UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

Departament de Didàctica de la Matemàtica i de les Ciències Experimentals

CONTRIBUCIÓ A L'ESTUDI DELS PROCESSOS DE MODELITZACIÓ A L'ENSENYAMENT/APRENENTATGE DE LES MATEMÀTIQUES A NIVELL UNIVERSITARI.

Tesi Doctoral presentada per Joan Gómez i Urgellés

Director de Tesi:

Josep Mª Fortuny i Aymemi

" El coneixement humà comença amb intuicions,després passa als conceptes i acaba amb les idees "   Kant

A la memòria de Vicens i Montserrat,els meus pares.

AGRAÏMENTS

A **Andrea Noya**, la meva àvia de 97 anys, a qui no he pogut dedicar-li el temps que es mereixia i ha sapigut comprendre la importància d'aquest treball per restar-li temps d'atenció a ella.

A **Paulo Abrantes** pel seu interès i per la seva valuosa aportació en la metodologia de treball en grup.

A **Claudi Alsina** per la seva militància activa en defensa de la innovació i la qualitat docent.

A **Josep Mª Fortuny** per la seva paciència i constància en el seguiment del treball i pel seu ajut incondicional que sempre ha mostrat.

Als **alumnes** de l'eupvg, en especial els dels cursos 1995 fins 1998, per la col·laboració en la realització i defensa de projectes de modelització.

A la meva esposa **Susanna** per el suport moral demostrat durant la realització de la present memòria.

Joan Gómez i Urgellés

ÍNDEX

PREÀMBUL

En la memòria es presenta un treball d'investigació localitzat a l'Escola Universitària Politècnica de Vilanova i la Geltrú (eupvg) durant el curs 1994-95. L'àmbit de l'estudi es l'ensenyament en l'àrea d'àlgebra lineal i equacions diferencials.
Es presenten unes propostes didàctiques arran d'investigar el procés d'aprenentatge d'estudiants de primer curs d'enginyeria tècnica.
El treball neix de preguntar-me sobre la viabilitat d'ensenyar les matemàtiques de la manera tradicional, partint de la idea de que formem a futurs enginyers i no a futurs matemàtics i, alhora oferir una nova orientació al caràcter formatiu de les matemàtiques. Sovint s'expliquen gran quantitat de conceptes matemàtics, desconnectats del món real, de manera que l'estudiant no veu prou bé la utilitat d'aquesta matèria en l'especialitat tècnica que cursa. Tot plegat fa pensar que l'ensenyament tradicional es totalment inadequat pel qui aspira a aplicar les matemàtiques, s'anomeni físic, biòleg, economista o enginyer. Considero que la formació d'un enginyer, en la manera de presentar els resultats, ha de diferir de la tradicional, que va més dirigida a comprendre conceptes abstractes; aspectes molt convenients per a la formació de matemàtics, però innecessaris per als usuaris que al cap i a la fi són els qui els han d'aplicar. Cal remarcar que l'aproximació de l'enginyer a les matemàtiques es d'una naturalesa clarament pràctica i està orientada a la resolució de problemes concrets.
És per això que, presentem una proposta focalitzada en una experiència innovadora per la millora de la qualitat docent. Aquesta metodologia està basada en la modelització matemàtica com eina d'ensenyament/aprenentatge.
El modelatge matemàtic consisteix -per dir-ho d'una manera breu- a formular un problema tècnic real en termes matemàtics, resoldre'l si es possible i interpretar-ne els resultats en termes del problema i de la situació estudiada. Alguns dels propòsits pels quals es construeix un model són:

1. Obtenir respostes sobre el que pot succeir davant d'un problema real.
2. Facilitar la comprensió dels fenòmens tècnics.
3. Oferir una nova visió, mes utilitarista, de les matemàtiques.

El marc teòric de treball ha seguit les directrius del procés de modelització: Identificació de la situació, construcció del model, resolució i interpretació del model.
Així, doncs, el procés de modelització consisteix a desenvolupar i donar forma, d'una manera esglaonada, a la situació fins a arribar al model i, si es possible, resoldre el problema.
L'eficàcia de les matemàtiques i la seva presencia constant en la societat moderna ens porta a fer servir el pensament matemàtic per modelar situacions pràctiques.
En l'àmbit teòric, s'ha desenvolupat el procés epistemològic de la modelització, es a dir, es posa especial èmfasi en la teoria i els fonaments del mètode, sense deixar de banda els aspectes didàctics.
En síntesi, es tracta d'afavorir la creativitat, motivar els estudiants amb vistes a les necessitats reals dels continguts matemàtics i posar a disposició dels estudiants d'enginyeria un conjunt de recursos per tal que entenguin més àmpliament l'aplicabilitat dels conceptes que els transmetem en la seva formació; en definitiva, com usar les tècniques apreses en un context real.
Exposaré breument les intencions inicials i objectius:

1. Aconseguir que els estudiants assumeixin una actitud creativa.
2. Desenvolupar la seva habilitat en les aplicacions de les matemàtiques i motivar-los per les finalitats acadèmiques i professionals.
3. Capacitar als estudiants en les tècniques de modelització.
4. Proporcionar una imatge de les matemàtiques i del seu ensenyament diferent del tradicional.
5. Ajudar a adquirir i comprendre tècniques i conceptes matemàtics a a partir de les seves aplicacions.

Per desenvolupar la investigació hem repassat la literatura oferida per diversos autors, des de Puig Adam fins a Mogen Niss, recuperant i compartint les seves inquietuds docents tal i com expliquem en la memòria.
Per tal de complimentar el procés d'aprenentatge a partir del modelatge,i implementar la metodologia per esbrinar la seva viabilitat, hem realitzat treballs en unitats didàctiques i projectes.
Les unitats didàctiques són treballs dirigits realitzat a les aules. Els alumnes construeixen el model i treballen en models anàlegs al trobat. En l'experiència hem realitzat dues unitats didàctiques: modelatge d'un sistema de ressorts i el món de les equacions diferencial.
Els projectes són treballs en grup, realitzats fóra de les aules on hi ha una component de recerca. En els projectes els alumnes cercant la informació i treballen sobre el model. Finalment són defensats a classe. Es realitzen tres projectes: estudi del creixement d'una granja de conills, la successió de Fibonnaci, l'anàlisi d'un circuit elèctric.
En la memòria recollim testimonis reals dels alumnes que avalen l'eficàcia de la metodologia.
Finalment, s'exposen les limitacions del treball i es proposen noves vies de recerca.

Joan Gómez i Urgellés
Juliol de 1998

Capítol 1

Problemàtica de la tesi

1. PROBLEMÀTICA DE LA TESI

" Ensenyar bé és ajudar a descobrir allò que es vol transmetre "
G. Pòlya

Index del capítol

En aquest capítol s'exposa la problemàtica de la tesi. Presentem la situació actual de l'ensenyament de les matemàtiques i el seu aprenentatge i les hipótesi de treball amb l'objectiu d'analitzar una nova via d'ensenyament focalitzada en la innovació docent. Tanmateix donem una visió global d'aquesta nova via: la modelització, i justifiquem els eixos que motiven l'origen del present projecte. Arran d'aquest anàlisi s'observen i es detecten un seguit de punts febles que justifiquen la necessitat d'una nova orientació en la metodologia docent.
La tesi pretén fer una aportació al procés d'aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari.

1.1. INTRODUCCIÓ

Durant molts anys el tipus d'ensenyament impartit a les escoles universitàries ha estat criticat en nombroses ocasions. Ha obtingut crítiques positives i negatives.
El que es pretén en el present treball, és efectuar una revisió de com s'ha desenvolupat el currículum del futur enginyer tècnic i, a partir d'aquí, intentar millorar-ne la docència. Aquesta millora es centralitza en realitzar un ensenyament de caire més pràctic, fugint de les classes tradicionals recarregades de formalismes i allunyades d'exemples propis del món de la tècnica.

Un dels objectius és analitzar la viabilitat d'introduir elements nous d'aprenentatge. L'element principal és la introducció del modelatge matemàtic com a eina d'ensenyament.

Ens podria preguntar-se perquè aquesta necessitat d'introduir nous elements. La justificació, tal i com provarem més endavant, és que considerem que en l'ensenyament actual no s'assoleixen amb prou èxit els objectius d'aprenentatge. Per això ens qüestionem si pot existir algun tipus de metodologia diferent que ens ajudi a aconseguir un millor aprofitament dels continguts matemàtics i de llurs necessitats en la carrera professional del futur tècnic.

D'una manera natural, cal indicar com es pot construir una alternativa en funció dels continguts que considerem més delicats de cara a les aplicacions. D'aquesta manera pretenem fer una aportació amb l'objectiu de millorar l'educació matemàtica d'un futur tècnic. Això no vol dir, en cap moment, que la metodologia que presentaré hagi de substituir totalment el que s'ha fet fins a l'actualitat.

La nova via estudiada i experimentada és el que anomenarem modelització, que es desenvoluparà combinant treballs en forma d'unitats didàctiques i projectes.

Què és el modelatge? Què són les unitats didàctiques? Què són els projectes? On es desenvolupen les pràctiques? A qui van dirigides? Quins resultats s'obtenen?...

En la memòria presentarem el significat d'aquests conceptes i respondrem, entre d'altres, a aquestes preguntes.

En la pràctica, trobem moltes situacions que requereixen eines matemàtiques per poder-les analitzar.

El present treball pretén efectuar una aportació al procés d'aprenentatge de les matemàtiques a nivell universitari. Aquesta aportació es concretarà amb el modelatge matemàtic que consisteix -per dir-ho d'una manera breu- a formular un problema tècnic real en termes matemàtics (el que anomenen model), resoldre'l si es possible i interpretar-ne els resultats en termes del problema i de la situació estudiada. Alguns dels propòsits per els quals es construeix un model són:
1. L'obtenció de respostes sobre el que pot succeir davant d'un fenomen físic.
2. Influir en l'experimentació o les observacions que es poden produir posteriorment.
3. Facilitar i fomentar el progrés i la comprensió dels fenòmens tècnics.
4. Fomentar les matemàtiques i l'art de construir models.

Això ho podem resumir en el següent esquema (figura1):

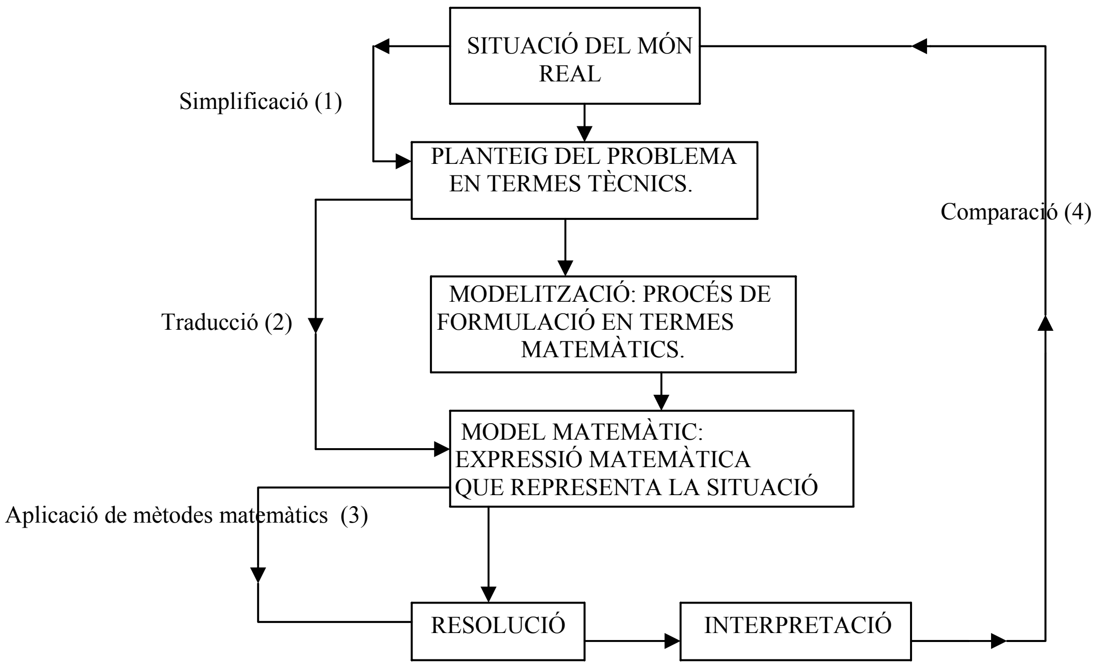


Figura 1. Esquema del procés de modelització

En aquest esquema podem trobar problemes en qualsevol dels camins mostrats:
En (1) Simplificació: La situació real pot manipular-se de manera que quan tinguem el model real, hàgim suposat diverses hipòtesis. Per exemple, en situacions de caiguda de cossos no s'obté el mateix model real si considerem la situació amb fregament o bé si el suposem despreciable. M. Niss (1992) ho anomena matematització.
En (2) Traducció: No és el mateix donar el model i treballar-hi, que construir-lo. A vegades la tasca de construcció és molt laboriosa. En aquest pas el que fem és substituir paraules per símbols i expressions (per exemple: equacions, matrius, funcions,etc.). D'aquesta manera s'aconsegueix una formulació matemàtica del problema i d'una manera natural s'obté un problema en termes matemàtics.
En (3) Aplicació de mètodes matemàtics: En aquest pas apareixen els algoritmes adequats per resoldre el problema que s'ha convertit en una situació real. Cal resoldre el model usant les eines pròpies i adequades. Aquí el professor juga un paper important, ja que sovint els estudiants troben un model (per exemple un sistema d'equacions lineals o una integral) que no saben resoldre i aleshores a l'aula o en tutories es presenten els mètodes de resolució. Un dels objectius és que l'estudiant s'adoni que per arribar a resoldre un cas usual de l'àmbit de la seva especialitat, necessita aprendre uns conceptes i unes tècniques per tal d'assolir una resposta al seu problema (ho podem anomenar motivació). D'aquesta manera adquireix un interès per l'aprenentatge de les matemàtiques ja que li veu una utilitat. Això ja és un fet diferencial en relació amb l'ensenyament tradicional.
En (4) Comparació: Es tracta de rescriure els resultats numèrics obtinguts en termes del problema proposat inicialment, interpretar-los i alhora, saber triar, si hi ha diverses solucions, quina és l'adequada al seu problema.

Això comporta una tasca de traducció per part de l'alumne, on el que es pretén és que fent servir conceptes que ja coneix, pugui arribar a establir un model. Veurem, entre d'altres exemples, com a partir d'un problema de ressorts es construeix un model: *els sistemes d'equacions lineals*. També exposaré en capítols posteriors altres exemples de modelització realitzats en diversos indrets, així com un estudi comparatiu amb els que he efectuat a l'Escola Universitària Politècnica de Vilanova.

Així doncs, el procés de modelització consistirà a desenvolupar i donar forma d'una manera escalonada a la situació fins a arribar al model, i si és possible resoldre el problema i avaluar la seva eficàcia.
Podem establir una analogia: un escultor vol fer una reproducció d'un personatge amb argila; l'escultura seria el model i el procés per construir-lo seria la modelització. Els productes utilitzats per a l'elaboració del model serien, en el nostre cas, els coneixements previs de què disposa l'estudiant.

1.2. LES MATEMÀTIQUES EN L'ENGINYERIA

En les següents línies descriurem l'estat actual de les matemàtiques a l'enginyeria. També presentem un anàlisi de la situació de l'ensenyament tradicional, caracteritzat per la manca de pràctiques de modelatge en els processos heurístics d'aprenentatge.
Considerem que les matemàtiques en la vida professional d'un enginyer juguen un paper molt important.
A les escoles tècniques, els ensenyaments de les matemàtiques han de tenir, en funció del currículum d'un enginyer, un tarannà de caire aplicat. En primer lloc cal seleccionar amb cura els continguts i ensenyar als estudiants de quina manera poden adquirir coneixements i bàsicament com utilitzar els coneixements apresos en la resolució de problemes adients procedents de situacions reals. Per tant podem afirmar que hi han involucrats aspectes que cal tenir en compte en el procés d'ensenyament/aprenentatge: cognitius (àrea de coneixement i continguts), heurístics (habilitats i de quina manera han de ser adquirides) i epistemològics (en referència a l'aplicabilitat i impacte professional de les matemàtiques apresses).
Els cursos clàssics de matemàtiques desenvolupats a l'eupvg i en general a d'altres escoles (G. Lusa 1975 i L. Leris, 1992) proporcionen a l'estudiant un coneixement purament matemàtic que no ensenyen la vinculació de les tècniques apreses en un context real. Aquest fet també el destaca Boieri i Steele (1987), i el modelatge hi juga un paper molt important, ja que es una metodologia orientada a la resolució i interpretació de problemes de caire aplicat.
En el modelatge intentarem estudiar problemes i algunes situacions habituals, com apuntem més endavant, per tal d'obtenir qualitats pedagògiques en el procés d'ensenyament de les matemàtiques i per tal d'integrar casos pràctics en les assignatures de matemàtiques; com ara l'estudi d'un sistema de ressorts, l'anàlisi de circuits elèctrics, el moviment d'un cos en caiguda lliure... Estudiarem aquest tipus de problemes perquè a través del modelatge es pot aconseguir que siguin els estudiants qui produeixin els seus propis coneixements.
En els successius capítols analitzarem l'evolució del procés d'aprenentatge i els rendiments dels estudiants en aquest tipus de pràctiques. De la mateixa manera observarem com responen diferents col·lectius d'estudiants a fi de validar la viabilitat d'aquesta metodologia.

Tot això caldrà analitzar-ho amb cura, des del punt de vista de l'aprenentatge, i de manera que es presentin els problemes amb el mínim de dificultat possible per tal que, fins i tot els no iniciats en la matèria, els puguin modelar. Ja que d'aquesta manera s'observa el mecanisme per resoldre el problema tècnic suggerit d'una manera clara i precisa. El tipus d'alumnat a qui van dirigits aquests ensenyaments, tal com veurem més endavant, és una població de primer curs d'enginyeria tècnica de procedència heterogènia: FP, COU, Reforma, etc. D'aquesta manera podrem estudiar i analitzar l'evolució de l'estudiant tenint en compte els diferents coneixements previs que té en el moment de l'ingrés a la Universitat.
Cal tenir en compte que els estudiants d'avui són ciutadans de demà i que per tant el grau de professionalitat que assoleixin depèn en certa manera del procés d'aprenentatge actual. A nivell epistemològic es tracta doncs d'ensenyar als estudiants com utilitzar els seus coneixements en la resolució de problemes i situacions que s'esdevenen del món real, entenen per món real les situacions pròpies de l'entorn curricular i professional de l'enginyer tècnic.
L'experiència, G.Lusa (1975) i L.Leris (1993), ens mostra que la major part dels enginyers aplica solament una petita part dels coneixements adquirits en els diversos cursos. El grau de preparació matemàtica que proporciona la carrera en alguns aspectes és adequat, en d'altres no tant. Sovint l'alumne es pregunta perquè ha d' estudiar certes eines matemàtiques que "a priori" per a ell no tenen aplicació.
G.Lusa (1975) cita "*...A més dels conceptes matemàtics que pot obtenir un futur enginyer de les matemàtiques, aquestes li han de servir per modelar un problema...*". I en aquesta línia L.Leris (1993) afegeix: "*...la integració de casos pràctics extrets de la indústria en les assignatures de matemàtiques, afavoriria la necessitat d'introduir tècniques de modelització en el currículum de l'enginyer...*"
Fins a l'actualitat l'aprenentatge de les matemàtiques a l'eupvg pateix sovint, d'una mancança de tècniques de modelatge. La influència de les darreres tendències com l'escola bourbakista ha donat a l'ensenyament un tarannà formalista.
D'aquesta manera apareix la figura del *professor tradicional*, caracteritzat a les escoles tècniques per oferir un ensenyament que consisteix en una successió de definicions, teoremes, corol·laris, amb totes les demostracions en el si de les assignatures que imparteix; tot donant més importància als continguts teòrics que no pas a les seves aplicacions. Com exposo més endavant, aquesta deficiència no només es produeix a l'eupvg. Voldria afegir que aquesta idea també és compartida per Blum (1989).

Històricament, des de Newton fins a Dirac i passant per Maxwell, es feia especial èmfasi en les aplicacions de les matemàtiques. Aquest fet es trenca a finals dels anys 50, i 10 anys més tard en els textos de matemàtiques hi havia pocs exemples pràctics. A Anglaterra, a principis dels 70, i degut a la proliferació de les escoles tècniques, sorgeixen els primers esglaons per introduir les matemàtiques amb un enfocament més pràctic en el currículum de l'enginyer. Al llarg dels 70 es comencen a perfilar i definir les primeres línies de modelització, tal com es pot trobar en els treballs de Clemens (1989). A l'estat espanyol hi han intents d'introduir un ensenyament de caire més aplicat. Aquests intents, sorgits principalment a meitats del segle XX, són protagonitzats principalment per Julio Rey Pastor i Pedro Puig Adam. Degut a la seva proximitat i influència en els estudis tècnics a l'estat espanyol els hem considerat prou rellevants i, en el capítol 2, descriurem les seves aportacions.

Les inquietuds apuntades fins al moment suggereixen i justifiquen, per tant, la selecció d'un seguit de situacions més o menys properes a la realitat professional del futur enginyer i a partir d'elles anar construint models matemàtics que ens portin a la solució.
Clàssicament, l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles d'enginyeria -i en general a totes les escoles- s'ha portat a terme mitjançant classes teòriques en les quals s'explicaven una gran quantitat de conceptes matemàtics, sovint desconnectats del món real, de forma que l'estudiant no veia prou bé la utilitat d'aquesta matèria en l'especialitat tècnica que estava cursant. Era suficient que mestres i professors ensenyessin allò que ells havien après quan eren estudiants. Els problemes i exercicis eren pràcticament els mateixos cada any, de manera que ni tan sols calia seleccionar-los cada curs.

Tot aquest intent de canvi és una conseqüència natural de la velocitat de l'evolució de la tecnologia i de la manera de viure. Cal preparar els alumnes per al món d'avui i de demà en què ells s'hauran de moure. Això obliga a pensar quina és la manera més eficaç d'ensenyament.

Fins i tot, a l'Escola Universitària de Vilanova -on es centra l'experiència-, els temaris eren comuns a totes les especialitats, perquè quedi clar ho il.lustraré amb un petit exemple:
Fins l'any 1989, a primer curs hi havia dues assignatures de matemàtiques comunes a totes les especialitats: àlgebra i càlcul infinitesimal. En aquestes assignatures s'impartien, a grans trets, els següents continguts:

i) Àlgebra: Estructures algebraiques, l'espai vectorial, aplicacions lineals i diagonalització.

ii) Càlcul infinitesimal: Els nombres reals i complexos, funcions reals d'una variable real, integració simple, funcions de diverses variables, integració múltiple.

És a segon curs on apareix una diferència en l'assignatura anomenada: ampliació de les matemàtiques. Mentre que els enginyers de telecomunicacions estudiaven les següents matèries: anàlisi vectorial, variable complexa, sèries de Fourier, equacions diferencials i probabilitat; els industrials canviaven la probabilitat per l'estadística.
D'ençà el 1990, aquests temaris sofreixen unes petites i lleugeres modificacions, les equacions diferencials s'inclouen en el temari d'àlgebra. Llavors el segon curs queda configurat com segueix:
Telecomunicacions:
Anàlisi vectorial, variable complexa, sèries de Fourier, probabilitat, processos estocàstics. Molt encertadament, s'introdueix el tema de processos degut a la necessitat d'aquests coneixements en teoria de senyal.
Industrials:
Anàlisi vectorial (1/3 de l'assignatura) i estadística (2/3 de l'assignatura), doncs es considera que no necessiten enlloc sèries de Fourier. Òbviament, en l'estudi de circuits elèctrics calen sèries de Fourier: problemes de rectificació d'ones d'un senyal elèctric, anàlisi de diversos tipus de senyals i impulsos electrònics, etc.
Actualment, i degut a la introducció dels nous plans d'estudi, els temaris han sofert també modificacions. Les assignatures han esdevingut quadrimestrals i els continguts són els mateixos que els esmentats però desglossats en especialitats i amb els mateixos temes indicats més amunt. Hi ha algunes variacions, per exemple, els químics, en lloc d'estudiar la integral múltiple en un quadrimestre, l'estudien en un altre. Però com he dit anteriorment els continguts són els mateixos, vegis la "*Guia docent de l'EUPVG 1995-96. 1996-97.1997-98*".

Considerem que no només cal debatre els continguts, sinó la metodologia per assolir els continguts. Canviar l'escenari o el marc on es mouen els conceptes (marc pràctic, marc matemàtic).
Cal afegir que és una etapa delicada degut al procés d'implantació dels nous plans d'estudi i per tant el que es fa és de caire experimental i no és, per tant, definitiu.
Les tècniques de modelització encara no estan contemplades en els nous plans d'estudi, malgrat tot, com explicaré i detallaré més endavant, en alguns grups s'han introduït.
Existeix un precedent quant a l'absència de modelatge, citat per L.Leris (1993) i que tot seguit exposaré.
Ja en el 1987, D.J.G. James, Director del Departament de Matemàtiques de la Universitat Politècnica de Coventry -Anglaterra-, A.C. Bajpai, del Departament d'Enginyeria Matemàtica de la Universitat Tecnològica de Loughborough -Anglaterra- i membres de la Societat Europea d'Educació en Enginyeria, varen realitzar un viatge a l'Estat espanyol i Portugal per tal d'investigar la situació de les matemàtiques en les escoles tècniques. El principal objectiu es centrava en el seu interès pel desenvolupament de l'ensenyament de la modelització matemàtica i la seva possible incorporació en el currículum acadèmic. Les visites es van realitzar a la Universidad Pontificia de Comillas i a la Escuela Universitaria de Ingenieria Técnica Industrial (ambdues de Madrid). La conclusió va ser que la modelització matemàtica no té gens de rellevància ni està contemplada en el currículum de l'enginyer.
Per un informe complet i més detallat de la visita, es pot consultar James-Bajpai, (1988).

1.3. LA SITUACIÓ DOCENT ACTUAL

En aquesta secció s'exposen els cursos i les assignatures on s'han desenvolupat les pràctiques de modelatge i les característiques de les mateixes.
Les pràctiques de modelatge i la conseqüent anàlisi i evolució del procés d'aprenentatge dels alumnes que he estudiat en la tesi, s'han centrat en dos cursos:

i) Àlgebra. 1994-95.
ii) Anàlisi matemàtic. 1995-96.

i) El primer d'ells en el curs d'àlgebra (anual) impartit el 1994-95, dirigit a estudiants d'enginyeria tècnica industrial mecànica.
En aquest curs, on el temari era el tradicional (*Guia docent eupvg*, 1994-95), s'oferien entre d'altres lliçons les tècniques bàsiques del càlcul matricial. Aquest tema es va desenvolupar a partir del que he anomenat unitat didàctica. Els estudiants construïen el model a partir d'una situació plantejada i com explicaré més endavant van aprendre d'una manera constructiva -molts d'ells no havien estudiat prèviament càlcul matricial- els conceptes bàsics del món de les matrius i la seva utilitat en una situació que s'estudia en l'especialitat: l'anàlisi d'un sistema de ressorts. En aquest curs l'experiència de modelatge va servir de prova pilot per desenvolupar-ho més àmpliament en el curs vinent. De fet el problema més greu que existia en aquest curs era el fet que els ensenyaments impartits s'avaluaven simultàniament i conjuntament amb d'altres grups i per tant existia un temari únic a diversos grups i un examen final, el mateix per a tots, l'examen era comú a totes les especialitats llevat la d'informàtica (llavors la informàtica era l'única especialitat de pla nou, les altres era el darrer curs de pla vell i els temaris eren comuns).
Entre el professorat que impartia aquesta assignatura hi va haver un fort debat, els que havien efectuat aquesta pràctica van sacrificar el tema d'espais vectorials i per tant no

podien ser avaluats amb el mateix examen. El problema es va resoldre efectuant una prova dels coneixements adquirits en la pràctica, que tenia un pes d'un punt sobre la nota final, i per contrapartida en l'examen final no havien de desenvolupar el problema d'espais vectorials que també puntuava un punt. Aquest fet va ser criticat per alguns professors que opinaven que això era fer diferències entre els alumnes i per tant alguns estarien en desavantatge en vers els altres.
ii) El segon d'ells, Anàlisi matemàtica (quadrimestral) impartit a la tardor de 1995, concretament de finals de setembre a inicis de febrer.
Aquesta assignatura és de l'especialitat d'informàtica i per tant dels nous plans d'estudi. Cal destacar que vaig rebre l'encàrrec de ser el responsable de l'assignatura, aquest fet hem va donar llibertat de moviments per tal d'establir i experimentar aquestes innovacions en la metodologia d'ensenyament. El primer que vaig fer és un repàs dels continguts que configuren l'especialitat i dels coneixements previs dels estudiants. L'assignatura en qüestió està formada per un únic grup, fet que encara em donava més llibertat d'acció perquè d'aquesta manera no calia consensuar ni els continguts existents fins aleshores, ni la metodologia. L'anàlisi matemàtic és una assignatura del segon quadrimestre, això vol dir que són estudiants que han ingressat a l'escola el febrer del 1995 per cursar el primer quadrimestre. Els estudiants que ingressen a l'escola el febrer són majoritàriament de Formació Professional (Guia docent EUPVG 1995). Cal afegir que només cursen el segon quadrimestre els que tenen totes les assignatures aprovades del primer (és el que s'anomena en els plans nous "fase selectiva").
Començaré per fer un breu recorregut pels continguts matemàtics que han desenvolupat en el primer quadrimestre, concretament en una assignatura que s'anomena àlgebra:
- Àlgebra de proposicions i teoria de conjunts.
- Teoria d'estructures: grups, anells, cossos, espais vectorials.

Vull destacar que enlloc estudien càlcul matricial.
En el segon quadrimestre, a més d'anàlisi matemàtic s'imparteix lògica matemàtica i matemàtica discreta (aquí s'estudien grafs i per tant els calen conceptes de matrius).
L'especialitat en qüestió, consta de sis quadrimestres. En el tercer i successius, cursen estadística (han de tenir coneixements previs de càlcul d'integrals múltiples) i assignatures de sistemes digitals, circuits, economia i programació entre d'altres. En els prerequisits de matemàtiques de les esmentades assignatures es sol·liciten coneixements de càlcul matricial i d'equacions diferencials de primer ordre (Guia docent EUPVG,1995). Més endavant s'explica amb detall el perquè de l'elecció dels problemes i a on s'utilitzen les tècniques apreses. Amb aquestes hipòtesis vaig configurar un temari d'anàlisi matemàtic, que malgrat el nom de l'assignatura, inclogués aquestes necessitats plasmades. En el programa tradicional,doncs, hi havien uns principis que van ser canviats per activitats més realistes i d'aquesta manera iniciar als alumnes en la modelització. El temari resumit va resultar de la següent manera:
1. Repàs de les tècniques de càlcul de secundària.
2. Càlcul matricial.
3. Continuïtat i derivació.
4. L'art d'integrar.
5. Nocions bàsiques de funcions de dues variables.
6. La integral múltiple.
7. El món de les equacions diferencials.

1.4. ESTADIS DE TREBALL

En aquest apartat introduïm el domini de treball de la investigació com hipòtesi per desenvolupar l'experiència. Per això distingim tres estadis de treball: inicial (anàlisi de la situació actual de l'ensenyament), mitjà (context i localització de l'espai de treball) i final (disseny de l'experiència en funció de les hipòtesi anteriors i presentar els objectius).

1. Estadi inicial:

Reflexionar sobre la situació actual de l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles d'enginyeria i llurs aplicacions de cara al futur tècnic. La desconnexió en l'ensenyament actual entre les matemàtiques i la realitat i comentaris tan usuals com ara: "*...aquests conceptes, ja en veureu llur utilitat quan estudieu tal assignatura...*", m'han portat a reflexionar i pensar en quina és la matemàtica més convenient per cada nivell d'aprenentatge i la manera més eficaç perquè aquesta matemàtica sigui ben assimilada.

Segons Santaló (1975), quan algú diu a un professor de matemàtiques que ha d'ensenyar nous temes, immediatament demana més hores de càtedra. Mai no es pensa en reordenar els continguts i redefinir els mètodes.

Un altre aspecte que vull destacar, i coincidint amb Santaló, és el fet que fins a l'actualitat les tasques i canvis docents són considerades molts fàcils. N'hi ha prou amb que els mestres i professors ensenyessin allò que ells van aprendre quan eren estudiants. Ni els continguts ni la metodologia no han sofert modificacions considerables durant molts anys. Com he mencionat en apartats anteriors, els problemes i exercicis han estat pràcticament els mateixos cada any.

Aquests fets exposats han provocat que reflexionés sobre el tema de la didàctica de les matemàtiques i que treballés en la recerca de nous models per al seu ensenyament.

En aquest aspecte he considerat de gran importància l'estudi i la inclusió de les tècniques de modelització, com a innovació docent, en el currículum d'un enginyer.

2. Estadi mitjà:

Cal destacar la recerca d'un espai per tal de començar a introduir pràctiques de modelatge, l'espai escollit és l'eupvg. I els estudiants, com he mencionat anteriorment, són els de primer curs d'Enginyeria Tècnica Industrial.

El projecte de tesi s'inicia sota el context descrit, i durant el curs 1993-94 es comencen les tasques d'experimentació en diversos col·lectius. L'experiència es consolida en el curs 1995-96. Més endavant (capítol 4) es detallen els perfils de la població sotmesa a aquest tipus de pràctiques i els resultats extrets.

3. Estadi final:

Esbrinar si les tècniques i consideracions mencionades poden aportar una millora en l'àmbit on ens belluguem.

L'objectiu general és efectuar un disseny i una anàlisi de les experiències en l'entorn on ens movem, amb la finalitat d'extreure conclusions tant positives con negatives sobre la viabilitat de la inclusió de les pràctiques de modelatge. Volem saber fins a quin punt la pràctica d'aquests mètodes és vàlida en els estudis tècnics.

Capítol 2

El marc teòric

2. EL MARC TEÒRIC

" El modelatge és l'art d'aplicar les matemàtiques a la vida real"
M. Niss

Índex del capítol

En la primera part del capítol i per tal de centrar el tema en l'entorn, aportem una descripció de com han evolucionat els continguts i temaris dels ensenyament d'ençà de la creació de les escoles tècniques. És de justícia mencionar les figures de Pedro Puig Adam, Julio Rey Pastor, Pi Calleja, entre d'altres com a personatges precursors que han deixat petjada, i que desafortunadament no s'ha seguit, al nostre país tot contribuint i manifestant la seva preocupació per la millora dels l'ensenyament de les matemàtiques a les Escoles Tècniques.
En la següent secció (2.2.) s'analitza la influència i necessitat de les matemàtiques en l'entorn social. Parlem de com l'ensenyament de les matemàtiques ha de contribuir a fomentar la ciutadania intel·ligent i inquieta per a tots els membres de la societat. Repassem l'opinió de diversos autors i en especial de Christine Keitel, Kenneth Ruthven i Ole Skovsmose sobre la necessitat de les matemàtiques per adquirir competència crítica i ser ciutadans preparats per la societat democràtica. D'aquesta manera lliguem la relació matemàtica-societat-realitat. En aquest aspecte hi juga un paper vital l'educació matemàtica i l'entorn de l'estudiant; de la mateixa manera es presenta la aportació del modelatge a la comprensió de problemes socials.
Seguidament es parla del modelatge i del seu paper en l'ensenyament. S'enuncien els fonaments que caracteritzen aquesta metodologia, com un procés heurístic de l'ensenyament per l'aprenentatge de les matemàtiques. S'introdueixen els eixos fonamentals de les eines usades per desenvolupar aquest procés heurístic: les unitats didàctiques -procés d'aprenentatge dirigit on l'alumne construeix el model matemàtic- i el treball en projectes -procés d'aprenentatge amb una gran component de recerca on l'alumne treballa sobre el model per tal d'establir llur significat-. Per tal d'establir el marc de treball es presenten diverses concepcions dels termes model i modelatge amb

l'objectiu de provar que el modelatge es dóna a qualsevol lloc i en qualsevol moment de la nostra vida. D'aquesta manera s'introdueix el que s'anomena matematització.
Tot seguit s'estableix d'una manera formal -fent una revisió de la literatura sobre el tema- el significat de model, modelització i procés de modelització en l'ensenyament de les matemàtiques així com els trets que els caracteritzen.
S'argumenta el per què cal ensenyar a través del modelatge i les fases de la construcció del model utilitzades en el context de l'Eupvg. En aquest punt es proposa el modelatge com una alternativa pedagògica on els estudiants han de construir el seu propi coneixement, per tal de resoldre problemes concrets, i d'aquesta manera adonar-se de la necessitat del que se'ls ensenya i de perquè serveix.
A la següent secció i per tal d'il·lustrar l'estat actual del modelatge, fem primerament un repàs de recents experiències de modelatge efectuades en diversos indrets: Regne Unit, Dinamarca, Grècia, Holanda, Portugal. Presentem i destaquem l'experiència de Portugal -el projecte MAT_{789} - efectuada per Paulo Abrantes, com l'exemple més rellevant i pioner del treball en grup.
El capítol finalitza amb una visió de les noves corrents, com aportació a la problemàtica de la tesi, referents a l'anomenada cultura virtual.

2.1. EVOLUCIÓ HISTÒRICA DE L'ENSENYAMENT DE LES MATEMÀTIQUES A LES ESCOLES TÈCNIQUES

En aquest apartat aportem una visió descriptiva del caràcter de l'ensenyament de les matemàtiques a l'enginyeria des de una perspectiva històrica, l'objectiu és analitzar la seva evolució tant a nivell de continguts com en la influència en el procés d'ensenyament/aprenentatge. En aquesta secció pretenem visualitzar les etapes històriques que han contemplat el caràcter aplicat de les matemàtiques així com destacar l'absència de modelització i la influència de les corrents més formalistes en l'ensenyament. Fem, per mostrar l'existència com a precedent de la problemàtica estudiada, un breu repàs d'autors que ja mostraven una preocupació per una nova orientació de l'ensenyament de les matemàtiques lligada a situacions del món real. De la mateixa manera volem reivindicar i plasmar la preocupació i els intens manifestats per uns ensenyaments més aplicats de les matemàtiques en el marc de l'enginyeria d'ençà els orígens oficials dels estudis tècnics.

El punt de referència és l'any 1850 –data de creació de la carrera d'enginyer-.

D'ençà quasi un segle i mig existeix una polèmica permanent sobre el caràcter de les matemàtiques a la enginyeria: quines i quantes s'han d'ensenyar, qui ha de fer-ho (matemàtics o enginyers?), on s'han d'estudiar (abans d'ingressar o durant la carrera?), amb quin estil (intuïtiu, rigorós, receptari...?), etc.

L'ensenyament, i per tant l'ensenyament de les matemàtiques a l'enginyeria, ha sofert peripècies múltiples en aquest període de quasi segle i mig. Podem donar les traces fonamentals d'aquest procés establint una primera divisió en tres grans fases i donant les seves característiques principals:

1er període: 1850-1902

a) Influència predominant de les Escoles Tècniques franceses, especialment de l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures, i de l'Ecole Polytéchnique, que dona lloc a l'accentuat caràcter teòric de l'ensenyament. La causa de l'elecció d'aquest model educatiu és ben clara, ja que amb l'arribada dels borbons la influència francesa es manifestava en tots els ordres. En aquestes dates l'Ecole Politéchnique tenia un irrebatible planter de professors: Lagrange, Monge, Berthollet, Poisson, Cauchy, Poncelet, Coriolis, Carnot, Gay Lussac, etc...
b) Els estudis d'Enginyeria estan interconnectats amb els de la Facultat de Ciències, de tal manera que determinades assignatures (per exemple les matemàtiques) podien i/o havien de ser cursades a la Facultat. Com a conseqüència d'això l'ensenyament de les matemàtiques a l'enginyeria està en mans de matemàtics professionals o d'enginyers que seran a la vegada llicenciats o doctors en matemàtiques. Anàlogament, les facultats de ciències inclouen als seus quadres de professors a enginyers. Però les relacions entre la facultat i l'escola seran discontínues i poc harmonioses, Rey Pastor en l'obra "El progreso de España en las ciencias y el progreso de las ciencias en España", citat en G. Lusa (1982), afirma referint-se a la influència francesa: "*...la ausencia de aplicaciones conlleva a ser incapaces de inspirar amor a esta ciencia en un pais que nace de ella...*". En aquesta frase notem una preocupació per donar a l'ensenyament de les matemàtiques un caire més aplicat.

   En aquesta línia i al 1888, Gumersindo de Vicuña (de la Real Académia de Ciencias Exactas) referint-se a la relació matemàtiques apresses-matemàtiques ensenyades (citat en G.Lusa (1982)) destaca que les matemàtiques apresses pels matemàtics d'ofici, orientades des de un punt de vista abstracte, són bones per la recerca dels qui es dediquen a la investigació en matemàtiques però no pers aquells que en són usuaris.

En síntesi podem destacar que, malgrat les tendències oficials i la influència de l'escola francesa, en aquest període ja existeix una preocupació per l'absència d'aplicacions de les matemàtiques en l'ensenyament.

2on període: 1902-1957

a) Les Escoles d'Enginyers es configuren segons el model alemany (Technische Hochschulen de Karlsruhe, Munich, Dresde, Stuttgart...). Les escoles tècniques es separen de la Universitat, i es converteixen en centres especialitzats d'investigació i d'ensenyament. Les disciplines tècniques no poden ensenyar-se i estudiar-se com les que consideren bàsiques i d'un caire més teòriques (matemàtiques i física), sinó que requereixen una teoria autònoma fortament carregada de tècnica i de pràctica. El corrent alemany destaca també una orientació teòrica de les matemàtiques.
b) Una part important del bagatge matemàtic de la carrera d'enginyeria (aritmètica, àlgebra, geometria i trigonometria) haurà d'adquirir-la l'alumne pel seu compte abans d'ingressar a l'escola. La resta (anàlisi matemàtic, fins les aplicacions geomètriques del càlcul diferencial, i càlcul integral i de variacions) es cursarà a l'interior de l'escola, a càrrec de professors enginyers.
c) Els programes de matemàtiques estan molt consolidats i evolucionen molt lentament. Es tendeix al llibre de text únic, que freqüentment seran "els apunts del professor" (per exemple, "Anàlisi matemàtic" de P. Castells, text oficial de l'Escola d'Enginyers Industrials de Barcelona entre 1905 i 1952).
d) Les Matemàtiques fan el "treball brut" de la selecció a l'entrada de l'Escola, les proves d'ingrés són un conjunt de problemes teòrics de matemàtiques desvinculats de les aplicacions tal com afirma Puig Adam (1947) que ho qualifica com "...*deformaciones del Ingreso*.." en el pròleg de Geometria métrica (1947). En aquest sentit Puig Adam ja mostra la seva preocupació per introduir uns ensenyaments més adients per els futurs enginyers.
e) Existeixen unes específiques "Matemàtiques de l'Enginyer", qualitativament diferents de les Matemàtiques a seques. Per a l'enginyer, les Matemàtiques no són més que una eina de treball, estalviadora de temps i de pensament i per tant la instrucció matemàtica s'haurà de limitar a l'indispensable per la realització d'aquella finalitat.

   Van exercir una gran influència al nostre país les obres i opinions de John Perry (citat en G.Lusa, 1982), sobre tot a partir del Congrés Internacional de Glasgow (1901).

   Perry propugna una espècie de "mètode de laboratori": l'estudiant ha d'adquirir el coneixement de coses concretes, abans d'exigir-li que raoni sobre elles; els alumnes s'han d'exercitar en el càlcul numèric, omitint dificultats filosòfiques que només existeixen a la imaginació del professor; els càlculs numèrics s'han d'interpretar com aplicació d'alguna fórmula; les equacions s'han de tractar com a gràfiques de funcions; s'han de suprimir les demostracions per raonament abstracte; la Geometria filosòfica s'ha de substituir per la simple manipulació aritmètica.

   A Espanya els enginyers de camins adopten plenament el punt de vista de Perry i l'enginyer Luis Gaztelu en serà un dels seus defensors. Gaztelu reflexiona sobre pedagogia de la Matemàtica, sobre la quantitat i la qualitat de les matemàtiques que necessita l'enginyer per l'exercici de la professió i sobre com s'han d'ensenyar aquestes matemàtiques.

   En M. Gómez (citat en Lusa, 1992) resumeix les orientacions de Perry destacant que en l'ensenyament de les matemàtiques una de les finalitats fonamentals es el desenvolupament de la intuïció, imprescindible per tal de que l'enginyer aprengui simultàniament les relacions entre el món real i les abstraccions de la ciència. Notem que ja apareixent orientacions en l'ensenyament i una preocupació cap els processos de modelització.

El Primer Congrés Nacional d'Enginyeria (Madrid 1919) també s'inclina per la reducció dels programes de matemàtiques, i perquè aquestes s'orientin en harmonia amb la natura dels treballs de l'enginyer. La matemàtica, que per a l'enginyer no és més que una eina, té com a finalitat principal el desenvolupament de certes facultats de l'esperit, entre les quals està la intuïció. De res serveix el raonament matemàtic si abans no es té una clara percepció dels fenòmens: s'ha d'evitar el malabarisme matemàtic en el qual es pot incórrer en allunyar-se molt dels estudis objectius. En el terreny de l'anàlisi, els estudis matemàtics s'han de sotmetre a l'estrictament necessari, cultivant no només l'hàbit del raonament rigorós, sinó donant una extensió més gran als mètodes geomètrics, encara que només proporcionin resultats aproximats, no obstant suficients a la pràctica professional.

També com a precedent per donar una un caire més aplicat i intuïtiu a l'ensenyament de les matemàtiques destaquem l'afirmació de José Serrat efectuada al 1914 (citat en G.Lusa, 1992): "*...del mismo modo que un buen obrero maneja la herramienta sin pensar en las reglas que le enseñaron durante su aprendizaje...*"

Algunes veus, des de les matemàtiques i des de l'enginyeria, discrepen d'aquests plantejaments, entre les quals hi ha la de J. Rey Pastor (1888-1962), que té una influència determinant sobre la matemàtica espanyola d'aquest període. Les seves idees sobre el caràcter de les matemàtiques a l'enginyeria surten expressades en moltes ocasions, d'entre les quals s'ha de destacar el pròleg del seu "Curs de Càlcul Infinitesimal" (1ª ed. 1921) i la seva conferència "La Matemàtica i l'Enginyeria", pronunciada a l'Escola d'Enginyers de Camins de Madrid al 1928. Rey Pastor està d'acord amb l'opinió dominant a la qual les matemàtiques de l'Enginyer han de diferir de les del matemàtic pur en la quantitat, en la qualitat, en l'orientació i en el mètode. Però això no significa que les matemàtiques per l'enginyer hagin de ser empíriques, de caràcter receptari per la resolució de casos concrets. El seu ensenyament ha de ser sistemàtic i lògic, tendint a una educació de la intel·ligència en el raonament matemàtic. Rey Pastor distingeix entre el que anomena "matemàtica de precisió" – ciència pura i teòrica- i "matemàtica d'aproximació" –metòdica i no receptaria- pròpia de les aplicacions a la tècnica. Malauradament, les seves idees les va tenir que desenvolupar a Argentina.

Puig Adam (1979) en el pròleg del text "Curso teórico pràctico de cálculo integral aplicado a la física y a la técnica" propugna unes directrius, que complementen el marc teòric que dona origen al present treball, tot fent una aposta per la relació matemàtica-realitat; afirma: "*...en l'ensenyament de les matemàtiques per enginyers cal omitir les demostracions exesivament formals, substituint-les per raonaments intuïtius;....les matemàtiques han d'estar des dels inicis del seu ensenyament en ple contacte amb situacions de la realitat, en exemples, exercicis, comentaris,...*"

Podem dir que hi ha un ampli consens en donar un caire més aplicat a l'ensenyament de les matemàtiques per a enginyers.

3^er^ període: des de 1957

a) La llei d'Ordenació de les Ensenyances Tècniques de 1957 apropa les Escoles d'Enginyers a la Universitat. Es faciliten les convalidacions d'estudis i l'intercanvi de professors. Sorgeix la figura del Doctorat a les Escoles Tècniques Superiors.
b) Com a conseqüència de la reforma de l'accés es produeix un increment notable de l'alumnat, que implica canvis substancials en la planificació i organització de l'ensenyament. S'incrementa el distanciament entre els primers cursos de la carrera (de caràcter bàsic) i els últims (de caràcter tecnològic).
c) La irrupció de l'anomenada "Matemàtica moderna" a tots els esglaons de l'ensenyament (des del parvulari fins a la Universitat) produeix un gran desconcert. al no estar

precedida ni de debats, ni de seminaris, ni de cursos d'adaptació i reciclatge, la reforma per decret es veu condemnada al fracàs. No només no s'aconsegueixen els objectius teòrics desitjats (descobriment de les estructures, educació de les facultats d'abstracció i de deducció, domini de la lògica...), sinó que es torna enrera a les "àrees clàssiques" (habilitat en el càlcul i en la resolució de problemes mecànics...) i s'aconsegueix "ofegar la intuïció".

En el pròleg del seu llibre "Geometria Mètrica" (1947) Puig Adam deia:

"*qui pogués escriure un llibre capaç de despertar el respecte al rigor sense ofegar la intuïció!* ".

d) Es crearan Escoles d'Enginyeria per tota la geografia espanyola. El professorat de les assignatures matemàtiques es recluta majoritàriament a les Facultats de Ciències, fet que reforça el tarannà formalista de l'ensenyament.

e) A les Escoles anteriors a 1957 (Madrid, Barcelona, Bilbao) el creixement dels Departaments de Matemàtiques s'efectua de forma equilibrada, integrant enginyers i matemàtics. Amb la posterior configuració de les Universitats Politècniques, el professorat de les Escoles d'Enginyers adquireix un "nou estil universitari", amb tot el que això implica de positiu i de negatiu. S'accentua el caràcter investigador.

f) Algun dels nostres pensadors més lluïts (Ortega i Rey Pastor, per exemple) han tractat el problema del desequilibri docència-investigació, i de la quantitat de pols i palla que hi ha que separar en els productes emparats sota el nom de "Investigació".

Ortega i Gasset, al seu llibre "Missió de la Universitat" (1930) deia:

"*Un dels mals portats per la confusió de ciència i Universitat ha estat donar les càtedres, segons la mania del temps, als investigadors, els quals són quasi sempre pèssims professors que senten l'ensenyament com un robatori d'hores al seu treball de laboratori o d'arxiu*".

Podem afirmar, des de una perspectiva històrica, que els darrers trenta anys han sigut escenari de canvis profunds en l'ensenyança de les matemàtiques. Es significatiu el moviment dels anys 60 i 70 vers l'anomenada "matemàtica moderna" que fins els nostres dies esta caracteritzada pels següents aspectes:

1. Es fa especial èmfasi en les estructures abstractes, especialment en geometria.
2. Es pretén aprofundir en el rigor lògic, en contraposició als aspectes heurístics i manipulatius.
3. Es substitueix la geometria per l'àlgebra, ofegant d'aquesta manera qualsevol tipus d'intuïció.

A partir dels anys 70 i 80 (M. De Guzmán,1993) apareixent corrents per la recerca de noves orientacions metodològiques i és en els darrers 15 anys quan apareixen canvis profunds i preocupacions realment intenses en propiciar el debat i qüestionar sobre noves tendències en educació matemàtica.

L'activitat científica en general, es una exploració d'estructures de la realitat. Per tant, l'activitat matemàtica que cal desenvolupar en l'ensenyament de les matemàtiques ha d'incloure un domini efectiu orientat a l'estudi de situacions reals, d'una manera racional i construir un model mental de la realitat per tal de ser modelada d'una manera adequada. Fet que hem plasmat en l'esquema proposat de modelització en el capítol 1 i que també es avalat, com veurem en aquest mateix capítol, per De Lange (1987) i M.Niss (1989).

En l'aportació, i en contraposició a les tendències formals dels darrers trenta anys, es pretén que la intuïció no quedi en segon pla. L'orientació de continguts defensats en la memòria està focalitzada en una nova orientació metodològica. Cal, per tant, recuperar la influència dels clàssics -com ara Puig Adam- per aconseguir uns continguts i metodologies de caire més aplicat a les necessitats d'un enginyer.

2.2. SOBRE L'EDUCACIÓ MATEMÀTICA I LA SOCIETAT

En aquesta secció, apuntem la influència de l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques en els aspectes socials dels ciutadans, i de com la presència de les matemàtiques pot col·laborar en l'adquisició d'una competència democràtica a traves de l'educació matemàtica.

2.2.1. Matemàtica i realitat: el sentit de les matemàtiques en l'educació dels ciutadans

En la memòria s'apunten diversos aspectes on l'ensenyament tradicional és insatisfactori.
El Dr. Claudi Alsina (1996) en l'article "*Apología de la utilidad y el realismo*" cita una bella reflexió de H. Pollack que compartim plenament. A grans trets, destaca que les matemàtiques de la vida normal de qualsevol ciutadà són les de l'escola primària, les de l'escola secundària són per exercir una ciutadania intel.ligent, essent les matemàtiques de l'exercici professional les ensenyades en l'etapa universitària (si l'exercici de la professió requereix estudis d'aquest nivell). Les matemàtiques com part de la cultura integral humana no han estat assignades a cap nivell educatiu.
Cal que el sistema educatiu universitari s'adapti a les innovacions de secundària, els criteris pedagògics que proliferen en els nous plans d'estudis universitaris estableixen realitzar els anomenats "cursos introductoris d'adaptació" -justificats amb expressions del tipus "*es que cada any venen més mal preparats*"-. La resposta no és aquesta, sinó que les reformes universitàries tenen que estar connectades i coordinades amb les reformes educatives de secundària i les seves connotacions.
El coneixement és un tot i les matemàtiques un subconjunt del tot. No es desenvolupen per separat de les altres activitats. Ensenyar matemàtiques de forma aïllada és una distorsió del veritable coneixement. Cada matèria representa una aproximació al coneixement, i qualsevol barreja o intersecció convenient i pedagògicament útil ha de ser benvinguda. D'aquesta manera ensenyaríem més enllà de les pròpies matemàtiques, les relacions de les matemàtiques amb d'altres interessos socials i humans, un currículum matemàtic que cercaria la unió amb les principals corrents del pensament humà i tecnològic.
Algunes d'aquestes relacions podrien proporcionar una motivació, altres serien aplicacions i d'altres motiu de debat.
Les matemàtiques no són un conjunt de coneixements aïllats. Responen a finalitats i propòsits determinats. Cal que, com a professionals de l'ensenyament, mostrem constantment la seva utilitat fora del propi camp i no només dins del propi camp.
Es desitjable que els estudiants aprenguin com poden influenciar les matemàtiques en el seu futur professional. De fet, si nosaltres els hi mostrem com les matemàtiques els hi seran útils en la seva professió, els estudiants tindran més motivació i aquest fet repercutirà en benefici de la seva carrera.
Històricament, la motivació natural és l'estudi de problemes reals -majoritàriament físics-. Newton va estudiar el moviment de la lluna per ajudar als mariners a determinar la seva posició en el mar, Euler va estudiar el disseny de vaixells per fer mapes de navegació, Descartes va dissenyar lents per millorar el telescopi i el microscopi, Gauss va treballar per millorar el telègraf elèctric i la mesura del magnetisme. Les matemàtiques són un mitjà per un fi. S'usen els conceptes i els raonaments per aconseguir resultats vers situacions reals.

