollim les definicions i resultats de [40, Chapter 15] referents a l'estructura de categoria de models de Reedy de $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$.

1.4.1 Definició *Una* categoria de Reedy *és una categoria petita* $\mathcal{C}$ *amb dues subcategories* $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ *(la* subcategoria directa*) i* $\overleftarrow{\mathcal{C}}$ *(la* subcategoria inversa*), ambdues contenint tots els elements de* $\mathcal{C}$*, en què cada objecte té assignat un enter no negatiu (anomenat* grau*) de manera que*

1) *Tot morfisme de* $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ *llevat la identitat eleva el grau.*

2) *Tot morfisme de* $\overleftarrow{\mathcal{C}}$ *llevat la identitat disminuex el grau.*

3) Tot morfisme g de $\mathcal{C}$ té una factorització única $g = \overrightarrow{g}\overleftarrow{g}$ on $\overrightarrow{g}$ és en $\overrightarrow{\mathcal{C}}$ i $\overleftarrow{g}$ és en $\overleftarrow{\mathcal{C}}$

Per exemple la categoria Δ d'índexos cosimplicials és una categoria de Reedy.

1.4.2 Definició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de Reedy i α un objecte de $\mathcal{C}$.*

La categoria latching $\partial(\overrightarrow{\mathcal{C}}\downarrow \alpha)$ *de $\mathcal{C}$ en α és la subcategoria plena de $(\overrightarrow{\mathcal{C}}\downarrow \alpha)$ que conté tots els elements llevat de la identitat en α.*

La categoria matching $\partial(\alpha \downarrow\overleftarrow{\mathcal{C}})$ *de $\mathcal{C}$ en α és la subcategoria plena de $(\alpha \downarrow\overleftarrow{\mathcal{C}})$ que conté tots els elements llevat de la identitat en α.*

1.4.3 Definició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de Reedy, $\mathcal{M}$ una categoria de models, $\mathbf{X}$ un $\mathcal{C}$-codiagrama de $\mathcal{M}$ i α un objecte de $\mathcal{C}$. Notem igualment per $\mathbf{X}$ el $\partial(\overrightarrow{\mathcal{C}}\downarrow \alpha)$-codiagrama induït i el $\partial(\alpha \downarrow\overleftarrow{\mathcal{C}})$-codiagrama induït.*

*L'*objecte latching *de $\mathbf{X}$ en α és $L_\alpha\mathbf{X} = \operatorname{colim}_{\partial(\overrightarrow{\mathcal{C}}\downarrow\alpha)}\mathbf{X}$ i el* morfisme latching *de $\mathbf{X}$ en α és el morfisme natural $L_\alpha\mathbf{X} \to \mathbf{X}_\alpha$.*

*L'*objecte matching *de $\mathbf{X}$ en α és $M_\alpha\mathbf{X} = \lim_{\partial(\alpha\downarrow\overleftarrow{\mathcal{C}})}\mathbf{X}$ i el* morfisme matching *de $\mathbf{X}$ en α és el morfisme natural $\mathbf{X}_\alpha \to M_\alpha\mathbf{X}$.*

1.4.4 Definició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de Reedy, $\mathcal{M}$ una categoria de models i $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ $\mathcal{C}$-codiagrames de $\mathcal{M}$.*

Un morfisme de codiagrames $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ és:

i) una equivalència feble de Reedy *si, per tot objecte α de $\mathcal{C}$, $f_\alpha : \mathbf{X}_\alpha \to \mathbf{Y}_\alpha$ és una equivalència feble,*

ii) una cofibració de Reedy *si, per tot objecte α de $\mathcal{C}$, el morfisme*

$$\mathbf{X}_\alpha \sqcup_{L_\alpha\mathbf{X}} L_\alpha\mathbf{Y} \to \mathbf{Y}_\alpha$$

és una cofibració, i

iii) una fibració de Reedy *si, per tot objecte α de $\mathcal{C}$, el morfisme*

$$\mathbf{X}_\alpha \to \mathbf{Y}_\alpha \times_{M_\alpha\mathbf{Y}} M_\alpha\mathbf{X}$$

és una fibració.

1.4.5 Teorema [40, 15.3.4] Sigui $\mathcal{C}$ una categoria de Reedy i $\mathcal{M}$ una categoria de models. La categoria $(\mathcal{C}, \mathcal{M})$ de $\mathcal{C}$-codiagrames de $\mathcal{M}$ amb les equivalències febles de Reedy, les cofibracions de Reedy i les fibracions de Reedy és una categoria de models.

1.4.2 Codiagrames indexats per una categoria directa

En aquesta secció recollim la definició de categoria directa i l'estructura de categoria de models dels codiagrames indexats per una categoria directa de [41, Chapter 6.2].

1.4.6 Definició *Una categoria petita $\mathcal{C}$ és una* categoria directa *si podem assignar a cada objecte un enter no negatiu (anomenat* grau*) de manera que tot morfisme que no sigui la identitat eleva el grau.*

Per exemple si $\square$ és un tipus de diagrama cúbic, $\square$ és una categoria directa.

1.4.7 Definició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria directa i $\mathcal{M}$ una categoria de models. La* categoria latching $\partial(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$ *de $\mathcal{C}$ en α és la subcategoria plena de* $(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$ *que conté tots els objectes excepte la identitat en α.*

Si $\mathbf{X}$ és un $\mathcal{C}$-diagrama en $\mathcal{M}$, $\mathbf{X}$ també denota el $\partial(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$-diagrama induït ($X_{(\beta\to\alpha)} = X_\beta$).

*L'*objecte latching *de $\mathbf{X}$ en α és $L_\alpha\mathbf{X} = \operatorname{colim}_{\partial(\mathcal{C}\downarrow\alpha)}\mathbf{X}$ i el* morfisme latching *de $\mathbf{X}$ en α és el morfisme natural $L_\alpha\mathbf{X}\to\mathbf{X}_\alpha$.*

1.4.8 Teorema [41, 5.1.3] *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models i $\mathcal{C}$ una categoria directa. Hi ha una estructura de categoria de models en $(\mathcal{C},\mathcal{M})$ on un morfisme de codiagrames $f:\mathbf{X}\to\mathbf{Y}$ és*

i) equivalència feble si $f_\alpha:\mathbf{X}_\alpha\to\mathbf{Y}_\alpha$ és equivalència feble per tot α,

ii) fibració si $f_\alpha:\mathbf{X}_\alpha\to\mathbf{Y}_\alpha$ és fibració per tot α, i

iii) cofibració si $\mathbf{X}_\alpha\sqcup_{L_\alpha\mathbf{X}}L_\alpha\mathbf{Y}\to\mathbf{Y}_\alpha$ és cofibració per tot α.

En particular, $\mathbf{X}$ és un objecte cofibrant si $L_\alpha\mathbf{X}\to\mathbf{X}_\alpha$ és cofibració per tot α.

1.4.3 Codiagrames cúbics cofibrants de conjunts simplicials

La categoria **Sset** és cofibrantment generada i per tant la categoria $(\mathcal{C},\mathbf{Sset})$ té una estructura de categoria de models amb equivalències febles i fibracions definides vèrtex a vèrtex (vegeu la introducció de la secció 1.4).

Un codiagrama de conjunts simplicials $\mathbf{K}:\mathcal{C}\to\mathbf{Sset}$ és cofibrant si ho és en l'estructura cofibrantment generada. Si $\mathcal{C}$ és una categoria directa, per exemple un tipus cúbic, la categoria $(\mathcal{C},\mathbf{Sset})$ també té l'estructura del teorema 1.4.8. Aquesta estructura i l'estructura cofibrantment generada coincideixen:

1.4.9 Lema *Sigui $\Box$ un tipus cúbic. L'estructura de categoria de models de $(\Box, \mathbf{Sset})$ donada per la categoria directa $\Box$ coincideix amb l'estructura de categoria de models donada per la categoria cofibrantment generada* **Sset**.

DEMOSTRACIÓ: Les dues estructures tenen les mateixes equivalències febles i les mateixes fibracions. $\Box$

Per tant un codiagrama cúbic de conjunts simplicials $\mathbf{K} : \Box \to \mathbf{Sset}$ és cofibrant si $L_\alpha \mathbf{K} \to \mathbf{K}_\alpha$ és una cofibració per tot α.

Si $\alpha \in \Box_n$, i.e. si α és un subconjunt no buit de $\{0, \ldots, n\}$, notem per $\Delta[\alpha]$ la cara de $\Delta[n]$ corresponent als vèrtexs de α.

1.4.10 Lema *El $\Box_n$-codiagrama de conjunts simplicials*

$$\Box_n \to B(\Box_n {\downarrow} -), \quad \alpha \mapsto B(\Box_n {\downarrow} \alpha)$$

és cofibrant.

El $\Box_n$-codiagrama de conjunts simplicials

$$\Box_n \to \Delta[-], \quad \alpha \mapsto \Delta[\alpha]$$

és cofibrant.

DEMOSTRACIÓ: És clar que el morfisme

$$L_\alpha B(\Box_n \downarrow -) = \operatorname*{colim}_{\partial(\Box_n \downarrow \alpha)} B(\Box_n \downarrow -) \to B(\Box_n \downarrow \alpha)$$

i el morfisme

$$L_\alpha \Delta[-] = \operatorname*{colim}_{\partial(\Box_n \downarrow \alpha)} \Delta[-] \to \Delta[-]$$

són monomorfismes de conjunts simplicials i per tant cofibracions de conjunts simplicials per tot α. $\Box$

1.5 Límit homotòpic d'un $\Box_n$-codiagrama

En la definició de límit homotòpic d'un $\Box_n$-codiagrama apareix el codiagrama de conjunts simplicials $B(\Box_n {\downarrow} -)$. Hem vist en el lema 1.4.10 que aquest codiagrama és cofibrant. Aquest codiagrama és a més feblement equivalent al codiagrama constant en un punt. Es diu que és una aproximació cofibrant al codiagrama constant en un punt. En aquesta secció veiem que si en la definició de límit homotòpic d'un $\square_n$-codiagrama canviem $B(\square_n \downarrow -)$ per una altra aproximació cofibrant obtenim una definició feblement equivalent.

Fixem $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial.

1.5.1 Lema [40, 18.4.5] *Si* $\mathbf{X}$ *és un* $\mathcal{C}$*-codiagrama de* $\mathcal{M}$ *d'objectes fibrants i* $f : \mathbf{K} \to \mathbf{K}'$ *és una equivalència feble de* $\mathcal{C}$*-codiagrames cofibrants de conjunts simplicials, aleshores el morfisme induït*

$$\int_\alpha F(\mathbf{K}'_\alpha, \mathbf{X}_\alpha) \to \int_\alpha F(\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{X}_\alpha)$$

és una equivalència feble d'objectes fibrants.

1.5.2 Corol·lari *Si* $\mathbf{X}$ *és un* $\mathcal{C}$*-codiagrama de* $\mathcal{M}$ *d'objectes fibrants,* $\mathbf{K}$ *un* $\mathcal{C}$*-codiagrama cofibrant de conjunts simplicials i* $f : B(\mathcal{C} \downarrow -) \to \mathbf{K}$ *és una equivalència feble de* $\mathcal{C}$*-codiagrames de conjunts simplicials, aleshores el morfisme induït*

$$\int_\alpha F(\mathbf{K}_\alpha, \mathbf{X}_\alpha) \to \operatorname*{holim}_{\mathcal{C}} \mathbf{X}$$

és una equivalència feble d'objectes fibrants.

1.5.3 Lema *Hi ha una equivalència feble de codiagrames cofibrants de conjunts simplicials entre el codiagrama* $\square_n \to B(\square_n \downarrow -)$, $\alpha \mapsto B(\square_n \downarrow \alpha)$ *i el codiagrama* $\square_n \to \Delta[-]$, $\alpha \mapsto \Delta[\alpha]$.

DEMOSTRACIÓ:

Pel lema 1.4.10 els $\square_n$-codiagrames $B(\square_n \downarrow -)$ i $\Delta[-]$ són cofibrants. Manca veure que hi ha una equivalència feble natural

$$B(\square_n \downarrow \alpha) \longrightarrow \Delta[\alpha].$$

Recordem que hi ha isomorfismes naturals $B(\square_n \downarrow \alpha) \cong B(\square_\alpha) \cong sd\Delta[\alpha]$ (vegeu la secció 1.1.2.1).

Hi ha un morfisme natural (vegeu [22, p.182-184] i [47, secció 2])

$$h : sd\Delta[n] \to \Delta[n]$$

que és una equivalència feble (de fet una equivalència homotòpica simplicial). El morfisme h ens dóna l'equivalència feble natural $B(\square_n \downarrow \alpha) \longrightarrow \Delta[\alpha]$ cercada. $\square$

1.5.4 Proposició *Sigui* $\mathbf{X}$ *un* $\square_n$*-codiagrama d'objectes fibrants de* $\mathcal{M}$*. Hi ha una equivalència feble*

$$\int_\alpha F(\Delta[\alpha], \mathbf{X}_\alpha) \longrightarrow \int_\alpha F(B(\square\!\downarrow\!\alpha), \mathbf{X}_\alpha) = \operatorname*{holim}_{\square_n} \mathbf{X}.$$

Demostració: Es dedueix del lema anterior i del corol·lari 1.5.2. $\square$

2
Categories de models i categories de descens

En aquest capítol recordem la noció de categoria de descens, introduïda per Guillén i Navarro en [32], i demostrem que la categoria d'objectes fibrants d'una categoria de models simplicial és una categoria de descens si satisfà un criteri d'aciclicitat. Per a obtenir aquest resultat farem servir el límit homotòpic. En la secció 2.3 obtenim exemples de categories de descens usant el resultat anterior, entre els quals la categoria d'espectres fibrants. Finalment en la secció 2.4 tractem la relació de les categories de models amb les categories de descens cosimplicial de B. Rodríguez [67].

2.1 Categories de descens

En aquesta secció donem la definició de categoria de descens cohomològic, que s'obté dualitzant la definició de categoria de descens homològic que és la que apareix explícitament en [32]. Introduïm abans les categories $Codiag_{\Pi}\mathcal{D}$ i $Coreal_{\Pi}\mathcal{D}$ de codiagrames i corealitzacions amb el tipus variant dins de la categoria de tipus cúbics, i el functor con, que permet estendre un functor definit en codiagrames cúbics a codiagrames cúbics augmentats.

2.1.1 Introducció

Les categories de descens cohomològic són duals a les categories de descens homològic. Aquí tractarem bàsicament només amb el cas cohomològic.

Una categoria de descens és, essencialment, un triple $(\mathcal{D}, E, \mathbf{s})$ donat per una categoria cartesiana $\mathcal{D}$ amb objecte inicial 0, una classe saturada de morfismes E de $\mathcal{D}$, anomenats quasiisomorfismes o equivalències febles, i per tot tipus cúbic $\square$ un

functor
$$\mathbf{s}_\square : (\square, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D},$$
anomenat simple, natural en $\square$ en un sentit precís i que satisfà les següents propietats:

1) Multiplicativitat. El simple d'un objecte X considerat com a $\square_0$-codiagrama és isomorf a X, i per tot parell $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ de $\square$-codiagrames hi ha una equivalència feble $\mathbf{s}_\square(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \to \mathbf{s}_\square\mathbf{X} \times \mathbf{s}_\square\mathbf{Y}$.

2) Factorització. Si $\square$ i $\square'$ són tipus cúbics, per tot $\square\times\square'$-codiagrama $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_{\alpha\beta})$ hi ha una equivalència feble $\mu : \mathbf{s}_{\alpha\beta}\mathbf{X}_{\alpha\beta} \to \mathbf{s}_\alpha\mathbf{s}_\beta\mathbf{X}_{\alpha\beta}$.

3) Exactitud. Sigui $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un morfisme de $\square$-codiagrames. Si per tot $\alpha \in \square$ $f_\alpha : \mathbf{X}_\alpha \to \mathbf{Y}_\alpha$ és una equivalència feble, aleshores el morfisme $\mathbf{s}_\square\mathbf{X} \to \mathbf{s}_\square\mathbf{Y}$ és una equivalència feble.

4) Criteri d'aciclicitat. Un morfisme $f : X_0 \to X_1$ és una equivalència feble si, i només si, el simple del $\square_1$-codiagrama
$$X_0 \xrightarrow{f} X_1 \leftarrow 0$$
és acíclic.

   De fet cal que es compleixi un criteri d'aciclicitat estès, que és la generalització del criteri d'aciclicitat per a codiagrames, per al qual cal definir el simple d'un codiagrama augmentat:

4') Criteri d'aciclicitat estès. Per tot codiagrama augmentat $\mathbf{X}^+$ de tipus $\square_n^+$, el morfisme $\mathbf{X}_0 \to \mathbf{s}_{\square_n}\mathbf{X}$ és una equivalència feble si, i només si, el morfisme $0 \to \mathbf{s}_{\square_n^+}\mathbf{X}^+$ és una equivalència feble.

2.1.2 Les categories $\mathit{Codiag}_\Pi\mathcal{D}$ i $\mathit{Coreal}_\Pi\mathcal{D}$

Sigui $\mathcal{D}$ una categoria. Per a expressar la naturalitat respecte $\square$ del functor simple $\mathbf{s}_\square : (\square, \mathcal{D}) \longrightarrow \mathcal{D}$, cal introduir la categoria $\mathit{Codiag}_\Pi\mathcal{D}$ de codiagrames amb el tipus variable en Π.

Les categories $\mathit{Codiag}_\Pi\mathcal{D}$ i $\mathit{Coreal}_\Pi\mathcal{D}$ de codiagrames i corealitzacions són anàlogues a les categories $\mathit{Diag}_\Pi\mathcal{D}$ i $\mathit{Real}_\Pi\mathcal{D}$ de diagrames i realitzacions de [32, 1.2.1].

2.1.1 Definició *Donat* $\delta : \Box \to \Box'$ *un morfisme de* Π, *el* functor d'imatge inversa

$$\delta^* : (\Box', \mathcal{D}) \to (\Box, \mathcal{D})$$

és el functor definit per $F \mapsto \delta^*(F) := F \circ \delta$.

2.1.2 Definició *La categoria* $Codiag_\Pi \mathcal{D}$ *de* codiagrames cúbics *té els següents objectes i morfismes:*

- *Objectes. Un objecte és un parell* $(X, \Box)$, *on* $\Box \in Ob\Pi$ *i* $X : \Box \to \mathcal{D}$ *és un codiagrama.*
- *Morfismes. Donats* $(Y, \Box')$ *i* $(X, \Box)$, *un morfisme* $(Y, \Box') \to (X, \Box)$ *és una parella* (a, δ) *on* $\delta : \Box \to \Box'$ *és un morfisme de* Π *i* $a : \delta^* Y \to X$ *és una transformació natural de functors de* $(\Box, \mathcal{D})$.

Aquesta és una categoria cofibrada sobre Π^{op}, i coincideix amb $(Diag_\Pi(\mathcal{D}^{op}))^{op}$ (vegeu la remarca 2.1.6).

2.1.3 Definició *Donat* $\delta : \Box \to \Box'$ *un morfisme de* Π, *el* functor d'imatge directa

$$\delta_* : ((\Box, \mathcal{D}), \mathcal{D}) \to ((\Box', \mathcal{D}), \mathcal{D})$$

és el functor definit per $F \mapsto \delta_*(F) := F \circ \delta^*$.

2.1.4 Definició *La categoria* $Coreal_\Pi \mathcal{D}$ *de* corealitzacions de codiagrames cúbics *té els següents objectes i morfismes:*

- *Objectes. Un objecte és un functor* $s_\Box \in ((\Box, \mathcal{D}), \mathcal{D})$.
- *Morfismes. Un morfisme de* $s_{\Box'} \in ((\Box', \mathcal{D}), \mathcal{D})$ *a* $s_\Box \in ((\Box, \mathcal{D}), \mathcal{D})$ *és un morfisme* $\delta : \Box \to \Box'$ *de* Π *i una transformació natural de functors* $s_{\Box'} \to \delta_* s_\Box$ *de* $((\Box', \mathcal{D}), \mathcal{D})$.

Es tracta d'una categoria fibrada sobre Π^{op}, i coincideix amb $(Real_\Pi(\mathcal{D}^{op}))^{op}$ (vegeu la remarca 2.1.6).

2.1.5 Remarca La categoria $Coreal_\Pi \mathcal{D}$ té una estructura de categoria monoïdal: siguin $\Box, \Box' \in \Pi$, $\mathbf{s}_\Box \in ((\Box, \mathcal{D}), \mathcal{D})$, $\mathbf{s}_{\Box'} \in ((\Box', \mathcal{D}, \mathcal{D}))$. La composició

$$\mathbf{s}_\Box \circ \mathbf{s}_{\Box'} : ((\Box \times \Box'), \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$$

està definida per

$$\mathbf{s}_\Box \circ \mathbf{s}_{\Box'}(X) = \mathbf{s}_\Box(\alpha \mapsto \mathbf{s}_{\Box'}(\beta \mapsto X_{\alpha\beta})).$$

L'objecte unitat és el functor d'avaluació $Av : (\Box_0, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$.

2.1.6 Remarca Recordem ([27, VI] i [75, 3.1.3]) que si $\Phi : \mathcal{C}^{op} \to (\mathbf{Cat})$ és un functor, es defineix $\mathcal{F} \to \mathcal{C}$ la categoria fibrada associada. Per cada $U \in Ob(\mathcal{C})$, la fibra $\mathcal{F}(U)$ és igual a $\Phi(U)$. Per cada fletxa $f : U \to V$ en $\mathcal{C}$ hi ha un functor d'imatge inversa $\Phi f : \Phi V \to \Phi U$. La categoria $\mathcal{F}$ té per objectes els parells $(\xi, U), U \in Ob(\mathcal{C}), \xi \in Ob(\Phi(U))$ i un morfisme $(\xi, U) \to (\eta, V)$ és una parella (a, f) on $f : U \to V$ és un morfisme de $\mathcal{C}$ i $a : \xi \to \Phi f(\eta)$ és un morfisme en $\Phi(U)$.

Dualment, si $\Psi : \mathcal{C} \to (\mathbf{Cat})$ és un functor, es defineix $\mathcal{G} \to \mathcal{C}$ la categoria cofibrada associada. Per cada fletxa $f : U \to V$ en $\mathcal{C}$ hi ha un functor d'imatge directa $\Psi f : \Psi U \to \Psi V$. La categoria $\mathcal{G}$ té per objectes els parells $(\xi, U), U \in Ob(\mathcal{C}), \xi \in Ob(\Psi(U))$ i un morfisme $(\xi, U) \to (\eta, V)$ és una parella (a, f) on $f : U \to V$ és un morfisme de $\mathcal{C}$ i $a : \Psi f(\eta) \to \xi$ és un morfisme en $\Psi(V)$.

Si considerem el functor $\Phi : (\Pi^{op})^{op} \to (\mathbf{Cat}), \square \mapsto ((\square, \mathcal{D}), \mathcal{D})$, la categoria fibrada sobre Π^{op} associada és $Coreal_{\Pi}\mathcal{D}$. $Coreal_{\Pi}\mathcal{D}$ també és la categoria oposada a la categoria cofibrada sobre Π associada a $\Phi' : \Pi \to (\mathbf{Cat}), \square \mapsto ((\square, \mathcal{D}), \mathcal{D})^{op}$, que és $Real_{\Pi}\mathcal{D}^{op}$.

Si considerem el functor $\Psi : (\Pi^{op}) \to (\mathbf{Cat}), \square \mapsto (\square, \mathcal{D})$, la categoria cofibrada sobre Π^{op} associada és $Codiag_{\Pi}\mathcal{D}$. $Codiag_{\Pi}\mathcal{D}$ també és la categoria oposada a la categoria fibrada sobre Π associada a $\Psi' : \Pi^{op} \to (\mathbf{Cat}), \square \to (\square, \mathcal{D})^{op}$, que és $Diag_{\Pi}\mathcal{D}^{op}$.

2.1.7 Definició *Donada $\mathcal{D}$ una categoria, X un objecte de $\mathcal{D}$ i $\square \in \Pi$, el functor*

$$i_{\square} : \mathcal{D} \to (\square, \mathcal{D})$$

porta l'objecte X al $\square$-codiagrama constant definit per X.

2.1.2.1 Imatge directa d'un codiagrama

Sigui $\mathcal{D}$ una categoria amb un objecte final 1. Per als codiagrames tenim la següent construcció de functor d'imatge directa, dual del cas de diagrames [32, 1.2.2], que no s'ha de confondre amb la definició 2.1.3.

2.1.8 Definició *Si $\delta : \square \to \square'$ és un morfisme de Π, el* functor d'imatge directa

$$\delta_* : (\square, \mathcal{D}) \to (\square', \mathcal{D})$$

és tal que si $\mathbf{X}$ és un $\square$-codiagrama de $\mathcal{D}$ aleshores $\delta_*\mathbf{X}$ és el $\square'$-codiagrama definit per

$$(\delta_*\mathbf{X})_\beta = \begin{cases} \mathbf{X}_\alpha & si\ \beta = \delta(\alpha), \alpha \in \square \\ 1 & si\ \beta \in \square' \setminus \delta(\square) \end{cases}$$

El functor δ_* és adjunt per la dreta del functor d'imatge inversa (definició 2.1.1) $\delta^* : (\Box', \mathcal{D}) \to (\Box, \mathcal{D})$ i hi ha un morfisme canònic $\delta_*\mathbf{X} \to \mathbf{X}$ definit per l'adjunció.

2.1.3 Functor con

Sigui $\mathcal{D}$ una categoria amb objecte inicial 0. En aquesta secció recordem la definició del functor con

$$\mathbf{c} : \mathit{Codiag}_{\Pi^+}\mathcal{D} \longrightarrow \mathit{Codiag}_{\Pi}\mathcal{D}$$

que permet estendre qualsevol functor definit inicialment en els codiagrames cúbics als codiagrames cúbics augmentats (vegeu [32, 1.4.3]).

El functor $c : \Pi^+ \to \Pi$ porta un tipus cúbic augmentat $\Box_S^+$ al tipus cúbic $\prod_{s \in S} \Box_{\{s\}^+}$, on $\{s\}^+ = \{s, *_s\}$. Per exemple c porta el tipus cúbic augmentat $\Box_0^+ = \{0\} \leftarrow \emptyset$ al tipus cúbic

$$\{0\} \to \{0, *_0\} \leftarrow \{*_0\},$$

i el tipus cúbic augmentat $\Box_1^+$ al tipus cúbic

$$\begin{tikzcd}
(\{0\},\{1\}) \arrow[r] \arrow[d] & (\{0\},\{1,*_1\}) \arrow[d] & (\{0\},\{*_1\}) \arrow[l] \arrow[d] \\
(\{0,*_0\},\{1\}) \arrow[r] & (\{0,*_0\},\{1,*_1\}) & (\{0,*_0\},\{*_1\}) \arrow[l] \\
(\{*_0\},\{1\}) \arrow[r] \arrow[u] & (\{*_0\},\{1,*_1\}) \arrow[u] & (\{*_0\},\{*_1\}) \arrow[l] \arrow[u]
\end{tikzcd} .$$

Considerem el morfisme de tipus de diagrames

$$\rho_S : \Box_S^+ \longrightarrow c\Box_S^+ = \prod_s \Box_{\{s\}^+}, \quad \rho_S(\alpha) = (\{s\}^+)_{s \in \alpha} \sqcup (\{*_s\})_{s \in S \setminus \alpha}.$$

Definim el functor

$$\mathbf{c}_S : (\Box_S^+, \mathcal{D}) \longrightarrow (c\Box_S^+, \mathcal{D})$$

per

$$(\mathbf{c}_S)_\beta = \begin{cases} X_\alpha & \text{si } \beta = \rho_S(\alpha), \alpha \in \Box_S^+ \\ 0 & \text{altrament.} \end{cases}$$

Així, al codiagrama augmentat $X_0 \leftarrow X_\emptyset$ se li associa el codiagrama $0 \to X_0 \leftarrow X_\emptyset$, i al codiagrama cúbic augmentat

$$\begin{tikzcd} X_{01} & X_1 \arrow[l] \\ X_0 \arrow[u] & X_\emptyset \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

se li associa el codiagrama

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] \\ 0 \arrow[r] & X_{01} & X_1 \arrow[l] \\ 0 \arrow[r] \arrow[u] & X_0 \arrow[u] & X_\emptyset \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd} .$$

Els functors $\mathbf{c}_S$ defineixen el functor con

$$\mathbf{c} : Codiag_{\Pi^+}\mathcal{D} \longrightarrow Codiag_{\Pi}\mathcal{D}.$$

El functor $c : \Pi^+ \to \Pi$ s'estén en el functor $c : \Pi \times \Pi^+ \to \Pi$ definit per $c(S,T) = S \times c(T)$, i el functor $\mathbf{c} : Codiag_{\Pi^+}\mathcal{D} \longrightarrow Codiag_{\Pi}\mathcal{D}$ s'estén en el functor

$$\mathbf{c} : Codiag_{\Pi\times\Pi^+}\mathcal{D} \longrightarrow Codiag_{\Pi}\mathcal{D}.$$

El functor $\mathbf{c}$ permet estendre un functor $F : Codiag_{\Pi}\mathcal{D} \to \mathcal{C}$ definit en els codiagrames cúbics als codiagrames cúbics augmentats, considerant la composició

$$Codiag_{\Pi\times\Pi^+}\mathcal{D} \xrightarrow{\mathbf{c}} Codiag_{\Pi}\mathcal{D} \xrightarrow{F} \mathcal{C}.$$

2.1.4 Categories de descens cohomològic

En aquesta secció donem la definició de categoria de descens cohomològic que s'obté dualitzant la definició del cas homològic [32, 1.5.3].

Recordem que un functor monoïdal entre categories monoïdals és *fort* [54, XI.2] si els morfismes de Künneth i d'unitats són isomorfismes. Si la segona categoria té una classe saturada de morfismes, diem que el functor és *quasifort* si els morfismes de Künneth i d'unitats pertanyen a la classe saturada (Guillén i Navarro en diuen *quasiescrictes* [32, 1.5.2]).

Recordem que un functor *opmonoïdal* es defineix de manera similar a un functor monoïdal amb els morfismes de Künneth i d'unitats amb sentit invers (vegeu [32, 1.5.2]).

2.1.9 Definició *Una* categoria de descens cohomològic [32, 1.7.1] *ve donada per* $(\mathcal{D}, E, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$*, on:*

(CD1)^{op} $\mathcal{D}$ és una categoria cartesiana amb objecte inicial 0. L'objecte final el notem 1.

(CD2)^{op} E és una classe saturada de morfismes de $\mathcal{D}$ (vegeu la secció 1.2.1*), estable per productes, i.e., tal que si $f : X \to X'$ i $g : Y \to Y'$ són morfismes de E, aleshores el producte $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ és un morfisme de E.*

(CD3)^{op} $\mathbf{s} : Codiag_{\Pi}\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ és un functor covariant tal que si $\delta : \Box \to \Box'$ és un morfisme de Π i $\mathbf{X}$ és un $\Box$-codiagrama de $\mathcal{D}$, el morfisme $\mathbf{s}_{\Box'}\delta_*\mathbf{X} \to \mathbf{s}_{\Box}\mathbf{X}$, induït pel morfisme canònic $\delta_*\mathbf{X} \to \mathbf{X}$, és de E.

(CD4)^{op} Per tot objecte $\Box$ de Π, el functor $\mathbf{s}_{\Box} : (\Box, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ és opmonoïdal quasifort , i.e., el morfisme natural de Künneth associat al producte,

$$\sigma = \sigma_{\Box}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{s}_{\Box}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \to \mathbf{s}_{\Box}\mathbf{X} \times \mathbf{s}_{\Box}\mathbf{Y}$$

i el morfisme d'unitats

$$\sigma^1_{\Box} : \mathbf{s}_{\Box}(\Box \times 1) \to 1$$

són de E.

(CD5)^{op} Sigui $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ un morfisme de $\Box$-codiagrames de $\mathcal{D}$. Si per tot $\alpha \in \Box$, f_α és de E, aleshores $\mathbf{s}_{\Box}f : \mathbf{s}_{\Box}\mathbf{X} \to \mathbf{s}_{\Box}\mathbf{Y}$ és de E.

(CD6)^{op} El functor $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : \Pi^{op} \to Coreal_{\Pi}\mathcal{D}$, $\Box \mapsto (\mathbf{s}_{\Box} : (\Box, \mathcal{D}) \to \mathcal{D})$ és monoïdal quasifort. Explícitament:

$$\mu = \mu_{\Box,\Box'} : \mathbf{s}_{\Box} \circ \mathbf{s}_{\Box'} \to \mathbf{s}_{\Box\times\Box'}$$

és una transformació natural de functors, natural en $(\Box, \Box') \in Ob\Pi \times \Pi$;

$$\lambda_0 : Av \to \mathbf{s}_{\Box_0} \circ i_{\Box_0}$$

és una transformació natural de functors, i μ i λ_0 verifiquen:

1) *per tot $\Box \times \Box'$-codiagrama $\mathbf{X}$, el morfisme $\mu_{\Box,\Box'}(\mathbf{X}) : \mathbf{s}_{\Box}\mathbf{s}_{\Box'}\mathbf{X} \to \mathbf{s}_{\Box\times\Box'}\mathbf{X}$ és de E,*

2) per tot objecte X de $\mathcal{D}$, el morfisme $\lambda_0(X) : X \to \mathbf{s}_{\Box_0}(X)$ és de E, i

3) les transformacions naturals μ i λ_0 són compatibles amb les restriccions d'associativitat i d'unitat.

(CD7)^{op} Per tot $\Box \in Ob\Pi$, $\lambda_\Box : id_{\mathcal{D}} \to \mathbf{s}_\Box \circ i_\Box$ és una transformació natural de functors, natural en $\Box \in \Pi$, compatible amb μ i $\lambda_{\Box_0} = \lambda_0$.

(CD8)^{op} Per tot $\Box_S$-codiagrama $\mathbf{X}$, S un conjunt finit no buit, i tota augmentació $\varepsilon : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}$, el morfisme $\lambda_\varepsilon := \mathbf{s}_\Box(\varepsilon) \circ \lambda_\Box(\mathbf{X}_0) : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{s}_\Box\mathbf{X}$ és de E si, i només si, el morfisme canònic $0 \to \mathbf{s}_{\Box^+}\mathbf{X}^+$ és de E.

Les propietats (CD4)^{op}, (CD5)^{op}, (CD6)^{op} i (CD8)^{op} són les formulacions abstractes de la multiplicativitat, exactitud, factorització i del criteri d'aciclicitat respectivament.

2.1.10 Remarca Una categoria cartesiana $\mathcal{D}$ (amb productes finits) té una estructura monoïdal cartesiana amb el producte i l'objecte final. Aquesta és l'estructura monoïdal a què fa referència el functor monoïdal de (CD4)^{op}. Dualment, una categoria cocartesiana té una estructura monoïdal cocartesiana amb el coproducte i l'objecte inicial.

2.1.11 Remarca Amb la definició de $Coreal_\Pi\mathcal{D}$ que hem explicitat, que compleix $(Real_\Pi\mathcal{D}^{op})^{op} = Coreal_\Pi\mathcal{D}$, cal que en la definició 1.7.1 de [32] de categoria de descens cohomològic el functor $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0)$ sigui contravariant monoïdal.

2.2 Categories de models i descens

Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial. En aquesta secció demostrem que la subcategoria $\mathcal{M}_f$ d'objectes fibrants és una categoria de descens cohomològic, prenent com a classe saturada de morfismes les equivalències febles i com a functor simple el límit homotòpic, si $\mathcal{M}$ satisfà un criteri d'aciclicitat.

També obtenim el resultat dual: la categoria d'objectes cofibrants d'una categoria de models simplicial és una categoria de descens homològic si satisfà el criteri d'aciclicitat dual, prenent com a functor simple el colímit homotòpic.