2.2.2. Les matemàtiques com a fet social: influència a la societat i l'educació democràtica

La societat s'esdevé cap cop més formalitzada i matematitzada com a conseqüència de la influència dels canvis econòmics i tecnològics a gran escala. Aquest avanç exigeix cada vegada més un grau més elevat de professionalitat. Cada cop més les matemàtiques tenen un paper més rellevant en la societat. Aquest fet hauria de tenir connotacions a nivell educatiu. Observem que hi han operacions matemàtiques involucrades a la vida quotidiana, que actualment són competència de diversos aparells tecnològics, que venen associades a diversos oficis i professions (operacions realitzades per comptables, percentatges, etc.). A aquest tipus de matemàtiques, Christine Keitel i Kenneth Ruthven (1993), ho anomenen matemàtiques "*implícites*" i afirmen:

"*...que el coneixement matemàtic a nivell educatiu s'esdevé superflu, degut a l'existència dels ordinadors i màquines de calcular de butxaca i en conseqüència la matematització creixent de la nostre societat resta complementada per una desmatització dels seus integrants...*" .

Les matemàtiques no són només una ciència que genera conceptes, models i teories formals; sinó que també són un eina per descriure relacions científiques, tot construint models, i el seu ús generalitzat les ha convertit en motor de quasi tots els desenvolupaments científics i tecnològics. D'aquí la importància del modelatge matemàtic en la nostre societat, el modelatge ens permet predir i descriure fenòmens que acullen des de les ciències naturals fins àmbits com l'economia i les ciències socials. Per això és vital la introducció d'aplicacions en l'ensenyament de les matemàtiques. En aquesta línia coincidim amb les tesis de Christine Keitel i Kenneth Ruthven (1993) en el sentit de que els coneixements que cal ensenyar han de ser justificats amb una acurada adequació pedagògica i social.

És obvi, doncs, que les matemàtiques juguen un rol important en el desenvolupament social, i degut a l'augment de les noves tecnologies tenen un paper destacat en les enginyeries. Podríem dir que les matemàtiques són la força motriu del desenvolupament i el canvi tecnològic i social.

Cal preparar als estudiants d'avui per ciutadans del demà, que tinguin un criteri i aptituds per un aprenentatge continuat, no podem caure amb l'error de creure que la formació acaba quan "l'estudiant finalitza la carrera"; en Claudi Alsina (1996) ho anomena "*el mite de la carrera per sempre*". Els coneixements tècnics adquirits fa 20 anys, avui per avui ja no són vàlids, la dinàmica social i laboral provoca un reciclatge constant; els estudiants de fa 20 anys estudiaven el comportament de la màquina de vapor, avui aprenen el comportament de les màquines diesel. Reciclatge que cal reconduir en el món de l'educació i amb el noble ofici d'ensenyar. En el discurs educatiu, avui per avui cal que els educadors prenguem postures sòlides i que canviem el mitjà de transport -un carro i dos cavalls, els mètodes rutinaris d'integració,...- per una aposta ferma en les noves tecnologies.

Considerem que s'ha de justificar la presència de les matemàtiques de l'educació a la societat. Quina és la finalitat del sistema d'ensenyament per a què la inclogui sempre en els seus esquemes?. Què es pretén amb l'ensenyament de les matemàtiques? És evident que si no hi hagués una raó efectiva per mantenir-les a les escoles, en un sistema que hi ha centenars de matèries que no hi són incloses, hauria estat suprimida, ja que com tots sabem, no és l'assignatura més ben rebuda pels alumnes i, per tant, no és fàcil impartir-la. S'ha de fer un esforç per a fer-la amena i això no es fa perquè sí.

Les matemàtiques no només són útils per la formació dels ciutadans.

Segons afirma en Claudi Alsina (1996) en "*Apologia de la utilidad y el realismo*" referint-se a la presència de les matemàtiques en els currículums tècnics:
" *Hi ha un consens internacional sobre la presència de les matemàtiques en els estudis tècnics, en base als següents arguments:*

a) El paper rellevant, i de creixent interès de les matemàtiques en el desenvolupament tècnic actual.
b) Les matemàtiques formen part de la cultura integral de la societat.
c) Les matemàtiques poden oferir continguts interessants i específics a aquestes carreres conjugant el caràcter formatiu i l'informatiu.
d) *Les matemàtiques poden contribuir a engreixar la imaginació, la creativitat, les facultats crítiques, el diàleg intel·ligent i una formació que està en consonància amb els darrers anys d'aquest segon mileni*".

Els arguments anteriors estan avalats per diversos autors:
Al 1901, John Perry, professor anglès d'enginyeria, va establir que l'estudi de les matemàtiques va començar perquè era útil, i era valuós pel món per la utilitat dels seus resultats. Anys després, un professor alemany de matemàtiques, W. Schmiedeberg -citat en Kline (1986)-, senyalava que el propòsit de l'ensenyament de les matemàtiques havia de contribuir a propòsits generals d'ensenyança, com ara l'adquisició de valors socials i responsabilitats en l'aprenentatge.
Al 1919, i segons la Mathematical Association, l'ensenyament que donem a un noi a l'escola l'hauria de preparar per ser un ciutadà en el sentit més ampli de la paraula. La seva educació ha de capacitar-lo no només per aplicar les matemàtiques en assumptes pràctics, sinó també per entendre aquells grans problemes del món, on la solució depèn de les matemàtiques i la ciència.
Zoltan Dienes(1978) proposa que la fita principal de l'ensenyament de les matemàtiques ha de ser el desenvolupament de certes pautes de pensament, de certes estratègies, que la gent pot desenvolupar en enfrontar-se a situacions noves en les què mai s'havia trobat abans.
Notem que en les referències anteriors trobem raons utilitàries i d'ensenyament en general: indicacions i necessitats professionals, desenvolupament de capacitats formatives, desenvolupament de la personalitat i actituds.
Seria injust no mencionar a Mogen Niss, M. Niss (1992) considera:
"*hem de fer una reconstrucció analítica de la funció de les matemàtiques al món (és a dir, a la naturalesa, la societat i la cultura), i s'ha de tenir en compte que aquest paper ha canviat segons època i lloc*"
L'ensenyament de les matemàtiques té lloc en una societat i per a éssers humans que viuran en aquella societat. Niss expressa algebraicament l'ensenyament de les matemàtiques de la següent manera:
"*L'ensenyament de les matemàtiques = f (les matemàtiques, a la societat; la societat, la seva estructura, cultura, política i economia; l'individu, el seu lloc a la societat; els valors, culturals, ideològics i polítics)*".
Per tant l'ensenyament de les matemàtiques ha de contribuir a fomentar la ciutadania intel·ligent i inquieta per a tots els membres de la societat. Més específicament, l'ensenyament de les matemàtiques hauria de donar-se a tot el món per ajudar a crear una perspectiva de tot en general, és a dir des de les forces essencials que hi ha darrera del desenvolupament de la naturalesa, de la societat i de la vida dels éssers humans.

2.2.3. Competència democràtica

Les matemàtiques tant implícites com explícites donen forma a la nostre societat i determinen estructures de poder. Les institucions socials, organitzacions i les

administracions s'estructuren en jerarquies segons sistemes lògics i sistemes de regles mitjançant conceptes formals que provoquen sensacions i experiències d'impotència en les persones afectades. Les relacions econòmiques com ara la producció i el comerç estan completament formalitzades i matematitzades; les estructures del discurs social i l'argumentació política venen determinats per l'ús generalitzat de conceptes i relacions matemàtiques que interpreten les dades com fets i les limitacions imposades per l'aplicació de models matemàtics com elements d'argumentació. Les matemàtiques configuren un còdig lingüístic que permet expressar idees dins d'un context social. En aquest marc comunicatiu, la mateixa premsa diària conté informació que es recolza en l'estadística. Si la persona que llegeix no posseeix cert tipus de coneixement matemàtic li serà difícil l'accés a la informació, i per tant no podrà adquirir elements de judici per opinar en vers els aconteixements que s'exposen. En la mateixa direcció es belluga Skovsmose (1990), dels seus treballs podem concloure que els currículums han d'incloure el nivell de coneixement matemàtic necessari per comprendre els aconteixements del món. Fins i tot una lectura casual dels diaris i les revistes revela que les matemàtiques desenvolupen un paper important en les qüestions actuals i les notícies generals. Molts aspectes d'una correcte presa de consciència dels consumidors exigeix un coneixement i una comprensió bastant complexa.
L'educació matemàtica, en aquest sentit, permet crear competència democràtica en els ciutadans, ja que potencia per actuar políticament en la societat
Considero vàlida la filosofia de Davis -citat en Christine Keitel i Kenneth Ruthven (1993) - que aposta per un canvi en l'educació matemàtica que es centri en ensenyar "literatura" en lloc de limitar-se a la "gramàtica", es a dir en activitats de modelització alternatives basades en diferents interessos i enfocades a diferents objectius, a fi i efecte de poder desenvolupar un judici crític i analític sobre les matemàtiques aplicades en general.
A nivell social i institucional, els ciutadans s'enfronten cada cop més a un ús social pràctic de models matemàtics i argumentacions polítiques basades en mètodes matemàtics. Les matemàtiques s'estudien i s'usen a nivell institucional, existent a la realitat, i que exerceix una influència sobre la vida diària dels alumnes i el seu entorn.
De fet, i reivindicant les indicacions de Davis, podem afirmar que ja no té sentit exigir als alumnes que aprenguin tècniques que les màquines poden executar amb més rapidesa, ni negar-lis l'accés a les estructures abstractes de la societat que venen determinades per les tecnologies socials i materials; en síntesi, no te sentit limitar a l'alumne a la "gramàtica" de les matemàtiques en deteriora de la "literatura".
En aquesta línia, Ole Skovsmose (1997) defensa el que anomena *alfabetització matemàtica*, que té com idea central el fet de que a través de l'educació matemàtica es pot construir i fomentar un coneixement reflexiu que, conjuntament amb el coneixement tecnològic, consolidin la capacitat dels individus per actuar a la societat. Skovsmose considera que l'alfabetització matemàtica pot ajudar a reorganitzar a la gent les seves visions vers institucions, tradicions i possibilitats socials d'acció política. És interessant, degut a l'impacte social de les matemàtiques, el tractament i el desenvolupament del tema i per això he considerat oportú fer una breu explicació de com lligar els conceptes de democràcia, educació i tecnologia i societat.

L'educació juga un paper important en els criteris d'elecció d'un govern, els algoritmes i procediments són les eines veritables per garantir la democràcia. Aquí intervé la tecnologia. Els pilons de la tecnologia són les matemàtiques. Les matemàtiques constitueixen la base lògica del tractament de la informació i el pensament matemàtic és el suport de les aplicacions de la tecnologia de la informació. En el cas de societats amb un alt desenvolupament tecnològic, qualsevol tipus de decisions socials, polítiques i econòmiques estan associades amb la tecnologia. Aquest fet és complexa i només grups limitats de persones estan capacitades per manejar aquesta complexitat. De fet, aquesta competència pressuposa un coneixement tecnològic. Skovsmose es qüestiona ¿Com pot qualsevol persona avaluar decisions que tenen que considerar les conseqüències de la tecnologia sense tenir una quantitat considerable i adequada de coneixement tecnològic? ¿Com pot una persona no experta controlar als experts? ¿És possible garantir l'existència d'una ciutadania crítica en una societat amb un alt desenvolupament tecnològic?

Per resoldre aquestes qüestions cal analitzar el paper i el caràcter formatiu de les matemàtiques en la societat.

Skovsmose conjuntament amb Christine Keitel distingeixen entre les *abstraccions mentals i les materialitzades*. Les abstraccions mentals s'usen per facilitar el raonament, els conceptes matemàtics i el modelatge matemàtic són exemples d'aquest tipus d'abstraccions. Per exemple, el raonament econòmic pot servir-se d'un concepte com el producte interior brut (PIB) definit en termes d'una funció matemàtica. La manera de calcular els impostos, salaris, etc. Tenen una influència real en les nostres vides.

Un dels objectius de l'educació ha de ser preparar als ciutadans per assumir una ciutadania crítica i un coneixement reflexiu. Els estudiants cal que tinguin una autèntica alfabetització per afrontar els reptes socials i que per tant estiguin capacitats per formular i respondre qüestions, com ara les següents, per tenir una ciutadania i capacitat crítica:

1. Usem l'algoritme apropiat i de forma correcte?
2. Podem confiar en els resultats d'aquest algoritme?
3. Podríem fer quelcom sense els càlculs formals?
4. Com influeix un algoritme en un context específic?

En síntesi: cal tenir la capacitat de comprendre el paper que les matemàtiques tenen a la societat, l'alfabetització matemàtica ha de ser una corretja de transmissió per tal de capacitar a les persones per participar en la comprensió i transformació de la societat.

La importància de les matemàtiques a nivell social en la formació dels ciutadans la podem establir en tres estadis:

1. La formació matemàtica pel desenvolupament econòmic: El maneig d'habilitats i competències matemàtiques contribueix a la capacitat de ma d'obra per les tasques productives en la mesura en que permet fer un ús més eficient dels avenços científics i tecnològics.
2. La formació matemàtica per la participació política: L'educació matemàtica permet que els ciutadans es facin seves les eines de pensament i de comunicació que són indispensables per l'exercici d'una competència democràtica. Aquesta es relaciona amb la competència democràtica dels ciutadans per jutjar les accions dels governants i la seva pròpia acció, i per trobar solucions viables als problemes quotidians.
3. La formació matemàtica per els nous valors socials: La formació matemàtica permet generar un procés de participació col·lectiva en la construcció de coneixements i en l'aplicació d'aquests en la resolució col·lectiva de problemes. En aquest procés hi ha valors involucrats com ara el diàleg, la tolerància, el pluralisme, el respecte i la pau.

Com a cloenda podríem dir que existeix una relació entre posicions ideològiques sobre la societat, la política, l'educació i la formació dels ciutadans i posicions epistemològiques sobre les matemàtiques, el seu ensenyament i el seu aprenentatge. La idea de que la concepció sobre els fins de l'organització política i la producció econòmica es relacionen amb una visió particular de les matemàtiques, el seu

ensenyament i el seu aprenentatge fan pensar en la importància de la concepció que tenen les persones que dissenyen una política educativa i la seva influència en el tipus de pràctiques que d'allà sorgeixin. En aquesta línia pren importància el paper de l'educació per la preparació dels ciutadans per afrontar els canvis democràtics i econòmics, la funció dels investigadors en la producció de coneixement sobre l'educació, i la utilitat del coneixement en el disseny d'estratègies educatives concretes per enfortir comportaments democràtics i productius d'acord a les exigències actuals.
El ciutadà ha de tenir una competència democràtica per jutjar les accions dels governants i la seves pròpies accions. La formació matemàtica contribueix en la formació de la competència democràtica de dues maneres. Per una part, l'aplicació d'habilitats matemàtiques permet modelar situacions reals i matematitzarles per trobar una solució viable als problemes quotidians que s'enfronta el ciutadà. Per altra banda, la formació matemàtica i la mateixa capacitat de modelatge s'associa amb una capacitat crítica del ciutadà per jutjar si les decisions i accions que prenen els seus dirigents i ell mateix són les millors possibles.

Com hem mencionat és necessari la formació d'una competència democràtica que permeti als ciutadans exercir una acció pròpia a favor del aconseguiment de fites col.lectives que fomentin la creació i transformació de l'entorn on viuen. En aquest sentit , el destí de la democràcia està en mans de persones directament involucrades en la formació dels ciutadans. Als educadors els hi correspon gran part d'aquesta tasca ja que l'educació és un dels instruments que permet dotar a l'individu d'eines per actuar a la societat . Una de les funcions del sistema educatiu es capacitar als individus per la seva activitat política de compromís amb les transformacions de les condicions objectives de la seva existència i per la seva activitat econòmica com a productor de la mateixa.
Es necessari buscar la consolidació d'un model d'educació crítica caracteritzada pel foment d'una competència, una distància i un compromís crític. L'educació te que oferir la oportunitat de que els estudiants controlin els seus propis processos educatius; per aquest motiu el procés educatiu cal orientar-lo cap a la resolució de problemes de fora del context de classe. I per això també es important potenciar les tècniques de modelatge en l'ensenyament.
Segons Paola Valera (1994), l'educació crítica per la formació d'una competència democràtica, consta de dos dimensions: la de la *formació* dels individus en la competència democràtica, i la de *capacitació e informació*, a través de coneixements específics per el desenvolupament de les persones. Ambdues són necessàries per potenciar la capacitat de les persones per actuar d'una manera responsable i política dins del seu entorn.
Des de un punt de vista sociològic, recollim l'aportació de P.Valera. Valero defensa que les matemàtiques són aquell conjunt d'objectes que es construeixen socialment a través de la interacció del individu amb el món real en el seu procés de producció de condicions de vida, i també de la posterior socialització de les construccions subjectives mitjançant negociacions socials sobre tals construccions subjectives.
L'àmbit dialèctic i polític són la base per moltes de les justificacions de l'ensenyament de les matemàtiques, i especialment amb la seva relació amb la formació de competència democràtica en els membres de la societat. És clar que les matemàtiques estan presents en les relacions socials, no només en aquelles que es desenvolupen al sí de l'aula o en els espais dels matemàtics purs, sinó també en aquelles de les persones comuns que generen condicions materials de vida. Són de fet eines de pensament i de comunicació. Les matemàtiques com eina de pensament fan referència a les oportunitats

per representar situacions de la vida real, analitzar-les, modelar-les, i poder prendre decisions a base de simplificar la realitat.
Un altre aspecte del caràcter de les matemàtiques com eina de pensament es l'associació d'aquestes amb el desenvolupament de la ciència i la tecnologia i del seu impacte sobre la vida quotidiana. Les matemàtiques satisfan una necessitat funcional de la professionalització laboral, no només necessita de les habilitats bàsiques de l'aritmètica, sinó també d'una competència matemàtica més desenvolupada que li permeti estar preparada per comprendre les complexitats i tecnologies de la comunicació, per plantejar qüestions, assimilar informació desconeguda i treballar cooperativament en equip. La interacció dels avenços tecnològics amb les persones, a través del coneixement matemàtic, desenvolupa la capacitat d'aquestes per bellugar-se amb major eficiència dins la societat.
També cal reconèixer la utilitat del coneixement matemàtic com eina de modelatge de situacions reals complexes. Els models matemàtics que avui en dia s'elaboren serveixen de marc per la presa de decisions polítiques i econòmiques a nivell d'estat. En aquest sentit les matemàtiques tenen una funció de modelatge de la societat. El coneixement matemàtic és necessari per construir models de simplificació de la realitat (esquema del procés de modelització del capítol1) que permetin a les persones resoldre els problemes que tenen al seu entorn, i també per poder entendre el funcionament de l'aplicació dels models econòmics i polítics en la societat i així adoptar una posició crítica davant dels dirigents. Podem afirmar que el procés formal per adquirir una competència democràtica està d'acord amb l'esquema presentat al capítol 1 del procés de modelització: elaborar un model de la realitat, simplificar la seva complexitat per tal d'analitzar la situació i seguidament usar els algoritmes adequats per tal de prendre decisions. Ho podem definir com el modelatge aplicat a la comprensió de problemes socials.
Les pràctiques actuals d'aprenentatge i ensenyament de les matemàtiques disten de ser pràctiques educatives que segueixin les directrius de l'educació crítica i, per tant, també són llunyanes de potenciar la formació de competència democràtica en els ciutadans.
Mirar l'educació i en particular l'educació matemàtica des de un altre òptica obra el pas a la construcció de pràctiques diferents a les tradicionals que permetin l'apropiació real del coneixement per part dels estudiants.
En aquest apropament és on es centra la contribució que li pot fer l'educació matemàtica a la formació de competència democràtica en les persones i en la societat. Les matemàtiques ens donen a la humanitat eines de pensament i de comunicació que poden utilitzar efectivament en la creació i transformació del nostre entorn.

2.3. EL MODELATGE: ANTECEDENTS DEL TEMA

En aquesta secció introduirem la terminologia emprada en la metodologia. També fem una revisió de la literatura sobre el tema per tal de recollir els antecedents existents.

2.3.1. Matematització

La matematització de la ciència va tenir lloc a començaments del segle XVII. Newton (1687) dona una definició implícita del terme en el seu treball "*Principis matemàtics de la filosofia natural*" i que tot seguit reproduïm :
"*El nostre propòsit es només mostrar la quantitat i propietats d'aquesta força des del fenomen, i aplicar el que descobrim en alguns casos senzills com a principis, de manera que desprès puguem estimar els efectes matemàticament en altres casos. Diem*

matemàticament per evitar totes les qüestions sobre la naturalesa d'aquesta força, que no podríem entendre mitjançant cap hipòtesi".

La idea d'un model matemàtic com a resultat d'un procés de matematització, va ser la teoria de Newton sobre el moviment planetari.

En el procés de matematització pot utilitzar-se un nou model o fer-se'n un de nou, o senzillament integrar d'altres models.

A finals dels anys setanta, Aris (1978) ja defineix el concepte de model matemàtic com un conjunt complet i consistent d'equacions matemàtiques o estructura que es dissenyada per correspondre a alguna altra entitat, el prototipus pot ser una entitat física, biologia, social o conceptual. Aquesta concepció de la definició de model és formalitzada i millorada posteriorment, tal com indiquem més endavant, a nivell conceptual per Mogen Niss al 1989.

Observem que els models de Newton s'ajusten a aquesta definició. En el seu cas els principals objectius en construir un model són:

1. Obtenir respostes sobre el que passarà en el món real.
2. Incentivar més l'experimentació o observació.
3. Per ajudar a l'axiomatització de la situació física.

Per unificar nomenclatura entendrem per matematització la transformació en termes matemàtics de situacions de la realitat. De Lange (1987) apunta dos motius importants en la matematització a nivell conceptual: promoure les matemàtiques i l'art de fer models matemàtics.

A partir del segle XIX hi ha un gran creixement de les matemàtiques aplicades i matematització, de la mà de la física matemàtica.

El comerç i l'economia han sigut una font de formació de conceptes a les matemàtiques. Les idees de l'interès compost estan relacionades amb les teories del creixement. La teoria de probabilitat va entrar a les matemàtiques a través del joc i de les apostes, així com l'esperança i risc.

L'economia és avui en dia una de les ciències on la matematització hi és present constantment.

En aquest sentit Freudenthal (1983) aporta el fet de que les matemàtiques no han de ser un privilegi dels matemàtics i no s'ha de treure de l'educació, i que els alumnes també haurien d'aprendre a matematitzar.

Jan De Lange (1987) en les seves contribucions, complementa l'aportació de Freudenthal defensant que matematització és una activitat organitzativa i estructurativa mitjançant la qual s'utilitzen coneixements adquirits per descobrir regularitats, relacions i estructures desconegudes.

En els processos de matematització i modelització destaquen diverses components:

1. Identificació de les matemàtiques específiques en un context determinat.
2. Esquematitzar.
3. Formular i visualitzar un problema de diferents maneres.
4. Descobrir relacions involucrades.
5. Reconèixer aspectes comuns en diferents situacions.
6. Transferir del món real cap a un problema matemàtic.
7. Transferir un problema del món real cap a un model matemàtic.

Treffers, A i Goffree, F. (1985) citats en De Lange (1987) anomenen les components anteriors com les *activitats horitzontal* de la matematització, i tot seguit afegeixen el que anomenen *activitats verticals* de la matematització:

1. Representar una relació amb una fórmula.
2. Refinar i ajustar models.
3. Usar diferents models.

4. Combinar i integrar models.
5. Formular un nou concepte matemàtic.
6. Generalitzar.

Generalitzar vol dir que quan raonem amb el model matemàtic, ens sentim empesos a construir un nou model matemàtic que contingui el nostre model original en un model més abstracte. La matematització horitzontal i vertical surt de les *accions* dels estudiants i de les seves *reflexions* sobre les accions. La matematització va amb la reflexió i només pot ser eficient si va acompanyada d'una ensenyança interactiva, és a dir amb la oportunitat de discutir, consultar i cooperar.

De Lange (1987) proposa un esquema global del pla de treball de les activitats de les matemàtiques, considera que la matematització va junt amb la reflexió. L'estudiant ha d'ensenyar el seu procés personal de matematització, discutir amb altres estudiants i avaluar i interpretar els resultats de la seva matematització. De Lange defineix "*matematització conceptual*" com la que es dedica a desenvolupar conceptes matemàtics. De Lange desenvolupa aquests aspectes en l'assignatura "*Matemàtica A*", experiència que més endavant expliquem.

De Lange proposa l'esquema iteratiu del caràcter de les matemàtiques:

Matematització en aplicacions ⟶ món real ⟶ matematització i reflexió ⟶ ⟶ abstracció i formalització ⟶ matematització en aplicacions

La fonamentació d'aquest esquema és essencialment el proposat en el capítol 1 però més sofisticat, l'esquema del capítol 1 és més general. En l'esquema proposat per De Lange, fa especial atenció a les operacions mitjançant les quals la ment fa adequació als propis actes de coneixement, i fins i tot al subjecte que els sustenta, i no al contingut dels mateixos actes; De Lange, doncs, completa l'esquema del capítol 1 ponderant amb un pes molt rellevant l'acte de reflexió. Per De Lange és més important el procés mental seguit que no pas els models obtinguts, per això hi ha el caràcter iteratiu de retornar a l'inici de l'esquema a través de la reflexió i una vegada extrets i formalitzats els conceptes, aquests poden ser aplicats un altre cop a d'altres situacions reals. Assumint com a model la descripció matemàtica d'un objecte o fenomen real, en l'esquema de De Lange destaca que l'estudiant ha d'ensenyar el seu procés personal de matematització i interpretar els resultats de la seva matematització. En aquest sentit De Lange (1987) destaca:

"*En molts problemes realistes el refinament i la provatura són crucials en el procés de formulació del problema, per tant es molt important prendre decisions no-matemàtiques, comparacions o avaluacions utilitzant eines matemàtiques més que no pas produir una resposta numèrica*".

Dos aspectes importants d'aquest model d'aprenentatge són:

1. Posa èmfasis en l'experiència concreta per a validar i provar conceptes abstractes.
2. El principi de retroalimentació del procés.

Kolb (1984) aposta pel modelatge com un element necessari en el procés d'aprenentatge. Kolb defineix l'aprenentatge com el procés mitjançant el qual es crea coneixement a través de transformació de l'experiència.

L'experiència de De Lange, vol ser un pont entre conèixer matemàtiques i utilitzar-les.

En aquest sentit, considerem, tal com s'ha dit en el capítol 1, que el pla d'estudis matemàtics -i en particular el d'enginyeria- hauria de contemplar:

1. Constituir una base cultural per l'estudiant.
2. Els conceptes matemàtics s'han d'extreure de situacions concretes.
3. Les matemàtiques no s'han de repassar de les altres ciències.

4. Cal fugir en l'ensenyament del formalisme propi dels matemàtics "d'ofici".

Segons Freudenthal (1973), no s'haurien de presentar les matemàtiques com un producte preparat. Els estudiants haurien de *reinventar* les matemàtiques.

Treefers (1986) considera que els punts per una matemàtica realistament orientada són:

1. Recrear, reinventar conceptes matemàtics en base a nocions intuïtives.
2. Continuar el procés a través de varis nivells de concreció i abstracció.
3. Guiar el programa educatiu segons la història de les matemàtiques.
4. Estar emmarcades en la realitat.

Com a cloenda d'aquest paràgraf, l'aportació pròpia des de un punt de vista cognitiu es:

1. Els problemes d'exemples reals són importants.
2. Són importants els esquemes i models.
3. Són importants les produccions i construccions mentals dels estudiants que els fan seguir el camí cap a mètodes més formals.

Per aquest motiu cal fer una aposta forta per les matemàtiques aplicades, cal respondre on hem d'anar i quines fites volem assolir per ser autèntics professionals i ciutadans competents amb sentit crític. En aquest sentit comparteixo i assumeixo plenament la definició de matemàtiques aplicades, aportada per Pollak (1976). Pollak defineix les matemàtiques aplicades com:

1. Matemàtiques aplicades vol dir matemàtiques clàssiques aplicades.
2. Matemàtiques aplicades són les que tenen una una aplicació significativa.
3. Matemàtiques aplicades vol dir prendre com a punt de partida el món real o altres camps científics, fer un model matemàtic i fer matemàtiques al sí del model i aplicar el resultat.
4. Matemàtiques aplicades és el que fan les persones que saben aplicar les matemàtiques.

Avui dia sembla haver una tendència cap a les matemàtiques aplicades -més marcada en els currículums de secundària que no pas a les escoles tècniques en les assignatures pròpies de matemàtiques-. Això es degut a un increment de la matematització en altres camps a part de la física. Cada vegada hi ha disponibles més problemes reals en l'educació. Falta, però, progressar i que s'incloguin més aplicacions de les matemàtiques en els llibres de text. Tal com hem explicat en el capítol 1, alguns professors, educats segons matemàtiques pures, són reacis a ensenyar les matemàtiques aplicades i temen admetre altres disciplines diferents a les matemàtiques.

Les aplicacions no haurien de reservar-se per després de l'ensenyament, haurien d'utilitzar-se com a context per aprendre les idees matemàtiques. Aquesta darrera consideració es compartida per Lesh (1983) -citat en De Lange (1987)-.

Un dels efectes del present treball és acostar l'ensenyament de les matemàtiques a les aules universitàries d'una manera més lligada a situacions reals.
Una de les formes de portar a terme aquest ensenyament innovador de les matemàtiques és a través del modelatge matemàtic.
- El modelatge és l'art d'aplicar les matemàtiques a situacions de la vida real - (M.Niss,1989)
Notem que en aquesta definició hi ha implícit el caràcter heurístic del procés de modelització, apareix com a rellevant el conjunt d'habilitats per trobar models –quan Niss és refereix a *l'art*-. En relació a la proposta de De Lange, De Lange dóna més importància a la reflexió que no pas al procés heurístic, De Lange prioritza més la reflexió-interacció sobre el model-situació que no pas l'habilitat de recerca del model. Fet aquest darrer que De Lange no descuida, car el procés de reflexió el retorna a la situació real per tal de que ha través d'aquesta, formalitzar i adequar el model a una i diverses situacions.
Essencialment entre ambdós autors, malgrat les diverses interpretacions mencionades, hi ha un ampli consens en el procés de modelització proposat en el capítol 1. L'un considera més rellevant la reflexió i l'altre destaca com a més important el procés heurístic.
D'altres definicions consultades són la proposada per Minsky (1985) -citat en Joao Filipe (1995)- que defineix model com:
"*M es un model d'A, en la mesura que s'admet que M es útil per respondre un cert tipus de qüestions sobre A*"
Aquesta darrera es menys explícita que la definició d'en Niss, la proposada per Niss es més coherent amb l'esquema del capítol 1 ja que està enunciada en termes més precisos.
En síntesi, assumim com a model la definició establerta per M. Niss (1989):
"*...Model es una terna (A, M, f) on A representa una situació del món real que es vol estudiar, M un conjunt d'objectes i relacions matemàtiques i f una correspondència que permet relacionar elements d'A amb elements d'M...*"
i entendrem per modelització el conjunt d'habilitats i tècniques per plasmar la matematització i treballar sobre el model per establir resultats sobre la situació estudiada, entendrem com matematització -tal com hem apuntat anteriorment- la transformació en termes matemàtics de la realitat.
Notem que els conceptes definits estan d'acord en l'esquema de modelització establert en el capítol 1, siguent doncs la matematització la primera fase del cicle de modelització.
Els arguments bàsics per dur a termini el modelatge com a eina d'ensenyament, i que considero que son els pilars d'aquesta metodologia, els podem trobar també en els articles de Mogen Niss (1989):
1. Cal desenvolupar la capacitat de resoldre problemes i la creativitat.
2. Preparar els alumnes a usar les matemàtiques.
3. Desenvolupar la capacitat crítica de la matemàtica en la societat.
4. Donar una visió completa de les matemàtiques.
5. Ajudar en la comprensió dels conceptes i mètodes matemàtics.
En Niss (1992) afegeix els arguments:
1. Fem matemàtiques per a tots. Amb això, en Mogen Niss vol donar a entendre que ensenyem matemàtiques per a moltes persones que no seran de l'ofici.
2. Saber matemàtiques i el seu grau d'abstracció no vol dir saber usar-les.
3. Cal ajudar a comprendre els conceptes i resultats matemàtics.

Amb aquests punts, en Mogen Niss intenta establir unes directrius per justificar el perquè del modelatge i afirma:
"*...la manera de desenvolupar el modelatge és treballar en casos autèntics en tot el procés de modelització d'una manera activa i independent...*" (M. Niss, 1992).
Vull afegir que, respecte a aquesta afirmació, en Paulo Abrantes em va comentar fent una metàfora: "*...llegir bons llibres sobre ciclisme no ens fa bons ciclistes, però pot ser útil...*" (P.Abrantes, UAB, 04-05-96).
Es tracta d'ensenyar a l'alumne els conceptes matemàtics, no a través d'un ensenyament teòric, sinó fent servir problemes tècnics reals modelats de forma adient per tal que aquests estudiants puguin comprovar la utilitat de les matemàtiques en la vida quotidiana i dominar-ne les tècniques.
S'ha intentat modelar aquestes situacions físiques de forma que siguin entretingudes, funcionals i suggeridores per a l'alumne, així, l'alumne primer s'endinsa en una situació real i, un cop dins, ensopega amb la necessitat de fer servir les matemàtiques per resoldre-la. És a dir, al mateix temps que l'alumne aprèn conceptes matemàtics desconeguts per a ell fins ara, veu la utilitat de les matemàtiques en qualsevol faceta de la vida. D'aquesta manera es pretén que adquireixin un grau més elevat de motivació davant allò que se'ls vol ensenyar.
Aquest modelatge matemàtic de situacions tècniques s'ha tractat a través de les anomenades "unitats didàctiques" i "treballs en projectes" - en posteriors capítols s'explicarà amb detall en què consisteixen aquest tipus de pràctiques-. He optat per aquest tipus de pràctiques perquè a través de les unitats didàctiques desenvolupen en el si de les aules un seguit d'activitats d'aprenentatge que es basen en els següents punts:
1. Identificació: Identificar una situació usual en el món de l'enginyeria.
2. Construcció del model: Traduir la situació en terminologia matemàtica.
3. Descobriment: Per construcció, descobrir i aprendre conceptes matemàtics nous per als estudiants.
5. Interpretació: Treballar sobre el model per interpretar situacions semblants.

Observem que el cicle enumerat segueix l'esquema proposat en el capítol 1, hi ha involucrats els conceptes assumits anteriorment de matematització, modelització i model matemàtic.

2.3.2. Fases de la construcció del model: aportació a l'eupvg

En el procés seguit a l'EUPVG, s'espera que l'estudiant realitzi una descripció aproximada de situacions tècniques del seu entorn acadèmic i professional mitjançant símbols matemàtics.
L'estudi de situacions mitjançant models matemàtics l'he implementat en diverses fases:
La primera etapa ha consistit -en les unitats didàctiques- en un ensenyament heurístic dels objectes que fonamenten la situació (descobriment i construcció de determinades lleis físiques com ara la llei de Hooke). En els projectes s'enuncien les lleis i llurs propietats. Com he mencionat anteriorment, en les unitats didàctiques els estudiants construeixen el model i en els projectes treballen sobre el model. En aquesta etapa calen coneixements relatius als lligams entre els diferents conceptes que es troben involucrats en la situació. Aquesta etapa culmina expressant en termes matemàtics les representacions qualitatives formulades al voltant dels lligams que configuren el model.
En una segona etapa l'objectiu és investigar els problemes matemàtics involucrats en el model. Aquí el fet fonamental és la resolució del problema, és a dir: l'obtenció de resultats. Un dels objectius rellevants és el fet de que els models matemàtics obtinguts de situacions diferents són idèntics, aquest és el cas del comportament d'un sistema de

ressorts i un circuit elèctric. Aquest fet proporciona la base per analitzar independentment situacions de diferent naturalesa a partir del mateix model.
A nivell teòric, i amb els objectius enumerats, he considerat diversos passos:
1. Identificar les qüestions associades a una determinada situació. Aquesta identificació constitueix un problema complex, he trobat dificultats, com veurem, en l'elecció del problema i en la comprensió de les idees i conceptes extramatemàtics (elements externs d'altres àrees: física, electricitat, mecànica) que hi apareixen. La recerca de situacions senzilles no ha estat una tasca fàcil, trobem situacions on la càrrega de conceptes tècnics és complexa i l'aparell matemàtic que modela la situació és molt simple (per exemple en els càlculs de les quotes d'un crèdit, se sap que el model és una progressió geomètrica i malgrat tot, l'argot usat és incomprensible per als no iniciats). En síntesi podem afirmar que els estudiants estan poc familiaritzats amb els aspectes extra-matemàtics.
La situació que plantejo ja es presenta de forma simplificada, és a dir: eliminant hipòtesis que poden complicar el problema, i que difereixen poc del problema a tractar en el sentit de que siguin situacions germanes però no bessones.
2. Traducció dels continguts: passar els conceptes i les relacions de la situació a conceptes i relacions matemàtiques. D'aquest procés es pretén que en sorgeixi un primer model on juguin nombres, expressions i gràfics.
3. Manipulació del model amb l'objectiu d'obtenir resultats concrets (solucions d'una certa equació, anàlisi de resultats,...) basats en el model trobat i considerat.
Un cop fet aquest procés, es tracta de validar i comparar els resultats amb la situació plantejada. En cas de diferir molt de les característiques del model i de la situació, variaríem lleugerament les hipòtesis per tal de construir un nou model més apropiat. Un dels objectius és millorar el model, i conseqüentment les conclusions que se'n poden extreure.
La validesa del model i la comparació amb la situació plantejada permet de contribuir fins i tot a formular nous problemes, això és precisament el que hem fet en el nostre estudi en les diverses pràctiques efectuades. Com veurem en el capítol on s'exposa l'experiència de l'EUPVG, les situacions proposades a modelar tendeixen a donar lloc a diversos processos de càlcul i a noves situacions anàlogues que també són estudiades.

2.3.3. La inclusió del modelatge

Tal com hem apuntat en la problemàtica de la tesi, l'ensenyament de les matemàtiques s'ha caracteritzat per un excessiu formalisme en la seva presentació i uns continguts purament matemàtics amb absència d'exemples o problemes reals. De la mateixa manera, i tal com indiquem en l'evolució històrica de l'ensenyament de les matemàtiques a les escoles tècniques, aquesta situació s'ha mantingut en els darrers anys.
Un dels efectes negatius d'aquesta situació es l'escassa capacitat de l'estudiant per aplicar les matemàtiques apreses en l'àrea tècnica per ell escollida (Lusa, 1975).
La introducció de les tècniques de modelització en el bagatge de l'enginyer tècnic pot ajudar considerablement a superar aquesta situació. Això es degut a que un bon model reconeix els fets rellevants d'un problema per mitjà d'una adequada elecció d'hipòtesi, i té una estructura matemàtica ben definida, de la qual es poden deduir conseqüències d'interès pràctic.
La incorporació d'aspectes relatius a les aplicacions de les matemàtiques i al procés de modelització pot contribuir a ajudar als alumnes a que adquireixin i interioritzin conceptes matemàtics, mètodes i resultats. D'aquesta manera moltes idees matemàtiques es tornen més significatives i adquireixen major consistència si són ensenyades en contextos d'aplicacions.

En aquest direcció Kaiser-Messmer (1991) identifica dues corrents:
a) la pragmàtica
b) la científica-humanista
La tendència pragmàtica fa especial èmfasi en els objectius utilitaristes de les matemàtiques per la resolució de problemes de la vida real. En aquest sentit el principal propòsit de l'ensenyament de les matemàtiques resideix en adquirir metodologies útils per la vida quotidiana, per l'activitat professional dels ciutadans. Per tot això cal que els currículums de matemàtiques gaudeixin d'uns continguts que contemplin múltiples aplicacions a la vida real i en aquest aspecte la inclusió tècniques de modelització en els currículums i juga un paper rellevant.
La tendència científica-humanista, valora les matemàtiques com a ciència humanística, omitin l'aplicabilitat.
Blum i Niss (1989) senyalen cinc arguments, que compartim i ampliem, en favor de la inclusió del modelatge en els currículums:
1. El formatiu.
Les tècniques de modelatge permeten estimular l'interès pel descobriment, la creativitat i adquirir confiança en les seves capacitats i recursos.
2. Competència crítica.
En una societat cada cop més influenciada per les matemàtiques, a través de les seves aplicacions i models, es oportú desenvolupar entre els alumnes una competència crítica que els permeti una integració en el món laboral i social més activa i participativa. La competència crítica s'ha d'entendre com una capacitat de reconèixer, comprendre, analitzar, i validar l'ús de les matemàtiques en el context real.
3. Utilitarista.
La capacitat d'aplicar els coneixements matemàtics a les situacions del món social, no prové del fet d'haver adquirit una formació abstracta. Segons prova l'experiència té a veure amb una educació prèvia més pràctica. Per aconseguir això cal que en l'ensenyament que s'ofereix als alumnes s'inclogui la realització d'experiències de pràctiques de modelatge en diversos contextos per tal d'adquirir instruments vàlids i útils en el futur món laboral.
En aquest argument, cal afegir, que la inclusió del modelatge -i en especial a les escoles tècniques- fins i tot es necessari en les àrees de matemàtiques per tal de reforçar el desenvolupament d'altres assignatures de l'especialitat de caire més aplicat
4. Visió de les matemàtiques.
Presentar les matemàtiques lligades a d'altres àrees de la ciència, com una activitat cultural i social. I destacar la seva importància en un context real. Es a dir donar un pes específic de les matemàtiques dins la societat.
5. Argument psicològic.
La incorporació d'aplicacions matemàtiques en els currículums pot aconseguir que els conceptes matemàtics tinguin un protagonisme per a l'estudiant a nivell mental. D'aquesta manera la capacitat d'usar un concepte matemàtic engloba quelcom més que simples coneixements d'aquest concepte. Saber fer un càlcul no és garantia que se sàpiga decidir en quines situacions es precís realitzar aquest càlcul o de com es pot usar un resultat un cop obtingut. Cal analitzar si l'estudiant esdevé un simple espectador, tot memoritzant tècniques purament mecàniques o bé si realment l'alumne entén el que està fent, comprèn els conceptes i en veu la seva utilitat.
L'eficàcia de les matemàtiques i la seva constant presència en la societat moderna ens porta a fer servir el pensament matemàtic per modelar situacions pràctiques.
Més endavant en Niss i en Blum (1989) afirmen:

" Una característica del modelatge matemàtic és que algunes vegades pot semblar un procés molt llarg o difús, però no és així. El modelatge no és difícil ni avorrit. Per ser captivat pel modelatge és absolutament essencial l'ordre d'aprenentatge. Tothom pot fer servir un model i participar en el procés de modelatge. El modelatge matemàtic pot resultar molt més fàcil del que en principi pot semblar. No és tant important trobar un resultat correcte com el fet d'enfrontar-se amb la qüestió, donat que usualment es pot aprendre tant d'una solució com d'una errada ".

De l'experiència desenvolupada a l'eupvg es dedueix que sovint els estudiants estan poc familiaritzats en treballar en situacions reals i mostren un interès en rebre un ensenyament menys passiu i més d'acord amb l'especialitat que estudiant. Els arguments anteriors cobreixen aquests aspectes, proporcionant un ensenyament més adequat a les inquietuds curriculars i professionals de l'estudiant. En la fase inicial d'introducció d'aplicacions, a l'estudiant li costa vèncer la inèrcia de la passivitat i comoditat dels "problemes ben plantejats" (i.e. tradicionals), manifestant un autèntic bloqueig mental que a mesura que avança l'activitat d'aprenentatge va desapareixent i els resultats són força satisfactoris.

Poden sorgir problemes per tal de quina manera podem incloure el modelatge en els currículums. Blum i Niss (1991) presenten diverses alternatives:

1. Alternativa de separació: Les activitats que inclouen aplicacions de les matemàtiques i modelatge, són tractades en d'altres cursos de manera optativa. Aquí hi ha el perill de continuar impartint matemàtiques en metodologies tradicionals.
2. Alternativa compartida: Realitzar en un primer nivell matemàtiques pures i en un segon nivell establir aplicacions dels conceptes tractats en l'anterior.
3. Alternativa "d'illes": Consisteix en realitzar un temari organitzat en diverses unitats i en cadascuna d'elles compartir ambdues metodologies.
4. Alternativa combinada: Utilitzar les aplicacions com a matèria auxiliar per introduir conceptes matemàtics de manera que els continguts matemàtics estiguin involucrats en el modelatge.
5. Alternativa "d'integració curricular": Que en els problemes tractats hi apareixien conceptes matemàtics abans de ser desenvolupats prèviament. En tal cas els conceptes són identificats i desenvolupats a partir de l'aplicació, d'una forma seqüencial. Primer es presenta l'aplicació i després el concepte.
6. Alternativa "d'integració interdisciplinar": És semblant a l'anterior, de fet millora l'anterior doncs aquesta íntegre els dos aspectes mencionats i d'aquesta manera no es presenta la matemàtica com una disciplina separada de la situació. Hi ha una simultaneïtat.

Els principals obstacles, senyalats per Niss i Blum són:

i) El factor temps, hi ha un gran consum temporal per la realització d'aquest tipus de pràctiques.

ii) La introducció d'aquesta metodologia pot deixar en segon terme el sentit tradicional de la "puresa" de les matemàtiques.

iii) El desconcert dels alumnes. Amb els alumnes els hi pot semblar més senzill la pràctica rutinària, configurada d'un seguit de regles més o menys mecàniques.

Per tal de solventar aquests obstacles, l'alternativa vàlida és el paper dels ordinadors. Els ordinadors ofereixen la possibilitat de visualitzar i manipular gran quantitat d'elements matemàtics molt sofisticats que sense ells no estarien a l'abast dels alumnes. Això provoca que sigui viable la introducció de problemes reals capaços d'estimular l'interès dels alumnes i per tant de despertar un elevat grau de motivació. Dades reals obtingudes a partir de fenòmens reals són fàcilment manejables amb la presència dels ordinadors, fet que també justifica un canvi respecte la metodologia tradicional.

L'ordinador és per tant un nou element per integrar en el procés de modelització.
En aquest sentit comparteixo les tesis de Mason i Davis (1991), els ordinadors són excel·lents eines per el modelatge matemàtic. Càlculs bastants complexos poden ser avaluats ràpidament pels ordinadors. En aquesta línia Ponte (1992) afegeix que un conjunt d'eines que poden contribuir positivament en la construcció de models són: programes d'estadística, de gràfics de funcions, de fórmules de càlculs, de modelització i de manipulació simbòlica.
Prenent com a hipòtesi la realitat exposada i el context on ens belluguem, considero oportú explicitar diverses raons que complementen les anteriors, avalades per la pròpia experiència desenvolupada i ratificada pels comentaris dels estudiants, per incloure el modelatge en l'ensenyament.
1. Les aplicacions i el modelatge matemàtic constitueixen una forma de motivar els alumnes.
No és cap secret, que clàssicament i d'una manera força generalitzada, els alumnes han tingut una certa por a les matemàtiques. Sovint hem sentit converses entre familiars i companys dels estudiants -referint-se a com li van els estudis- que inclouen la pregunta: "*..Com vas de mates?*".
Sembla que les matemàtiques són com un fantasma que persegueix i neguiteja els estudiants. Davant d'això presentem el modelatge com una forma de motivar a través de les seves aplicacions.
2. Les aplicacions i el modelatge com un component cultural en la formació de l'estudiant.
Certes aplicacions de les matemàtiques, com per exemple la dinàmica o la cinemàtica, contribueixen i donen peu a parlar dels orígens històrics de la teoria que s'explica: des de "*la poma de Newton*" fins a la "*llei de Hooke*", hi ha tot un seguit de fets que suggereixen fer una breu exposició històrica que pot enriquir l'univers cultural de l'estudiant. Fins i tot podem extendre'ns a d'altres aspectes amens i de cultura general, com ara explicar anècdotes relacionades amb el món de les ciències. D'aquesta manera es potència una competència crítica per part dels estudiants en treballar en contextos extra-matemàtics.
3. El modelatge pot contribuir a evitar un aprenentatge incorrecte.
En l'ensenyament tradicional, i principalment en les escoles tècniques, hi ha el perill que l'aprenentatge tendeixi i s'esdevingui una memorització de fórmules que l'estudiant sovint no sap prou bé on s'apliquen, ni quina utilitat tenen. Aquest fet s'evita en les tècniques de modelització afavorint la comprensió de les tècniques usades.
La inclusió d'aplicacions de i models en el currículum d'un enginyer és important no només per afavorir la comprensió de les tècniques matemàtiques rutinàries, sinó també per acostumar a l'alumne a les dificultats dels problemes reals, a la possibilitat de diverses solucions i raonaments, a l'ús en general de tota una terminologia diferent.
4. Visió unitària de les matemàtiques.
Un altre aspecte de caire formatiu consisteix en que un mateix model apareix freqüentment en diverses situacions i que en un mateix model hi han involucrats diferents conceptes de diverses àrees de les matemàtiques (geometria, anàlisis, estadística,...), fet que contribueix a que els estudiants tinguin una visió unitària i integradora de les matemàtiques.
5. Les noves tecnologies.
Les noves tecnologies és un argument vàlid per introduir les tècniques de modelatge.
Actualment ja no es un argument vàlid ni el factor temps, ni el fet de que segons quina tipologia de problema es intractable analíticament i *per tant no està fora de lloc treballar en dades reals*. Anys enrera, el tractament d'alguns tipus de problemes reals

eren pràcticament intractables per qüestions temporals. Les noves tecnologies avalen la inclusió del modelatge en els currículums, els programes existents al mercat ens permeten treballar amb dades reals, ja que ens proporcionen eines que economitzen temps i mètodes numèrics que ens permeten analitzat i comparar la validesa d'un model.

2.4. L'ESTAT ACTUAL DEL MODELATGE MATEMÀTIC

2.4.1. Recull de diverses experiències

No es pot dir que el modelatge matemàtic i les seves aplicacions hagin permès de fer grans canvis en els plans d'estudis de les universitats. En qualsevol cas, a partir dels anys cinquanta (en part com a reacció a l'excessiu formalisme de les matemàtiques modernes, en part com a resultat del continu desenvolupament de les aplicacions de les matemàtiques en altres disciplines, especialment geografia, biologia i ciències econòmiques i socials) el modelatge matemàtic ha arribat a ser necessari i recomanable per estimular i revitalitzar l'ensenyament i l'aprenentatge de les matemàtiques a tots els nivells. La rellevància de l'ensenyament del modelatge matemàtic està sent emfatitzada per alguns educadors matemàtics d'anomenada en conferències i fòrums de tot el món.

No només M. Niss i L.Leris estan treballant amb modelització, hi ha d'altres professors d'altres indrets que també porten a terme aquest tipus de pràctiques. La presència de les tècniques de modelatge a l'ensenyament i els intents d'introduir aquestes tècniques comencen a tenir certa implantació a diversos nivells educatius.

Per situar l'estat actual és necessari que mencioni i expliqui alguna d'aquestes recents aportacions. De totes, en podem extreure un interès pedagògic i fins i tot mostrar la seva heterogeneïtat geogràfica. D'aquesta manera podem mostrar una focalització de l'estat actual del tema. Pel seu interès pedagògic he escollit experiències del Regne Unit, Grècia i Dinamarca; tot mostrant que d'aquesta manera queda constància que efectivament el modelatge és actualment un tema d'investigació pedagògica amb presència activa. També cal destacar l'interès pedagògic dels projectes *Matematica A* desenvolupat per el Dr. Jan de Lange i l'anomenat *projecte* MAT_{789} efectuat a Portugal i dirigit per el Dr. Paulo Abrantes

Començaré exposant l'estudi efectuat per H. Tanner i S. Jones (1994) recollit en l'article " *using peer and self assessment to develop modelling skills whit students aged 11 to 16: a socio-constructive view*". *Universitat de Swansea. Departament de l'Ensenyament. Hendrefoelan Swansea. País de Gal.les. Regne Unit*

El projecte d'ús i pràctica de les aplicacions de les matemàtiques va ser creat per la *Welsh Office* durant el 1991/92. El projecte estava pensat per desenvolupar els enfocaments i els materials per ensenyar i avaluar les habilitats mentals relacionades amb l'ús i l'aplicació de les matemàtiques a les situacions pràctiques de modelatge. L'esquema seguit va ser l'usual del procés de modelització (capítol 1), de manera que al finalitzar els treballs, els alumnes redactessin un informe explicitant les seves troballes arran de comparar els resultats trobats amb la situació real plantejada.

En la metodologia de treball, per desenvolupar el procés d'aprenentatge, H. Tanner i S. Jones són partidaris de que les activitats siguin "*obertes*", sense cap guia a seguir. Creuen que d'aquesta manera els alumnes poden plantejar els seus propis problemes a partir del món real per poder formular els seus propis models matemàtics. Consideren també que per tal de que els estudiants progressessin en els treballs de modelatge, se'ls havia de facilitar poca feina feta.

En l'aportació efectuada a l'eupvg, i en general a les escoles tècniques, considerem poc adequada la filosofia de H. Tanner i S. Jones, doncs la complexitat de les situacions i

problemes extra-matemàtics d'enginyeria suggereixen que les activitats siguin dirigides i amb informació addicional per tal d'assolir amb èxit els objectius plantejats.
En la metodologia d'investigació, els autors, enregistraven les respostes plasmades pels alumnes en vídeo i el fet de que els alumnes realitzessin un informe final, acurat i clar, es una part essencial en la metodologia d'investigació.
Aquests elements d'investigació, tal com expliquem en el capítol 3, els hem usat com instruments vàlids en l'experiència de l'eupvg.
H. Tanner i S. Jones, utilitzen els treballs de modelatge per tal de que els alumnes s'autoavaluint entre ells. Un dels aspectes més rellevants es que consideren que el modelatge es una eina profitosa per tal de que els alumnes avaluïn el seu propi treball.
Aquesta idea, que considerem vàlida, permet que els alumnes aprenguin a tenir una discussió científica ja que han de discutir i raonar entre ells; per aquest motiu també l'hem usada a l'eupvg com instrument per analitzar el procés d'aprenentatge.
Tot seguit detallem l'experiència desenvolupada pels grecs N. Klaoudatos i S.G.Papastavridis. " *assessing the effectiveness of teaching applications of matemhatics, in the greek high schools* "
La finalitat del treball efectuat per N. Klaoudatos i S. G. Papastavridis era avaluar l'eficàcia dels nous llibres grecs de matemàtiques de secundària, en els quals s'hi van introduir aplicacions segons l'enfocament "de les illes" -vegeu Blum i Niss (1989,1991)- . És a dir, els llibres estan organitzats en capítols de teoria matemàtica i entre aquests capítols s'inserten "illes aïllades" d'aplicacions que serveixen com a eina per motivar l'alumne i per millorar la seva actitud davant de les matemàtiques. L'essència era eliminar el formalisme teòric per donar pas a la connexió de les matemàtiques amb altres camps.
La metodologia seguida va ser realitzar exàmens on es combinaven problemes d'aplicacions amb exercicis tradicionals. La conclusió que van arribar és que les habilitats dels estudiants per usar els seus coneixements matemàtics en la resolució de problemes reals són limitades: "*...saber matemàtiques no vol dir saber-les usar...*". Aquesta conclusió coincideix amb la de Treilibs (1980) que afirma: "*...l'habilitat per el modelatge es diferent de l'habilitat per resoldre problemes matemàtics convencionals...*".
Tot seguit descriurem els treballs de Renuka Vithal, I. Christiansen i O. Skovsmose,
"*Project work in university mathematics education. A Danis experience: Aalborg University* "
L'experiència de Dinamarca ha servit de marc referencial en l'estudi desenvolupat a l'eupvg.
La universitat d'Aalborg, ubicada a Dinamarca, va ser una de les capdavanteres en realitzar treballs amb modelatge a nivell universitari, concretament en projectes. S'emmarca com una experiència inusual en l'ensenyament i en l'aprenentatge de les matemàtiques a la universitat. Els professors que varen dur a terme l'experiència van ser els educadors Ole Skovsmose, Iben Christiansen i Renuka Vithal.
En el context del treball desenvolupat a l'eupvg, comparteixo el neguit manifestat per Renuka Vithal que afirma: " *M'intrigava la idea de com les matemàtiques universitàries poden ser ensenyades en aquest context. Com a persona educada a través d'un ensenyament tradicional, vaig adquirir molt d'interès per intentar entendre el que per a mi era un enfocament radical* ".
En aquesta universitat, totes les assignatures es basen en projectes.
Les idees i fonaments que considerem més rellevants pel nostre estudi i que hem importat per desenvolupar l'experiència de treballs en projectes a l'eupvg han estat:
- Idea de centrar-se en un problema usual de l'entorn de l'enginyeria per usar-lo com a investigació.

- Aprofitar diferents disciplines de l'especialitat que puguin ser útils per al tractament d'un problema específic.
- Estudis de participació directa. Naturalment és absurd de creure que els estudiants sols poden construir matemàtiques, cal que el professor també hi participi.

És realment interessant i engrescador el treball de Dinamarca, doncs existeix un comú denominador amb l'experiència de l'eupvg. A nivell d'elecció de problemes coincidim amb una dificultat important: els criteris d'elecció, això es motivat a la gran complexitat de trobar situacions tècniques senzilles per modelar.

Hi ha una gran varietat de problemes, però en realitat, estan limitats ja que els estudiants no tenen prou coneixements tecnològics per fer-los tots. En els informes es demana als alumnes que incloguin un desenvolupament teòric per demostrar que dominen la teoria.

En l'aportació pròpia, coincidim fins i tot amb els comentaris dels estudiants -veure capítol 4-, per això considerem oportú integrar en la memòria alguns d'aquests comentaris efectuats pels estudiants de la Universitat d'Aalborg:

" *Es veu bé l'ús de les matemàtiques: són una eina. També pensem que algunes àrees són més difícils de connectar amb el món real que altres"*

Un alumne explica: " *El més important en aquests projectes és el procés que segueixes quan fas la feina -llegeixes, escrius i discuteixes-, i a més aprens dels teus errors.* ".

Es pot afirmar que en els projectes s'aprèn com aprendre matemàtiques.

Hi ha cursos on el projecte anul.la l'examen final.

Un altre estudiant diu: " *Les classes et guien a través de la jungla de la teoria i el treball en grups et permet treballar en profunditat* " . I un altre afegeix: " *Es triga més a aprendre matemàtiques a través dels projectes, però ja no oblides el que has après perquè no memoritzes sinó que ho treballes amb profunditat* ".

Alguns estudiants manifesten que els professors haurien de guiar més els alumnes, tot ajudant-los, afirmació coincident plenament amb l'experiència de l'eupvg..

El que podem dir, des d'un punt de vista constructivista, és que els estudiants construeixen coneixement quan estan fent un treball i que el treball en projectes es una eina eficient d'aprenentatge.

L'aportació de Jan de Lange:

De Lange (1993) fa una proposta de com introduir problemes i aplicacions reals en l'ensenyament de cada dia i ho anomena, tal com hem apuntat en el marc teòric, *l'ensenyament realístic de les matemàtiques*.

Jan de Lange (1993), arran de les seves experiències als països Baixos, proposa un canvi en l'ensenyament de les matemàtiques a nivell d'objectius, teories, continguts i avaluació.

Suggereix com objectius prioritaris que els estudiants arribin a ser ciutadans intel·ligents, preparar-se per l'educació i formació continuada, i entendre les matemàtiques com a disciplina.

Aquests objectius reflecteixen un gran canvi respecte a l'ensenyament tradicional de les matemàtiques. De la mateixa manera que canvien els objectius, també canvien les teories sobre l'ensenyament i aprenentatge de les matemàtiques.

De Lange distingeix entre la teoria del constructivisme social (teoria de l'aprenentatge en general) i la teoria de les matemàtiques reals (per aprendre i instruir-se només en matemàtiques). Defensa que un dels components clau de l'ensenyament de les matemàtiques reals és que els estudiants reconstrueixen o reinventen idees i conceptes matemàtics a través de problemes i situacions reals.

El contingut ha canviat i han aparegut nous temes per tractar. Alguns temes han entrat a formar part del currículum perquè la nova tecnologia ha obert noves possibilitats. Pel

que fa als ordinadors, han tingut fins ara uns efectes bastant limitats en l'ensenyament de les matemàtiques, però es preveu que en un futur en tindrà més implicacions.
A l'agost de 1985 s'introdueix als països baixos un nou programa per els darrers cursos d'ensenyament mitjà, l'anomenat Matemàtica A. Programa pensat per estudiants que s'orientin en els seus estudis posteriors a branques de ciències socials, economia i en general a ciències aplicades. Per desenvolupar el programa Matemàtica A es realitza prèviament el Projecte Hewet.
El projecte Hawet consistia en experiments per donar forma als continguts de l'assignatura Matemàtica A. Durant cinc anys es van fer experiments, inicialment en cinc escoles, després en dotze i finalment amb 52.
En relació als continguts de Matemàtica A, podem dir que l'assignatura està pensada per ser usada en àrees de psicologia, ciències socials i economia. La filosofia és l'ús de la matemàtica *com una eina*. La forma de presentar la matèria ha de motivar, aquesta motivació s'esdevé del fet de que el coneixement matemàtic ha de ser considerat per l'alumne com quelcom útil.
Matemàtica A està orientada al que De Lange (1987) anomena "*processos de transformació en termes matemàtics (matematització)*". Matemàtica A ho podem definir com una assignatura on el modelatge hi juga un paper rellevant. Dins la metodologia cognitiva es presenten als alumnes problemes que són present en el món real, els mateixos han de ser organitzats, treballats, visualitzats i estructurats. Aquesta idea s'ha agafat com a patró per configurar els anomenats *cursos introductoris* a l'Eupvg.
En matemàtica A es pren com a punt de partida una situació real, al matematitzar els alumnes desenvolupen conceptes matemàtics de manera interactiva. De Lange ho anomena "*matematització conceptual*". Una vegada extrets i formalitzats els conceptes, aquests poden ser aplicats un altre cop a d'altres situacions reals. Podríem dir que Matemàtica A s'emmarca, doncs, en l'anomenada "educació matemàtica realista".
Cal mencionar, degut al paral.lelisme amb l'experiència de l'eupvg, alguns aspectes negatius de l'experiència i que són comuns als efectes i connotacions de l'experiència de l'eupvg.

1. Els docents eren reacis a Matemàtica A, potser per por a la innovació i per tradició.
2. El disseny dels exercicis de situacions reals no tenien massa acceptació per part dels docents, doncs els exercicis eren diferents dels tradicionals que podem trobar en els llibres de text.

L'aportació de Paulo Abrantes:
Una de les aportacions que considerem més rellevants en el treball en grup es el projecte MAT_{789} , desenvolupat a Portugal.
En Paulo Abrantes inicia el març de 1988 el que anomena "Projecto MAT_{789}" on es desenvolupa un estudi del treball en grup en nivells acadèmics de setè, vuitè i novè curs d'escolaritat - un equivalent a primer cicle de secundària en el nostre país - i hi treballa fins al 1992. Un dels objectius era definir nous programes en els currículums escolars i al mateix temps introduir metodologies diferents d'aprenentatge: *el treball en projectes*.
Aquest treball està recollit en el text *Renovaçao do Currículo de Matemática*, editat per l'associació de professors de matemàtiques de Portugal (APM, 1988). Els objectius més grans d'aquest pla d'estudis eren:
1. Ajudar els estudiants a desenvolupar la seva comprensió de les activitats on prenen part les matemàtiques, tant històricament com actualment.
2. Contribuir a formar actituds positives a favor de les matemàtiques.
El pla d'estudis consistia a fer que l'estudiant realitzés la feina en grups establerts en una mateixa aula, i calia resoldre problemes, alguns proposats pels propis alumnes i d'altres

pel professor - Abrantes en la seva estada a la UAB (30-04-96), ho anomena negociació entre els alumnes i el professor- fins a arribar a un consens.
A pesar de considerar una extensa diversitat de situacions per a l'aprenentatge, les activitats de l'estudiant més freqüents, continua dient Abrantes, es podrien agrupar en tres tipus:
a) Seqüències temàtiques -preguntes, problemes i situacions sobre un assumpte o sobre assumptes anàlegs, normalment en forma de fulls de treball-.
b) Problemes sense resultats previsibles o situacions, per investigar i/o per fer-ne observacions.
c) Projectes.
Les relacions entre les matemàtiques i la realitat jugaven un paper molt important dins el pla d'estudis i eren el punt de partida o el centre d'atenció en la majoria d'activitats del tipus a) o b) i en tots els projectes.
Els treballs desenvolupats es poden consultar amb més detall en la tesi de Paulo Abrantes (1994).
Abrantes comenta (UAB, 30-04-96) que va ser una gran ocasió perquè els estudiants parlessin de matemàtiques a les seves llars i amb la família.
Es van incloure els projectes dins el pla d'estudis per donar als estudiants l'oportunitat d'experimentar l'ús de les matemàtiques, tractant situacions reals de la vida en contextos autèntics, més que no pas per desenvolupar habilitats especials. L'elecció va dependre de tres factors:
(a) Els projectes havien de contenir problemes genuïns o activitats que fossin interessants per als/les estudiants/es.
(b) Les matemàtiques que hi apareixien havien de ser solubles -és a dir, o bé conegudes o bé apreses pels/per les estudiants/es quan convingués-. Aquesta és una de les idees de què he partit per tal de configurar els projectes a l'EUPVG.
(c) Caldria que el professor prestés atenció tant als mètodes matemàtics usats com al context extramatemàtic.
Una característica comuna dels projectes va ser que tant l'ambient de treball com l'ús de tot el material disponible van ser lliures. La manera més freqüent en què els alumnes van organitzar les activitats va ser treballant en grups petits, tot i que també hi havia treball individual (informes, propostes) i treball col.lectiu de tota la classe (debats, exposicions).
Al final, hi va haver una presentació de la feina realitzada que va ser, segons el cas, un article escrit, una exposició oral, un pòster, una proposta o una maqueta. Aquest fet l'hem incorporat com a instrument d'investigació a l'eupvg.
En comparació amb altres pràctiques didàctiques, el treball amb projectes pot tenir algunes característiques que el fan únic. L'experiència del pla d'estudis *MAT789* (Abrantes, 1993) recalca que "*el treball amb projectes (a) és extens, (b) comporta una varietat d'activitats que contribueixen a crear una atmosfera no rutinària i deixen marge a l'extensa diversitat d'interessos i estils dels/de les estudiants/es, (c) permet que els/les alumnes treballin en un problema des del principi fins al final, (d) permet que els/les estudiants/es tinguin més iniciativa i autonomia i que creïn productes amb una dimensió diferent, i (e) en general fa més impacte fora de la classe. [...]* "
Destaquem l'experiència de Portugal perquè la considerem de vital importància, ja que es tracta d'un treball pioner en el tema i totalment innovador.
Com a corol·lari i per tenir una visió de l'estat actual del modelatge a nivell internacional, i per tal de mostrar el seu grau d'implantació, destaquem que a Internet apareixent 13004 documents referits a l'educació matemàtica a l'ensenyament (usant Altavista). L'entrada que considerem més rellevant es:

http://www.hull.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/guest.htm , on presenta una base de dades d'experts en modelització matemàtica. Això ens permet establir contactes amb d'altres col·legues per fer noves aportacions.

2.4.2. Síntesi de les diferents aportacions a la problemàtica de la tesi

En aquesta secció realitzem una breu comparació entre les diverses aportacions presentades en el marc teòric.

Els autors referenciats en el marc teòric, comparteixen plenament les principals inquietuds manifestades en la problemàtica de la tesi i que ha donat origen al present treball. Els principals arguments, aportats principalment per M. Niss, Rey Pastor, Puig Adam, De Lange, C. Keitel, K. Rutvhen, C. Alsina., L. Leris i que podem localitzar en les seccions anteriors són essencialment els següents:

1. Desconnexió en l'ensenyament de les matemàtiques en situacions reals
2. L'existència d'un elevat grau d'abstracció en l'educació matemàtica per usuaris
3. L'absència d'aplicacions

Aquestes inquietuds han provocat plantejar i introduir aportacions didàctiques noves, en particular la proposta del modelatge com a eina d'ensenyament.

A nivell teòric, existeix un ampli consens, entre tots els autors, en l'esquema de modelització presentat en el capítol 1 (figura1). Malgrat tot, però, hi ha una diferència rellevant en un context conceptual de l'esquema. De Lange emfatitza i prioritza el procés reflexiu mental del procés de modelització (matematització), quedant aquest aspecte en segon terme per M. Niss. Niss dóna prioritat al procés heurístic de la modelització. De l'anàlisi d'ambdós autors podem concloure que comparteixen les pautes apuntades per Goffre i Treffers d'activitats horitzontals (identificació,esquematització, descobriment, reconeixement i traducció de situacions) i verticals de la modelització (representació algebraica, us i integració de diversos models, formulació matemàtica i generalització).

Un dels aspectes que pot aportar el modelatge en l'educació matemàtica, es en la formació social dels ciutadans. Aquest aspecte ha estat estudiat bàsicament per O. Skovsmose i P. Valera. En la seva aportació, consideren que l'aplicació d'habilitats matemàtiques permet modelar situacions reals i matematitzarles per trobar solucions viables als problemes quotidians que s'enfronta el ciutadà. La formació matemàtica i la capacitat de modelatge s'associa amb la capacitat crítica del ciutadà per jutjar i prendre decisions, adquirir criteris pel desenvolupament tecnològic, econòmic i social (competència democràtica).

En diversos indrets s'han desenvolupat experiències de modelatge. Les principals aportacions estudiades, tal com hem detallat en la secció anterior, s'han materialitzat al Regne Unit (H. Tanner i S. Jones), Grècia (N. Klaoudatos i S. G. Papastavridis), Dinamarca (R. Vithal, I. Christiansen, O. Skovsmose), Portugal (P. Abrantes), Països Baixos (De Lange). D'entre elles hi ha trets diferencials i comuns. Bàsicament en totes les experiències han seguit l'esquema del procés de modelització presentat en el capítol 1 (figura 1). Així, en l'experiència del Regne Unit, destaca el fet de que les activitats de modelatge no són dirigides. Aquest fet, discutit i argumentat en la secció anterior, no és compartit pels altres indrets. El fet diferencial de Grècia consisteix en combinar exercicis tradicionals amb problemes "d'enunciat" de situacions reals. Als Països Baixos, De Lange orienta les pràctiques de modelatge a àrees de ciències socials, econòmiques i filosòfiques. A Dinamarca, el fet diferencial és, per una banda que totes les assignatures es basen en projectes, i per altra cantó que el col.lectiu d'estudiants es d'un nivell universitari. Aquest darrer aspecte, fa de l'experiència d'Aalborg un cas comparatiu realment interessant per l'analogia estudiantil amb l'eupvg. L'experiència

pionera i més completa es la realitzada per Paulo Abrantes a Portugal. Abrantes desenvolupa el procés d'ensenyament durant tres anys amb treballs en projectes i unitats didàctiques.
De totes les contribucions, hem importat elements per desenvolupar la metodologia a l'eupvg. Hem fet una selecció de les característiques mes adients a la realitat de l'eupvg i a la problemàtica en el context objecte d'estudi. Els principals elements importats i trets comuns que han caracteritzat la metodologia a l'eupvg els detallem tot seguit. De l'aportació de Paulo Abrantes hem importat la idea del treball en grup i l'ensenyament amb unitats didàctiques. Els objectius dels treballs d'Abrantes són també plantejats en l'aportació de De Lange i alhora assumits en l'experiència própia:

1. Ajudar als estudiants a desenvolupar la seva comprensió de les activitats on hi ha involucrades matemàtiques.
2. Contribuir a formar actituds positives a favor de les matemàtiques.
3. El coneixement matemàtic ha de ser considerat per l'alumne com quelcom útil
4. Els problemes han de ser adequats als interessos curriculars i professionals de l'alumne i resolubles

Aquests aspectes també són compartits en l'experiència realitzada a la Universitat d'Aalborg (Dinamarca) on destaca:

1. La idea de centrar-se amb un problema usual de l'entorn de l'enginyer
2. Involucrar diverses disciplines de l'especialitat per tractar el problema
3. El paper del professor com figura orientadora de les activitats

De les experiències explicitades, la d'Aalborg destaca la dificultat d'elecció dels problemes. Aquest paràmetre, comú a l'eupvg, l'atribuïm al fet de que es l'única experiència analitzada desenvolupada amb estudiants universitaris; fet rellevant i diferencial de les altres aportacions.
Voldríem afegir un fet comú amb l'experiència a l'eupvg, que De Lange destaca en la seva aportació i no es visible ni manifestada en les altres contribucions:

1. Els docents eren reacis a la metodologia, potser per por a la innovació
2. El disseny dels exercicis no tenien massa acceptació entre els altres docents, potser per per tradició.

Amb aquest petit resum comparatiu, podem visualitzar les característiques i analogies de les experiències estudiades. També ens permet i tenir una visió ràpida i global de les aportacions presentades en la memòria i les seva influència en l'estudi desenvolupat a l'eupvg.
Com aportacions més recents destaquen els treballs presentats a la "Conferencia Internacional sobre simbolisme i modelització en educació matemàtica", realitzada a Utrecht dels dies 17 al 19 de juny de 1998. En la mateixa es presenten noves orientacions i perspectives en la implementació del modelatge matemàtic a l'ensenyament. S'introdueix el concepte de "cultura virtual" basat en l'explotació de les noves tecnologies. Per la seva rellevància, hem considerat oportú explicar en la següent secció aquestes noves orientacions i d'aquesta manera oferir noves propostes de treball.

2.4.3. Noves perspectives a la problemàtica de la tesi.

Les tendències actuals aporten noves perspectives i orientacions a la problemàtica de la tesi. En aquesta secció explicarem les corrents i aportacions presentades en la "Conferencia internacional sobre simbolització i modelació en educació matemàtica", organitzades per l'institut Freudenthal i celebrades a Utrecht (17-19 de juny de 1.998). Concretament una nova visió del coneixement basada en l'anomenada "cultura virtual".
Històricament el coneixement humà s'estructura en quatre etapes: episòdica, mimètica, mítica i teorètica. La episòdica proveeix una base per la interacció social contribuint en

la capacitat de fer venir a la memòria esdeveniments i respostes adequades. La mimètica representa esdeveniments mentals, siguent la mítica l'encarregada de mostrar els esdeveniments i la seva intenció. La teorètica es basa en la representació escrita mitjançant símbols dels esdeveniments mentals, desenvolupa una comprensió narrativa basada en símbols escrits. Aquestes quatre etapes existeixen i conviuen en la nostre ment, ens hi movem i les fem servir en fluïdesa.

L'aportació actual consisteix en presentar una cinquena etapa del coneixement, l'anomenada "cultura virtual". La cultura virtual està caracteritzada per l'externalització dels processos simbòlics i llur representació. Els mitjans computacionals, com a eina per desenvolupar aquesta cultura, tenen diverses implicacions:

1. Proveeixen recursos gràcies als quals les accions sobre sistemes formals poden ser externalitzades. Aquest fet te connotacions culturals i socials, provoca canvis i noves orientacions en la naturalesa cognitiva. El treball més recent en aquest aspecte s'ha centrat en crear formes de denotació noves -geometria dinàmica- sobre la creació de fenòmens nous dins dels medis computacionals que permetin adquirir experiència i aprendre matemàtiques de manera més inductiva i expressiva.
2. Els mitjans computacionals són una eina de coneixement humà (exterioritzen i processen informació). Aquest fet comporta implicacions profundes pel coneixement en general i en particular per l'aprenentatge de les matemàtiques. En síntesi, els mitjans computacionals creen una cultura virtual basada en exterioritzar processos algorísmics.
3. Els mitjans computacionals en l'aprenentatge de les matemàtiques, possibiliten la capacitat d'ajudar als estudiants a veure la relació entre representacions diferents d'una mateixa situació matemàtica i permeten incidir més en les interpretacions que no pas en les manipulacions aritmètiques.

Aquests canvis suggereixen que l'educació en un context virtual hauria de lluitar per donar als estudiants fluïdesa en una varietat de sistemes de representació, habilitat a construir i explorar conjectures significatives, i per emfatitzar les matemàtiques com un mitjà fonamental de construir i analitzar el significat del món real.

Un dels canvis claus en l'educació matemàtica que s'esdevé de la cultura virtual, consisteix en un moviment allunyat de les tendències tradicionals. La pedagogia de les matemàtiques en una cultura virtual hauria de canviar, lògicament, en un sentit cap a la fluïdesa de representar situacions de problemes en una varietat de sistemes i en un sentit de promoure la capacitat dels estudiants de coordinar entre representacions, així com de crear-ne i interpretar-ne de noves.

Des de una perspectiva virtual, les matemàtiques no consisteixen a realitzar manipulacions formals, sinó a adaptar/arreglar el problema d'una manera que guii la tria del procés i llurs representacions, fent servir suports tecnològics per visualitzar la situació des d'una varietat de perspectives.

Una altra implicació de la cultura virtual per a l'educació matemàtica es que els mitjans computacionals possibiliten de pensar en l'educació de les matemàtiques d'una manera molt més inductiva i naturalista.

Aquests nous models dinàmics fan possible d'examinar situacions socials, físiques i biològiques entre d'altres. Aquests tipus de situacions són modelables completament de maneres noves tot fent servir entorns computacionals.

Les exploracions inductives amb sistemes de modelització manipulables possibilitaran als estudiants de fer connexions més vives, més convincents i més íntimes entre matemàtiques i allò que ells/elles experimenten com "el món real". Com a resposta en aquestes eines noves, aquestes aproximacions pedagògiques noves i aquestes àrees de contingut noves, ens pot caldre de reexaminar la idea "d'abstracció matemàtica".

Per a comprendre aquestes matemàtiques, ens caldran maneres de pensar en el coneixement matemàtic que inclouen un abast més ample d'estils de pensar i que són situades més fermament en les experiències del món real que pertanyen als aprenents de matemàtiques .
Només hem tocat, breument, la manera com una cultura virtual crea relacions noves entre l'experiència individual i social i formes culturals noves. No podem predir, amb certesa, la dinàmica d'evolució que esdevindrà en la cultura virtual, ni allò que les formes noves de representació poden fer sorgir. Sembla clar, tanmateix, que, en una cultura virtual, els estudiants tindran maneres noves de compartir experiències matemàtiques, representacions matemàtiques i, al capdavall, comprensió (o coneixement) matemàtica.

Capítol 3

Experiències concretes a l'EUPVG

3. EXPERIÈNCIES CONCRETES A L'EUPVG

" Siempre que enseñes, enseña a la vez a dudar lo que enseñas"
José Ortega y Gasset

Índex del capítol

En la primera secció s'explica quins han estat els mètodes per investigar: recollida de dades, anàlisi i classificació de les mateixes, organització dels resultats, aparells tecnològics utilitzats: registre en vídeo, cassette i fotografies; així com la postura que adopta l'investigador. Definim i presentem els instruments d'investigació i alhora exposem com els hem utilitzat. També s'inclou un seguit de recomanacions dirigides al professor/investigador per tal de que experimenti una autoavaluació per establir criteris de la metodologia i establir les hipòtesi adequades de treball.
En el següent punt es recorden els fonaments que han contribuït al desenvolupament de l'experiència de modelització a l'Eupvg i les característiques principals de l'escola, tant a nivell d'alumnat com dels estudis que ofereix.
Expliquem el perquè hem escollit la tipologia de problema i les dificultats trobades en l'el.laboració de les unitats didàctiques. De la mateixa manera queden definides explícitament les fases seguides en el procés de modelització i el domini de treball. Es descriu com s'han construït les diferents versions prèvies de la unitat per tal d'assolir una versió prou bona per experimentar-la a les aules. Inicialment s'explica com s'estructura el problema de ressorts per tal d'analitzar el procés d'aprenentatge en un domini concret -àlgebra d'enginyers- i el guió seguit per desenvolupar l'experiència.

Es presenta el cas d'un estudi avaluat en tot un curs complet (1995-96) , on s'han efectuat pràctiques de modelització tant a nivell de unitats didàctiques com de treball en projectes. Es pretén que un cop acabades les pràctiques els alumnes puguin reconèixer i resoldre models afins o similars als presentats en les unitats didàctiques i en els projectes.

L'objectiu és extreure'n conclusions en aspectes qualitatius del què són les matemàtiques, de l'aprenentatge de les matemàtiques i el seu ensenyament, de l'eficàcia del procés d'ensenyament-aprenentatge i dels seus efectes socials. Per això hem escollit una mostra de 5 alumnes de primer curs d'enginyeria per tal d'analitzar aquests aspectes. Els alumnes omplen un qüestionari amb l'objectiu de recollir la seva opinió en vers aquesta metodologia, aquest document és imprescindible per validar-la.

3.1. DISSENY DE LA METODOLOGIA DE INVESTIGACIÓ

3.1.1. Conceptes introductoris. Hipòtesi de treball

El que analitzem en la tesi és la resposta obtinguda del procés d'aprenentatge a través del modelatge, i que en les planes successives detallem.

En el següents punts expliquem, primerament, la metodologia d'investigació (disseny de l'experiment, recollida de dades, anàlisi de dades, exposició de resultats) i seguidament la metodologia d'ensenyament realitzada amb l'explicació i descripció de les experiències concretes:

1. Modelatge d'un sistema de ressorts.
2. El món de les equacions diferencials.
3. El treballs en grup: projectes.

Els conceptes i continguts matemàtics que hi apareixen a partir de les situacions plasmades en les activitats són a grans trets els següents:

1. En el sistema de masses lligades per ressorts:

- Construcció d'una matriu.
- Operacions de matrius: suma, producte, propietats: no commutativitat,...
- Construcció d'un sistema d'equacions lineals.
- Idea del determinant com a eina de treball per al tractament matricial i l'estudi de sistemes.
- Resolució d'un sistema.
- Matriu inversa.
- Aplicacions: Sistemes de ressorts, problemes de xarxes de circulació vial, situacions econòmiques, problemes geomètrics (girs).

2. En la unitat d'equacions diferencials:

- Camps de pendents.
- Idea gràfica de la solució d'una equació diferencial de primer ordre.
- Tipus d'equacions diferencials de primer ordre: variables separables i lineals.
- Solució analítica.
- Equacions diferencials de segon ordre a coeficients constants.
- Aplicacions: Caiguda d'un cos, creixement d'una població, estudi de circuits elèctrics.

Finalment l'objectiu dels projectes és mostrar que els problemes i les situacions plantejades es poden modelitzar per mitjà de models lineals (apareix la diagonalització com a eina bàsica per tal d'assolir amb èxit el projecte). Els principals continguts matemàtics que hi apareixen són:

- Càlcul de valors i vectors propis.
- Diagonalització.
- Potència enèsima d'una matriu.
- Matriu exponencial.
- Resolució d'un sistema d'equacions diferencials.
- Aplicacions diverses: Estudi de la successió de Fibonacci, creixement d'una població de conills, anàlisi del comportament d'un circuit elèctric.

En els annexos, podem trobar documentació de totes les unitats didàctiques experimentades i dels projectes, així com documents gràfics i sonors: àudio, fotos i vídeos que recullen el desenvolupament de les pràctiques efectuades i els comentaris dels estudiants.

3.1.2. Fonaments dels instruments de la investigació

La finalitat del mètode es establir uns mecanismes que ens permetin demostrar la validesa de les tècniques del modelatge com a eina d'ensenyament de les matemàtiques en el marc dels estudis tècnics i les possibilitats i limitacions de la implantació d'aquests mètodes al sí de les escoles tècniques.

La investigació es fonamenta bàsicament en dissenyar, implementar i avaluar tècniques que ens permetin recollir i formular, en una primera etapa, conjectures per la posterior validació sobre el procés d'aprenentatge.

En aquesta secció resumim els fonaments teòrics dels instruments que caracteritzen la metodologia que hem seguit en el disseny de la investigació.

L'objectiu immediat és l'elaboració d'instruments i la determinació de criteris que permetin donar resposta als reptes plantejats pels canvis curriculars i innovadors. De fet volem esbrinar com actuen i responen els estudiants a partir d'una nova metodologia innovadora. Per establir la validesa i fiavilitat dels resultats calen uns instruments adients que serveixin d'indicador del professor/investigador per establir resultats vàlids.

Els punts de referència i la metodologia de treball han sigut principalment les propostes exposades en el marc teòric (capítol 2) i les experiències recents plasmades en els treballs de M. Niss (1991 i 1993) on presenta els fonaments teòrics del procés de modelització, Paulo Abrantes (1993 i 1994) on aporta la proposta del treballs en grup i la realització de projectes, L.Leris (1992 i 1993) com a experiències de modelització properes geogràficament -ralitzades a Zaragoza-, Jan De Lange (1993) amb la seva contribució sobre matemàtica-realitat efectuada a l'assignatura de Matemàtica A, Puig Adam (1958 i 1979) que presenta propostes realment innovadores d'aplicabilitat de les matemàtiques en els currículums d'ensenyament i que no han sigut desenvolupades en el sentit de que la seva proposta parteix d'incloure exemples tècnics per introduir els temes de matemàtiques. I en particular el repàs de les experiències efectuades en diversos indrets exposades en el capítol 2.

Els objectius de la investigació són bàsicament dissenyar un currículum innovador, implementar-lo i avaluar el procés d'aprenentatge, estudiar els esquemes conceptuals dels alumnes i els procediments i habilitats que usen en determinats moments d'aquest procés. Per aconseguir això es necessari quantificar i classificar els coneixements inicials - i fer-ne un seguiment - i finals dels estudiants per tal de poder comparar el grau d'aprenentatge. Aquesta component ens dona informació de les estructures cognitives dels alumnes relatives a determinats conceptes.

Des de l'inici de la investigació es precís començar a seleccionar els aspectes més rellevants i a formular conjectures que van adquirint cos fins que finalment poden ser validades i establir conclusions.

D'entre els autors mencionats i les experiències estudiades (capítol 2) durant la planificació del treball, hem detectat un ampli consens en les etapes de la metodologia de recerca. Aquestes etapes les hem estructurat en quatre fases:

1. Disseny de l'experiment.
2. Recollida de dades.
3. Anàlisi de dades.
4. Exposició de resultats.

A la realitat i context de l'EUPVG, el disseny de l'experiència s'ha fonamentat en la creació de unitats didàctiques i el treball en projectes, tot seleccionant problemes adequats als continguts -que relacionin matemàtica i realitat- i als coneixements previs dels alumnes, de manera que cada pregunta ha de servir per obtenir informació sobre el procés d'aprenentatge. Aquesta manera de treballar ja marca una diferència amb els principis pedagògics tradicionals.

L'estratègia per investigar es basa en la recollida de dades. La mateixa s'ha efectuat mitjançant entrevistes enregistrades en àudio, vídeo i qüestionaris passats als alumnes. La recollida de dades en suport vídeo i àudio permeten poder analitzar amb detall l'execució de les pràctiques i detectar d'aquesta manera els aspectes més rellevants del seu desenvolupament. Això s'ha fet d'aquesta manera doncs ens permet tenir constància en qualsevol moment del què han fet i del que diuen els estudiants. D'aquesta manera podem analitzar amb més detall l'execució de les pràctiques i destacar els aspectes més rellevants. Aquests instruments considero que són vàlids doncs reflecteixen, en diverses situacions i suports, la realitat de l'experiència efectuada i per tant podem usar-los i consultar-los en qualsevol moment per tal d'analitzar-los i estudiar-los, i d'aquesta manera d'extreure'n conclusions i resultats.
El fet de recopilar elements visuals (vídeo) i àudio, conjuntament amb les afirmacions i comentaris plasmats en els documents escrits dels estudiants, ens permet extreure'n reflexions que són objecte d'estudi de la tesi: epistemològiques (el sentit de les matemàtiques i l'impacte social), cognitives (binomi ensenyament/aprenentatge) i de tipus heurístic (metodologia constructiva del procés ensenyament/aprenentatge).

3.1.3. Disseny de l'experiment
En aquest apartat presentem les eines que hem utilitzat per dur a terme la investigació. Els anomenem instruments de recerca. Hem considerat els següents instruments com elements per desenvolupar la metodologia d'investigació: disseny de unitats didàctiques, registre i selecció d'una mostra d'estudiants, implementació i desenvolupament de projectes, full d'avaluació de companys, autoinstrospecció del professor, fitxa personal de l'alumne, diari de sessions, diari del professor, qüestionaris, vídeo, àudio, enquesta oficial de la UPC, examen i avaluació. Seguidament explicarem les característiques dels mateixos.

Instrument de recerca nº1: Disseny de les unitats didàctiques
L'objectiu es que els alumnes construeixin models com a mostra d'aprenentatge de descobriment dirigit. Abans de realitzar les unitats didàctiques cal fer un guió de treball on es plasmi la temporalització de la pràctica.
Per realitzar les unitats didàctiques, parteixo de l'experiència i els coneixements de coneguts matemàtics i pedagogs, com ara Mogen Niss (1989), Paulo Abrantes (1993) i d'altres, els quals investiguen per millorar l'ensenyament de les matemàtiques. De les idees que he pogut extreure, he triat les que he considerat més adients i les he materialitzades primer a nivell teòric, amb la creació de les unitats, i després a nivell pràctic, mitjançant l'experimentació de les mateixes unitats amb alumnes de 1r curs d'enginyeria tècnica.
Els objectius pedagògics queden plasmats en els següents punts:
1. Presentar una situació física senzilla. A partir de diverses activitats suggerides a l'alumne es pretén que, amb un mínim de coneixements de secundària, aconsegueixin construir el model matemàtic de la situació plantejada i aprenguin conceptes matemàtics que els siguin útils.
2. En una segona fase l'objectiu és que resolguin el problema en termes matemàtics i que tot seguit interpretin el resultat en termes tècnics.
Aquestes unitats didàctiques es presenten de forma que tractin temes d'actualitat, que siguin atractives i suggeridores per a l'alumne, per tal que pugui arribar a resoldre-les d'una manera amena, i alhora que l'estudiant es motivi per a l'aprenentatge de nous conceptes matemàtics que ell mateix anirà construint.

Les unitats didàctiques que es proposen són un exemple d'aquest modelatge, i tenen la peculiaritat que van adreçades al primer curs d'enginyeria tècnica. En el treball esbrinarem la viabilitat de l'ensenyament en el cas de Vilanova d'aquest tipus de "praxis".

Aquestes unitats es proposen inicialment com a ensenyament complementari. Més endavant exposarem les dificultats trobades en l'elecció de problemes i situacions representatives i adients; no és senzill cercar la correlació entre *el que saben els estudiant i els objectius previstos*. Inicialment els alumnes tenen uns coneixements diferents, com he apuntat anteriorment això es deu a l'heterogeneïtat dels estudiants.

Aleshores, en un primer moment, se'l dirigeix cap a una activitat o una altra en funció dels coneixements previs que té l'estudiant. D'aquesta manera qui posseeix pocs coneixements, té l'oportunitat d'adquirir-ne de nous i de continuar les successives activitats. En contrapartida, qui disposa d'un ventall més ampli de coneixements, pot passar a d'altres activitats de manera que no l'avorrim amb conceptes ja coneguts.

Finalment, però, tots arriben, sigui per un camí o un altre, al final de l'activitat. Aquest fet ens permet de detectar l'estat inicial de l'estudiant, el procés d'aprenentatge intermig i el final. Tanmateix, al final de cada unitat s'inclou un seguit de preguntes on es demana a l'alumne que contesti *Qué ha après i quines dificultats ha trobat*. D'aquesta manera podem localitzar millor les deficiències en el procés d'aprenentatge i corregir i millorar les unitats per tal que el procés d'ensenyament sigui més lúcid. Cal indicar que les unitats didàctiques es realitzen en hores de classe i dins les aules, on les explicacions del professor són purament complementàries i en les exposicions a classe, el professor es permet d'explicar conceptes nous tot relacionant-los amb la unitat.

Una manera d'avaluar els coneixements que ha adquirit l'alumne és suggerir una situació anàloga a l'estudiada (que pot ser al final de l'activitat com a complement o bé en forma d'examen), i valorar si han entès la utilitat dels conceptes matemàtics que els han estat ensenyats de manera que puguin interpretar situacions diferents que tinguin el mateix model. Per exemple: si en la unitat didàctica treballen en l'estudi d'un sistema de masses lligades per ressorts, on el model és un sistema d'equacions lineals, es poden valorar diversos aspectes:

1. Si canviem l'estructura de molles, saben observar si el model també és un sistema?
2. Esbrinar si han après a resoldre el sistema.
3. Proposar un sistema elèctric, i estimar si s'adonen que el model també és un sistema d'equacions lineals.
4. Esbrinar si a partir d'un sistema d'equacions lineals poden interpretar la seva correspondència amb una situació tècnica.

En aquestes sessions realitzades a l'aula, es oportú convidar un recent titulat i un enginyer tècnic, per tal de comparar les metodologies usades en temps cronològics diferents i recollir les opinions tant docents com professionals dels observadors. Aquest fet ens proporciona un nou element d'estudi comparatiu entre la metodologia que ells van experimentar i la proposada.

Abans no hem donat per vàlida una unitat didàctica, prèviament ha estat experimentada per alumnes que s'han prestat voluntàriament. Aquestes versions prèvies han servit per configurar una unitat *mestre* que millora les deficiències de les anteriors. De la unitat del sistema de ressorts es van efectuar sis versions.

Les respostes obtingudes han servit per modificar les unitats didàctiques amb l'objectiu d'aconseguir un grau millor d'aprenentatge. Totes les activitats realitzades han sigut supervisades prèviament per d'altres companys, en particular per el Dr.Rafael Pérez Gómez (Universitat de Granada), la Dra.Lola Lerís (Universitat de Zaragoza) i el Dr. Claudi Alsina (Universitat Politècnica de Catalunya). Això es va produir per tal

d'establir la validesa dels continguts (veure annex 1) i ho anomenem "*validació per jutges*".
La informació extreta de les unitats didàctiques també ens proporciona informació de tipus cognitiu, heurístic i fins i tot epistemològic. En efecte, doncs en la graella inclosa al final de les unitats es demana que expliquin conceptes apresos i els seu significat (això ens permet mesurar el grau de coneixement adquirit) i també es demana un llistat de dificultats amb l'objectiu de canviar i/o ratificar l'estructura de les activitats plasmades en les unitats, aquest fet proporciona informació a l'investigador de si està aplicant correctament la metodologia del modelatge i -amb l'ajut dels elements cognitius anteriors- si aquesta metodologia realment es vàlida per l'aprenentatge. El sentit i l'esperit utilitarista dels problemes proposats en les unitats poden suggerir en alguns casos comentaris per part dels estudiants d'aspectes epistemològics, i també suggerir a nivell d'estructura mental el concepte del què són les matemàtiques, ja què ells no tenien fins ara el costum de rebre un ensenyament des d'aquesta òptica.

Instrument de recerca nº 2: Registre i selecció d'una mostra d'alumnes
El problema de la selecció d'estudiants sorgeix a conseqüència de la procedència heterogènia dels estudiants (FP,COU,MP,repetidors,reforma). El criteri de selecció va ser, en primer lloc, efectuar una classificació per grups en funció de la procedència, i en la mostra estudiada escollir alumnes de cada grup per garantir més representativitat. Un cop establerts els grups, s'escollien aleatòriament dins de cada grup un nº d'estudiants de manera que el total de la mostra respectés la proporcionalitat de les procedències. El criteri establert ens permet comparar el procés d'aprenentatge en funció dels coneixements curriculars previs. Formalment ho podem resumir amb la igualtat:
(procedents de cou/ nº d'estudiants totals) = (nº d'estudiants escollits de cou/ nº total de la mostra), anàlogament per les altres procedències.
En el cas de l'eupvg, l'experiència es va realitzar en dos cursos. Amb el que vàrem realitzar més àmpliament experiències de modelatge (1995-96) constava de 55 estudiants, i van ser estudiats en profunditat 5 estudiants. De totes maneres, i com que les pràctiques les van efectuar tota la classe, també hem enregistrat comentaris d'altres estudiants que hem considerat d'interès per l'objectiu de la investigació.
Seguidament, obrim una carpeta personal de cada estudiant on s'arxiven els treballs realitzats, els comentaris del professor i tot el material relacionat amb l'alumne/a. En particular la procedència, la procedència ens proporciona informació del currículum previ del estudiant. Aquesta carpeta conté una fitxa personal de l'estudiant (veure capítol 4), en la mateixa podem trobar la situació inicial de progrés, desenvolupament i final de l'aprenentatge, on l'investigador complimentarà amb un resum d'aportacions significatives per tal de validar la viabilitat del modelatge com eina d'ensenyament/aprenentatge, extreure'n conclusions dels coneixements adquirits (cognitives), habilitats presentades en la construcció de models (heurístiques) i de la relació matemàtica-realitat en el marc dels estudis tècnics i fer un seguiment de l'alumne/a i el seu procés d'aprenentatge, així com de la visió que ells tenen de l'aprenentatge des d'un punt de vista menys abstracte i més utilitarista.
Aquesta fitxa dóna una visió ràpida i global de la situació d'aprenentatge de l'estudiant.

Instrument de recerca nº 3: Implementació i desenvolupament de projectes
L'objectiu dels projectes es esbrinar si són capaços de desenvolupar un problema real a partir de la informació facilitada pel professor i construir una teoria que expliqui el fenomen estudiat.

Així com les unitats didàctiques són seqüencials, el projecte es fonamenta en una idea global amb una forta component de recerca en el qual els estudiants han de desenvolupar habilitats globals (cercar ells la informació, desenvolupar i analitzar models) per resoldre un problema.
El projecte es defensat a classe i es avaluat pels companys. Els projectes eren designats i concertats (a grups de 3-4 persones) en una entrevista prèvia al despatx del professor.
A diferència de les unitats didàctiques, els treballs en projectes no són elaborats a classe.
A més, hi ha un component pedagògic diferent de l'anterior, un component de recerca: l'estudiant ha de recollir informació per tal de desenvolupar les activitats que li són proposades, d'aquesta manera es pretén que l'alumne prengui contacte amb el món extra acadèmic i s'espavili per recollir informació en el context real -fet usual de tot professional que acaba l'enginyeria-.
El treball en projectes és un complement a les unitats didàctiques. La idea de projecte va estretament lligada al procés de modelització. El punt de partida és la presentació d'una situació no matemàtica, extreta del món de la ciència o de la tècnica, susceptible de ser formulada en termes matemàtics. Els estudiants tenen un problema a les mans que han de modelar i resoldre. L'única informació de què disposen és una bibliografia i el context on s'ha desenvolupat la situació presentada. Tot seguit s'inicia un procés de recerca per part dels estudiants que, molt sovint, necessitaran l'ajut del professor. Els projectes poden realitzar-se individualment o en grup.
Seguin experiències d'altres llocs com ara Grècia (N. Klaoudatos, 1995) , Dinamarca (Renuka Vithal, Iben Christiansen, Ole Skovsmose, 1995), Portugal (Abrantes. 1993)... per complementar el procés d'aprenentatge, s'han inclòs treballs en projectes.
Els objectius principals de la realització d'un projecte els podem resumir en els següents punts:
a) Els alumnes han de ser capaços de relacionar els coneixements matemàtics i les habilitats adquirides amb les situacions presentades, i d'aquesta manera saber usar la matemàtica per a fins pràctics. És a dir, han de ser capaços d'apreciar el paper de la matemàtica en situacions complicades, com un mitjà per resoldre els problemes que se li plantegen.
b) Els alumnes han d'estar preparats per utilitzar més endavant, en la vida diària, elements matemàtics com ara taules, manuals, gràfics, revistes tècniques, software, etc. En aquest sentit, el treball en projectes juga un paper molt important.
c) Els alumnes han d'estar preparats per utilitzar com a eines temes i idees matemàtiques noves, en un sentit que l'escola no els va ensenyar de manera explícita i sistemàtica.
Ratifico que la metodologia adequada i estructura del treball en projectes, parteix de la filosofia que sintetitzo en les següents fases:

1. Presentació als alumnes de situacions tècniques properes a la vida professional.
2. Anàlisi de la situació per part dels alumnes individualment o en grup.
3. Decisió de la informació a recopilar per tal de modelar el problema.
4. Recopilació i anàlisi de la informació.
5. Desenvolupament del procés teòric de modelització del problema.
6. Resolució del model trobat i interpretació dels resultats.

Fem un projecte davant d'una situació per a la qual l'estudiant no disposa d'un procediment immediat que el porti a la solució. D'aquesta manera l'alumne s'enfronta a una situació propera a la realitat, ha de definir una estratègia, construir-la i aconseguir resultats.
La idea de projecte sorgeix a inicis de segle amb els suggeriments de John Dewey (1938) que afirma "*que s'aprèn fent*". L'alumne és el protagonista, esdevé actor del seu

propi aprenentatge, amb l'objectiu que a través del seu desenvolupament en aquest tipus d'activitats assoleixi un grau de resultats significatius per al seu aprenentatge. Podríem dir que el treball en projectes és *la tecnologia que permet d'abordar problemes realistes i ajuda a produir respostes també realistes a noves situacions*.

En una entrevista realitzada a P. Abrantes a Barcelona (1994) per J. Giménez (URV) i publicada a la revista 3i4iX6 (nº 6) afegeix referint-se a J. Dewey:

"*...A més d'això, la intenció de les reformes educatives del nostre temps és voler destacar el paper actiu dels alumnes, llur implicació afectiva, amb una forta relació entre motivació i aprenentatge, un lligam entre l'escola i el medi social, aspectes que fan les idees de Dewey més realitzables que fa uns anys....*".

De fet, no es tracta de substituir el sistema actual d'ensenyament, sinó d'afegir-hi les tècniques de modelatge com a forma innovadora i alternativa per millorar la qualitat global de l'assignatura.

El primer article sobre el treball en projectes data del setembre de 1918, està publicat a la revista "*Teachers college record*" vol XIX, nº 4. i porta per títol "*The project method*". L'article va signat per un deixeble de Dewey, en W. H. Kilpatrick.

El contingut de l'article se centre en un seguit de consideracions sobre la diversitat de definicions del concepte projecte. Se n'extreuen els principals elements que poden caracteritzar un projecte:

1. Intencionalitat:

Si es fa un projecte és amb un objectiu, una intenció. Es pot fer en grup i fins i tot individualment.

2. Autonomia i responsabilitat:

Els alumnes han de tenir una llibertat de treball dins unes limitacions, limitacions plasmades en el sentit de tenir assistència del professor. Els alumnes han de ser responsables del que fan.

3. Autenticitat:

El treball s'ha de basar en fets autèntics, pròxims a la realitat.

4. Complexitat i resolució de problemes:

Per entendre'ns, no farem un projecte per resoldre una equació de primer grau, cal un mínim de contingut que porti a terme l'estudi de problemes més complexos.

5. Caràcter prolongat i estructurat en fases:

Cal tenir cura de la durada i de l'estructura de les fases.

Algunes referències més recents sobre el treball en projectes i el modelatge, i per tal de justificar la necessitat d'una metodologia innovadora en els currículums escolars, les podem trobar en diverses cites que tot seguit detallem:

Mogen Niss (1989): " *La principal finalitat de l'educació matemàtica és ajudar els alumnes a tornar-se individus competents i independents (...) i no víctimes de la relació de la matemàtica amb la societat...*"

Abrantes (Tesis doctoral, 1994) considera que cal tenir en compte unes questions de tipus pedagògic en la realització de projectes, i suggereix els següents punts:

1. Rellevància:

Quan es decideix un projecte, cal que el problema tingui una certa categoria (és a dir que no sigui ni mediocre ni trivial). Abrantes ens remet a una cita de C. Ormell (1992) on diu "*...el tema d'un projecte ha de ser quelcom que agradi als alumnes i que puguin comentar amb els companys i amics...*"

2. Practicable:

Que sigui possible de fer, per això el professor ha de dirigir tot donant idees i indicacions.

3. Negociació pedagògica i apropiació:

Si els alumnes decideixen el tema, cal negociar-lo amb el professor per tal d'estudiar la seva viabilitat, tant en dificultat com en continguts. Un cop s'ha arribat a un acord cal que els estudiant se'l facin seu. Els alumnes han de tenir il·lusió i voluntat que l'objectiu final sigui una realitat.
Aquestes recomanacions han tingut consideració en el treball efectuat a l'eupvg, concretament en els cursos on impartim docència: anàlisi vectorial i de Fourier, àlgebra i anàlisi matemàtic.
Com un exemple significatiu del treball en projectes, i com a precedent innovador en aquest tipus de pràctiques he considerat oportú d'incloure dins dels antecedents del tema de treballs en projectes, un estudi fet a Lisboa, doncs considero que és un precedent prou important que pot il·lustrar les experiències del treball en grup: El projecte $MAT_{789.}$ (capítol 2).

Justificació del treball en projectes:
Entendrem la realització d'un projecte com una forma d'aprenentatge basat en l'experiència i capaç de conviure amb d'altres formes tradicionals d'aprenentatge.
Aparentment sembla incompatible combinar projectes amb la docència clàssica.
La realització d'un projecte ocupa un lloc especial en l'educació superior, senzillament perquè és capaç d'arribar fins a aquelles parts del coneixement que els mètodes tradicionals no poden assolir i en els quals es troben involucrades altres àrees del coneixement. En les experiències efectuades a l'EUPVG, veurem que això s'aconsegueix cedint als estudiants la responsabilitat de realitzar una elecció, de prendre iniciatives i decisions respecte al que aprenen.
Considerem que les directrius i condicions que caracteritzen un projecte són:
1. Tenir un producte final.
2. Representar un descobriment per als estudiants (component de recerca).
3. Incloure la integració i presentació de les habilitats i els coneixements.
4. Incloure una situació que valgui la pena de resoldre per als objectius professionals.
5. Instruir l'estudiant en habilitats necessàries de cara a la professió.
6. Aconseguir una interacció amb els altres companys de grup.
7. Aprendre a presentar un conjunt complex de resultats de recerca (redacció d'un informe).

Els projectes es justifiquen perquè ajuden a assolir els següents punts:
1. L'adquisició de conceptes.
En els projectes hi ha gran quantitat de conceptes matemàtics i extramatemàtics involucrats, descobrint d'aquesta manera nous conceptes.
2. Un aprenentatge actiu.
És un tipus d'aprenentatge que representa una barreja de pensament i d'acció.
3. Desenvolupament d'habilitats.
En moltes àrees, el procés és més important que els continguts. En diverses situacions laborals el fet que provoca que es contracti un tècnic, sovint té més a veure amb les seves habilitats que no pas amb el seu coneixement de la matèria.
4. Treball en grup.
Gran part de l'ensenyament tradicional és individualista i competitiu. La major part de la societat i el comerç confia en la cooperació. Considero que l'aprenentatge en grup també és eficaç.
5. Assumir responsabilitats.
La realització d'un projecte permet de negociar les fites i augmenta el compromís personal.

Entendrem per projecte una activitat d'aprenentatge per la qual l'estudiant adquireix i aplica coneixements i habilitats per solucionar un problema autèntic o simulat que té relació amb el món quotidià. El projecte s'estableix com un vehicle per ensenyar habilitats tècniques i coneixements.
Aquest fet comporta afegir nous arguments per tal de justificar el treball en grup, fonamentats en els següents objectius:
- Maximitzar l'aprenentatge dels membres que configuren el grup.
- Proporcionar als membres del grup l'estímul, la possibilitat i l'oportunitat d'aprendre.
-Aprendre què representa el treball en equip mitjançant l'experiència conscient de desenvolupar aquest tipus de treball.

Introduir mètodes d'aprenentatge basats en el treball en projectes no ha sigut una tasca senzilla. En especial, quan els alumnes estan acostumats a mètodes tradicionals centrats en el professor i orientats cap als continguts, és probable que els estudiants requereixin algun temps per tal d'adaptar-se al nou model d'aprenentatge.
Les principals dificultats han estat, inicialment, jutjar quant de temps poden durar les pràctiques, la formació dels grups per a la reflexió i debats posteriors. També he notat la poca predisposició d'alguns alumnes, en el sentit que són més conservadors que el professor. És a dir: alguns són reticents a nous mètodes, car això comporta més implicació activa, més compromís i més responsabilitats.
Amb els projectes s'els hi lliure als estudiants un guió que els estudiants han de seguir, el format es com segueix:

0. Portada: títol i nom dels estudiants.
1. Índex.
2. Explicació detallada de la situació i els models.
3. Resolució del problema.
4. Mètodes matemàtics: llistat de conceptes usats.
5. Conclusions: ha d'incloure el resum dels descobriments fets i els comentaris sobre les limitacions.

En cada projecte, s'inclou una graella d'avaluació que omple el professor i que serveix per obtenir informació del procés d'aprenentatge dels estudiants. El format es com segueix:

CRITERIS I GRAELLA D'AVALUACIÓ

	molt baix	baix	mitjà	alt
A. DISSENY GLOBAL	☐	☐	☐	☐
1. Recerca d'informació				
2. Extensió i aprofundiment	☐	☐	☐	☐
B. CONTINGUT MATEMÀTIC				
3. Formulació matemàtica	☐	☐	☐	☐
4. Rigor del llenguatge	☐	☐	☐	☐
5. Habilitat en la resolució	☐	☐	☐	☐
6. Correcció en els resultats	☐	☐	☐	☐
C. CLAREDAT				
7. Explicacions clares i precises	☐	☐	☐	☐
8. Estructura, organització i presentació	☐	☐	☐	☐
D.ACTITUD MATEMÀTICA				
9. Esperit de recerca	☐	☐	☐	☐

10. Matematització de situacions ☐ ☐ ☐ ☐

E.ALTRES
11. Conclusions i comentaris ☐ ☐ ☐ ☐

PUNTUACIÓ FINAL ☐

El primer punt ens facilita informació en aspectes de comprensió i interpretació de la situació, el segon criteri serveix per avaluar les habilitats matemàtiques i els instruments de càlcul utilitzats, en el tercer punt recollim informació sobre la capacitat de síntesi de l'estudiant en l'elaboració d'informes. Seguidament s'avalua la capacitat d'investigació de l'estudiant i la relació matemàtica-realitat plasmada en el projecte. Finalment avaluem les aportacions generals fetes per els estudiants.
Els projectes poden ser proposats pels propis alumnes, discutits i pactats amb el professor. Fins i tot poden ser vàlids per avaluar l'assignatura. El pes del projecte va ser d'un 40% de la nota final de l'assignatura.
En cursos recents, que no han estat objecte d'estudi en la present memòria doncs s'estan desenvolupant en aquest moments, el projecte es l'examen (entenen per examen l'avaluació final).

Instrument de recerca nº 4: Full d'avaluació dels companys
En l'exposició pública i defensa de projectes els companys qualifiquen (de 1 a 5) als ponents sobre els temes:
1. Presentació del material imprès.
2. Expressió.
3. Mitjans utilitzats.
4. Contingut.
5. Engrescament.
6. Aplicabilitat.
7. Has après?.

Instrument de recerca nº 5: Autointrospecció del professor
Per tal d'establir criteris per desenvolupar una bona investigació en la terna de components: recerca, innovació i millora de la qualitat docent; proposem que el professor/investigador estableixi el grau de compliment dels aspectes enumerats en els següents ítems per tal d'autoavaluar la capacitat innovadora. Cal enumerar la importància de 1 a 5, entenen per 1 que es considera molt poc important i per 5 molt rellevant. Aquest quadre el podem visualitzar en la taula 1.