2.2.1 Functor simple d'un codiagrama

Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial. El functor *simple*

$$\mathbf{s} : \mathit{Codiag}_{\Pi}\mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

associa a un $\square$-codiagrama $\mathbf{X}$ l'objecte definit pel límit homotòpic:

$$\mathbf{s}_{\square}(\mathbf{X}) = \operatorname{holim} \mathbf{X}.$$

Si tenim $(Y, \square') \to (X, \square)$ un morfisme en $\mathit{Codiag}_{\Pi}\mathcal{M}$ donat per $\delta : \square \to \square'$ i $a : \delta^* Y \to X$, les propietats functorials del límit homotòpic (vegeu la secció 1.3.3) ens permeten definir la composició

$$\mathbf{s}_{\square'} Y = \operatorname*{holim}_{\square'} Y \to \operatorname*{holim}_{\square} \delta^* Y \to \operatorname*{holim}_{\square} X = \mathbf{s}_{\square} X.$$

2.2.2 Fibra homotòpica d'un morfisme i criteri d'aciclicitat

2.2.1 Definició *La* fibra homotòpica *d'un morfisme $f : X \to Y$ en una categoria de models simplicial $\mathcal{M}$ és*

$$\operatorname{hofib} f = \operatorname{holim}(X \to Y \leftarrow 0).$$

2.2.2 Definició (Criteri d'aciclicitat per l'esquerra) *Una categoria de models $\mathcal{M}$ satisfà el* criteri d'aciclicitat per l'esquerra *si un morfisme $f : X \to Y$ amb X i Y fibrants és una equivalència feble si, i només si, la fibra homotòpica* $\operatorname{hofib} f$ *és acíclica per l'esquerra.*

2.2.3 Simple d'un codiagrama cúbic augmentat

En aquesta secció expliquem primer com s'estén el functor simple als codiagrames cúbics augmentats. Aleshores demostrem que el criteri d'aciclicitat és equivalent en una categoria de models simplicial a un criteri d'acicilicitat estès. La prova generalitza una propietat dels cubs d'espectres, seguint [79, 1.1]. Per un resultat similar en el cas d'espais topològics vegeu [23, 1.1].

Donat que un codiagrama augmentat té un objecte inicial, el lema 1.3.15 implica que el límit homotòpic d'un codiagrama cúbic augmentat $\mathbf{X}^+$ és feblement equivalent a $\mathbf{X}_0$. Per tant el simple d'un codiagrama cúbic augmentat no és el límit homotòpic.

2.2.3 Definició *El functor* $\mathbf{s}$ *s'estén als codiagrames cúbics augmentats mitjançant la construcció con de la secció* 2.1.3.

2.2.4 Lema *Sigui* $\mathcal{M}$ *una categoria de models simplicial. Un* $\Box_n^+$*-codiagrama* $\mathbf{X}^+$ *es pot veure com un morfisme de dos* $\Box_{n-1}^+$*-codiagrames,* $f : \mathbf{X}_0^+ \to \mathbf{X}_1^+$*. El simple associat a* $\mathbf{X}^+$ *és feblement equivalent al simple del* $\Box_{n-1}^+$*-codiagrama que en cada grau* α *és la fibra homotòpica de* f_α.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix de les propietats de Fubini (lema 1.3.5) i d'invariància homotòpica (teorema 1.3.8) del límit homotòpic, tenint en compte la definició de con d'un codiagrama cúbic augmentat (secció 2.1.3) i que pel lema 1.3.14 el límit homotòpic de $0 \to 0 \leftarrow 0$ és feblement equivalent a 0, on 0 és l'objecte inicial de $\mathcal{M}$. $\Box$

Aquest resultat permet calcular el simple d'un codiagrama cúbic augmentat inductivament, tenint en compte que si $f : X \to Y$ és un $\Box_0^+$-diagrama, el seu simple és la fibra homotòpica de f.

Un cub augmentat $\mathbf{X}^+$ és *acíclic per l'esquerra* si el seu simple $\mathbf{s}_{\Box^+}\mathbf{X}^+$ és acíclic per l'esquerra (definició 1.2.5). Els cubs augmentats acíclics per l'esquerra també s'anomenen cubs *homotòpicament cartesians*.

2.2.5 Lema *El functor* $f : \Box_n \to \Box_{n-1}^+$ *definit per* $(i, j) \mapsto (j)$ *és homotòpicament cofinal per l'esquerra.*

DEMOSTRACIÓ: Donat $\alpha = (1, j) \in \Box_n$, la categoria $(f \downarrow f(\alpha))$ és isomorfa a la categoria $(\Box_n \downarrow \alpha)$ i per tant contràctil. $\Box$

2.2.6 Lema *a) El functor* $f : \Box_1 \times \Box_{n-1} \to \Box_n$ *definit per* $f((0, 1), k) = (0, k)$*,* $f((1, 1), k) = (1, k)$ *i* $f((1, 0), k) = (1, 0, \dots, 0)$ *és homotòpicament cofinal per l'esquerra.*

b) Donat un diagrama $\mathbf{E} : \Box_n \to \mathcal{M}$ *tal que* $\mathbf{E}_{1,k}$ *és acíclic per a tot* $k \in \Box_{n-1}$*, aleshores hi ha una equivalència feble* $\operatorname{holim}_{\Box_n} \mathbf{E} \to \operatorname{holim}_{\Box_{n-1}} \mathbf{E}_{0,-}$.

DEMOSTRACIÓ: Les categories necessàries són contràctils: la categoria $(f \downarrow (1, 0, \dots, 0))$ és isomorfa a $\Box_{n-1}$, la categoria $(f \downarrow (0, k))$ és isomorfa a $(\Box_{n-1} \downarrow (k))$ i la categoria $(f \downarrow (1, k))$ és isomorfa a $(\Box_n \downarrow (1, k))$.

La part b) es dedueix per cofinalitat, Fubini i invariància homotòpica ($\mathbf{E}_{1,k}$ és acíclic):

$$\operatorname*{holim}_{\Box_n} \mathbf{E} \xrightarrow{\simeq} \operatorname*{holim}_{\Box_1 \times \Box_{n-1}} f^*\mathbf{E} \cong \operatorname*{holim}_{j \in \Box_1} \operatorname*{holim}_{k \in \Box_{n-1}} \mathbf{E}_{f(j,k)} \xrightarrow{\simeq}$$

$$\xrightarrow{\simeq} \operatorname{holim}(* \to * \leftarrow \operatorname*{holim}_{k\in\square_{n-1}} \mathbf{E}_{0,k}) \cong \operatorname*{holim}_{\square_{n-1}} \mathbf{E}_{0,-}$$

□

2.2.7 Proposició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial que satisfà el criteri d'aciclicitat per l'esquerra. Sigui $\mathbf{X}^+$ un $\square_n^+$-codiagrama d'objectes fibrants. Hi ha una equivalència feble*

$$\mathbf{s}_{\square_n^+}\mathbf{X}^+ \simeq \operatorname{hofib}(\mathbf{X}_0 \to \operatorname*{holim}_{\square_n} \mathbf{X}).$$

DEMOSTRACIÓ: Fem servir inducció sobre n. El cas $n = 0$ es compleix per definició.

Notem per $\mathcal{M}_f$ la categoria d'objectes fibrants de $\mathcal{M}$. Definim $\mathbf{E}^+ : \square_n^+ \to \mathcal{M}_f$ per $\mathbf{E}_{0,\mathbf{j}} = \operatorname{hofib}(\mathbf{X}_{0,\mathbf{j}} \to \mathbf{X}_{1,\mathbf{j}})$, i $\mathbf{E}_{1,\mathbf{j}} = \operatorname{hofib}(\mathbf{X}_{1,\mathbf{j}} \to \mathbf{X}_{1,\mathbf{j}})$. Així, $\mathbf{s}_{\square_n^+}\mathbf{X}^+ \simeq \mathbf{s}_{\square_{n-1}^+}\mathbf{E}_{0,-}^+$.

Per inducció i pel lema 2.2.5,

$$\mathbf{s}_{\square_{n-1}^+}\mathbf{E}_{0,-}^+ \simeq \operatorname{hofib}(\mathbf{E}_0 \to \operatorname*{holim}_{\square_{n-1}} \mathbf{E}_{0,-}) \simeq \operatorname{hofib}(\mathbf{E}_0 \to \operatorname*{holim}_{\square_n} \mathbf{E}).$$

Per acabar n'hi ha prou amb veure que $\operatorname{hofib}(\mathbf{X}_0 \to \operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{X})$ és feblement equivalent a $\operatorname{hofib}(\mathbf{E}_0 \to \operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{E})$.

Amb aquest objectiu, definim $\mathbf{Y}^+ : \square_n^+ \to \mathcal{M}_f$ per $\mathbf{Y}_{0,\mathbf{j}} = \mathbf{Y}_{1,\mathbf{j}} = \mathbf{X}_{1,\mathbf{j}}$, on $\mathbf{j} \in \square_{n-1}^+$. Considerem el functor $f : \square_n \to 1 \times \square_{n-1}^+$ definit per $(i, \mathbf{j}) \mapsto (1, \mathbf{j})$. Pel lema 2.2.6 aquest functor és homotòpicament cofinal per l'esquerra. Com que $\square_{n-1}^+$ té un objecte inicial i per cofinalitat tenim que:

$$\mathbf{X}_{1,0,\ldots,0} \xrightarrow{\simeq} \operatorname*{holim}_{\square_{n-1}^+} \mathbf{X}_{1,-}^+ \xrightarrow{\simeq} \operatorname*{holim}_{\square_n} f^*(\mathbf{X}_{1,-}^+) = \operatorname*{holim}_{\square_n} \mathbf{Y}.$$

Si calculem el simple del diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{X_0} \arrow[r] \arrow[d, "\beta"'] & \mathbf{Y_0} = \mathbf{X}_{1,0,\ldots,0} \arrow[d, "\gamma"', "\simeq"] \\
\operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{X} \arrow[r] & \operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{Y}
\end{tikzcd}$$

per files obtenim $\operatorname{hofib}(\mathbf{E_0} \to \operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{E})$. Si calculem el seu simple per columnes obtenim la fibra homotòpica de la primera columna, $\operatorname{hofib}(\mathbf{X_0} \to \operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{X})$, ja que la fibra homotòpica de la segona columna és trivial pel criteri d'aciclicitat. □

2.2.8 Proposició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial que satisfà el criteri d'aciclicitat per l'esquerra. Sigui $\mathbf{X}^+$ un $\Box_n^+$-codiagrama d'objectes fibrants. Aleshores $\mathbf{X}^+$ és acíclic per l'esquerra si i només si el morfisme natural $\mathbf{X}_0 \to \mathrm{holim}_{\Box_n} \mathbf{X}$ és una equivalència feble.*

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix de la proposició anterior i el criteri d'aciclicitat. $\Box$

2.2.4 Categories de models i descens

En aquesta secció establim el teorema principal d'aquest capítol (teorema 2.2.12), pel qual les categories de models simplicials que satisfan el criteri d'aciclicitat són de descens.

Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial i $\mathcal{M}_f$ la subcategoria d'objectes fibrants. Sigui $\mathbf{s}$ el functor simple definit pel límit homotòpic (vegeu les seccions 2.2.1 i 2.2.3):

$$\mathbf{s} : \mathit{Codiag}_\Pi \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}.$$

2.2.9 Definició *Donats $\Box, \Box' \in \Pi$, la transformació natural de functors*

$$\mu_{\Box,\Box'} : \mathbf{s}_\Box \circ \mathbf{s}_{\Box'} \to \mathbf{s}_{\Box\times\Box'}$$

és la definida per la propietat de Fubini del límit homotòpic (proposició 1.3.5).

2.2.10 Lema *Donat $\mathbf{X}$ un $\Box\times\Box'$-codiagrama de $\mathcal{M}$, la transformació natural $\mu_{\Box,\Box'}$ és tal que el morfisme*

$$\mu_{\Box,\Box'}(\mathbf{X}) : \mathbf{s}_\Box \circ \mathbf{s}_{\Box'}(\mathbf{X}) \to \mathbf{s}_{\Box\times\Box'}(\mathbf{X})$$

és un isomorfisme. Aquesta transformació natural és a més natural en $(\Box, \Box')$.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix de la propietat de Fubini del límit homotòpic (proposició 1.3.5). $\Box$

2.2.11 Definició *Donat $\Box$ un tipus de diagrama cúbic i X un objecte de $\mathcal{M}$, el morfisme*

$$\lambda_\Box(X) : X \to F(B(\Box), X)$$

és la composició de l'isomorfisme $X \cong F(\Delta[0], X)$ (lema 1.2.15) i el morfisme induït pel morfisme de conjunts simplicials $B(\Box) \to \Delta[0]$.

2.2.12 Teorema *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial que satisfà el criteri d'aciclicitat per l'esquerra i amb l'objecte inicial 0 fibrant. Aleshores la categoria $\mathcal{M}_f$ d'objectes fibrants, amb la classe E de les equivalències febles, el functor simple* $\mathbf{s}$ *definit pel límit homotòpic i μ i λ definits més amunt, és una categoria de descens cohomològic.*

DEMOSTRACIÓ: Vegeu $(\mathrm{CD1})^{op}$ a $(\mathrm{CD8})^{op}$ més avall. $\square$

Fixem $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial amb l'objecte inicial 0 fibrant, i considerem $\mathcal{M}_f$ la categoria d'objectes fibrants.

2.2.13 (CD1)^{op} *$\mathcal{M}_f$ és una categoria cartesiana amb objecte inicial.*

DEMOSTRACIÓ: Recordem que una categoria és cartesiana si té tots els productes finits i $\mathcal{M}_f$ els té, ja que el producte d'objectes fibrants és fibrant. $\square$

2.2.14 (CD2)^{op} *La classe d'equivalències febles és una classe saturada de morfismes, estable per productes: si $f : X \to X'$ i $g : Y \to Y'$ són equivalències febles, aleshores $f \times g : X \times Y \to X' \times Y'$ és una equivalència feble.*

DEMOSTRACIÓ: En tota categoria de models, la classe de les equivalències febles és saturada [40, 8.3.10].

Quant a l'estabilitat per productes: obtenim $X \times Y$ com a límit homotòpic d'un diagrama discret i usem $(\mathrm{CD5})^{op}$. $\square$

2.2.15 (CD3)^{op} $\mathbf{s} : Codiag_{\Pi}\mathcal{M}_f \to \mathcal{M}_f$ *és un functor covariant tal que si $\delta : \square \to \square'$ és un morfisme de Π i $\mathbf{X}$ és un $\square$-codiagrama de $\mathcal{M}_f$, el morfisme $\mathbf{s}_{\square'}\delta_*\mathbf{X} \to \mathbf{s}_{\square}\mathbf{X}$ és una equivalència feble.*

DEMOSTRACIÓ: El functor $\mathbf{s}$ l'hem definit en la secció 2.2.1.

Recordem que la imatge directa $\delta_*\mathbf{X}$ és un $\square'$-codiagrama definit per

$$(\delta_*\mathbf{X})_\beta = \begin{cases} \mathbf{X}_\alpha & \text{si } \beta = \delta(\alpha), \alpha \in \square \\ 1 & \text{si } \beta \in \square' \backslash \delta(\square) \end{cases}$$

Veurem ara que el morfisme $\mathbf{s}_{\square'}\delta_*\mathbf{X} \to \mathbf{s}_{\square}\mathbf{X}$ és de fet un isomorfisme.

Podem suposar que $\square = \square_S = \square_{S_1} \times \cdots \times \square_{S_s}$ i $\square' = \square_T = \square_{T_1} \times \cdots \times \square_{T_t}$ amb $t \geq s$, i que el morfisme δ ve induït per inclusions $S_i \subset T_i$ i constants $\gamma_{s+1} \in T_{s+1}, \ldots, \gamma_t \in T_t$.

El morfisme δ indueix un subdiagrama $\delta(\Box_S)$ en $\Box_T$ tal que els seus elements no reben cap fletxa de fora del subdiagrama. Per tant $\delta_*\mathbf{X}$ conté com a subdiagrama tots els vèrtexs de $\mathbf{X}$ i tots els seus morfismes, però de manera que aquests vèrtexs no reben morfismes de fora del subdiagrama i per a $\alpha \in \Box_S$ tenim que

$$B(\Box_T \downarrow \delta(\alpha)) = B(\Box_S \downarrow \alpha).$$

Tota la resta de morfismes de $\delta_*\mathbf{X}$ van a vèrtexs que són l'objecte final 1.

És clar aleshores que hi ha un isomorfisme entre $\mathbf{s}_{\Box_T}\delta_*\mathbf{X}$ i $\mathbf{s}_{\Box_S}\mathbf{X}$. $\Box$

2.2.16 (CD4)^{op} *Per tot objecte $\Box$ de Π, el functor $\mathbf{s}_\Box : (\Box, \mathcal{M}_f) \to \mathcal{M}_f$ és opmonoïdal i quasifort.*

DEMOSTRACIÓ: De fet provem que $\mathbf{s}_\Box$ és un functor opmonoïdal fort. Tenim definit el morfisme de Künneth $\sigma = \sigma_\Box(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) : \mathbf{s}_\Box(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \to \mathbf{s}_\Box\mathbf{X} \times \mathbf{s}_\Box\mathbf{Y}$, que en aquest cas és un isomorfisme ja que holim preserva límits (proposició 1.3.16):

$$\mathbf{s}_\Box(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) = \mathrm{holim}(\mathbf{X} \times \mathbf{Y}) \cong \mathrm{holim}(\mathbf{X}) \times \mathrm{holim}(\mathbf{Y}) = \mathbf{s}_\Box(\mathbf{X}) \times \mathbf{s}_\Box(\mathbf{Y})$$

Observem que σ és natural en $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.

El morfisme d'unitats $\sigma^1_\Box : \mathbf{s}_\Box(1 \times \Box) \to 1$ és clar que és un isomorfisme: la realització d'un diagrama constant en l'objecte final 1 és de la forma F(K,1)=1 (vegeu els lemes 1.3.4 i 1.2.15).

Finalment, és clar que σ i σ^1 compleixen les restriccions d'associativitat i d'unitat de manera que $\mathbf{s}_\Box$ és un functor opmonoïdal. $\Box$

2.2.17 (CD5)^{op} *Si $f : \mathbf{X} \to \mathbf{Y}$ és un morfisme de $\Box$-codiagrames de $\mathcal{M}_f$ tal que per tot $\alpha \in \Box$, f_α és una equivalència feble, aleshores $\mathbf{s}_\Box f : \mathbf{s}_\Box\mathbf{X} \to \mathbf{s}_\Box\mathbf{Y}$ és una equivalència feble d'objectes fibrants.*

DEMOSTRACIÓ: Aquesta és exactament la propietat d'invariància homotòpica del límit homotòpic (proposició 1.3.8). $\Box$

2.2.18 (CD6)^{op} $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : \Pi^{op} \to \mathit{Coreal}_\Pi\mathcal{M}_f$, $\Box \mapsto (\mathbf{s}_\Box : (\Box, \mathcal{M}_f) \to \mathcal{M}_f)$, *és un functor monoïdal quasifort.*

DEMOSTRACIÓ: De fet provem que $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0)$ és un functor monoïdal fort.

Recordem de l'observació 2.1.5 l'estructura de categoria monoïdal de $Coreal_{\Pi}\mathcal{M}_f$, on l'objecte unitat és el functor d'avaluació $Av : (\square_0, \mathcal{M}_f) \to \mathcal{M}_f$.

Un functor monoïdal $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : (\Pi^{op}, \times, \square_0) \to (Coreal_{\Pi}\mathcal{M}_f, \circ, Av)$ ve donat per

(i) un functor $\mathbf{s} : \Pi^{op} \to Coreal_{\Pi}\mathcal{M}_f$,

(ii) per tota parella $(\square, \square')$ de Π, un morfisme de $Coreal_{\Pi}\mathcal{M}_f$ (i.e. una transformació natural de functors)

$$\mu_{\square,\square'} : \mathbf{s}_{\square} \circ \mathbf{s}_{\square'} \longrightarrow \mathbf{s}_{\square\times\square'}$$

natural en $(\square, \square')$, i

(iii) un morfisme de $Coreal_{\Pi}\mathcal{M}_f$

$$\lambda_0 : Av \to \mathbf{s}_{\square_0}$$

compatibles amb les restriccions d'associativitat i d'unitat.

El functor és fort si a més μ i λ_0 són isomorfismes.

Si $X \in \mathcal{M}_f$ el considerem com a un $\square_0$-diagrama, $\mathbf{s}_{\square_0}X = F(*, X) \cong X$ (lema 1.2.15) i $Av(X) = X$. És clar que tenim definida $\lambda_0 : Av \to \mathbf{s}_{\square_0}$ una transformació natural de functors tal que $\lambda_0(X)$ és un isomorfisme.

Veiem que μ compleix la restricció d'associativitat: per qualssevol objectes $\square, \square'$ i $\square''$ de Π, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{s}_{\square} \circ \mathbf{s}_{\square'}) \circ \mathbf{s}_{\square''} \arrow[r, "\mu_{\square,\square'}\circ 1_{\mathbf{s}_{\square''}}"] \arrow[d, "a_{\mathbf{s}_{\square},\mathbf{s}_{\square'},\mathbf{s}_{\square''}}"'] & \mathbf{s}_{\square\times\square'} \circ \mathbf{s}_{\square''} \arrow[r, "\mu_{\square\times\square',\square''}"] & \mathbf{s}_{(\square\times\square')\times\square''} \\
\mathbf{s}_{\square} \circ (\mathbf{s}_{\square'} \circ \mathbf{s}_{\square''}) \arrow[r, "1_{\mathbf{s}_{\square}}\circ\mu_{\square',\square''}"] & \mathbf{s}_{\square} \circ \mathbf{s}_{\square'\times\square''} \arrow[r, "\mu_{\square,\square'\times\square''}"] & \mathbf{s}_{\square\times(\square'\times\square'')} \arrow[u, "\mathbf{s}(a_{\square,\square',\square''})"']
\end{tikzcd}$$

commuta (on tots els morfismes són de fet isomorfismes).

Veiem també que λ_0 compleix la restricció d'unitat: per qualsevol $\square \in \Pi$, els diagrames

$$\begin{tikzcd}
Av \circ \mathbf{s}_{\square} \arrow[r, "l_{\mathbf{s}_{\square}}"] \arrow[d, "\lambda_{\square_0}\circ 1_{\mathbf{s}_{\square}}"'] & \mathbf{s}_{\square} \arrow[d, "\mathbf{s}(l_{\square})"] \\
\mathbf{s}_{\square_0} \circ \mathbf{s}_{\square} \arrow[r, "\mu_{\square_0,\square}"] & \mathbf{s}_{\square_0\times\square}
\end{tikzcd}
\quad \text{i} \quad
\begin{tikzcd}
\mathbf{s}_{\square} \circ Av \arrow[r, "r_{\mathbf{s}_{\square}}"] \arrow[d, "1_{\mathbf{s}_{\square}}\circ\lambda_{\square_0}"'] & \mathbf{s}_{\square} \arrow[d, "\mathbf{s}(r_{\square})"] \\
\mathbf{s}_{\square} \circ \mathbf{s}_{\square_0} \arrow[r, "\mu_{\square,\square_0}"] & \mathbf{s}_{\square\times\square_0}
\end{tikzcd}$$

commuten.

Tenim doncs definit un functor monoïdal estricte $(\mathbf{s}, \mu, \lambda_0) : \Pi^{op} \to Coreal_{\Pi}\mathcal{M}_f$. $\square$

Donat $\square \in \Pi$, $\mathbf{s}_{\square}(X \times \square) = F(B(\square), X)$ (vegeu el lema 1.3.4).

2.2.19 (CD7)^{op} *Per tot $\square \in \Pi$, $\lambda_{\square} : id_{\mathcal{M}_f} \to \mathbf{s}_{\square} \circ i_{\square}$ és una transformació natural de functors, natural en $\square \in \Pi$, compatible amb μ i $\lambda_{\square_0} = \lambda_0$.*

DEMOSTRACIÓ:

La naturalitat de λ en $\square$ és clara: per a tot morfisme $\square_S \to \square_T$ de Π, el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "id"] \arrow[d, "\lambda_{\square_S}(X)"] & X \arrow[d, "\lambda_{\square_T}(X)"] \\
\mathbf{s}_{\square_T}(i_{\square}X) = F(B\square_T, X) \arrow[r] & \mathbf{s}_{\square_S}(i_{\square}X) = F(B\square_S, X)
\end{tikzcd}$$

commuta.

També és clar que λ és natural en X: si $X \to Y$ és un morfisme de $\mathcal{M}_f$,

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "\lambda_{\square}(X)"] & Y \arrow[d, "\lambda_{\square}(Y)"] \\
F(B\square, X) \arrow[r] & F(B\square, Y)
\end{tikzcd}$$

commuta.

Veiem que $\lambda_{\square}$ és compatible amb μ: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
id_{\mathcal{M}_f} \arrow[r, "\lambda_{\square} \circ \lambda_{\square'}"] \arrow[dr, "\lambda_{\square \times \square'}"'] & (\mathbf{s}_{\square} \circ i_{\square}) \circ (\mathbf{s}_{\square'} \circ i_{\square'}) \arrow[d, "\mu"] \\
 & \mathbf{s}_{\square \times \square'} \circ i_{\square \times \square'}
\end{tikzcd}$$

commuta. Finalment, $\lambda_{\square_0}$ i λ_0 s'han definit igual. $\square$

2.2.20 (CD8)^{op} *Suposem que el criteri d'aciclicitat se satisfà en $\mathcal{M}_f$. Per tot diagrama $\mathbf{X} : \square_S \to \mathcal{M}_f$, on S és un conjunt finit no buit i tota augmentació $\varepsilon : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{X}$, el morfisme $\lambda_{\varepsilon} := \mathbf{s}_{\square}(\varepsilon) \circ \lambda_{\square}(\mathbf{X}_0) : \mathbf{X}_0 \to \mathbf{s}_{\square}\mathbf{X}$ és una equivalència feble si i només si el morfisme canònic $0 \to \mathbf{s}_{\square^+}\mathbf{X}^+$ és una equivalència feble.*

DEMOSTRACIÓ: Aquest resultat és de fet la proposició 2.2.8. $\square$

2.2.21 Remarca Observem que la hipòtesi que $\mathcal{M}$ satisfà el criteri d'aciclicitat només s'utilitza en la demostració de $(\mathrm{CD8})^{op}$.

2.2.22 Remarca Modificant la definició del functor simple, de manera que apliqui un reemplaçament fibrant functorial abans del límit homotòpic, hauria de ser possible estendre el teorema 2.2.12 a tota la categoria de models $\mathcal{M}$.

2.2.5 Resultat dual

Podem dualitzar els resultats anteriors. En aquesta secció enunciem el teorema dual al teorema 2.2.12, així com les definicions duals que hi intervenen.

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria petita i $\mathcal{M}$ una categoria. Un *diagrama de tipus* $\mathcal{C}$ o $\mathcal{C}$*-diagrama* és un functor $\mathcal{C}^{op} \to \mathcal{M}$.

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria petita i α un element de $\mathcal{C}$. Aleshores hi ha un isomorfisme natural de categories

$$(\mathcal{C}^{op} \downarrow \alpha) \cong (\alpha \downarrow \mathcal{C})^{op}.$$

2.2.23 Definició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial i $\mathcal{C}$ una categoria petita. Si $\mathbf{X}$ és un $\mathcal{C}$-diagrama, el* colímit homotòpic $\operatorname{hocolim} \mathbf{X}$ *és el coequalitzador els morfismes*

$$\coprod_{(\sigma:\alpha\to\alpha')\in\mathcal{C}^{op}} \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha') \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightrightarrows}} \coprod_{\alpha\in Ob(\mathcal{C})} \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$$

on el morfisme ϕ en el sumand $\sigma : \alpha \to \alpha'$ és la composició del morfisme

$$\sigma_* \otimes 1_{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)} : \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha') \to \mathbf{X}_{\alpha'} \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha')$$

amb la injecció natural en el coproducte, i el morfisme ψ en el sumand $\sigma : \alpha \to \alpha'$ és la composició del morfisme

$$1_{\mathbf{X}_\alpha} \otimes B(\sigma_*) : \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha') \to \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$$

(on $\sigma_* : B(\mathcal{C}\downarrow\alpha') \to B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$ amb la injecció natural en el coproducte.

Si $\mathbf{X}$ és un $\mathcal{C}$-diagrama constant (i.e. $\mathbf{X}_\alpha = X$ per tot α i tots els morfismes són la identitat) aleshores hi ha un isomorfisme

$$\operatorname{hocolim} \mathbf{X} \cong X \otimes B\mathcal{C}.$$

El colímit homotòpic d'un $\mathcal{C}$-diagrama de $\mathcal{M}$ és el *coend* del functor $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{M}$, $(\alpha, \alpha') \mapsto \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)$. S'escriu

$$\operatorname{hocolim} \mathbf{X} = \int^{\alpha} \mathbf{X}_\alpha \otimes B(\mathcal{C}\downarrow\alpha).$$

Així com les bones propietats del límit homotòpic es tenen per als objectes fibrants, les bones propietats del colímit homotòpic es tenen per als objectes cofibrants.

2.2.24 Definició *La cofibra homotòpica d'un morfisme $f : X \to Y$ en una categoria de models simplicial $\mathcal{M}$ és*

$$\operatorname{hocofib} f = \operatorname{hocolim}(1 \leftarrow X \to Y).$$

2.2.25 Definició (Criteri d'aciclicitat per la dreta) *Una categoria de models simplicial $\mathcal{M}$ satisfà el* criteri d'aciclicitat per la dreta *si un morfisme $f : X \to Y$ amb X i Y cofibrants és una equivalència feble si, i només si, la cofibra homotòpica* $\operatorname{hocofib} f$ *és acíclica per la dreta.*

El functor *simple*

$$\mathbf{s} : Diag_\Pi \mathcal{M} \to \mathcal{M}$$

associa a un $\square$-diagrama $\mathbf{X}$ l'objecte definit pel colímit homotòpic:

$$\mathbf{s}_\square(\mathbf{X}) = \operatorname{hocolim} \mathbf{X}.$$

Si tenim $(X, \square) \to (Y, \square')$ un morfisme en $Diag_\Pi \mathcal{M}$ donat per $\delta : \square \to \square'$ i $a : X \to \delta^* Y$, les propietats functorials del colímit homotòpic ens permeten definir la composició

$$\mathbf{s}_\square X = \operatorname*{hocolim}_{\square} X \to \operatorname*{hocolim}_{\square} \delta^* Y \to \operatorname*{hocolim}_{\square'} Y = \mathbf{s}_{\square'} Y.$$

Per la propietat de Fubini del colímit homotòpic, donats $\square, \square' \in \Pi$, tenim una transformació natural de functors

$$\mu_{\square,\square'} : \mathbf{s}_{\square\times\square'} \to \mathbf{s}_\square \circ \mathbf{s}_{\square'}$$

tal que $\mu_{\square,\square'}(\mathbf{X}) : \mathbf{s}_{\square\times\square'}(\mathbf{X}) \to \mathbf{s}_\square \circ \mathbf{s}_{\square'}(\mathbf{X})$ és un isomorfisme per tot $\square\times\square'$-diagrama $\mathbf{X}$.

El morfisme $\lambda_{\square_S}(X) : X \otimes B(\square_S) \to X$ és la composició del morfisme induït pel morfisme de conjunts simplicials $B(\square_S) \to \Delta[0]$ i l'isomorfisme $X \otimes \Delta[0] \cong X$ (lema 1.2.15).

Amb aquestes definicions, dualitzant la demostració del teorema 2.2.12 obtenim:

2.2.26 Teorema *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial que satisfà el criteri d'aciclicitat per la dreta i amb l'objecte final 1 cofibrant. Aleshores la categoria $\mathcal{M}_c$ d'objectes cofibrants, amb la classe E de les equivalències febles, el functor simple* $\mathbf{s}$ *definit pel colímit homotòpic i μ i λ definits més amunt, és una categoria de descens homològic.*

2.2.6 Categories de descens que són de models

Guillén i Navarro observen [32, 1.5.4] que si una categoria de descens verifica unes hipòtesis addicionals (CD3b) i (CD4b) (vegeu més avall els seus duals), aleshores el functor simple es pot escriure com a *end* a partir del simple dels diagrames constants.

A partir d'aquest resultat provem que si una categoria és de descens i de models simplicial i verifica els duals de (CD3b) i (CD4b) aleshores per a que el simple coincideixi amb el límit homotòpic n'hi ha prou amb que hi coincideixi per als codiagrames constants.

2.2.27 Proposició *Suposem que $(\mathcal{D}, E, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$ és una categoria de descens que a més verifica*

(CD3b)^{op} Per tot morfisme $\delta : \Box \to \Box'$ de Π i tot $\Box$-codiagrama X, el morfisme $\mathbf{s}'_{\Box}\delta_* X \to \mathbf{s}_{\Box} X$ és un isomorfisme, i

(CD4b)^{op} $\mathbf{s}$ commuta amb els límits finits.

Si $\mathcal{D}$ té una estructura de categoria de models simplicial i donat X un objecte de $\mathcal{D}$ es compleix que el simple del codiagrama constant s'obté segons

$$\mathbf{s}_{\Box_S}(X \times \Box_S) = F(B(\Box_S), X),$$

aleshores per a qualsevol $\Box$-codiagrama $\mathbf{X}$ hi ha un isomorfisme

$$\mathbf{s}_{\Box}(\mathbf{X}) \cong \operatorname{holim} \mathbf{X}.$$

Demostració: Pel dual de [32, 1.5.4] hi ha un isomorfisme natural

$$\mathbf{s}_{\Box}(\mathbf{X}) \cong \int_\alpha \mathbf{s}(\Box_\alpha \times \mathbf{X}_\alpha).$$

Per hipòtesi, i donat que hi ha un isomorfisme de categories $B(\Box{\downarrow}\alpha) \cong B(\Box_\alpha)$,

$$\mathbf{s}_{\Box}(\mathbf{X}) \cong \int_\alpha F(B(\Box_\alpha), \mathbf{X}_\alpha) \cong \int_\alpha F(B(\Box{\downarrow}\alpha), \mathbf{X}_\alpha),$$

i aquesta darrera és l'expressió com a *end* de $\operatorname{holim} \mathbf{X}$. $\Box$

2.2.7 Criteri de transferència

Guillén i Navarro donen un criteri de transferència [32, 1.5.12] que permet provar que una categoria és de descens quan els quasiisomorfismes s'obtenen per aixecament dels quasiisomorfismes d'una categoria de descens coneguda.

2.2.28 Proposició *Sigui $\mathcal{M}_f$ la categoria d'objectes fibrants d'una categoria de models simplicial i* $\mathbf{s}$*, μ i λ definits més amunt i D' una categoria de descens cohomològic tals que hi ha un functor covariant*

$$\psi : \mathcal{M}_f \to \mathcal{D}'$$

tal que

(FD1)^{op} ψ és un functor opmonoïdal quasifort respecte el producte, és a dir, $\psi(1) \sim 1$ i per tota parella (X, Y) d'objectes de $\mathcal{M}$ el morfisme natural $\sigma_\psi(X, Y) : \psi(X \times Y) \to \psi(X) \times \psi(Y)$ és un quasiisomorfisme;

(FD2)^{op} existeix un isomorfisme monoïdal de functors monoïdals

$$\theta : \psi \circ \mathbf{s} \to \mathbf{s} \circ \psi : \mathit{Codiag}_\Pi \mathcal{M}_f \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}',$$

és a dir, per tot $\square$-codiagrama X de $\mathcal{D}$, existeix un isomorfisme de $\mathrm{Ho}\mathcal{D}'$

$$\theta(X) : \psi \mathbf{s}_\square(X) \to \mathbf{s}_\square \psi(X),$$

que és natural en X i compatible amb el producte i els morfismes μ i λ.

Aleshores si E és la classe de morfismes f de $\mathcal{M}$ tals que $\psi(f)$ és un quasiisomorfisme de D', $(\mathcal{M}_f, E, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$ és una categoria de descens cohomològic.

DEMOSTRACIÓ: S'obté del dual de [32, 1.5.12]. □

2.3 Exemples

El resultat que necessitem en els capítols següents és que la categoria d'espectres fibrants, en el sentit de Bousfield i Friedlander [5], és una categoria de descens cohomològic amb el límit homotòpic.

Primer de tot (secció 2.3.1) tractem les categories de models simplicials estables i provem que donen categories de descens cohomològic i homològic. Com a cas particular hi ha la categoria d'espectres de conjunts simplicials, que tractem separadament en la secció 2.3.2. En la secció 2.3.3 tractem els espais topològics i els conjunts simplicials i demostrem que donen categories de descens homològic prenent com a classe saturada de morfismes les equivalències en una teoria d'homologia. Els complexos de cocadenes de R-mòduls els tractem en la secció 2.3.5. El fet que les estructures de categories de models de què disposen no siguin simplicials sinó quasisimplicials ens obliga a tractar el límit homotòpic en una categoria de models quasisimplicial just abans (secció 2.3.4).

En [32] es dóna estructura de categoria de descens a la categories de les àlgebres diferencials graduades commutatives sobre un cos k de característica zero i a la categoria de complexos de cocadenes en una categoria additiva. Nosaltres no hem tractat aquestes categories.

2.3.1 Categories de models estables

En aquesta secció provem que les categories de models simplicials estables compleixen el criteri d'aciclicitat per la dreta i per l'esquerra i per tant són de descens homològic i cohomològic.

2.3.1.1 Suspensió i llaços en la categoria homotòpica

Recordem que la categoria homotòpica d'una categoria de models puntejada, no necessàriament simplicial, té un *functor de suspensió* Σ amb un *functor de llaços* adjunt per la dreta Ω [41, 6.1.1] [65, I.2].

Si partim d'una categoria de models simplicial, els functors de suspensió i de llaços en la categoria homotòpica provenen de functors en la categoria de models. Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial puntejada. La *suspensió* ΣX d'un objecte X és el *pushout*

$$\begin{tikzcd} X \otimes \partial\Delta^1 \arrow[r] \arrow[d] & X \otimes \Delta^1 \\ * & \end{tikzcd}$$

i l'objecte *llaços* ΩX és el *pullback*

$$\begin{tikzcd} & F(\Delta^1, X) \arrow[d] \\ * \arrow[r] & F(\partial\Delta^1, X) \end{tikzcd}$$

Si X és cofibrant, ΣX és un model per a la suspensió de X en la categoria homotòpica. Si Y és fibrant, ΩY és un model per a l'objecte llaços en la categoria homotòpica [69, p.85].

2.3.1.2 Categories de models estables

2.3.1 Definició [70] *Una* categoria de models estable *és una categoria de models puntejada on els functors* Ω *i* Σ *en la categoria homotòpica són equivalències inverses.*

La categoria homotòpica d'una categoria de models estable és triangulada [41, 7.1.6]. Les successions de cofibració i de fibració de [41, 6.2.6] (vegeu també [65, 1.3]) coincideixen llevat signe [41, 7.1.11] i defineixen els triangles distingits.

Donada $f : X \to Y$ una fibració d'objectes fibrants amb fibra $i : F \to X$, hi ha una successió de fibració en la categoria homotòpica, $F \to X \to Y$ amb una certa acció de ΩY en F [41, teorema 6.2.1].

Recordem que una categoria de models és *pròpia* si es complexen les següents condicions:

1) tot *pushout* d'una equivalència feble a través d'una cofibració és una equivalència feble.

2) tot *pullback* d'una equivalència feble a través d'una fibració és una equivalència feble.

2.3.2 Lema *Sigui* $\mathcal{M}$ *una categoria de models simplicial estable i pròpia. Donat un morfisme entre objectes fibrants* $f : X \to Y$*, hi ha una successió de fibració* $W \to X \to Y$ *amb* W *equivalent a la fibra homotòpica.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui $X \to X' \to Y$ una factorització de F com a una cofibració trivial seguida d'una fibració i W la fibra de $X' \to Y$. Aleshores hi ha una successió de fibració $W \to X \to Y$ (vegeu la prova de [41, Lemma 6.3.3]).

Com que $\mathcal{M}$ és pròpia, per [40, 13.4.4], la fibra W és naturalment feblement equivalent al *pullback* homotòpic de $(X \to Y \leftarrow *)$. Com que X i Y són fibrants i $\mathcal{M}$ és pròpia, per [40, 19.5.3] el *pullback* homotòpic de $(X \to Y \leftarrow *)$ és naturalment feblement equivalent al límit homotòpic de $(X \to Y \leftarrow *)$, i.e. a la fibra homotòpica de f. $\square$

2.3.3 Proposició (Criteri d'aciclicitat per l'esquerra) *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial estable i pròpia. Un morfisme $f : X \to Y$ amb X i Y fibrants és una equivalència feble si i només si la fibra homotòpica* $\operatorname{hofib} f$ *és acíclica.*

Demostració: Per saturació i passant a la categoria homotòpica, el resultat es dedueix el lema anterior i de la següent propietat de les categories triangulades: Si

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \to \Sigma X$$

és un triangle distingit en una categoria triangulada, aleshores g és un isomorfisme si i només si $X \cong 0$. □

El criteri d'aciclicitat per la dreta també es compleix, on cal substituir la fibra homotòpica per la cofibra homotòpica.

Deduïm per tant del teorema 2.2.12 i del seu dual (teorema 2.2.26) el següent.

2.3.4 Teorema *La categoria d'objectes fibrants d'una categoria de models simplicial estable i pròpia és de descens cohomològic amb el límit homotòpic com a functor simple i amb les equivalències febles com a classe saturada de morfismes.*

Dualment, la categoria d'objectes cofibrants d'una categoria de models simplicial estable i pròpia és de descens homològic amb el colímit homotòpic com a functor simple i amb les equivalències febles com a classe saturada de morfismes.

2.3.5 Remarca En la secció següent tractem específicament la categoria d'espectres, que és una categoria de models simplicial estable. En [70] trobem d'altres exemples de categories de models simplicials estables d'interès, incloent mòduls sobre espectres anell (*ring spectra*), prefeixos d'espectres, i categories d'espectres relacionades amb la teoria d'homotopia estable equivariant i l'homotopia motívica estable d'esquemes.

2.3.2 Espectres

En aquesta secció recordem la definició de la categoria d'espectres de Bousfield-Friedlander [5] [71, secció 5] [22, X.4] i la seva estructura de categoria de models estable.

Donat X un conjunt simplicial puntejat, el functor de suspensió es defineix $\Sigma X = S^1 \wedge X$ i el functor de llaços es defineix $\Omega X = F(S^1, X)$.

2.3.2.1 Definició, equivalències febles, cofibracions i fibracions

2.3.6 Definició *Un* espectre E *és una successió de conjunts simplicials puntejats* E_k *per* $k \geq 0$ *juntament amb uns* morfismes estructurals

$$\sigma : \Sigma E_k \to E_{k+1}.$$

Un morfisme d'espectres $f : E \to F$ *és una successió de morfismes tals que els diagrames*

$$\begin{tikzcd} \Sigma E_k \arrow[r, "\Sigma f_k"] \arrow[d] & \Sigma F_k \arrow[d] \\ E_{k+1} \arrow[r, "f_{k+1}"] & F_{k+1} \end{tikzcd}$$

commuten per tot k.

2.3.7 Remarca Els morfismes estructurals es poden descriure també pels seus adjunts $\tilde{\sigma} : E_k \to \Omega E_{k+1}$.

2.3.8 Definició *Un* espectre fibrant *és un espectre tal que cada* E_n *és un conjunt simplicial fibrant i els morfismes estructurals* $E_n \to \Omega E_{n+1}$ *són equivalències febles. Notem per* **Sp** *la categoria d'espectres fibrants.*

Introduïm els grups d'homotopia dels espectres, amb els quals es defineixen les equivalències febles.

2.3.9 Definició *Els* grups d'homotopia *d'un espectre vénen donats per tot enter* k *com*

$$\pi_k X := \lim_n \pi_{k+n} X_n$$

on el límit directe és sobre el sistema de morfismes estructurals

$$\pi_{k+n} X_n \to \pi_{k+n} \Omega X_{n+1} \cong \pi_{k+n+1} X_{n+1}, n + k \geq 0$$

Observem que si X és un espectre fibrant,

$$\pi_k(X) = \pi_k(X_0) \text{ per } k \geq 0$$

i més generalment, també per a k negatiu,

$$\pi_k(X) = \pi_{k+n} X_n \text{ si } k + n \geq 0.$$

Observem també que, a diferència dels espais topològics o dels conjunts simplicials, en els espectres tenim definits grups d'homotopia per a tots els enters, inclosos els negatius.

2.3.10 Definició *Un morfisme d'espectres $f : X \to Y$ és una* equivalència feble *si indueix isomorfisme en els grups d'homotopia.*

Observem que un morfisme d'espectres fibrants és una equivalència feble si cada f_n és una equivalència feble de conjunts simplicials.

2.3.11 Definició *Un morfisme d'espectres $i : A \to B$ és una* cofibració *si es compleixen les següents condicions:*

1) *el morfisme $i : A^0 \to B^0$ és un monomorfisme de conjunts simplicials, i*

2) *els morfismes induïts*

$$S^1 \wedge B^n \cup_{S^1 \wedge A^n} A^{n+1} \to B^{n+1}$$

són monomorfismes de conjunts simplicials.

Definim les fibracions mitjançant la propietat d'aixecament per la dreta:

2.3.12 Definició *Un morfisme d'espectres $f : X \to Y$ és una* fibració *si té la propietat d'aixecament per la dreta respecte les cofibracions trivials.*

Els espectres que hem definit com a espectres fibrants són efectivament els que compleixen que el morfisme a l'espectre trivial és una fibració (vegeu [22, Remark X.4.16]).

2.3.2.2 Estructura simplicial en la categoria d'espectres

Si K és un conjunt simplicial puntejat i X un espectre, definim l'espectre $X \wedge K$ per $(X \wedge K)_n = X_n \wedge K$, amb morfismes estructurals

$$\Sigma(X_n \wedge K) \cong \Sigma X_n \wedge K \to X_{n+1} \wedge K.$$

Anàlogament definim l'espectre $F(K, Y)$ per $F(K, Y)_n = F(K, X_n)$ amb morfismes estructurals adjunts a

$$F(K, X_n) \to F(K, \Omega X_{n+1}) \cong \Omega F(K, X_{n+1}).$$

Si K i L són conjunts simplicials puntejats i X un espectre, hi ha un isomorfisme natural

$$F(K, F(L, X)) \cong F(K \wedge L, X).$$

Els functors de tensorització i cotensorització d'un espectre X per un conjunt simplicial K es defineixen $X \otimes K = X \wedge K^+$ i $F(K, X) = F(K^+, X)$.

2.3.13 Proposició *La categoria d'espectres, amb les cofibracions, equivalències febles i fibracions definides més amunt satisfà els axiomes d'una categoria de models simplicial pròpia.*

Demostració: En [22, X.4] i [69, 2.1] es comproven els axiomes de Quillen de categoria de models simplicial pròpia. Es comprova també que és una categoria completa i cocompleta. A més aquesta estructura de categoria de models és cofibrantment generada [48, lecture 3] [43, secció 2] i per tant existeixen factoritzacions functorials. □

La categoria homotòpica de la categoria d'espectres s'anomena *categoria d'homotopia estable.*

2.3.2.3 Successió exacta llarga de la fibra homotòpica

2.3.14 Lema *Sigui $f : X \to Y$ un morfisme d'espectres fibrants. Aleshores existeix una successió exacta llarga natural*

$$\cdots \to \pi_n Ff \to \pi_n X \to \pi_n Y \to \pi_{n-1} Ff \to \cdots .$$

Demostració: Es dedueix de la successió exacta llarga natural per al cas de conjunts simplicials [22, I, lemma 7.3]. □

A diferència dels espais topològics o dels conjunts simplicials, per als espectres també hi ha una successió exacta llarga per a la cofibra homotòpica d'un morfisme. Per al cas d'espectres d'espais topològics vegeu [55, 7.4].

2.3.2.4 Estabilitat

Amb aquesta estructura la categoria d'espectres és una categoria de models estable. Els functors de suspensió i de llaços són, respectivament, $X \wedge S^1$ i $F(S^1, X)$. Per veure que aquests functors defineixen equivalències en la categoria homotòpica cal introduir els functors de desplaçament i de suspensió fals.

2.3.15 Definició *Donat m un enter i X un espectre,* l'espectre desplaçat $X[m]$ *és l'espectre definit per* $X[m]^n = \begin{cases} * & \text{si } m+n<0 \\ X^{m+n} & \text{si } m+n \geq 0. \end{cases}$

2.3.16 Definició *Donat X un espectre,* l'espectre de suspensió fals *és l'espectre ΣX definit per*

$$\Sigma X^n = S^1 \wedge X^n$$

$$\sigma = S^1 \wedge \sigma : S^1 \wedge S^1 \wedge X^n \to S^1 \wedge X^{n+1}$$

Hi ha un morfisme natural $\Sigma X \to X[1]$, que és una equivalència feble:

2.3.17 Lema [46, lema 1.5] *El morfisme natural $\Sigma X \to X[1]$ és una equivalència feble.*

Els espectres $\Sigma X = S^1 \wedge X$ i $X \wedge S^1$ no són isomorfs, però sí que són equivalents en la categoria homotòpica:

2.3.18 Lema [46, lema 1.9] *Els espectres ΣX i $X \wedge S^1$ són naturalment isomorfs en la categoria homotòpica.*

2.3.19 Proposició *L'estructura de categoria de models de la categoria d'espectres és una estructura de categoria de models estable.*

DEMOSTRACIÓ: Pels lemes anteriors, el functor de suspensió i el functor de suspensió fals són equivalents en la categoria homotòpica a functors de desplaçament i per tant defineixen equivalències en la categoria homotòpica. □

Deduïm per tant del teorema 2.3.4 que la categoria d'espectres fibrants és de descens:

2.3.20 Teorema *La categoria* **Sp** *d'espectres fibrants té estructura de categoria de descens cohomològic amb el límit homotòpic com a functor simple i amb les equivalències febles com a classe saturada de morfismes.*

2.3.21 Remarca Els criteris d'aciclicitat per la dreta i per l'esquerra per a espectres es poden obtenir directament considerant les successions exactes llargues de grups d'homotopia de la fibra i de la cofibra homotòpica.

2.3.3 Conjunts simplicials i espais topològics

Guillén i Navarro demostren [32, 1.5.13] que la categoria **Top** dels espais topològics, amb la classe distingida dels morfismes que indueixen isomorfisme en homologia singular entera és una categoria de descens homològic. Defineixen el functor simple [32, 1.3.2] com un *coend* que és isomorf al colímit homotòpic.

En aquesta secció recuperem aquest exemple i, a més, obtenim el mateix resultat per a conjunts simplicials i espais topològics cofibrants amb h_*-equivalències respecte a una teoria d'homologia h_*.

Recordem que una teoria d'homologia generalitzada h_* definida en els parells d'espais topològics és un sistema de functors $h_q(X, A)$, $q \in \mathbb{Z}$, definits en la categoria homotòpica dels parells d'espais juntament amb transformacions naturals

$$\partial : h_q(X, A) \to h_{q-1}(A),$$

on $h_q(A)$ es defineix com $h_q(A, \emptyset)$, i que compleixen els axiomes d'exactitud, excisió, additivitat i d'equivalència feble (vegeu per exemple [58, Chapter 13]).

Sigui h_* una teoria d'homologia generalitzada definida en els parells d'espais topològics i que satisfà l'axioma del límit, en el sentit que preserva els colímits filtrats. La teoria h_* es transfereix als parells de conjunts simplicials (K, L) mitjançant la realització geomètrica: $h_*(K, L) = h_*(|K|, |L|)$.

Un morfisme $f : X \to Y$ de **Sset** o de **Top** és

i) una h_*-equivalència si h_*f és un isomorfisme,

ii) una h_*-cofibració si és una cofibració en **Sset** o en **Top**, i

iii) una h_*-fibració si té la propietat d'aixecament per la dreta respecte les h_*-cofibracions trivials.

2.3.22 Proposició *La categoria* **Sset** *té una estructura de categoria de models simplicial amb les h_*-equivalències, h_*-cofibracions i h_*-fibracions i amb l'estructura simplicial usual.*

Demostració: Bousfield demostra [4] que és una categoria de models, i Goerss i Jardine [22, X.Theorem 3.2] que és de models simplicial amb l'estructura simplicial usual. $\square$

Com que l'estructura simplicial no canvia, el colímit homotòpic en aquesta estructura simplicial és l'usual. Com que les cofibracions no canvien, tots els conjunts simplicials són h_*-cofibrants.

2.3.23 Proposició *La categoria* **Top** *té una estructura de categoria de models simplicial amb les h_*-equivalències, h_*-cofibracions i h_*-fibracions i amb l'estructura simplicial usual.*

DEMOSTRACIÓ: La localització de Bousfield també es pot fer en la categoria d'espais topològics (vegeu [14], [40, Chapter 2]). Quant a l'estructura simplicial, la part referent a l'estructura simplicial de la prova de [22, X.Theorem 3.2] es basa només en la successió de Mayer-Vietoris, i roman vàlida per a **Top**. □

Donat X un espai topològic, l'espai

$$CX = X \times I/X \times \{0\}$$

és el *con de* X. El con CX és contràctil.

Donat $f : X \to Y$ un morfisme d'espais topològics, el colímit homotòpic

$$Cf = \mathrm{hocolim}(* \leftarrow X \to Y)$$

és la cofibra homotòpica de f. La cofibra homotòpica també s'anomena *con del morfisme* f (*mapping cone*), i s'obté fent $Cf = Y \cup_f CX$, on CX és el con de X.

Donada h_* una teoria d'homologia generalitzada en els espais topològics, recordem que una equivalència feble indueix una h_*-equivalència. Per tant un espai topològic contràctil té la h_*-homologia d'un punt.

Demostrem a continuació el criteri d'aciclicitat per la dreta per als espais topològics i les h_*-equivalències.

2.3.24 Proposició *Sigui h_* una teoria d'homologia generalitzada. Aleshores un morfisme $f : X \to Y$ d'espais topològics és una h_*-equivalència si, i només si el con del morfisme és acíclic per la dreta, i.e. $Cf \to *$ és una h_*-equivalència.*

DEMOSTRACIÓ: Raonant com [24, 19.14], s'obté que per tot q hi ha un isomorfisme

$$h_q(f) : h_q(CX, X) \longrightarrow h_q(Cf, Y).$$

Les successions exactes dels parells (CX, X) i (Cf, Y) encaixen en una escala commutativa amb files exactes

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & h_q(X) \arrow[r] \arrow[d] & h_q(CX) \arrow[r] \arrow[d] & h_q(CX, X) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & h_{q-1}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots . \\
\cdots \arrow[r] & h_q(Y) \arrow[r] & h_q(Cf) \arrow[r] & h_q(Cf, Y) \arrow[r] & h_{q-1}(Y) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Pel lema dels cinc, tenim que $f : X \to Y$ és un h_*-equivalència si, i només si $CX \to Cf$ ho és. El con CX és contràctil i per tant $CX \to *$ és una h_*-equivalència.

Finalment, per 2 de 3, $CX \to Cf$ és un h_*-isomorfisme si, i només si, $Cf \to *$ ho és. $\square$

Donat K un conjunt simplicial i $f : K \to L$ un morfisme de conjunts simplicials definim el con CK i el con del morfisme Cf de manera anàloga al cas d'espais topològics. El functor de realització geomètrica

$$|\quad| : \mathbf{Sset} \longrightarrow \mathbf{Top}$$

és adjunt per l'esquerra al functor singular, i per tant preserva els colímits. En particular, donat $f : K \to L$ un morfisme de conjunts simplicials

$$|Cf| = |L \cup_f CK| = |L| \cup_{|f|} |CK| = |L| \cup_{|f|} C|K| = C|f|.$$

Això ens permet demostrar el criteri d'aciclicitat per als conjunts simplicials i les h_*-equivalències:

2.3.25 Proposició *Sigui h_* una teoria d'homologia generalitzada. Aleshores un morfisme $f : K \to L$ de conjunts simplicials és una h_*-equivalència si, i només si el con del morfisme és acíclic per la dreta, i.e. $Cf \to *$ és una h_*-equivalència.*

Apliquem ara el dual del teorema principal (teorema 2.2.26) i obtenim:

2.3.26 Proposició *Sigui h una teoria d'homologia generalitzada que satisfà l'axioma del límit. La categoria* **Sset** *amb el colímit homotòpic i les h_*-equivalències és una categoria de descens homològic.*

2.3.27 Proposició *Sigui h una teoria d'homologia generalitzada que satisfà l'axioma del límit. La categoria dels espais topològics cofibrants amb el colímit homotòpic i les h_*-equivalències és una categoria de descens homològic.*

2.3.28 Remarca Els espais topològics amb les equivalències en homologia singular són una categoria de descens sense necessitat de prendre espais cofibrants. Això és degut a que el colímit homotòpic té la propietat d'invariància homotòpica respecte les equivalències en homologia sense haver de suposar que els diagrames són cofibrants vèrtex a vèrtex [32].

2.3.4 Límit homotòpic en una categoria de models quasisimplicial

En aquesta secció donem la definició de categoria de models quasisimplicial i veiem com podem donar una definició explícita de límit homotòpic en aquest cas, tot i no tenir una categoria de models simplicial. Farem servir aquesta noció per a la categoria de complexos de cocadenes (vegeu la secció 2.3.5).

La definició de categoria de models quasisimplicial és introduïda per H. Fausk en [15] i es defineix com un afebliment dels axiomes de categoria de models simplicial. La mateixa idea apareix en [2] on els autors parlen de categoria de models simplicial aproximada.

2.3.29 Definició *Una categoria de models* quasisimplicial *és una categoria de models $\mathcal{M}$ que és una categoria simplicial i que satisfà SM7 i la següent versió afeblida de SM6:*

weakSM6: Donats X i Y objectes de $\mathcal{M}$ i K un conjunt simplicial, hi ha objectes $X \otimes K$ i $F(K,Y)$ de $\mathcal{M}$ tals que hi ha un isomorfisme natural de conjunts simplicials

$$Map(X \otimes K, Y) \cong Map(X, F(K,Y))$$

i un isomorfisme natural de conjunts

$$\mathbf{Sset}(K, Map(X,Y)) \cong \mathcal{M}(X \otimes K, Y).$$

L'axioma SM6 és més fort que ja demana isomorfismes de conjunts simplicials

$$Map(X \otimes K, Y) \cong Map(K, Map(X,Y)) \cong Map(X, F(K,Y))$$

Alguns resultats per a categories de models simplicials es mantenen per a categories de models quasisimplicials. Per exemple els lemes 1.2.13 i 1.2.15 són vàlids per a categories de models quasisimplicials. També es mantenen les reformulacions de l'axioma SM7.

Recordem ara la definició de *frame* simplicial. Per a definir el límit homotòpic en una categoria de models n'hi haurà prou amb tenir un *frame* simplicial functorial.

2.3.30 Definició [40, 16.6.1] *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models i X un objecte de $\mathcal{M}$. Notem per cs_*X l'objecte simplicial constant en X. Un* frame simplicial *en X és un objecte simplicial $\widehat{\mathbf{X}}$ en $\mathcal{M}$ juntament amb una equivalència feble $cs_*X \to \widehat{\mathbf{X}}$ en l'estructura de Reedy de $(\Delta^{op}, \mathcal{M})$ (vegeu la secció* 1.4.1) tal que

(1) el morfisme induït $X \to \widehat{\mathbf{X}}_0$ és un isomorfisme, i

(2) si X és un objecte fibrant de $\mathcal{M}$, aleshores $\widehat{\mathbf{X}}$ és un objecte fibrant de $(\Delta^{op}, \mathcal{M})$.

Si $\mathcal{M}$ és una categoria de models simplicial i X un objecte de $\mathcal{M}$ aleshores l'objecte simplicial $\widehat{\mathbf{X}}$ amb $\widehat{\mathbf{X}}_n = F(\Delta[n], X)$ és un *frame* simplicial functorial [40, 16.6.4], que s'anomena el *frame* simplicial natural en X.

En el cas d'una categoria de models quasisimplicial amb tots els objectes fibrants la cotensorització per $\Delta[n]$ també dóna un *frame* simplicial functorial. En el cas simplicial no es demana que tots els objectes siguin fibrants, però en la demostració es fan servir equivalències homotòpiques simplicials, que no estan directament disponibles en el cas quasisimplicial.

2.3.31 Proposició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models quasisimplicial amb tots els objectes fibrants. Aleshores tot objecte X de $\mathcal{M}$ té un* frame *simplicial functorial $\widehat{\mathbf{X}}$ definit per $\widehat{\mathbf{X}}_n = F(\Delta[n], X)$.*

DEMOSTRACIÓ: Cal veure que $X \to \widehat{\mathbf{X}}_0 = F(\Delta[0], X)$ és un isomorfisme, que $cs_*X \to \widehat{\mathbf{X}}$ és una equivalència feble de Reedy i que $\widehat{\mathbf{X}}$ és fibrant de Reedy.

Pel lema 1.2.15, que ja hem observat que és vàlid en el cas quasisimplicial, tenim un isomorfisme $X \cong \widehat{\mathbf{X}}_0 = F(\Delta[0], X)$.

La resta es dedueix com en [40, 16.1.3] utilitzant SM7.

Com que totes les inclusions $\Delta[0] \to \Delta[n]$ són cofibracions trivials i X és fibrant, tots els morfismes $F(\Delta[n], X) \to X \cong F(\Delta[0], X)$ són fibracions trivials per la segona reformulació de SM7. D'aquí deduïm que tots els morfismes $F(\Delta[0], X) \to X \cong F(\Delta[n], X)$ són equivalències febles i per tant $cs_*X \to \widehat{\mathbf{X}}$ és una equivalència feble de Reedy.

Falta veure que $\widehat{\mathbf{X}}$ és fibrant de Reedy. Cal veure que tots els morfismes $\mathbf{X}_n = F(\Delta[n], X) \to M_n\widehat{\mathbf{X}}$ són equivalències febles, on $M_n\mathbf{X}$ és el *matching object* de $\mathbf{X}$ en $[n]$ (vegeu la secció 1.4.1). Per definició,

$$M_n\widehat{\mathbf{X}} = \lim_{\partial([n]\downarrow\vec{\Delta})} \widehat{\mathbf{X}},$$

on $\vec{\Delta}$ és la subcategoria plena de Δ amb morfismes exhaustius. Ara pel lema 1.2.13

$$M_n\widehat{\mathbf{X}} \cong F(\operatorname*{colim}_{\partial([n]\downarrow\vec{\Delta})} \Delta[-], X) \cong F(\operatorname*{colim}_{[p]\to[n],p<n} \Delta[p], X) \cong F(\partial\Delta[n], X).$$

Per tant cal veure que que els morfismes $\mathbf{X}_n = F(\Delta[n], X) \to F(\partial\Delta[n], X)$ són equivalències febles. Es dedueix de SM7 ja que X és fibrant i els morfismes $\partial\Delta[n] \to \Delta[n]$ són cofibracions. $\square$

Per a definir el límit homotòpic en una categoria de models amb un *frame* simplicial functorial cal primer recordar la definició de la corealització d'un objecte simplicial per un conjunt simplicial. Donat K un conjunt simplicial, notem per ΔK la categoria dels símplexs de K.

2.3.32 Definició [40, 16.3.1] *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models. Si $\mathbf{Y}$ és un objecte simplicial en $\mathcal{M}$ i K és un conjunt simplicial, aleshores $\mathbf{Y}^K$ és l'objecte de $\mathcal{M}$ que és el límit del (ΔK)-diagrama en $\mathcal{M}$ que porta l'objecte $\Delta[n] \to K$ de ΔK a $\mathbf{Y}_n$ i porta el diagrama commutatiu*

$$\begin{tikzcd} \Delta[n] \arrow[rr, "\alpha"] \arrow[dr] & & \Delta[k] \arrow[dl] \\ & K & \end{tikzcd}$$

al morfisme $\alpha^* : \mathbf{Y}_k \to \mathbf{Y}_n$.

2.3.33 Definició [40, 19.1.5] *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models amb un* frame *simplicial functorial i $\mathcal{C}$ una categoria petita. Si $\mathbf{X}$ és un $\mathcal{C}$-codiagrama en $\mathcal{M}$ aleshores el* límit homotòpic $\operatorname{holim} \mathbf{X}$ *és l'equalitzador dels morfismes*

$$\prod_{\alpha \in Ob(\mathcal{C})} (\widehat{\mathbf{X}}_\alpha)^{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)} \overset{\phi}{\underset{\psi}{\rightrightarrows}} \prod_{(\sigma:\alpha\to\alpha')\in\mathcal{C}} (\widehat{\mathbf{X}}_{\alpha'})^{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)}$$

on $\widehat{\mathbf{X}}_\alpha$ és el frame *natural simplicial en $\mathbf{X}_\alpha$ i la projecció de ϕ en el factor $\sigma : \alpha \to \alpha'$ és la composició de la projecció natural des del producte amb el morfisme*

$$\sigma_*^{1_{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)}} : (\widehat{\mathbf{X}}_\alpha) \to (\widehat{\mathbf{X}}_{\alpha'})^{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)}$$

i la projecció de ψ al factor $\sigma : \alpha \to \alpha'$ és la composició de la projecció natural des del producte amb el morfisme

$$F(B(\sigma_*), 1_{\mathbf{X}_{\alpha'}}) : (\widehat{\mathbf{X}}_{\alpha'})^{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha')} \to (\widehat{\mathbf{X}}_{\alpha'})^{B(\mathcal{C}\downarrow\alpha)}$$

on $\sigma_* : (\mathcal{C}\downarrow\alpha) \to (\mathcal{C}\downarrow\alpha')$.

Si $\mathcal{M}$ és una categoria de models simplicial aleshores per tot objecte X de $\mathcal{M}$ i tot conjunt simplicial K l'objecte $\widehat{\mathbf{X}}^K$, on $\widehat{\mathbf{X}}$ és el *frame* simplicial natural en X, és naturalment isomorf a $F(K, X)$ [40, 16.6.6]. Per tant, si $\mathcal{M}$ és una categoria de models simplicial amb el *frame* simplicial natural, la definició 2.3.33 coincideix amb la definició 1.3.1.

2.3.34 Proposició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models quasisimplicial amb tots els objectes fibrants, X un objecte de $\mathcal{M}$ i K un conjunt simplicial. Sigui $\widehat{\mathbf{X}}$ el* frame *simplicial de la proposició* 2.3.31. Aleshores la realització $\widehat{\mathbf{X}}^K$ és naturalment isomorfa a $F(K, X)$.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix igual que el cas simplicial [40, 16.6.6], tenint en compte que el lema 1.2.13 val per al cas quasisimplicial. □

Com a conseqüència, en una categoria de models quasisimplicial el límit homotòpic es defineix amb el mateix coequalitzador que en una categoria de models simplicial. Les propietats del límit homotòpic per a una categoria de models simplicial de la secció 1.3.3 també es tenen per al límit homotòpic definit per *frames* (vegeu [40, Chapter 19]). Per tant podem refer els resultats de la secció 2.2.4 per a categories de models quasisimplicials i obtenim la següent versió del teorema 2.2.12.

2.3.35 Teorema *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models quasisimplicial amb tots els objectes fibrants i que satisfà el criteri d'aciclicitat per l'esquerra. Aleshores la categoria $\mathcal{M}$, amb la classe E de les equivalències febles i el functor simple definit pel límit homotòpic és una categoria de descens cohomològic.*

2.3.5 Complexos de cocadenes

Sigui $\mathcal{A}$ una categoria abeliana. Notem per $\mathbf{Ch}_*(\mathcal{A})$ la categoria de complexos de cadenes sense limitació de grau. Els seus objectes són complexos de cadenes, i.e. col·leccions $(C_n, d_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ amb $C_n \in \mathcal{A}$ i $d_n : C_n \to C_{n-1}$ i tal que $d^2 = 0$. Els morfismes són els morfismes de complexos.

Guillén i Navarro demostren [32, 1.5.5] que la categoria $\mathbf{Ch}_*(\mathcal{A})$ és una categoria de descens homològic, prenent com a classe saturada de morfismes els quasiisomorfismes (morfismes que indueixen isomorfisme en homologia).

Notem per $\mathbf{Ch}^*(\mathcal{A})$ la categoria de complexos de cocadenes sense limitació de grau. Els objectes són els complexos de cocadenes, i.e. col·leccions $(C^n, d^n)_{n\in\mathbb{Z}}$ amb $C^n \in \mathcal{A}$ i $d^n : C^n \to C^{n+1}$ i tal que $d^2 = 0$. Guillén i Navarro demostren [32, 1.7.2] que la categoria de complexos de cocadenes $\mathbf{Ch}^*(\mathcal{A})$ és de descens cohomològic, prenent els quasiisomorfismes com a classe saturada de morfismes.

Si R és un anell commutatiu, notem per $\mathbf{Ch}_*(R)$ la categoria de complexos de cadenes de R-mòduls i per $\mathbf{Ch}^*(R)$ la categoria de complexos de cocadenes de R-mòduls. Notem per $\mathbf{Ch}_+(R)$ la categoria de complexos de cadenes amb graus no negatius i per $\mathbf{Ch}^-(R)$ la categoria de complexos de cocadenes amb graus no positius.

A partir d'ara ens restringirem a a categories de complexos de R-mòduls. Com que no hi ha limitació de grau, hi ha una isomorfisme de categories

$$\rho : \mathbf{Ch}_*(R) \to \mathbf{Ch}^*(R)$$

donat per la reindexació que canvia C_p per C^{-p}.

2.3.5.1 Estructures de categoria de models de $\mathbf{Ch}^*(R)$

Estem interessats en estructures de categories de models en $\mathbf{Ch}^*(R)$ on les equivalències febles siguin els quasiisomorfismes i on tots els objectes siguin o bé fibrants o bé cofibrants. Les dues proposicions següents donen estructures amb aquestes condicions.

2.3.36 Proposició *Sigui R és un anell commutatiu. La categoria* $\mathbf{Ch}^*(R)$ *té una estructura de categoria de models (que anomenem* estructura projectiva*) on un morfisme $f : C^* \to D^*$ és*

i) una equivalència feble si indueix isomorfisme en homologia,

ii) una fibració si $f^n : C^n \to D^n$ és un epimorfisme per tot n, i

iii) una cofibració si té la propietat d'aixecament per l'esquerra respecte les fibracions trivials.

Demostració: Aquest resultat és [41, teorema 2.3.11] per a cocadenes. □

2.3.37 Proposició *Sigui R és un anell commutatiu. La categoria* $\mathbf{Ch}^*(R)$ *té una estructura de categoria de models (que anomenem* estructura injectiva*) on in morfisme $f : C^* \to D^*$ és*

i) una equivalència feble si indueix isomorfisme en homologia,

ii) una cofibració si $f^n : C^n \to D^n$ és un monomorfisme per tot n, i

iii) una fibració si té la propietat d'aixecament per la dreta respecte les cofibracions trivials.

DEMOSTRACIÓ: Aquest resultat és [41, teorema 2.3.13] per a cocadenes. □

Aquestes dues estructures de categoria de models són a més pròpies i cofibrantment generades (vegeu [42, Theorem 1.7]).

Per a tenir una descripció explícita del límit homotòpic cal que la categoria de models sigui simplicial o quasisimplicial. Veurem que la categoria $\mathbf{Ch}^*(R)$ té una estructura de categoria de models quasisimplicial.

Per a definir l'estructura quasisimplicial cal definir una tensorització i cotensorització per conjunts simplicials. Les definirem a partir d'una tensorització i cotensorització de complexos.

2.3.5.2 Tensorització i cotensorització

La tensorització i la cotensorització de dos complexos de cocadenes s'obté de la definició usual per a complexos de cadenes. Seguim la indexació de [38, V.1], on les definicions coincideixen amb les de [41, p.111] i [11, Caps. 9 i 10].

2.3.38 Definició *Donats X i Y complexos de cocadenes de R-mòduls, la seva* tensorització $X \otimes Y$ *és el complex de cocadenes amb*

$$(X \otimes Y)^n = \bigoplus_{p+q=n} X^p \otimes_R Y^q$$

i amb diferencial $d(x \otimes y) = dx \otimes y + (-1)^p x \otimes dy, x \in X^p, y \in X^q$ i la seva cotensorització $F(X,Y)$ *és el complex de cocadenes amb*

$$F(X,Y)^n = \prod_{p+q=n} Hom_R(X^{-p}, Y^q)$$

i amb diferencial $(df)^{p,q} = (-1)^{p+q} f^{p-1,q} d + df^{p,q-1}$ per a $f = \{f^{p,q}\}, f^{p,q} : X^{-p} \to Y^q$. La cotensorització $F(X,Y)$ també es nota $\mathbf{Hom}(X,Y)$.