ASPECTES		1	2	3	4	5
1. Estadi de treball						
	Context					
	Impacte social de l'alumne					
	Currículum: influència					
2. Actitud professor						
	Irrenunciabilitat a l'ensenyament tradicional					
	Disponibilitat					
	Orientacions					
	Protagonisme d'expert					
3. Elecció dels problemes						
	D'enunciat matemàtic					
	D'enunciat tècnic					
4. Diàleg						

	Parlar amb d'altres professors d'altres àrees de coneixement					
	Influència del treball en equip					
	Debat amb els estudiants					
5. Desenvolupament de les classes						
	Treball amb unitats didàctiques					
	Relacionar les exposicions tradicionals amb situacions reals					
	Ús de noves tecnologies					
	Treball a l'aula dels alumnes					
	Matematització					
	Metodologia heurística: construcció-descobriment					
	Interpel·lació als alumnes					
	Exposició i defensa a classe dels treballs dels alumnes, per ells mateixos					
	Activitats de modelatge					
	Treball en projectes					
	Treball en grup i competència democràtica					
	Fomentar el debat entre els alumnes					
	Ús de terminologia tècnica					
	Integració de totes les activitats					
6. Investigació cognitiva						
	Selecció de comentaris dels alumnes					
	Registre àudio converses amb i entre alumnes					
	Registre amb vídeo actuacions alumnes					
	Hipòtesi: estadi inicial de coneixement					
	Mesurar el procés d'aprenentatge					
	Estat final de coneixement					
	Contemplar aspectes epistemològics					
	Avaluació Formativa					

Taula 1. Full d'autoinstropecció del professor

Els aspectes fonamentals, triats i sorgits de l'autoavaluació suggerida per la graella anterior, en la metodologia, i el paper del professor /investigador en el cas de l'eupvg els trobem enumerats, a tall de recomanacions, en el capítol de conclusions de la tesi.

Un cop els estudiants han lliurat les pràctiques, el professor anota en el seu diari un llistat de conceptes apresos, dificultats trobades i percentatges d'alumnes que comparteixen la dificultat, aquestes anotacions ens permeten també desenvolupar un seguiment del procés d'aprenentatge i mesurar el grau de coneixement adquirit. De la mateixa manera ens proporciona un element per tal de fer mes entenedores les activitats en properes edicions i d'aquesta manera millorar la comprensió de les mateixes (llenguatge utilitzat, notacions, interpretació d'esquemes). Aquests resultats s'anoten en una fitxa personal de l'alumne. El format escollit de la fitxa, i tal com mostra la taula 2, es com segueix:

Instrument de recerca nº 6: Fitxa personal de l'alumne

Nom:
Procedència: COU ■ FP □ REFORMA □ MP-III □ REPETIDOR/A □
Coneixements previs:
Matrius SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □
Integrals SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □
Eq. Diferencials SUFICIENTS □ POCS □ CAP ■

Pràctica d'àlgebra lineal *Dificultats trobades:* *Suggeriments/aportacions:* *Què ha après:*
Pràctica d'equacions diferencials *Dificultats trobades:* *Suggeriments/aportacions:* *Què ha après:*
Projecte: *Dificultats trobades:* *Suggeriments/aportacions:* *Què ha après:*

Taula 2. Mostra d'una fitxa personal de l'alumne.

El disseny de la fitxa serveix per analitzar dades d'una forma ràpida. La mateixa està estructurada en tres apartats pensats de manera que recullin els aspectes més significatius per la investigació:
En el primer d'ells tenim localitzat d'una manera immediata la procedència de l'estudiant i el grau de coneixement previ. Es important conèixer i tenir enregistrats els coneixements inicials (a l'inici de la pràctica) i els coneixements finals, d'aquesta manera podem fer un seguiment i extreure'n conclusions cognitives respecte el que *no sabien* amb relació *amb el que han après*.
En segon lloc hem colocat uns ítems que ens faciliten informació de caràcter cognitiu i heurístic referits a les unitats didàctiques realitzades, en ells anotem les dificultats trobades i les aportacions fetes, tant de caire estrictament de conceptes matemàtics i interpretació de dades com de metodologia, respectivament.
En el darrer ítem (*Què has après?*) es pretén tenir informació sobre els conceptes apresos i el seu significat.
En la tercera part, establim anotacions anàlogues a les anteriors però referenciades als projectes.
Els ítems estan pensats per tal de que la fitxa ens proporcioni una mostra organitzada de la informació extreta dels estudiants i que ens permet tenir una visió global per valorar el currículum i evolució de l'estudiant. En síntesi, la fitxa ens proporciona una exposició de resultats compacta i per tant ens permet comparar en d'altres fitxes i extreure'n unes primeres conclusions de la tipologia de l'estudiant.
La localització de les fitxes complimentades són conservades en l'arxiu personal del professor i les conclusions les podem trobar en el capítol 4, on també exposem un inventari explicatiu del procés d'aprenentatge de cada estudiant i la seva evolució.
Un cop definit aquest estadi, s'estableixen uns horaris de consultes per tal de que els alumnes puguin manifestar dubtes i suggerències fóra de l'aula i d'una manera personificada. Les entrevistes ajuden amb els detalls de l'investigació i poden complementar aspectes que potser dins de l'aula passen per alt. De fet les entrevistes no segueixen cap guió predeterminat, ja que és l'estudiant qui es dirigeix al professor -no a l'inrevés- i principalment són temes puntuals de consulta d'habilitats matemàtiques.

Instrument de recerca nº 7: El diari de sessions
A l'inici del curs es lliure als estudiants un diari de sessions, que caldrà complimentar en cada tema. En el mateix es demana:

Nom: Tema: Data inici: Data final:

1. Quins creus que són els punts més importants del tema?.
2. Creus que tenen alguna utilitat?.
3. Detalla els aspectes que han quedat clars.
4. Detalla els aspectes que han quedat foscos.
5. Pel que fa a l'ensenyament, creus que la forma d'exposar el tema té alguna diferència amb l'ensenyament tradicional.
6. Creus que el què has après te utilitat en la teva carrera, o fins i tot en la teva futura vida professional?.

El diari es per escriure les reflexions que han fet després de finalitzar un tema.
L'objectiu del diari de sessions es, per una banda, proporcionar a l'estudiant la oportunitat d'enregistrar les seves observacions i per altra banda permet a l'investigador enregistrar-ho per tenir més informació en la investigació. De fet es una via complementària per tenir més dades i informació en aspectes tant significatius com ara:
Significació i interpretació de conceptes: pregunta 1.
De tipus cognitiu: aspectes clars i aspectes foscos del tema (preguntes 3 i 4).
Utilitarista: referència a l'aplicabilitat de les matemàtiques (preguntes 2 i 6).
Efectivitat: pregunta 5.
Les respostes hem permeten esbrinar el grau d'acceptació i viabilitat d'una metodologia innovadora.
Els comentaris escrits en el diari ens permeten obtenir resultats cognitius i heurístics de la investigació.

Instrument de recerca nº 8: Diari del professor
Element on el professor anota diàriament els aspectes més rellevants de les sessions, com ara dubtes plantejats pels estudiants, incidències, etc. Els resultats i continguts d'aquest diari són usats en la investigació i plasmats en les fitxes dels estudiants.
En la següent secció, es detalla a *modus d'acta* i cronològicament la descripció del desenvolupament de les sessions i l'actuació del professor.

Instrument de recerca nº 9: Qüestionari.
A finals de curs es proposa als estudiants que contestin un petit qüestionari on s'els demana:
Primera part:
1. Autoreflexió: Explica les coses que tenen en comú les activitats proposades.
2. Explica les coses positives i negatives de l'ensenyament de les matemàtiques.

Segona part:
1. Has estudiat alguna vegada, prèvia a aquest curs, els temes treballats?
2. Quina tècnica d'ensenyament us agrada més: la metodologia tradicional (caracteritzada per una successió de definicions,teoremes,..) o el mètode creatiu (modelització de situacions reals) ?

L'objectiu de la primera part es esbrinar si a nivell conceptual han entès el lligam entre elles i averiguar si veuen les activitats integrades o aïllades. També volem descobrir aspectes epistemològics de l'ensenyament.

L'objectiu de la segona part d'aquesta enquesta es esbrinar si podem ratificar i establir les conjectures formulades durant tot el procés de recerca com a vàlides. Al hora permet comparar si les respostes efectuades al finalitzar el curs són contradictòries amb les obtingudes prèviament.

Instrument de recerca nº 10: Vídeo
Les sessions a classe i l'exposició de projectes han estat enregistrades amb vídeo. Les filmacions han estat realitzades sovint per aparells domèstics de companys i en algunes ocasions pels equips tècnics del ICE-UPC (Institut de Ciències de l'Educació). El vídeo es un element fiable per observar l'actuació dels alumnes i entretenir-nos amb detalls que potser no hem notat a l'actuació escrita. De la mateixa manera es una prova evident de com els estudiants expressen i gesticulen amb il·lusió un treball de recerca fet íntegrament per ells. Per qüestions tècniques, no sempre hem disposat d'un aparell gravador de vídeo. Per aquest motiu s'ha complementat amb fotografies.
De les imatges recollides amb els vídeos, hem seleccionat les imatges que mostren més clarament les aplicacions de les matemàtiques en el context de l'enginyeria així mateix com les que contenen explicacions implícites del procés de modelització. Un cop feta aquesta selecció, i amb un vídeo domèstic, hem confeccionat un nou vídeo (l'anomeno vídeo final) d'una hora de durada que recull els aspectes mencionats. La transcripció de les imatges i comentaris del vídeo final, s'ha fet observant les imatges i anotant els punts i minuts més significatius per l'objectiu de la investigació.

Instrument de recerca nº 11: Cassette
Tant en el desenvolupament de les sessions a classe com en els horaris establerts de consultes, els comentaris més rellevants són enregistrats en suport àudio. La cinta magnetofònica expressa de manera verbal -mitjançant paraules i frases- i col·loquial el parer dels estudiants. Les frases i comentaris més significatius per la investigació són recollits posteriorment en suport paper i plasmats en la present la memòria (capítol 4).

Instrument de recerca nº 12: L'enquesta oficial
La UPC realitza al finalitzar el curs una enquesta adreçada als estudiants -i anònima- amb una única pregunta referent a l'assignatura: "*M'interessa la teva opinió...*". En la mateixa els estudiants podien contestar lliure i anònimament tot el que els hi vingués de gust referent a l'assignatura. Aquesta enquesta amb va servir de molt amb l'investigació, doncs tenia el dubte de que sovint els estudiants poden respondre "allò que vols escoltar", davant del dubte exposat i degut a l'anonimat de les respostes estava a l'espera dels resultats. Els resultats van acabar de ratificar les conclusions doncs els seus comentaris coincidient amb els que l'investigador tenia enregistrats, podríem dir que eren un elogi a les tècniques de modelatge com eina d'innovació docent i d'aprenentatge.
En el capítol 4 es presenta un buidat del contingut de les respostes.

Instrument de recerca nº 13: L'examen i avaluació
L'examen pretén avaluar si s'ha assolit un nivell òptim d'aprenentatge amb les pràctiques realitzades. La tipologia d'examen recull tant els continguts matemàtics com tècnics desenvolupats en les activitats realitzades: valorar i interpretar situacions reals, reconèixer i plantejar el model matemàtic, resoldre el problema matemàtic, interpretar la solució en termes de la situació. En l'experiència estudiada a la memòria analitzem dos cursos on s'han desenvolupat tècniques de modelatge: el 1994-95 en àlgebra lineal i al 1995-96 en anàlisi matemàtic. En el primer d'ells només es va efectuar una unitat

didàctica, era un curs repartit en diversos grups i tutors, i l'avaluació consistia en un únic examen -tradicional- final. El grup que era tutor, el pes de l'examen on es plasmaven les tècniques de modelatge va ser d'un punt sobre la nota final. L'exemplar de l'examen el podem trobar en l'annex 1.
El cas més interessant es l'experiència efectuada al 1995-96, aquest curs no estava en funció d'altres tutors. L'avaluació final va consistir en els següents paràmetres:
30% de la nota s'esdevé de l'actuació a classe i lliurament d'exercicis per part dels estudiants, 30% la resolució d'unitats didàctiques, 40% el projecte. L'examen clàssic, era voluntari, pensat per aquells que desitgessin augmentar nota o bé per aquells estudiants que amb els criteris anteriors no obtinguessin la qualificació d'apte. També era pensat per les persones que per motius laborals no podien assistir a classe i d'aquesta manera tenien l'oportunitat de ser avaluats, per aquest motiu en el contingut de l'examen hi havia una presència d'exercicis tradicionals compartits amb la presència d'exercicis de tècniques de modelatge que contemplessin el binomi matemàtica-realitat professional de l'enginyer. El podem trobar en l'annex 4.

3.1.4. Elements pel tractament de les dades

Per tal d'analitzar les dades, no s'ha seguit cap mètode estadístic. L'anàlisi ha sigut qualitatiu. Amb la informació obtinguda i enregistrada de cada estudiant podem fer un estudi comparatiu dels coneixements inicials i finals, d'aquesta manera podem establir conclusions de tipus cognitiu. L'anàlisi s'ha efectuat fent successives i reiterades lectures dels comentaris i respostes dels estudiants, a partir de l'aplicació dels 13 instruments de recerca.
Els comentaris seleccionats van ser els estrictament relacionats amb els conceptes objecte d'estudi de la investigació. La descripció detallada de cada cas, així com la correcció de les pràctiques, la podem trobar en el capítol 4.
Les dades van ser recopilades en la fitxa que he presentat anteriorment i ordenats per temes afins.
A partir de les observacions -tant escrites, com en àudio i vídeo- de la selecció dels comentaris efectuats pels propis estudiants podem extreure'n conclusions de tipus epistemològic en el sentit del binomi matemàtica-realitat. En els treballs escrits hi han plasmades les habilitats de construcció de models i de resolució matemàtica, això ens permet extreure'n conclusions de tipus heurístic.
Per analitzar les filmacions en vídeo, s'ha fet una selecció de les imatges més rellevants i dels aspectes que tenen més relació amb els objectius de la tesi. A partir d'aquí s'ha configurat un primer vídeo resum d'una hora de durada. Posteriorment hem fet un buidat més rigorós, amb l'objectiu de tenir una visió més general i tenir una primera aproximació global del continguts del vídeo. Aquesta darrera versió només conté frases i comentaris "claus" i puntuals per la investigació i està pensat per ser visualitzat amb 10 minuts. La transcripció de dades dels vídeos al paper s'ha realitzat en aparells reproductors domèstics rebobinant en diverses ocasions les cintes per tal de no perdre cap detall. Cal destacar la importància d'enregistrar les experiències en vídeo doncs veiem el procés de l'activitat i com es desenvolupen i s'expressen els estudiants en la matematització de situacions reals.
Les fases seguides per l'anàlisi de dades es caracteritzen per l'observació dels resultats de les pràctiques i posteriorment reflexionant com realitzen el treball -realització-, ens fixem en les seqüències d'aprenentatge per validar la metodologia. Tot seguit comparem el que sabien amb el que han après, utilitzant les diverses fonts de recollida de dades per tal d'esbrinar que no existeixin comentaris contradictoris. Això ens permet establir

informació a partir del el comportament dels 5 estudiants sobre l'eficiència del mètode. De fet, les paraules clau per analitzar dades serien: realització, observació, comparació, eficiència.

El paràmetre indicatiu en que ens fitxat més per avaluar l'aprenentatge amb aquesta metodologia, ha estat els resultats obtinguts de suggerir als estudiants situacions anàlogues que comparteixen el mateix model. En aquest cas ens hem fixat si els estudiants reconeixent el model, si el saben resoldre, interpretar matemàticament, i si saben esbrinar el seu significat tècnic.

La investigació es basa, doncs, en validar el modelatge com una metodologia d'innovació en l'ensenyament de les matemàtiques.

Els resultats estan presentats pel comportament dels 5 estudiants amb els tretze instruments de recerca (vegis capítol 4).

De les dades trec resultats que ens permeten establir conclusions vers la viabilitat del modelatge com eina d'ensenyament/aprenentatge i reflexions sobre aspectes metodològics que avalen el fracàs dels mètodes tradicionals, apostant per una metodologia innovadora que difereix notablement de les pràctiques tradicionals tant en continguts com en estratègies. Fem una aposta per un ensenyament que posi especial atenció en l'aspecte més utilitarista de les matemàtiques, n'extrèiem conclusions sobre el binomi matemàtica-realitat.

Els resultats els classifico en diversos estadis: cognitius, heurístics i epistemològics.

De cada estudiant seleccionem els aspectes i comentaris que fan referència als aspectes cognitius (en el sentit d'adquisició de coneixements), heurístics (per validar el mètode de modelització) i epistemològic (per recollir informació sobre la influència de les matemàtiques en la tècnica i en la societat). Aquests comentaris es recullen literalment i són graficats en la memòria (capítol 4) i a continuació l'investigador afegeix els comentaris i anàlisi per tal de justificar la metodologia del modelatge com alternativa a les tècniques tradicionals. Els aspectes mencionats es recullen en el dors de les fitxes de cada alumne.

3.2. MODELITZACIÓ D'UN SISTEMA DE RESSORTS

3.2.1. Introducció: naixement de la unitat

L'objectiu és la construcció d'un model matemàtic senzill que permeti abordar un problema clàssic de mecànica tècnica usual que consisteix en un sistema de masses connectades per ressorts.

La idea és que a partir de coneixements primaris i simples de secundària l'estudiant aprengui d'una manera heurística les eines del càlcul matricial, tant per a interpretar el problema tècnic, com per aprendre un component del procés de modelització, plasmat en un seguit de situacions que ens portin a resoldre'l. també s'intenta formular un paral·lelisme entre els resultats de l'àlgebra lineal (operacions en matrius, sistemes d'equacions lineals,...) i la interpretació de dades (gràfiques i numèriques) de la situació tècnica.

Per tal de desenvolupar aquestes fases del procés s'han fet un seguit d'experimentacions, tal com hem descrit anteriorment, en forma d'unitats didàctiques pensades de manera que s'assoleixin els objectius esmentats.

La tàctica seguida consisteix a efectuar una versió de la unitat i suggerir als estudiants que l'omplin tot anotant les deficiències observades i les qüestions plantejades pels alumnes a fi i efecte de refer la unitat per tal que sigui més entenedora. aquesta successió de reflexions convergeix a configurar una nova unitat que, pel seu grau d'acceptació i pels bons resultats docents aconseguits, considerarem definitiva.
En síntesi el criteri seguit per reconstruir una unitat didàctica es doncs el següent:
Es considera una mostra d'estudiants escollits a l'atzar que cursen estudis tècnics de grau mig i que procedeixen de secundària (bup-fp) i tot seguit se'ls planteja que desenvolupin l'activitat. a mesura que es va realitzant s'anoten les suggerències i dificultats amb què l'alumne ha topat, aquestes anotacions es fan amb gravacions en vídeo, en àudio i en material fotogràfic. a continuació s'analitza i es reflexiona el perquè de l'existència d'aquestes pegues:
Potser no ens hem explicat prou bé?, potser els gràfics inclosos són poc clars? en cap cas es culpa l'estudiant de manca de coneixements previs (l'objectiu del professor és que si no disposen d'uns coneixements els adquireixin), però sí s'hi afegeixen qüestions i petites ajudes per tal de fer el camí més planer i si convé es donen indicacions per tal que el procés d'aprenentatge s'assoleixi amb èxit. en total hem configurat 6 versions.

3.2.2. explicació del problema
Presentació:
Dins l'àrea de coneixement de mecànica tècnica trobem sovint un sistema de masses connectades per ressorts tal com indica la figura 2:

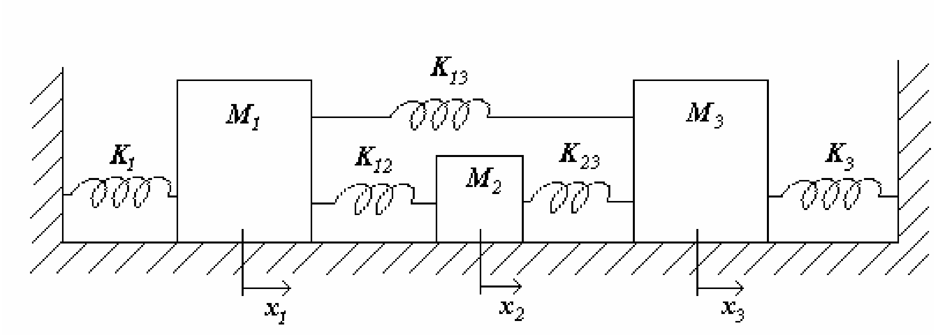


Figura 2. Esquema de masses connectades amb ressorts.

On x_1, x_2, x_3 indiquen els desplaçaments que han efectuat les masses a conseqüència de l'actuació de les molles.
Objectius tècnics:
Recerca dels coeficients de rigidesa i d'elasticitat.
Estudi del moviment efectuat i del paper que hi juguen les forces.
Requisits per assolir-los:
Coneixement de la llei de Hooke.
Coneixement de les aplicacions de càlcul matricial en la interpretació dels esquemes.
Hipòtesi de treball: desconeixement de la llei de Hooke i de les aplicacions del càlcul matricial.
Com demostrarem, els estudiants que han tingut docència de matrius, en particular els que provenen de cou, no saben quin ús tenen ja que han rebut un ensenyament tradicional. també provaré que els alumnes que anteriorment desconeixien el món de l'àlgebra lineal, en particular els que provenen de formació professional, han desenvolupat un procés d'aprenentatge que els ha conduït al coneixement de les tècniques del càlcul matricial i de les seves aplicacions.

3.2.3. Construcció i disseny de les diverses versions
Detallarem tot seguit com s'ha construït cada unitat i quin ha estat el procés d'elaboració de cadascuna.

Versions 0 i 1:
La idea era que a partir de la llei de Hooke es modelitzin les matrius i els sistemes d'equacions i a partir d'aquí estudiar un problema"típic"de mecànica tècnica. és experimentada per quatre estudiants.
La llei de Hooke molts d'ells no recorden què diu i fins i tot potser no la coneixent; llavors s'opta per modelar també la llei de Hooke d'una manera senzilla.
s'estructuren en sis activitats de la següent manera:
Activitat 1:
Es pretén que a partir d'observar un seguit d'esquemes i de dades "experimentals" descobreixin la llei de Hooke, que posteriorment se'ls enuncia incluint una petita

ressenya històrica. l'objectiu és que descobreixin una relació lineal entre la força i el desplaçament.
Activitat 2:
Es proposa un problema amb dues molles per tal que calculin les forces. l'objectiu és que l'estudiant tingui una visió adequada del sentit de les forces.
Activitats 3,4,5:
Es proposa el cas de 3,4,....i n masses per tal que escriguin matricialment la llei de Hooke i tot seguit es planteja una situació real de masses lligades entre elles. l'objectiu és que l'estudiant descobreixi l'expressió de la llei de Hooke en diverses variables, que comprenguin clarament qui fa el paper de variable dependent i independent, és a dir, que distingeixin entre el que són constants conegudes i incògnites. en definitiva es pretén que construeixin el que anomenem sistema d'equacions lineals. posteriorment han de resoldre numèricament el model trobat tot interpretant els resultats obtinguts.
Activitat 6:
Es demana un inventari de les tècniques apreses.
Aquesta versió no s'experimenta a les aules, el motiu és esbrinar si el contingut es prou clar per fer-ho extensible a un col·lectiu més ampli d'estudiants. cal agrair la disposició dels estudiants que s'han prestat voluntaris a fer-la. es realitza el novembre de 1994.
en l’activitat 1, no hi ha cap mena de dificultat, tothom treballa correctament la llei de Hooke.
En la resta d’activitats es detecta un cert grau de confusió i de desconeixement del que es demana: els gràfics no són prou clars, els sentits de les forces aplicades no s’entenen. això provoca errors en els coeficients esperats de les matrius que van apareixent; també provoca un cert cansament i no arriben al final de les activitats. els gràfics, que inicialment no s'entenen, són presentats tal com il.lustrem en la figura 3:

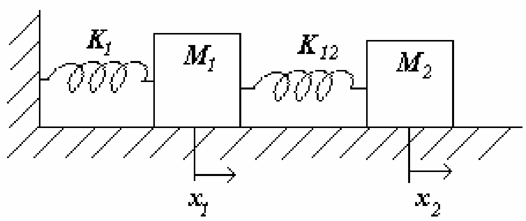


Figura 3. Detall inicial dels gràfics.

Analitzant els resultats s’intenta fer una nova pràctica on s’inclou com a novetat la interpretació d’esquemes a fi i efecte que els gràfics que hi apareguin siguin més entenedors, s’intercalem dibuixos de les masses en forma de rombe en lloc dels tradicionals rectangles amb explicacions que, “a posteriori”, ajudin a interpretar els gràfics que es troben en els textos tècnics on les masses es dibuixen com a rectangles.
algunes situacions s'il·lustren amb exemples numèrics tot intercalant resultats teòrics, definicions i anotacions usuals. d’aquesta manera apareix la versió 2, escrita el novembre de 1994 i experimentada en un grup reduït d’alumnes al desembre de 1994.
per la seva elaboració s’ha comptat amb la col·laboració de professors del departament de física. com a novetat s'exclou enunciar la llei de Hooke per esbrinar si l’estudiant es capaç d’arribar-hi per si mateix.

Versió 2:
S’estructura en cinc activitats :

En l'activitat 1 es planteja una experiència a partir de la qual l'estudiant arribi a la llei de Hooke, recordem que n'hem omitit l'enunciat.
En l'activitat 2 s'afegeix una altra molla i una altra massa (ja en tenim dues) i s'incorpora la interpretació d'esquemes. també introduïm els conceptes de matriu, de producte d'una matriu per un vector columna i el concepte de sistema d'equacions.
Els resultats teòrics els emmarquem en un requadre per tal que l'estudiant els pugui recordar i tenir-los presents en qualsevol moment.
A la tercera activitat es generalitza amb 4,5,...,n masses, separant el cas on la darrera massa és o no lligada a una paret.
L'activitat 4 s'aplica a un cas concret de l'àrea de tecnologia de materials. Finalment i com és habitual en la darrera activitat, es demanen les tècniques que han après.
En el desenvolupament de la pràctica es detecta que no saben deduir la llei de Hooke de forma "simbòlica", de fet no saben escriure la llei física que han après. alguns, perquè no l'han estudiada mai i els altres perquè no la recorden malgrat que els ha estat modelada.
Cal destacar la meva satisfacció pel fet que a diferència de les anteriors unitats ja interpreten correctament els esquemes, però malauradament encara no interpreten correctament els sentits de les forces.
Es creu oportú reconsiderar la pràctica i confeccionar una nova unitat didàctica de manera que conservi les hipòtesis i els resultats òptims de l'aprenentatge de les anteriors i presenti alternatives a les deficiències observades.
Per aquest motiu construïm una tercera versió més acurada que s'experimenta en el curs d'àlgebra lineal 1994-95 (annex 1).
Aquesta versió la podem trobar en l'annex 1 i va ser revisada pels Drs. Pérez Gómez, Enric Trullolls, Claudi Alsina i la Dra. Lola Leris. Als doctors citats els hi és lliurat juntament amb la pràctica un full d'intencions i objectius perseguits (annex 1), un guió de treball (annex 1) i una proposta d'examen referit a les activitats de la pràctica amb els criteris de correcció (annex 1) per tal de que manifestin llur opinió en una graella elaborada per tal efecte (anomenada *valoració per jutges*). En l'annex 1 podem trobar la graella de valoracions i la pràctica desenvolupada amb respostes de diversos alumnes.

3.2.4. el procés de modelització en el disseny de la unitat didàctica
He efectuat una unitat didàctica (que anomenen versió 3) configurada en diverses fases:
Fase1: Clarificació i descobriment per construcció.
Aconseguir d'una manera dirigida, que l'estudiant formuli la llei de Hooke. Això s'ha fet considerant el cas d'una molla lligada a una paret mitjançant un ressort.
Per tal d'ampliar el nombre de masses i ressorts, cal que l'estudiant aprengui clarament a interpretar el sentit de les forces en cada situació presentada (per exemple canviant de lloc la paret on està lligada la massa). afegim també una nova massa per tal que observin l'analogia entre massa i paret.
Fase 2: Anàlisi empíric.
Considero aquesta fase com el primer procés d'abstracció matemàtica de la situació. l'objectiu és que l'estudiant anoti en taules la informació que obté fruit d'aplicar la llei de Hooke en la globalitat de molles i masses que hi ha en els esquemes presentats. d'aquesta manera descobreix d'una manera simbòlica les relacions matemàtiques que hi són involucrades: relació en forma d'equacions de la situació plantejada.
Fase 3: Construcció del model.
L'objectiu és que construeixin el model de la situació en el cas de diverses molles i masses: un sistema d'equacions lineals.
Fase 4: resolució del model.

L'alumne, d'una manera dirigida, tal com es pot observar en la unitat didàctica inclosa en l'annex, ha de resoldre el model numèricament.
Fase 5 : Interpretació i validació.
La idea bàsica és que l'estudiant sàpiga interpretar tècnicament els resultats obtinguts (quins són els coeficients de rigidesa i elasticitat ?) i a més que sàpiga establir relacions entre el model matemàtic obtingut i la situació plantejada per tal d'estudiar la seva viabilitat. En aquesta fase es proposa que s'analitzin altres situacions que comparteixen el mateix model, per tal d'esbrinar la capacitat de reconèixer altres situacions reals -no necessàriament de la mateixa àrea de coneixement- com a models lineals.
Com hem mencionat, per dur això a terme ha calgut construir diverses versions de les unitats didàctiques.

3.2.5. Breu anàlisi de la versió 3
Inicialment hem construït una taula (taula 3) on situem les dades de la població analitzada.

Assignatura	àlgebra de primer d'enginyeria tècnica industrial
Pràctica de modelatge	modelatge d'un sistema de ressorts
Curs	1994-95 (març de 1995)

Taula 3. Dades de la població analitzada.

La versió 3 de la unitat didàctica s'experimenta amb un grup de 25 estudiants de 1r curs d'enginyeria tècnica, la majoria dels quals no ha estudiat mai àlgebra lineal i desconeix el concepte de matriu.
Degut a la transcendència d'aquesta versió, molt més acurada i dirigida, vaig recopilar l'actuació a les aules amb el suport de vídeo i àudio, on es pot observar tot el procés seguit pels estudiants.
Així doncs, aquesta pràctica representarà per a molts alumnes el primer contacte amb el món de les matrius i serà interessant de veure si són capaços de captar-ne els objectius prefixats.
Són necessàries 3 sessions perquè els alumnes resolguin la unitat didàctica completa.
Principals resultats de l'experimentació:
Activitat 1:
En general s'ha fet bé, i és lògic que sigui així, ja que és una activitat senzilla.
Activitat 2:
Gairebé 2/3 parts de la gent l'ha feta bé. la resta l'ha resolt bastant malament. els muntatges de l'activitat 1 s'han resolt bé, però el fet d'afegir, a l'activitat 2, una nova paret a la dreta ha creat confusió i ha provocat errors en els desplaçaments.
Activitat 3:
En general s'ha resolt malament. el problema principal és que no s'ha assimilat bé l'activitat 2, i això ha repercutit en la 3, ja que es necessiten els coneixements apresos en una per poder fer l'altra.
D'altra banda, la majoria d'alumnes intenten usar coneixements físics (sumatori de forces) en els muntatges de cossos i molles, de forma que es fan un embull amb les equacions; en realitat n'hi ha prou de canviar el signe de la força quan aquesta tingui sentit contrari a la de referència, que és la de la llei de Hooke. és possible, doncs, que els alumnes no hagin entès la llei de Hooke de l'activitat 1.
Activitat 4:

S'ha resolt malament. els qui no han fet bé l'activitat anterior, tampoc no han solucionat bé aquesta.
Conclusions de l'experimentació:
les següents conclusions són fruit de l'experiència realitzada i s'han fet al final del procés.
d'una banda hem de dir que els estudiants han resolt la pràctica amb molta motivació, la qual cosa és positiva.
Pel que fa a la resolució dels gràfics, es perden amb facilitat quan han d'establir el sentit de les forces perquè, segons ells, els falten coneixements físics. en aquest aspecte, seria interessant que els exemples proposats a les activitats tinguessin nombres en lloc de variables. també seria adient que la unitat didàctica fos més curta.
Per acabar cal dir que el debat amb els alumnes és una eina molt valuosa perquè proporciona informació d'inestimable valor per a la millora de la unitat didàctica.
Reflexions de la unitat didàctica i validació per jutges:
En general i ha un ampli consens per part dels *jutges* en considerar que fins l'activitat 7 és adequada al nivell i continguts, a partir d'aquesta activitat es troba una mancança en conceptes propis d'enginyeria i es considera "no adequat" i per tant caldria millorar-ho. Pel que fa a la qualitat de la formulació, el Dr. Enric Trullolls considera que són adients pels alumnes que estudien a l'eupvg, cal afegir que en Enric és professor de l'eupvg. La Dra. Leris comenta que tot i que desconeix la realitat de l'escola de Vilanova, creu adequat efectuar un enfoc intuïtiu d'aquests temes. En relació a l'examen hem escollit el model suggerit per el Dr. Claudi Alsina (examen model b, annex 1) ja que justifica que és el més coherent amb les activitats proposades a la pràctica. En Claudi comenta que la pràctica no és adequada per introduir el concepte de nucli d'aplicacions lineals, fet que l'hem tingut en compte a l'hora d'elaborar les següents versions. El Dr. Pérez fa especial èmfasi en el contingut i presentació de la pràctica: esquemes pocs clars, caldria que s'introduïssin unitats de mesures, considera que l'estudiant tindria que crear noves representacions a més de les suggerides, fa observacions molt interessants referents a notacions, caldria tractar situacions anàlogues,.. en general diu que no li agrada i que hi troba molt poc rigor, la considera apropiada per eso i/o batxillerat però no per universitat.
Les consideracions transcrites anteriorment provoquen un replanteig de la unitat i en l'el.laboració de la nova versió han sigut valorades i tingudes en consideració. S'ha intentat tenir en compte les observacions manifestades pels Drs. mencionats dins les limitacions del currículum previ de l'estudiant. Pel que fa a la consideració manifestada pel Dr. Pérez s'ha intentat ajustar al màxim els continguts i formulació a un nivell universitari, però cal tenir cura que molts estudiants del context de l'eupvg no han rebut mai docència de tècniques matricials i per tant és equivalent introduir aquestes tècniques a l'eupvg com a batxillerat
–per ells és el primer cop-. Pel que fa a l'adequació als estudis d'enginyeria hem considerat –com molt acertadament manifesten els Drs. consultats- afegir un seguit de situacions anàlogues i properes a l'entorn dels estudis d'enginyeria.
També hem tingut en compte per la construcció d'una nova versió les deficiències observades plasmades pels estudiants que han realitzat la versió 3.
En funció de les anàlisis efectuades en l'experimentació a classe, les observacions dels *jutges* i en l'examen realitzat al final de la pràctica, s'ha reflexionat sobre els errors i les deficiències plasmades pels estudiants en el procés de modelatge. Per això hem elaborat unes versions "d'estudi" anomenades 4 i 5 que un cop examinades amb detall encara no milloren ni cobreixen les mancances anteriors ni satisfan plenament les mancances de les anteriors.
Un cop arribat a aquest punt i arran dels comentaris i suggeriments efectuats pel Dr. Josep Mª Fortuny, hem considerat oportú incloure d'altres situacions susceptibles de ser

modelades per matrius. D'aquesta manera neix la versió 6, que considerem que satisfà les deficiències de les anteriors i que la proposem com a vàlida. és la que s'experimenta al curs 1995-96 i que estudiem en el punt següent.

3.3. UNA EXPERIÈNCIA GLOBAL:UNITAT DE MATRIUS

En aquesta secció s'explica com ha quedat configurada la versió 6 de la unitat. La podem trobar en l'annex 2 i es la que hem considerat com definitiva per l'estudi que ens ocupa. També s'analitza la resposta i les reaccions dels estudiants que han desenvolupat la unitat.

3.3.1. Dades
Curs: 1995-96.
Assignatura: Anàlisi matemàtica
Especialitat: Enginyeria tècnica en informàtica.
Pràctiques efectuades:
1. Modelatge d'un sistema de ressorts. Versió 6.
2. Michael Schumaker i el càlcul diferencial.
3. El món de les equacions diferencials.
4. Treball en grup: Realització de projectes.

3.3.2. Disseny i resum de la unitat: *-modelatge d'un sistema de ressorts. versió 6.-*
El disseny de l'activitat, tal com hem mencionat en el punt anterior, està fonamentada en els arguments i consideracions extretes de la *validació per jutges*, els comentaris proporcionats pels propis alumnes i les observacions suggerides pel Dr. Josep Mª Fortuny. La mateixa la podem localitzar en l'annex 2.Arràn d'aquestes observacions s'elabora la unitat didàctica que intenta contemplar els aspectes que es detallen a continuació:
1. Problemes físics:
S'introdueixen casos amb parets als dos costats dels ressorts, primer en un costat i després en un altre, i se'ls pregunta per la força que actua sobre la paret. D'aquesta manera observen que les forces que actuen en un sentit, en actuar en l'altre tenen la mateixa direcció i signe oposat.
En la comprensió dels moviments quan intervenen varies forces, se'ls indueix a observar que és equivalent aplicar primer F_1 i després F_2 que efectuar $F_1 + F_2$. Introduïm unitats de mesura -tal com recomana el Dr. Pérez-, com ara els Newtons.
2. Conceptes amb terminologia simbòlica:
Inicialment es proposen les activitats amb "nombres" per tal que tinguin una millor visualització del model, però tot seguit els suggerim que trobin el model amb "variables".
3. Heterogeneïtat dels alumnes:
Hem observat la diversificació de nivells en els estudiants; per això, en iniciar cada activitat, s'intenta d'incloure un seguit de qüestions que detecten el grau de coneixement del tema i s'els orienta i indica cap a quina activitat han de dirigir-se.
A grans trets es classifica de la següent manera:
Si es detecta que han estudiat prèviament càlcul matricial són dirigits de manera natural a l'activitat 4 , si no saben matrius però sí la llei de Hooke els dirigim a la segona activitat, altrament a la primera. En síntesi es pretén tractar la diversitat proposant camins alternatius. D'aquesta manera cobrim i recollim les inquietuds del Dr. Pérez i del Dr. Enric Trullolls.

4. Altres:
Un dels errors greus comesos pel professor consisteix a desconnectar les explicacions teòriques de les activitats, per això s'inclou a la pràctica una relació més estreta entre els conceptes presentats i la teoria. Perquè els conceptes quedin més lligats amb el procés de modelització cal que la classe sigui més participativa, cosa que estimula l'autoaprenentatge, d'aquesta manera es fuig de l'ensenyament clàssic i queden cobertes les aportacions del Dr. Pérez, Claudi Alsina i Enric Trullos i la Dra. Lola Leris.
També s'inclouen exercicis autocorrectius en les activitats i alguns s'han de fer a casa.
Per a una millor comprensió es suggereix –tal com proposa el Dr. Pérez- que ells mateixos proposin situacions anàlogues a les presentades i que les analitzin. De fet, l'estructura de la unitat es essencialment com les anteriors, els continguts han estat millorats per tal de respectar les deficiències de les anteriors. D'aquesta manera també hem respectat les aportacions dels propis estudiants i dels *jutges.*
Així doncs, al final de les activitats es descriuen altres situacions susceptibles de ser modelades per matrius per tal que observin i reflexionin sobre el fet d'entendre les matrius com un sistema de representació d'altres fenòmens, per exemple els circuits elèctrics.
Per tal d'aproximar més les activitats als currículums d'enginyeria, tal com recomanen els Drs. Claudi Alsina i Pérez, hem inclòs:
- Models de xarxes: A.circulació vial, models de circuits.
- Models geomètrics.
- Models econòmics.
D'aquestes situacions que hem afegit, i que complementen les anteriors versions, plasmem un extracte. En la figura 4 s'observa el model de xarxa de circulació vial, en la figura 5 el circuit elèctric, en la figura 6 el model geomètric i en la figura 7 l'esquema del model econòmic.

A. Model de circulació vial
Un model usual de xarxa és la constituïda per cinc ciutats de la comarca del Garraf. Els camins són carreteres que les uneixen i les unitats indiquen el nombre de vehicles que hi circulen segons els sentis de marxa plasmats en el gràfic següent:

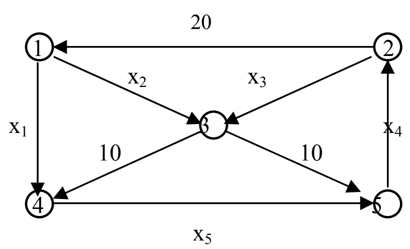
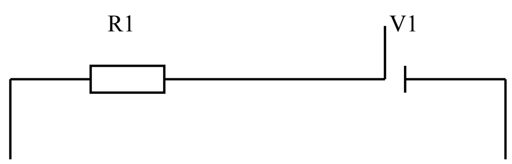


Figura 4. Model de xarxa vial

B. Model de circuit
Per fixar idees, considera el següent circuit:



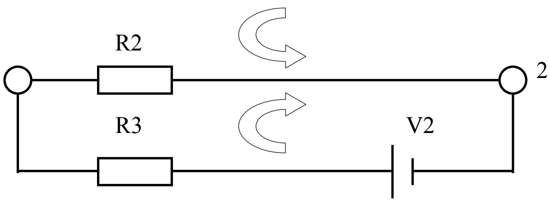


Figura 5. Circuit elèctric

II. Model geomètric
Ara intentarem esbrinar com podem fer gris en el pla i descobrir quina eina matemàtica que ens farà falta.
Problema:
Donat un punt P(x_1 , x_2) del pla i un angle β, quin és el punt P'(x_1' , x_2') obtingut al fer girar P, β graus en funció de P i β?

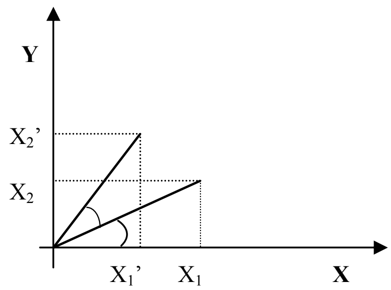


Figura 6. Model geomètric

III. Model econòmic
Un industrial fabrica tres models de làmpades a partir de tres tipus d'elements:
Elements tipus 1: Bombetes.
Elements tipus 2: Eixos.
Elements tipus 3: Base
El nombre d'elements de cada tipus que necessita per construir les làmpades està representat en la següent taula:

	MODEL 1	MODEL 2	MODEL 3
BOMBETES	6	3	4
EIXOS	3	2	1
BASE	1	1	1

Figura 7. Model econòmic

En tots els models es demanen relacions algebraiques (annex 2) on hi han involucrats conceptes de càlcul matricial.

3.3.3. Població analitzada
La pràctica es desenvolupa l'octubre de 1995 al primer curs d'enginyeria tècnica de l'eupvg, amb un total de 55 estudiants, concretament al segon quadrimestre de l'especialitat d'informàtica i en l'assignatura d'anàlisi matemàtica. Per tal d'esbrinar el grau de coneixement hem escollit inicialment una mostra de 10 alumnes de diverses procedències, posteriorment i com que treballen en grup hem fet un seguiment complet del procés d'aprenentatge de 5 dels alumnes escollits.Tal com hem dit en la metodologia d'investigació, hem respectat en l'elecció la proporció dels diferents llocs d'origen -

COU, FP,...-. Tot seguit detallem els noms dels estudiants que he examinat durant la pràctica amb tot detall.

1. David V. COU.
2. Mònica C. COU.
3. Imma A. COU.
4. Sung C.. COU.
5. Iván M. Reforma.
6. Joaquim Ll. FP.
7. Francesc C. FP.
8. Eduard E. FP.
9. Joan B. Repetidor.
10. Montserrat A. MP-III.

3.3.4. Criteris de correcció de la pràctica i objectius perseguits

En aquest punt presentem els criteris de correcció adjuntan un quadre de respostes correctes i un inventari dels conceptes que han aprés els estudiants. També exposem els resultats dels qüestionaris que han omplert els alumnes (autoreflexió 1 i autoreflexió 2).
Designem per 0 el nombre d'estudiants que han deixat la pregunta en blanc, per 1 la quantitat d'estudiants que han deixat la resposta en blanc explicant el perquè l'hi han deixada i el tipus de dificultat que hi han trobat, per 2 el nombre d'estudiants que han contestat la qüestió de manera incorrecte i finalment per 3, el nombre d'estudiants que l'han contestada correctament.
Tots els alumnes que han realitzat la pràctica, saben *a priori* què es valorarà per la nota final de l'assignatura.
Les valoracions que manifesto a continuació són posteriorment analitzades per tal d'esbrinar el sentit del modelatge en l'aprenentatge de les matemàtiques.
L'objectiu global de totes les experiències realitzades , per tal d'analitzar la viabilitat de l'aprenentatge a través del modelatge com a metodologia docent innovadora, és extreure'n conclusions en els següents aspectes:

1. ¿ Què són les matemàtiques ?.
2. L'aprenentatge de les matemàtiques.
3. L'ensenyament de les matemàtiques.
4. Eficàcia del procés d'ensenyament-aprenentatge.
5. Efectes socials.

Es fa també un estudi comparatiu amb d'altres experiències de modelatge realitzades en d'altres llocs (per exemple a Portugal, per Paulo Abrantes) i de diversos nivells. La idea és observar si les conclusions extretes en l'aportació difereixen dels resultats de Abrantes i Niss, entre d'altres autors mencionats en el marc teòric (capítol 2). En la taula 4 presentem el quadre de respostes correctes.

	0	1	2	3	no
Descripció					
Quina creus que és la força...	1	0	4	5	
Activitat 1					
Primera part					
b) predicció	0	0	0	5	5
c) calcula	0	0	0	5	5
d) explica	0	0	3	2	5

f) practica					
1. omple...	1	0	1	3	5
2. dibuixa...	0	0	2	3	5
3. calcula...	0	0	2	3	5
4. Calcula el coeficient...	0	0	3	2	5
g) conclou					
a) La paret està a l'esquerra	0	0	0	5	5
b) La paret està a la dreta	0	0	0	5	5
h) dedueix	0	0	2	3	5
Segona part					
Quina creus que és la força...	2	0	1	7	
Tercera part					
1) Considera l'esquema					
a)	0	0	1	9	
b)	0	0	2	8	
c)	0	0	5	5	
d)	0	0	6	4	
e)	0	0	5	5	
Exercici					
Considera dos objectes...	0	0	0	10	
Quarta part: miscel·lània					
Exercici					
1) indica quina és la força...					
Situació 1	0	0	0	10	
Situació 2	0	0	2	8	
Situació 3	0	0	3	7	
2) En general, escriu...	0	0	0	10	
Activitat 2					
Contesta					
Davant de la situació...	4	0	1	5	
Primera part					
Contesta					
1) En el segon dibuix...	1	0	1	2	6
2) En el tercer dibuix...	0	1	2	2	6
3) Quina és la força total...	0	0	2	2	6
4) Quina és la força total...	0	0	2	2	6
5) Prova d'omplir...	0	0	2	2	6
Segona part					
1) què vol dir l'esquema	6	1	1	2	
2) tenint en compte...	0	0	4	6	
3) omple el requadre...	0	1	3	6	
4)					
a) agrupa en una matriu...	0	1	4	5	
b) escriu f= ...	0	1	4	5	
Exercicis					
1) Si X= ...					
a) Calcula el resultat...	0	1	5	4	

b) Si coneixes el resultat...	3	1	3	3	
2) Particularitzem...					
a) Representa...	3	1	2	4	
b) Suposa que...	2	0	3	5	
un petit incís d'exercicis					
1) Sigui A la matriu...					
a)	1	0	0	4	5
b)	1	0	0	4	5
c)	1	0	1	3	5
2) Analitza si creus...					
a)	0	0	2	3	5
b)	0	0	2	3	5
3) Sigui A= ...					
a) Calcula...	2	0	0	8	
b) És cert que...	2	0	0	8	
4) Tot passejant pel mercat...					
a)	1	0	0	9	
b)	1	0	0	9	
c)	1	0	1	8	
d)	3	0	3	4	
Continuem amb molles					
Contesta					
1) Quina força fa la constant...					
a)	3	0	3	4	
b)	3	0	3	4	
2) Quina força efectua...					
a)	3	0	6	1	
b)	3	0	6	1	
3) Quina força efectua...					
a)	3	1	3	3	
b)	3	1	3	3	
4) Quina és la força total...	3	1	3	3	
5) Escriu matricialment...	3	1	4	2	
Recordatori					
a) resumeix					
1) escriu l'expressió...	1	0	0	9	
2) escriu l'expressió...	1	0	3	6	
3) escriu matricialment...	2	0	4	4	
4) escriu matricialment...	2	0	6	2	
5) compara les matrius...	4	0	3	3	
Activitat 3: aplicació a un cas clàssic					
0) Què vol dir l'esquema...	2	1	3	4	
1) Tenint cura ...	3	0	6	1	
2) Si anomenem F= ...	3	1	5	1	
3) Escriu la matriu...	4	1	4	1	
4) Si coneixem la matriu...	7	1	1	1	
5) Intenta calcular E...	3	3	2	2	

6) Efectua el producte KE...	7	2	0	1	
7) Sigui I la matriu...	2	1	0	7	
8) Quina relació...	7	0	0	3	
9) Com són entre si...	6	1	0	3	
10) Què obtens si...	2	1	0	7	
11) Calcula per a quins...	6	3	1	0	
Llegeix i practica					
1) completa els elements...	2	0	1	2	5
2) calcula la matriu...	2	0	2	1	5
3) efectua el càlcul...	3	0	0	2	5
4) calcula el producte...	3	0	0	2	5
5) has obtingut...	4	0	0	1	5
6) fes el mateix...	3	0	0	2	5
7) explica el que obtens...	3	0	1	1	5
8) fes el mateix amb...	3	0	0	2	5
9) siguin k1=2...					
a)	4	0	0	1	5
b)	4	0	0	1	5
Activitat 4					
i) models de xarxes					
a) model de circulació vial					
1) escriu l'equació...	0	0	2	8	
2) com podem observar...	3	1	3	3	
3) un conductor...	3	1	3	3	
4) si el conductor anterior...	4	1	3	2	
b) model de circuit					
1) aplica les lleis...	1	0	3	6	
2) si coneixem el valor numèric...	0	0	0	10	
3) concretem,...	2	0	5	3	
ii) model geomètric					
Problema					
1) suposem que anomenem r...	3	0	1	6	
2) ara fes el mateix amb...	3	0	1	6	
3) desenvolupa les expressions...	3	0	4	3	
4) amb l'ajut...	3	2	3	2	
5) escriu una relació...	7	1	2	0	
Reflexiona					
1) si primer efectuem...	7	1	2	0	
2) què et suggereix...	8	2	0	0	
3) calcula la matriu...	5	1	0	4	
4) quina descoberta...	6	1	2	1	
iii) model econòmic					
1) anem a esbrinar...	5	1	1	3	
2) si una botiga...	5	0	3	2	
3) en general...	5	0	5	0	
4) si coneixem...	7	0	1	2	

Taula 4. Quadre de respostes correctes

Què diuen els alumnes que han après els alumnes en cada activitat ?
Activitat 1
Teoria: La llei de Hooke, masses amb molles, $F = -k \cdot x$.
Significat: Funcionament de les molles, aplicació de la llei de Hooke, la força F com a força total, significat de F, ús de les forces en general.
Dificultats: Moltes molles, signe de F, paret a l'esquerra i paret a la dreta, sentit de les forces.
Grau de coneixement: La meitat dels alumnes bé i l'altra meitat regular.
Activitat 2
Teoria: Matrius, matrius i forces, producte de matrius, sistemes amb matrius, masses i molles.
Significat: Resolució de sistemes, càlcul de K, aplicació de la llei de Hooke, aplicació de l'activitat 1, aplicació de la teoria de matrius, funcionament de les forces.
Dificultats: Propietats, teoria i producte de matrius, matriu inversa, signes de les forces, teoria de les molles en general.
Grau de coneixement: La meitat dels alumnes bé i l'altra meitat regular.
Activitat 3
Teoria: Matrius, matrius inverses, $A \cdot B = I$ si $B = A^{-1}$.
Significat: Aplicació de les matrius, càlcul de E, càlcul de F, $I = A \cdot A^{-1}$, operacions amb la matriu identitat, la matriu d'adjunts i la transposada.
Dificultats: Enunciats ambigus, activitat massa llarga, adjunts d'una matriu, signes, falten eines per resoldre l'activitat.
Grau de coneixement: La majoria dels estudiants, regular o insuficient.
Activitat 4
Teoria: Trigonometria, sistemes d'equacions, matrius, Kirchoff, circuits, models.
Significat: Solució de problemes trigonomètrics, solució de problemes amb matrius, equivalència entre Hooke i Kirchoff, aplicació de les matrius a la física.
Dificultats: Angles, funcions trigonomètriques, model geomètric, bombetes.
Grau de coneixement: En general, regular.
Temps total que han emprat els alumnes:
El temps és molt variable i va de 2 hores a 9 hores. Els temps dels alumnes, ordenats de més petit a més gran, han estat: 2h, 3h, 4h, 5h, 7h, 7.5h, 8h, 9h, i hi ha dos alumnes que no han dit el temps.
Els que han trigat 2, 3 i 4 hores no han acabat la unitat. Malgrat tot, però, fent un anàlisi temporal de les 55 pràctiques la durada obtinguda és de 8 hores.

Autoreflexió 1:
Les coses que tenen en comú les tres activitats detectades pels estudiants han estat:
Molles, llei de Hooke, matrius per resoldre problemes, utlització d'eines matemàtiques en camps diferents al matemàtic, sistemes d'equacions, la força que fan unes molles sobre unes masses, sistemes de matrius.
A continuació presentem la taula 5, on destaquem les coses que han quedat clares i les que no.

Coses clares	pàg.	Coses confuses	pàg.
Llei de Hooke	6,7	Matriu de rigidesa	23
Aplicació de les matrius	15	Exercici a)	16

Signe de F	11	Explicació de la matriu inversa	?
Producte de matrius	18	Producte de matrius	18
Càlcul d'adjunts	25	Càlcul d'adjunts	25
Model econòmic	34	Model geomètric	31
Producte de matrius	15	1 paret, 2 cossos i 2 molles	12
K= cnt	5	El dibuix que ja està fet	16
Producte euclidià	18	Per multiplicar dues matrius, ¿han de ser quadrades o no?	15
Matriu identitat	24	Les molles de la pàgina 20	20
K	2-4	Activitat 3, qüestions 0 i 5	?
Paret a l'esquerra i a la dreta	8	Pensa i compara: ¿quins són els criteris a seguir per plantejar les equacions?	?
Un sistema d'equacions es pot representar amb matrius	?	No es veu gràficament el sentit de les forces	?
Ús de matrius per resoldre problemes quotidians	?	F quan hi ha Més d'una massa	14
Matriu identitat, simètrica i transposada	?	Càlcul de totes les forces	22

Taula5. Coses que han quedat clares i coses que no

Autoreflexió 2:
Què tenen en comú els models de molles i els altres?
S'usen sempre les matrius i els sistemes d'equacions per resoldre les diverses situacions.

A continuació presentem unes taules (taules 6 i 7) on plasmem les coses positives i negatives de les matemàtiques i del seu ensenyament.

Coses positives	Coses negatives
L'aplicació pràctica.	
Les matemàtiques, si les entens, et donen agilitat mental.	
Les matemàtiques són presents a la física.	Els professors expliquen massa de pressa.
Les matemàtiques són a tot arreu.	De vegades, no s'entenen.
Tot allò que ens envolta es pot estudiar i mesurar gràcies a una eina: les matemàtiques.	Cal una capacitat d'abstracció molt gran per entendre-les, ja que s'usen a qualsevol situació del món.