Quan calgui cotensoritzar un complex de cadenes C_* per un complex de cocadenes D^*, convertirem C_* en un complex de cocadenes reindexant $C_p = C^{-p}$.

Amb aquestes definicions se satisfà la propietat d'adjunció usual:

2.3.39 Lema *Donats X, Y i Z complexos de cocadenes de R-mòduls, hi ha un isomorfisme natural de complexos de cocadenes*

$$F(X \otimes Y, Z) \cong F(X, F(Y,Z)).$$

DEMOSTRACIÓ: Vegeu [38, Exercise V.1.1]. □

2.3.5.3 Estructura de models quasisimplicial de $\mathbf{Ch}^*(R)$

Per a definir la tensorització i la cotensorització d'un complex de R-mòduls per un conjunt simplicial fem servir el functor de normalització N de la correspondència de Dold-Kan [80, 8.4].

2.3.40 Definició [80, 8.3.6] *Donat A un R-mòdul simplicial, el* complex de cadenes no normalitzat *és el complex $C(A)$ amb $C(A)_r = A_r$ i $d = \sum_0^r (-1)^i d_i$.*

El complex de cadenes normalitzat *$N(A)$ és el complex amb*

$$N_n(A) = A_n \cap \ker d_0 \cap \cdots \cap \ker d_{n-1}$$

i diferencial $d = (-1)^n d_n$. Per construcció el complex normalitzat $N(A)$ és un subcomplex de $C(A)$.

Notem per $D(A)$ és el subcomplex de $C(A)$ generat pels elements degenerats, i.e.

$$D_n(A) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{im} s_i.$$

2.3.41 Lema [80, 8.3.6] *Donat A un R-mòdul simplicial, $C(A) = N(A) \oplus D(A)$ i per tant $N(A) = C(A)/D(A)$.*

2.3.42 Definició *Donat K un conjunt simplicial, $R[K]$ és el R-mòdul simplicial lliure generat per K.*

Aquesta construcció defineix un functor adjunt per l'esquerra del functor d'oblit:

$$R[-] : \mathbf{Sset} \leftrightarrows \mathbf{sMod}_R : U.$$

Recordem que la correspondència de Dold-Kan [80, 8.4] és una equivalència de categories entre els R-mòduls simplicials i els complexos de cadenes de R-mòduls amb graus no negatius:

$$N : \mathbf{sMod}_R \to \mathbf{Ch}_+(R).$$

Notem per D el functor invers a N. El functor D és adjunt per la dreta de N. Si C és un complex no negatiu de cadenes, els n-símplexos de $D(C)$ són (vegeu per exemple [21, 4.1])

$$D(C)_n = Hom_{\mathbf{Ch}_+(R)}(NR[\Delta[n]], C),$$

i les cares i degeneracions estan induïdes per les de $\Delta[n]$.

Farem servir la següent variant de la correspondència de Dold-Kan, per a treballar amb cocadenes:

$$N' : \mathbf{sMod}_R \leftrightarrows \mathbf{Ch}^-(R) : D'$$

on $N' = \rho \circ N$ i si C és un complex no positiu de cocadenes els n-símplexos de $D'(C)$ són

$$D'(C)_n = Hom_{\mathbf{Ch}^-(R)}(N'R[\Delta[n]], C).$$

2.3.43 Definició *Donat X un complex de cocadenes i K un conjunt simplicial, la* tensorització de X per K *és el complex de cocadenes*

$$X \otimes K = X \otimes_R N'R[K]$$

i la cotensorització de X per K *és el complex de cocadenes*

$$F(K, X) = F(N'R[K], X).$$

El functor d'inclusió $j : \mathbf{Ch}^-(R) \to \mathbf{Ch}^*(R)$ és adjunt per l'esquerra del functor de truncament τ', que porta un complex de cocadenes

$$\cdots \to C^{-2} \to C^{-1} \to C^0 \to C^1 \to C^2 \to \cdots$$

al complex no positiu

$$\cdots \to C^{-2} \to C^{-1} \to \ker(C^0 \to C^1) \to 0.$$

2.3.44 Definició *Donats C i D complexos de cadenes, definim el conjunt simplicial*

$$Map(C, D) = D'\tau' F(C, D).$$

Donats C un complex de cadenes i K i L conjunts simplicials, en general $C \otimes (K \times L)$ no és isomorf a $(C \otimes K) \otimes L$. Això és degut a que en general $NRK \otimes NRL$ només és homotòpicament equivalent a $NR(K \times L)$. L'equivalència homotòpica entre $NRK \otimes NRL$ i $NR(K \times L)$ és conseqüència del teorema d'Eilenberg-Zilber (vegeu [53, Theorem 8.1]). Observem que no és en general un isomorfisme: En $NR\Delta[1] \otimes NR\Delta[1]$ el R-mòdul de les 1-cadenes és el R-mòdul lliure amb quatre generadors, corresponents als quatre costats del quadrat. La diagonal no apareix directament com a cadena. En canvi en $NR(\Delta[1] \times \Delta[1])$ el R-mòdul de les 1-cadenes té 5 generadors: $(00) \times (01), (11) \times (01), (01) \times (00), (01) \times (11)$ i $(01) \times (01)$ (vegeu [53, p. 242]).

Per tant $Ch(R)$ no pot ser una categoria de models simplicial amb aquesta tensorització i cotensorització. En canvi sí que es verifica que és una categoria de models quasisimplicial:

2.3.45 Lema *Sigui R un anell commutatiu. La categoria $\mathbf{Ch}^*(R)$ amb l'estructura de categoria de models projectiva i la tensorització i cotensorització definits més amunt és una categoria de models quasisimplicial on tots els objectes són fibrants.*

DEMOSTRACIÓ: Seguim [15, lema 5.2]. Donats C i D complexos de cocadenes i K un conjunt simplicial hi ha un isomorfisme natural de complexos de cocadenes

$$F(C \otimes K, D) \cong F(C, F(K, D))$$

i per tant un isomorfisme natural de conjunts simplicials

$$Map(C \otimes K, D) \cong Map(C, F(K, Y)).$$

Les diferents adjuncions disponibles donen els següents isomorfismes de conjunts:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Sset}(K, Map(C, D)) &= \mathbf{Sset}(K, UD'\tau' F(C, D)) \cong \\
&\cong \mathbf{sMod}_R(R[K], D'\tau' F(C, D)) \cong \\
&\cong \mathbf{Ch}^-(R)(N'R[K], \tau' F(C, D)) \cong \\
&\cong \mathbf{Ch}^*(R)(N'R[K], F(C, D)) \cong \\
&\cong \mathbf{Ch}^*(R)(C \otimes N'R[K], D) \cong \\
&\cong \mathbf{Ch}^*(R)(C \otimes K, D).
\end{aligned}$$

Hem vist doncs els isomorfismes naturals de weakSM6.

Donada $i : K \to L$ una inclusió de conjunts simplicials, aleshores $NR[i] : NR[K] \to NR[L]$ és una cofibració de complexos de cadenes en l'estructura projectiva i si i és una equivalència feble aleshores $NR[i]$ és una equivalència feble de complexos. Per tant l'axioma SM7 es dedueix de l'estructura de categoria de models monoïdal simètrica de $\mathbf{Ch}^*(R)$ [41, 4.2.13]. □

2.3.5.4 Criteri d'aciclicitat

La categoria $\mathbf{Ch}^*(R)$ és una categoria de models estable. El functor de suspensió porta un complex C al complex desplaçat ΣC amb $(\Sigma C)^n = C^{n+1}$ (vegeu [12, Example 2.2]). La categoria homotòpica és la categoria derivada.

Hem vist a la secció 2.3.1 que les categories de models simplicials estables compleixen el criteri d'aciclicitat. El lema 2.3.2 també és vàlid per a les categories de models quasisimplicials, ja que es basa en l'equivalència feble natural entre el *pullback* homotòpic i el límit homotòpic de [40, Proposition 19.5.3], que és vàlida en una categoria de models amb un *frame* natural.

2.3.46 Proposició *Sigui R un anell commutatiu. La categoria $\mathbf{Ch}^*(R)$ amb els quasiisomorfismes i el límit homotòpic és una categoria de descens cohomològic.*

2.3.5.5 Relació entre el simple d'un diagrama cúbic de complexos i el límit homotòpic

Com hem comentat més amunt, Guillén i Navarro demostren que la categoria $\mathbf{Ch}^*(R)$ és una categoria de descens cohomològic amb els quasiisomorfismes i amb un cert functor simple. En aquest apartat recordem quina definició de simple fan servir i demostrem que és quasiisomorfa al límit homotòpic.

Donat $\mathbf{X}$ un $\square_n$-codiagrama de complexos de cocadenes, el simple de $\mathbf{X}$ [29, I.6.1] [32, 1.7.2] és el complex de cocadenes que en grau q és

$$(\mathbf{sX})^q = \bigoplus_{\dim\alpha+p=q} \mathbf{X}^p_\alpha,$$

i que té per diferencial

$$d = \sum_{\alpha_j=0} (-1)^{|\alpha_0+\cdots+\alpha_{j-1}|-1}\mathbf{X}_{\alpha\to\alpha+e_j} + (-1)^{\dim\alpha} d_{\mathbf{X}_\alpha}$$

en $X^p_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n}$, on $e_j = (0,\ldots,1,\ldots,0)$.

Per exemple, el simple del codiagrama de complexos de cocadenes

$$\begin{array}{ccc} C^{\cdot}_{10} & \xrightarrow{f} & C^{\cdot}_{11} \\ & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ & & C^{\cdot}_{01} \end{array}$$

és el complex de cocadenes que en grau n és

$$C^n_{10} \oplus C^{n-1}_{11} \oplus C^n_{01},$$

i que té diferencial $\partial(x,a,y) = (\partial_{10}x, -\partial_{11}a + fx - gy, \partial_{01}y)$. En aquest cas doncs el simple és el que es coneix com a *homotopy pullback* dels morfismes de complexos f i g.

2.3.47 Definició *Donat S un conjunt finit no buit, sigui $C^R_*(\square_S)$ el complex de R-cadenes orientades del complex simplicial de les parts no buides de S. Sigui $C^*_R(\square_S)$ el complex de cocadenes dual definit per $C^p_R(\square_S) = Hom_R(C^R_p(\square_S), R)$.*

Per exemple el complex de R-cadenes orientades del complex simplicial de $\Box_n$ en grau q és

$$C_q(\Box_n) = \bigoplus_{\dim \alpha = q} R[\alpha],$$

i la diferencial està definida sobre els generadors per

$$\partial[\alpha_0, \cdots, \alpha_n] = \sum_{\alpha_j=1}^{p} (-1)^{|\alpha_0+\cdots+\alpha_{j-1}|}[\alpha_0, \ldots, \alpha_j - 1, \ldots, \alpha_n].$$

2.3.48 Lema *El simple d'un $\Box$-codiagrama cúbic de complexos $\mathbf{X}$ és naturalment isomorf a l'*end *del functor $\Box^{op} \times \Box \to \mathbf{Ch}^*(R)$, $(\alpha, \beta) \mapsto C^*(\Box_\beta) \otimes \mathbf{X}_\alpha$:*

$$\mathbf{s}_\Box(X) \cong \int_\alpha C^*(\Box_\alpha) \otimes \mathbf{X}_\alpha.$$

DEMOSTRACIÓ: Per [32, 1.3.1 i 1.7.2], el complex simple $\mathbf{s}_\Box(\mathbf{X})$ és naturalment isomorf a l'end

$$\int_\alpha \mathbf{s}(\mathbf{Z} \times \Box_\alpha) \otimes \mathbf{X}_\alpha.$$

Per tant n'hi ha prou amb veure que que $\mathbf{s}(\mathbf{Z} \times \Box_n) \cong C^*_{\mathbf{Z}}(\Box_n)$.

El simple del diagrama constant $\mathbf{Z} \times \Box_n$ és el complex de cocadenes que en grau q és $\mathbf{s}(\mathbf{Z} \times \Box_n)^q = \oplus_{\dim \alpha = q} \mathbf{Z}[\alpha]$ i tal que la diferencial en els elements de la base és

$$d[\alpha] = \sum_{\alpha_j=0} (-1)^{|\alpha_0+\cdots+\alpha_{j-1}|-1}[\alpha + e_j].$$

Un element de $C^q(\Box_n) = Hom(C_q(\Box_n), \mathbf{Z})$ està determinat per les imatges dels generadors de $C_q(\Box_n)$ i per tant $C^q(\Box_n) \cong \bigoplus_{\dim \alpha = q} \mathbf{Z}[\alpha]$.

Quant a la diferencial, sigui $[\alpha]^*$ l'element de $Hom(C_q(\Box_n), \mathbf{Z})$ que val 1 en $[\alpha]$ i 0 en la resta d'elements de la base. Aleshores

$$\partial[\alpha]^* = \sum_{\alpha_j=0} \epsilon_j [\alpha_0, \ldots, \alpha_j + 1, \ldots, \alpha_n]^*$$

on ϵ_j és el signe amb el qual $[\alpha]$ apareix en l'expressió de $\partial[\alpha_0, \ldots, \alpha_j + 1, \ldots, \alpha_n]$, i.e. $\epsilon_j = |\alpha_0 + \cdots + \alpha_{j-1}|$. Es compleix per tant l'isomorfisme cercat. $\Box$

Per acabar aquest apartat veurem que hi ha un isomorfisme de complexos de cocadenes

$$C^*(\Box_S) \otimes X \cong F(C_*(\Box_S), X).$$

2.3.49 Lema *Sigui (C^p, ∂^p) un complex de cocadenes. Hi ha un isomorfisme natural de complexos*

$$(C^p, \partial^p) \cong (C^p, (-1)^p \partial^p).$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem els morfismes

$$f^p = \begin{cases} -id & \text{si } p = 0,1 \mod 4, \\ id & \text{si } p = 2,3 \mod 4. \end{cases}$$

És immediat comprovar que defineixen un morfisme natural de cocadenes que és un isomorfisme. □

2.3.50 Corol·lari *El complex de cocadenes $C^*_R(\Box_S)$ és naturalment isomorf al complex $F(C^R_*(\Box_S), R)$, on considerem R com un complex de cocadenes concentrat en grau 0.*

DEMOSTRACIÓ: És immediat de la definició de cotensorització i del lema 2.3.49. □

2.3.51 Lema *Siguin C, C', D, D' complexos de cocadenes. Definim*

$$\gamma : F(C, C') \otimes F(D, D') \to F(C \otimes D, C' \otimes D')$$

per $(\gamma(f \otimes g))(x \otimes y) = (-1)^{|g||x|}(fx) \otimes (gy)$. Aleshores γ és un morfisme de complexos.

DEMOSTRACIÓ: Vegeu [11, p.171] per a complexos de cadenes. □

2.3.52 Lema *Sigui X un complex de cocadenes de R-mòduls. Hi ha un isomorfisme de complexos de cocadenes*

$$C^*(\Box_S) \otimes X \cong F(C_*(\Box_S), X).$$

DEMOSTRACIÓ: Pel corol·lari 2.3.50 i el lema 2.3.51, hi ha un morfisme de complexos

$$\gamma : C^*(\Box_S) \otimes X \cong F(C_*(\Box_S), R) \otimes F(R, X) \to F(C_*(\Box_S) \otimes R, R \otimes X) \cong F(C_*(\Box_S), X).$$

Com que el complex de cadenes $C_*(\Box_S)$ té un nombre finit de termes i cada $C_p(\Box_S)$ és un mòdul projectiu finitament generat, el resultat es dedueix usant el següent fet [53, V, proposió 4.2]: Si L és un R-mòdul projectiu finitament generat i M un R-mòdul, aleshores hi ha un isomorfisme natural $\gamma : L^* \otimes_R M \to Hom_R(L, M)$ definit per $\gamma(f \otimes m)(l) = f(l) \cdot m$. □

2.3.53 Lema *Hi ha un isomorfisme*

$$C_*^R(\square_n) \cong N(R[\Delta[n]]).$$

DEMOSTRACIÓ: Observem que, donada p, $C_p^R(\square_n)$ és el R-mòdul lliure generat pels p-símplexs no degenerats de $\Delta[n]$, que és exactament $N_p(R[\Delta[n]])$. Donat $\sigma = [i_0, \ldots, i_p]$ un p-símplex no degenerat de $\Delta[n]$, en els dos casos la diferencial és la suma alternada de les cares $p-1$ dimensionals. $\square$

2.3.54 Proposició *Sigui* $\square \in \Pi$ *un tipus de diagrama cúbic i* $\mathbf{X} : \square \to \mathbf{Ch}^*(R)$ *un codiagrama de complexos de cocadenes de* R*-mòduls. Hi ha una equivalència feble*

$$\mathbf{s}_\square \mathbf{X} = \int_\alpha C^*(\square_\alpha) \otimes \mathbf{X}_\alpha \to \operatorname*{holim}_{\square} \mathbf{X}.$$

DEMOSTRACIÓ: Per la propietat de Fubini i d'exactitud del functor simple i del límit homotòpic n'hi ha prou amb veure el resultat per a $\square = \square_n$.

Pels lemes 2.3.52 i 2.3.53,

$$\mathbf{s}_\square \mathbf{X} = \int_\alpha C^*(\square_\alpha) \otimes \mathbf{X}_\alpha = \int_\alpha F(C_*(\square_\alpha), \mathbf{X}_\alpha) =$$

$$= \int_\alpha F(N'R[\Delta[\alpha]], \mathbf{X}_\alpha) = \int_\alpha F(\Delta[\alpha], \mathbf{X}_\alpha).$$

Per la proposició 1.5.4 hi ha una equivalència feble a $\operatorname{holim}_{\square_n} \mathbf{X}$. $\square$

2.4 Categories de descens cosimplicial

La noció de categoria de descens simplicial és una variació de la noció de categoria de descens homològic de Guillén i Navarro. Ha estat introduïda per B. Rodríguez [67]. Hi ha dues nocions duals: la de categoria de descens simplicial i la de categoria de descens cosimplicial. Tractarem el cas cosimplicial.

Així com en les categories de descens cohomològic es té un simple per als codiagrames cúbics, en les categories de descens cosimplicial es té un simple per als objectes simplicials.

Per simplificar la notació escriurem $\Delta\mathcal{D}$ per $(\Delta, \mathcal{D})$.

2.4.1 Definició [67, 2.1.18] *Una* categoria de descens cosimplicial *ve donada per* $(\mathcal{D}, E, \mathbf{s}, \mu, \lambda)$*, on:*

(CDC1) $\mathcal{D}$ *és una categoria amb productes finits i objecte inicial 0.*

(CDC2) E *és una classe saturada de morfismes de* $\mathcal{D}$ *estable per productes.*

(CDC3) $\mathbf{s} : \Delta\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ *és un functor opmonoïdal quasifort respecte el producte.*

(CDC4) Si $D : \Delta\Delta\mathcal{D} \to \Delta\mathcal{D}$ *és el functor diagonal, considerem els functors* $\mathbf{s}(\Delta\mathbf{s}), \mathbf{s}D : \Delta\Delta\mathcal{D} \to \mathcal{D}$*. Aleshores* $\mu : \mathbf{s}(\Delta\mathbf{s}) \to \mathbf{s}\mathcal{D}$ *és una transformació natural tal que* $\mu(Z) \in E$ *per a tot* $Z \in \Delta\Delta\mathcal{D}$*.*

(CDC5) $\lambda : Id_{\mathcal{D}} \to \mathbf{s}(- \times \Delta)$ *és una transformació natural compatible amb* μ *tal que per a tot* $X \in \mathcal{D}$*,* $\lambda(X) \in E$*.*

(CDC6) Donat $f : X \to Y$ *en* $\Delta\mathcal{D}$ *tal que* $f_n \in E \quad \forall n$ *aleshores* $\mathbf{s}(f) \in E$*.*

(CDC7) Si $f : X \to Y$ *és un morfisme en* $\Delta\mathcal{D}$*, aleshores* $\mathbf{s}f \in E$ *si i només si el simple del seu objecte camí cosimplicial és acíclic.*

(CDC8) Es verifica que $\mathbf{s}\Upsilon f \in E$ *si i només si* $\mathbf{s}f \in E$*.*

Recordem aquelles definicions de [67] que utilitzem.

Un functor $\mathbf{s} : \Delta\mathcal{D} \to \mathcal{D}$ indueix un functor

$$\Delta\mathbf{s} : \Delta\Delta\mathcal{D} \longrightarrow \Delta\mathcal{D}$$

aplicant $\mathbf{s}$ per columnes, i.e. $(\Delta\mathbf{s}Z)_n = \mathbf{s}(m \mapsto \mathbf{s}Z_{n,m})$.

Donat $X \in \Delta\mathcal{D}$, l'objecte bicosimplicial $X \times \Delta$ és constant per columnes, i.e. $(X \times \Delta)_{n,m} = X_n$ i l'objecte bicosimplicial $\Delta \times X$ és constant per files, i.e. $(X \times \Delta)_{n,m} = X_m$.

La compatibilitat entre λ i μ significa que els morfismes

$$\mathbf{s}X \xrightarrow{\lambda_{\mathbf{s}X}} \mathbf{s}(\mathbf{s}X \times \Delta) \xrightarrow{\mu_{\Delta\times X}} \mathbf{s}X$$

$$\mathbf{s}X \xrightarrow{\mathbf{s}(\lambda_{X_n})} \mathbf{s}(n \mapsto \mathbf{s}(X_n \times \Delta)) \xrightarrow{\mu_{X\times\Delta}} \mathbf{s}X$$

són la identitat.

Sigui $op : \Delta \to \Delta$ el functor definit per $op([n]) = [n]$, $op(\delta_i^n) = \delta_{n-i}^n, op(\sigma_j^n) = \sigma_{n-j}^n$. Es denota per $\Upsilon : \Delta\mathcal{D} \to \Delta\mathcal{D}$ el functor obtingut per composició amb op.

Ens proposem ara veure la relació entre les categories de models simplicials i les categories de descens cohomològic.

2.4.2 Lema *El functor diagonal $D : \Delta \to \Delta \times \Delta$ és homotòpicament cofinal per l'esquerra.*

DEMOSTRACIÓ: Hem de veure que donat $([k_1], [k_2]) \in \Delta \times \Delta$, el nervi de $(D \downarrow ([k_1], [k_2]))$ és contràctil.

Donat K un conjunt simplicial, notem per ΔK la categoria dels símplex de K (vegeu [40, 15.1.6]), que té per objectes els morfismes simplicials $\Delta[n] \to K$ i per morfismes els corresponents triangles. El nervi $B(\Delta K)$ és naturalment feblement equivalent a K [40, 18.9.3].

La categoria $(D \downarrow ([k_1], [k_2]))$ és isomorfa a $\Delta(\Delta[k_1] \times \Delta[k_2])$ i per tant el seu nervi és contràctil. □

2.4.3 Lema *El nervi $B\Delta$ és contràctil.*

DEMOSTRACIÓ: L'objecte $[0]$ de la categoria Δ és un objecte final. Per [40, 14.3.14] $B\Delta$ és contràctil. □

Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial. El functor

$$\mathbf{s} : \Delta\mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$$

és el functor definit pel límit homotòpic: $\mathbf{s}X = \operatorname{holim}_\Delta X$.

Donat $Z \in \Delta\Delta\mathcal{M}$ definim $\mu(Z) : \mathbf{s}(\Delta\mathbf{s})Z \to \mathbf{s}DZ$ com la composició

$$\mathbf{s}(\Delta\mathbf{s})Z \cong \operatorname*{holim}_{\Delta\times\Delta} Z \longrightarrow \operatorname*{holim}_{\Delta} DZ,$$

on l'isomorfisme és l'isomorfisme de Fubini i el segon morfisme és l'induït pel functor diagonal.

Donat $X \in \mathcal{M}$, definim $\lambda(X) : X \to \mathbf{s}(X \times \Delta) = F(B\Delta, X)$ com el morfisme

$$X \cong F(\Delta[0], X) \longrightarrow F(B\Delta, X)$$

induït pel morfisme de conjunts simplicials $B\Delta \to \Delta[0]$.

Igual que en el cas de les categories de descens cohomològic, les propietats del límit homotòpic permeten demostrar que els objectes fibrants d'una categoria de models simplicial compleixen els axiomes de categoria de descens cosimplicial llevat l'axioma d'aciclicitat. Obtenim el següent resultat.

2.4.4 Proposició *Sigui $\mathcal{M}$ una categoria de models simplicial amb l'objecte inicial fibrant. Considerem la categoria $\mathcal{M}_f$ dels objectes fibrants juntament amb les equivalències febles, el functor simple definit pel límit homotòpic i λ i μ definits més amunt. Suposem que satisfà (CDC7). Aleshores $\mathcal{M}_f$ és una categoria de descens cosimplicial.*

DEMOSTRACIÓ: Les propietats (CDC1) i (CDC2) són exactament les propietats $(\mathrm{CD1})^{op}$ $(\mathrm{CD2})^{op}$ que ja hem vist per a les categories de models simplicials (vegeu 2.2.13 i 2.2.14). La propietat (CDC3) es demostra igual que $(\mathrm{CD4})^{op}$ canviant $\Box$ per Δ (vegeu 2.2.16). La propietat (CDC6) és la propietat d'invariància homotòpica del límit homotòpic (proposició 1.3.8). La propietat (CDC8) és clara ja que el límit homotòpic no té en compte l'ordre dels morfismes cara i degeneració.

Quant a la propietat (CDC4), és clar que μ defineix una transformació natural. Com que el functor diagonal és homotòpicament cofinal per l'esquerra (lema 2.4.2), per tot $Z \in \Delta\Delta\mathcal{D}$ el morfisme

$$\operatorname*{holim}_{\Delta\times\Delta} Z \longrightarrow \operatorname*{holim}_{\Delta} DZ$$

és una equivalència feble i per tant $\mu(Z)$ és una equivalència feble.

Quant a la propietat (CDC5), és clar que λ defineix una transformació natural. Com que $B\Delta$ és contràctil (lema 2.4.3), els morfismes de la composició

$$\Delta[0] \to B\Delta \to \Delta[0]$$

són equivalències febles, on el primer morfisme és una inclusió. Per [40, 9.3.9.2a], per a tot $X \in \mathcal{M}_f$ el segon morfisme de la composició

$$F(\Delta[0], X) \to F(B\Delta, X) \to F(\Delta[0], X)$$

és una equivalència feble, i com que la composició és la identitat el primer morfisme també és una equivalència feble. Deduïm que $\lambda(X)$ és una equivalència feble.

Per finalitzar manca veure la compatibilitat entre λ i μ. Prenem $X \in \Delta\mathcal{M}_f$. El functor de projecció $\pi_2 : \Delta \times \Delta \to \Delta, (n, m) \mapsto n$ indueix un morfisme

$$\operatorname*{holim}_{\Delta} X \to \operatorname*{holim}_{\Delta\times\Delta} \pi_2^* X.$$

Aquest morfisme és el mateix que la composició

$$\mathbf{s}_\Delta X \to \mathbf{s}(\mathbf{s}X \times \Delta) \xrightarrow{\cong} \operatorname*{holim}_{\Delta\times\Delta}(\Delta \times X),$$

on el segon morfisme es l'isomorfisme de Fubini. El morfisme $\mu_{\Delta\times X} : \mathbf{s}(\mathbf{s}X \times \Delta) \to \mathbf{s}X$ és la composició de l'isomorfisme de Fubini amb el morfisme induït pel functor diagonal $D : \Delta \to \Delta \times \Delta$. Per tant la composició $\mu_{\Delta\times X} \circ \lambda_{\mathbf{s}X}$ és la identitat, ja que està induït per la identitat.

Anàlogament demostrem que $\mu_{X\times\Delta} \circ \mathbf{s}(\lambda_{X_n})$ és la identitat, fent servir la projecció $\pi_1 : \Delta \times \Delta \to \Delta, (n, m) \mapsto m.$ □

L'aplicació d'aquest resultat depèn doncs d'analitzar (CDC7). Dels exemples de categories de descens cosimplicial tractats en [67], d'aquells que tenen estructura de categories de models caldria estudiar la compatibilitat del simple amb el límit homotòpic. Entre aquests hi ha el de complexos de cocadenes en una categoria abeliana i el d'àlgebres diferencials graduades commutatives. En d'altres exemples, com els complexos de cocadenes en una categoria additiva o els complexos de cocadenes filtrats no és clar que es pugui aplicar el punt de vista de les categories de models.

3
Descens cúbic

En aquest capítol tractem amb functors en la categoria de varietats algebraiques sobre un cos de característica zero que prenen valors en una categoria de descens. La primera secció està dedicada al teorema d'extensió de Guillén i Navarro. En la segona secció recollim les successions espectrals associades a codiagrames d'espectres i a functors de varietats a espectres. En la tercera secció veiem els functors d'esquemes a espectres com a prefeixos d'espectres, les categories de models de la categoria de prefeixos i com es relacionen les aproximacions fibrants de prefeixos amb l'extensió de Guillén i Navarro.

3.1 Sobre el teorema d'extensió de Guillén i Navarro

En aquesta secció enunciem el teorema d'extensió de Guillén i Navarro [32], que estén functors definits sobre les varietats llises a functors definits sobre totes les varietats. L'extensió es defineix mitjançant la teoria de les hiperresolucions cúbiques, de la qual en recollim els elements més rellevants en el primer apartat. De la demostració del teorema d'extensió se'n deriven alguns resultats que no apareixen en *op.cit.* que presentem en el darrer apartat.

3.1.1 Hiperresolucions cúbiques

El teorema d'extensió de Guillén i Navarro es fonamenta en la teoria de les hiperresolucions cúbiques, la qual permet substituir, en un sentit que recordarem tot seguit, una varietat singular per un diagrama cúbic de varietats llises. La principal referència per a les hiperresolucions és [29, Exposé I]. Vegeu també [28, capítol 2] i

[31].

La definició d'hiperresolució cúbica és constructiva i es basa el teorema de resolució de singularitats d'Hironaka per a varietats algebraiques sobre un cos de característica zero.

Sigui k un cos de característica zero. Notem per $\mathbf{Sch}(k)$ la categoria d'esquemes reduïts, separats i de tipus finit sobre k, als quals anomenem simplement *varietats algebraiques*, o *k-varietats*, i per $\mathbf{Sm}(k)$ la categoria de les varietats llises.

3.1.1 Definició *Un diagrama cartesià de k-varietats*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

és un quadrat acíclic *si*

(i) i és una immersió tancada,

(ii) f és un morfisme propi, i

(iii) el morfisme induït $\widetilde{X} \setminus \widetilde{Y} \longrightarrow X \setminus Y$ és un isomorfisme.

3.1.2 Remarca Un quadrat acíclic és el que en [8] s'anomena *blow-up* abstracte.

Recordem el teorema de resolució de singularitats d'Hironaka [39]:

3.1.3 Teorema *Per tota k-varietat X, existeix un quadrat acíclic*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

on $\widetilde{X}$ és una varietat llisa i $\dim Y, \dim \widetilde{Y} < \dim X$.

Les versions més precises del teorema de resolució de singularitats d'Hironaka permeten obtenir una resolució $\tilde{X} \to X$ d'una varietat algebraica X per una successió finita de *blow-ups* $X_{i+1} \to X_i$ de centre llis contingut en el lloc singular de X_i, $0 \leq i < r$, on $X = X_0$ i $\tilde{X} = X_r$. El teorema d'extensió de Guillén i Navarro fa ús d'aquesta versió més precisa i també del lema de Chow-Hironaka, pel qual tot morfisme biracional entre dues resolucions pot ésser dominat per una successió finita de *blow-ups* de centres llisos.

Sigui X_{00} una k-varietat. Aplicant resolució de singularitats obtenim un diagrama cartesià

$$\begin{tikzcd} X_{11} \arrow[r] \arrow[d] & X_{10} \arrow[d, "f"] \\ X_{01} \arrow[r] & X_{00} \end{tikzcd}$$

on f un morfisme propi, X_{10} és llisa, els morfismes horitzontals són immersions tancades i f indueix un isomorfisme de $X_{01} \setminus X_{11}$ en $X_{00} \setminus X_{10}$. Si X_{11} i X_{01} fossin varietats llises aleshores el diagrama seria una hiperresolució cúbica de X. En general una resolució de les singularitats de X_{00} no dóna X_{11} i X_{01} llises però sí de dimensió inferior, la qual cosa possibilita un procés inductiu.

3.1.4 Definició *Sigui S una k-varietat. Una* 2-resolució *de S és un diagrama cartesià de varietats*

$$\begin{tikzcd} Z_{11} \arrow[r] \arrow[d] & Z_{01} \arrow[d, "f"] \\ Z_{10} \arrow[r] & Z_{00} \end{tikzcd}$$

on

1) $Z_{00} = S$,
2) Z_{01} *és una varietat llisa,*
3) Z_* *és un quadrat acíclic,*
4) *el morfisme $f : Z_{01} \to S$ és exhaustiu, i és una transformació biracional entre les components irreductibles de dimensió màxima de Z_{01} i S.*

Aquesta és la definició adoptada en [32, p.43], que és més restrictiva que la definició de [29, I.2.7]. Més generalment es defineixen les 2-resolucions de diagrames de varietats de tipus ordenable finit (vegeu la remarca 3.1.6).

Sigui r un enter, $r \geq 1$. Per tot enter n, $1 \leq n \leq r$, sigui $X^n_\bullet$ una $\square^+_n$-varietat. Suposem que per tot n, $1 \leq n < r$, les $\square^+_{n-1}$-varietats $X^{n+1}_{00\bullet}$ i $X^n_{1\bullet}$ són iguals. Aleshores definim, per recurrència sobre r, una $\square^+_r$-varietat $Z_\bullet = rd(X^1_\bullet, \ldots, X^r_\bullet)$ que s'anomena la *reducció* de la manera següent. Si $r = 1$, definim $Z_\bullet = X^1_\bullet$. Si $r = 2$ definim $Z_{\bullet\bullet} = rd(X^1_\bullet, X^2_{\bullet\bullet})$ per

$$Z_{\alpha\beta} = \begin{cases} X^1_{0\beta} & , \text{si } \alpha = (0,0), \\ X^2_{\alpha\beta} & , \text{si } \alpha \in \square_1, \end{cases}$$

per tot $\beta \in \square_0^+$, amb els morfismes evidents, tal i com mostra el següent diagrama.

$$
\begin{tikzcd}
 & X^2_{111} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & X^2_{011} \arrow[dl] \arrow[dd] \arrow[ddrrr] & & & \\
X^2_{110} \arrow[rr] \arrow[dd] & & X^2_{010} \arrow[dd] \arrow[ddrrr] & & & & \\
 & X^2_{101} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X^2_{001} \arrow[r, equal] \arrow[dl] & X^1_{11} \arrow[rr] \arrow[dl] & & X^1_{01} \arrow[dl] \\
X^2_{100} \arrow[rr] & & X^2_{000} \arrow[r, equal] & X^1_{10} \arrow[rr] & & X^1_{00} &
\end{tikzcd}
$$

Si tenim $r > 2$ i Y^{r-1} una $\square_{r-1}^+$-varietat tal que les $\square_{r-2}^+$-varietats $X^r_{00\bullet}$ i $Y^{r-1}_{1\bullet}$ són iguals, definim $Z_{\bullet\bullet} = rd(Y^{r-1}_\bullet, X^r_{\bullet\bullet})$ per

$$
Z_{\alpha\beta} = \begin{cases} Y^{r-1}_{0\beta} & , \text{si } \alpha = (0,0), \\ X^r_{\alpha\beta} & , \text{si } \alpha \in \square_1, \end{cases}
$$

per tot $\beta \in \square_{r-2}^+$, amb els morfismes evidents.

Aleshores definim

$$
Z_\bullet = rd(rd(X^1_\bullet, \dots, X^{r-1}_\bullet), X^r_\bullet).
$$

3.1.5 Definició *Sigui S una k-varietat. Una* hiperresolució cúbica augmentada 1-iterada *de S és una $\square_r^+$-varietat $Z_\bullet$ tal que $Z_\bullet = rd(X^1_\bullet, \dots, X^r_\bullet)$ on*

1) $X^1_\bullet$ és una 2-resolució de S,

2) per $1 \leq n < r$, $X^{n+1}_\bullet$ és una 2-resolució de $X^n_{1\bullet}$, i

3) Z_α és llisa per tot $\alpha \in \square_r$.