Taula 6. Coses positives i negatives de les matemàtiques

Coses positives	Coses negatives
És divertit i amè.	És pesat.
És agradable.	És llarg i, per tant, es fa pesat.
L'aplicació de les matemàtiques és més clara.	La teoria queda més fluixa.
Veus la utilitat dels sistemes i les matrius.	Implica haver de conèixer altres camps.
Et sens satisfet quan veus que has resolt un exercici tu sol.	Et poses nerviós.
Permet memoritzar més bé les lleis perquè les dedueixes tu.	Creus que no està a l'altura del que se't demana.
T'ajuda a espavilar-te.	Quan tens dubtes, no te'ls resol ningú.
Hi ha algunes qüestions que quan les fas malament et permeten passar a un bloc en el qual aprens això que no sabies.	Com que tot està relacionat, si et perds al principi no pots continuar.
	Els exercicis no vénen gens ben explicats.

Taula 7. L'ensenyament de les matemàtiques a través de les unitats didàctiques

3.3.5. Conclusions

Les tres primeres fases del procés de modelització s'han aconseguit, doncs tal com mostren les respostes dels estudiants que hem transferit de les pràctiques, els estudiants descobreixen majoritàriament i correctament el model cercat; aquest fet ens mostra que l'anàlisi empíric del procés d'abstracció s'ha assolit amb èxit: formulen correctament les equacions.

Els instruments de recerca que hem usat han estat la selecció d'alumnes, les enquestes i les transcripcions en vídeo (minuts 1-2) i àudio (minuts 1-10). En l'àudio s'inclou la opinió d'un enginyer tècnic present a l'aula on destaca que "*...mai li havien ensenyat perquè servien les matrius...*".

Amb aquesta pràctica podem fer conjectures, com una primera aproximació, sobre els 5 punts d'estudi:

Les matemàtiques són una eina de servei per resoldre problemes de la tècnica i que ajuden a resoldre i interpretar situacions d'altres assignatures. Això, conjuntament amb els resultats de les pràctiques, ens permet conjecturar que són una eina eficient d'aprenentatge i d'adquisició de cultura.

També es desprèn de les respostes que l'estudiant aprèn d'una manera dirigida, amena i espontània. Veu la necessitat de les matemàtiques, construeix i l'estudiant adquireix un elevat grau de motivació.

De la mateixa manera l'estudiant mostra una deficiència de coneixements previs, però malgrat tot te un elevat grau d'adaptació.

Aquestes conjectures, esperem que coincideixin en les conclusions de la resta d'activitats i per tant les podrem establir com a vàlides.

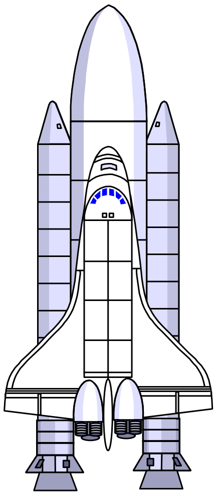
3.4. UNA EXPERIÈNCIA GLOBAL: EL MÓN DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS

3.4.1. Introducció

Aquesta unitat didàctica es realitza en el curs d'anàlisi matemàtica de l'especialitat d'informàtica durant el desembre de 1995. En l'annex 3 la podem trobar desenvolupada en la seva totalitat.
Com he mencionat en els apartats anteriors s'inclou dins d'una experiència global de modelatge i és adreçada als mateixos estudiants que varen efectuar la versió 6 de la unitat " *Modelatge d'un sistema de ressorts*".
Aquests alumnes han estudiat prèviament, d'una manera tradicional, nocions de càlcul diferencial i integral.

3.4.2. Unitat didàctica: els astronautes i les equacions diferencials
L'objectiu general és que abans de les explicacions teòriques pròpies de l'ensenyament tradicional, els estudiants reconeguin una equació diferencial partint de situacions extretes de la realitat. També es considera adient que l'estudiant reconegui diverses situacions tècniques que tenen com a denominador comú el mateix model d'equació diferencial.
He treballat en equacions lineals senzilles per tal que també notin l'analogia amb els models lineals estudiats anteriorment.
Per això he realitzat tres versions de la pràctica en qüestió: dues experimentades en un grup reduït i la tercera realitzada dins de l'aula amb el mateix col.lectiu d'alumnes que va portar a la pràctica la versió 6 del modelatge d'un sistema de ressorts.
He de ratificar que l'elaboració d'aquesta unitat m'ha resultat més senzilla que en el cas del sistema de ressorts. Seria fals voler amagar la meva manca d'experiència en aquesta metodologia, per això és obvi que la primera unitat didàctica de modelatge em resultés més laboriosa de configurar.
Més endavant s'analitza i es valora l'evolució particular d'una mostra significativa d'estudiants.
Aquests estudiants, com a cloenda del curs, també han de realitzar un projecte suggerit pel professor que reculli diverses situacions d'interès per a ells. Recordem que en apartats anteriors ja hem comentat els continguts dels projectes, més endavant els detallo amb més profunditat.
Abans de realitzar la pràctica han omplert un qüestionari on se'ls demana, entre d'altres coses, si han estudiat prèviament equacions diferencials. Això ho fem per avaluar si realment la pràctica els hi aporta quelcom nou. També s'ha fet per esbrinar si la metodologia té prou acceptació, recordem que prèviament ja han realitzat una unitat d'àlgebra. En l'annex reproduïm el qüestionari.
Estructura de la unitat didàctica:
Activitat 0:
Per tal de fer més amè el tema i motivar l'estudiant envers aquest apassionant món, s'efectua una breu introducció periodística de l'experiment de la nau espacial "Colúmbia" pilotada per Miguel López Alegría. Vaig considerar oportú respectar el format periodístic. Encara que ho podem trobar en l'annex, m'ha semblat adequat reproduir aquesta introducció (figura 8) per tal que es pugui observar com es va encetar el tema:

Introducció.
Miguel López Alegría ha estat el primer astronauta espanyol que ha viatjat a l'espai. Dintre del transbordador espacial "Colúmbia" va ser 16 dies donant voltes al nostre planeta (una cada 90 minuts) en una òrbita fora de l'atmosfera de la Terra.



Transbordador espacial “Colúmbia”

La NASA (National Aeronautics and Space Administration) va ser fundada el 1958 i només 11 anys després va assolir amb èxit el seu primer objectiu: el 21 de Juliol de 1969, d'acord amb la data prevista per Kennedy, els astronautes Armstrong i Aldrin, tripulants del mòdul lunar de l' “Apolo 11”, van aconseguir alunitzar i retornar sans i estalvis a la Terra.
Però els darrers objectius de la NASA han estat situar a l'espai nombrosos satèl.lits artificials (principalment de comunicacions) i realitzar certs experiments, fent servir el Colúmbia. El treball a realitzar per Miguel López Alegría, a més del pilotatge, va consistir en l'estudi del moviment dels cossos en condicions de gravetat i densitat atmosfèrica diferents a les existents a la Terra.
És indispensable, però, preveure els resultats d'aquests experiments per no córrer riscos innecessaris. Les condicions de diferent gravetat i densitat atmosfèrica es poden modelitzar matemàticament, i així obtenir uns resultats previs, òptims, als experiments que posteriorment portaran a terme els astronautes.

Figura 8. El món de les equacions diferencials. Activitat 0.

Activitat 1:
L'objectiu és que l'estudiant es familiaritzi amb l'argot propi dels conceptes físics que hi pareixen i esbrinar, tot dirigint la pràctica, el grau de coneixement que tenen dels conceptes de gravetat i de la llei de Newton i de la interpretació que en fan, així com la interpretació física de la derivada.
Activitat 2:
En aquesta activitat es dirigeix el modelatge d'un tipus usual d'equació diferencial lineal. Com que prèviament han estudiat càlcul integral, ho modelen a partir del concepte intuïtiu, propi que tenen els enginyers del diferencial.
Introduïm d'una manera constructiva i de forma que els estudiants ho vagin descobrint, el concepte de *camp de pendents*. La idea és que de forma gràfica assoleixin la solució de l'equació diferencial.
També introdueixo d'una manera esglaonada les definicions formals de tot allò que van descobrint al llarg del procés d'aprenentatge.
Activitat 3:

En aquesta activitat l'objectiu és que reconeguin tant gràficament com analíticament "la solució" i/o "les solucions" de l'equació diferencial que han modelat. Al llarg de tot el camí seguit s'han anat fent suggerències i indicacions de com han de resoldre l'equació, per exemple: proposant que integrin.
Activitat 4:
En aquesta activitat es proposen situacions anàlogues, per tal que s'adonin que tenen el mateix model o similars.
Es presenten els següents models:
1. Els insectes del jardí de l'escola: Model de creixement d'una població.
2. Anem a esquiar! : Model clàssic de la màquina llevaneu.
Activitat 5:
S'inclou una miscel.lània, sota el títol de *recorda i practica*, dels mètodes més habituals en la resolució d'equacions diferencials de primer ordre i de les fórmules més representatives de les àrees de coneixement dels estudis que configuren la carrera que estudien. És a dir: fórmules de circuits i de física.
Tot seguit s'inclou una llista d'exercicis d'aplicació per tal que reconeguin els diferents models i assoleixin amb èxit la solució demanada.

3.4.3. Desenvolupament de les sessions
En aquest apartat destaquem les dades de la població analitzada, el guió estimat de treball, l'evolució de les sessions i els dubtes manifestats pels estudiants.
1. Dades d'interès:
Població: Estudiants de 2n quadrimestre d'enginyeria informàtica.
Assignatura: Anàlisi matemàtica.
Tema: Equacions diferencials.
Hipòtesi de treball: Els alumnes no han estudiat prèviament equacions diferencials.
Objectius:Extreure resultats positius de l'aprenentatge creatiu de les equacions diferencials a partir d'un procés de modelització.
Es pretén que un cop acabada la realització de l'esmentada unitat els alumnes puguin reconèixer i resoldre models afins o similars als presentats en la unitat didàctica, preferiblement amb la mínima ajuda del professor.
2. Guió estimat de treball
Inicialment, es presenta la unitat on es modelitza un cert tipus d'equació diferencial lineal. Aquest treball es pretén que el desenvolupin per si mateixos en una primera sessió d'aproximadament 1.5 h.. Tot seguit, la mateixa unitat els suggereix d'una manera natural d'altres models més complexos sota el títol d'entreteniments i per això s'estima una durada d'uns 45 minuts. En la resta de temps fins a exhaurir les 4 h previstes es realitzen problemes tradicionals alternats amb problemes concrets d'aplicacions a la tècnica.
Durant la realització d'aquests exercicis proposats s'interpel.la els estudiants perquè els exposin a la pissarra i, si s'escau, el professor donarà indicacions tot fent un paral.lelisme amb el problema modelitzat en el si de la unitat.
Les opinions manifestades pels estudiants estan recollides en format àudio.
3. Evolució de la primera sessió: dimarts 19/12/95
D'aquesta sessió existeixen documents gràfics (retrats) i sonors (àudio).
A les 17:05 h, el professor arriba a l'aula i fa la presentació de la unitat didàctica de les equacions diferencials. Aquesta unitat tindrà un pes d'un punt sobre la nota final. S'explica que la unitat és composta per dues unitats i que els alumnes n'han de triar una.

A les 17:20 h es reparteixen els projectes — projecte 1, projecte 2 i projecte 3 —. Cada alumne ha pogut triar el projecte que ha volgut. Els projectes tindran un pes de dos punts sobre la nota final.
A les 17:30 h, els estudiants comencen a resoldre la unitat didàctica, tot comentant els dubtes entre ells. A mesura que avança la sessió, els alumnes pregunten els dubtes importants al professor. Cadascun d'aquests dubtes s'enregistra en un magnetòfon, juntament amb el nom de l'alumne, i després s'apunten en aquesta memòria — vegeu punt següent —.
A les 18:30 h , pràcticament tothom ha acabat l'activitat 2.
A les 18:45 h, tothom ha acabat l'activitat 3.
A les 18:55 h, finalitza la sessió del dimarts 19/12/95.
4. Dubtes i aportacions d'interès fetes pels estudiants
Eduard E.: No entén què vol dir que la velocitat és inversament proporcional a l'alçada i, per tant, no sap arribar a la solució $v(t) = \frac{k}{h}$.
Immaculada: Al final de l'activitat 2 es fa un embolic entre v(t) i v'(t) i no sap com substituir-les a l'equació diferencial.
David V.: La gràfica velocitat-temps de l'activitat 3 no li surt bé i observa que és culpa de l'eix dels temps. Arribem a la conclusió, doncs, que cal fer un canvi d'escala
de forma que en el mateix interval d'espai el temps arribi fins a 60 segons.
Àngel Luis G.: No entén la pregunta 2 de l'activitat 4, quan diu *planteja una relació algebraica*. No entén què vol dir *relació algebraica*.
Mònica C.: Fa la mateixa observació que David V.
Sung C. : No entén la pregunta 4 de l'activitat 2: *recula uns quants fulls enrere i dibuixa el camp de pendents en una xarxa prou petita.*
Pregunta efectuada pel professor: ¿tu creus que un alumne aprèn més d'aquesta manera (amb les unitats didàctiques) o d'una altra?
Resposta: Sí que n'aprèn més, però no hi estem acostumats. Estem acostumats a ser avaluats d'una altra manera i aleshores potser estudiem només per ser avaluats i no per aprendre. Però aquesta forma d'avaluar és més bona i si es millora i es poleix pot ser una alternativa a l'ensenyament tradicional. Agustí G. (ve d'FP).
5. Evolució de la segona sessió: dimecres 20/12/95
De 5h. a 5h. 30': Els estudiants elaboren l'activitat 4, sense preguntes.
De 5h. 30' a 5h. 45': Omplen el qüestionari de conclusions on plasmen les seves opinions.
De 5h. 45' a 7h.: El professor recull les pràctiques i interpel.la els estudiants sobre els models apareguts en "els astronautes" i "entreteniments". Pràcticament tothom arriba a deduir les edo`s i fins i tot a resoldre-les.
El professor explica teoria d'equacions diferencials a partir del que ells han fet, parla de corbes integrals i de solucions gràfiques, -camp de tangents- i explica les edo's del tipus: y' = ay , sempre fent notar que són els casos apareguts en el creixement d'una població.
Es calcula la solució general i també es comenta el "problema de Cauchy"; es pregunta si n'han trobat algun cas i els estudiants diuen que sí, que ha sorgit en algun model.
Tot seguit un estudiant resol a la pissarra el cas y' = ay + b.
El professor està satisfet de com han deduït i resolt l'edo del problema de la màquina llevaneus -arriben fins a la solució general, però no saben trobar l'hora en què va començar a nevar-.
Acaba la classe proposant una llista d'exercicis que es corregiran el proper dia (activitat 5).

L'endemà, dijous, es fa una sessió a nivell particular per recollir els guions que suggereixen els estudiants per tal d'efectuar els projectes.

3.4.4. Correcció i anàlisi de la unitat didàctica
Adjuntem en la taula 8 el quadre de respostes correctes, seguidament un llistat del què diuen que han parés els estudiants i finalment respostes a diverses preguntes d'acord amb l'instrument de recerca nº 9 (qüestionaris).

	0	1	2	3	no
Activitat 1					
Els objectes de les tres figures...	0	0	0	11	
Quin creus que arribarà...	0	0	0	11	
Observa una altra vegada...	1	0	0	10	
Dibuixa sobre el següent esquema...	0	0	1	10	
Per tant, completa la següent expressió:	0	0	0	11	
Escriu l'expressió del pes d'una...	0	0	0	11	
Rescriu l'expressió 1...	0	0	0	11	
Quin valor té l'acceleració...	0	0	1	10	
Fent servir aquesta igualtat...	0	0	1	10	
Ara només tenim una variable,...	1	0	0	10	
Prenent els següents valors...	0	0	0	11	
L'expressió que t'ha resultat...	0	0	0	11	
Ara, donat que a l'equació només tenim una variable,...	5	1	3	2	
Activitat 2					
Observa l'equació i identifica-hi...	0	0	0	9	2
Fent servir v', torna a escriure...	0	0	1	8	2
Completa, doncs, la següent taula:	0	0	0	9	2
Sobre la següent gràfica,...	0	0	6	3	2
Segons la gràfica de pendents que has dibuixat abans,...					
Quina d'aquestes funcions exponencials...	1	0	0	8	2
Creus que la darrera funció que hem vist...	2	0	1	6	2
Calcula, doncs, el valor de C:	0	0	0	9	2
Substitueix a la família de funcions anterior...	0	0	1	8	2
Calcula la derivada de la funció v(t):	0	0	1	8	2
Substitueix v(t) i v'(t) a...	0	0	1	8	2
Activitat 3					
Torna a escriure la solució...	0	0	0	11	
Completa, doncs, la següent taula...	0	0	0	11	
Representa a la següent gràfica...	0	0	1	10	
Quin serà el valor màxim...	2	0	0	9	
Encara que l'alçada des de la...	1	0	0	10	
Activitat 4: entreteniments					
Els insectes					
1) Com expressaries...	0	0	6	5	

2) Segons l'enunciat,...	0	0	3	8	
3) L'equació obtinguda,...	0	1	1	9	
4) Recula uns quants...	1	0	10	0	
5) Indica analíticament...	1	0	4	6	
6) Quantes solucions...	3	0	3	5	
7) Tria quines...	2	0	0	9	
8) Sigui l'EDO...	7	1	2	1	

	0	1	2	3	no
Anem a esquiar!					
1) Si anomenem...	0	0	1	10	
2) Creus que...	0	0	0	11	
3) Creus, doncs,...	0	0	0	11	
4) En cas afirmatiu...	1	0	1	9	
5) Escriu la velocitat...	0	0	0	11	
6) Descriu l'expressió...	1	0	1	9	
7) Calcula l'espai...	6	0	1	4	
8) Quantes constants...	8	0	0	3	
9) Si la màquina...	10	1	0	0	
10) Si la màquina...	10	1	0	0	

Taula 8. Quadre de respostes correctes (total: 11 alumnes)

Què diuen que han après els alumnes en cada activitat?

Activitat 1
Teoria: La majoria d'alumnes respon *la força gravitatòria, les forces d'atracció, la gravetat i el camp gravitatori*. D'altres respostes són *les EDO's, les lleis de Newton i gràfiques de pendents.*
Significat: La majoria d'alumnes respon *l'aplicació de les EDO's per trobar una solució (que és la velocitat d'un cos),* o simplement *introducció a les EDO's*. D'altres respostes són *atracció d'un cos per la força de la gravetat i signe de les forces.*
Dificultats: La dificultat més important és *no saber resoldre l'EDO*, ja que cap dels alumnes no ha vist mai equacions diferencials.
Grau de coneixement: En general, *bé*.
Activitat 2
Teoria: La majoria d'alumnes respon *el càlcul d'equacions diferencials*.
Significat: La majoria d'alumnes respon *saber resoldre una equació diferencial*. D'altres respostes són *relació entre les EDO's i les gràfiques, i l'EDO és una equació amb derivades*.
Dificultats: No hi ha cap dificultat important, si bé algun alumne comenta que *és difícil resoldre EDO's, costa relacionar els valors dels pendents amb la taula, i costa reconèixer els termes.*
Grau de coneixement: Varia: *molt bé, bé i regular.*
Activitat 3

Teoria: La majoria d'alumnes respon *representació gràfica de la velocitat d'un cos* o, simplement, *representació gràfica.* D'altres respostes són *resolució gràfica d'una EDO, i relació entre v i t.*
Significat: La majoria d'alumnes respon *representació gràfica.*
Dificultats: No n'hi ha cap.
Grau de coneixement: *Bé o molt bé.*
Activitat 4
Teoria: La resposta majoritària és *EDO's.* També, *creixement instantani, creixement a mesura que passa el temps, i aplicació de la teoria vista anteriorment.*
Significat: La majoria d'alumnes respon *aplicació de les EDO's a la pràctica.* També, *aplicació de les activitats anteriors, i saber expressar les derivades respecte al temps.*
Dificultats: Les dificultats més importants són *el final del problema dels insectes i el final del problema de la neu*, és a dir, la complicació es troba a l'hora de resoldre les equacions diferencials.
Grau de coneixement: *Regular.*
Respostes dels alumnes a diverses preguntes
1) Has estudiat algun cop equacions diferencials?
Cap dels alumnes no ha estudiat mai equacions diferencials, si bé n'hi ha dos que saben de què va.
2) Quina unitat didàctica has escollit i per què?
Els alumnes analitzats han triat tots la unitat didàctica dels astronautes. La majoria diu que perquè *és la primera que han trobat a l'hora d'obrir el plec de fulls*. D'altres també diuen que l'han escollida perquè *els ha semblat divertida*, o perquè *toca temes que són familiars*, o perquè *és visual i simple de resoldre*.
3) Quin mètode d'ensenyament creus més adequat per a les teves necessitats?
a) El tradicional. Un alumne creu que aquest *és interessant per donar una base*.
b) El creatiu (modelització d'una situació real).

Quasi tots els alumnes estan d'acord amb aquest mètode. La majoria pensa que *està bé perquè veus les matemàtiques aplicades a la realitat.* Una altra opinió important trobada és la de dir que *el millor seria ensenyar les matemàtiques usant el 50 % del mètode tradicional i el 50% del creatiu.* D'altres opinions són: *està bé si t'ajuda el professor, està molt bé per introduir un tema que no has vist mai, i està bé perquè és un mètode guiat.* Un alumne fa un comentari interessant: *aquest mètode està bé, però m'agradaria veure les matemàtiques aplicades a la informàtica, que és la carrera que jo estudio.*

3.5. EL PROJECTE

3.5.1. Breu explicació

El curs d'anàlisi matemàtica on es realitzaren i s'avaluen diverses pràctiques de modelatge, culminà amb el treball en grup (instrument de recerca nº 3).
No m'estendré en aquest punt doncs ja he parlat dels objectius i de la importància d'aquest tipus de treball en la secció dels instruments de recerca. El que exposaré es refereix als continguts que he proposat i al perquè .
La idea central es basa en el fet d'esbrinar si els estudiants són capaços de desenvolupar un problema real a partir de la informació que els facilita el professor.
Inicialment es proposen tres temes extrets de situacions reals (annex 5) i que més endavant detallo. Com he mencionat en diverses ocasions, en els projectes treballen sobre el model i en les unitats didàctiques construeixen el model. La característica

fonamental en que ens hem basat per triar els projectes, es el fet de que el model que treballen és el que han trobat en les unitats didàctiques prèvies, d'aquesta manera existeix una forta connexió entre les unitats i els projectes.
Els estudiants tenen un guió per tal d'obtenir d'una manera dirigida i supervisada pel professor, la informació necessària per treballar sobre el model plantejat. A diferència de les unitats didàctiques en les quals els estudiants construïen el model, en el treball en grup, el model el troben en les explicacions del professor en sessions de tutoria fora de les hores de classe. Aquestes sessions estan recollides en un suport en format àudio. Han de treballar sobre el model i extreure'n conclusions. D'aquesta manera es pretén que el procés d'aprenentatge de les matemàtiques en els estudis tècnics sigui mes fluït. Alhora, en aquests tipus de treball, es desenvolupa la capacitat d'organització en grup; també es valora la presentació del treball i la seva exposició oral. Un enginyer ha de ser capaç de fer una bona presentació dels documents i investigacions que la dinàmica de la seva professió exigeix. Per això vaig considerar oportú que un cop finalitzat el treball, es fes una explicació pública del problema que havien analitzat.
En l'exposició els mateixos alumnes qualificaven els companys en diversos aspectes, com ara: continguts, engrescament, mitjans utilitzats, etc. Per portar a terme aquesta tasca, el dia de les exposicions orals, el públic (és a dir els altres companys) tenia una graella (annex 6) on puntuava aquests aspectes de 1 a 5. En aquesta graella també se'ls demanava que diguessin si havien après quelcom i que en cas afirmatiu ho expliquessin. És important que un futur tècnic aprengui a redactar un informe en la seva formació acadèmica i a expresar-se en públic.
Els projectes van ser proposats el novembre de 1995 i llegits a finals de gener de 1996.
En les exposicions, i eren presents 36 estudiants i he recollit una mostra del promig de resultats dels companys que van fer les exposicions (punt 3.5.2.). Aquestes exposicions estan recollides en vídeo.
A continuació incloc les propostes de projectes i la informació que els vaig donar:
Els projectes parteixen, doncs, de situacions on hi han involucrats els models descoberts en les unitats didàctiques, caldrà per tant que els estudiants investiguin situacions reals on apareixent aquests models.
L'objectiu del primer projecte, és que partint d'un cas real -creixement d'una població de conills- l'estudiant aprengui a desenvolupar per si mateix les eines matemàtiques escaients per tal de resoldre la situació plantejada. El problema proposat és modelitzat per la teoria de valors i vectors propis. Per tant, els objectius a assolir són l'aprenentatge dels valors propis i vectors propis i la seva connexió i utilitat en situacions reals.
En el segon projecte, l'objectiu és l'aprenentatge del càlcul de la potència enèsima d'una matriu usant la diagonalització. Aquest model matemàtic apareix, en aquest cas, de la necessitat de cercar el terme enèsim de la successió de Fibonacci. La successió es presentada a partir de l'estudi d'un hipotètic virus informàtic a l'escola.
En el tercer projecte, l'objectiu és comprovar que les equacions diferencials no lineals pròpies de diverses situacions tècniques -oscil.lacions esmorteïdes-, poden modelitzar-se a través de models d'àlgebra lineal. I que, per tant, amb l'ús de conceptes matricials poden ser resoltes.
En l'annex 3 podem trobar els continguts dels projectes.
El format de presentació dels projectes s'estructura tal com s'ha dit:

0. Portada: cal incloure el títol i el nom dels estudiants que realitzen el projecte.
1. Índex.
2. Explicació detallada de la situació i els model. N'hi ha prou amb un breu resum, sense demostracions.
3. Resolució del problema proposat.

4. Mètodes matemàtics: cal incloure una llista dels conceptes matemàtics utilitzats.
5. Conclusions: ha d'incloure el resum dels descobriments fets i els comentaris sobre les limitacions.
6. Recursos: ha d'incloure la relació dels llibres consultats i ajuts obtinguts.

3.5.2. Conclusions de les exposicions

En aquest apartat mostrem una taula (taula 9) on apareix el resum-promig de les valoracions efectuades pels estudiants en les exposions i defensa dels projectes presentats a classe.

Nom estudiants	Presentació del material imprès	Expressió	Mitjans utilitzats	Contingut	Engrescament	Aplicació pràctica	Has après?
Villalba		4	4	4	3	4	3
Mateos		3	5	4	3	4	3
Barrot		3	4	3	3	4	3
Sabaté		3	5	3	3	4	3
Melchor		4	3	3	3	4	3
Bres		4	4	3	3	4	3
Cobo		4	3	4	4	4	3
Díaz		4	3	4	4	4	3
Llamas		4	4	4	3	4	3
Artigas		4	3	3	3	4	3
Choi		3	3	3	3	4	3
Eastaway		4	3	4	3	3	3
Torroja		4	3	3	3	3	3
	1 Molt escàs	1 Diu coses	1 Mira els apunts sempre	1 Poc clar	1 T'avorreix	1 Cap	1 Gens
	2 Justet	2 S'entrebanca	2 Mira els apunts sovint	2 Costa d'entendre	2 Actua amb por	2 Potser ?	2 Poc
	3 Passable	3 Acceptable	3 Mira poc els apunts	3 S'entén	3 Bé, però ensopit	3 Poques	3 Quelcom
	4 Acurat	4 Mostra seguretat	4 Només usa els apunts en casos puntuals	4 Clar	4 Emfatitza en els conceptes importants	4 Diverses	4 Bastant
	5 Excel.lent	5 S'expressa amb claredat i seguretat	5 Mai utilitza els apunts 5' Transp	5 Molt clar	5 T'engresca moltíssim.	5 Moltes	5 Moltíssim

Taula 9. Valoració del treball exposat per companys.Resultats del promig d'una mostra de 36 respostes.

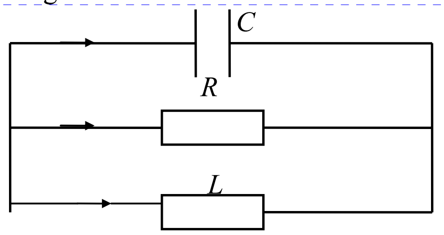
En el següent capítol, hem fet una selecció de diversos estudiants per analitzar els resultats i les explicacions que han manifestat. L'objectiu d'aquest seguiment és el de validar el procés d'aprenentatge.

L'examen

Al final de l'experiència global de modelització, vaig realitzar un examen per tal d'esbrinar si els coneixements adquirits per descobriment i per construcció, estaven assolits. El resultat va ser prou bo, pràcticament tothom el va fer amb èxit. Reprodueixo tot seguit el problema proposat (figura 9).

- Sigui el circuit elèctric següent:

Comentario:



a) Raoneu el perquè aquest circuit està descrit pel sistema d'equacions:

$$\begin{pmatrix} I' \\ V' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} \qquad \text{(0.5 punts)}$$

b) Demostreu que els valors propis de la matriu del sistema són reals i iguals si $L = 4R^2C$. (1 punt)

c) Sigui $R = 1, L = 4, C = 1$. Si $I(0) = 1$ i $\mathrm{V}(0) = 2$, quant valen la intensitat de corrent i la diferència de potencial a qualsevol instant? (1.5 punts)

Figura 9. Model d'examen

3.6. INTEGRACIÓ DE LES TRES ACTIVITATS

Els objectius perseguits en l'elaboració dels treballs efectuats els podem sintetitzar en la voluntat d'assolir uns coneixements útils d'una manera heurística, focalitzats en les necessitats de l'especialitat que integra el currículum d'un enginyer tècnic.

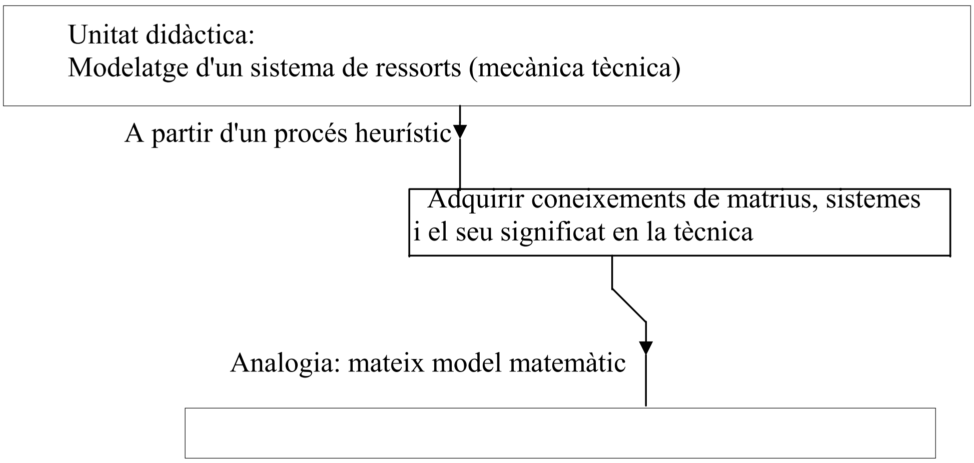
Els punts programàtics han estat observats – a partir dels instruments de recerca 1 i 3- com diversos fenòmens de la vida real poden ser formulats mitjançant models lineals.

En el cas de la unitat didàctica del "modelatge d'un sistema de ressorts" s'aconsegueix un model lineal que com hem vist és compartit per diverses situacions (model circulatori, model geomètric, model econòmic). L'expressió obtinguda és del tipus b=Ax.

En el cas de la unitat didàctica dels "astronautes i les equacions diferencials" s'aconsegueix d'una manera dirigida l'obtenció del model lineal d'equació diferencial. L'expressió en que s'arriba és: y' = ay.

Les dues unitats didàctiques anteriors, considerades com l'instrument de recerca nº 1, mostren que els estudiants descobreixen d'una manera heurística (a partir de les seves

habilitats) que ambdues estan integrades sota un comú denominador: al cap i la fi treballen amb models lineals per tal de resoldre les situacions plantejades.
En els projectes –com a instrument de recerca nº 3-, els alumnes treballen sobre els models lineals obtinguts en les unitats didàctiques en les diverses situacions plantejades. D'aquesta manera s'unifiquen les activitats de modelatge desenvolupades, tal com és pot visualitzar en l'instrument de recerca nº 10.
En aquestes situacions els hi cal diagonalitzar una matriu per tal de solucionar el problema que s'esdevé de la situació, fins i tot els hi cal per resoldre un sistema d'equacions diferencials –tal com es veu en el vídeo-.
Podríem afirmar, doncs, que en una primera fase els estudiants han après a construir models lineals de problemes reals. En una segona fase, els estudiants, a partir del problema real i del model construït en les unitats didàctiques han adquirit uns coneixements, arran de treballar el model, que els hi permet analitzar i resoldre situacions quotidianes més complexes del seu currículum acadèmic. D'aquesta manera es complimenten, coordinen i s'integren les activitats en les fases del procés de modelització.
Els continguts matemàtics de l'experiència presentada, els podríem enumerar com una conseqüència natural d'una part d'un temari usual de matemàtiques de primer curs d'enginyeria tècnica:
1. Matrius i determinants.
2. Sistemes d'equacions lineals.
3. Diagonalització.
4. Equacions diferencials de primer ordre.
5. Sistemes d'equacions diferencials.
El contingut que acabem d'enunciar, resulta familiar per la comunitat d'ensenyants de matemàtiques de les escoles universitàries. La proposta del modelatge com a eina d'ensenyament difereix com a metodologia de les tècniques tradicionals no només en la forma de presentar els temes –tal com s'esdevé dels instruments d'investigació-, sinó també amb el grau d'aprenentatge assolit pels estudiants. Aquesta metodologia innovadora ens permet tancar el cicle programàtic descrit veien la utilitat dels conceptes apresos i la necessitat d'aquestes eines per tal de resoldre problemes usuals de l'enginyer.
En síntesi, la manera de presentar els temes anteriors en la proposta ha seguit el següent esquema, on s'enumeren els punts del programa anterior i com s'han assolit (figures 10,11,12 i 13):



Aplicació: Estudi de xarxes vials, models geomètrics i econòmics.

Figura 10. Punts 1 i 2 (matrius, determinants i sistemes d'equacions lineals)

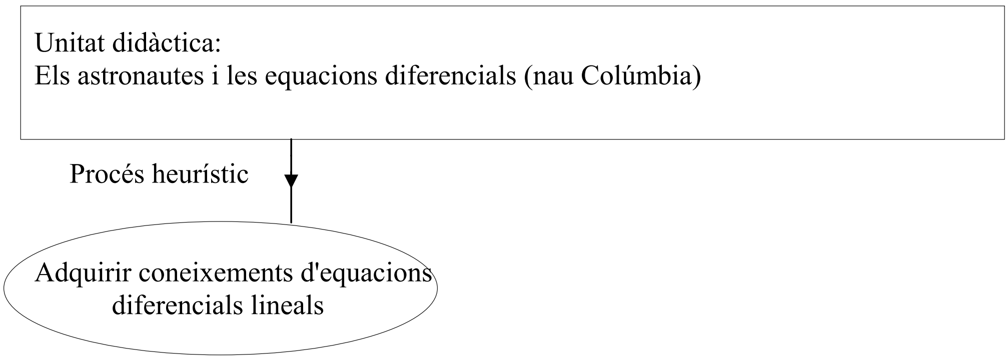


Figura 11. Punt 4 (equacions diferencials de primer ordre)

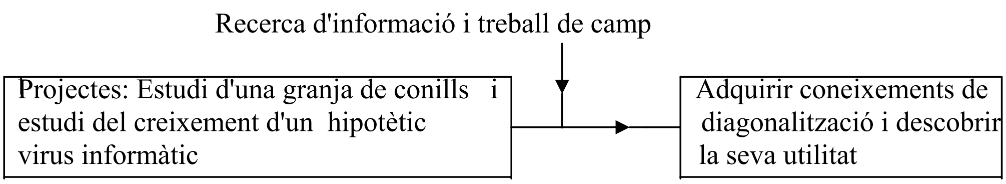
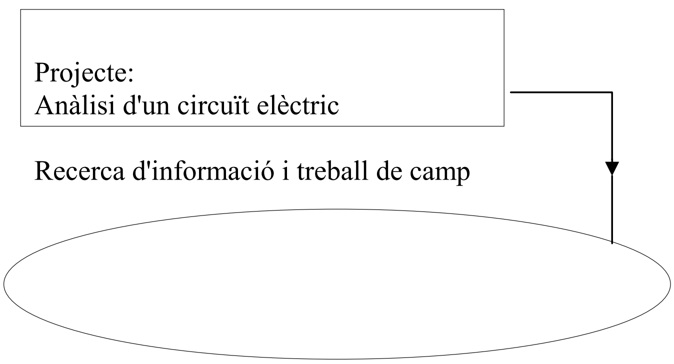


Figura 12. Punt 3 (Diagonalització)



Aprenentatge de la resolució d'un sistema d'equacions
diferencials lineal i del seu significat

Figura 13. Punt 5 (Sistemes d'equacions diferencials)

Hem vist doncs com s'integren les activitats proposades, i que totes comparteixen models lineals.
En el següent capítol es descriu com han evolucionat un grup d’estudiants que han rebut l’ensenyament fonamentat en aquesta metodologia innovadora.
En el darrer capítol, s’exposen les principals reflexions per tal de validar la metodologia en les escoles universitàries.

Capítol 4

Evolució d'un grup d'estudiants

4. EVOLUCIÓ D'UN GRUP D'ESTUDIANTS

" La teoria que no trobi una aplicació pràctica en la vida quotidiana, és una acrobàcia del pensament "

Swami Vivekananda

Índex del capítol

En el present capítol centrem la investigació en l'evolució de l'aprenentatge de cinc alumnes, tot graficant el procés d'aprenentatge. Inicialment es presenta una descripció vers la metodologia a partir dels seus propis comentaris, posteriorment s'interpreten les aportacions efectuades pels estudiants i s'estableixen tipologies de comportament matemàtic que s'esdevenen d'aplicar la metodologia. Finalment, i a partir dels instruments de recerca, presentem les conclusions de l'experimentació inicialment concretada amb els cinc alumnes i posteriorment contrastada amb les aportacions d'altres autors. El capítol finalitza aportant un seguit de reflexions referents al procés d'ensenyament/aprenentatge per modelització.

4.1. PERFIL DELS ESTUDIANTS

De les experiències de modelatge efectuades a l'assignatura d'anàlisi matemàtica d'enginyeria tècnica en informàtica, corresponent al curs 1995-96 de l'Escola Universitària Politècnica de Vilanova i la Geltrú, hem restringit l'estudi a cinc alumnes per tal de fer un seguiment més acurat i d'aquesta manera efectuar un estudi més profund i no tant dispers. Els mateixos són:
David V. (COU)
Mònica C. (COU)
Imma A. (COU)
Joaquim LL. (FP)
Sung C. (COU)
L'objectiu és l'anàlisi del procés d'aprenentatge seguint la metodologia exposada en la tesi: el modelatge com a via d'aprenentatge a través de les unitats didàctiques i el treball en grup.
Els criteris de selecció, tal com hem indicat en la secció de metodologia de la investigació (instrument de recerca nº 2), han seguit una distribució proporcional a la procedència (FP-COU) de l'alumnat, i dins d'aquesta procedència l'elecció s'ha fet a l'atzar. Tots ells han viscut en els seus estudis anteriors l'experiència de l'ensenyament tradicional i hem volgut comparar les dues metodologies d'aprenentatge per tal de validar quina és més apta per a les necessitats del futur tècnic.
Tots ells han treballat les unitats didàctiques del modelatge d'un sistema de ressorts, el món de les equacions diferencials, i han treballat en grup en els diversos projectes proposats.
En aquest capítol hem fet un recull gràfic de les opinions que han manifestat sobre les actuacions docents a què han estats sotmesos i un estudi interpretatiu dels continguts matemàtics apresos segons el punt de vista de l'investigador.
També reproduïm les anotacions que han efectuat en els seus treballs per tal d'estudiar la viabilitat d'aquests tipus de pràctiques. Això s'ha dut a terme mitjançant una graella dissenyada al final de cada unitat didàctica on es demana a l'estudiant el que ha après.
Aquestes graelles són útils per esbrinar el grau de coneixement que han assolit.

4.2. ANÀLISI DETALLAT DE CADA ALUMNE.

4.2.1. El curs 1995-96: Introducció.

Passem ara a analitzar els estudiants que han fet un curs amb dues unitats didàctiques i un projecte.
De les experiències de modelatge efectuades, i tal com hem mencionat en la secció anterior hem seleccionat un seguit d'alumnes (segons l'instrument de recerca nº 2) del curs d'anàlisi matemàtica d'enginyeria tècnica en informàtica corresponents al curs 1995-96 de l'Escola Universitària Politècnica de Vilanova i la Geltrú.
Tots ells han treballat les unitats didàctiques del modelatge d'un sistema de ressorts, el món de les equacions diferencials, i han treballat en grup en els diversos projectes proposats. Durant el curs els vaig proposar que elaboressin de manera voluntària un petit diari de sessions (instrument de recerca nº 7) on havien de fer una valoració dels continguts del curs. Com que era voluntari només ho varen fer un 40% dels estudiants. De fet és lògic que ho fessin pocs estudiants doncs la regularitat d'enquestes i

qüestionaris, tant de l'assignatura meva com de les altres, els resultava molt repetitiu. Malgrat tot, considero important les aportacions i idees que han manifestat i òbviament n'inclouré algunes.
El format del diari, segons l'instrument de recerca nº 7, era com segueix:

Nom:

Tema: Data inici: Data final:

1. Quins creus que són els punts més importants del tema?

2. Creus que tenen alguna utilitat?

3. Detalla els aspectes que han quedat clars.

4. Detalla els aspectes que han quedat foscos.

5. Pel que fa a l'ensenyament, creus que la forma d'exposar el tema té alguna diferència amb l'ensenyament tradicional?

6. Creus que el que has après té utilitat en la teva carrera, o fins i tot en la teva futura vida professional?.

Abans de plasmar els resultats d'aquestes valoracions, detallaré l'anàlisi d'un grup d'alumnes en les activitats de modelatge efectuades i en recolliré els suggeriments .
El format de l'estudi consisteix en una descripció del treball efectuat i dels seus comentaris, segons el següent ordre:
1. Modelatge d'un sistema de ressorts.
2. El món de les equacions diferencials.
3. El projecte.
De la mateixa manera que afegeixo fotocòpies dels seus escrits, també incloc un comentari i anàlisi personal de cada alumne, implementant gràficament l'evolució del procés d'aprenentatge en totes les fases de modelització.
Les gràfiques s'han afegit per tal de visualitzar l'evolució del procés d'aprenentatge. Hem construït una gràfica per cada pràctica (sistema de ressorts,equacions diferencials i projecte), valorant-se els aspectes cognitiu, heurístic i epistemològic a l'inici, en la meitat i al final de cada pràctica, per tal de veure l'evolució de l'alumne en cada període de temps i per a cada aspecte. Recordem breument què entenem per aspectes cognitius, heurístics i epistemològics. Per cognitiu, el grau de coneixement assolit i les produccions matemàtiques aportades arran d'aplicar la metodologia; per aspecte heurístic, les habilitats i tècniques desenvolupades per adquirir coneixements i establir resultats; i per aspecte epistemològic, la influència de les matemàtiques i l'impacte del modelatge a nivell social i curricular i alhora les connotacions entre matemàtica-realitat que s'esdevé d'aplicar la metodologia.
Aquesta valoració s'ha fet d'una manera qualitativa, donant tres valors possibles*: Poc*, *Acceptable* i *Molt bo* (aquests seran els tres valors possibles en l'eix de les *y*); seguint l'evolució temporal de l'alumne en cadascun d'aquests temes. Per l'eix de les *x,* s'han pres, doncs, els valors d'*Inici*, *Meitat* i *Final.* S'ha considerat *Inici,* l'espai de temps que partiria de la situació prèvia de l'alumne abans de començar cap activitat més la realització de l'activitat 1. El període anomenat com a *Final,* seria el que correspondria a l'última activitat de cada tema. Així, deixaríem com a *Meitat* la resta, que per exemple, en el cas del sistema de ressorts englobaria les activitats 2 i 3. El significat dels criteris qualitatius (*poc, acceptable, mol bo*), representen des del punt de vista del professor investigador el grau d'implicació assolit pels estudiants en l'experimentació de la metodologia. Així doncs, entendrem per *Poc* quan el professor/investigador considera

que no s'han assolit amb prou èxit els objectius d'aprenentatge. Per *Acceptable* quan l'aportació de la metodologia al procés d'aprenentatge ha provocat resultats prou bons en l'estudiant i a nivell curricular es podria considerar qualitativament a l'alumne com "apte", ja que des de el punt de vista del professor es considera que mostra una evolució prou bona en el procés d'aprenentatge. Per *Molt bo*, entendrem, que els resultats obtinguts de l'estudiant, fruit del seu treball i dels aspectes que s'investiguen estan per sobre dels esperats pel professor; tant a nivell cognitiu com heurístic i epistemològic, existint per tant una forta correlació amb l'adequació del mètode entre els resultats obtinguts i esperats.
Cadascuna d'aquestes valoracions s'ha extret dels instruments de recerca, en particular els instruments 1,3, 9 i 10 (unitats didàctiques, projectes, qüestionaris, vídeo). Aquests instruments de recerca els hem utilitzat per estudiar i fer un seguiment del procés d'aprenentatge dels 5 estudiants escollits segons l'instrument 2. L'instrument de recerca nº 7, l'hem usat bàsicament com a complement per validar la metodologia del modelatge com eina innovadora d'ensenyament/aprenentatge. En l'annex 6 s'inclou un model degudament complimentat del diari de sessions.
Finalment, s'afegeixen dues gràfiques globals, seguint els mateixos criteris qualitatius anteriorment citats. La primera d'elles, no és més que l'agrupació de les tres gràfiques anteriors; per tal poder observar millor i d'una manera sencera, els tres estudis, en un de sol. D'aquesta manera, s'han agrupat els inicis de cada pràctica, en els tres aspectes. I el mateix s'ha fet per les *meitats* i els *finals*.
La segona s'ha elaborat fent una mitjana aritmètica aproximada de la gràfica anterior. És a dir, s'han agafat tots els valors cognoscitius de tots els inicis i s'han resumit en un sol valor; i així també amb els aspectes heurístic i epistemològic a l'inici, meitat i final. Amb aquesta gràfica es vol unificar en sol esquema l'evolució temporal de l'alumne, d'una manera més global, i seria el resultat obtingut d'integrar tots els instruments de recerca.

4.2.2. El curs 1995-96: Perfils d'aprenentatge i anàlisi segons la tipologia de cada alumne.

Alumne1: Sung

El Sung és un alumne que ve de COU i que des del primer dia s'ha mostrat molt receptiu per aprendre conceptes nous de l'assignatura de matemàtiques i creu important que s'expliqui la utilitat de les matemàtiques en la vida real, per això considerem *molt bo* l'aspecte epistemològic.
En la figura 14 afirma "*tot parteix com a base de les matemàtiques,...*".

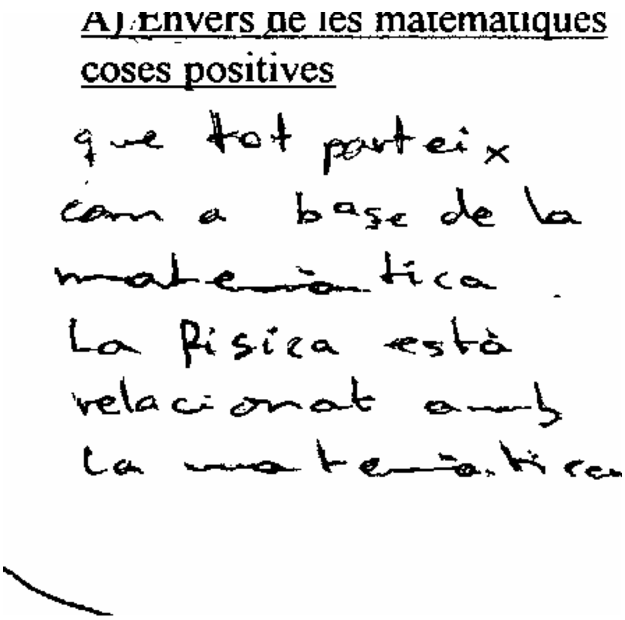
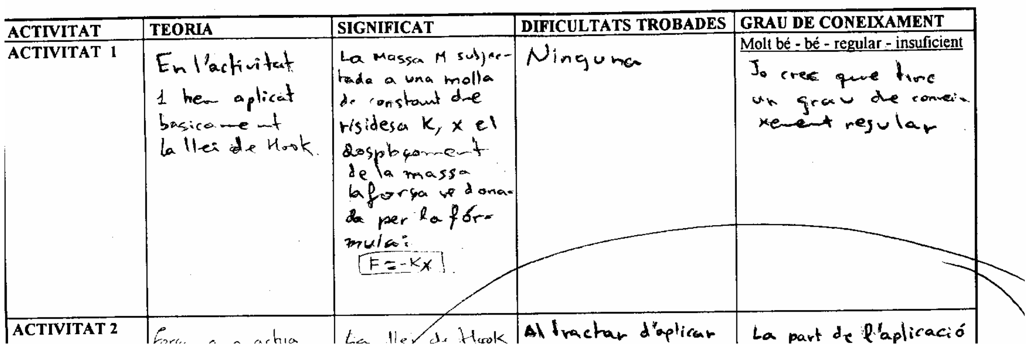

A) Envers de les matemàtiques
coses positives
que tot parteix
com a base de la
matemàtica .
La física està
relacionat amb
la matemàtica

Figura 14. Manuscrit Sung

Coneix les matrius i les integrals i hi sap treballar, però no sap resoldre equacions diferencials. Aleshores hem considerat que parteix d'uns coneixements acceptables en el tema de matrius, però pocs en el tema d'equacions diferencials.

1. Modelatge d'un sistema de ressorts

En l'activitat 1, que és la més senzilla, el Sung no ha trobat cap dificultat i creu que d'aquesta part en té un grau de coneixement regular tal com mostra la figura 15.



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT 1	En l'activitat 1 hem aplicat basicament la llei de Hook.	La massa M subjectada a una molla de constant de risidesa K, x el desplaçament de la massa la força ve donada per la fórmula: $\boxed{F=-Kx}$	Ninguna	Jo cree que tinc un grau de coneixement regular
ACTIVITAT 2	[illegible]	La llei de Hook	Al tractar d'aplicar	La part de l'aplicació

Figura 15. Manuscrit Sung

Així, a l'inici d d'aquest tema l'aspecte heurístic el considerem *acceptable*.

Quan arribem a l'activitat 2 ja comencen a aparèixer els problemes. A l'hora d'aplicar la llei de Hooke al càlcul de la força sobre dues masses, el Sung s'entrebanca amb els signes i ho indica tot dient que no entén ben bé el moviment de la molla que té un cos enganxat a cada costat. Això es veu a continuació en la figura 16 :

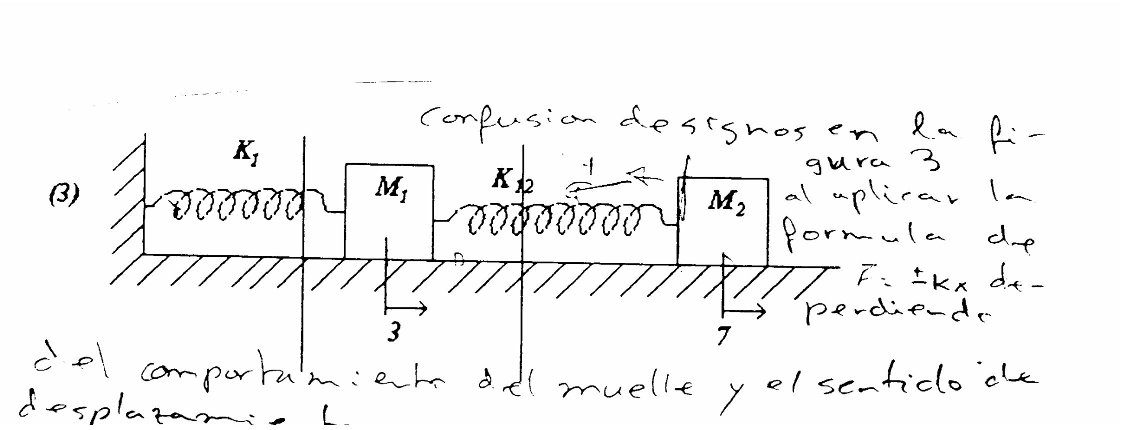
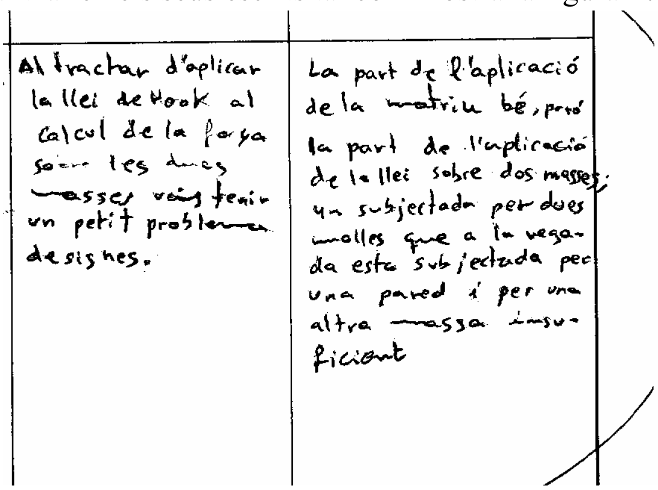


Figura 16. Extracte de la pràctica de ressorts del Sung

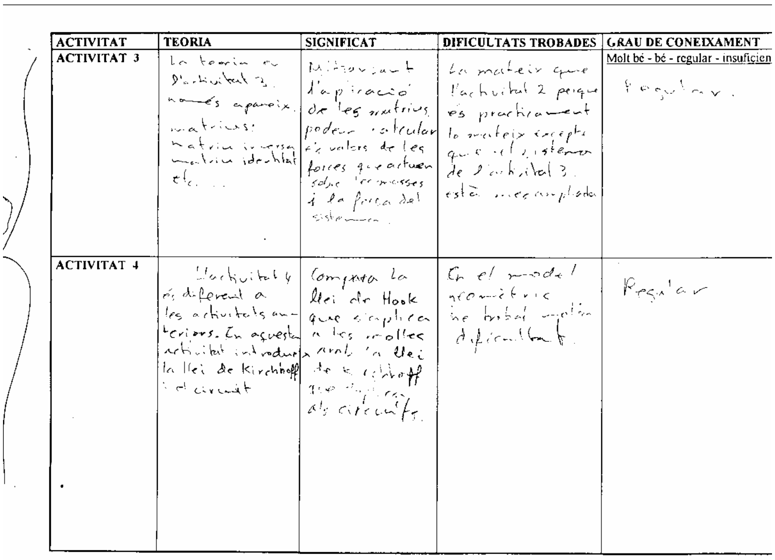
Sembla, tanmateix, que la molla enganxada a la paret s'entén amb més facilitat. El Sung pensa que aquesta activitat li costa d'entendre perquè no té prou coneixements.
Això ho podem visualitzar en els seus escrits tal com mostra la figura 17.