3.1.6 Remarca Les hiperresolucions cúbiques es defineixen per a varietats S i en general per a diagrames de varietats de tipus ordenable finit (vegeu la definició 3.1.7). Això permet resoldre morfismes i poder relacionar diferents resolucions d'una mateixa varietat.

3.1.7 Definició *Un tipus de diagrama és* ordenable finit [32, 1.1.2], [29, I.1.9] *si el seu conjunt de morfismes és finit, els seus objectes tenen com a únic endomorfisme la identitat i, si al conjunt d'objectes se'l dota amb la relació de preordre "$i \leq j$* si i només si $Hom(i,j)$ és no buit" *aleshores aquest preordre és un ordre. Notem per Φ la categoria dels tipus de diagrames ordenables finits.*

Per exemple un objecte de Π defineix un tipus de diagrama ordenable finit.

3.1.8 Definició *Per a $n \geq 2$ un enter, una* hiperresolució cúbica augmentada n-iterada *és una hiperresolució cúbica augmentada 1-iterada d'una hiperresolució cúbica augmentada $(n-1)$-iterada de S.*

Una hiperresolució cúbica augmentada n-iterada s'anomena simplement *hiperresolució* de S. Per abús de notació, també es nota per $X_\bullet$ la $\square_r$-varietat obtinguda per restricció de $\square_r^+$ a $\square_r$. El nombre r és la *mida* de la hiperresolució.

El teorema 2.15 de [29, Exposé I] assegura l'existència d'hiperresolucions:

3.1.9 Teorema *Si S és una k-varietat existeix una hiperresolució cúbica augmentada $Z_\bullet$ de S de tipus $\square_r$ tal que*

$$\dim Z_\alpha \leq \dim S - |\alpha| + 1, \textit{ per tot } \alpha \in \square_r.$$

3.1.1.1 La categoria d'hiperresolucions

Sigui $u : S \to T$ un morfisme de I-varietats. Si $a : X_\bullet \to S$ i $b : Y_\bullet \to T$ són hiperresolucions cúbiques de S i T respectivament, $X_\bullet$ de tipus $I \times \square_s$ i $Y_\bullet$ de tipus $I \times \square_t$. Aleshores un morfisme d'hiperresolucions cúbiques de $X_\bullet$ en $Y_\bullet$ sobre u és un morfisme $f_\bullet : X_\bullet \to Y_\bullet$ de diagrames de tipus $I \times \square_s \to I \times \square_t$ de la forma $Id \times \delta$, $\delta \in \Pi$, tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\bullet \arrow[r, "f_\bullet"] \arrow[d, "a"] & Y_\bullet \arrow[d, "b"] \\ S \arrow[r, "u"] & T \end{tikzcd}$$

commuta.

Notem per $\mathbf{Hrc}(I-\mathbf{Sch})$ la categoria d'hiperresolucions cúbiques de I-varietats. Hi ha un functor

$$w : \mathbf{Hrc}(I-\mathbf{Sch}) \longrightarrow I-\mathbf{Sch}$$

definit per $w(X_\bullet) = S$ si $X_\bullet$ és una hiperresolució cúbica de S i $w(f_\bullet) = u$ si $f_\bullet$ és un morfisme d'hiperresolucions cúbiques sobre u.

Sigui $\Sigma_{I-\mathbf{Sch}}$ el conjunt dels morfismes $f_\bullet$ de $\mathbf{Hrc}(I - Sch)$ tals que $w(f_\bullet)$ és la identitat. Notem per $\mathrm{Ho}\mathbf{Hrc}(I-Sch)$ la categoria que s'obté localitzant la categoria d'hiperresolucions respecte els morfismes de $\Sigma_{I-\mathbf{Sch}}$:

$$\mathrm{Ho}\mathbf{Hrc}(I - Sch) = \mathbf{Hrc}(I - Sch)[\Sigma^{-1}_{I-\mathbf{Sch}}].$$

Amb aquestes definicions podem enunciar un dels teoremes importants de [29, Exposé I] i el seu corol·lari:

3.1.10 Teorema [29, I.3.8] *El functor*

$$\mathrm{Ho}(w) : \mathrm{Ho}\mathbf{Hrc}(I - \mathbf{Sch}) \longrightarrow I - \mathbf{Sch}$$

és una equivalència de categories.

3.1.11 Corol·lari [29, I.3.10] *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria. Notem per*

$$w^* : \mathbf{Cat}(I - \mathbf{Sch}, \mathcal{C}) \longrightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{Hrc}(I - \mathbf{Sch}), \mathcal{C})$$

el functor definit per $w^*(F) = F \circ w$. Aleshores w^* indueix una equivalència entre la categoria $\mathbf{Cat}(I - \mathbf{Sch}, \mathcal{C})$ i la subcategoria plena de $\mathbf{Cat}(\mathbf{Hrc}(I - \mathbf{Sch}), \mathcal{C})$ definida pels functors

$$G : \mathbf{Hrc}(I - \mathbf{Sch}) \longrightarrow \mathcal{C}$$

que verifiquen la condició següent:
(DC) Per tot morfisme f de $\Sigma_{I-\mathbf{Sch}}$, $G(f)$ és un isomorfisme de $\mathcal{C}$.

En particular, per a definir un functor $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathcal{C}$ n'hi ha prou amb definir un functor $F' : \mathbf{Hrc}(\mathbf{Sch}(k)) \to \mathcal{C}$ tal que envia els morfismes de $\Sigma_{\mathbf{Sch}(k)}$ a isomorfismes.

3.1.2 Functors rectificats

Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i $\mathcal{D}$ una categoria de descens cohomològic. Si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és un functor contravariant i $\mathbf{X}$ és un diagrama cúbic de $\mathcal{C}$, aleshores el diagrama $F(\mathbf{X})$ és un codiagrama cúbic de $\mathcal{D}$ al qual podem aplicar el functor simple i obtenir l'objecte $\mathbf{s}F(\mathbf{X})$.

En algunes aplicacions es parteix d'un functor

$$G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

que pren valors en la categoria homotòpica. Si $\mathbf{X}$ és un diagrama cúbic de $\mathcal{C}$, el diagrama $G(\mathbf{X})$ és un codiagrama cúbic de $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$. En aquest codiagrama els morfismes estan definits en la categoria homotòpica i no podem aplicar directament el functor simple.

En aquest apartat recordem la definició de functor Φ-rectificat, que permet resoldre aquesta situació. Per a més detalls vegeu la secció 1.6 de [32].

Sigui $\mathcal{D}$ una categoria amb E una classe saturada de morfismes i I un tipus de diagrama. En la categoria de I-codiagrames $(I, \mathcal{D})$ considerem la classe saturada de morfismes definits per E vèrtex a vèrtex, la qual defineix la categoria $\mathrm{Ho}(I, \mathcal{D})$.

Considerem Φ la categoria de tipus de diagrames ordenables finits (definició 3.1.7).

3.1.12 Definició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria, $\mathcal{D}$ una categoria amb una classe saturada de morfismes i $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ un functor contravariant. Una* Φ-rectificació G_Φ *de G ve donada per:*

(R1) per tot tipus de diagrama ordenable finit J, un functor

$$G_J : (J^{op}, \mathcal{C}) \to \mathrm{Ho}(J, \mathcal{D}),$$

(R2) si $\mathbf{1}$ és la categoria puntual, un isomorfisme de functors $G_{\mathbf{1}} \cong G$, i

(R3) per tot morfisme $\delta : I \to J$ de Φ un isomorfisme natural de functors

$$G_\delta : G_I \circ \delta^*_{\mathcal{C}} \longrightarrow \delta^*_{\mathcal{D}} \circ G_J,$$

tal que

$$G_{id_I} = id_{G_I}, G_{\delta' \circ \delta} = (\delta^*_{\mathcal{D}} * G_{\delta'}) \circ (G_\delta * \delta'^*_{\mathcal{C}}),$$

i tal que si $\tau : \delta \to \delta'$ és una transformació natural de functors, el diagrama

$$\begin{tikzcd} G_I \circ \delta'^*_{\mathcal{C}} \arrow[r, "G_I * \tau"] \arrow[d, "G_{\delta'}"] & G_I \circ \delta^*_{\mathcal{C}} \arrow[d, "G_\delta"] \\ \delta'^*_{\mathcal{D}} \circ G_J \arrow[r, "\tau * G_J"] & \delta^*_{\mathcal{D}} \circ G_J \end{tikzcd}$$

és commutatiu en $\mathrm{Ho}(I, \mathcal{D})$.

Diem que un functor $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ és un functor Φ-rectificat *si disposa d'una Φ-rectificació.*

És clar que si $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ és un functor, $\mathcal{D}$ una categoria de descens, el functor induït $\mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ disposa d'una Φ-rectificació canònica.

3.1.13 Definició *Una transformació natural de functors contravariants Φ-rectificats $\theta : F \to G$ ve donada per*

(MR) per tot tipus de diagrama ordenable finit I, un morfisme natural $\theta_I : G_I \to F_I$ tal que, per tot morfisme $\delta : I \to J$ de Φ i tot J-diagrama $Y : J^{op} \to \mathcal{C}$ de C, el diagrama de morfismes de $\mathrm{Ho}(I, \mathcal{D})$

$$\begin{tikzcd} G_I(\delta^* Y) \arrow[r, "G_\delta"] \arrow[d, "\theta_I(\delta^* Y)"] & \delta^* G_J(Y) \arrow[d, "\delta^* \theta_J(Y)"] \\ F_I(\delta^* Y) \arrow[r, "F_\delta"] & \delta^* F_J(Y) \end{tikzcd}$$

és commutatiu.

La transformació θ és un isomorfisme si θ_I és un isomorfisme per tot tipus de diagrama ordenable finit I.

3.1.14 Proposició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i $\mathcal{D}$ una categoria de descens cohomològic. Sigui $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ un functor contravariant Φ-rectificat. Si $\mathbf{X}$ és un diagrama cúbic de $\mathcal{C}$, aleshores l'objecte $\mathbf{s}G_\Phi(\mathbf{X})$ de $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$ està ben definit, i hi ha definit un functor Φ-rectificat*

$$\mathbf{s}G : Diag_{\Pi\times\Pi^+}\mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{D}.$$

Demostració: Vegeu [32, 1.6.8]. □

Per simplificar les notacions, si $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ és un functor Φ-rectificat, es nota igualment G la seva rectificació, i si $\mathbf{X}$ és un diagrama cúbic de $\mathcal{C}$, notem per $\mathbf{s}G(\mathbf{X})$ l'objecte $\mathbf{s}G_\Phi(\mathbf{X})$ de $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$.

3.1.15 Definició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria i $\mathcal{D}$ una categoria de descens cohomològic. Sigui $G : \mathcal{C} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ un functor contravariant Φ-rectificat. Un diagrama cúbic $\mathbf{X}$ de $\mathcal{C}$ és* G-acíclic *si l'objecte $\mathbf{s}G(\mathbf{X})$ de $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$ és acíclic.*

3.1.3 El teorema d'extensió

3.1.16 Definició *Un diagrama cartesià de k-varietats*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{Y} \arrow[r, "j"] \arrow[d, "g"] & \widetilde{X} \arrow[d, "f"] \\ Y \arrow[r, "i"] & X \end{tikzcd}$$

és un quadrat acíclic elemental *si és un quadrat acíclic (definició 3.1.1) i a més*

(i) totes les varietats en el diagrama són irreductibles i llises, i

(ii) f és el blow-up *de X a través de Y.*

Estem en disposició d'enunciar el teorema d'extensió de Guillén i Navarro.

3.1.17 Teorema [32, 2.1.5] *Sigui $\mathcal{D}$ una categoria de descens cohomològic i*

$$G : \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

un functor contravariant Φ-rectificat que satisfà les següents condicions:

(F1) *$G(\emptyset) = 1$, i el morfisme canònic $G(X \sqcup Y) \longrightarrow G(X) \times G(Y)$ és un isomorfisme,*

(F2) *si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic elemental en $\mathbf{Sm}(k)$, aleshores $\mathbf{s}G(X_\bullet)$ és acíclic.*

Aleshores hi ha una extensió de G a un functor Φ-rectificat

$$GD : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

tal que satisfà la condició de descens

(D) *si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic en $\mathbf{Sch}(k)$, $\mathbf{s}GD(X_\bullet)$ és acíclic.*

A més, aquesta extensió és essencialment única: si G' és una altra extensió de G satisfent la propietat de descens (D)*, aleshores hi ha determinat un únic isomorfisme de functors Φ-rectificats $GD \Rightarrow G'$.*

3.1.18 Remarca Sempre notem l'objecte inicial per 0 i l'objecte final per 1.

Diem que el functor GD ha estat obtingut de G per descens.

La demostració del teorema de Guillén i Navarro dóna més que l'enunciat anterior. De fet, si X és una varietat algebraica i $X_\bullet \longrightarrow X$ és una hiperresolució cúbica, es demostra [32] que, amb les hipòtesis del teorema,

$$GD(X) = \mathbf{s}G(X_\bullet),$$

dóna un functor ben definit de $\mathbf{Sch}(k)$ a $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$, independent de la hiperresolució $X_\bullet$ triada. A partir d'aquesta presentació explícita deduïm en la secció següent algunes propietats addicionals de l'extensió de descens GD.

Guillén i Navarro apliquen el teorema d'extensió (i variants del teorema) a l'homotopia de De Rham algèbrica, al complex filtrat de Hodge-De Rham i a la teoria de motius de Grothendieck. Hanamura [35] l'aplica als grups de Chow. Ha estat també recentment aplicat per Levine i Krishna [50] als grups de Chow additius.

3.1.4 Propietats de les teories de descens

Observem primer que si tenim un functor $G : \mathbf{Sm}(k) \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ que ja satisfà la propietat (D) de descens, aleshores per unicitat de l'extensió hi ha un isomorfisme $G \cong GD$.

3.1.19 Proposició *Suposem que el functor G en el teorema* 3.1.17 *és de fet definit per a totes les varietats, això és, tenim $G : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{D}$, i satisfà* (F1) *i* (F2). *Aleshores hi ha una transformació natural de functors Φ-rectificats $G \Rightarrow GD$.*

DEMOSTRACIÓ: Sigui X una varietat i $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica de X, indexada per un tipus cúbic $\square$. El diagrama augmentat $X_\bullet \to X$ té una rectificació $G_\Phi(X_\bullet \to X)$. Prenent el simple del morfisme de diagrames cúbics

$$G_\Phi(X) \times \square \longrightarrow G_\Phi(X_\bullet)$$

obtenim el morfisme

$$\mathbf{s}(G_\Phi(X) \times \square) \longrightarrow \mathbf{s}G_\Phi(X_\bullet) = GD(X).$$

Ara la transformació natural $\lambda_\square$ de la definició de categoria de descens dóna un morfisme natural

$$G_\Phi(X) \to \mathbf{s}(G_\Phi(X) \times \square).$$

Composant els dos morfismes obtenim un morfisme natural

$$G_\Phi(X) \to \mathbf{s}G_\Phi(X_\bullet)$$

el qual determina una transformació natural de functors Φ-rectificats $G \Rightarrow GD$. $\square$

A partir de la construcció i propietats de les hiperresolucions cúbiques, es demostra que el functor estès GD hereta moltes propietats del functor G sobre les varietats llises. A continuació veiem algunes d'aquestes propietats.

3.1.20 Definició *Sigui $\mathcal{M}$ una subcategoria de $\mathbf{Sch}(k)$. Un functor contravariant Φ-rectificat $G : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$ és* homotòpicament invariant *si per tota varietat $X \in \mathcal{M}$ la projecció*

$$X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$$

indueix un isomorfisme

$$G(X) \xrightarrow{\cong} G(X \times \mathbb{A}^1).$$

3.1.21 Proposició *Sigui G un functor que satisfà les hipòtesis del teorema* 3.1.17. *Si G és homotòpicament invariant (per a les varietats llises) aleshores GD és homotòpicament invariant.*

DEMOSTRACIÓ: Donada X una varietat algebraica, fixem una hiperresolució cúbica de X, $X_\bullet$. És clar que $\mathrm{X}_\bullet \times \mathbb{A}^1$ és una hiperresolució cúbica de $X \times \mathbb{A}^1$. Considerem el diagrama de varietats $X_\bullet \times \mathbb{A}^1 \to X_\bullet$ i la seva rectificació per G, $G_\Phi(X_\bullet) \to G_\Phi(X_\bullet \times \mathbb{A}^1)$.

Per la definició de GD, $GD(X) \cong \mathbf{s}G(X_\bullet)$. Per la invariància homotòpica de G i l'exactitud del simple, $\mathbf{s}G_\Phi(X_\bullet) \cong \mathbf{s}_\Phi G(X_\bullet \times \mathbb{A}^1)$. Ara, com que $\mathrm{X}_\bullet \times \mathbb{A}^1$ és una hiperresolució cúbica de $X \times \mathbb{A}^1$, $\mathbf{s}G(X_\bullet \times \mathbb{A}^1) \cong GD(X \times \mathbb{A}^1)$. □

3.1.22 Definició *Sigui $\mathcal{M}$ una subcategoria de* $\mathbf{Sch}(k)$. *Un functor contravariant Φ-rectificat*

$$G : \mathcal{M} \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

amb $\mathcal{D}$ una categoria de descens té la propietat de Mayer-Vietoris *si per qualsevol varietat $X \in \mathcal{M}$ i una descomposició per oberts $X = U \cup V$, el quadrat induït per les inclusions*

$$\begin{tikzcd} X & U \arrow[l] \\ V \arrow[u] & U \cap V \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

és G-acíclic (definició 3.1.15).

3.1.23 Proposició *Considerem les hipòtesis del teorema* 3.1.17. *Suposem que G té la propietat de Mayer-Vietoris (per a les varietats llises). Aleshores GD té la propietat de Mayer-Vietoris per a totes les varietats.*

Demostració: Donada X una varietat algebraica, fixem $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica de X de tipus $\square$.

Per la definició d'hiperresolució cúbica, les restriccions de $X_\bullet$ en U, V i $U \cap V$ donen hiperresolucions d'aquestes varietats. Notem per $U_\bullet, V_\bullet$ i $(U \cap V)_\bullet$, respectivament, aquestes restriccions.

Considerem el $\square \times \square_1^+$-diagrama

$$\begin{tikzcd} X_\bullet & U_\bullet \arrow[l] \\ V_\bullet \arrow[u] & (U \cap V)_\bullet \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$$

i la seva rectificació G_Φ.

Per construcció, per tot índex α tenim una descomposició oberta $X_\alpha = U_\alpha \cup V_\alpha$ amb $U_\alpha \cap V_\alpha = (U \cap V)_\alpha$, de manera que per la propietat de Mayer-Vietoris per a G i la propietat (CD8)^{op} de categoria de descens, deduïm que els morfismes

$$G_\Phi(X_\alpha) \longrightarrow \mathbf{s}\left(\begin{tikzcd} & G_\Phi(U_\alpha) \arrow[d] \\ G_\Phi(V_\alpha) \arrow[r] & G_\Phi((U\cap V)_\alpha) \end{tikzcd}\right)$$

són equivalències febles per tot α.

Per la propietat d'exactitud de les categories de descens tenim que

$$\mathbf{s}G_\Phi(X_\bullet) \longrightarrow \mathbf{s}_\alpha\mathbf{s}\left(\begin{tikzcd} & G_\Phi(U_\alpha) \arrow[d] \\ G_\Phi(V_\alpha) \arrow[r] & G_\Phi((U\cap V)_\alpha) \end{tikzcd}\right)$$

també és una equivalència feble. Però per l'axioma de factorització de les categories de descens, el simple de la dreta és feblement equivalent a

$$\mathbf{s}\left(\begin{tikzcd} & \mathbf{s}G_\Phi(U_\bullet) \arrow[d] \\ \mathbf{s}G_\Phi(V_\bullet) \arrow[r] & \mathbf{s}G_\Phi((U\cap V)_\bullet) \end{tikzcd}\right)$$

Per tant, tenint en compte la definició de GD deduïm que el diagrama $\begin{tikzcd} X & U \arrow[l] \\ V \arrow[u] & U\cap V \arrow[l] \arrow[u] \end{tikzcd}$ és GD-acíclic. □

A diferència de les dues propietats anteriors (de Mayer-Vietoris i d'invariància homotòpica), la següent propietat només la definim per a functors que prenen valors en la categoria de descens i no en la categoria localitzada.

3.1.24 Definició *Sigui $\mathcal{M} = \mathbf{Sch}(k)$ o bé $\mathcal{M} = \mathbf{Sm}(k)$. Un functor $G : \mathcal{M} \to \mathcal{D}$, $\mathcal{D}$ una categoria de descens, té la* propietat del fibrat projectiu *si donat $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial sobre X de rang r i $\pi : \mathbf{P}\mathcal{E} \to X$ el fibrat projectiu associat, aleshores hi ha una equivalència feble*

$$\prod^r G(X) \xrightarrow{\simeq} G(\mathbf{P}\mathcal{E}),$$

compatible amb el pullback, *i.e. si $p : Y \to X$ és un morfisme de varietats i $\mathbf{P}(\mathcal{E}_Y)$ el fibrat projectiu associat a $\mathcal{E}_Y = p^*(\mathcal{E})$ aleshores el quadrat*

$$\begin{tikzcd} \prod^r G(Y) \arrow[r] \arrow[d] & G(\mathbf{P}\mathcal{E}_Y) \arrow[d] \\ \prod^r G(X) \arrow[r] & G(\mathbf{P}\mathcal{E}) \end{tikzcd}$$

és commutatiu.

3.1.25 Proposició *Sigui $G : \mathbf{Sm}(k) \to \mathcal{D}$ un functor que compleix les hipòtesis del teorema* 3.1.17. *Si G té la propietat del fibrat vectorial (per a les varietats llises) aleshores donada X una varietat, $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial sobre X de rang r i $\pi : \mathbf{P}\mathcal{E} \to X$ el fibrat projectiu associat hi ha un isomorfisme (en* $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$*)*

$$\prod^{r} GD(X) \simeq GD(\mathbf{P}\mathcal{E}).$$

Demostració: Donada X una varietat algebraica, fixem $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica de X de tipus $\square$. Notem per p l'augmentació $p : X_\bullet \to X$. Sigui $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial sobre X de rang r i $\pi : \mathbf{P}\mathcal{E} \to X$ el fibrat projectiu associat.

Donat $\alpha \in \Pi$, considerem el fibrat vectorial sobre X_α donat per $\mathcal{E}_\alpha = p^*(\mathcal{E})$, i el seu fibrat projectiu associat $\mathbf{P}(\mathcal{E}_\alpha)$. Observem que com que X_α és llisa, $\mathbf{P}(\mathcal{E}_\alpha)$ també és llisa. Per [25, (4.1.3)] hi ha un isomorfisme canònic

$$\mathbf{P}(\mathcal{E}_\alpha) \cong X_\alpha \times_X \mathbf{P}(\mathcal{E}).$$

Els $\mathbf{P}(\mathcal{E}_\alpha)$ defineixen un diagrama cúbic i una augmentació $\mathbf{P}(\mathcal{E}_\bullet) \to \mathbf{P}(\mathcal{E})$. Afirmem que $\mathbf{P}(\mathcal{E}_\bullet)$ és una hiperresolució cúbica de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. Per la construcció de les hiperresolucions n'hi ha prou amb veure que si Z és una varietat sobre X i

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{W} \arrow[r] \arrow[d] & \widetilde{Z} \arrow[d, "f"] \\
W \arrow[r, "i"'] & Z
\end{tikzcd}$$

és una 2-resolució de Z, aleshores

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X \widetilde{W} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X \widetilde{Z} \arrow[d] \\
\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X W \arrow[r] & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X Z
\end{tikzcd}$$

és una 2-resolució de $\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X Z$. Això és clar ja que en el cub

$$\begin{tikzcd}
& \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X \widetilde{W} \arrow[rr] \arrow[dl] \arrow[dd] & & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X \widetilde{Z} \arrow[dl] \arrow[dd] \\
\mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X W \arrow[rr] \arrow[dd] & & \mathbf{P}(\mathcal{E}) \times_X Z \arrow[dd] & \\
& \widetilde{W} \arrow[rr] \arrow[dl] & & \widetilde{Z} \arrow[dl] \\
W \arrow[rr] & & Z &
\end{tikzcd}$$

les cares laterals són *pullbacks*, i les condicions de 2-resolució de la cara inferior passen per *pullback* a la cara superior. Per exemple i és una immersió tancada, i aquesta propietat és estable per extensió de base.

Tenim doncs que $\mathbf{P}(\mathcal{E}_\bullet)$ és una hiperresolució cúbica de $\mathbf{P}(\mathcal{E})$. Finalment per multiplicativiat i invariància homotòpica del simple tenim

$$\prod^{r} GD(X) = \prod^{r} \mathbf{s}_\alpha G(X_\alpha) \cong \mathbf{s}_\alpha \prod^{r} G(X_\alpha) \cong \mathbf{s}_\alpha G(\mathbf{P}(\mathcal{E}_\alpha)) = GD(\mathbf{P}(\mathcal{E})),$$

tal i com volíem veure. □

Donada X una varietat sobre k, notem per $X[T]$ i $X[T,T^{-1}]$ les varietats $X \times_k Spec(k[T])$ i $X \times_k Spec(k[T,T^{-1}])$. La darrera propietat que considerem de les teories de descens és per a functors que prenen valors en la categoria d'espectres fibrants.

3.1.26 Proposició *Sigui* $G : \mathbf{Sm}(k) \to \mathbf{Sp}$ *un functor en espectres fibrants tal que compleix les hipòtesis del teorema* 3.1.17*. Suposem que donada* X *una varietat llisa, hi ha una equivalència feble natural d'espectres*

$$G(X[T,T^{-1}]) \simeq G(X) \times G(X)[1].$$

Aleshores donada X *una varietat, hi ha un isomorfisme en* $\mathrm{Ho}\mathcal{D}$

$$GD(X[T,T^{-1}]) \cong GD(X) \times GD(X)[1].$$

DEMOSTRACIÓ: Donada X una varietat algebraica, fixem $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica de X de tipus $\square$.

Denotem per $X_\bullet[T,T^{-1}]$ el diagrama cúbic que en l'índex α és $X_\alpha[T,T^{-1}]$. És clar que $X_\bullet[T,T^{-1}]$ és una hiperresolució cúbica de $X[T,T^{-1}]$. Per tant $GD(X[T,T^{-1}]) \cong \mathbf{s}G(X_\alpha[T,T^{-1}])$. Per invariància homotòpica del simple, per hipòtesi i per multiplicativitat del simple tenim equivalències febles d'espectres

$$\mathbf{s}G(X_\alpha[T,T^{-1}]) \simeq \mathbf{s}(G(X_\alpha) \times G(X_\alpha)[1]) \simeq \mathbf{s}G(X_\alpha) \times \mathbf{s}(G_\phi(X_\alpha)[1]).$$

El functor simple d'un diagrama cúbic d'espectres commuta amb el functor de desplaçament, ja que el límit homotòpic d'un diagrama d'espectres es pot calcular grau a grau (vegeu [71, 5.6]) i per tant

$$\mathbf{s}G(X_\alpha[T,T^{-1}]) \simeq \mathbf{s}G(X_\alpha) \times (\mathbf{s}G_\phi(X_\alpha))[1].$$

Finalment aquest darrer espectre és $GD(X) \times GD(X)[1]$. □

3.1.5 Extensió amb suport compacte

En [32], els autors presenten diverses variacions del teorema principal. En aquesta secció considerem l'extensió corresponent a una teoria amb suport compacte.

Notem per $\mathbf{Sch}_c(k)$ la subcategoria de $\mathbf{Sch}(k)$ amb els mateixos objectes però amb els morfismes propis i per $\mathbf{V}(k)$ la categoria de les varietats projectives i llises.

3.1.27 Teorema [32, 2.2.2] *Sigui*

$$G : \mathbf{V}(k) \to \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

un functor contravariant Φ-rectificat que verifica les condicions (F1) *i* (F2) *del teorema* 3.1.17. *Aleshores hi ha una extensió de G en un functor contravariant Φ-rectificat*

$$G^c : \mathbf{Sch}_c(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathcal{D}$$

que satisfà la propietat de descens (D) i, a més,

(D$_c$) *si Y és una subvarietat de X, aleshores hi ha un isomorfisme natural*

$$G^c(X-Y) \cong s_{\square_0^+}(G^c(X) \longrightarrow G^c(Y)).$$

La propietat (D$_c$) és una propietat d'excisió que implica Mayer-Vietoris:

3.1.28 Proposició *Considerem les hipòtesis del teorema* 3.1.27. *Suposem que $\mathcal{D}$ satisfà* (CD3b)^{op} *(vegeu la secció* 2.2.6). Aleshores el functor G^c té la propietat de Mayer-Vietoris.

Demostració: Sigui X una varietat i U, V oberts que recobreixen X. Considerem $X-U$ com a subvarietat tancada de X amb l'estructura reduïda. Usant la propietat (D$_c$), el simple del diagrama

$$\begin{tikzcd} G^c(X) \arrow[r] \arrow[d] & G^c(X-U) \arrow[d] \\ G^c(V) \arrow[r] & G^c(X-U) \end{tikzcd}$$

calculat per files és

$$\mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(U) \to G^c(U \cap V)),$$

i calculat per columnes és

$$\mathbf{s}_{\square_0^+}(\mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(X) \to G^c(V)) \longrightarrow G^c(\emptyset)) = \mathbf{s}_{\square_1}(\mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(X) \to G^c(V)) \to 1 \leftarrow 1),$$

que és isomorf a $\mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(X) \to G^c(V))$, per (CD3b)^{op}.

Tenim doncs que el quadrat

$$\begin{tikzcd} G^c(X) \arrow[r] \arrow[d] & G^c(U) \arrow[d] \\ G^c(V) \arrow[r] & G^c(U \cap V) \end{tikzcd}$$

és acíclic ja que el seu simple calculat per columnes és

$$\mathbf{s}_{\square_0^+}(\mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(X) \to G^c(V)) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(U) \to G^c(U \cap V)))$$

i pel càlcul anterior el morfisme

$$\mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(X) \to G^c(V)) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_0^+}(G^c(U) \to G^c(U \cap V))$$

és una equivalència feble. Per tant G^c té la propietat de Mayer-Vietoris. $\square$

3.1.29 Remarca L'extensió amb suport compacte G^c hereta moltes de les propietats de G per a les varietats llises, anàlogament al que hem vist en la secció anterior per a GD. Així per exemple si G té la propietat d'invariància homotòpica per a les varietats llises, G^c la té per a totes les varietats.

3.2 Successions espectrals

En aquesta secció agrupem les successions espectrals que permeten estudiar functors que prenen valors en la categoria d'espectres a través dels grups d'homotopia d'aquests.

En primer lloc tractem les successions espectrals associades a codiagrames d'espectres. En general un codiagrama d'espectres té associada una successió espectral amb límit els grups d'homotopia del límit homotòpic del codiagrama, que s'anomena successió espectral de Bousfield-Kan. La successió espectral de Bousfield-Kan es dedueix a partir de la successió espectral d'una torre de fibracions. Com que estem interessats en els diagrames cúbics, tractem específicament la successió espectral de Bousfield-Kan d'un codiagrama cúbic d'espectres i hi identifiquem el terme E_2 com una cohomologia de Čech.

En segon lloc tractem la successió espectral que s'aplica a functors $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathbf{Sp}$ a partir de recobriments d'una varietat (secció 3.2.4, "Descens de Čech"). Aquesta successió s'obté a partir dels codiagrames d'espectres que es construeixen a partir dels recobriments.

Més endavant tractarem encara una altra successió espectral que es deriva de la successió de Bousfield-Kan: la successió espectral d'hipercohomologia per a un prefeix d'espectres en el *site* de Zariski d'una varietat X (vegeu secció 3.3.5).

3.2.1 Successió espectral d'una torre de fibracions

Una *torre de fibracions* $X(-)$ és una seqüència de fibracions d'espectres

$$\ldots \longrightarrow X(n) \longrightarrow X(n-1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow X(1) \longrightarrow X(0) \longrightarrow *.$$

Un morfisme de torres és un morfisme de diagrames. Notem per $\mathbf{tow}(\mathbf{Sp})$ la categoria de torres de fibracions.

L'estructura de categoria de models simplicial de $\mathbf{Sp}$ permet definir una estructura de categoria de models simplicial en $\mathbf{tow}(\mathbf{Sp})$, on les equivalències febles estan definides grau a grau (vegeu [22, VI.1]).

Donada una torre de fibracions d'espectres, les successions exactes en homotopia donen lloc a una successió espectral, que detallem en aquesta secció.

Sigui

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & X(n) \arrow[r] & X(n-1) \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & X(1) \arrow[r] & X(0) \arrow[r] & * \\ & F(n) \arrow[u] & F(n-1) \arrow[u] & & F(1) \arrow[u] & F(0) \arrow[u] & \end{tikzcd}$$

una torre de fibracions, on $F(n)$ és la fibra de $X(n) \to X(n-1)$. Posem

$$X = \lim X(n).$$

Cada fibració dóna lloc a una successió exacta llarga

$$\cdots \to \pi_k F(n) \xrightarrow{\gamma} \pi_k X(n) \xrightarrow{\alpha} \pi_k X(n-1) \xrightarrow{\beta} \pi_{k-1} F(n) \to \cdots .$$

Donat q enter i $p \geq 0$, prenem $D_1^{p,q} = \pi_{q-p} X(p)$ i $E_1^{pq} = \pi_{q-p} F(p)$. Obtenim un parell exacte de grups abelians $\{D_1^{p,q}, E_1^{p,q}, \alpha, \beta, \gamma\}$ amb bigraus $(-1,-1), (1,0)$ i $(0,0)$, i d'aquí una successió espectral.

Les diferencials estan indexades $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$. La primera diferencial és $d_1 = \beta\gamma$. La diferencial d_r està induïda per $\beta \cdot (\alpha^{r-1})^{-1} \cdot \gamma$.

3.2.1 Remarca Observem que el bigrau de la diferencial no és l'usual. Si fem el canvi $\bar{E}_1^{p,q} = E_1^{p,-q}$ obtenim les diferencials amb el bigrau habitual. Aquesta indexació peculiar es mantindrà posteriorment en la successió espectral de Bousfield-Kan, i és la que fa servir Thomason en [71]. D'altres autors, com per exemple [19], fan el canvi d'indexació.

Com que $\mathrm{colim}_p\, \pi_n X(p) = 0$, la successió espectral és, en la terminologia de Boardman [3], condicionalment convergent a

$$H_n = \lim_p \pi_n X(p).$$

Filtrem pels nuclis

$$F_r H_n = \ker(H_n \to \pi_n X(r)).$$

Aquesta filtració de H_n pels subgrups $F_r H_n = \ker(H_n \to \pi_n X(r))$ és completa i Hausdorff [3, Lemma 5.4]. A més com que $\mathrm{colim}_p\, \pi_n X(p) = 0$ la filtració és exhaustiva. Seguint la nomenclatura de Boardman [3], tenim que la successió espectral *convergeix fortament* a $H_n = \lim \pi_n X(p)$ si tenim isomorfismes

$$E_\infty^{p,q} \cong F_p H_{q-p}/F_{p+1} H_{q-p}.$$

3.2.2 Proposició [3, Theorem 7.4]

Sigui $E^{p,q}$ la successió espectral d'una torre de fibracions $X()$. Són equivalents:

(i) $\lim_r^1 E_r^{p,q} = 0$

(ii) $\lim_p^1 \pi_n X(p) = 0$ *i la successió espectral és fortament convergent a* $H_n = \lim_p \pi_n X(p)$.

Fins aquí hem considerat la successió espectral des del punt de vista algebraic. Des del punt de vista geomètric apareixen els grups $\pi_n X = \pi_n(\lim_p X(p))$.

La successió exacta de Milnor ens relaciona $\pi_n(\lim_p X(p))$ i $\lim_p \pi_n X(p)$. Donada $X()$ una torre de fibracions i n qualsevol, hi ha una successió exacta natural de Milnor [71, Lemma 5.41]

$$0 \longrightarrow \lim_p{}^1 \pi_{n+1} X(p) \longrightarrow \pi_n(\lim_p X(p)) \longrightarrow \lim_p \pi_n X(p) \longrightarrow 0.$$

Per tant si es dóna la condició $\lim_p^1 \pi_{n+1} X(p) = 0$ tenim un isomorfisme

$$\pi_n(\lim X(p)) \cong \lim \pi_n X(p),$$

i el límit de la successió espectral té significat geomètric.