Al tractar d'aplicar la llei de Hook al calcul de la força sobre les dues masses vaig tenir un petit problema de signes.	La part de l'aplicació de la matriu bé, però la part de l'aplicació de la llei sobre dos masses, una subjectada per dues molles que a la vegada esta subjectada per una pared i per una altra massa insuficient

Figura 17. Detall de l'activitat 2 del Sung

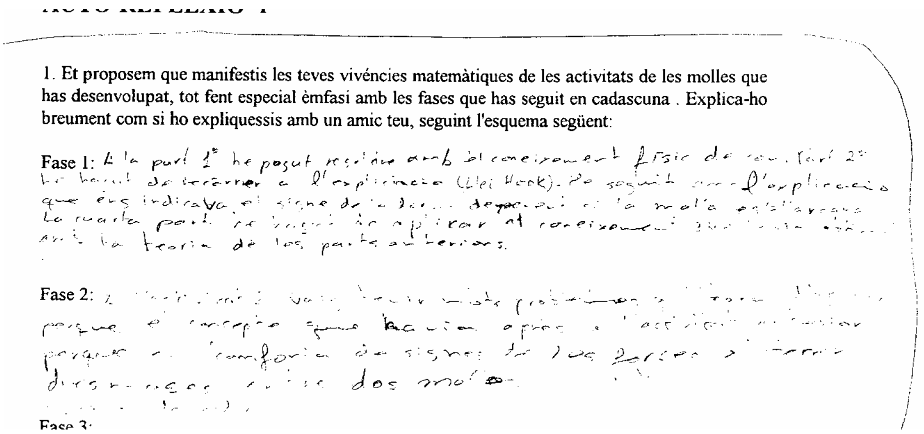
En l'activitat 3, el Sung troba les mateixes dificultats que en l'activitat anterior. Creu que el seu grau de coneixement d'aquesta part és regular. Per tant les habilitats i els coneixements a la meitat d'aquest tema els valorem com *pocs*.
L'activitat 4 és diferent de les anteriors. S'hi presenten unes aplicacions a través d'un model de xarxes, d'un model geomètric i d'un model econòmic. El Sung se'n surt bastant bé amb els dos primers models però no sap resoldre el tercer. Els seus coneixements sobre aquesta part són, segons l'instrument de recerca nº 1, regulars. Vegem-ho en la figura 18:



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT
				Molt bé - bé - regular - insuficien
ACTIVITAT 3	La teoria en l'activitat 3 només apareix matrius: matriu inversa matriu identitat etc. ...	Mitjançant l'aplicació de les matrius podem calcular els valors de les forces que actuen sobre les masses i la força del sistema.	La mateix que l'activitat 2 perquè és practicament lo mateix excepte que el sistema de l'activitat 3 està més complicada	Regular.
ACTIVITAT 4	L'activitat 4 és diferent a les activitats anteriors. En aquesta activitat introdueix la llei de Kirchhoff i el circuit	Compara la llei de Hook que s'aplica a les molles amb la llei de Kirchhoff que [illegible] als circuits.	En el model geomètric he trobat molta dificultat.	Regular

Figura 18. Comentaris de les activitats 3 i 4

El Sung explica les seves vivències matemàtiques a l'hora de resoldre les activitats: "*Per començar a resoldre l'activitat 1 n'he tingut prou amb els coneixements físics de COU, però per continuar he hagut de recórrer a l'explicació de la llei de Hooke que venia escrita a la pràctica. He continuat amb la indicació que ens parlava del signe de la força depenent de si la molla s'allargava o s'encongia. Al final de l'activitat 1 he hagut d'aplicar els coneixements que havia obtingut en la resta de l'activitat. En l'activitat 2 he tingut molts problemes a l'hora d'aplicar els conceptes que havia obtingut en l'activitat anterior perquè em confonia amb els signes de les forces, pel fet de tenir dues masses entre dues molles*". Aquests comentaris estan escrits en la figura 19 i els hem transcrit doncs en les còpies no es llegeix prou bé.



1. Et proposem que manifestis les teves vivéncies matemàtiques de les activitats de les molles que has desenvolupat, tot fent especial èmfasi amb les fases que has seguit en cadascuna . Explica-ho breument com si ho expliquessis amb un amic teu, seguint l'esquema següent:

Fase 1: A la part 1ª he pogut resoldre amb el coneixement físic de COU. [illegible] he hagut de recórrer a l'explicació (Llei Hook). He seguit amb l'explicació que ens indicava el signe de la força depenent si la molla s'allargava. La quarta part he hagut d'aplicar el coneixement [illegible] amb la teoria de les parts anteriors.

Fase 2: [illegible] problemes [illegible] perquè [illegible] conceptes que havia après [illegible] perquè em confonia els signes de les forces [illegible] dues masses [illegible] dos molles. [illegible]

Fase 3:

Figura 19. Explicacions del Sung de les seves vivències matemàtiques.

Ara, aplicant l'instrument de recerca nº 9, se li demana al Sung que digui les coses que creu que tenen en comú les tres activitats amb les quals ha treballat:

"*Les tres activitats parteixen del comportament de la molla respecte a les masses, l'estudi de la força respecte a la massa, la molla i la distància*".

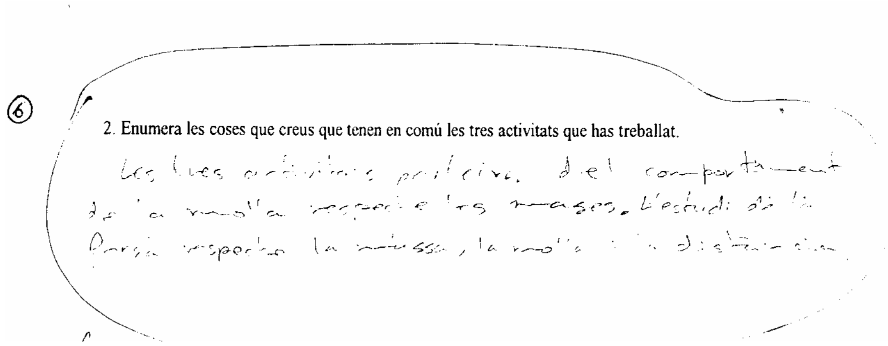
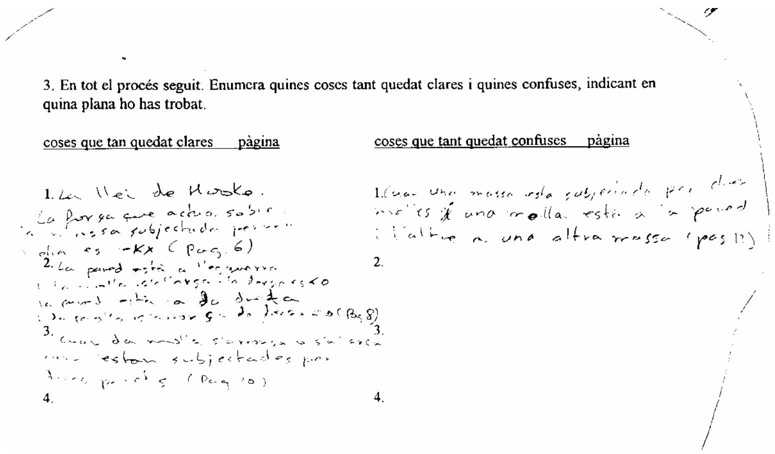

2. Enumera les coses que creus que tenen en comú les tres activitats que has treballat.

Figura 20. Comentaris del Sung sobre les tres situacions d'àlgebra lineal.

En tota la unitat didàctica hi ha coses que al Sung li han quedat clares i d'altres que li han quedat confuses. Les coses que li han quedat clares són:
1) La llei de Hooke (la força que actua sobre la massa subjectada per una molla).
2) La paret és a l'esquerra i la molla s'allarga, la força és negativa; la paret és a la dreta i la molla s'arronsa, la força també és negativa.
3) Quan hi ha dues parets, la molla de vegades s'allarga i de vegades s'arronsa.
El que li ha quedat més confús és la situació en què una massa està subjectada per dues molles i una de les dues molles està enganxada a la paret i l'altra a una segona massa.

Ho podem veure escrit per ell mateix en la figura 21.


3. En tot el procés seguit. Enumera quines coses tant quedat clares i quines confuses, indicant en quina plana ho has trobat.

coses que tan quedat clares pàgina	coses que tant quedat confuses pàgina
1.	1.
2.	2.
3.	3.
4.	4.

Figura 21. Llistat de conceptes clars i confusos.

A l'hora de donar l'opinió de les matemàtiques el Sung veu coses positives i coses negatives. El que és positiu és que tot parteix de les matemàtiques i que la física està relacionada amb les matemàtiques. Com a coses negatives tenim que en l'ensenyament tradicional no es veu la utilitat de les matemàtiques a la vida real. Això ho podem visualitzar en la figura 22.

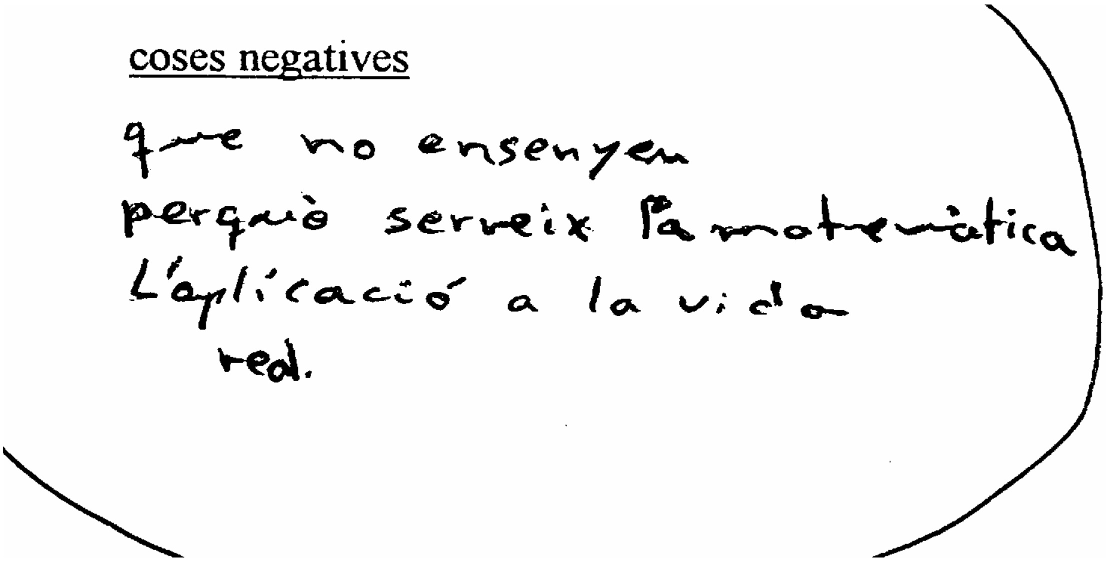


Figura 22. Reflexió del Sung

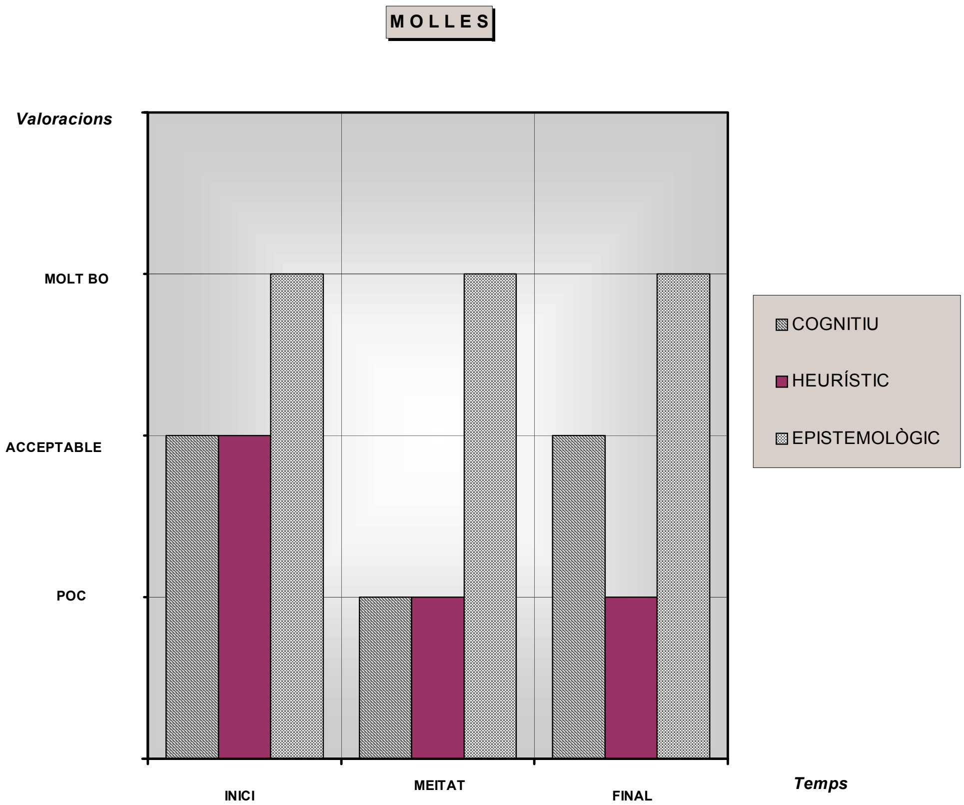
A nivell de coneixements matemàtics,malgrat tenia coneixements de càlcul matricial, ha après a calcular inverses de matrius i llurs propietats i alhora consolidar els coneixements que tenia de resolució de sistemes d'equacions lineals. Per aquest motiu interpretem que a l'inici de la pràctica el grau de coneixement matemàtic es acceptable, durant la pràctica poc doncs s'encallava en el càlcul d'inverses. Al final de la pràctica de ressorts i mercès a les situacions plantejades en les darreres activitats, aprèn a cercar inverses i a resoldre correctament sistemes d'equacions lineals; per aquest motiu considerem que al final de la pràctica el grau de coneixement es acceptable.

D'aquesta manera es podrien resumir els resultats anteriors en la següent taula:

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Poc	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo

Taula 10. Valoracions qualitatives d'àlgebra lineal

Aquests valors els podem graficar en la taula 11 de la següent manera:



Taula 11. Gràfica de les valoracions qualitatives d'àlgebra lineal

Si interpretem la gràfica, podríem dir que per la realització d'aquesta pràctica, el Sung porta inicialment, uns bons coneixements matemàtics i per això no es troba amb gaires problemes al resoldre les primeres activitats (nivells heurístic i cognoscitiu acceptables). En les activitats posteriors, una mica més complicades, es troba amb més problemes per resoldre bé l’exercici i se li nota que no té tanta habilitat com al principi (baixa el nivell en l’aspecte heurístic).
Finalment, veiem que continua tenint problemes a l’hora de resoldre certes qüestions. Tanmateix, interpreta molt bé els conceptes (nivell epistemològic molt bo en tots els casos).

2. El món de les equacions diferencials
El Sung no ha estudiat mai les equacions diferencials, però sap el que són perquè les ha vist a física de COU. En aquest treball d'equacions diferencials hi ha dues pràctiques per triar. El Sung ha triat la primera, la dels astronautes, i ho explica així:
"*m'ha agradat la dels astronautes perquè he vist que l'explicació era més àmplia i detallada, i a més és la primera pràctica que he trobat*".
Observem la seva resposta exacta en la figura 23:

2. Quina unitat didàctica has escollit i perquè? L'activitat de les astranautes perquè he vist que la explicació ~~era~~ més àmplia i detallada i ~~a~~ més a ~~m~~és perquè era l'activitat primer de la pràctica.

Figura 23. Comentari d'equacions diferencials.

En aquesta pràctica, el Sung ha començat resolent l'activitat 1 que tracta de la força gravitatòria. En aquesta activitat, l'alumne ha tingut problemes a l'hora de començar a resoldre l'equació diferencial. Això no obstant pensa que el seu grau de coneixement sobre el tema és bo. Per tant, valorem com a *poc* els aspectes heurístics i cognoscitiu a l'inici del tema. Vegem-ho en la figura 24:

CTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT
CTIVITAT 0	Introducció	Una introducció a la Activitad de l'astronauta.	cap	Molt bé - bé - regular - insuficient Bé.
CTIVITAT 1	[illegible]	[illegible]		

Figura 24. Graella activitat 1.

A l'activitat 2 es tracta del càlcul de l'equació diferencial. Per al Sung el significat d'aquesta activitat és (figura 25):

1) l'equació diferencial és aquella que presenta derivades,
2) es veu la relació de la variable respecte al pendent.

De dificultats, no n'ha trobat cap gràcies als detalls aportats per les funcions i gràfiques plasmades en la unitat didàctica. El seu grau de coneixement sobre aquesta part es, segons el Sung, regular (figura 25). Interpretem que l'opinió de regular s'esdevé un argument prudent per part del Sung. Per ell, al ser el primer contacte amb les equacions diferencials li provoca -anàlogament que amb els altres companys que han desenvolupat la pràctica- una certa inseguretat a l'inici de les activitats. Malgrat les seves opinions i en funció del seu treball considerem que a meitat de l'activitat i al final l'aspecte cognitiu es acceptable. El Sung ha après a resoldre correctament les equacions diferencials plantejades i llur significat, no demostrant en cap moment cap error analític en la seva resolució.

ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT
ACTIVITAT 2	- Calcul de la equació diferencial - Analització de la equació diferencial	~~Es~~ la equació diferencial és aquella equació que presenta derivades - relació de la variable respecte a la pendent.	No he trobat cap dificultat. i crec que si no hi hagués estat els detals de les funcions gràfiques ~~no~~ hagués trobat molta dificultat.	Molt bé - bé - regular - insuficient Regular
ACTIVITAT 3				

Figura 25. Detall graella activitat 2.

Passem ara a l'activitat 3. S'hi exposa gràficament la relació entre el temps i la velocitat. No hi ha trobat cap dificultat. El seu grau de coneixement és bo. Vegem-ho en la figura 26.

ACTIVITAT 3	Relació entre el temp i la velocitat ~~mitjançant~~ ~~etc~~ gràficament.	- ~~La~~ relació gràfica entre ~~la~~ la velocitat i el temp ~~està lim~~ ~~no està definit~~ està limitat per la velocitat.	cap.	Bé.

Figura 26. Graella activitat 3.

Activitat 4. Problema del creixement a mesura que passa el temps. El Sung entén que en aquesta pràctica es fa una aplicació de les activitats anteriors. Les dificultats trobades aquí són:

1) trobar la funció adequada del problema 1,
2) confusió entre l'alçada, l'hora i la distància en el problema de la neu.

Això ho podem visualitzar en la figura 27.

ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT
ACTIVITAT 4	- Problema de creixement a mesura que passa el temps	- Aplicació de les activitats anteriors per resoldre les ~~pregun~~ qüestionaris.	- treure la funció adequada del problema 1. - Problema (Amem a esquiar) he trobat dificultat en ~~el descripció~~ enunciat del problema (relació entre l'alçada, l'hora i la distancia) → he arribat fins al qüestionari 6	Molt bé - bé - regular - insuficient Regular
ACTIVITAT 5				

Figura 27. Detall activitat 4.

El seu grau de coneixement és regular. Així podem afirmar que a la meitat d'aquest tema ha adquirit uns coneixements i una habilitat acceptables per resoldre les activitats proposades. Els coneixements finals són valorats com *acceptables*, segons l'instrument de recerca nº 9 ha entès forces conceptes i això l'ha ajudat a resoldre millor la pràctica. Aplicant el mateix instrument de recerca, quan preguntem a l'alumne quin mètode d'ensenyament troba més interessant i li deixem triar entre el mètode tradicional

matemàtic (format per teoremes, definicions, etc.) i el mètode creatiu (basat en la modelització de situacions reals), contesta, segons mostra la figura 28:
"*M'estimo més el mètode creatiu perquè veus en quin àmbit pots aplicar el que has après. En canvi, amb el mètode tradicional només veus temari i no aplicació*".

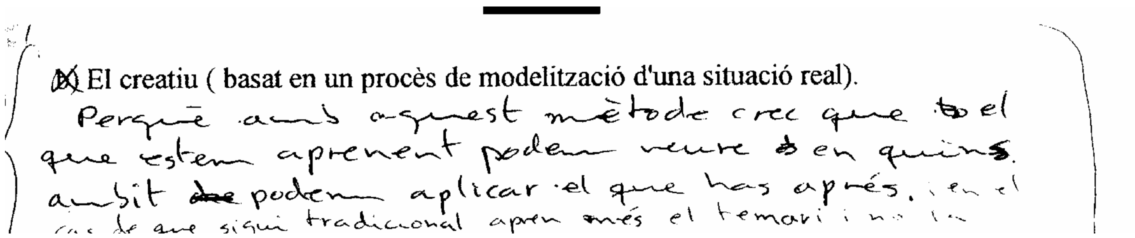


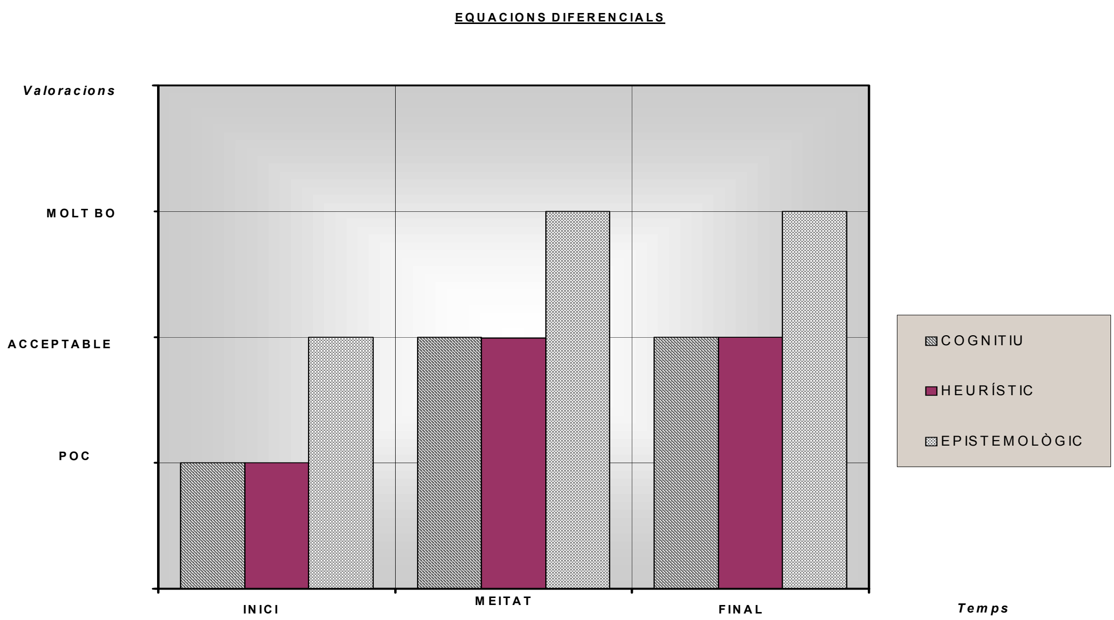
Figura 28. Valoració sobre la metodologia de modelització.

Per tant valorem l'aspecte epistemològic com a *Acceptable*, a l'inici de les Edo's, perquè en tot moment, l'alumne opina a favor de la utilitat de les matemàtiques en la vida real.
Els aspectes tractats els podem sintetitzar amb la següent taula (taula 12):

EDO'S	COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Molt bo	Molt bo

Taula 12. Anàlisi qualitatiu de la pràctica d'equacions diferencials del Sung.

Els mateixos els podem visualitzar gràficament en la taula 13 com:



Taula 13. Gràfica de l'anàlisi qualitatiu de la pràctica d'equacions diferencials del Sung.
A l'inicia aquest tema, l'alumne no tenia cap coneixement i no sap resoldre les equacions diferencials que se li proposen (nivells baixos en els aspectes cognoscitiu i

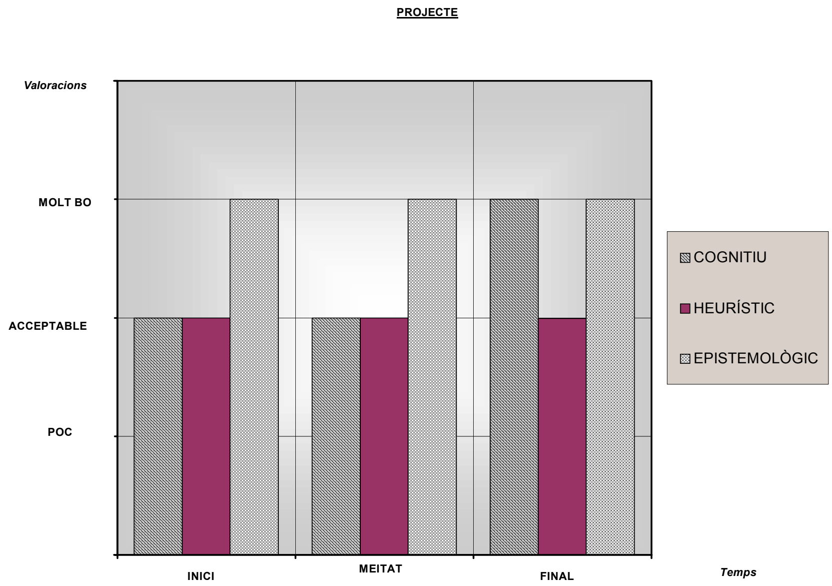
heurístic). A la meitat del procés comença a aprendre conceptes nous, però encara es troba amb problemes per resoldre les activitats (puja en l'aspecte cognoscitiu, però es manté en l'heurístic). Al final, considero que consegueix tenir uns coneixements i habilitat acceptables en aquest tema.

3. Diagonalització de matrius (projecte)
El projecte realitzat pel Sung ha estat el creixement de la població d'una granja de conills. Podem visualitzar el seu testimoni en l'instrument de recerca nº 10. En la resolució -que ha estat satisfactòria- ha hagut d'usar mètodes matemàtics.
Per poder dur a terme aquests mètodes, primer ha hagut de saber algunes definicions i coneixements bàsics que són
1) la definició de valor característic i vector característic i
2) la definició *de l'escalar lambda*.
L'opinió de l'alumne és que encara que no ha fet falta, per aquest projecte, saber definicions ni teoremes sobre la diagonalització, ha estudiat conceptes bàsics i teoremes per poder entendre, posteriorment, els altres projectes proposats. Al mateix temps, ha fet un repàs de les equacions diferencials. D'aquesta manera s'observa com s'integren totes les activitats de modelatge desenvolupades.
Es nota des d'un principi que, en aquest cas, els coneixements i l'habilitat per resoldre les activitats són millors que en les altres dues pràctiques. En aquest cas, però, no hauríem de donar tot el mèrit a l'alumne estudiat, sinó a l'equip sencer, ja que és difícil (i pràcticament impossible) saber si ell té tots els coneixements que demostren tenir en el treball.
S'ha considerat valorar els aspectes cognoscitiu i heurístic com a *Acceptables*, tant a l'inici com a la meitat del Projecte i de *Molt Bons* al final, pels bons resultats obtinguts durant aquesta pràctica. L'aspecte epistemològic, l'interpretem com *molt bo* perquè l'alumne demostra en tot moment, que entén perfectament els conceptes estudiats, els sap interpretar i relacionar amb la vida real. A més, s'ha mostrat sempre molt receptiu per aprendre nous conceptes.
Així, podríem plasmar els resultats del projecte amb l'esquema que presentem a la taula 14:

PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo

Taula 14. Valoracions qualitatives del projecte.

Amb aquesta taula, podem construir la gràfica següent, plasmada en la taula 15:



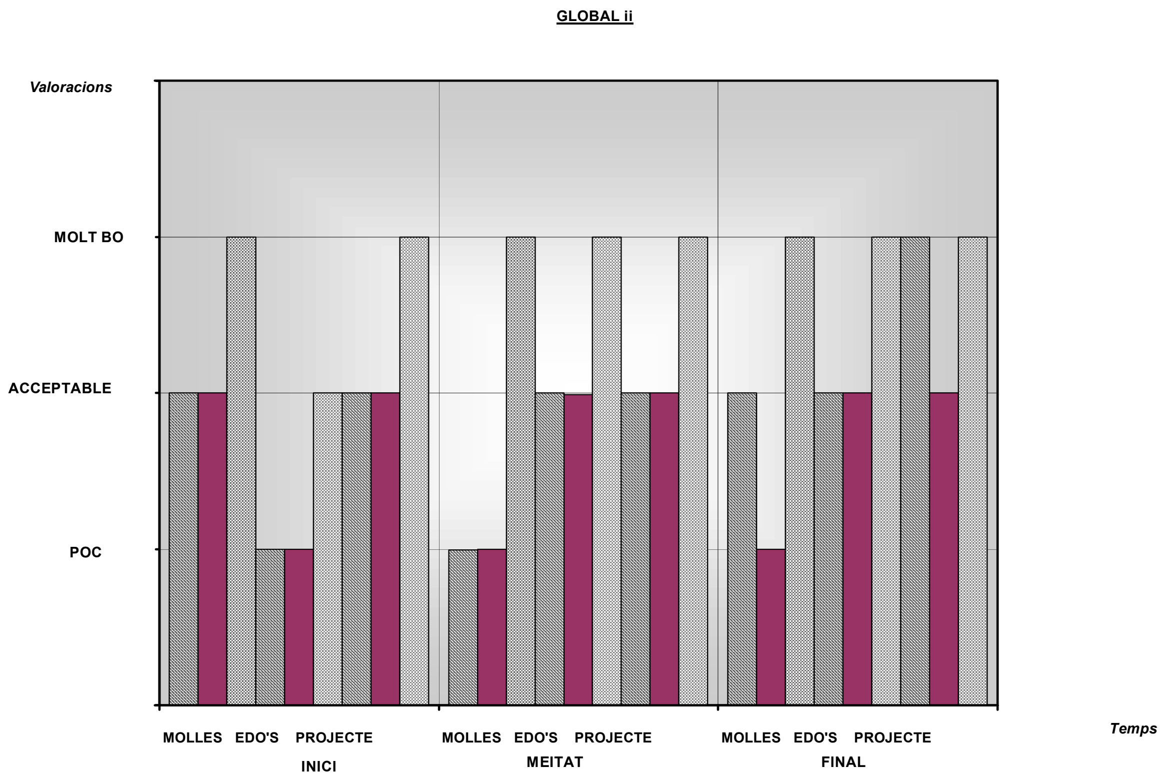
Taula 15. Gràfica de les valoracions qualitatives del projecte.

A l'inici i fins a la meitat d'aquest projecte, el Sung té bons coneixements teòrics. A nivell matemàtic domina el càlcul de determinants i la resolució de sistemes, això l'ajuda a trobar el polinomi característic i posteriorment els vectors propis. Al final, considerem que són *molt bons*, ja que ha après conceptes nous. Els conceptes apresos són els bàsics per diagonalitzar (valors i vectors propis) i també llur interpretació.
No és d'estranyar, doncs, que en la gràfica es mantinguin uns nivells tan bons en tots els aspectes. I és que el Sung resol amb relativa facilitat i cada vegada millor, les activitats proposades.
Cal indicar, però, que aquest projecte no l'ha fet tot sol, sinó que es tractava d'un treball en equip, i per tant, és difícil esbrinar el grau de participació. Malgrat tot, l'instrument de recerca nº 10 ens permet visualitzar l'exposició de tots els components de l'equip, i l'instrument de recerca nº 4 ens indica la valoració que han fet els altres companys a tots els participants. Aquests darrers instruments ens permeten afirmar que el grau d'aprenentatge del Sung es satisfactori.
Resumint totes les valoracions anteriors, i unificant les tres taules, s'obtenen les taules 16 i 17 següents:

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Poc	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo
EDO'S	COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Molt bo	Molt bo
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo

Taula 16. Valoracions qualitatives globals.

Això ho podríem veure graficat:



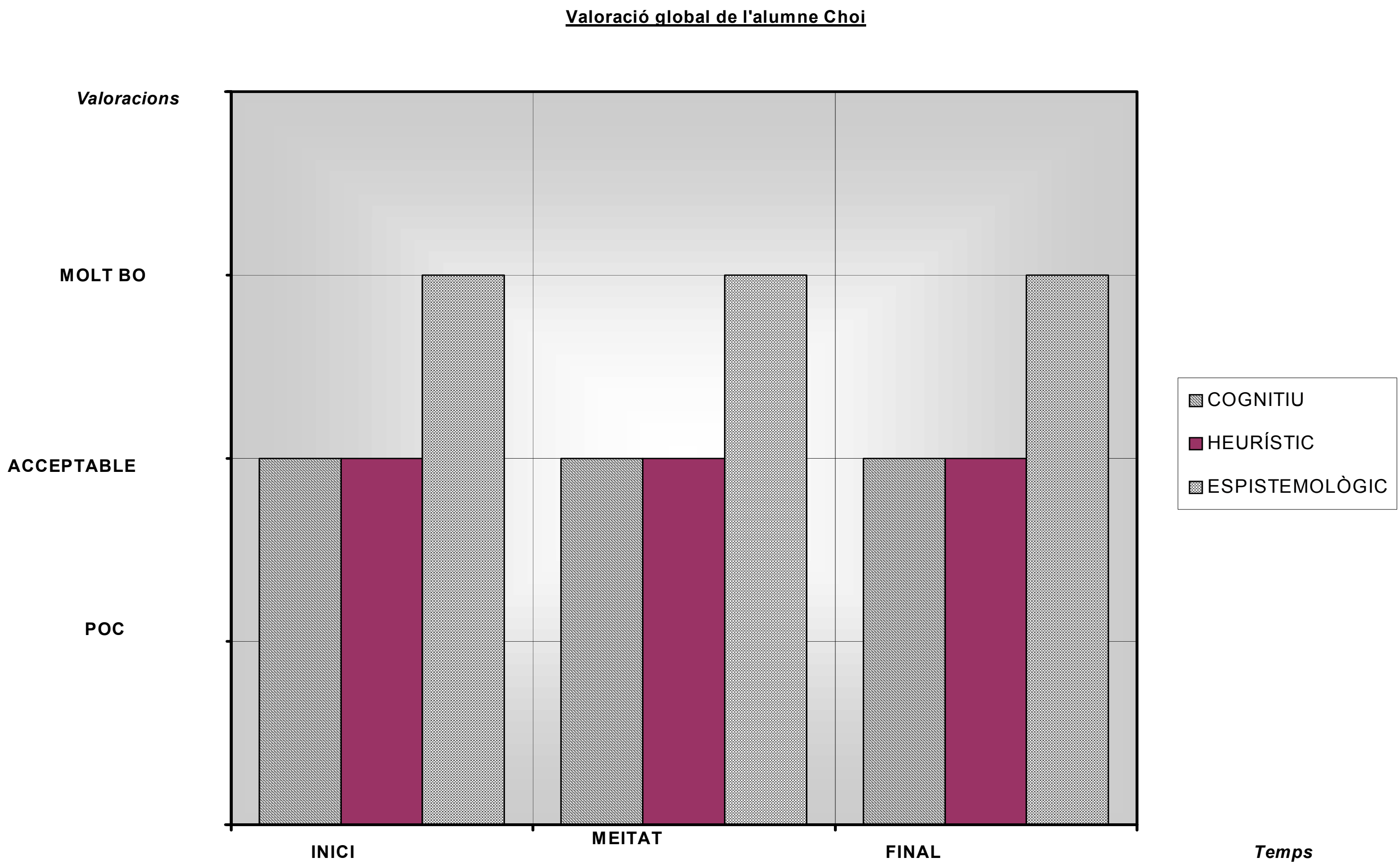
Taula 17. Gràfica de valoracions qualitatives global.

I finalment, per fer la gràfica global del curs, on s'ha fet una mitjana de totes les valoracions anteriors i visualitzar el procés d'aprenentatge s'obtenen les taules 18 i 19:

	INICI	MEITAT	FINAL
COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
EPISTEMOLÒGIC	Molt Bo	Molt Bo	Molt Bo

Taula 18. Valoració temporal del procés d'aprenentatge del Sung.

I això, pot graficar-se de la següent manera:



Taula 19. Gràfica de la valoració temporal del procés d'aprenentatge del Sung.

¿Què podem dir, doncs, sobre l'evolució del procés d'aprenentatge d'en Sung?
En conjunt, l'alumne inicia totes les activitats amb una bona base de coneixements teòrics que li permeten desenvolupar-se prou bé al principi de cada pràctica, on també s'ha de dir, que les activitats són més fàcils. Per exemple, en les activitats de molles, s'ha detectat un cop més les deficiències de contingut físic; malgrat tot ha realitzat la totalitat de la pràctica, resolent satisfactòriament la resta d'activitats. Amb això podem concloure que l'alumne en qüestió ha après a treballar en matrius tot descobrint les seves aplicacions a situacions reals: ha treballat en sistemes de ressorts, en xarxes vials, en models econòmics i en models geomètrics; desenvolupant i adquirint habilitats en totes les pràctiques. Aquest nivell heurístic es manté de manera regular fins el final de les pràctiques, encara que es troba amb algun problema a l'hora de resoldre les activitats. Per altra banda l'alumne demostra en tot moment, que entén els conceptes estudiats, i els sap relacionar amb els problemes de quotidians.
D'aquesta manera podem afirmar que el Sung interpreta la situació del món real i formula correctament les expressions matemàtiques que modelitzen el problema plantejat. A nivell heurístic resolt prou bé les equacions que apareixent tot interpretant

en termes tècnics les solucions. Aquests fet, doncs, està d'acord, en l'esquema proposat a la figura 1 d'ensenyament/aprenentatge.

En síntesi: Ha après a desenvolupar-se en un context real, tot fent ús de les matemàtiques. De les seves afirmacions es conclou que en l'ensenyament tradicional no s'observa en cap moment la vinculació de les matemàtiques amb les necessitats d'un tècnic.

Alumne: Joaquim

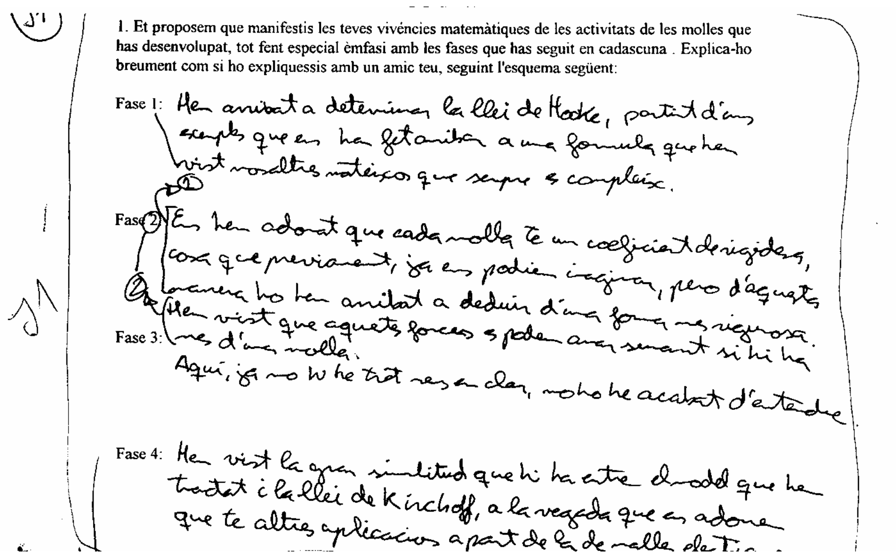
El Joaquim és un alumne que ve d'FP i que des del primer dia s'ha mostrat molt interessat a col.laborar en l'assignatura d'una forma positiva. Ha respost a les pràctiques proposades amb molta motivació, ha donat opinions que poden ajudar a millorar-les, i d'altres que demostren que aquestes pràctiques són útils per aprendre conceptes nous de l'assignatura de matemàtiques. Coneix les matrius, però no ha treballat mai amb integrals ni amb equacions diferencials.

1. Modelatge d'un sistema de ressorts

En aquesta pràctica es demana a l'alumne que expliqui d'una manera planera totes les fases que ha seguit en la seva resolució. Ho explica de la següent forma (figura 29):

"*He arribat a determinar la llei de Hooke partint d'uns exemples que ens han fet arribar a una fórmula que hem vist nosaltres mateixos que sempre es compleix. M'he adonat que cada molla té un coeficient de rigidesa, cosa que prèviament ja es podia imaginar, però d'aquesta manera ho he arribat a deduir de forma més rigorosa. He vist que aquestes forces es poden anar sumant si hi ha més d'una molla. Aquí ja m'he perdut i no he entès el que venia*".

"*Més endavant he vist el grau de similitud que hi ha entre el model que he tractat i la llei de Kirchoff i alhora m'adono que té altres aplicacions, a part de les molles, elèctriques*".


1. Et proposem que manifestis les teves vivències matemàtiques de les activitats de les molles que has desenvolupat, tot fent especial èmfasi amb les fases que has seguit en cadascuna . Explica-ho breument com si ho expliquessis amb un amic teu, seguint l'esquema següent:

Fase 1: Hem arribat a determinar la llei de Hooke, partint d'uns exemples que ens ha fet arribar a una formula que hem vist nosaltres mateixos que sempre es compleix.

Fase 2: Ens hem adonat que cada molla te un coeficient de rigidesa, cosa que previament, ja es podien imaginar, pero d'aquesta manera ho hem arribat a deduir d'una forma mes rigorosa.

Fase 3: Hem vist que aquestes forces es poden anar sumant si hi ha mes d'una molla.
Aquí, ja no ho he tret res en clar, no ho he acabat d'entendre

Fase 4: Hem vist la gran similitud que hi ha entre el model que hem tractat i la llei de Kirchoff, a la vegada que em adone que te altres aplicacions a part de la de molles electri...

Figura 29. Manuscrit del Joaquim.

Cal comentar que el Joaquim no té una base matemàtica molt forta i es perd sovint quan es compliquen els càlculs i els conceptes. Aquesta pràctica li proporciona l'aprenentatge del càlcul d'inverses de matrius i l'aprenentatge de la resolució de sistemes d'equacions lineals. En Joaquim s'adona de la necessitat de resoldre sistemes i llur utilitat a partir de les situacions plantejades. Aquest fet el motiva fortament en els seus estudis doncs s'adona de la utilitat de les matemàtiques en la tècnica. De les seves afirmacions interpretem que efectivament cal introduir els conceptes a partir de situacions properes a la realitat curricular. Malgrat la seva prudència, pel fet de que la seva procedència es de FP, ell creu que a l'inici de les activitats el seu grau de coneixement es deficient. Segons la interpretació del professor/investigador dels seus treballs i habilitats, considerem que el seu grau de coneixement matemàtic es acceptable. Des de el principi de la pràctica fins al final, s'en surt prou bé; i el seu esforç per entendre i interpretar conceptes es força gratificant per l'investigador.

Passem ara a l'aplicació del instrument de recerca nº 9. Es demana a l'alumne que digui quines coses creu que tenen en comú les activitats amb les quals ha treballat. Respon de la següent forma :

Les activitats 1, 2 i 3 crec que es basen principalment en les forces exercides en un sistema de molles, intentant partir d'un nivell quasi nul, però aprofundint ràpidament d'una manera força clara. El problema, al meu entendre, és que en arribar a un sistema amb molles múltiples crec que es perd una mica el camí i que potser s'hauria d'enfocar d'una altra manera ja que, en el meu cas, he anat seguint fins on he pogut, però al final m'he perdut.

L'activitat 4 és força adient ja que tenint molt recent la part de Kirchoff del quadrimestre anterior es té un cert avantatge. Però en arribar al model econòmic m'he perdut perquè crec que presenta molts punts confusos ja que no s'acaba d'entendre el significat de model. Sembla ser que per verificar que el lector ho ha entès es fa el primer problema, però jo crec que això no aclareix res. Hem sembla que hauria estat millor posar-hi primer un exemple i continuar a partir d'aquí.

Totes aquestes observacions són fetes per l'alumne tal com es veu a continuació (figura 30):

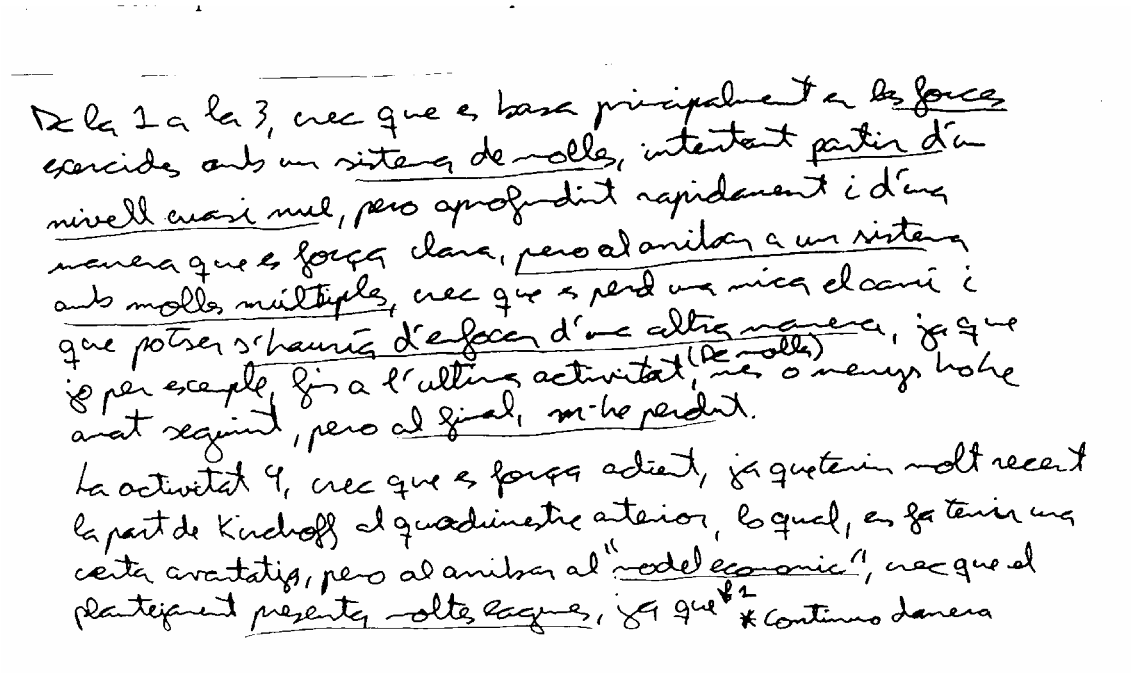

De la 1 a la 3, crec que es basa principalment en les forces exercides amb un sistema de molles, intentant partir d'un nivell quasi nul, pero aprofundint rapidament i d'una manera que es força clara, pero al arribar a un sistema amb molles múltiples, crec que es perd una mica el camí i que potser s'hauria d'enfocar d'una altra manera, ja que jo per exemple, fins a l'ultima activitat (De molles), més o menys ho he anat seguint, pero al final, m'he perdut.
La activitat 4, crec que es força adient, ja que tenim molt recent la part de Kirchoff al quadrimestre anterior, lo qual, ens fa tenir una certa avantatja, pero al arribar al "model economic", crec que el plantejament presenta moltes llacunes, ja que *1 * Continuo darrera

Figura 30. Observacions del Joaquim referents a la pràctica de ressorts.

A continuació veurem les coses que han quedat clares i les que han quedat confuses al Joaquim. Comencem per les coses clares. Textualment diu :

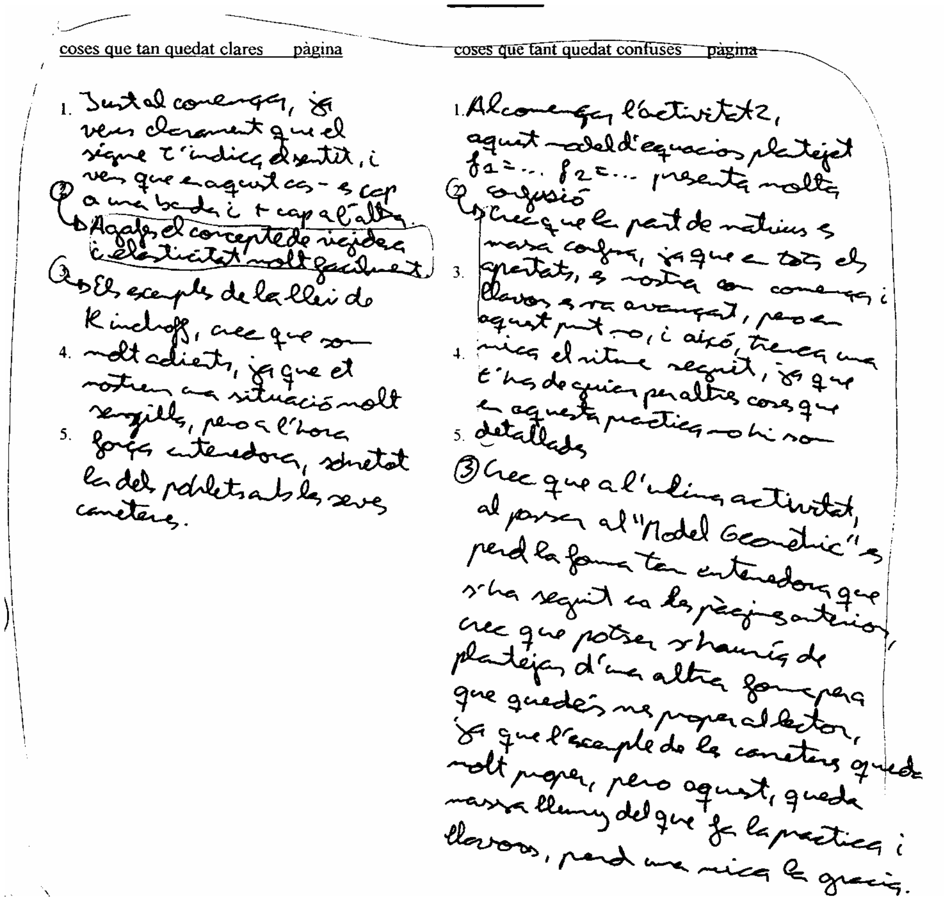
"*Just en començar ja veus clar que el signe de les forces t'indica el sentit. Després agafes el concepte de rigidesa i elasticitat molt fàcilment. Els exemples de la llei de*

Kirchoff són molt adients ja que et mostren una situació molt senzilla i alhora molt entenedora, sobretot la dels poblets amb les seves carreteres".

Passem ara als punts que han quedat poc clars : "*En començar l'activitat 2, el model d'equacions plantejat presenta molta confusió. Crec que la part de matrius també és confusa ja que en altres apartats es mostra com començar i en aquest no. També crec que a l'última activitat, quan passem al model geomètric es perd la forma tan entenedora que s'havia seguit en les pàgines anteriors. Crec que s'hauria de plantejar d'una altra manera que quedés més propera al lector, com en l'exemple de les carreteres*".

Parlem ara de les coses positives i negatives que pot tenir l'ensenyament de les matemàtiques amb aquest mètode :

"*El que trobo de positiu és que amb aquest mètode didàctic es presenten casos molt propers a tu com a l'última part on hi ha l'exercici dels cotxes. El que trobo de negatiu és que de vegades hi ha un salt massa gran entre la part propera a l'alumne* (que consistiria a buscar enunciats entretinguts sobre casos reals, i a donar la resolució de l'exercici una mica guiada perquè l'alumne no es perdi) *i la part veritablement matemàtica*". Tot això ho podem observar en la figura 31.



coses que tan quedat clares	pàgina	coses que tant quedat confuses	pàgina
1. Just al començar, ja veus clarament que el signe t'indica el sentit, i veus que en aquest cas és cap a una banda i + cap a l'altre.		1. Al començar l'activitat 2, aquest model d'equacions plantejat $f_1=\ldots$ $f_2=\ldots$ presenta molta confusió	
2. Agafes el concepte de rigidesa i elasticitat molt fàcilment.		2. Crec que la part de matrius és massa confusa, ja que a tots els apartats, es mostra com començar i llavors es va avançant, però en aquest punt no, i això, trenca una mica el ritme seguit, ja que t'has de guiar per altres coses que en aquesta pràctica no hi son detallades	
3. Els exemples de la llei de Kirchoff, crec que son molt adients, ja que et mostren una situació molt senzilla, però a l'hora força entenedora, sobretot la dels poblets amb les seves carreteres.		3. Crec que a l'última activitat, al passar al "Model Geomètric" es perd la forma tan entenedora que s'ha seguit en les pàgines anteriors, crec que potser s'hauria de plantejar d'una altra forma per que quedés més propera al lector, ja que l'exemple de les carreteres queda molt proper, però aquest, queda massa lluny del que fa la pràctica i llavors, perd una mica la gràcia.	

Figura 31. Llistat de coses positives i negatives de l'ensenyament de les matemàtiques.

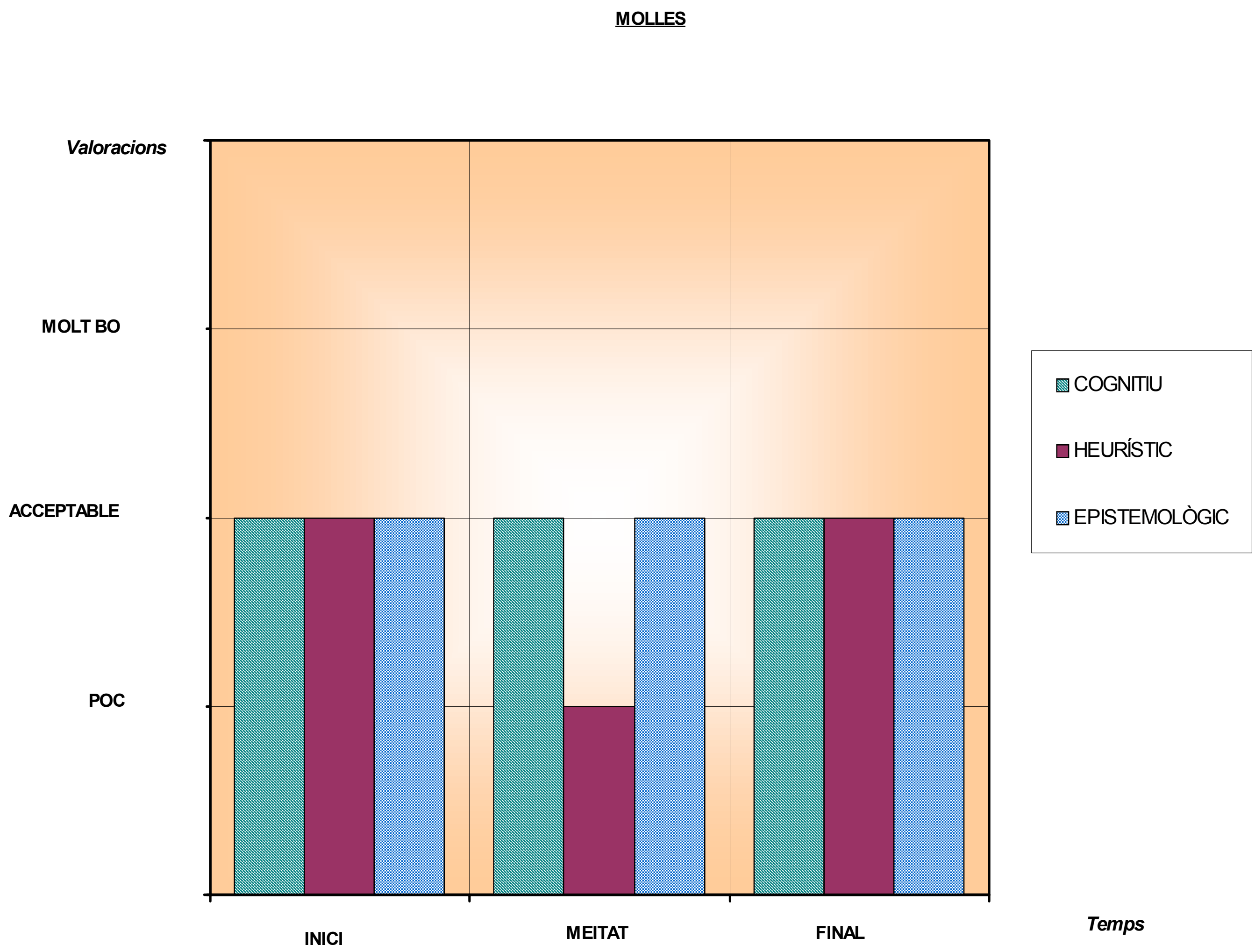
Com hem pogut veure, el Joaquim resol i interpreta de manera acceptable les activitats. Però tal i com hem pogut llegir anteriorment, veiem que cap a la meitat del tema, no acaba d'entendre prou bé les activitats, i no les resol amb la mateixa habilitat que anteriorment. La semblança entre els models de molles i els altres la interpreta correctament.

Amb aquestes interpretacions construïm la següent taula (taula 20):

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

Taula 20. Valoracions qualitatives pràctica d'àlgebra lineal.

Gràficament (taula 21):



Taula 21. Gràfica de les valoracions qualitatives de la pràctica d'àlgebra lineal.

Els coneixements del Joaquim són acceptables a l'inici d'aquest tema i durant tot ell. A la meitat del tema, es troba amb problemes per resoldre bé les activitats, per això podem observar en la gràfica com baixa el nivell en l’aspecte heurístic.
Finalment, veiem que en tot moment coneix perfectament del què se li està parlant, i interpreta bé els conceptes (nivell epistemològic acceptable en tots els casos).

2. El món de les equacions diferencials

El Joaquim no ha estudiat mai les equacions diferencials. Per tant a l'inici del tema qualifiquem com a *poc* l'aspecte cognitiu. Cal destacar que tampoc coneixia el càlcul de primitives, aquest fet ha provocat que en Joaquim realitzi una unitat didàctica addicional per tal de familiaritzar-se amb el càlcul de integrals (annex 4). En aquesta unitat didàctica hi ha dues pràctiques per triar. El Joaquim ha triat la primera, la dels astronautes, i ho explica així:
"*He triat la primera perquè és la més extensa i he cregut que així els conceptes s'aniran introduint més a poc a poc*".
En la resolució de les activitats 1, 2 i 3, l'alumne no hi ha trobat cap problema perquè són bastant simples i estan molt guiades. Mantenim doncs com *acceptable* el nivell heurístic fins a la meitat. Les dificultats, doncs, són a l'activitat 4. Aquí es presenten casos aplicats. En l'exercici dels insectes, el Joaquim topa des d'un bon principi amb el problema de saber quina serà l'equació del creixement dels insectes. Pensa que hi ha un salt molt gran. L'alumne creu que té un grau de coneixement sobre aquesta part regular i que per això no se n'ha sortit prou bé. Aquest fet s'interpreta qualitativament com a *Poc* l'aspecte heurístic al final de la pràctica.
A continuació adjuntem una fotocòpia (figura 32) sobre les observacions fetes per l'alumne sobre l'activitat 4 :

ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES
ACTIVITAT 4		Un cop ja hem vist com es fa un exemple, en fem nosaltres un altre. pera a veure si realment ho hem acabat entenent.	Trobar desde un bon principi quina seria l'equació del creixement dels insectes, crec que a un salt molt gran, i que aquí no saps ben bé per on agafar-ho.

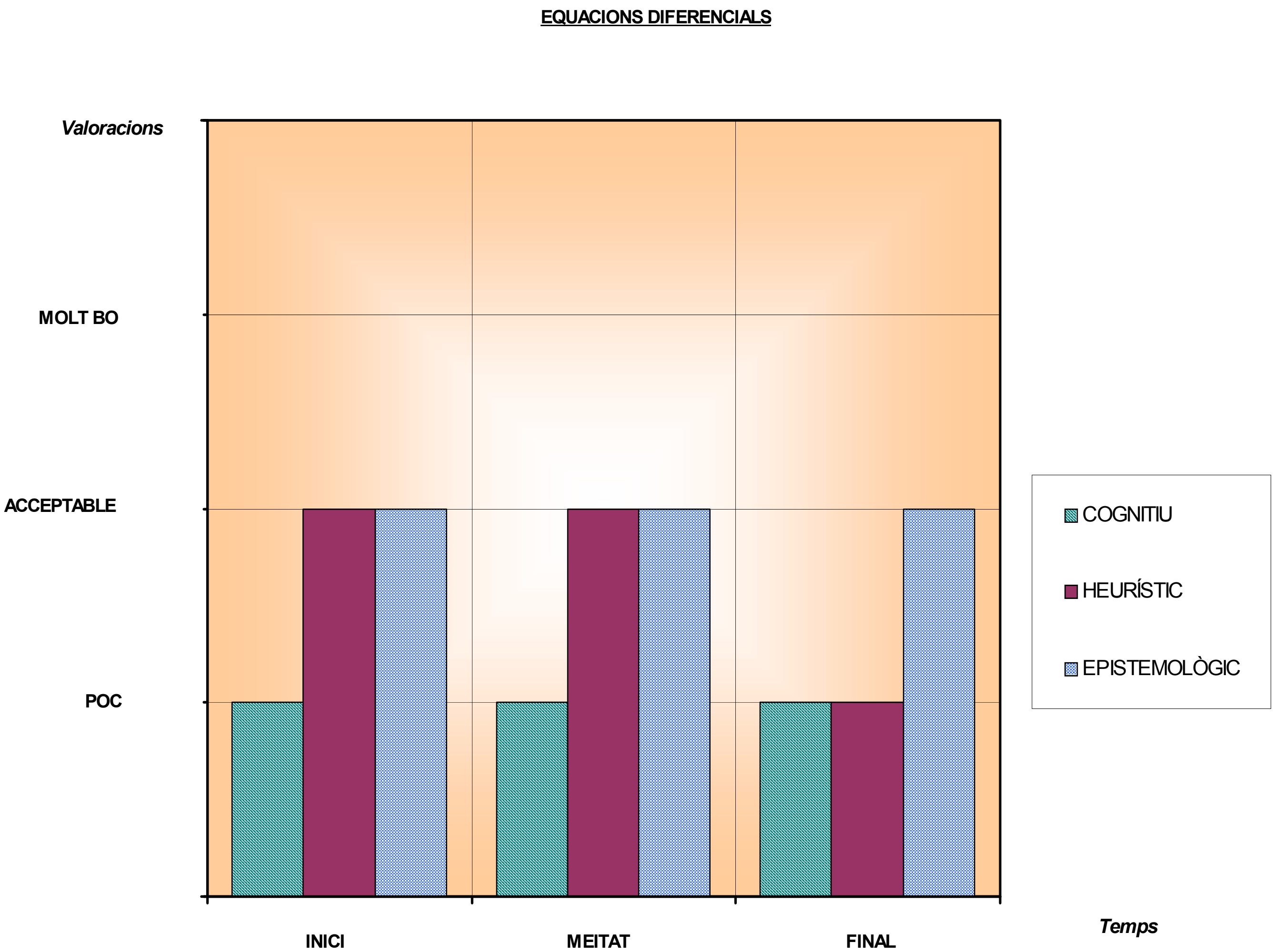
Figura 32. Observacions del Joaquim sobre l'activitat 4.

Veiem que el Joaquim presenta dificultats de conceptes matemàtics durant tot el tema, per això el nivell de coneixements es valora com *poc*. L'habilitat per resoldre problemes es manté fins a la meitat del tema, però ja al final i tal com hem comentat, baixa. Per això el nivell heurístic també el considerem baix.
Els resultats de la pràctica d'equacions diferencials els podem resumir en la taula 22:

EDO'S	COGNITIU	Poc	Poc	Poc
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

Taula 22. Resultats qualitatius de la pràctica d'equacions diferencials.

Gràficament (taula 23):



Taula 23. Gràfica de les valoracions de la pràctica d'equacions diferencials.

A l'inicia aquest tema, l'alumne no tenia cap coneixement teòric sobre ell, però sap resoldre les equacions diferencials que se li proposen perquè són senzilles, (nivell baix en l'aspecte cognitiu, però més alt en l'heurístic).Aquest baix nivell de coneixements es manté durant tot el tema.

3. Diagonalització de matrius (projecte)

El projecte realitzat pel Joaquim ha estat el creixement de la població d'una granja de conills. En la resolució -que ha estat satisfactòria- ha hagut d'usar mètodes matemàtics. Per poder dur a terme aquests mètodes, primer ha hagut de saber algunes definicions i coneixements bàsics que són la definició de valor característic i vector característic.

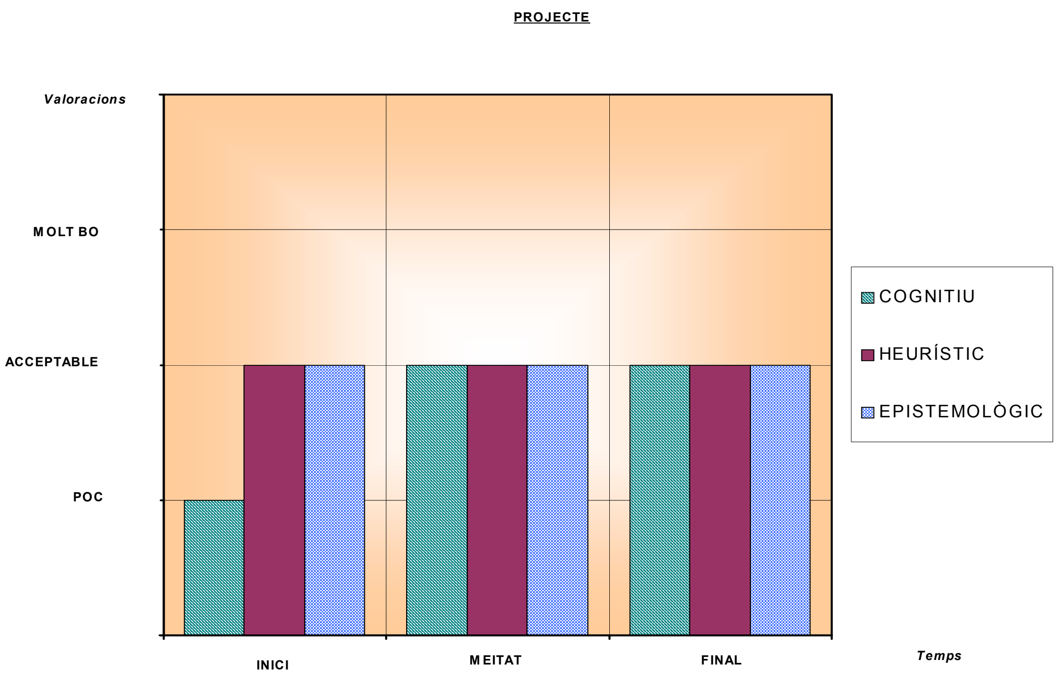
L'opinió de l'alumne -és la mateixa que en Sung- que encara que no ha fet falta, per aquest projecte, saber definicions ni teoremes sobre la diagonalització, ha estudiat conceptes bàsics i teoremes per poder entendre, posteriorment, els altres projectes proposats. Al mateix temps, ha fet un repàs de les equacions diferencials.

A l'inici del tema el Joaquim parteix de pocs coneixements i aquests augmenten a mesura que es va endinsant en el projecte, i es mantenen així fins el final. Resol favorablement les activitats durant tota la pràctica pel, que el nivell heurístic s'ha considerat a acceptable. El nivell epistemològic també ha seguit el mateix desenvolupament que l'aspecte anterior, ja que el Joaquim demostra saber interpretar correctament la teoria estudiada. Això ho podem visualitzar d'una manera resumida en el quadre plasmat en la taula 24:

PROJECTE	COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

Taula 24. Valoracions del projecte.

Amb aquesta taula, podem construir la gràfica de la taula 25:



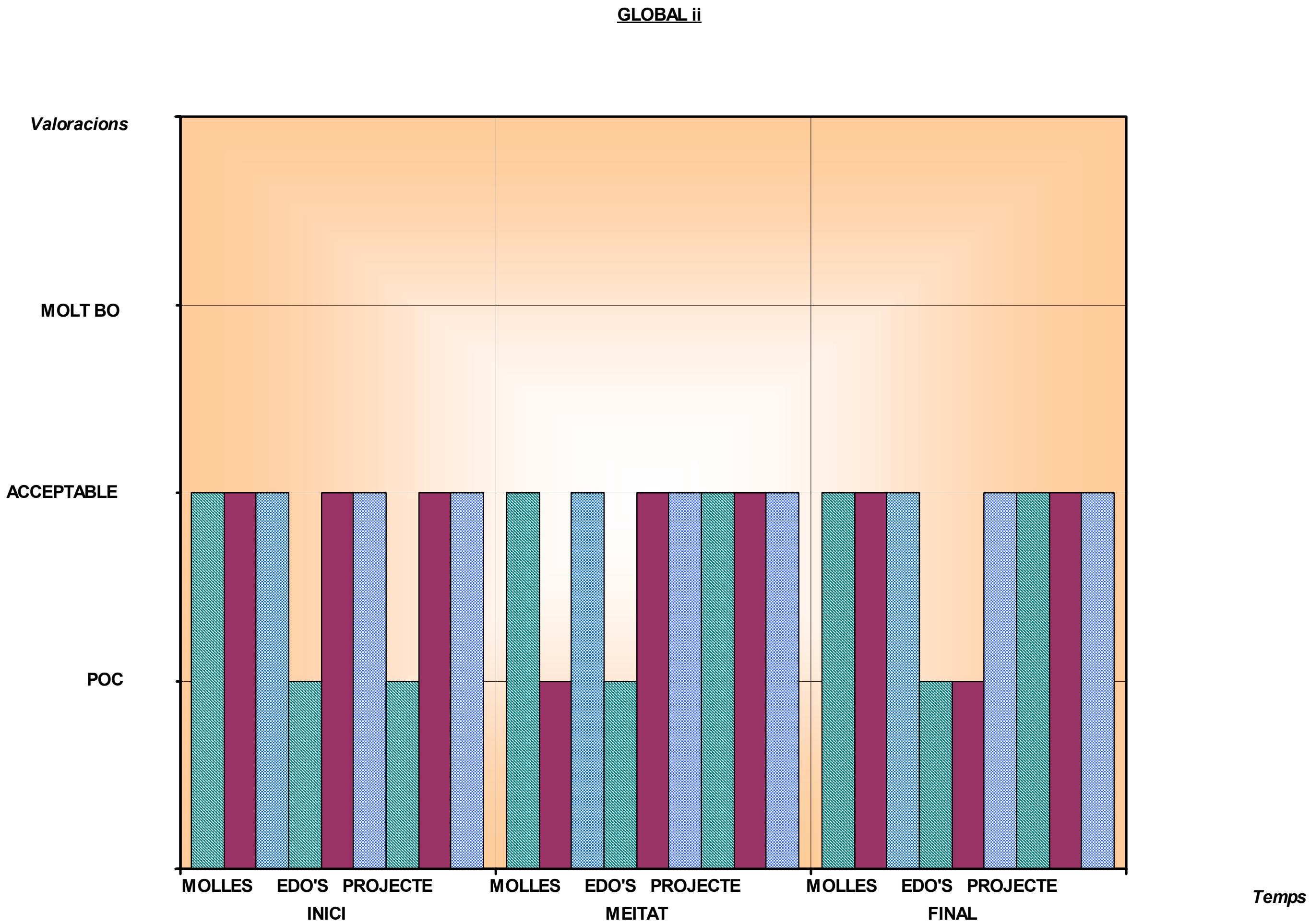
Taula 25. Gràfic de les valoracions del projecte.

El Joaquim aprèn conceptes nous i és per això que el nivell cognitiu creix de poc a acceptable. Amb aquests bons nivells teòrics, el Joaquim desenvolupa força bé les activitats proposades. Unificant les valoracions anteriors, s'obté la taula 26:

		INICI	MIG	FINAL
MOLLES	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
EDO'S	COGNITIU	Poc	Poc	Poc
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
PROJECTE	COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

Taula 26. Valoracions qualitatives globals.

Graficada a la taula 27 com:



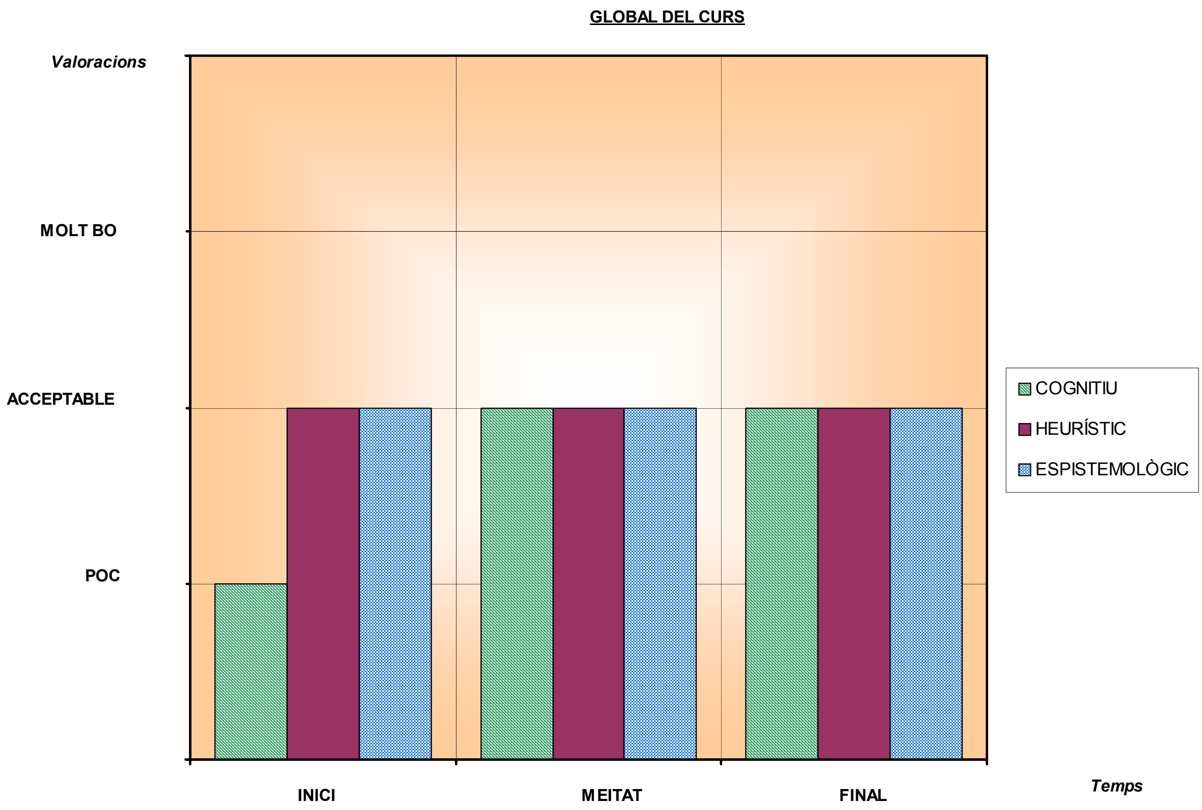
Taula 27. Gràfica de les valoracions qualitatives globals.

I finalment, per fer la gràfica global del curs, on s'ha fet una mitjana de totes les valoracions anteriors, s'ha construït la taula 28:

	INICI	MEITAT	FINAL
COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

Taula 28. Resum de resultats del procés d'aprenentatge d'en Joaquim.

I això, pot graficar-se de la següent manera (taula 29):



Taula 29. Gràfica del procés d'aprenentatge del Joaquim.

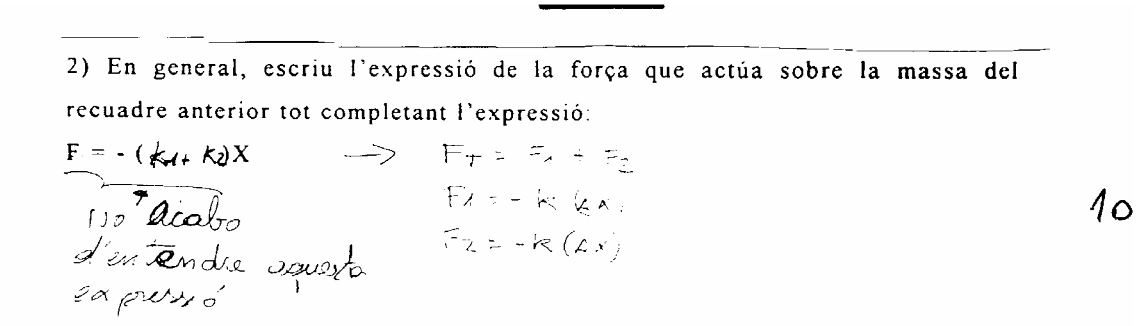
En conjunt, el Joaquim inicia les activitats amb un nivell teòric baix, però que no li ocasiona gaires problemes a l'hora de resoldre les primeres activitats. Aquest grau d'habilitat es manté durant tot el curs.
Això pot ser degut a que l'alumne demostra en tot moment, que sap interpretar els conceptes estudiats. Interpretem que la primera fase del procés de modelització s'ha assolit satisfactòriament: en Joaquim descobreix els models matemàtics involucrats en les situacions. Posteriorment l'anàlisi empíric del procés de modelització, on ha de formular les expressions matemàtiques que caracteritzen el model, s'ha desenvolupat correctament en la unitat didàctica de ressorts i el projecte; mostrant algunes dificultats en la unitat d'equacions diferencials (concretament i tal com hem apuntat anteriorment, en l'activitat 4).
Per mostrar un petit exemple, a nivell de continguts, en Joaquim ha descobert "*...la similitud que hi ha entre el model tractat i la llei de Kirchoff...*". Aquest fet prova com la metodologia del modelatge engloba diverses situacions en un mateix model matemàtic, i que l'estudiant aprèn d'una manera més activa, intuïtiva i entenedora les matemàtiques i les seves aplicacions, tot veien la seva utilitat -fet que no es produeix en l'ensenyament tradicional- . També deduïm del comentari "*...amb aquest mètode didàctic es presenten casos molt propers a tu...*" que aquest tipus de metodologia apropa i mostra un lligam de les matemàtiques amb la realitat.

Alumne: Imma

L'Imma és una estudiant que ve de COU i que coneix les matrius i les integrals, per bé que no ha vist mai equacions diferencials. Ha resolt els exercicis amb bastant d'encert. A continuació passem a comentar les tres pràctiques per separat. És companya del Shoi en el treball en grup. Es pot observar el comportament en els vídeos.

1. Modelatge d'un sistema de ressorts

Comencem per l'activitat 1. Tracta de la llei de Hooke i del càlcul de forces. L'Imma la resol bé però s'encalla quan hi ha més d'una massa perquè no sap quin és el signe resultant. D'altra banda, quan hi ha una massa i dues molles, intueix el resultat de la força total però no l'entén ; observem el seu comentari en la figura 33 :


2) En general, escriu l'expressió de la força que actúa sobre la massa del recuadre anterior tot completant l'expressió:

$F = -(k_1 + k_2)X \rightarrow F_T = F_1 + F_2$

$F_1 = -k(\Delta x)$

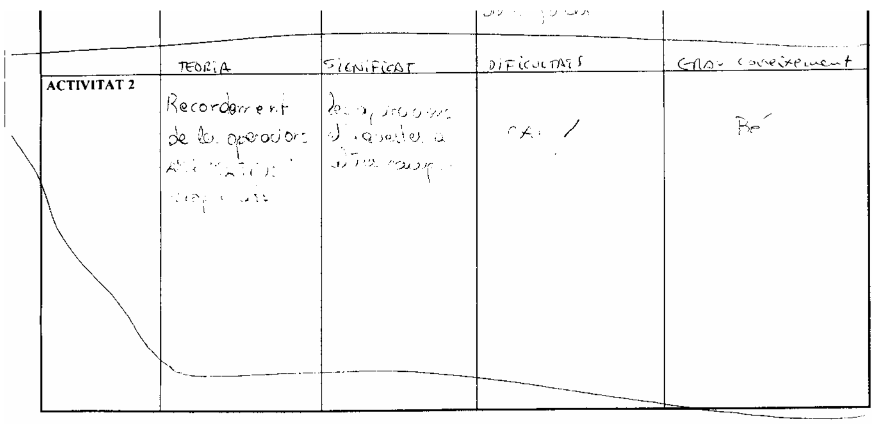
$F_2 = -k(\Delta x)$

no acabo d'entendre aquesta expressió

10

Figura 33. Comentari de l'Imma de la pràctica d'àlgebra lineal.

Notem que l'Imma parteix d'uns coneixements acceptables, però no te prou habilitats per resoldre les activitats, El nivell cognitiu es per tant *acceptable* però l'heurístic *poc*.
L'activitat 2 tracta de les operacions amb matrius i de les seves propietats. L'alumna no hi ha trobat cap dificultat perquè, com ja hem comentat abans, porta una bona base de COU . Ella mateixa reconeix, tal com vegem en la figura 34, que el seu grau de coneixement sobre aquesta part és bo.



	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS	GRAU CONEIXEMENT
ACTIVITAT 2	Recordament de les operacions [illegible]	[illegible]	[illegible]	Bé

Figura 34. L'Imma opina que el grau de coneixement es bo.

L'activitat 3 és l'aplicació a un cas clàssic. En aquesta activitat es fa un repàs de les diverses classes de matrius : matriu identitat, matriu inversa, matriu adjunta, etc. L'Imma opina (figura 35) que en aquesta activitat no s'explica amb claredat com es calcula la matriu adjunta:

ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT 3	Repàs de les classe de Matrius	M. Identitat M. Inversa M. Adjunta etc.	No explica amb claredat com es calcula	bé
ACTIVITAT 4				

Figura 35. Observació de l'activitat 3.

S'observa que l'Imma continua gaudint d'uns coneixements acceptables i que es capaç de resoldre una mica millor les activitats. Ha crescut doncs el nivell heurístic.
A l'activitat 4 hi ha models i s'hi veu l'aplicació de les matrius. L'Imma calcula primer el model de circulació vial i el model de circuit (que són els models de xarxes) bastant correctament. El model geomètric ja no l'ha resolt bé. Sens dubte aquest model és més difícil d'entendre que els altres. Podem afirmar que l'aspecte cognitiu al final del tema de modelatge d'un sistema de ressorts es *acceptable*, però l'heurístic es encara fluix. Ella mateixa diu (figura 36) que no ho entén tal com es veu a continuació :

No et capfiquis massa i intenta contestar les següents qüestions:

1. Suposem que anomenem r al mòdul del vector OP. Escriu x_1 i x_2 en funció de r i

No no entenc

x_1 =
x_2 =

2. Ara fes el mateix amb x_1' i x_2' però òbviament en funció de r i $+ \beta$.

x_1' =
x_2' =

3. Desenvolupa les expressions $\cos(\alpha + \beta)$ i $\sin(\alpha + \beta)$, si no les recordes pots ajudar-te d'un formulari.

$\mathrm{Cos}(\alpha + \beta) = (\cos\alpha \cdot \cos\beta) - (\sin\alpha \cdot \sin\beta)$
$\mathrm{Sin}(\alpha + \beta) = (\sin\alpha \cdot \cos\beta) + (\cos\alpha \cdot \sin\beta)$

4. Amb l'ajut del que has obtingut a la pregunta 1 i a la qüestió 3, escriu x_1' i x_2' en funció de x_1, x_2 i β.

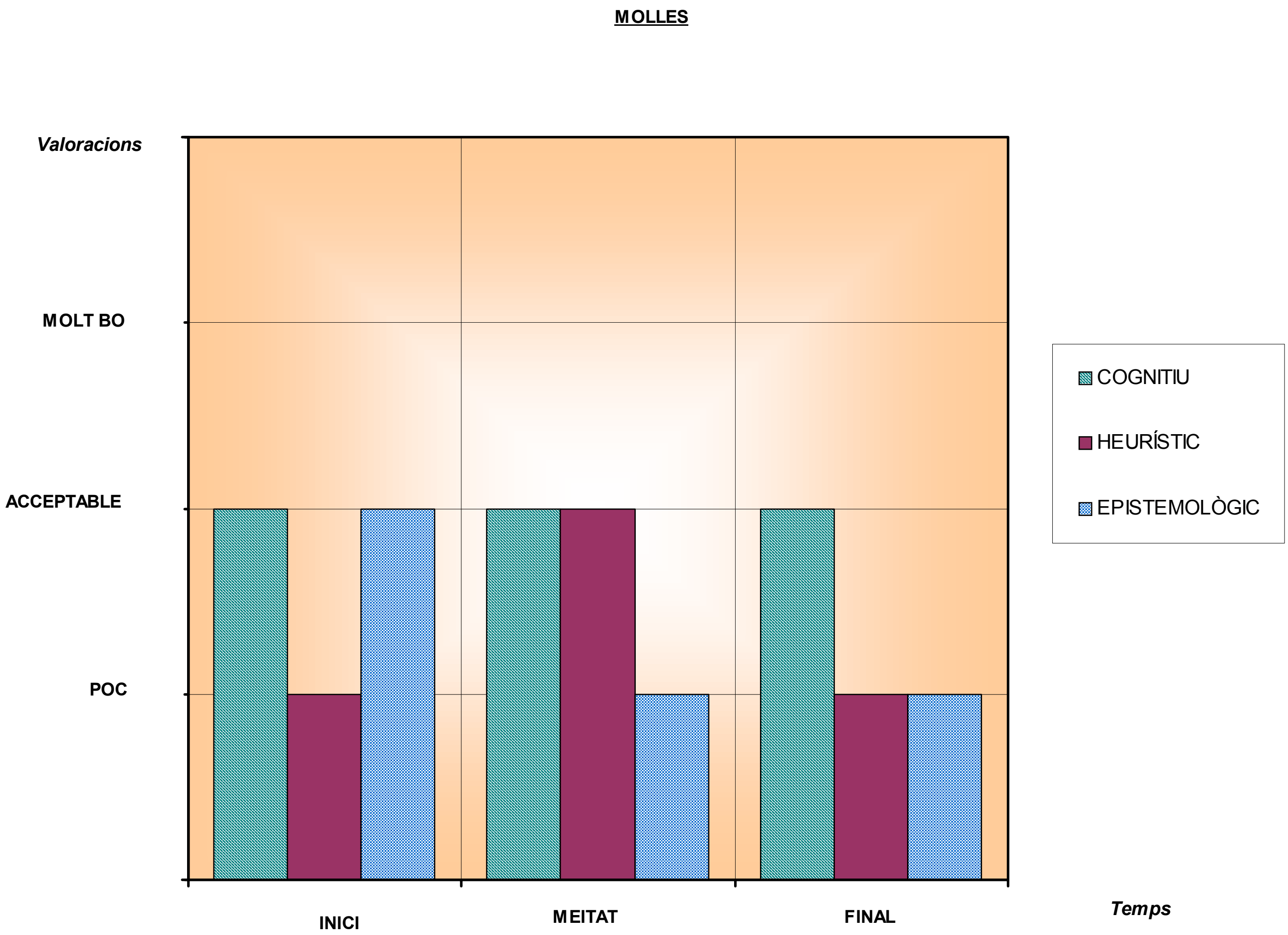
x_1' =
x_2' =

Figura 36. En la pregunta 1 s'observa que l'Imma no entén la qüestió.

Segons els seus propis comentaris, podem interpretar que l'Imma no entén gaire bé el significat de la teoria i no ho relaciona prou bé amb el món real. Considerem doncs, que al final de la pràctica, l'aspecte epistemològic des del del punt de vista de l'investigador qualificat com *Poc*.
Recollint les dades anteriors s'obté la taula 30, on fem palesa dels resultats qualitatius de la pràctica de ressorts:

	INICI	MIG	FINAL

MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Poc	Poc

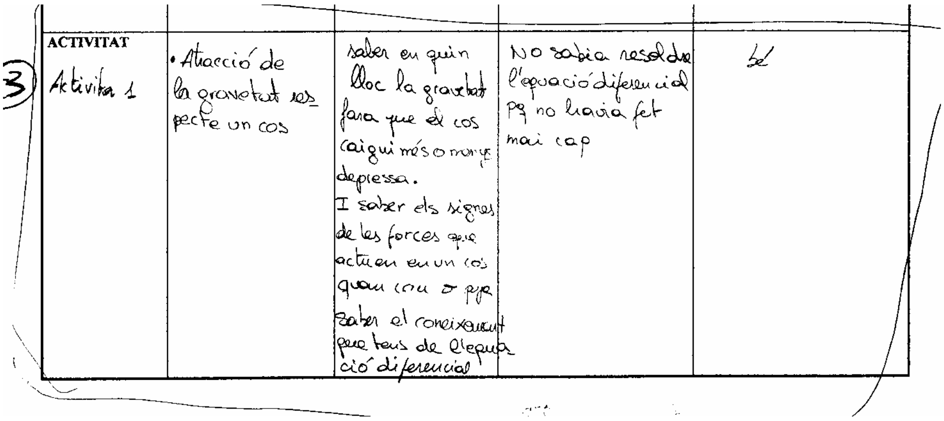


Taula 30. Quadre i gràfica dels resultats qualitatius de la pràctica d'àlgebra lineal.

L'Imma comença aquesta pràctica amb una bona base de coneixements. Però això no li és suficient perquè no li resulta gaire fàcil resoldre les primeres activitats.
En les activitats finals, una mica més complicades, es troba amb més problemes per resoldre bé l'exercici i no és capaç de resoldre alguna activitat (baixa el nivell en l'aspecte heurístic).

2. El món de les equacions diferencials
L'Imma no ha estudiat mai aquest tema, per tant, s'ha considerat que tenia *pocs* coneixements.
Es per això també, que l'Imma es troba amb problemes a l'hora de resoldre l'equació diferencial a l'inici de l'activitat 1. Aquesta activitat parla de com la gravetat atrau els cossos. Quan es pregunta a l'alumna quin és el significat d'aquesta activitat, contesta : "*Saber en quin lloc la gravetat farà que el cos caigui més o menys de pressa, saber els signes de les forces que actuen sobre un cos quan cau o puja, i saber el coneixement que tenim els alumnes de l'equació diferencial*".

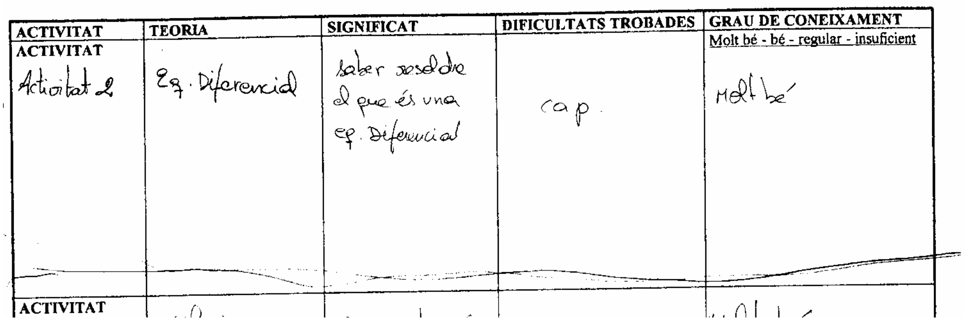
El seu grau de coneixement sobre aquesta part és bo. Però com ja hem dit abans, no ha sabut resoldre l'equació diferencial. Vegem-ho escrit per ella en la figura 37:



ACTIVITAT 3) Aktivita 1	• Atracció de la gravetat res pecte un cos	saber en quin lloc la gravetat farà que el cos caigui més o menys depressa. I saber els signes de les forces que actuen en un cos quan cau o pge saber el coneixement per treus de l'equació diferencial	No sabia resoldre l'equació diferencial pq no havia fet mai cap	bé

Figura 37. L'Imma manifesta que no sap fer l'equació diferencial.

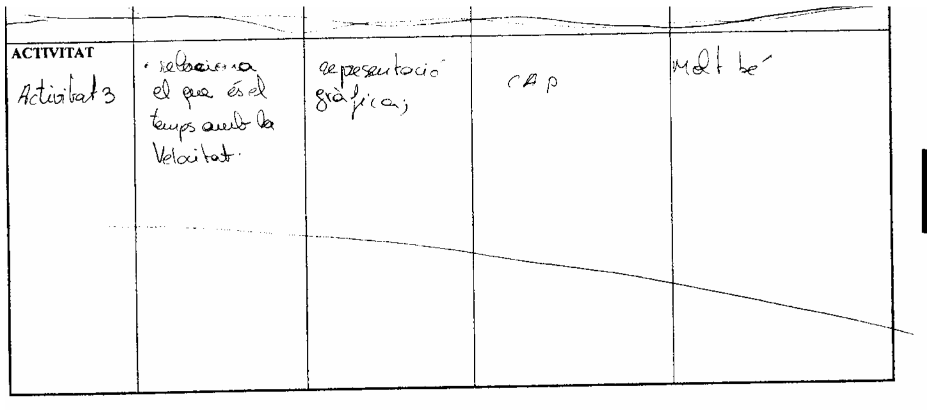
Passem a l'activitat 2. Tracta de les equacions diferencials. L'Imma no hi ha trobat cap complicació. Ella opina (figura 38) que el seu grau de coneixement sobre aquesta part és molt bo:



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT Activitat 2	Eq. Diferencial	saber resoldre el que és una eq. Diferencial	cap.	Molt bé
ACTIVITAT				

Figura 38. Opinió sobre el grau de coneixement.

L'activitat 3 també és bastant senzilla i l'Imma també l'ha resolt sense cap dificultat tal com mostra la figura 39:



ACTIVITAT Activitat 3	• relaciona el que és el temps amb la Velocitat.	representació gràfica;	cap	Molt bé

Figura 39. Comentari vers l'activitat 3.

L'activitat 4 és més densa i l'alumna hi ha trobat dificultats. A la primera part hi ha el creixement d'una població d'insectes i aquí es treballa amb derivades respecte al temps. Els coneixements finals són *acceptables* (figura 40).

ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT
ACTIVITAT Activitat 4	creixement instantani i duplicament d'Insectes.	saber posar o expressar el que son les derivades respecte el temps.	El punt 5, 6 7 fins que no no ha explicat, no el sabia fer.	Molt bé - bé - regular - insuficient bé – regular

Figura 40. Comentari vers l'activitat 4.

L'Imma no ha sabut trobar l'equació diferencial i si al final l'ha trobada és gràcies a l'ajuda del professor.

La segona part de l'activitat 4, anomenada *Anem a esquiar !* no l'ha acabada de resoldre. La primera part, però, l'ha resolt bé i s'ha estès una mica en les respostes, tal com es veu en la fotocòpia que adjuntem a continuació (figura 41):

ANEM A ESQUIAR !

Una màquina de treure neu va a una velocitat inversament proporcional a l'alçada de la neu que troba. Surt a les 12 h i la primera hora recorre 2 km, i 1km més la segona hora.

3 1) Si anomenem *k* la constant de proporcionalitat, escriu una relació algebraica entre la velocitat *v* i l'alçada *h*.

$V = \frac{k}{\text{alçada}}$

3 2) Creus que a mesura que passa el temps l'alçada augmenta? Sí

$\frac{1 h}{2 km} = \frac{k}{\text{alt}} \rightarrow$ sí perquè cada vegada que la màquina acumula més neu aquesta la llança a menos velocitat!

3 3) Creus, doncs, que de fet l'alçada és proporcional al temps?

Sí, si hi ha més velocitat vol dir menys alçada de neu també menys temps. Si hi ha menys velocitat vol dir que ha anat acomulant més neu i triga més temps en recorre un espai.

3 4) En cas afirmatiu, anomena *k'* la constant de proporcionalitat, i escriu una relació algebraica de l'alçada *h* en funció del temps *t*.

$h = k' \cdot t$

3 5) Escriu al velocitat com la variació de l'espai recorregut *e* respecte al temps:

$V = \frac{de}{dt}$

3 6) Descriu l'expressió trobada a la qüestió 1 en termes l'espai, temps:

(NOTA: Si apareix el terme $\frac{k'}{k}$, anomena $\frac{k'}{k} = C$.)

$h = k' \cdot t \qquad h = \frac{k}{v} \qquad k' \cdot t = \frac{k}{v} \rightarrow$

$\frac{1}{v} = \frac{k'}{k} \cdot t \rightarrow \frac{1}{v} = c \cdot t$

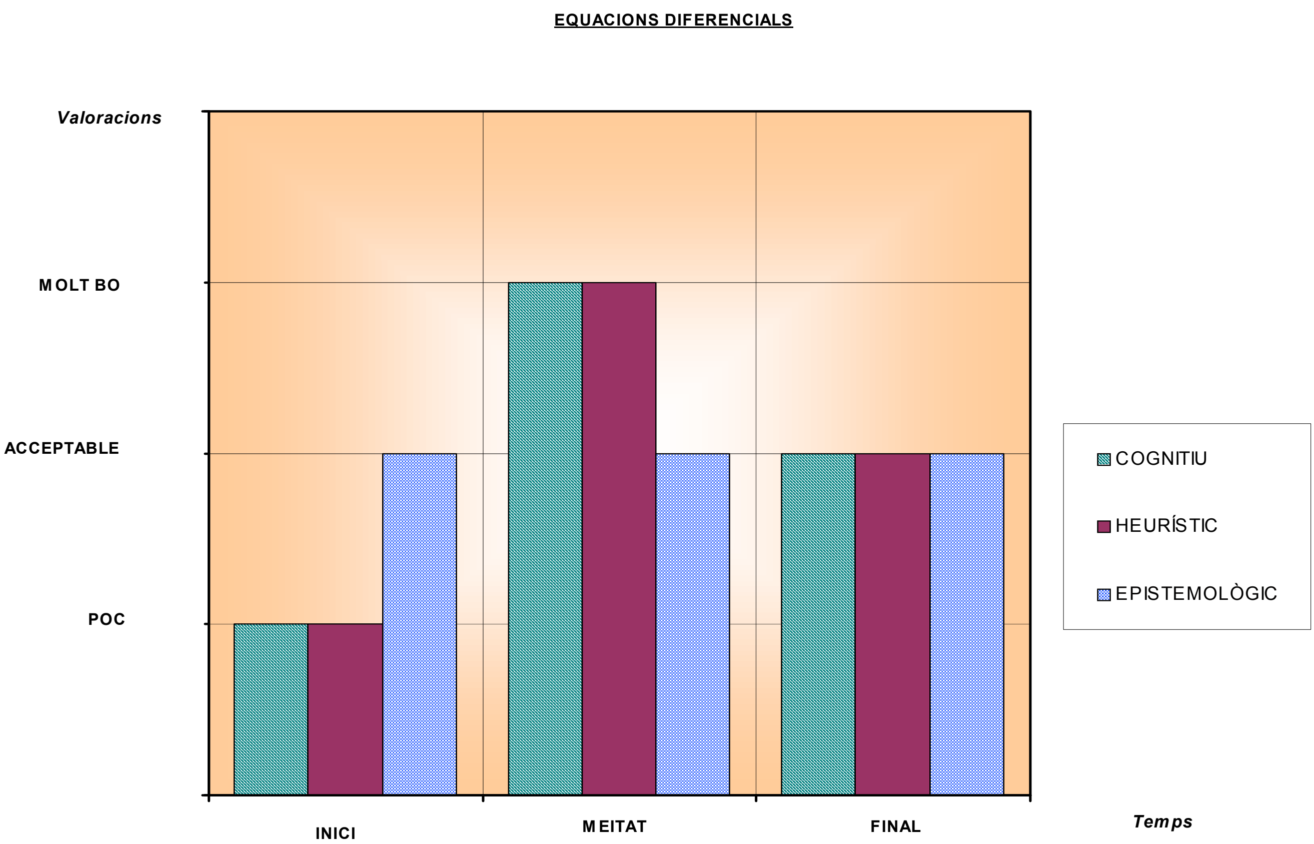
0 7) Calcula l'espai recorregut *e(t)*:

$\boxed{\frac{dt}{de} = c \cdot t}$ 3

Figura 41. Resolució del clàssic problema de la màquina de llevaneus.

A continuació hem preguntat a l'Imma quina de les dues unitats didàctiques sobre les equacions diferencials havia triat i per què. Ens ha contestat que la primera (la dels astronautes) perquè comença des de l'inici i continua endavant. Ella creu que potser no hauria pogut fer la segona sense haver fet la primera. En realitat sí que l'hauria pogut fer perquè l'una no té res a veure amb l'altra.
Ara, aplicant l'instrument de recerca nº 9, preguntem a l'Imma què opina sobre els mètodes d'ensenyament de les matemàtiques que tenim actualment : el mètode tradicional (amb teoremes i definicions) i el creatiu (modelització d'una situació real a través de les unitats didàctiques). La seva resposta és la següent :
"*El mètode tradicional crec que no és suficient perquè no és prou pràctic. El mètode creatiu, doncs, és millor però cal que hi hagi un professor per ajudar-te quan t'encalles*".
L'aspecte epistemològic, l'he valorat en tot el tema com a *acceptable*, perquè l'Imma ha demostrat que sap interpretar els coneixements teòrics d'una manera prou bona.
Els resultats anteriors poden visualitzar-se amb el quadre i la gràfica associada (taula 31):

EDO'S	COGNITIU	Poc	Molt bo	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Molt bo	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

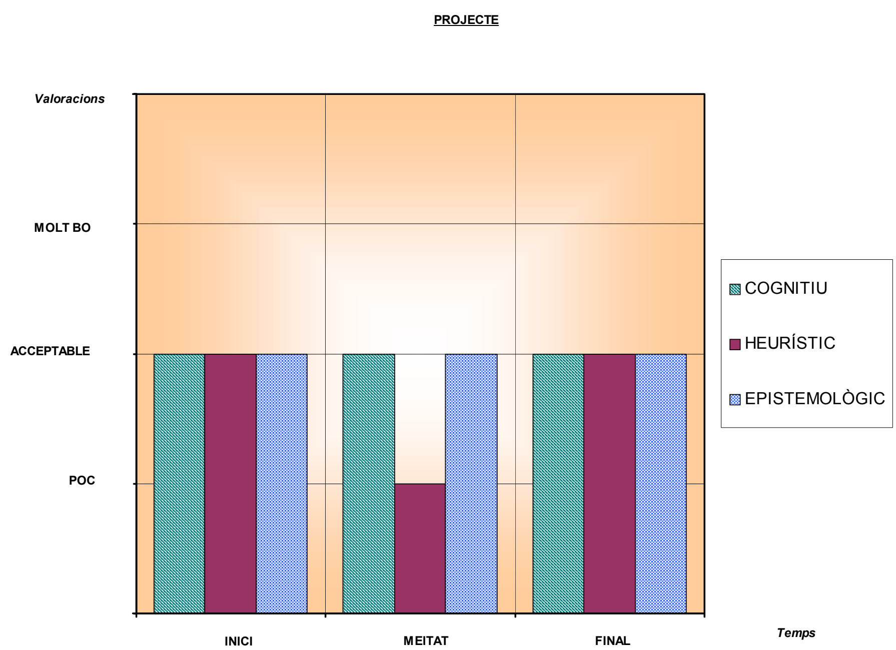


Taula 31. Quadre i gràfica de valoracions qualitatives de la pràctica d'Edo's.

A l'inicia aquest tema, l'alumna no tenia cap coneixement i no sap resoldre les equacions diferencials que se li proposen (nivells baixos en els aspectes cognitiu i heurístic).
A la meitat de la pràctica, l'Imma ha demostrat tenir uns coneixements molt bons i ha resolt amb prou èxit les activitats proposades.
Al final, els coneixements i habilitat pe resoldre les activitats adquireixen un nivell acceptable, perquè baixen una mica respecte als de la meitat d' aquest tema.
L'aspecte epistemològic, es manté com a acceptable, en tot el tema.

3. Diagonalització de matrius (projecte)
El projecte realitzat per l'Imma ha estat el creixement de la població d'una granja de conills -fet amb col·laboració amb el Sung-. En la resolució -que ha estat satisfactòria- ha hagut d'usar mètodes matemàtics. Per poder dur a terme aquests mètodes, primer ha hagut de saber algunes definicions i coneixements bàsics com són la definició de valor característic i vector característic.
Aquests conceptes els són explicats pel professor en les tutories. Vull recordar que en els projectes es treballava sobre el model, no es construïa el model.
L'opinió de l'alumna és que encara que no ha fet falta, per aquest projecte, saber definicions ni teoremes sobre la diagonalització, ha estudiat conceptes bàsics i teoremes que l'han ajudat a entendre conceptes matemàtics. Al mateix temps, i com els altres companys, ha fet un repàs de les equacions diferencials.
En el treball, l'Imma parteix inicialment d'uns coneixements acceptables i que manté durant tot el tema.
Els resultats els podem plasmar en el quadre i la gràfica corresponent (taules 32 i 33):

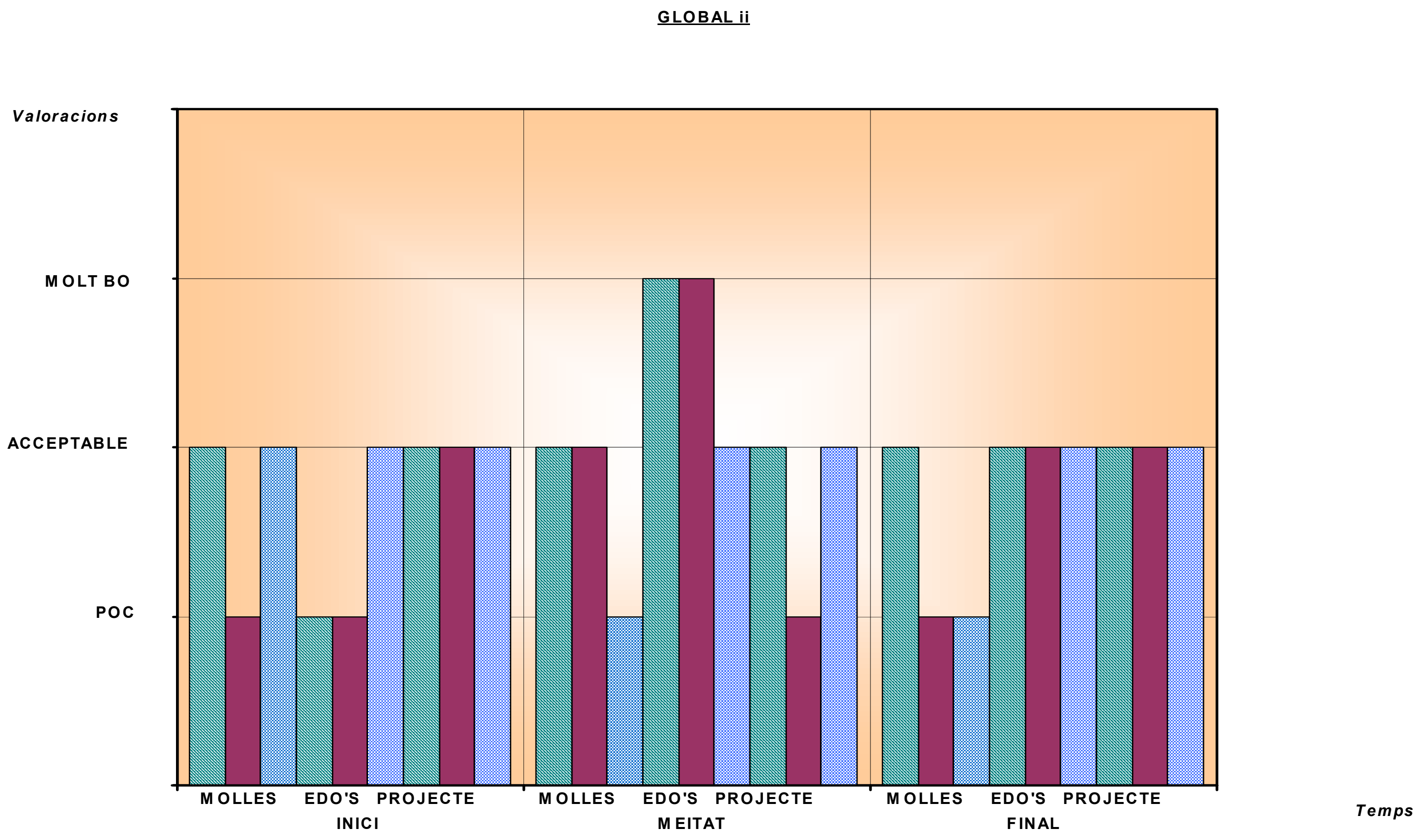
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable



Taules 32 i 33. Quadre i gràfica d'aspectes qualitatius del projecte.

Veiem que en el projecte, els coneixements de l'Imma es mantenen durant tota la pràctica. I encara que resol prou bé la majoria de les activitats, veiem com l'aspecte heurístic baixa a la meitat del projecte, que correspon amb el moment en què ha necessitat de l'ajut del professor per continuar.
Per altra banda, veiem com l'aspecte epistemològic també manté regularment el mateix valor. Això es degut a que he considerat que l'Imma ha interpretat prou bé el que se li ha demanat i ha sabut relacionar-ho molt bé amb problemes més aplicats.
Resumint totes les valoracions anteriors, i unificant les tres taules, s'obté la taula 34:

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Poc	Poc
EDO'S	COGNITIU	Poc	Molt bo	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Molt bo	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

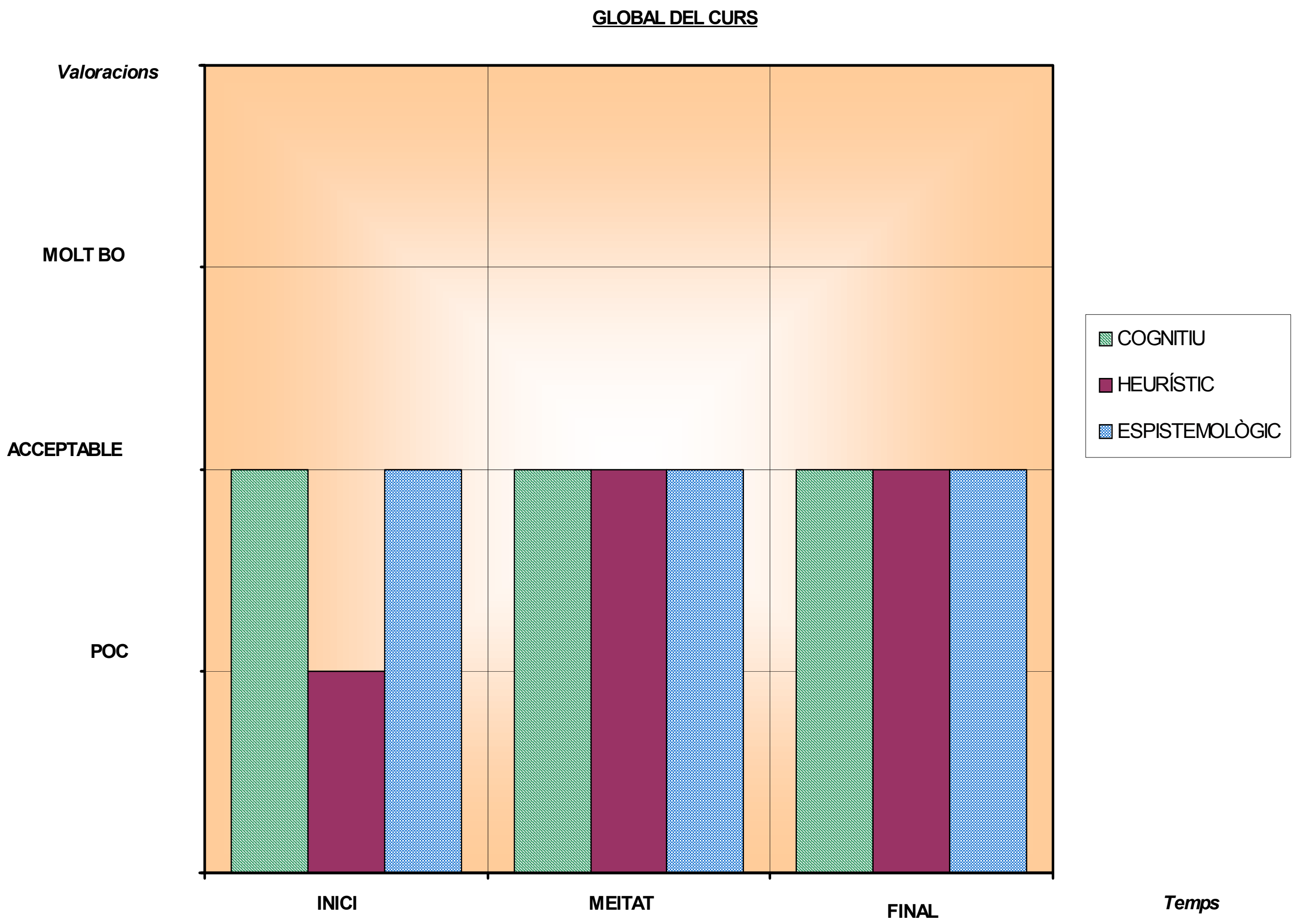


Taula 34. Quadre i gràfica resum dels aspectes qualitatius estudiats.