Si la successió espectral col·lapsa, la condició $\lim_r^1 E_r^{p,q} = 0$ es compleix i per tant tenim:

3.2.3 Lema *Sigui $E^{p,q}$ la successió espectral d'una torre de fibracions $X()$ i $X = \lim X(n)$. Si $d_r = 0$ per $r \geq N$, aleshores la successió espectral convergeix fortament a $\pi_{q-p}X$.*

3.2.4 Lema *Sigui $E^{p,q}$ la successió espectral d'una torre de fibracions $X()$ i $X = \lim X(n)$. Si o bé*

(i) $\exists a$ tal que $E_2^{p,q} = 0$ per $p > a$; o bé

(ii) $\exists b$ tal que $E_2^{p,q} = 0$ per $q > b$,

aleshores la successió espectral convergeix fortament a $\pi_{q-p}X$ i la filtració de $\pi_k X$ és finita i de longitud com a molt a en el cas (i) i com a molt $b - k$ en el cas (ii).

En particular, si la torre és finita, i.e. $X(p) = X(N)$ per $p \geq N$, tenim que $F(p) = *$ per $p \geq N$ i estem en el cas (i) del lema.

3.2.2 Successió espectral de Bousfield-Kan

Donat un codiagrama d'espectres fibrants $X : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbf{Sp}$, la successió espectral de Bousfield-Kan es construeix prenent el reemplaçament cosimplicial del codiagrama i considerant la successió espectral d'un objecte cosimplicial (vegeu [71, Proposition 5.29]), la qual es dedueix de la successió espectral d'una torre de fibracions.

La successió espectral de Bousfield-Kan també s'anomena successió espectral d'homotopia. El terme $E_2^{p,q}$ s'identifica com la cohomologia de la categoria $\mathcal{C}$ amb coeficients en el functor $\pi_q X$.

3.2.5 Definició *La cohomologia $H^p(\mathcal{C}, G)$ d'una categoria amb coeficients en un functor $G : \mathcal{C} \to Ab$ és el p-è functor derivat del límit:*

$$H^p(\mathcal{C}, G) = \lim{}^{(p)} G.$$

3.2.6 Proposició [71, Proposition 5.13] *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria petita i $X : \mathcal{C} \to \mathbf{Sp}$ un functor en espectres fibrants. Aleshores hi ha una successió espectral natural*

$$E_2^{p,q} = \left\{ \begin{matrix} H^p(\mathcal{C}; \pi_q X) & si\ p \geq 0 \\ 0 & altrament \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi_{q-p} \operatorname*{holim}_{\mathcal{C}} X.$$

Les diferencials estan indexades $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$. La convergència és forta si $\mathcal{C}$ té dimensió cohomològica finita o si $\pi_q X = 0$ per $q > N$.

3.2.7 Lema [71, Lemma 5.3.1] *El terme $E_2^{p,q}$ de la successió espectral* 3.2.6 *per a un espectre cosimplicial $X : \Delta \to \mathbf{Sp}$ és la cohomologia p-ena del grup cosimplicial $\pi_q X$.*

3.2.8 Remarca Si apliquem la successió espectral de Bousfield-Kan a una torre de fibracions, la successió espectral es redueix a les successions exactes curtes de Milnor [6, XI.7.4]

3.2.3 Successió espectral per a un codiagrama cúbic d'espectres

Abans de considerar la successió espectral per a un $\square_n$-codiagrama d'espectres tractem el cas d'un $\square_1$-codiagrama.

3.2.3.1 Successió exacta llarga d'un quadrat homotòpicament cartesià

És ben conegut que un quadrat homotòpicament cartesià d'espectres dóna lloc a una successió exacta llarga:

3.2.9 Proposició *Donat un quadrat homotòpicament cartesià d'espectres fibrants*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & C \arrow[d, "g"] \\ B \arrow[r, "j"] & D \end{tikzcd}$$

hi ha una successió exacta llarga

$$\cdots \to \pi_n A \xrightarrow{(f,-i)} \pi_n C \oplus \pi_n B \xrightarrow{j+g} \pi_n D \to \pi_{n-1} A \to \cdots .$$

DEMOSTRACIÓ: Com que el quadrat és homotòpicament cartesià, les fibres homotòpiques de f i de g són feblement equivalents. Considerem la successió exacta llarga de cada fibra homotòpica (lema 2.3.14) i per naturalitat de la successió tenim el següent diagrama commutatiu amb files exactes:

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \pi_n(\mathrm{hofib}\, f) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \pi_n(A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_n(B) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{n-1}(\mathrm{hofib}\, f) \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \pi_n(\mathrm{hofib}\, g) \arrow[r] & \pi_n(C) \arrow[r] & \pi_n(D) \arrow[r] & \pi_{n-1}(\mathrm{hofib}\, g) \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

La successió exacta llarga es dedueix aleshores del lema de Barratt-Whitehead [60, p.97] [24, 17.4]. $\square$

D'altra banda, un quadrat és homotòpicament cartesià si el vèrtex inicial és feblement equivalent al límit homotòpic de la resta (proposició 2.2.7). Per tant un $\square_1$-codiagrama d'espectres fibrants dóna lloc a una successió exacta llarga amb el límit homotòpic.

3.2.10 Corol·lari *Donat* $\mathbf{X}$ *un* $\square_1$*-codiagrama d'espectres fibrants, hi ha una successió exacta llarga*

$$\cdots \to \pi_n(\operatorname{holim}\mathbf{X}) \to \pi_n X_{01} \oplus \pi_n X_{10} \to \pi_n X_{11} \to \pi_{n-1}(\operatorname{holim}\mathbf{X}) \to \cdots .$$

3.2.3.2 Cohomologia d'una categoria cúbica com a cohomologia Čech

En aquesta secció veiem com identificar el terme $E_2^{p,q}$ de la successió de Bousfield-Kan 3.2.6 aplicada a un codiagrama cúbic d'espectres amb una cohomologia de Čech.

Sigui G un $\square_n$-codiagrama de grups abelians, $G : \square_n \longrightarrow Ab$.

Introduïm una topologia en $\square_n$ com en [49, p.4]. Els conjunts $U_\alpha = \{\beta \in \square_n | \beta \geq \alpha\}$ formen una base dels oberts de $\square_n$.

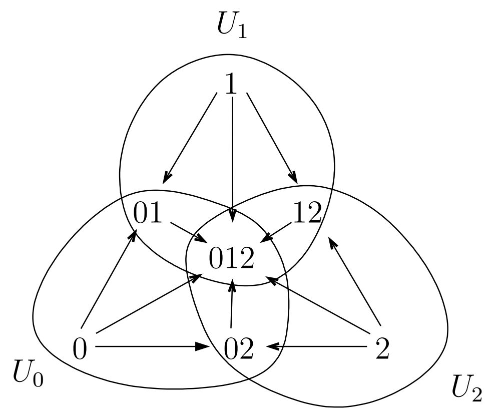

Figura 3.1: Oberts U_0, U_1, U_2 corresponents a $\square_2$.

3.2.11 Definició *El feix sobre* $\square_n$ *associat a un codiagrama de grups abelians* $G : \square_n \longrightarrow Ab$ *és el feix* T_G *definit per* $T_G(U) = \lim_{\alpha \in U} G_\alpha$.

Observem que hi ha una equivalència de categories entre la categoria dels feixos de grups abelians sobre $\square_n$ i els codiagrames de grups abelians en $\square_n$.

3.2.12 Definició *La* cohomologia de Čech d'un $\square_n$-codiagrama $G : \square_n \to Ab$, *que notem $\check{H}^p(G)$, és la cohomologia de Čech del feix T_G respecte el recobriment* $\{U_{\{0\}}, \ldots, U_{\{n\}}\}$.

El següent resultat, que identifica la cohomologia de la categoria $\square_n$ amb la seva cohomologia de Čech, també es dedueix de [51, example II.III.3.2.3, lemma II.III.3.2.6].

3.2.13 Proposició *Sigui G un $\square_n$-codiagrama de grups abelians. Aleshores la cohomologia de la categoria $\square_n$ a coeficients en el functor G, $H^p(\square_n, G) = \lim^{(p)} G$, coincideix amb cohomologia de Čech de G.*

DEMOSTRACIÓ: Raonem com en la prova de [61, lemma A.3.2.].

Com que el complex de Čech és un complex de grups abelians on cada grup és un producte i en la categoria de grups abelians els productes són exactes, tenim que $\check{H}$ és un δ-functor.

Per provar que els $\check{H}^n$ donen els functors derivats del límit n'hi ha prou amb veure que:

a) Hi ha un isomorfisme natural $\lim = \check{H}^0$.

b) Tot $\square_n$-codiagrama G es pot injectar en un codiagrama Čech-acíclic.

Per veure a) fem servir la propietat de cofinalitat. Considerem la subcategoria $\partial\square_n$ de $\square_n$ formada pels subconjunts no buits de $\{0, \ldots, n\}$ de cardinal 1 o 2. Es comprova fàcilment que aquesta subcategoria és cofinal en $\square_n$. Per cofinalitat, $\lim_{\partial\square_n} G = \lim_{\square_n} G$. Ara es comprova que $\check{H}^0(G) = \ker(\prod_i G_i \longrightarrow \prod_{\{i,j\}} G_{\{ij\}}) = \lim_{\partial\square_n} G$.

Per veure b) observem que tot codiagrama G es pot injectar en un codiagrama *flasque* [49, proposition 1.1] i que per tant és Čech-acíclic [37, proposition III.4.3].$\square$

3.2.3.3 Successió espectral per a un codiagrama cúbic d'espectres

Apliquem els resultats de les seccions anteriors a un codiagrama cúbic d'espectres fibrants $\mathbf{X} : \square_n \longrightarrow \mathbf{Sp}$.

3.2.14 Proposició *Sigui* $\mathbf{X}$ *un* $\square_n$*-codiagrama d'espectres fibrants. Aleshores hi ha una successió espectral convergent*

$$E_2^{p,q} = \left\{ \begin{matrix} H^p(\square_n; \pi_q X) & si\ p \geq 0 \\ 0 & altrament \end{matrix} \right\} \Rightarrow \pi_{q-p} \operatorname*{holim}_{\square_n} \mathbf{X}.$$

Les diferencials estan indexades $d_r : E_r^{p,q} \to E_r^{p+r,q+r-1}$*. El terme* $E_2^{p,q}$ *és igual a la cohomologia de Čech del* $\square_n$*-codiagrama de grups abelians* $\pi_q \mathbf{X}$*.*

DEMOSTRACIÓ: La successió espectral és a partir del terme E_2 la successió 3.2.6.

En aquesta situació la cohomologia de la categoria $\square_n$ a coeficients en el functor $\pi_q \mathbf{X}$ és per la proposició 3.2.13 la cohomologia de Čech del codiagrama $\pi_q \mathbf{X} : \square_n \to Ab$ (definició 3.2.12).

La convergència és deguda a la finitud de $\square_n$. $\square$

3.2.15 Remarca Donat que el terme $E_2^{p,q}$ de la successió espectral 3.2.14 és igual a la cohomologia de Čech del $\square_n$-codiagrama de grups abelians $\pi_q \mathbf{X}$, això suggereix que la successió espectral té terme $E_1^{p,q}$ igual a

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q(\mathbf{X}_\alpha),$$

de manera que $E_1^{*,q}$ és el corresponent complex de Čech. En la secció següent construïm una successió espectral amb aquest terme E_1 i que conjecturalment coincideix amb la successió 3.2.14.

3.2.16 Remarca Sigui I un conjunt ordenat dirigit, i.e. per tota parella α, β d'elements de I existeix un element $\gamma \in I$ tal que $\gamma \geq \alpha$ i $\gamma \geq \beta$. Suposem que I és numerable. Considerem $\mathcal{I}$ la categoria associada. Sigui $G : \mathcal{I}^{op} \to Ab$ un functor contravariant. Aleshores

$$\lim{}^{(p)} G = 0$$

per $p \geq 2$ (vegeu [56, 13.2] i [49, secció 2]). Aquest resultat no s'aplica en el cas d'un codiagrama $\square_n \to Ab$, ja que la categoria $\square_n^{op}$ no és pas dirigida.

3.2.3.4 Construcció alternativa

Donat un codiagrama cúbic d'espectres fibrants $\mathbf{X} : \square_n \longrightarrow \mathbf{Sp}$, la successió espectral de Bousfield-Kan es construeix prenent el reemplaçament cosimplicial del

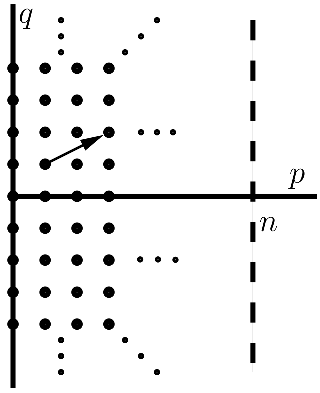

Figura 3.2: Pàgina E_2 de la successió espectral d'un $\Box_n$-codiagrama.

codiagrama i considerant la successió espectral d'un objecte cosimplicial (vegeu [71, Proposition 5.29]), la qual es dedueix de la successió espectral d'una torre de fibracions.

En aquesta secció donem una alternativa, que consisteix en construir directament una torre de fibracions a partir d'un codiagrama cúbic d'espectres fibrants. Vegeu [62, Section 3] per a una construcció similar.

El següent resultat relaciona el simple d'un codiagrama cúbic amb el simple d'un codiagrama augmentat.

3.2.17 Lema *Sigui* $\mathbf{X} : \Box_n \longrightarrow \mathbf{Sp}$ *un codiagrama cúbic d'espectres fibrants i* $\widetilde{\mathbf{X}}$ *el diagrama cúbic augmentat obtingut de* $\mathbf{X}$ *afegint* $\mathbf{X}_0 = *$. *Aleshores hi ha una equivalència feble*

$$s_{\Box_n^+}\widetilde{\mathbf{X}} \simeq \Omega s_{\Box_n}\mathbf{X}.$$

DEMOSTRACIÓ: És un corol·lari immediat de la proposició 2.2.7. $\Box$

3.2.18 Lema *Sigui* $\mathbf{X} : \Box_n \longrightarrow \mathbf{Sp}$ *un codiagrama cúbic d'espectres fibrants amb tots els morfismes que no són la identitat constants, i.e. que factoritzen per* $*$. *Aleshores hi ha una equivalència feble*

$$\operatorname*{holim}_{\Box_n} \mathbf{X} \simeq \prod_{\alpha} \Omega^{|\alpha|-1} X_\alpha.$$

DEMOSTRACIÓ: Considerem el diagrama augmentat $\widetilde{\mathbf{X}}$ del lema anterior. Per inducció s'obté que

$$\mathbf{s}_{\square_n^+}\widetilde{\mathbf{X}} = \prod_\alpha \Omega^{|\alpha|}\mathbf{X}_\alpha.$$

Pel lema anterior obtenim el resultat. $\square$

Sigui $\mathbf{X} : \square_n \to \mathbf{Sp}$ un codiagrama cúbic d'espectres fibrants.

Per $p \geq -1$ considerem el diagrames cúbics $F^p\mathbf{X}$ definits per

$$(F^p\mathbf{X})_\alpha = \begin{cases} \mathbf{X}_\alpha, & \text{if} \quad |\alpha| \leq p+1, \\ *, & \text{if} \quad |\alpha| > p+1. \end{cases}$$

Observem que $F^{-1}\mathbf{X}$ és el diagrama constant definit per $*$ i que $F^n\mathbf{X} = \mathbf{X}$. Obtenim una successió de diagrames cúbics

$$F^n\mathbf{X} \longrightarrow F^{n-1}\mathbf{X} \longrightarrow \ldots \longrightarrow F^0\mathbf{X} \longrightarrow *$$

que vèrtex a vèrtex és una successió de fibracions d'espectres. Prenent límits homotòpics respecte de l'índex cúbic, per la proposició 1.3.7 tenim una successió de fibracions

$$s_\square(F^n\mathbf{X}) \longrightarrow s_\square(F^{n-1}\mathbf{X}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow s_\square(F^0\mathbf{X}) \longrightarrow *.$$

3.2.19 Definició *La* torre de fibracions associada *a un $\square_n$-codiagrama d'espectres fibrants $\mathbf{X}$ és la torre*

$$\ldots \longrightarrow s_\square(F^n\mathbf{X}) \longrightarrow s_\square(F^n\mathbf{X}) \longrightarrow s_\square(F^{n-1}\mathbf{X}) \longrightarrow \ldots \longrightarrow s_\square(F^0\mathbf{X}) \longrightarrow *.$$

on $F^p\mathbf{X}$ per $p \geq 0$ és el diagrama cúbic definit per

$$(F^p\mathbf{X})_\alpha = \begin{cases} \mathbf{X}_\alpha, & \textit{if} \quad |\alpha| \leq p+1, \\ *, & \textit{if} \quad |\alpha| > p+1. \end{cases}$$

3.2.20 Proposició *Considerem la successió espectral $E_1^{p,q}$ de la torre de fibracions associada a un $\square_n$-codiagrama d'espectres fibrants $\mathbf{X}$. La successió espectral és convergent i*

$$E_1^{p,q} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q\mathbf{X}_\alpha \Longrightarrow \pi_{q-p}\mathbf{s}_{\square_n}\mathbf{X}.$$

Les diferencials d_1 són tals que $E_1^{*,q}$ és el corresponent complex de Čech.

DEMOSTRACIÓ: La convergència és conseqüència del lema 3.2.4.

Donat que el límit homotòpic preserva les successions de fibració, els termes E_1 són $E_1^{pq} = \pi_{q-p}(s_\square Gr^p\mathbf{X})$, on $Gr^p\mathbf{X}$ és el $\square$-codiagrama obtingut vèrtex a vèrtex com la fibra dels morfismes $F^p\mathbf{X} \longrightarrow F^{p-1}\mathbf{X}$.

Aquests diagrames compleixen

$$(Gr^p\mathbf{X})_\alpha = \begin{cases} \mathbf{X}_\alpha, & \text{si} \quad |\alpha| = p+1, \\ *, & \text{if} \quad |\alpha| \neq p+1. \end{cases}$$

Tenen tots els morfismes que no són la identitat constants i pel lema anterior tenim

$$s_{\square_n} Gr^p\mathbf{X} \sim \prod_{|\alpha|=p+1} \Omega^p\mathbf{X}_\alpha,$$

i per tant es dedueix que

$$E_1^{pq} = \pi_{q-p}(\mathbf{s}_{\square_n} Gr^p\mathbf{X}) = \pi_{q-p}(\prod_{|\alpha|=p+1} \Omega^p\mathbf{X}_\alpha) = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q\mathbf{X}_\alpha.$$

Les diferencials d_1 són tals que $E_1^{*,q}$ és el corresponent complex de Čech. Vegem com s'expressen les diferencials

$$d_1 : E_1^{p,q} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q\mathbf{X}_\alpha \longrightarrow E_1^{p+1,q} = \bigoplus_{|\alpha|=p+2} \pi_q\mathbf{X}_\alpha$$

a partir dels morfismes induïts en homotopia pels morfismes del diagrama.

Notem els índexs cúbics per $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^{n+1}$. Sigui $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, amb totes les coordenades zero excepte la i-ena. Fixem $\beta \in \square_n$. Considerem el diagrama cúbic $\mathbf{X}'$ amb

$$\mathbf{X}'_\alpha = \begin{cases} \mathbf{X}_\beta & \text{si } \alpha = \beta \\ \mathbf{X}_{\beta+e_i} & \text{si } \alpha = \beta + e_i \\ * & \text{altrament} \end{cases}$$

Considerem el morfisme de diagrames $\mathbf{X} \to \mathbf{X}'$. Per naturalitat de la successió espectral de la torre de fibracions tenim un diagrama commutatiu

$$\begin{tikzcd} E_1^{p,q}(\mathbf{X}) \arrow[r] \arrow[d, "d_1"] & E_1^{p,q}(\mathbf{X}') \arrow[d, "d_1"] \\ E_1^{p+1,q}(\mathbf{X}) \arrow[r] & E_1^{p+1,q}(\mathbf{X}') \end{tikzcd}$$

de manera que per a calcular la diferencial ens podem reduir al cas d'un codiagrama cúbic $\mathbf{X}'$ amb només dos espectres diferents del trivial. En aquest cas la diferencial és el morfisme de connexió de la successió de fibració

$$\Omega^p \mathbf{X}'_{\beta+e_i} \xrightarrow{\iota} \Omega^{p-1} F f^{\beta}_{\beta+e_i} \to \Omega^{p-1}\mathbf{X}'_{\beta},$$

on el morfisme ι té en compte l'ordre dels vèrtexs del diagrama, i per tant és, llevat signe, $(f^{\beta}_{\beta+e_i})_*$ (vegeu [58, Section 8.6], [52, III.2]). L'ordre dels vèrtex del diagrama indueix el signe que correspon al complex de Čech. □

3.2.4 Descens de Čech

En aquesta secció tractem la successió espectral que s'aplica a functors $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathbf{Sp}$ a partir de recobriments d'una varietat. Aquesta successió s'obté a partir de codiagrames d'espectres que es construeixen a partir dels recobriments.

Sigui $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathcal{D}$ un functor contravariant, $\mathcal{D}$ una categoria de descens i X una varietat. Sigui $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, \mathcal{U}_n\}$ un recobriment obert finit de X.

Les interseccions dels oberts de $\mathcal{U}$ donen lloc a un diagrama cúbic. Posem $U = U_{0,\ldots,0}$ i per $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, $\alpha \neq 0$, $U_\alpha = \bigcap_{\alpha_i=1} U_i$. Tenim el diagrama cúbic $F(U_\alpha)$, que anomenem *resolució cúbica de Čech de F respecte $\mathcal{U}$.*

Si $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathcal{D}$ té la propietat de Mayer-Vietoris, tenim el següent resultat per a $F(U_\alpha)$, que és anàleg a [78, 6.3].

3.2.21 Proposició *Sigui $\mathcal{D}$ una categoria de descens, $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathcal{D}$ un functor contravariant que té la propietat de Mayer-Vietoris, X una varietat i $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_n\}$ un recobriment obert finit de X.*
Posem $U_{0,\ldots,0} = X$ i per $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_n) \in \{0,1\}^n$, $\alpha \neq 0$, $U_\alpha = \bigcap_{\alpha_i=1} U_i$. Aleshores el morfisme canònic

$$F(X) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_n} F(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n})$$

és una equivalència feble.

DEMOSTRACIÓ: Per inducció sobre n el nombre d'oberts del recobriment. Per $n = 2$ es dedueix de la propietat de Mayer-Vietoris i de $(\mathrm{CD8})^{op}$.

Volem veure que $\mathbf{s}_{\square_n^+} F(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n})$ és acíclic. Per la proposició 2.2.7, el simple del diagrama

$$
\begin{tikzcd}
F(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathbf{s}_{\square_{n-1}} F(U_{0,\alpha_1,\dots,\alpha_n}) \arrow[d] \\
F(U_{1,0,\dots,0}) \arrow[r] & \mathbf{s}_{\square_{n-1}} F(U_{1,\alpha_1,\dots,\alpha_n})
\end{tikzcd}
\tag{3.1}
$$

és el mateix que $\mathbf{s}_{\square_n^+} F(U_{\alpha_0,\dots,\alpha_n})$. Per tant n'hi ha prou amb veure que el diagrama (3.1) és homotòpicament cartesià.

Posem $V = U_1 \cup \cdots \cup U_n$. El conjunt $\{U_1, \dots, U_n\}$ és un recobriment de V i per inducció el morfisme $F(V) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_{n-1}} F(U_{0,\alpha_0,\dots,\alpha_n})$ és una equivalència feble.

El conjunt $\{U_0 \cap U_1, \dots, U_0 \cap U_n\}$ és un recobriment de $U_0 \cap V$ i novament per inducció el morfisme $F(U_0 \cap V) \longrightarrow \mathbf{s}_{\square_{n-1}} F(U_{1,\alpha_0,\dots,\alpha_n})$ és una equivalència feble.

Tenim doncs el diagrama commutatiu

$$
\begin{tikzcd}
F(U_0 \cup V) = F(X) \arrow[r] \arrow[d] & F(V) \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & \mathbf{s}_{\square_{n-1}} F(U_{0,\alpha_1,\dots,\alpha_n}) \arrow[d] \\
F(U_0) = F(U_{1,0,\dots,0}) \arrow[r] & F(U_0 \cap V) \arrow[r, "\sim"] & \mathbf{s}_{\square_{n-1}} F(U_{1,\alpha_1,\dots,\alpha_n})
\end{tikzcd}
$$

on el quadrat de l'esquerra és homotòpicament cartesià, d'on deduïm que el diagrama (3.1) ho és. $\square$

Si $\mathcal{D}$ és la categoria d'espectres fibrants, la proposició 3.2.9 dóna lloc a la successió exacta de Mayer-Vietoris.

3.2.22 Proposició *Donada X una varietat, $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathbf{Sp}$ un functor contravariant en espectres fibrants que té la propietat de Mayer-Vietoris i U i V oberts de X. Aleshores hi ha una successió exacta*

$$\cdots \to \pi_n F(U \cup V) \to \pi_n F(U) \oplus \pi_n F(V) \to \pi_n F(U \cap V) \to \pi_{n-1} F(U \cup V) \to \cdots .$$

Apliquem ara la successió espectral d'un diagrama cúbic d'espectres (proposició 3.2.20) a $F(U_\alpha)$. Si F té la propietat de Mayer-Vietoris, el límit de la successió espectral és $\pi_{q-p} F(X)$.

3.2.23 Proposició *Sigui X una varietat, $F : \mathbf{Sch}(k) \to \mathbf{Sp}$ un functor contravariant en espectres fibrants i $\mathcal{U} = \{U_0, \dots, U_n\}$ un recobriment obert finit de X. Aleshores hi ha una successió espectral convergent*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q F(U_\alpha) \Longrightarrow \pi_{q-p} \mathbf{s}_{\square_n} F(U_{\alpha_0,\dots,\alpha_n}).$$

El terme $E_2^{p,q}$ és igual a la cohomologia de Čech del prefeix $\pi_q F$:

$$E_2^{p,q} = \check{H}^p(\mathcal{U}; \pi_q F).$$

Si a més F té la propietat de Mayer-Vietoris, el límit de la successió espectral és $\pi_{q-p}F(X)$:

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} \pi_q F(U_\alpha) \Longrightarrow \pi_{q-p}F(X).$$

DEMOSTRACIÓ: Apliquem ara la successió espectral d'un diagrama cúbic d'espectres (proposició 3.2.20) al diagrama cúbic $F(U_\alpha)$. Quant a la darrera afirmació, si F té la propietat de Mayer-Vietoris, per la proposició 3.2.21 hi ha una equivalència feble $F(X) \to \mathbf{s}_{\square_n} F(U_{\alpha_0,\ldots,\alpha_n})$. □

3.3 Prefeixos d'espectres i *cd*-topologies

Un functor contravariant

$$F : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathbf{Sp}$$

és un prefeix d'espectres en la categoria $\mathbf{Sch}(k)$. En les categories $\mathbf{Sch}(k)$ i $\mathbf{Sm}(k)$ es defineixen diverses topologies de Grothendieck mitjançant quadrats commutatius. Cada topologia dóna lloc a diferents estructures de categoria de models en les categories de prefeixos d'espectres. Fixada doncs una topologia t en $\mathbf{Sch}(k)$, la categoria de prefeixos

$$\mathbf{Pre}(\mathbf{Sch}(k), \mathbf{Sp})$$

té una estructura de categoria de models i per tant tot prefeix F té un model fibrant F^t. En aquesta secció estudiem en quines condicions l'extensió de Guillén-Navarro d'un functor contravariant $F : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathbf{Sp}$ coincideix amb el reemplaçament fibrant F^t de F en l'estructura de categoria de models dels prefeixos d'espectres fixada una topologia t en $\mathbf{Sch}(k)$.

3.3.1 Categories de models de prefeixos d'espectres

Donat $\mathcal{C}$ un *site* de Grothendieck notem per $\mathbf{Pre}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp})$ la categoria de prefeixos d'espectres en $\mathcal{C}$, i.e. la categoria de functors contravariants de $\mathcal{C}$ a espectres.

La topologia de $\mathcal{C}$ no intervé en la següent definició d'equivalència feble global:

3.3.1 Definició *Un morfisme $f : E \to E'$ entre prefeixos d'espectres en un* site $\mathcal{C}$ *és una* equivalència feble global *si $E(U) \to E'(U)$ és una equivalència feble per tot objecte U.*

El *site* $\mathcal{C}$ té una topologia t i estan definides les categories de feixos en $\mathcal{C}$. Si F és un prefeix, notem per a_tF el feix associat al prefeix F.

Donat un *site* $\mathcal{C}$, considerarem l'estructura de categoria de models de $\mathbf{Pre}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp})$ estudiada per Jardine en [44] i [45]. Aquesta estructura depèn de la topologia de Grothendieck. Comencem definint les equivalències febles locals:

3.3.2 Definició *Si $\mathcal{C}$ és un* site*, un morfisme $f : E \to E'$ entre prefeixos d'espectres és una* equivalència feble local *si indueix un isomorfisme*

$$a\pi_*(E) \longrightarrow a\pi_*(E')$$

de feixos de grups d'homotopia estable.

El següent teorema és de Jardine[45]:

3.3.3 Teorema *Donat un* site $\mathcal{C}$*, hi ha una estructura de categoria de models en* $\mathbf{Pre}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp})$ *on un morfisme $f : E \to E'$ és*

i) una equivalència feble si és una equivalència feble local.

ii) una cofibració si per tot objecte U de $\mathcal{C}$, $E(U) \to E'(U)$ és una cofibració.

iii) una fibració si f té la propietat d'aixecament per la dreta respecte tots els morfismes que són alhora cofibracions i equivalències febles.

En [8, §3] anomenen aquesta estructura l'*estructura de categoria de models injectiva local*, i nosaltres seguim aquesta nomenclatura.

3.3.4 Definició *Per a cada categoria de prefeixos d'espectres* $\mathbf{Pre}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp})$ *en un* site $\mathcal{C}$ *amb una topologia t fixem una aproximació fibrant functorial $E \longrightarrow E^t$ per a l'estructura de categoria de models injectiva local.*

Les propietats de descens tenen a veure amb quan $E \to E^t$ és una equivalència feble global. Un prefeix amb aquesta propietat l'anomenem quasifibrant:

3.3.5 Definició [8, definition 3.3] *Un prefeix d'espectres F en un* site $\mathcal{C}$ *amb una topologia t és* quasifibrant *si el reemplaçament fibrant $F \to F^t$ és una equivalència feble global.*

El següent resultat es troba a [45] (vegeu també [59, Proposition 3.17]).

3.3.6 Proposició *Un equivalència feble local entre prefeixos fibrants d'espectres és una equivalència feble global.*

En particular si F és un prefeix fibrant d'espectres aleshores és quasifibrant.

3.3.7 Remarca Es pot veure que, imposant condicions de finitud sobre $\mathcal{C}$, la categoria $(\mathbf{Pre}(\mathcal{C}, \mathbf{Sp}), S, W)$, on S és la classe de les equivalències febles globals i W la de les equivalències febles locals, és una categoria de Cartan-Eilenberg en el sentit de [30]. Els prefeixos que hem anomenat quasifibrants corresponen als feixos CE-fibrants en aquesta estructura.

3.3.2 Les *cd*-estructures i topologies associades

En aquesta secció recordem la definició de *cd*-estructura donada per Voevodsky en [76] i de la seva topologia associada.

3.3.8 Definició *Sigui $\mathcal{D}$ una categoria amb objecte inicial. Una* cd-estructura *en $\mathcal{D}$ és una classe $\mathcal{P}$ de quadrats commutatius*

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "p"] \\ A \arrow[r, "e"] & X \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

que és tancada per isomorfisme. Els quadrats de la classe s'anomenen quadrats distingits.

Una *cd*-estructura en $\mathcal{D}$ defineix una topologia de Grothendieck en $\mathcal{D}$. La topologia $t_{\mathcal{P}}$ associada a la *cd*-estructura $\mathcal{P}$ és la topologia de Grothendieck més petita tal que per a un quadrat distingit de la forma (3.2) el *sieve* (p, e) generat pels morfismes

$$\{p : Y \to X, e : A \to X\}$$

és un *covering sieve* i tal que el *sieve* buit és un *covering sieve* de l'objecte inicial. La classe $S_{\mathcal{P}}$ de recobriments és la classe més petita de famílies de morfismes de la forma $\{U_i \to X\}_{i \in I}$ que satisfan les següents condicions (vegeu [76, Section 2]):

1) tot isomorfisme $\{f\}$ és en $S_{\mathcal{P}}$

2) per tot quadrat Q distingit de la forma (3.2) i famílies $\{p_i : Y_i \to Y\}_{i\in I}$, $\{q_j : A_j \to A\}_{j\in J}$ en $S_{\mathcal{P}}$ la família $\{p \circ p_i, e \circ q_j\}_{i\in I, j\in J}$ és en $S_{\mathcal{P}}$

3.3.9 Definició *Un prefeix d'espectres E* té la propietat MV *per a una família de quadrats $\mathcal{P}$ si E transforma quadrats de $\mathcal{P}$ en quadrats d'espectres homotòpicament cartesians.*

Per exemple, la propietat (D) de descens del teorema 3.1.17 és la propietat *MV* respecte els *blow-ups* abstractes.

Voevodsky defineix en [76, Section 2] les nocions de *cd*-estructura completa, fitada i regular. Les *cd*-estructures completes, fitades i regulars tenen bones propietats en relació amb l'estructura de categoria de models dels prefeixos, tal i com mostren els següents resultats.

El següent resultat el farem servir més endavant i de fet es fa servir en la demostració del teorema que enunciem a continuació.

3.3.10 Proposició *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria amb una* cd-*estructura completa, fitada i regular $\mathcal{P}$. Una equivalència feble local entre prefeixos que satisfan la propietat* MV *per $\mathcal{P}$ és una equivalència feble global.*

DEMOSTRACIÓ: Aquest resultat per a prefeixos de conjunts simplicials és [76, lemma 3.4]. En la demostració de [8, theorem 3.4] s'estén aquest resultat a prefeixos d'espectres. □

El següent resultat, provat per Voevodsky per a prefeixos de conjunts simplicials (vegeu [76]), assegura que sota certes condicions els prefeixos que satisfan la propietat *MV* són precisament els quasifibrants.

3.3.11 Teorema [8, theorem 3.4] *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria amb una* cd-*estructura completa, fitada i regular $\mathcal{P}$. Sigui E un prefeix d'espectres en $\mathcal{C}$. Aleshores E és quasifibrant si, i només si, E té la propietat* MV *per $\mathcal{P}$.*

Si un prefeix E satisfà les condicions equivalents d'aquest teorema per a una topologia t generada per una *cd*-estructura completa, regular i fitada $\mathcal{P}$ diem que E satisfà *t-descens*, o *descens per a la topologia t*.

3.3.12 Corol·lari *Sigui $\mathcal{C}$ una categoria amb una* cd-*estructura completa, fitada i regular $\mathcal{P}$. Aleshores un prefeix d'espectres fibrant té la propietat* MV *per a $\mathcal{P}$.*

3.3.3 Les *cd*-estructures en categories d'esquemes

Considerem les següents *cd*-estructures en la categoria $\mathbf{Sch}(k)$:

a) **La *cd*-estructura de Nisnevich** on un quadrat distingit, o un *quadrat de Nisnevich elemental*, és un quadrat de la forma

$$\begin{tikzcd} U \times_X V \arrow[r] \arrow[d] & V \arrow[d] \\ U \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

on $U \to X$ és una immersió oberta i $V \to X$ és un morfisme *étale* que és un isomorfisme sobre $X \setminus U$.

La topologia associada amb la *cd*-estructura de Nisnevich és la topologia de Nisnevich (vegeu [77, Proposition 2.16]).

b) **La *cd*-estructura dels *blow-ups* abstractes** on els quadrats distingits són els quadrats acíclics (definició 3.1.1), també anomenats *blow-ups* abstractes.

La topologia associada amb la *cd*-estructura dels *blow-ups* abstractes l'anomenarem topologia *abs*.

c) **La *cd*-estructura combinada** en $\mathbf{Sch}(k)$ és la unió de les *cd*-estructures de Nisnevich i dels *blow-ups* abstractes. Consisteix en tots els quadrats de Nisnevich elementals i els quadrats acíclics.

La topologia generada per la *cd*-estructura combinada és la topologia *cdh* (vegeu [77, Section 2]).

d) **La *cd*-estructura de Zariski** en $\mathbf{Sch}(k)$ on un quadrat de la forma 3.2 és distingit si p i e són immersions obertes i $X = p(Y) \cup e(A)$.

La topologia generada per la *cd*-estructura de Zariski és la topologia de Zariski.

En la categoria $\mathbf{Sm}(k)$ considerem les següents *cd*-estructures:

a') **La *cd*-estructura de Nisnevich** en $\mathbf{Sm}(k)$.

b') **La *cd*-estructura dels *blow-ups* llisos** on els quadrats distingits són els isomorfs a *blow-ups* de varietats llises amb centre llis.

c') **La *cd*-estructura combinada** en $\mathbf{Sm}(k)$ és la unió de les *cd*-estructures de Nisnevich i dels *blow-ups* llisos. Consisteix en tots els quadrats de Nisnevich elementals i els *blow-ups* de varietats llises amb centre llis.

La topologia *scdh* és la topologia generada per l'estructura combinada en $\mathbf{Sm}(k)$.

3.3.13 Exemple Les hiperresolucions cúbiques donen lloc a recobriments en la topologia *abs* formats per varietats llises. Suposem que $Z_\bullet$ és una hiperresolució cúbica 1-iterada de X de mida r. Aleshores prenem les varietats que tenen un índex cúbic $(\alpha_0, \ldots, \alpha_r)$ amb només un α_i diferent de zero.

3.3.14 Proposició *Sigui X una varietat i $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica de X. Sigui E un prefeix d'espectres quasifibrant en la topologia* abs. *Aleshores*

$$E(X) \cong \operatorname{holim} E(X_\bullet).$$

DEMOSTRACIÓ: Com que és quasifibrant, el prefeix E té la propietat MV per als *blow-ups* abstractes, i.e. aplicat a un quadrat acíclic dóna un diagrama homotòpicament cartesià d'espectres. Per tant, utilitzant la propietat de Fubini del límit homotòpic, deduïm que una 2-resolució d'un diagrama cúbic és un diagrama cúbic homotòpicament cartesià. Per inducció tenim que la hiperresolució augmentada $X_\bullet \to X$ és un diagrama cúbic homotòpicament cartesià i per $(\mathrm{CD8})^{op}$ deduïm el resultat. □

Amb la hipòtesi de resolució de singularitats, que sempre considerem ja que ens situem en el cas d'un cos k de característica zero, les set *cd*-estructures que hem citat són completes, fitades i regulars (vegeu [77, Section 2] i la discussió que segueix al lema 4.5 de *op.cit.*). Per tant podem aplicar la proposició 3.3.10, el teorema 3.3.11 i el corol·lari 3.3.12. En particular observem el següent.

3.3.15 Lema *Si F és un prefeix d'espectres en* $\mathbf{Sch}(k)$*, F^{Nis} té la propietat* MV *respecte els quadrats de Nisnevich elementals, F^{abs} té la propietat* MV *respecte els* blow-ups *abstractes, F^{cdh} té la propietat* MV *respecte tots dos tipus de quadrats i F^{Zar} té la propietat de Mayer-Vietoris.*

DEMOSTRACIÓ: És un cas particular del corol·lari 3.3.12. □

3.3.4 Comparació amb l'extensió de Guillén-Navarro

En aquesta secció veiem que, sota certes hipòtesis, donat F un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$, l'extensió FD coincideix amb F^{abs} o amb F^{cdh}.

3.3.16 Remarca Si F és un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$ que compleix les hipòtesis del teorema 3.1.17, aleshores té la propietat MV respecte els quadrats acíclics elementals. Recordem que un quadrat acíclic elemental és un *blow-up* on totes les varietats són irreductibles i llises. Se'n deriva la propietat MV respecte tots els *blow-ups* llisos.

Donat un prefeix F en $\mathbf{Sch}(k)$, notem per rF el prefeix en la subcategoria $\mathbf{Sm}(k)$ obtingut per restricció. El següent lema observa que en la topologia *abs* les equivalències febles locals es conserven per restricció.

3.3.17 Lema *Donat $f : A \to B$ un morfisme de prefeixos d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$, si f és una equivalència feble local en la topologia* abs*, aleshores $rf : rA \to rB$ és una equivalència feble local en la topologia dels* blow-ups *llisos.*

DEMOSTRACIÓ: Es basa en el fet que, amb la hipòtesi de resolució de singularitats, tot objecte de $\mathbf{Sch}(k)$ té un *abs*-recobriment per objectes de $\mathbf{Sm}(k)$, i tot *abs*-recobriment d'un objecte de $\mathbf{Sm}(k)$ té un refinament que és un recobriment en la topologia dels *blow-ups* llisos (vegeu la prova de [77, lemma 4.6]). $\square$

3.3.18 Lema *Sigui F un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$ que té la propietat* MV *respecte els* blow-ups *llisos. Aleshores donada X una varietat llisa hi ha una equivalència feble*

$$F(X) \to F^{abs}(X).$$

DEMOSTRACIÓ: Es raona com en la prova de [8, Theorem 3.12]. D'una banda, per hipòtesi F té la propietat MV per als *blow-ups* llisos i per tant rF també. D'altra banda, pel corol·lari 3.3.12, F^{abs} té la propietat MV per als *blow-ups* llisos i per tant rF^{cdh} també. Per definició el reemplaçament fibrant $F \to F^{abs}$ és una equivalència feble local en la topologia *abs*, i pel lema 3.3.17, $rF \to rF^{abs}$ és una equivalència feble local en la topologia dels *blow-ups* llisos. Tenim una equivalència feble local entre prefeixos que satisfan la propietat MV, i per la proposició 3.3.10 és una equivalència feble global en $\mathbf{Sm}(k)$, i.e. $F(X) \to F^{abs}(X)$ és una equivalència feble per X llisa. $\square$

3.3.19 Proposició *Sigui F un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$ tal que compleix les hipòtesis del teorema* 3.1.17*. Aleshores hi ha un morfisme (en* Ho$\mathbf{Sp}$*)*

$$FD \longrightarrow F^{abs}$$

tal que $FD(X) \longrightarrow F^{abs}(X)$ és una equivalència feble per tota varietat X.

DEMOSTRACIÓ: Per la remarca 3.3.16 F té la propietat MV respecte els *blow-ups* llisos. Pel lema anterior, $F^{abs}(X)$ és feblement equivalent a $F(X)$ per a X llisa.

Pel corol·lari 3.3.12, F^{abs} té la propietat MV respecte els *blow-ups* abstractes, i.e. F^{abs} satisfà la propietat (D) de descens. Per tant, per unicitat de l'extensió de Guillén-Navarro tenim el resultat. □

Podem demostrar un resultat anàleg per a la topologia *cdh*. Primer observem que en la topologia *cdh* les equivalències febles locals també es conserven per restricció.

3.3.20 Lema [8, lemma 3.11] *Donat $f : A \to B$ un morfisme de prefeixos d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$, si f és una equivalència feble local en la topologia* cdh*, aleshores $rf : rA \to rB$ és una equivalència feble local en la topologia* scdh*.*

DEMOSTRACIÓ: Es basa en el fet que, amb la hipòtesi de resolució de singularitats, tot objecte de $\mathbf{Sch}(k)$ té un *cdh*-recobriment per objectes de $\mathbf{Sm}(k)$, i tot *cdh*-recobriment d'un objecte de $\mathbf{Sm}(k)$ té un refinament que és un *scdh*-recobriment (vegeu la prova de [77, lemma 4.6]). □

Per a que F i F^{cdh} coincideixin en les varietats llises cal suposar que F té la propietat MV per als *blow-ups* llisos i per als quadrats de Nisnevich llisos.

3.3.21 Lema *Sigui F un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$ que té la propietat* MV *respecte els* blow-ups *llisos i respecte els quadrats de Nisnevich elementals llisos. Aleshores donada X una varietat llisa hi ha una equivalència feble*

$$F(X) \to F^{cdh}(X).$$

DEMOSTRACIÓ: Es raona com en la prova de [8, Theorem 3.12]. D'una banda, F té la propietat MV per a quadrats de Nisnevich elementals llisos i per a *blow-ups* llisos i per tant rF té la propietat MV per a l'estructura combinada en $\mathbf{Sm}(k)$. D'altra banda, pel corol·lari 3.3.12, F^{cdh} té la propietat MV per a l'estructura combinada en $\mathbf{Sch}(k)$, i per tant rF^{cdh} té la propietat MV per a l'estructura combinada en $\mathbf{Sm}(k)$. Per definició el reemplaçament fibrant $F \to F^{cdh}$ és una equivalència feble local en la topologia *cdh*, i pel lema 3.3.20, $rF \to rF^{cdh}$ és una equivalència feble local en la topologia *scdh*. Tenim una equivalència feble local entre prefeixos que satisfan la propietat MV, i per la proposició 3.3.10 és una equivalència feble global en $\mathbf{Sm}(k)$, i.e. $F(X) \to F^{cdh}(X)$ és una equivalència feble per X llisa. □

3.3.22 Proposició *Sigui F un prefeix d'espectres en $\mathbf{Sch}(k)$ tal que compleix les hipòtesis del teorema* 3.1.17 *i a més té la propietat* MV *respecte els quadrats de Nisnevich elementals llisos. Aleshores hi ha un morfisme (en* Ho$\mathbf{Sp}$*)*

$$FD \longrightarrow F^{cdh}$$

tal que $FD(X) \longrightarrow F^{cdh}(X)$ *és una equivalència feble per tota varietat* X.

DEMOSTRACIÓ: Per la remarca 3.3.16 F té la propietat MV respecte els *blow-ups* llisos. Pel lema anterior, $F^{cdh}(X)$ és feblement equivalent a $F(X)$ per a X llisa. Pel corol·lari 3.3.12, F^{cdh} té la propietat MV respecte els *blow-ups* abstractes, i.e. F^{cdh} satisfà la propietat (D) de descens. Per tant, per unicitat de l'extensió de Guillén-Navarro tenim el resultat. □

3.3.23 Corol·lari *Sigui* F *un prefeix d'espectres en* $\mathbf{Sch}(k)$ *tal que compleix les hipòtesis del teorema* 3.1.17 *i a més té la propietat* MV *respecte els quadrats de Nisnevich elementals llisos. Aleshores els prefeixos* F^{abs} *i* F^{cdh} *són globalment feblement equivalents, i.e. per a qualsevol varietat* X

$$F^{abs}(X) \simeq F^{cdh}(X).$$

DEMOSTRACIÓ: Per la proposició 3.3.19, F^{abs} és globalment feblement equivalent a FD, l'extensió de Guillén-Navarro de F. Per la proposició 3.3.22, F^{cdh} també és globalment feblement equivalent a FD. □

3.3.24 Corol·lari *Sigui* F *un prefeix d'espectres en* $\mathbf{Sch}(k)$ *tal que compleix les hipòtesis del teorema* 3.1.17 *i que a més satisfà la propietat* MV *per a* blow-ups *abstractes i per als quadrats de Nisnevich elementals llisos. Aleshores* F *satisfà* cdh-*descens.*

DEMOSTRACIÓ: Com que F satisfà descens per als *blow-ups* abstractes, pel teorema 3.3.11 F i F^{abs} són globalment feblement equivalents. Pel corol·lari anterior F^{abs} i F^{cdh} són globalment feblement equivalents. Deduïm que F i F^{cdh} són globalment feblement equivalents i que per tant F satisfà *cdh*-descens. □

3.3.5 Successió espectral d'hipercohomologia

Sigui X una varietat i E un prefeix d'espectres en el *site* de Zariski de X. Hi ha un functor de Godement [71, 1.32] [59, 3.2]

$$E \longrightarrow T^{\bullet}E$$

de prefeixos d'espectres a prefeixos cosimplicials d'espectres. La *hipercohomologia de* X *amb coeficients en* E és l'espectre

$$\mathbb{H}^{\bullet}_{Zar}(X; E) = \operatorname*{holim}_{\Delta} T^{\bullet}E(X).$$

La successió espectral d'hipercohomologia s'obté aplicant la successió espectral de Bousfield-Kan (proposició 3.2.6) a l'espectre cosimplicial $T^\bullet E(X)$.

3.3.25 Proposició *Sigui X una varietat i E un prefeix d'espectres en el* site *de Zariski de X. Hi ha una successió espectral convergent*

$$E_2^{p,q} = H^p_{Zar}(X; a\pi_q E) \Rightarrow \pi_{q-p}\mathbb{H}^\bullet_{Zar}(X; E),$$

on $a\pi_q E$ és el feix associat al prefeix $\pi_q E$.

DEMOSTRACIÓ: Aquesta és la successió espectral de [71, proposició 1.36]. Quant a la convergència, es té per a X de dimensió cohomològica de Zariski finita. Aquest és el cas en què ens situem ja que un esquema noetherià de dimensió de Krull finita té dimensió cohomològica de Zariski finita (vegeu [37, III.2.7]). □

De fet $H^\bullet_{Zar}(-; E)$ és un prefeix, que anomenem prefeix d'hipercohomologia.

3.3.26 Proposició *Sigui X una varietat i E un prefeix d'espectres en el* site *de Zariski de X. El prefeix d'hipercohomologia $\mathbb{H}^\bullet_{Zar}(-; E)$ és fibrant i hi ha una equivalència feble local $E \to \mathbb{H}^\bullet_{Zar}(-; E)$.*

DEMOSTRACIÓ: Apliquem [59, Proposition 3.20]. Les hipòtesis es compleixen ja que el *site* de Zariski té prou punts i té dimensió cohomològica de Zariski finita. □

Per tant el prefeix d'hipercohomologia $\mathbb{H}^\bullet_{Zar}(-; E)$ és una aproximació fibrant del prefeix E en l'estructura injectiva local.

El següent resultat és degut a Brown-Gersten [7, theorem 4]. Thomason n'indica una demostració en [71, exercise 2.5], que Mitchell desenvolupa en [59, teorema 4.1] usant la categoria de models de prefeixos d'espectres de Jardine. Nosaltres el demostrem a partir de la proposició anterior i el teorema 3.3.11.

3.3.27 Proposició *Si X és una varietat, i E és un prefeix d'espectres que té la propietat de Mayer-Vietoris en el* site *de Zariski de X, aleshores l'augmentació*

$$E(X) \to \mathbb{H}^\bullet_{Zar}(X; E)$$

és una equivalència feble.

DEMOSTRACIÓ: El prefeix E té la propietat MV en la *cd*-estructura de Zariski i pel teorema 3.3.11 és quasifibrant. Per la proposició anterior, $E \to \mathbb{H}^\bullet_{Zar}(-; E)$ és una equivalència feble local entre prefeixos que satisfan la propietat MV i per la proposició 3.3.10 és una equivalència feble global, d'on deduïm el que volem veure. □

Per tant si E té la propietat de Mayer-Vietoris, el límit de la successió 3.3.25 és $\pi_{q-p}E(X)$:

3.3.28 Proposició *Sigui X una varietat i E un prefeix d'espectres en el* site *de Zariski de X que té la propietat de Mayer-Vietoris. Hi ha una successió espectral convergent*

$$E_2^{p,q} = H^p_{Zar}(X; a\pi_q E) \Rightarrow \pi_{q-p}E(X),$$

on $a\pi_q E$ és el feix associat al prefeix $\pi_q E$.

4
Descens per a la teoria K algebraica

En el aquest capítol apliquem el teorema d'extensió a la teoria K algebraica, obtenint la teoria K de descens. En la secció 4.1 detallem l'espectre de teoria K que utilitzem i les propietats de la teoria K de les varietats llises. En la secció 4.2 provem que podem aplicar el teorema d'extensió i obtenim la teoria $\mathcal{KD}$. Amb els resultats de les seccions anteriors obtenim algunes propietats de $\mathcal{KD}$ i demostrem que és equivalent a la teoria K homotòpica de Weibel. Obtenim també una teoria K amb suport compacte. En la secció 4.3 provem que hi ha una filtració finita functorial i ben definida F^p en $KD_n(X)$ que és trivial per a varietats llises.

4.1 Teoria K algebraica

Si $\mathcal{E}$ és una categoria exacta, els grups de teoria K de $\mathcal{E}$ $K_p(\mathcal{E})$, per $p \geq 0$ van ser definits per Quillen [64] com els grups d'homotopia $\pi_{p+1}(BQ\mathcal{E})$ del nervi de la categoria $Q\mathcal{E}$, definida en *op.cit.* La suma directa en la categoria exacta $\mathcal{E}$ indueix una estructura monoïdal simètrica en la categoria $Q\mathcal{E}$, a la qual s'aplica una *infinite loop space machine* (vegeu per exemple [57]) i s'obté un espectre fibrant. L'espectre de llaços d'aquest espectre és l'espectre de teoria K de Quillen $\mathcal{K}^Q(\mathcal{E})$.

Notem per **Exact** la categoria de les categories exactes i els functors exactes. Podem suposar (vegeu [19, 5.1.1]) que tenim definit un functor

$$\mathcal{K}^Q : \mathbf{Exact} \to \mathbf{Sp}$$

en espectres fibrants de manera que donada una categoria exacta $\mathcal{E}$

$$(\mathcal{K}^Q(\mathcal{E}))_0 = \Omega BQ\mathcal{E}.$$

4.1.1 Definició *Els grups de teoria K d'una categoria exacta $\mathcal{E}$ són els grups d'homotopia*

$$K_m(\mathcal{E}) = \pi_m(\mathcal{K}^Q(\mathcal{E})).$$

Aquests grups són functorials respecte els functors exactes entre categories exactes.

Passem ara a considerar la teoria K de les varietats.

4.1.2 Definició *Els grups de teoria K de Quillen d'una varietat X són els grups de teoria K de la categoria exacta $\mathcal{P}(X)$ dels fibrats vectorials algebraics en X:*

$$K_m(X) = K_m(\mathcal{P}(X)).$$

Si $f : X \to Y$ és un morfisme de varietats, el functor exacte $f^* : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ dóna morfismes de grups $f^* : K_m(Y) \to K_m(X)$, de manera que els grups de teoria K de les varietats són functorials.

No obstant, els espectres $\mathcal{K}^Q(\mathcal{P}(X))$ no són estrictament functorials respecte la varietat. L'operació $X \mapsto \mathcal{P}(X)$ no és un functor estricte, ja que donats morfismes $f : X \to Y$ i $g : X \to Z$, els functors $(g \circ f)^*$ i $f^* \circ g^*$ són canònicament isomorfs però no iguals. Una manera de rectificar aquest pseudofunctor és substituir la categoria $\mathcal{P}(X)$ per una categoria equivalent $\mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X)$. A continuació en recordem la definició, seguint [17, Appendix C] (vegeu també [19, 5.1.2] o [20, section 5.3]).

Sigui X un esquema noetherià. Considerem el *site* de Zariski gran $\mathbf{Sch}/X$ dels esquemes de tipus finit sobre X.

4.1.3 Definició *Un feix $P : \mathbf{Sch}/X \to Ab$ és un $\mathcal{O}$-*mòdul *si per tot $Y \in \mathbf{Sch}/X$ la restricció de P al* site *de Zariski petit de Y dóna un $\mathcal{O}_Y$-mòdul P_Y.*

4.1.4 Definició *Sigui $P : \mathbf{Sch}/X \to Ab$ un $\mathcal{O}$-mòdul. Diem que P és un* big vector bundle *en X si se satisfan les següents condicions*

1) *Per tot $Y \in \mathbf{Sch}/X$, el $\mathcal{O}_Y$-mòdul P_Y és un fibrat vectorial algebraic en Y (i.e. un $\mathcal{O}_Y$-mòdul coherent localment lliure).*

2) *Per tot morfisme $f : Y \to Z$ en $\mathbf{Sch}/X$ el morfisme induït $f^*(P_Z) \to P_Y$ és un isomorfisme.*

Dit d'una altra forma, un big vector bundle consisteix en donar per cada morfisme $f : Y \to X$ un fibrat vectorial P_f en Y i per tot morfisme $h : (f : Y \to X) \to (g : Z \to X)$ en $\mathbf{Sch}/X$ un isomorfisme $h^*(P_g) \to P_f$ amb les condicions de compatibilitat adequades respecte la composició.

Denotem per $\mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X)$ la categoria dels big vector bundles considerada com a subcategoria plena de la categoria de $\mathcal{O}$-mòduls.

4.1.5 Lema ([19, Lemma 5], vegeu també [1, IV.4.10]) *El functor d'oblit*

$$\mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X) \to \mathcal{P}(X)$$

és una equivalència de categories.

4.1.6 Definició *Per tot esquema de tipus finit $f : X \to Y$ el functor de restricció*

$$f^* : \mathcal{P}(\mathbf{Sch}/Y) \to \mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X)$$

és el functor que porta una família $(g : Z \to Y) \to P_g$ a la família $(h : Z \to X) \to P_{h\circ f}$.

Amb aquesta construcció donada una cadena de morfismes $X \xrightarrow{g} Y \xrightarrow{f} Z$ els functors $(f \circ g)^*$ i $g^* \circ f^*$ coincideixen. Aquest functor és compatible amb el *pullback* usual de fibrats vectorials sota l'equivalència de categories anterior.

4.1.7 Definició *L'espectre de teoria K és l'espectre fibrant corresponent a la categoria $\mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X)$:*

$$\mathcal{K}^Q(X) = \mathcal{K}^Q(\mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X)).$$

Donat $f : Y \to X$ un esquema de tipus finit sobre X, el functor exacte $f^* : \mathcal{P}(\mathbf{Sch}/X) \to \mathcal{P}(\mathbf{Sch}/Y)$ defineix un morfisme d'espectres $f^* : \mathcal{K}^Q(Y) \to \mathcal{K}^Q(X)$ de manera que $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$. D'aquesta manera obtenim un functor contravariant

$$\mathcal{K}^Q : \mathbf{Sch}(k) \to \mathbf{Sp}$$

de varietats a espectres fibrants tal que

$$K_m(X) = \pi_m \mathcal{K}^Q(X).$$

Aquest és l'espectre de teoria K que considerem i el notem simplement $\mathcal{K}(X)$.

Repassem a continuació algunes propietats de la teoria K de les varietats llises.

La teoria K de les varietats llises satisfà la propietat d'invariància homotòpica i de Mayer-Vietoris:

4.1.8 Proposició *El functor $\mathcal{K}$ és homotòpicament invariant per a les varietats llises. I.e., donada X una varietat llisa, la projecció $X \times \mathbb{A}^1 \to X$ indueix una equivalència feble*

$$\mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X \times \mathbb{A}^1).$$

DEMOSTRACIÓ: Donada X una varietat, sigui $\mathcal{M}(X)$ la categoria exacta dels feixos coherents en X. Es defineix $\mathcal{G}(X) = K^Q(\mathcal{M}(X))$. Si X és una varietat llisa la inclusió exacta $\mathcal{P}(X) \subset \mathcal{M}(X)$ indueix una equivalència feble $\mathcal{K}(X) \to \mathcal{G}(X)$, propietat que s'anomena dualitat de Poincaré [64].

La invariància homotòpica de $\mathcal{K}$ es dedueix del resultat corresponent per a $\mathcal{G}$ [64, Section 7, 4.1] i la dualitat de Poincaré. □

4.1.9 Proposició *Sigui X una varietat llisa i U i V oberts de X. Aleshores el quadrat*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(U \cup V) & \longrightarrow & \mathcal{K}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{K}(V) & \longrightarrow & \mathcal{K}(U \cap V) \end{array}$$

és homotòpicament cartesià.

DEMOSTRACIÓ: Es dedueix del resultat corresponent per a $\mathcal{G}$ [64, Section 7, 3.5] i la dualitat de Poincaré (vegeu la prova anterior). □

La teoria K del fibrat projectiu associat a un fibrat es pot calcular a partir de la teoria K de la varietat:

4.1.10 Proposició *Sigui X una varietat, i $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial sobre X de rang r. Sigui $\pi : \mathbf{P}\mathcal{E} \to X$ el fibrat projectiu associat. Aleshores hi ha una equivalència feble*

$$\prod^{r} \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(\mathbf{P}\mathcal{E})$$

donada per la fórmula

$$(x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}) \mapsto \sum_{i=0}^{r-1} \pi^*(x_i) \otimes [\mathcal{O}_{\mathbf{P}\mathcal{E}}(-i)].$$

DEMOSTRACIÓ: Vegeu [64, Section 8]. □

Recordem que donada X una varietat sobre k, notem per $X[T]$ i $X[T, T^{-1}]$ les varietats $X \times_k Spec(k[T])$ i $X \times_k Spec(k[T, T^{-1}])$.

4.1.11 Proposició *Donada X una varietat llisa, hi ha una equivalència feble*

$$\mathcal{K}(X[T, T^{-1}]) \simeq \mathcal{K}(X) \times \mathcal{K}(X)[1].$$

Demostració:

Es raona com en la prova de [74, Proposition 6.8] i es demostra que $\mathcal{K}(X[T,T^{-1}]) \simeq \mathcal{K}(X) \times \Sigma\mathcal{K}(X)$. Apliquem aleshores els resultats de la secció 2.3.2.4. $\square$

4.1.1 L'espectre no connectiu de teoria K

Una construcció alternativa a la construcció Q de Quillen és la construcció S de Waldhausen, que s'aplica a les categories amb cofibracions i equivalències febles en el sentit de Waldhausen. Una categoria exacta és una categoria de Waldhausen prenent com a cofibracions els monomorfismes admissibles i com a equivalències febles els isomorfismes. La construcció S associa a una categoria de Waldhausen $\mathcal{C}$ un conjunt simplicial $S\mathcal{C}$ (vegeu per exemple [17, Appendix C1]). Els iterats d'aquesta construcció es fan servir per a definir un espectre fibrant de teoria K de Waldhausen $\mathcal{K}^W(\mathcal{C})$. Donada $\mathcal{E}$ una categoria exacta, la considerem com a categoria de Waldhausen i aleshores hi ha una equivalència feble natural entre $\mathcal{K}^Q(\mathcal{E})$ i $\mathcal{K}^W(\mathcal{E})$ (vegeu [74, Section 1]).

Thomason [74] defineix la teoria K dels esquemes a partir de la categoria de complexos perfectes. Donada X una varietat, un complex $E^\bullet$ de $\mathcal{O}_X$-mòduls és un complex perfecte si és localment quasiisomorf a un complex fitat de fibrats vectorials algebraics. Els complexos perfectes defineixen la categoria de Waldhausen $\mathbf{Perf}(X)$, i la teoria K de Thomason d'una varietat X es defineix $\mathcal{K}^{TT}(X) = \mathcal{K}^W(\mathbf{Perf}(X))$. Si X té una família àmplia de fibrats de línia, en particular si X és llisa, $\mathcal{K}^{TT}(X)$ és naturalment feblement equivalent a $\mathcal{K}^Q(X)$ (vegeu [74, Proposition 3.10]).

L'espectre $\mathcal{K}^{TT}(X)$ és connectiu, i.e. $\pi_n\mathcal{K}(X) = 0$ per $n < 0$. A partir d'aquest espectre es defineix l'espectre no connectiu de Bass $\mathcal{K}^B(X)$ (vegeu [74, Section 6]). Per a les varietats llises hi ha una equivalència feble $\mathcal{K}^{TT}(X) \to \mathcal{K}^B(X)$ [74, Proposition 6.8].

4.2 Teoria K algebraica de descens

En aquesta secció apliquem el teorema d'extensió de Guillén i Navarro 3.1.17 per a obtenir una variant de la teoria K de les varietats singulars que satisfà descens.

4.2.1 Teorema *Sigui k un cos de característica zero. El functor*

$$\mathcal{K} : \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathbf{Sp},$$

admet una extensió única, llevat isomorfisme únic de functors Φ-rectificats, a un functor Φ-rectificat

$$\mathcal{KD} : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$$

tal que satisfà la propietat de descens (D):

(D) si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic en $\mathbf{Sch}(k)$, $s\mathcal{KD}(X_\bullet)$ és acíclic.

DEMOSTRACIÓ: Per la proposició 2.3.20, sabem que $\mathbf{Sp}$ és una categoria de descens. Per tant, per a aplicar el teorema de descens de Guillén-Navarro 3.1.17 cal verificar les propietats $(F1), (F2)$. La primera és immediata.

La propietat $(F2)$ és conseqüència del càlcul de Thomason en [73] de la teoria K algebraica d'un *blow-up* a través d'una subvarietat amb una immersió regular, tal i com ha estat observat per diversos autors (vegeu, per exemple [34], [19], [8, Remark 1.16], i la prova de [16, Proposition 6.19]).

En el context dels diagrames cúbics d'espectres proposem la següent presentació de la propietat $(F2)$. Considerem un quadrat acíclic elemental i el quadrat d'espectres obtingut aplicant el functor de teoria K

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{K}(X) & \xrightarrow{i^*} & \mathcal{K}(Y) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle f^*} & & \Big\downarrow{\scriptstyle g^*} \\ \mathcal{K}(\widetilde{X}) & \xrightarrow{j^*} & \mathcal{K}(\widetilde{Y}) \end{array}$$

Hem de veure que aquest quadrat d'espectres és acíclic. Si N és el feix conormal de Y en X, aleshores $\widetilde{Y} = \mathbf{P}(N)$, de manera que el morfisme

$$\Psi : \prod^{d} \mathcal{K}(Y) \longrightarrow \mathcal{K}(\widetilde{Y}),$$

induït pel functor que en una seqüència de complexos perfectes està definit per

$$(E_0, \ldots, E_{d-1}) \mapsto \bigoplus_{i=0}^{d-1} \mathcal{O}_{\mathbf{P}(N)}(-i) \otimes Lg^* E_i,$$

és una equivalència feble (vegeu [74, theorem 4.1] i també [72]).

Per al *blow-up* $\widetilde{X}$ Thomason demostra (vegeu [73, Théorème 2.1]) que el morfisme

$$\Phi : \mathcal{K}(X) \times \prod^{d-1} \mathcal{K}(Y) \longrightarrow \mathcal{K}(\widetilde{X})$$

induït pel functor que en complexos perfectes està donat per

$$(F, E_1, \dots, E_{d-1}) \mapsto f^*F \oplus \bigoplus_{i=1}^{d-1} j_*(\mathcal{O}_{\mathbf{P}(N)}(-i) \otimes Lg^*E_i),$$

també és una equivalència feble.

Tot element z de $K_0(Y)$ defineix un morfisme

$$z\cup : \mathcal{K}(Y) \to \mathcal{K}(Y)$$

com en [73, (1.4.4)]. El feix localment lliure N defineix $[\lambda_{-1}(N)] = \sum_{i\geq 0}(-1)^i[\Lambda^i N]$ en $K_0(Y)$.

Definim $j' : \mathcal{K}(X) \times \prod^{d-1}\mathcal{K}(Y) \longrightarrow \prod^d \mathcal{K}(Y)$ component per component per g^*i^* en la primera component i pel morfisme donat per la multiplicació per $\lambda_{-1}(N)$ en les Y-components.

Per la fórmula d'autointersecció [73, (3.1.4)] el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{K}(X) \times \prod^{d-1}\mathcal{K}(Y) \arrow[r, "\Phi"] \arrow[d, "j'"] & \mathcal{K}(\widetilde{X}) \arrow[d, "j^*"] \\
\prod^d \mathcal{K}(Y) \arrow[r, "\Psi"] & \mathcal{K}(\widetilde{Y})
\end{tikzcd}$$

és commutatiu. Com que Φ i Ψ són equivalències febles, és un quadrat acíclic.

Considerem ara el diagrama cúbic augmentat commutatiu

$$\begin{tikzcd}
& \mathcal{K}(X) \arrow[rr] \arrow[dl, equal] \arrow[dd] & & \mathcal{K}(X) \times \prod^{d-1}\mathcal{K}(Y) \arrow[dl, "\Phi"'] \arrow[dd, "j'"] \\
\mathcal{K}(X) \arrow[rr, "f^*"] \arrow[dd, "i^*"'] & & \mathcal{K}(\widetilde{X}) \arrow[dd, "j^*"' near start] & \\
& \mathcal{K}(Y) \arrow[rr] \arrow[dl, equal] & & \prod^d \mathcal{K}(Y) \arrow[dl, "\Psi"] \\
\mathcal{K}(Y) \arrow[rr, "g^*"] & & \mathcal{K}(\widetilde{Y}) &
\end{tikzcd}$$

on els morfismes horitzontals posteriors són inclusions en el primer factor.

Com que els quadrats del costat dret i esquerra són acíclics, el diagrama és acíclic. Per tant per provar que el quadrat anterior és acíclic, que és el que volíem veure, n'hi ha prou amb demostrar que el quadrat posterior és acíclic. En el quadrat posterior els morfismes horitzontals tenen la mateixa cofibra, i per tant és acíclic tenint en compte que en la categoria d'espectres els quadrats homotòpicament cartesians i cocartesians coincideixen ([41, Remark 7.1.12]). $\square$

4.2.2 Definició *Donada una k-varietat X, denotem per $KD_*(X)$ els grups d'homotopia de $\mathcal{KD}(X)$,*

$$KD_*(X) := \pi_*(\mathcal{KD}(X)).$$

4.2.1 Algunes propietats de $\mathcal{KD}$

Com que $\mathcal{KD}$ és una extensió de la teoria K de les varietats llises, donada X una varietat llisa hi ha un isomorfisme en $\mathcal{KD}(X) \to \mathcal{K}(X)$ en Ho**Sp**.

La propietat de descens (D) dóna lloc a successions exactes (vegeu la proposició 3.2.9):

4.2.3 Corol·lari *Sigui $X_\bullet$ un quadrat acíclic en* $\mathbf{Sch}(k)$. *Aleshores hi ha una successió exacta*

$$\ldots \longrightarrow KD_n(X) \stackrel{f^*-i^*}{\longrightarrow} KD_n(\widetilde{X}) \oplus KD_n(Y) \stackrel{j^*+g^*}{\longrightarrow} KD_n(\widetilde{Y}) \stackrel{\delta}{\longrightarrow} KD_{n-1}(X) \longrightarrow \ldots$$

Més generalment, donada X una k-varietat, $\mathcal{KD}(X)$ es defineix, tal i com hem dit en la secció 3.1.3, com el simple del codiagrama cúbic d'espectres $\mathcal{K}(X_\bullet)$, on $X_\bullet$ és una hiperresolució cúbica de X. Per tant de la proposició 3.2.20 en deduïm:

4.2.4 Proposició *Sigui k un cos de característica zero i X una k-varietat algebraica. Sigui $X_\bullet$ una hiperresolució cúbica de X. Aleshores hi ha una successió espectral convergent*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} K_q(X_\alpha) \Longrightarrow KD_{q-p}(X).$$

Si X és de dimensió d, podem prendre hiperresolucions cúbiques de mida d (vegeu el teorema 3.1.9), la successió espectral és diferent de zero només en la franja $0 \leq p \leq d$ del primer quadrant (ja que la teoria K negativa de les varietats llises és zero) i per tant:

4.2.5 Corol·lari *Sigui k un cos de característica zero i X una k-varietat algebraica de dimensió d. Aleshores*

$$KD_n(X) = 0, \qquad n < -d.$$

Tal i com s'ha explicat en la secció 3.1.4, $\mathcal{KD}$ hereta moltes propietats de la teoria K algebraica de les varietats llises.

De la propietat d'invariància homotòpica per a la teoria K de les varietats llises (proposició 4.1.8) en deduïm el següent, aplicant la proposició 3.1.21.

4.2.6 Proposició *$\mathcal{KD}$ és homotòpicament invariant, això és, per tota varietat X la projecció $X \times \mathbb{A}^1 \longrightarrow X$ indueix una equivalència feble $\mathcal{KD}(X) \cong \mathcal{KD}(X \times \mathbb{A}^1)$.*

De la propietat de Mayer-Vietoris per a la teoria K de les varietats llises (proposicions 4.1.9) en deduïm el següent, aplicant la proposició 3.1.23.

4.2.7 Proposició *$\mathcal{KD}$ té la propietat de Mayer-Vietoris, això és, si $X = U \cup V$, amb U, V oberts, aleshores el quadrat*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{KD}(X) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{KD}(U) \arrow[d] \\ \mathcal{KD}(V) \arrow[r] & \mathcal{KD}(U \cap V) \end{tikzcd}$$

és homotòpicament cartesià. □

De la proposició 4.1.10, aplicant la proposició 3.1.25, en deduïm el següent.

4.2.8 Proposició *Sigui X una varietat, i $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial sobre X de rang r. Sigui $\pi : \mathbf{P}\mathcal{E} \to X$ el fibrat projectiu associat. Aleshores hi ha una equivalència feble*

$$\prod^{r} \mathcal{KD}(X) \to \mathcal{KD}(\mathbf{P}\mathcal{E}).$$

De la proposició 4.1.11, aplicant la proposició 3.1.26, en deduïm el següent.

4.2.9 Proposició *Donada X una varietat, hi ha una equivalència feble*

$$\mathcal{KD}(X[T, T^{-1}]) \simeq \mathcal{KD}(X) \times \Sigma\mathcal{KD}(X).$$

De la propietat de Mayer-Vietoris se'n dedueix la corresponent successió exacta:

4.2.10 Proposició *Donada una varietat X i U i V oberts de X, hi ha una successió exacta*

$$\cdots \to KD_n(U \cup V) \to KD_n(U) \oplus KD_n(V) \to KD_n(U \cap V) \to KD_{n-1} U \cup V) \to \cdots .$$

Demostració: Apliquem la proposició 3.2.22, tenint en compte que $\mathcal{KD}$ té la propietat de Mayer-Vietoris. □

Més generalment, per descens de Čech (secció 3.2.4), obtenim les següents successions espectrals associades a recobriments:

4.2.11 Proposició *Sigui X una varietat i $\mathcal{U} = \{U_0, \ldots, U_n\}$ un recobriment obert finit de X. Aleshores hi ha una successió espectral convergent*

$$E_1^{pq} = \bigoplus_{|\alpha|=p+1} KD_q(U_\alpha) \Rightarrow KD_{q-p}(X).$$

El terme E_2 d'aquesta successió és és $E_2^{pq} = \check{H}^p(\mathcal{U}, KD_q)$.

DEMOSTRACIÓ: Apliquem la proposició 3.2.23, tenint en compte que $\mathcal{KD}$ té la propietat de Mayer-Vietoris i que és un functor Φ-rectificat. □

La propietat de Mayer-Vietoris per a $\mathcal{KD}$ permet també obtenir la successió espectral d'hipercohomologia (secció 3.3.5):

4.2.12 Proposició *Sigui X una varietat. Hi ha una successió espectral convergent*

$$E_2^{pq} = H^p_{Zar}(X; aKD_q) \Rightarrow KD_{q-p}(X),$$

on aKD_* és el feix en la topologia de Zariski associat al prefeix KD_*.

DEMOSTRACIÓ: Apliquem la proposició 3.3.25, tenint en compte que $\mathcal{KD}$ té la propietat de Mayer-Vietoris i que és un functor Φ-rectificat. □

4.2.2 Equivalència amb la teoria K homotòpica

En aquesta secció considerem la teoria K homotòpica definida per Weibel en [78], amb la formulació de Thomason [74, 9.11].

Donat un anell R, considerem l'anell simplicial ΔR amb

$$\Delta R^n = R[t_0, t_1, \ldots, t_n]/(\sum t_i = 1).$$

Les cares i les degeneracions estan definides per

$$d_i(t_j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ t_j & \text{si } j < i, \\ t_{j-1} & \text{si } j > i, \end{cases} \quad s_i(t_j) = \begin{cases} t_i + t_{i+1} & \text{si } i = j, \\ t_j & \text{si } j < i, \\ t_{j+1} & \text{si } j > i. \end{cases}$$

Donada X una varietat, es defineix $\mathcal{KH}(X)$ com el colímit homotòpic de l'espectre simplicial que s'obté aplicant $\mathcal{K}^B$ al producte fibrat de X i $Spec(\Delta k)$:

$$\mathcal{KH}(X) = \operatorname*{hocolim}_{\Delta^{op}}(n \mapsto \mathcal{K}^B(X \times_k Spec(\Delta k))).$$

La propietat fonamental de $\mathcal{KH}$ és la seva invariància homotòpica: el morfisme $\mathcal{KH}(X) \to \mathcal{KH}(X \times \mathbb{A}^1)$ és una equivalència feble (vegeu [74, 9.11a]).

En [34, teorema 3.5], Haesemeyer demostra que la teoria K homotòpica $\mathcal{KH}$ d'una varietat algebraica X satisfà l'axioma de descens (D):

4.2.13 Proposició *La teoria K homotòpica $\mathcal{KH}$ satisfà la propietat de descens (D), i.e. si $X_\bullet$ és un quadrat acíclic en $\mathbf{Sch}(k)$, $\mathbf{s}\mathcal{KH}(X_\bullet)$ és acíclic.*

Demostració: Això és [34, Theorem 3.5]. Haesemeyer anomena *blow-ups* abstractes els quadrats acíclics, i demostra que donat un *blow-up* abstracte $X_\bullet$, el quadrat d'espectres $\mathcal{KH}(X_\bullet)$ és homotòpicament cartesià. D'aquesta propietat en diu satisfer descens respecte tot *blow-up* abstracte. □

Aquesta proposició s'obté de fet com a corol·lari de [34, Theorem 6.4], que afirma que $\mathcal{KH}(X) \cong \mathcal{K}^{cdh}(X)$ (vegeu la secció 3.3).

Com que la teoria KH coincideix amb la teoria K per varietats llises [78], podem aplicar la propietat d'unicitat del teorema d'extensió 3.1.17 i obtenir:

4.2.14 Corol·lari *Sigui X una varietat algebraica sobre un cos de característica zero. Hi ha un morfisme natural $\mathcal{KD}(X) \longrightarrow \mathcal{KH}(X)$, en $\mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$, que és una equivalència feble.* □

Aquest resultat es pot enunciar també com un resultat d'unicitat per a la teoria K homotòpica.

4.2.15 Corol·lari *Sigui k un cos de característica zero. La teoria K homotòpica $\mathcal{KH}$ és l'únic functor (Φ-rectificable) $\mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$, llevat equivalència, que satisfà la propietat de descens (D) i és equivalent al functor $\mathcal{K}$ sobre les varietats llises.* □

4.2.3 Teoria K algebraica amb suport compacte

Podem fer servir els mateixos arguments de la prova del teorema 4.2.1 juntament amb l'extensió a suport compacte (secció 3.1.5) per estendre la teoria K algebraica de les varietats projectives llises sobre un cos de característica zero a una teoria amb suport compacte:

4.2.16 Teorema *El functor*

$$\mathcal{K} : \mathbf{V}(k) \longrightarrow \mathbf{Sp}$$

admet una extensió única, llevat isomorfisme únic de functors Φ*-rectificats, a un functor*

$$\mathcal{K}^c : \mathbf{Sch}_c(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$$

tal que satisfà la propietat de descens (D) i la propietat de descens a suport compacte:

(D_c) si Y és una subvarietat de X, aleshores hi ha un isomorfisme natural

$$\mathcal{K}^c(X - Y) \cong \mathrm{holim}(\mathcal{K}^c(X) \longrightarrow \mathcal{K}^c(Y) \longleftarrow *).$$

Això és, la propietat (D_c) diu que la successió

$$\mathcal{K}^c(X - Y) \longrightarrow \mathcal{K}^c(X) \longrightarrow \mathcal{K}^c(Y),$$

és una successió de fibració en Ho**Sp**.

En [19, Section 5.3] Gillet-Soulé defineixen una K-teoria amb suport compacte satisfent (D_c), i per tant per la unicitat de l'extensió a suport compacte tenim:

4.2.17 Corol·lari *Sigui X una varietat algebraica sobre un cos de característica zero. Aleshores $\mathcal{K}^c(X)$ és naturalment isomorf en* Ho**Sp** *a la teoria K algebraica amb suport compacte introduïda per Gillet i Soulé en* [19, Section 5.3]. □

4.3 Una filtració pel pes en $KD_*(X)$

En aquesta secció provem que hi ha filtracions ben definides en els grups $KD_*(X)$, o equivalentment en $KH_*(X)$, i en els grups $K_*^c(X)$, que són trivials per X llisa. En el cas de suport compacte, obtenim la filtració pel pes obtinguda per Gillet-Soulé [19].

Fixem k un cos de característica zero. Sigui X una varietat algebraica. La successió espectral 4.2.4 associada a una hiperresolució cúbica $X_\bullet$ de X indueix una filtració en els grups $KD_n(X)$. El nostre objectiu es provar que aquesta filtració en $KD_n(X)$ és independent de la hiperresolució cúbica $X_\bullet$. Seguirem la secció 3 de [33] de ben aprop, on els autors analitzen la filtració pel pes en un context abelià.

4.3.1 Torres d'espectres fibrants

Primer introduïm una estructura de descens cohomològic en la categoria de torres de fibracions **tow**(**Sp**).

Recordem (secció 3.2.1) que una torre de fibracions $X(-)$ és una seqüència de fibracions d'espectres

$$\ldots \longrightarrow X(n) \longrightarrow X(n-1) \longrightarrow \ldots \longrightarrow X(1) \longrightarrow X(0) \longrightarrow *.$$

Si definim les equivalències febles per a torres de fibracions i el functor simple per a diagrames cúbics objecte a objecte, és immediat provar el següent resultat:

4.3.1 Proposició *La categoria de torres de fibracions* **tow(Sp)** *amb les equivalències febles i el functor simple per a diagrames cúbics definits objecte a objecte és una categoria de descens.* $\square$

Introduïm ara una segona estructura de descens en **tow(Sp)**. Recordem que si $X(-)$ és una torre de fibracions, hi ha una successió espectral functorial

$$E_1^{pq} = \pi_{q-p}(F(p)) \Longrightarrow \pi_{q-p}(X),$$

on $F(p)$ és la fibra del morfisme $X(p) \longrightarrow X(p-1)$ i $X = \lim X(p)$ (vegeu la secció 3.2.1).

4.3.2 Definició *Diem que un morfisme de torres $f : X(-) \longrightarrow Y(-)$ és una E_2-*equivalència feble *si el morfisme $E_2^{**}(f)$ induït en els termes E_2 de la corresponent successió espectral és un isomorfisme.*

Observem que si $f_p : X(p) \longrightarrow Y(p)$ és una equivalència feble, per tot $p \geq 0$, aleshores f indueix un isomorfisme en els termes E_1 de la successió espectral i per tant també és una E_2-equivalència feble.

Definim ara un functor simple compatible amb les E_2-equivalències febles: donada una torre de fibracions $X(-)$ i un enter $n \geq 0$, notem per $X[n](-)$ la torre de fibracions definida per

$$X[n](p) := \begin{cases} *, & 0 \leq p < n, \\ X(p-n), & p \geq n, \end{cases}$$

amb els morfismes evidents, de manera que la nova torre és obtinguda per translació de n posicions a l'esquerra de la torre $X(-)$.

4.3.3 Definició *Sigui $\square$ un tipus cúbic i $X_\bullet(-)$ un $\square$-diagrama de torres de fibracions. Definim un nou $\square$-diagrama de torres de fibracions $dX(-)$ de la següent forma:*

$$(dX)_\alpha(-) = X_\alpha[|\alpha| - 1](-),$$

amb morfismes induïts per $X_\bullet$. Definim el simple s_2 *de* $X_\bullet(-)$ *com la torre de fibracions obtinguda aplicant límits homòtopics en cada grau cúbic de* $dX_\bullet(-)$*, això és,*

$$s_2(X_\bullet)(p) := s(dX_\bullet(p)) = \operatorname*{holim}_{\alpha} X_\alpha(p - |\alpha| + 1).$$

Per exemple, donat un $\Box_1$-diagrama $X_\bullet(-)$ de torres de fibracions

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X(1) \arrow[r] \arrow[d] & X(0) \arrow[r] \arrow[d] & * \\
\dots \arrow[r] & Y(1) \arrow[r] & Y(0) \arrow[r] & * \\
\dots \arrow[r] & Z(1) \arrow[r] \arrow[u] & Z(0) \arrow[r] \arrow[u] & *
\end{tikzcd}$$

el nou diagrama $dX_\bullet(-)$ és el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\dots \arrow[r] & X(1) \arrow[r] \arrow[d] & X(0) \arrow[r] \arrow[d] & * \\
\dots \arrow[r] & Y(0) \arrow[r] & * \arrow[r] & * \\
\dots \arrow[r] & Z(1) \arrow[r] \arrow[u] & Z(0) \arrow[r] \arrow[u] & *
\end{tikzcd}$$

i el seu simple s_2 en grau p correspon a l'espectre

$$\operatorname{holim}(X(p) \longrightarrow Y(p-1) \longleftarrow Z(p)).$$

4.3.4 Lema *Per tot diagrama cúbic de torres de fibracions* $X_\bullet(-)$ *hi ha un isomorfisme de complexos de grups abelians*

$$E_1^{*q}(s_2 X_\bullet(-)) \longrightarrow s(\alpha \mapsto E_1^{*q}(X_\alpha(-))).$$

DEMOSTRACIÓ: La notació $s(\alpha \mapsto E_1^{*q}(X_\alpha(-)))$ es refereix al functor simple ordinari per a complexos de cocadenes de grups abelians (vegeu la secció 2.3.5.5). El grup en grau p d'aquest complex és

$$s(\alpha \mapsto E_1^{*q}(X_\alpha(-)))^p = s(\alpha \mapsto \pi_{q-r} F_\alpha(r)) = \bigoplus_{|\alpha|+r=p+1} \pi_{q-r}(F_\alpha(r)).$$

D'altra banda, per definició, per cada p, $s_2X_\bullet(p)$ és el simple del diagrama cúbic d'espectres $dX_\bullet(p)$, i per tant el complex $E_1^{*q}(s_2X_\bullet(-))$ és el terme E_1 de la successió espectral associada a la torre de fibracions

$$\ldots \longrightarrow sdX_\bullet(p) \longrightarrow \ldots \longrightarrow sdX_\bullet(1) \longrightarrow sdX_\bullet(0) \longrightarrow *.$$

Denotem per $F_\alpha(p)$ la fibra de la fibració $X_\alpha(p) \longrightarrow X_\alpha(p-1)$. Com que els límits homotòpics commuten, la fibra de la fibració $sdX_\bullet(p) \longrightarrow sdX_\bullet(p-1)$ és isomorfa al simple de l'espectre associat al codiagrama cúbic $dF_\bullet(p)$. En aquest diagrama tots els morfismes són constants i així

$$sdF_\bullet(p) = \prod_\alpha \Omega^{|\alpha|-1} F_\alpha(p - |\alpha| + 1) = \prod_{|\alpha|+r=p+1} \Omega^{p-r} F_\alpha(r),$$

i per tant els seus grups d'homotopia vénen donats per

$$E_1^{pq} = \pi_{q-p}(sdF_\bullet(p)) = \bigoplus_{|\alpha|+r=p+1} \pi_{q-r}(F_\alpha(r)).$$

Per finalitzar hem de veure que les diferencials de

$$E_1^{*q}(s_2X_\bullet(-)) = \bigoplus_{|\alpha|+r=p+1} \pi_{q-r}(F_\alpha(r))$$

i de

$$s(\alpha \mapsto E_1^{*q}(X_\alpha(-))) = \bigoplus_{|\alpha|+r=p+1} \pi_{q-r}(F_\alpha(r))$$

coincideixen. La diferencial té dues components, una relativa a l'índex de la torre i l'altra relativa a l'índex cúbic. La component relativa a l'índex de la torre es raona reduint-se, per naturalitat de la successió espectral, al diagrama cúbic de torres amb totes les torres trivials llevat d'una. La component relativa a l'índex cúbic es raona anàlogament a com ho hem fet en la prova de la proposició 3.2.20. $\square$

4.3.5 Proposició *El simple s_2 i les E_2-equivalències febles defineixen una estructura de categoria de descens cohomològic en* $\mathbf{tow}(\mathbf{Sp})$.

DEMOSTRACIÓ: Observem que un morfisme f entre torres de fibracions és una E_2-equivalència feble si i només si el morfisme $E_1(f)$ de la corresponent successió espectral és un quasiisomorfisme de complexos. Si $Gr\mathbf{Ch}^*(\mathbb{Z})$ denota la categoria de complexos graduats de grups abelians, el functor

$$\begin{array}{rcl} E_1 : \mathbf{tow}(\mathbf{Sp}) & \longrightarrow & Gr\mathbf{Ch}^*(\mathbb{Z}) \\ X(-) & \longmapsto & E_1^* \end{array}$$

commuta amb les sumes directes i, pel resultat anterior, commuta amb el functor simple s_2, de manera que el resultat es dedueix del criteri de transferència [32, 1.5.12] (vegeu també la secció 2.2.7). $\square$

4.3.2 Un criteri d'extensió per a torres

En el següent resultat notem $\mathrm{Ho}_2(\mathbf{tow}(\mathbf{Sp}))$ la categoria homotòpica obtinguda de $\mathbf{tow}(\mathbf{Sp})$ invertint les E_2-equivalències febles.

4.3.6 Proposició [compareu amb [33, proposition (3.10)]]. *Sigui* $G : \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}\mathbf{Sp}$ *un functor* Φ*-rectificable i notem per*

$$(G, \tau) : \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}_2(\mathbf{tow}(\mathbf{Sp}))$$

el functor constant associat. Aleshores (G, τ) *compleix la propietat* $(F2)$ *si i només si per tot quadrat acíclic elemental la successió*

$$0 \longrightarrow \pi_n G(X) \stackrel{f^*-i^*}{\longrightarrow} \pi_n G(\widetilde{X}) \oplus \pi_n G(Y) \stackrel{j^*+g^*}{\longrightarrow} \pi_n G(\widetilde{Y}) \longrightarrow 0,$$

és exacta.

DEMOSTRACIÓ: La propietat $(F2)$ per al functor (G, τ) afirma que el morfisme

$$E_1^{*,q}(G(X), \tau) \longrightarrow E_1^{*,q} s_2 G(X_\bullet)$$

és un quasiisomorfisme. Observem que tenim

$$E_1^{*,q}(G(X), \tau) = \begin{cases} \pi_q(G(X)), & p = 0, \\ 0, & p \neq 0. \end{cases}$$

D'altra banda, la pàgina E_1 de la successió espectral de $s_2 G(X_\bullet)$ es redueix a la successió exacta

$$\pi_n G(\widetilde{X}) \oplus \pi_n G(Y) \stackrel{j^*+g^*}{\longrightarrow} \pi_n G(\widetilde{Y}),$$

i per tant la propietat $(F2)$ és equivalent al fet que el morfisme de complexos de grups abelians

$$\pi_n G(X) \stackrel{f^*-i^*}{\longrightarrow} (\pi_n G(\widetilde{X}) \oplus \pi_n G(Y) \stackrel{j^*+g^*}{\longrightarrow} \pi_n G(\widetilde{Y})),$$

és un quasiisomorfisme, que és la condició enunciada en la proposició. $\square$

Retornem ara a les aplicacions a la teoria K algebraica. La següent proposició ha estat provada també per Gillet-Soulé directament dels càlculs de Thomason, vegeu [19, theorem 5]:

4.3.7 Proposició *Per a tot quadrat acíclic elemental de* $\mathbf{Sm}(k)$ *i tot* $n \geq 0$*, la successió*

$$0 \longrightarrow K_n(X) \xrightarrow{f^*-i^*} K_n(\widetilde{X}) \oplus K_n(Y) \xrightarrow{j^*+g^*} K_n(\widetilde{Y}) \longrightarrow 0,$$

és exacta.

DEMOSTRACIÓ: Tal i com hem recordat en la prova del teorema 4.2.1, un quadrat acíclic elemental dóna lloc a un quadrat homotòpicament cartesià d'espectres de teoria K, i per tant tenim una successió exacta

$$\dots \longrightarrow K_n(X) \xrightarrow{f^*-i^*} K_n(\widetilde{X}) \oplus K_n(Y) \xrightarrow{j^*+g^*} K_n(\widetilde{Y}) \xrightarrow{\delta} K_{n-1}(X) \longrightarrow \dots$$

Ara bé, pel càlcul de Thomason de la teoria K algebraica d'un *blow-up* [73], hi ha isomorfismes

$$\begin{array}{rcl} \varphi : K_n(X) \bigoplus_{i=1}^{d-1} K_n(Y) & \longrightarrow & K_n(\widetilde{X}), \\ \psi : \bigoplus_{i=0}^{d-1} K_n(Y) & \longrightarrow & K_n(\widetilde{Y}), \end{array}$$

donats, respectivament, per

$$\begin{array}{rcl} \varphi(x, y_1, \dots, y_{d-1}) & = & f^*(x) + \bigoplus_{i=1}^{d-1} j_*(\ell^{-i} \cup g^*(y_i)), \\ \psi(y_0, y_1, \dots, y_{d-1}) & = & \bigoplus_{i=0}^{d-1} j_*(\ell^{-i} \cup g^*(y_i)). \end{array}$$

Amb aquestes identificacions el morfisme f^* correspon a la inclusió de $K_n(X)$ en el primer factor de $K_n(\widetilde{X})$, i per tant el morfisme $f^* - i^*$ és injectiu. Això escindeix la successió exacta de més amunt en les successions exactes curtes requerides. $\square$

Ara, per les proposicions 4.3.6 i 4.3.7 podem aplicar el criteri d'extensió del teorema 3.1.17, de manera que obtenim:

4.3.8 Corol·lari *El functor de teoria K algebraica constant*

$$(\mathcal{K}, \tau) : \mathbf{Sm}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}_2(\mathbf{tow}(\mathbf{Sp}))$$

admet una extensió essencialment única $\mathcal{KD}(-) : \mathbf{Sch}(k) \longrightarrow \mathrm{Ho}_2(\mathbf{tow}(\mathbf{Sp}))$ *que satisfà la propietat de descens (D). Més encara, per a una varietat X la torre de fibracions* $\mathcal{KD}(-)(X)$ *satisfà* $\mathcal{KD}(n)(X) = \mathcal{KD}(X)$ *per a* $n \gg 0$.

DEMOSTRACIÓ: Hem de justificar només la darrera afirmació. Donada una varietat X i una hiperresolució $X_\bullet$, de mida ℓ. Per definició del functor de descens $\mathcal{KD}(-)$, la torre $\mathcal{KD}(-)(X)$ és l'obtinguda aplicant el simple s_2 al diagrama de torres constants $\mathcal{K}(X_\bullet)$, això és, és la torre els espectres de les quals són els límits homotòpics del diagrama $d\mathcal{K}(X_\bullet)(n)$ per cada n (vegeu la definició 4.3.3). Observem que aquest diagrama és constat per a $n \geq \ell$ i, a més, és precisament el diagrama cúbic $X_\bullet$, d'on deduïm el resultat. □

Com que la successió espectral d'una torre de fibracions és functorial en la categoria $\mathrm{Ho}_2(\mathbf{tow}(\mathbf{Sp}))$ a partir del terme E_2, del corol·lari anterior deduïm:

4.3.9 Corol·lari *Hi ha una filtració finita functorial i ben definida F^p en $KD_n(X)$ que és trivial per a varietats llises.*

DEMOSTRACIÓ: La finitud de la filtració és conseqüència de la finitud de les hiperresolucions. □

4.3.10 Remarca Equivalentment, per 4.2.14, per a una varietat X el darrer corol·lari defineix una filtració finita functorial en els grups de teoria K algebraica homotòpica $KH_n(X)$.

Finalment, observem que el mateix procediment es pot aplicar a la teoria K algebraica amb suport compacte. en aquest cas, per la unicitat de les extensions de descens i [19, theorem 7], deduïm:

4.3.11 Corol·lari *Hi ha una filtració creixent finita functorial i ben definida W^p en $K_n^c(X)$ que és trivial per a varietats llises completes. Aquesta filtració coincideix amb la filtració pel pes definida per Gilet-Soulé en* [19].

Bibliografia

[1] *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas. Tome 1: Théorie des topos.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois-Marie 1963–1964 (SGA 4), Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck, et J. L. Verdier. Avec la collaboration de N. Bourbaki, P. Deligne et B. Saint-Donat, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 269.

[2] Friedrich W. Bauer and Tamar Datuashvili. Simplicial model category structures on the category of chain functors. *Homology, Homotopy Appl.*, 9(1):107–138 (electronic), 2007.

[3] J. Michael Boardman. Conditionally convergent spectral sequences. In *Homotopy invariant algebraic structures (Baltimore, MD, 1998)*, volume 239 of *Contemp. Math.*, pages 49–84. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[4] A. K. Bousfield. The localization of spaces with respect to homology. *Topology*, 14:133–150, 1975.

[5] A. K. Bousfield and E. M. Friedlander. Homotopy theory of Γ-spaces, spectra, and bisimplicial sets. In *Geometric applications of homotopy theory (Proc. Conf., Evanston, Ill., 1977), II*, volume 658 of *Lecture Notes in Math.*, pages 80–130. Springer, Berlin, 1978.

[6] A. K. Bousfield and D. M. Kan. *Homotopy limits, completions and localizations.* Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 304.

[7] Kenneth S. Brown and Stephen M. Gersten. Algebraic K-theory as generalized sheaf cohomology. In *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 266–292. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[8] C. Cortiñas, C. Haesemeyer, M. Schlichting, and C. Weibel. Cyclic homology, cdh-homology and negative k-theory. *ArXiv preprint, math.KT/0502255.*

[9] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (40):5–57, 1971.

[10] Pierre Deligne. Théorie de Hodge. III. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (44):5–77, 1974.

[11] Albrecht Dold. *Lectures on algebraic topology*, volume 200 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 1980.

[12] Daniel Dugger and Brooke Shipley. K-theory and derived equivalences. *Duke Math. J.*, 124(3):587–617, 2004.

[13] W. G. Dwyer and J. Spaliński. Homotopy theories and model categories. In *Handbook of algebraic topology*, pages 73–126. North-Holland, Amsterdam, 1995.

[14] Emmanuel Dror Farjoun. *Cellular spaces, null spaces and homotopy localization*, volume 1622 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[15] H. Fausk. T-model structures on chain complexes of presheaves. *ArXiv Preprint :math/0612414v1.*

[16] Eric M. Friedlander, Christian Haesemeyer, and Mark E. Walker. Techniques, computations, and conjectures for semi-topological K-theory. *Math. Ann.*, 330(4):759–807, 2004.

[17] Eric M. Friedlander and Andrei Suslin. The spectral sequence relating algebraic K-theory to motivic cohomology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 35(6):773–875, 2002.

[18] P. Gabriel and M. Zisman. *Calculus of fractions and homotopy theory*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Band 35. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1967.

[19] H. Gillet and C. Soulé. Descent, motives and K-theory. *J. Reine Angew. Math.*, 478:127–176, 1996.

[20] Henri Gillet. K-theory and intersection theory. In *Handbook of K-theory. Vol. 1, 2*, pages 235–293. Springer, Berlin, 2005.

[21] Paul Goerss and Kristen Schemmerhorn. Model categories and simplicial methods. In *Interactions between homotopy theory and algebra*, volume 436 of *Contemp. Math.*, pages 3–49. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2007.

[22] Paul G. Goerss and John F. Jardine. *Simplicial homotopy theory*, volume 174 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1999.

[23] Thomas G. Goodwillie. Calculus. II. Analytic functors. *K-Theory*, 5(4):295–332, 1991/92.

[24] Marvin J. Greenberg and John R. Harper. *Algebraic topology*, volume 58 of *Mathematics Lecture Note Series*. Benjamin/Cummings Publishing Co. Inc. Advanced Book Program, Reading, Mass., 1981. A first course.

[25] A. Grothendieck. Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (8):222, 1961.

[26] A. Grothendieck. On the de Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (29):95–103, 1966.

[27] A. Grothendieck. *Revêtements étales et groupe fondamental*. Springer-Verlag, Berlin, 1971. Séminaire de Géométrie Algébrique du Bois Marie 1960–1961 (SGA 1), Lecture Notes in Mathematics, Vol. 224.

[28] F. Guillén. Une relation entre la filtration par le poids de Deligne et la filtration de Zeeman. *Compositio Math.*, 61(2):201–227, 1987.

[29] F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual Gainza, and F. Puerta. *Hyperrésolutions cubiques et descente cohomologique*, volume 1335 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Papers from the Seminar on Hodge-Deligne Theory held in Barcelona, 1982.

[30] F. Guillén, V. Navarro Aznar, P. Pascual Gainza, and A. Roig. A Cartan-Eilenberg approach to homotopical algebra. *ArXiv preprint, arXiv:0707.3704v2[math.AT].*

[31] F. Guillén and F. Puerta. Hyperrésolutions cubiques et applications à la théorie de Hodge-Deligne. In *Hodge theory (Sant Cugat, 1985)*, volume 1246 of *Lecture Notes in Math.*, pages 49–74. Springer, Berlin, 1987.

[32] Francisco Guillén and Vicente Navarro Aznar. Un critère d'extension des foncteurs définis sur les schémas lisses. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, (95):1–91, 2002.

[33] Francisco Guillén and Vicente Navarro Aznar. Cohomological descent and weight filtration. *Communication at the Joint Meeting of the AMS and the Spanish Math. Soc.*, 2003.

[34] Christian Haesemeyer. Descent properties of homotopy K-theory. *Duke Math. J.*, 125(3):589–619, 2004.

[35] Masaki Hanamura. Homological and cohomological motives of algebraic varieties. *Invent. Math.*, 142(2):319–349, 2000.

[36] Robin Hartshorne. On the De Rham cohomology of algebraic varieties. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (45):5–99, 1975.

[37] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Springer-Verlag, New York, 1977. Graduate Texts in Mathematics, No. 52.

[38] P. J. Hilton and U. Stammbach. *A course in homological algebra*, volume 4 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1997.

[39] Heisuke Hironaka. Resolution of singularities of an algebraic variety over a field of characteristic zero. I, II. *Ann. of Math. (2) 79 (1964), 109–203; ibid. (2)*, 79:205–326, 1964.

[40] Philip S. Hirschhorn. *Model categories and their localizations*, volume 99 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2003.

[41] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[42] Mark Hovey. Model category structures on chain complexes of sheaves. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 353(6):2441–2457 (electronic), 2001.

[43] Thomas Hüttemann. Total cofibres of diagrams of spectra. *New York J. Math.*, 11:333–343 (electronic), 2005.

[44] J. F. Jardine. Simplicial presheaves. *J. Pure Appl. Algebra*, 47(1):35–87, 1987.

[45] J. F. Jardine. Stable homotopy theory of simplicial presheaves. *Canad. J. Math.*, 39(3):733–747, 1987.

[46] J. F. Jardine. *Generalized étale cohomology theories*, volume 146 of *Progress in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1997.

[47] J. F. Jardine. Simplicial approximation. *Theory Appl. Categ.*, 12:No. 2, 34–72 (electronic), 2004.

[48] J.F. Jardine. Lectures on presheaves of spectra. http://www.math.uwo.ca/ jardine/papers/Spt/, 2005.

[49] C. U. Jensen. *Les foncteurs dérivés de* $\varprojlim$ *et leurs applications en théorie des modules*. Springer-Verlag, Berlin, 1972. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 254.

[50] Amalendu Krishna and Marc Levine. Additive chow groups of schemes. ArXiv Preprint, math.AG/0702138v1.

[51] Marc Levine. *Mixed motives*, volume 57 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.

[52] L. G. Lewis, Jr., J. P. May, M. Steinberger, and J. E. McClure. *Equivariant stable homotopy theory*, volume 1213 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1986. With contributions by J. E. McClure.

[53] Saunders Mac Lane. *Homology*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Bd. 114. Academic Press Inc., Publishers, New York, 1963.

[54] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, second edition, 1998.

[55] M. A. Mandell, J. P. May, S. Schwede, and B. Shipley. Model categories of diagram spectra. *Proc. London Math. Soc. (3)*, 82(2):441–512, 2001.

[56] Sibe Mardešić. *Strong shape and homology*. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[57] J. P. May. E_∞ spaces, group completions, and permutative categories. In *New developments in topology (Proc. Sympos. Algebraic Topology, Oxford, 1972)*, pages 61–93. London Math. Soc. Lecture Note Ser., No. 11. Cambridge Univ. Press, London, 1974.

[58] J. P. May. *A concise course in algebraic topology.* Chicago Lectures in Mathematics. University of Chicago Press, Chicago, IL, 1999.

[59] Stephen A. Mitchell. Hypercohomology spectra and Thomason's descent theorem. In *Algebraic K-theory (Toronto, ON, 1996)*, volume 16 of *Fields Inst. Commun.*, pages 221–277. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997.

[60] Vicenç Navarro and Pere Pascual. *Topologia Algebraica*, volume 34 of *Col·lecció UB*. Edicions Universitat de Barcelona, Barcelona, 1999.

[61] Amnon Neeman. *Triangulated categories*, volume 148 of *Annals of Mathematics Studies*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 2001.

[62] Pere Pascual Gainza. On the simple object associated to a diagram in a closed model category. *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 100(3):459–474, 1986.

[63] Pere Pascual Gainza and Llorenç Rubió i Pons. Algebraic k-theory and cubical descent. Preprint Arxiv math.AG/2257, june of 2007.

[64] Daniel Quillen. Higher algebraic K-theory. I. In *Algebraic K-theory, I: Higher K-theories (Proc. Conf., Battelle Memorial Inst., Seattle, Wash., 1972)*, pages 85–147. Lecture Notes in Math., Vol. 341. Springer, Berlin, 1973.

[65] Daniel G. Quillen. *Homotopical algebra.* Lecture Notes in Mathematics, No. 43. Springer-Verlag, Berlin, 1967.

[66] Charles Rezk, Stefan Schwede, and Brooke Shipley. Simplicial structures on model categories and functors. *Amer. J. Math.*, 123(3):551–575, 2001.

[67] Beatriz Rodríguez. *Categorías de descenso simplicial.* PhD thesis, Universidad de Sevilla, 2007.

[68] Llorenç Rubió i Pons. Model categories and cubical descent. *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 13(2), 2007. To appear.

[69] Stefan Schwede. Spectra in model categories and applications to the algebraic cotangent complex. *J. Pure Appl. Algebra*, 120(1):77–104, 1997.

[70] Stefan Schwede and Brooke Shipley. Stable model categories are categories of modules. *Topology*, 42(1):103–153, 2003.

[71] R. W. Thomason. Algebraic K-theory and étale cohomology. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 18(3):437–552, 1985.

[72] R. W. Thomason. Les K-groupes d'un fibré projectif. In *Algebraic K-theory and algebraic topology (Lake Louise, AB, 1991)*, volume 407 of *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.*, pages 243–248. Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1993.

[73] R. W. Thomason. Les K-groupes d'un schéma éclaté et une formule d'intersection excédentaire. *Invent. Math.*, 112(1):195–215, 1993.

[74] R. W. Thomason and Thomas Trobaugh. Higher algebraic K-theory of schemes and of derived categories. In *The Grothendieck Festschrift, Vol. III*, volume 88 of *Progr. Math.*, pages 247–435. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990.

[75] A. Vistoli. Notes on grothendieck topologies, fibered categories and descent theory. 2005. Available at www.dm.unibo.it/vistoli/descent.pdf. Will appear as a part of the book Fundamental Algebraic Geometry: Grothendieck's FGA explained, by B. Fantechi, L. Göttsche, L. Illusie, S. Kleiman, N. Nitsure, A. Vistoli, published by A.M.S. in the series Mathematical Surveys and Monographs.

[76] Vladimir Voevodsky. Homotopy theory of simplicial sheaves in completely decomposable topologies. Preprint, September 6, 2000, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0443/.

[77] Vladimir Voevodsky. Unstable motivic homotopy categories in Nisnevich and cdh-topologies. Preprint, September 6, 2000, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0444/.

[78] Charles A. Weibel. Homotopy algebraic K-theory. In *Algebraic K-theory and algebraic number theory (Honolulu, HI, 1987)*, volume 83 of *Contemp. Math.*, pages 461–488. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

[79] Charles A. Weibel. A Quillen-type spectral sequence for the K-theory of varieties with isolated singularities. *K-Theory*, 3(3):261–270, 1989.

[80] Charles A. Weibel. *An introduction to homological algebra*, volume 38 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics.* Cambridge University Press, Cambridge, 1994.