I finalment, per fer la gràfica global del curs, on s'ha fet una mitjana de totes les valoracions anteriors (taula 35):

	INICI	MEITAT	FINAL
COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Acceptable
EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

I això, pot graficar-se de la següent manera:



Taula 35. Valoracions globals del curs.

En conjunt, l'Imma parteix d'una base de coneixements teòrics bona. Però a l'inici s'encalla normalment en totes les pràctiques.

A mesura que s'endinsa en les activitats, adquireix millor habilitat a l'hora de resoldre-les i això queda reflectit perfectament en aquesta gràfica, ja que com es pot veure, el concepte heurístic puja a la meitat del curs i això es manté així fins el final.
Per altra banda l'alumne demostra en tot moment, que entén els conceptes estudiats, i els sap relacionar amb els problemes del seu entorn quotidià. En referència al contingut dels treballs i analitzant detalladament les seves observacions, es dedueix que per ella mateixa ha adquirit un coneixement de conceptes entre els quals destaca la variació del moviment d'un cos sotmès a la força de gravetat i ha lligat les equacions diferencials amb el comportament de les forces. Notem doncs, que el seu procés d'aprenentatge està d'acord en el procés de modelització plasmat en la figura 1.
L'Imma ha necessitat, però, de l'ajut del professor per assolir amb èxit la resolució de l'equació diferencial del problema de la màquina llevaneus. Aquest fet, que no es puntual, mostra la importància del paper del professor com a tutor del procés d'aprenentatge. Aquesta darrera afirmació la trobem reforçada en el seu comentari: "*...el mètode creatiu, doncs, es millor però cal que hi hagi un professor per ajudar-te quan t'encalles...*". També cal destacar que en els projectes, es l'únic cas en que ha necessitat l'ajut del professor per esbrinar què són els vectors i valors propis. Això es prou significatiu doncs els altres companys que han efectuat aquest mateix projecte han adquirit aquest coneixement sense les tutories del professor, treballant amb les notes i bibliografia que inclou cada projecte. Un denominador comú de tots els alumnes -com podem notar en els seus comentaris- es el fet que en el cas de l'estudi del creixement de la població d'una granja de conills, els elements matemàtics involucrats són els valors i vectors propis. Doncs bé, enlloc han necessitat cap demostració, ni teoremes relatius dels conceptes involucrats. Això mostra que el fet de presentar només alguns resultats de matemàtiques, sense les demostracions, no es redueix amb aquesta metodologia a una exposició de receptes. En alguna ocasió he trobat companys meus que consideren que cal demostrar tot el que es diu, doncs altrament consideren que els temaris es redueixen a receptes. Hem comprovat que això no es cert, el modelatge dona peu al raonament i es un instrument pel qual es connecta el coneixement d'una manera directa amb les seves aplicacions.

Alumne: Mònica

La Mònica és una alumna que ve de COU. Coneix les matrius i les integrals i hi sap treballar, però no ha vist mai equacions diferencials. Ha resolt les activitats bastant bé i ha aportat opinions positives, tal com veurem a continuació.

1. Modelatge d'un sistema de ressorts

Per resoldre les activitats 1 i 2, la Mònica ha hagut de recordar tot el relacionat amb les forces que teòricament ja havia après, però que havia oblidat. Això li ha creat una certa dificultat a l'hora de resoldre aquestes activitats. A la figura 42 diu textualment:"*Tant a l'activitat 1 com a la 2 m'ha costat al principi, he hagut de fer memòria per tenir de recordar tot el que està relacionat amb les forces i que tenia oblidat*"

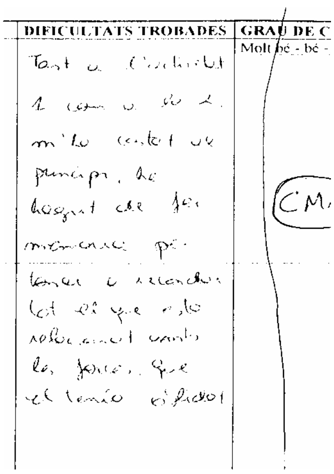


Figura 42. Opinió de la Mònica a l'inici de la pràctica d'àlgebra lineal.

Inicialment, l'aspecte cognitiu es doncs acceptable i com que no ha trobat problemes en la resolució de les primeres activitats, des de un punt de vista heurístic també es acceptable. Inicialment li costa relacionar els continguts físics amb el model matemàtic i no veu prou bé el lligam matemàtica-realitat, aquest fet ens intueix a qualificar l'aspecte epistemològic inicialment com a *Poc*.
L'activitat 3, que és l'aplicació de la teoria de les matrius a un cas concret, no l'ha fet bé perquè no l'ha acabat d'entendre. Probablement la Mònica, igual que altres alumnes, ha notat un salt gran entre les activitats 1,2 i la 3, de forma que s'ha perdut.
La Mònica no acaba d'entendre prou bé l'aplicació del que fa amb el grau d'aplicabilitat, per tant hem valorat com a *poc* l'aspecte epistemològic també a la meitat de la pràctica. Això no es així al final del tema, que es *acceptable*, ella mateixa opina (Figura 43):

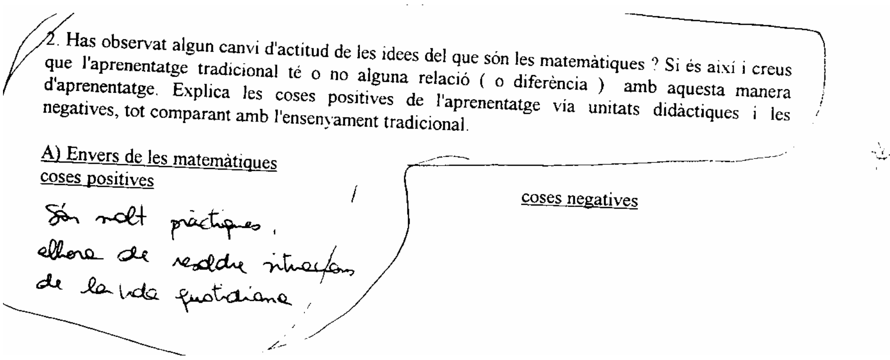


Figura 43. Comentari de la Mònica vers les matemàtiques.

L'activitat 4 l'ha resolt força bé però s'ha encallat en el model geomètric i ella mateixa diu (figura 44) que ha trobat dificultat en els angles:

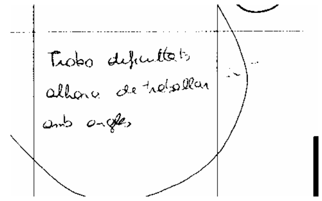
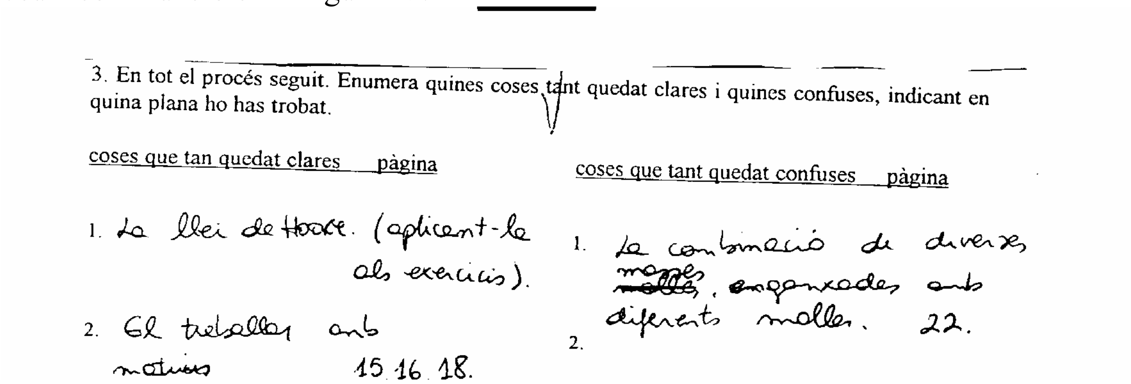


Figura 44. Manuscrit de la Mònica manifestant dificultats en interpretar el model geomètric.

Al final de la pràctica es demana a l'alumna que expliqui de forma planera quins són els passos que ha seguit per resoldre la pràctica . La Mònica ho explica així :
"*El primer exercici que proposa la pràctica és la situació d'una massa enganxada a una molla. Aquí he pogut calcular la força que actua sobre la massa i he pogut recordar la llei de Hooke. La segona activitat comença per una situació simple que més endavant es complica amb una massa enganxada a dues molles; s'estudien les forces que actuen sobre la massa. Després es proposa la situació de dues masses enganxades amb molles i també s'estudien les forces*".
Així és, doncs, com la Mònica veu la pràctica que ha realitzat.
Després es demana a l'alumna que digui quines són les coses que creu que tenen en comú les tres activitats. La seva resposta es:
1) El càlcul de la força que actua sobre cada massa en diferents situacions.
2) Aplicació de la fórmula adequada mitjançant la llei de Hooke.
La Mònica comenta, a continuació, les coses que li han quedat clares i les que li han quedat confuses. Les coses clares són
1) La llei de Hooke aplicada als exercicis.
2) Les operacions amb matrius en un context no matemàtic.
Les coses confuses són bàsicament la combinació de diverses masses enganxades a diverses molles. Aquestes respostes són les que ella va apuntar a la pràctica, tal com es veu a continuació en la figura 45:



3. En tot el procés seguit. Enumera quines coses tant quedat clares i quines confuses, indicant en quina plana ho has trobat.

coses que tan quedat clares pàgina

1. La llei de Hooke. (aplicant-le als exercicis).
2. El treballar amb matrius 15.16.18.

coses que tant quedat confuses pàgina

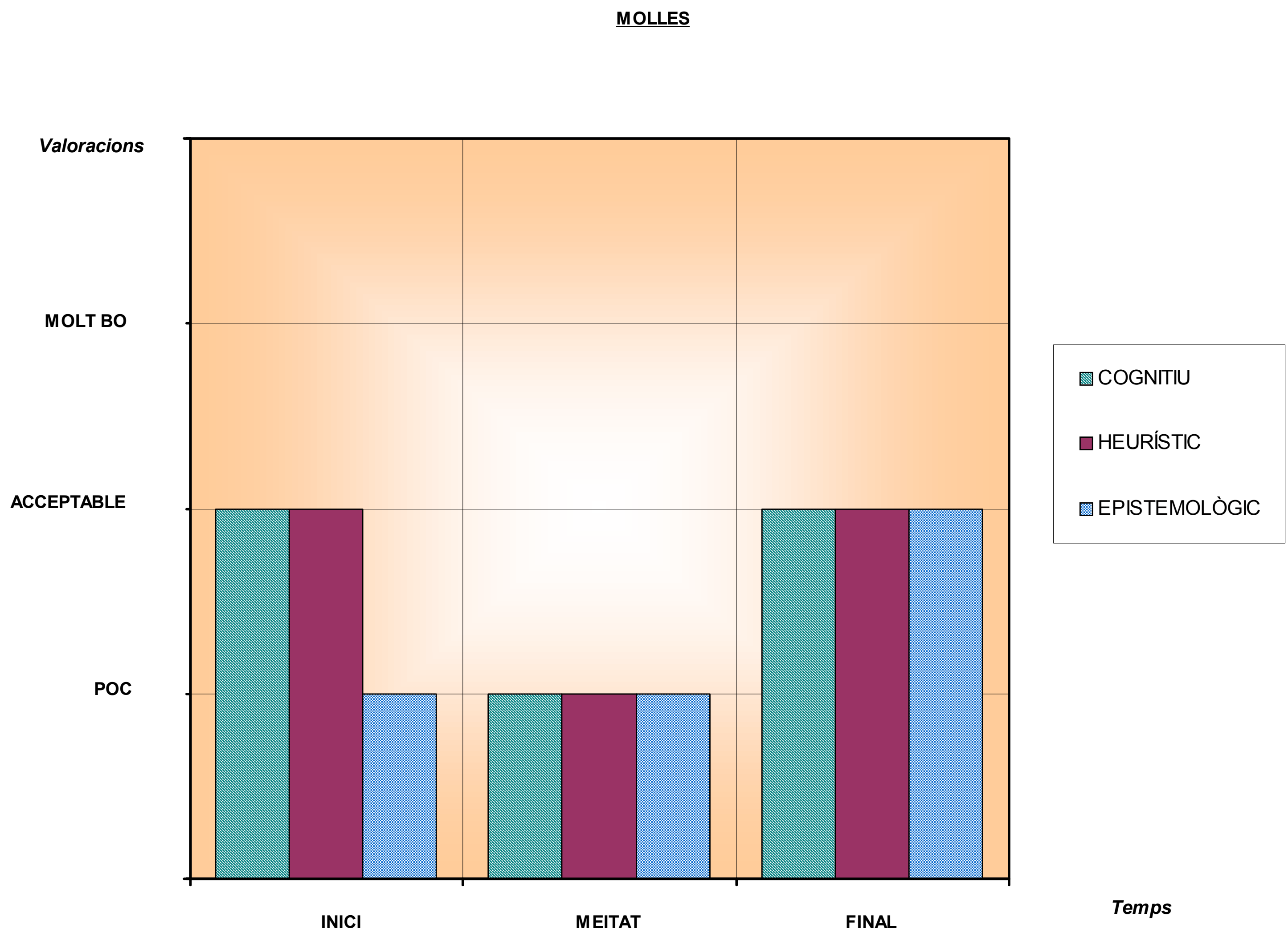
1. La combinació de diverses ~~molles~~ masses, enganxades amb diferents molles. 22.
2.

Figura 45. Llistats de coses clares i confuses detectades per la Mònica.

A continuació preguntem a l'alumna què tenen de positiu les matemàtiques. Contesta *que són molt pràctiques a l'hora de resoldre problemes de la vida quotidiana*. Pel que fa al mètode d'ensenyament didàctic de les matemàtiques basat en la modelització de situacions reals, *la Mònica pensa que el professor té un pes important a l'hora d'orientar l'alumne i d'ajudar-lo.*
Interpretant els comentaris anteriors, es pot obtenir la següent taula 36:

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Poc	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Poc	Poc	Acceptable

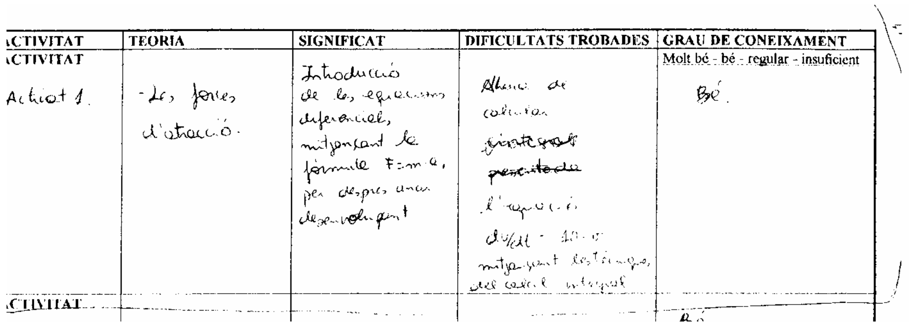
I amb aquesta taula, podríem fer la següent gràfica per al tema de Molles i que veiem :



Taula 36. Quadre i gràfica corresponent a la pràctica d'àlgebra lineal.

En aquesta unitat didàctica, a la Mònica li resulta fàcil resoldre les activitats inicials perquè porta un bon nivell de base (nivells heurístic i cognitiu acceptables). Però això no és així en les següents activitats, on es troba amb més problemes per resoldre-les bé (baixa el nivell en l'aspecte heurístic).
Finalment, veiem que la Mònica ha après nous conceptes, i encara que continua tenint problemes a l'hora de resoldre certes qüestions, es manté el nivell de coneixements i d'habilitat.
El nivell de epistemològic, creix de poc a acceptable al final d'aquest tema. Això ens indica que la Mònica en un principi no sap relacionar prou bé la teoria amb la pràctica en un principi, però al final millora.

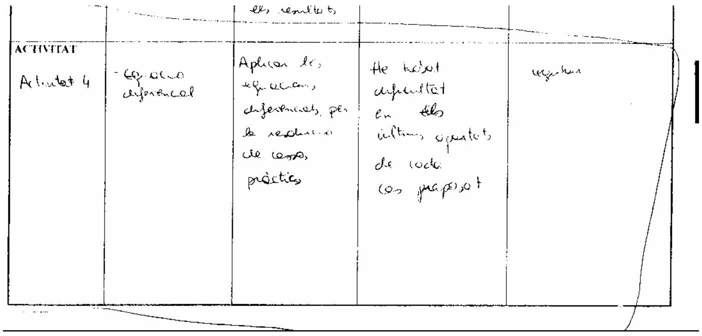
2. El món de les equacions diferencials
Comencem comentant l'activitat 1. Parla de les forces d'atracció i és com una introducció a les equacions diferencials. La Mònica s'encalla en el càlcul de l'equació diferencial mitjançant tècniques de càlcul integral. Però ella, contràriament al que pensa el professor, considera que el grau de coneixement que té d'aquesta part és bo (figura 46):



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT
ACTIVITAT				Molt bé - bé - regular - insuficient
Activitat 1.	- Les forces d'atracció.	Introducció de les equacions diferencials, mitjançant la fórmula F=m·a, per després anar desenvolupant	Alhora de calcular ~~~~ ~~presentada~~ l'equació dv/dt - [illegible] mitjançant les tècniques del càlcul integral	Bé.
ACTIVITAT				

Figura 46. Opinió de la Mònica a l'inici de la unitat d'equacions diferencials.

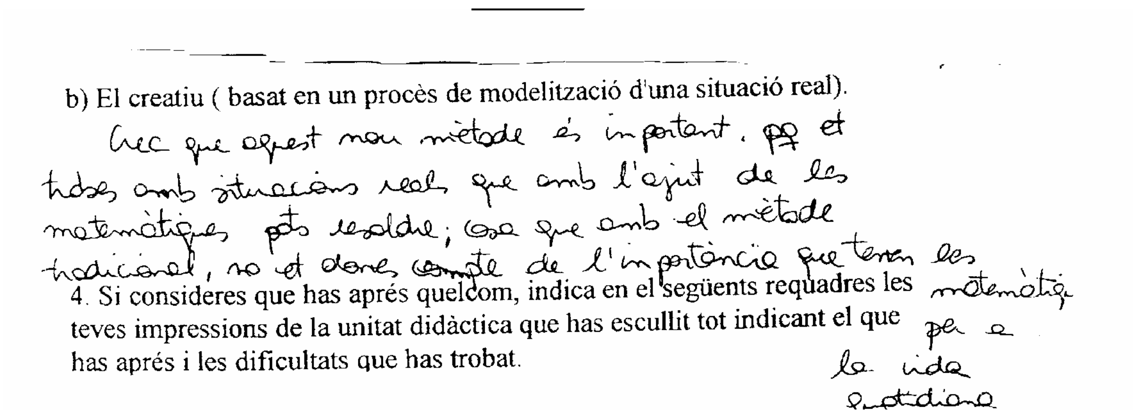
A l'activitat 2 s'hi fan indicacions per al càlcul d'equacions diferencials. L'alumna entén que s'han d'anar seguint els passos que et proposa l'activitat fins a obtenir l'equació diferencial. El seu grau de coneixement sobre aquesta part és bo.
L'activitat 3 exposa gràficament una equació diferencial. El grau de coneixement de l'alumna sobre aquesta part és bo. En aquestes dues activitats anteriors, la Mònica no troba cap dificultat.
L'activitat 4 és més complicada ja que es fa una aplicació de les equacions diferencials a casos reals. L'alumna ha trobat dificultat en els últims apartats de cada cas proposat, que són precisament els apartats més difícils. Als coneixements al final de la pràctica són *acceptables*, tal com mostra el comentari de la figura 47:



		els resultats		
ACTIVITAT Activitat 4	- equació diferencial	Aplicar les equacions diferencials per la resolució de casos pràctics	He trobat dificultat en els últims apartats de cada cas proposat	regular

Figura 47. Detall de l'opinió d'aplicabilitat de les Edo's a casos pràctics.

Quan preguntem a la Mònica quina de les dues unitats didàctiques sobre equacions diferencials ha triat i per què, ens contesta que ha escollit la primera perquè és la primera que ha trobat. Aquesta és una resposta típica. Això ens fa arribar a la conclusió, doncs, que la majoria d'alumnes no examinen les pràctiques abans de fer-les sinó que comencen directament pel que se'ls proposa.
Ara, aplicant l'instrument de recerca nº 9, es demana a l'alumna que doni l'opinió sobre el mètode matemàtic creatiu basat en la modelització d'una situació real. Ella diu que *és un mètode important perquè et presenta situacions reals que pots resoldre matemàticament*. I diu també que *amb el mètode tradicional no t'adones de la importància de les matemàtiques a la vida quotidiana*. Vegem aquesta opinió escrita per ella mateixa (figura 48) :


b) El creatiu (basat en un procès de modelització d'una situació real).

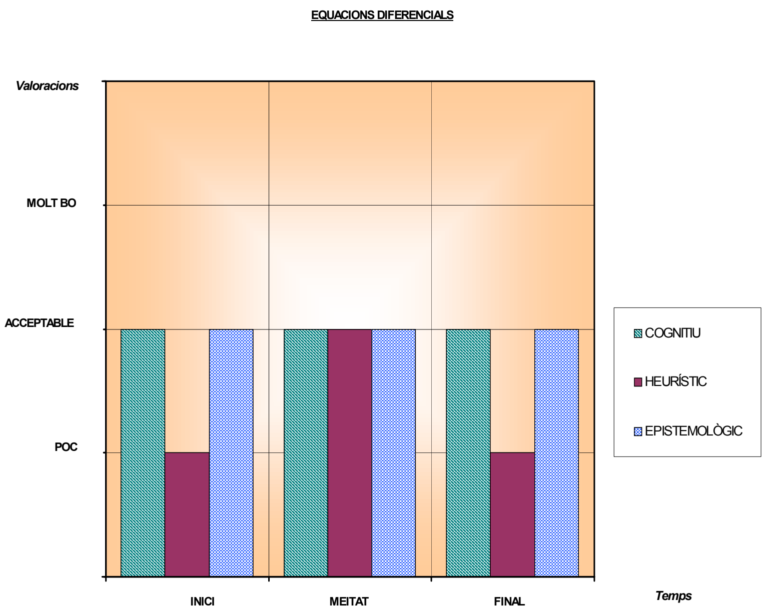
Crec que aquest nou mètode és important. pq et trobes amb situacions reals que amb l'ajut de les matemàtiques pots resoldre; cosa que amb el mètode tradicional, no et dones compte de l'importància que tenen les matemàtiques per a la vida quotidiana

4. Si consideres que has aprés quelcom, indica en el següents requadres les teves impressions de la unitat didàctica que has escullit tot indicant el que has aprés i les dificultats que has trobat.

Figura 48. Opinió sobre la metodologia.

Així, els resultats de la pràctica d'equacions diferencials els podem esquematitzar en la taula 37:

		INICI	MEITAT	FINAL
EDO'S	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable



Taula 37. Valoracions de la pràctica d'equacions diferencials (quadre i gràfica).

La Mònica no sap resoldre les equacions diferencials que se li proposen inicialment (poca habilitat en la resolució), encara que els seus coneixements són bons.
A la meitat del tema, els seus coneixements continuen sent bons i no es troba amb problemes importants.
Al final, però, considero que manté aquests coneixements, però no és així amb l'habilitat per resoldre les activitats.

3. Diagonalització de matrius (projecte)
En la realització d'aquest projecte, l'alumna ha arribat a les conclusions i valoracions següents (textualment) plasmades a la figura 49 :

5. CONCLUSIONS

Amb aquesta pràctica ens hem adonat de com es pot resoldre un problema pràctic, de la vida real amb eines matemàtiques. D'altra banda no ens ha sigut gaire dificil de seguir el passos indicats, però a l'hora de trobar la proporció en cada grup d'edats ens hem topat amb dificultats pròpies de ser la primera vegada que treballem amb aquesta matèria. Però en conclusió la pràctica no ha sigut gaire complicada, però pel contrari ens ha proporcionat uns coneixements fins ara desconeguts per a nosaltres.

6. BIBLIOGRAFIA

- **Introducción al algebra lineal. Larson-Edwards.Editorial Limusa.Capitol 7**
- **Algebra lineal con aplicaciones.McGraw Hill.Stanley I.Grossman**

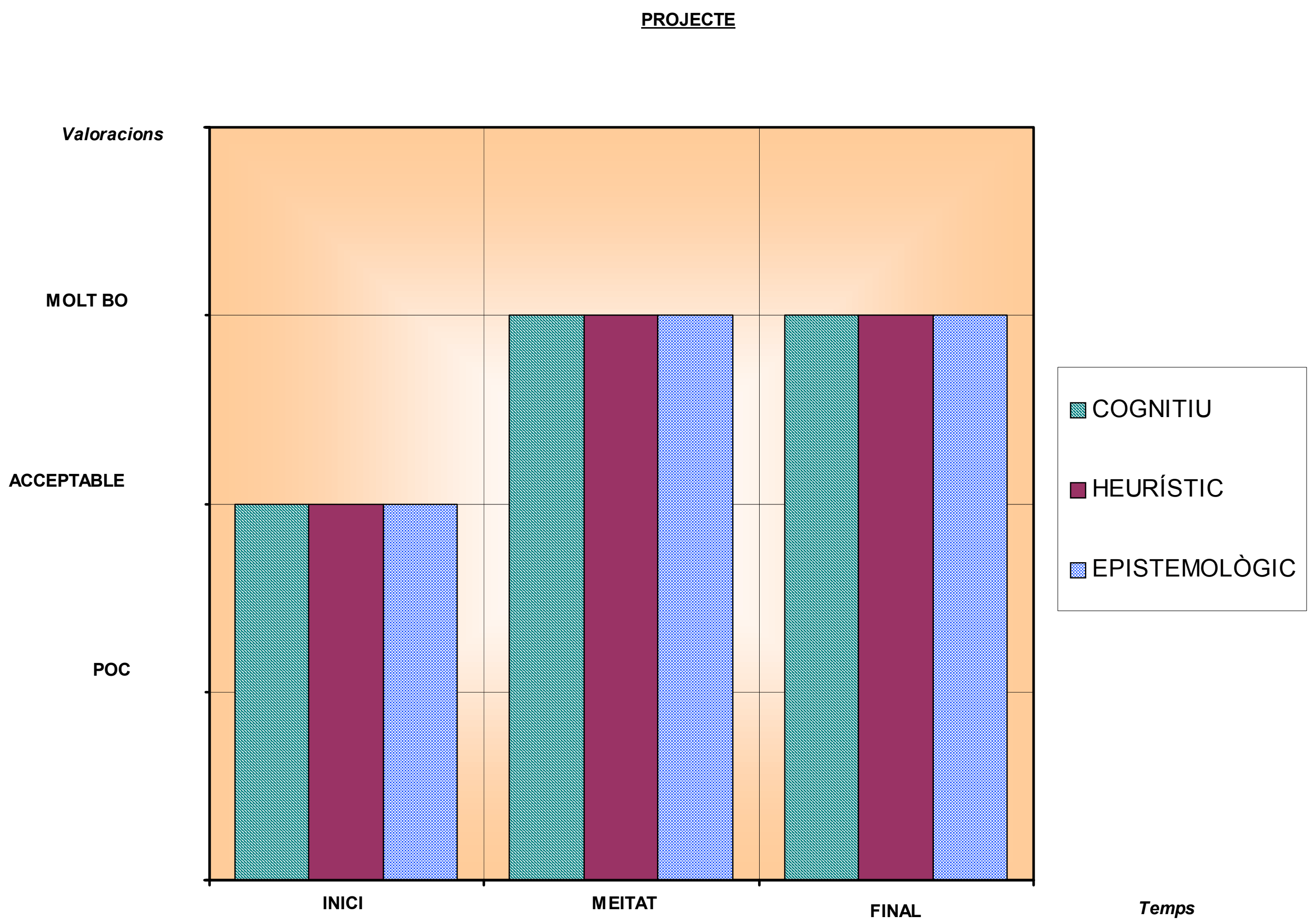
Figura 49. Resum de les conclusions del projecte efectuat per la Mònica.

"*Amb aquesta pràctica m'he adonat de com es pot resoldre un problema pràctic de la vida real, amb eines matemàtiques. D'altra banda no ha estat gaire difícil seguir els passos indicats, però a l'hora de trobar la proporció en cada grup d'edats m'he trobat amb dificultats pròpies per ser la primera vegada que treballem amb aquesta matèria. En conclusió, la pràctica no ha esta gaire complicada i m'ha proporcionat uns coneixements fins ara desconeguts per a mi*".

Els resultats del projecte podem sintetitzar-los com es mostra en la taula 38:

		INICI	MEITAT	FINAL
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Molt bo	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Molt bo	Molt bo
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Molt bo	Molt bo

Gràficament:

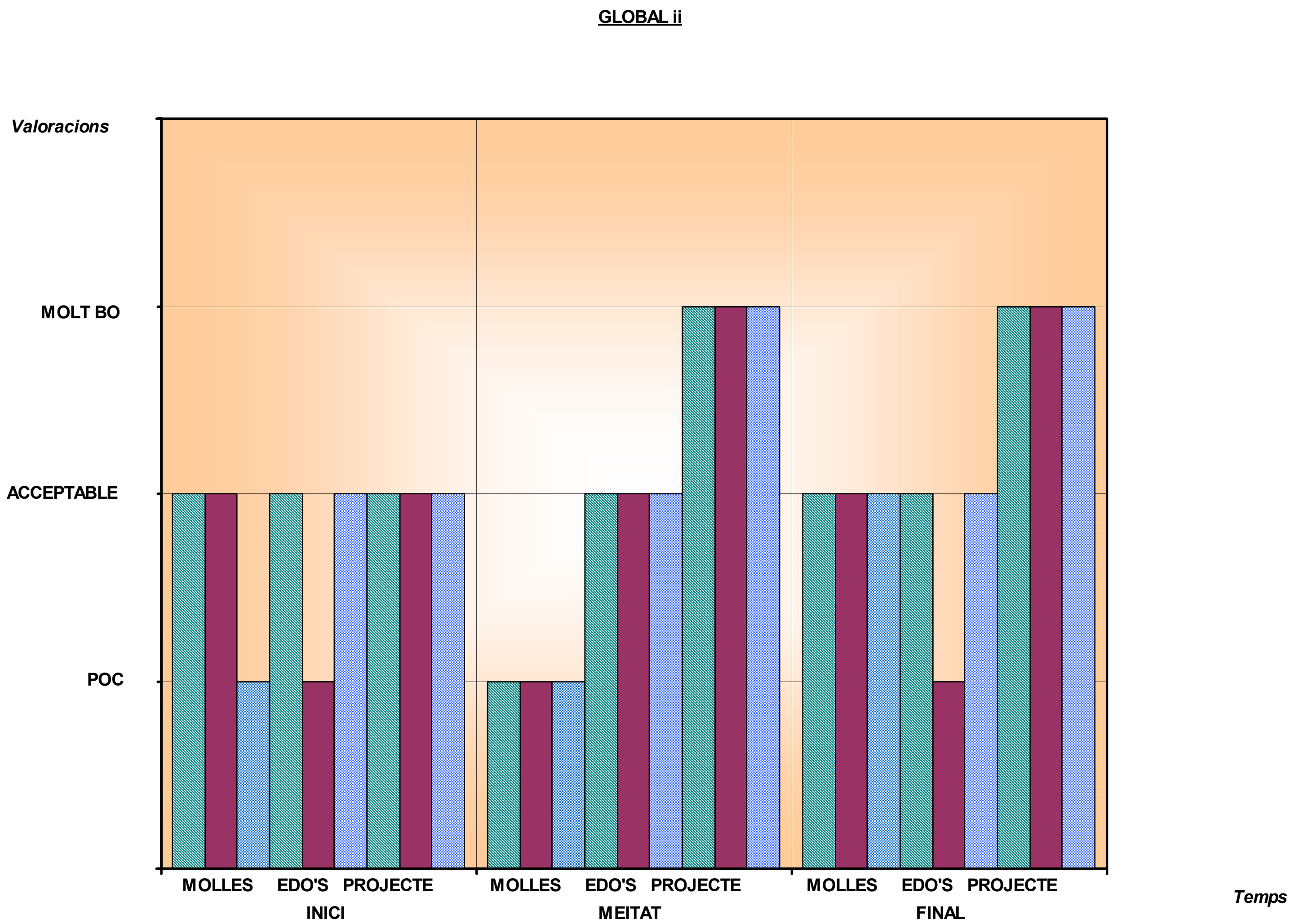


Taula 38. Valoracions qualitatives del projecte (quadre i gràfica corresponent).

A l'inici i fins a la meitat d'aquest projecte, ens trobem que l'alumne té uns coneixements acceptables. Al final, considero que són molt bons, amb relació de la dificultat del projecte.
Amb aquesta base tant bona, l'alumna resol amb relativa facilitat i cada vegada millor, les activitats proposades.
Segons la gràfica, la Mònica valora molt positivament aquest tipus de pràctiques ja que ajuda a relacionar els coneixements teòrics amb els més pràctics.
Integrant totes les valoracions anteriors en una mateixa taula (taula 39), s'obté:

		INICI	MIG	FINAL
MOLLES	COGNITIU	Acceptable	Poc	Acceptable
	HEURÍSTIC	Acceptable	Poc	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Poc	Poc	Acceptable
EDO'S	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Poc
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Molt bo	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Molt Bo	Molt Bo
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Molt bo	Molt bo

Gràficament:

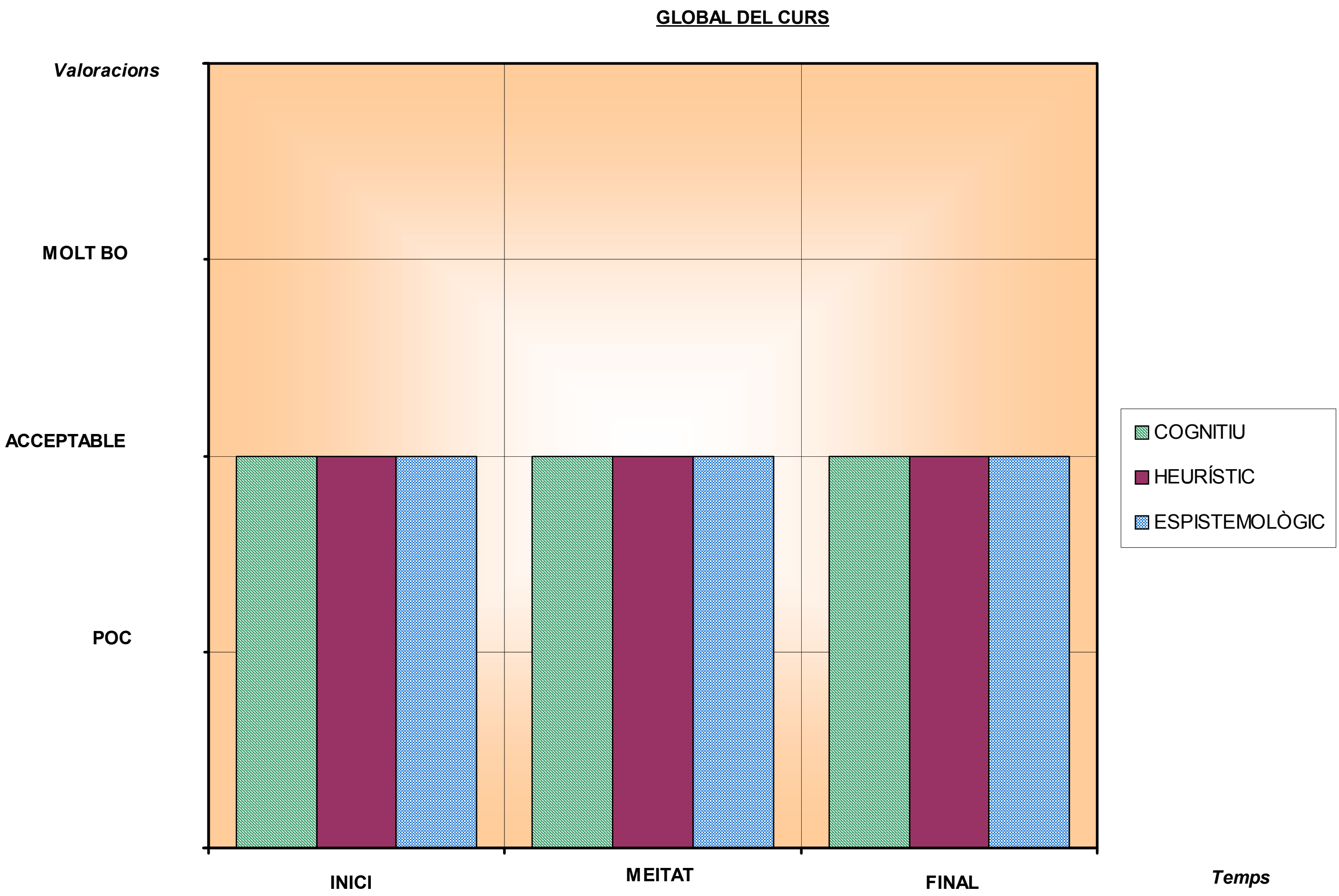


Taula 39. Recull de valoracions de les tres pràctiques. Quadre i gràfica.

I finalment, per fer la gràfica global del curs, on s'ha fet una mitjana de totes les valoracions anteriors, s'obté la taula 40:

	INICI	MEITAT	FINAL
COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Acceptable
HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable

I això, pot graficar-se de la següent manera:



Taula 40. Resum global del curs. Quadre i gràfica.

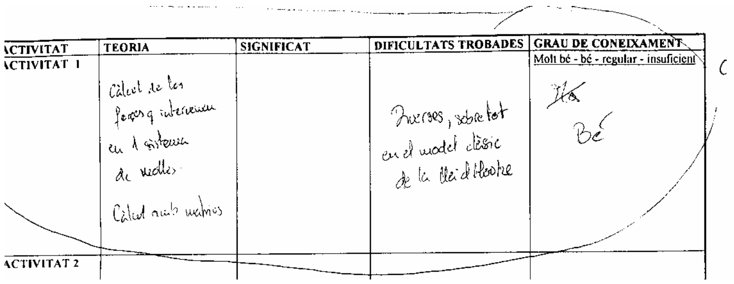
La gràfica demostra que la Mònica manté, en conjunt, un grau de coneixements uniforme durant totes les pràctiques del curs. Això també és així amb l'habilitat per resoldre les activitats, on el nivell és també acceptable.
Segons la gràfica, la Mònica valora d'una manera acceptable aquest tipus de pràctiques on s'ajuda a relacionar els coneixements teòrics amb la pràctica.
Cal destacar que en aquesta metodologia, i tal com apunta la Mònica i els altres companys anteriors, els estudiants aprenen a més a més de matemàtiques continguts d'altres àrees de coneixement: llei de Hooke, circuits, xarxes vials, entre d'altres. Recordem el seu comentari que diu: "*...les matemàtiques són molt pràctiques a l'hora de resoldre problemes de la vida quotidiana...*". Això mostra que el modelatge proporciona una visió del fet que les matemàtiques són presents arreu .
També comenta , com el cas de l'Imma, "*...que el professor té un pes important a l'hora d'orientar l'alumne i d'ajudar-lo...*".

Alumne: David

El David és un alumne que ve de COU i que ha resolt les unitats didàctiques amb bastant d'encert, tot afegint comentaris d'interès. Coneix les matrius i les integrals i hi sap treballar, però no sap resoldre equacions diferencials. Es força interessant la seva exposició del projecte que tenim recollida en vídeo ja que podem comprovar com gesticula i explica conceptes apresos per ell mateix, sense massa ajut del professor.

1. Modelatge d'un sistema de ressorts

En l'activitat 1, que ens parla del càlcul de les forces que intervenen en un sistema de molles, el David ha trobat algunes dificultats en el model clàssic de la llei de Hooke. Pensa, però, que el seu grau de coneixement sobre el tema és bo tal i com ho manifesta en la figura 50:



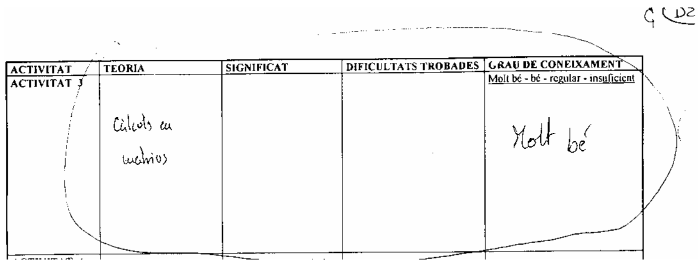
ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXEMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT 1	Càlcul de les forces q intervenen en 1 sistema de molles. Càlcul amb matrius		Diverses, sobretot en el model clàssic de la llei d'Hooke	~~Mo~~ Bé
ACTIVITAT 2				

Figura 50. Opinió d'en David sobre el seu grau de coneixement d'àlgebra matricial.

S'observa que el grau de coneixement i les habilitats a l'inici de la pràctica són acceptables.

L'activitat 2 ve a ser una ampliació de l'activitat 1. L'alumne l'ha resolt bé.

L'activitat 3 és l'aplicació a un cas clàssic i s'hi fan càlculs amb matrius. El David no ha tingut dificultat a l'hora de treballar amb matrius perquè en té uns bons coneixements de COU. Aquí s'observa que les habilitats són les mateixes que a l'inici de la pràctica, però el nivell de coneixement ha augmentat (figura 51):



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXEMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT 3	Càlculs en matrius			Molt bé

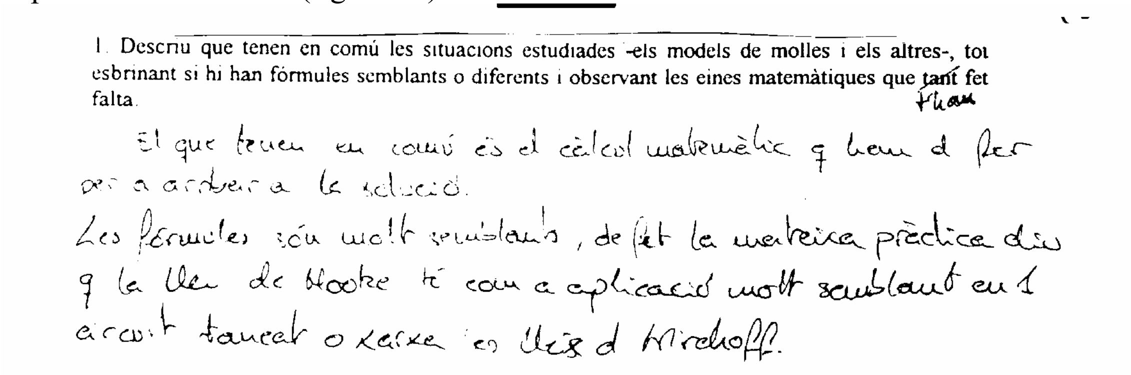
Figura 51. Nivell de coneixement manifestat pel David a l'activitat 3.

L'activitat 4 no l'ha resolt i no explica el perquè. Cal senyalar que quan es desenvolupava aquesta activitat a les aules, el David, no va assistir aquell dia a classe. Malgrat tot no l'ha fet a casa.

Ara demanem a l'alumne que ens expliqui les fases que ha seguit en cadascuna de les activitats. Textualment ens diu :

"*Primer hi ha una explicació de com funciona la llei matemàtica que regula les forces en un sistema de molles. Posteriorment es fa un reforçament dels conceptes donats abans i a continuació s'apliquen a un sistema de dues molles i una única massa.*

Després augmentem el nombre de masses per finalment tornar a ampliar el nombre de masses i molles".
"*En una segona fase practiquem amb el càlcul de matrius i veiem que el producte no es commutatiu. També aprenem a resoldre un sistema d'equacions*".
"*A continuació -tercera fase- es fa una aplicació sobre el que abans havíem fet basada en el tema de circuits i xarxes de Kirchoff. També es veuen les relacions trigonomètriques de suma i diferència d'angles*".
Passem ara a les coses que l'alumne diu que li han quedat clares i les que no, aplicant l'instrument de recerca nº 1. Li han quedat clares 1) la resolució de sistemes d'equacions, 2) la resolució de xarxes mitjançant Kirchoff, 3) la multiplicació de matrius, 4) les aplicacions de la llei de Hooke. No ha entès, en canvi, com funciona la llei de Hooke sobre el model clàssic d'una massa i una molla, la qual cosa no deixa de ser curiosa ja que aquest concepte és bastant elemental.
Després es demana a l'estudiant que descrigui què creu ell que tenen en comú totes les situacions estudiades en aquesta unitat didàctica. Contesta :
"*El que tenen en comú és el càlcul matemàtic que cal fer per arribar a la solució. Les fórmules són molt semblants. De fet, la mateixa pràctica diu que la llei de Hooke té com a aplicació molt semblant les lleis de Kirchoff en un circuit tancat.* Vegem la seva explicació textualment (figura 52):


1. Descriu que tenen en comú les situacions estudiades -els models de molles i els altres-, tot esbrinant si hi han fórmules semblants o diferents i observant les eines matemàtiques que ~~tant~~ fan fet falta.

El que tenen en comú és el càlcul matemàtic q hem d fer per a arribar a la solució.
Les fórmules són molt semblants, de fet la mateixa pràctica diu q la llei de Hooke té com a aplicació molt semblant en 1 circuit tancat o xarxe és lleis d Kirchoff.

Figura 52. Coses en comú de les situacions estudiades.

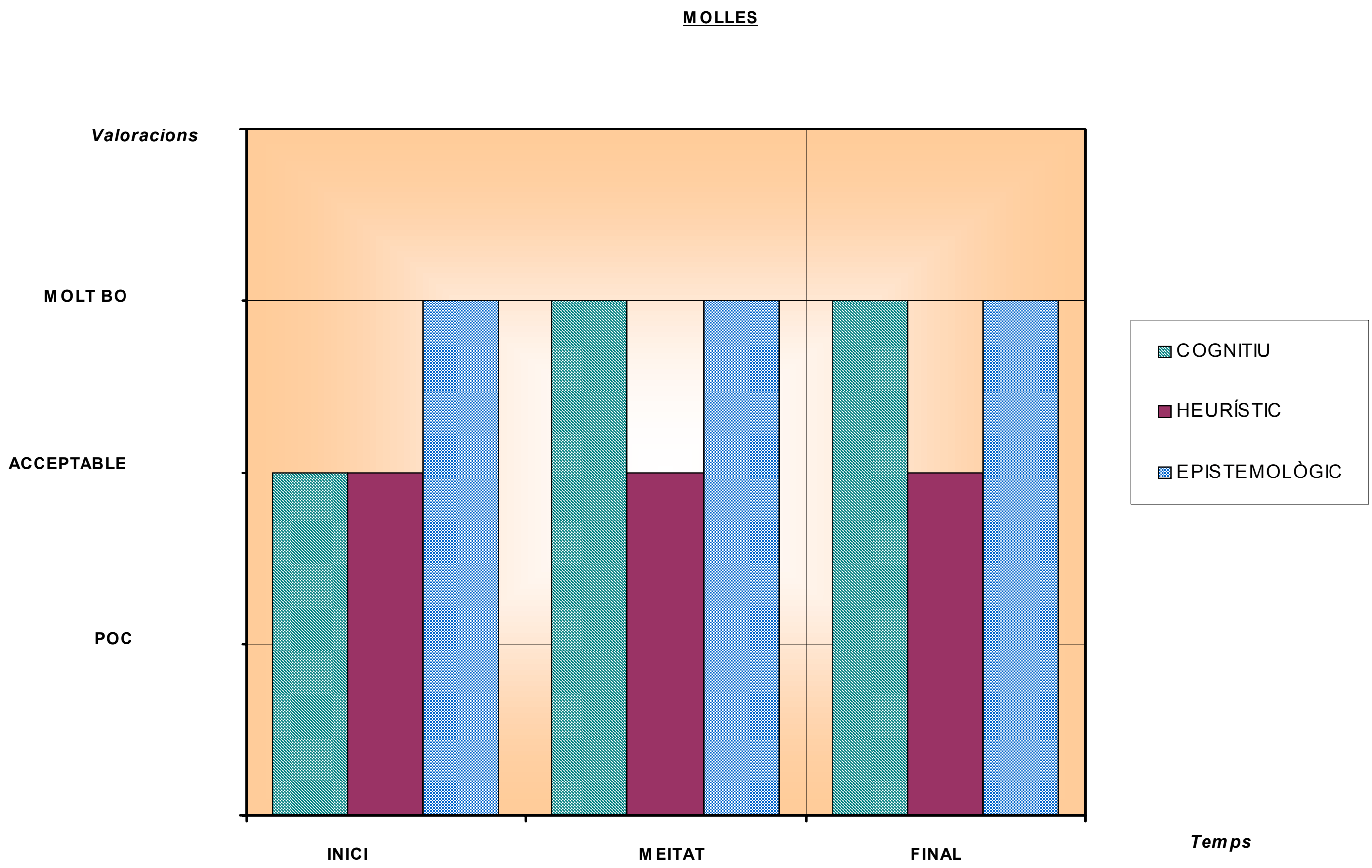
Parlem ara de les coses positives i negatives de les matemàtiques, com a conseqüència d'aplicat l'instrument de recerca nº 9, segons l'opinió del David.
L'alumne pensa que és molt positiu aprendre matemàtiques a través de casos pràctics que t'ensenyin a veure quin sentit té l'aplicació dels conceptes. D'altra banda el David té una opinió negativa, compartida per bastants alumnes, que diu que de vegades és difícil seguir una pràctica d'aquesta mena sense cap tipus d'ajuda, és a dir, que caldria que aquestes pràctiques tinguessin explicacions addicionals i que anessin molt guiades.

Això ho podem plasmar en el següent quadre (taula 41):

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Molt bo	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo

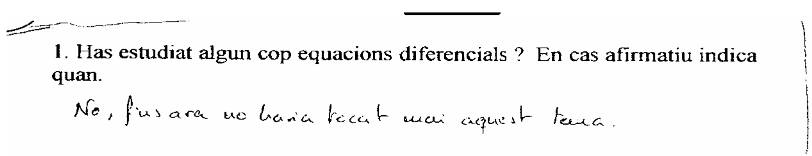
Que graficat, resulta:

Taula 41. Valoracions de la pràctica d'àlgebra lineal (quadre i gràfica).



El David porta inicialment una molt bona base de coneixements matemàtics.
Els coneixements augmenten en les activitats posteriors, (augmenta el valor cognoscitiu) i no es troba amb cap dificultat en la resolució d'aquestes.
Finalment, veiem que els valors anteriors es mantenen.

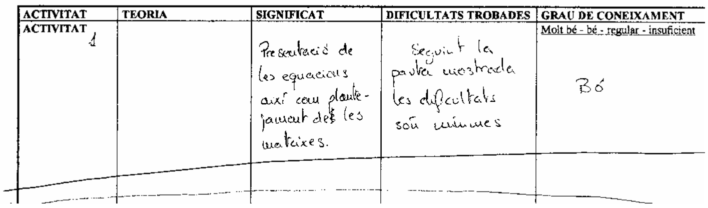
2. El món de les equacions diferencials
Al inici del tema, i com els altres companys, el grau de coneixement es baix. Això s'explica perquè es la primera vegada que estudia el tema (figura 53):


1. Has estudiat algun cop equacions diferencials ? En cas afirmatiu indica quan.

No, fins ara no havia tocat mai aquest tema.

Figura 53. En David manifesta que mai havia estudiat el tema d'equacions diferencials.

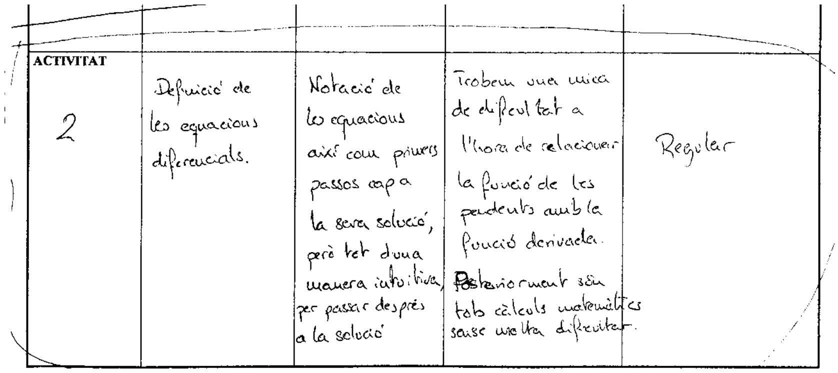
En l'activitat 1 (figura 54, columna 4) el David no ha tingut cap problema ja que, segons diu, "*seguint la pauta mostrada, les dificultats són mínimes*". Ell creu, doncs, que el seu grau de coneixement sobre aquesta part és bo.



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT 1		Presentació de les equacions així com plantejament de les matrius.	Seguint la pauta mostrada les dificultats són mínimes	Bó

Figura 54. Comentari de la unitat d'equacions diferencials.

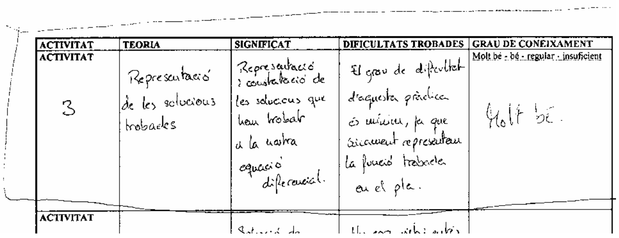
L'activitat 2 tracta de les equacions diferencials. El David diu, tal com mostra la figura 55:
"*Es va dels primers passos a la solució d'una forma intuïtiva. Aquí trobo una mica de dificultat a l'hora de relacionar la funció dels pendents amb la funció derivada. Els càlculs matemàtics posteriors no tenen gaire dificultat*".



ACTIVITAT 2	Definició de les equacions diferencials.	Notació de les equacions així com primers passos cap a la seva solució, però tot d'una manera intuïtiva per passar després a la solució	Trobem una mica de dificultat a l'hora de relacionar la funció de les pendents amb la funció derivada. Posteriorment són tots càlculs matemàtics sense molta dificultat.	Regular

Figura 55. Opinió del David respecte la segona activitat.

En l'activitat 3 es fa la representació de solucions trobades. "*Aquí fem la representació i constatació de les solucions trobades a la nostra equació diferencial. El grau de dificultat d'aquesta part és mínim ja que únicament hem de representar en el pla la funció trobada*". (Figura 56).



ACTIVITAT	TEORIA	SIGNIFICAT	DIFICULTATS TROBADES	GRAU DE CONEIXAMENT Molt bé - bé - regular - insuficient
ACTIVITAT 3	Representació de les solucions trobades	Representació i constatació de les solucions que hem trobat a la nostra equació diferencial.	El grau de dificultat d'aquesta pràctica és mínim, ja que únicament representem la funció trobada en el pla.	Molt bé.
ACTIVITAT				

Figura 56. Comentari del David referent a l'activitat 3.

Veiem com ell mateix opina que no troba cap dificultat en les habilitats de càlcul i s'en surt prou bé, per això, considerem que l'aspecte heurístic a la meitat del tema es acceptable.
L'activitat 4 tracta de l'aplicació de les equacions diferencials a un cas pràctic.
"*Solució d'un problema d'equacions diferencials aplicat a un cas pràctic. Un cop vist i entès el mètode, no hi ha pràcticament dificultats, però crec que caldria una mica d'explicació per millorar la unitat didàctica*".

El David creu que el seu grau de coneixement sobre aquesta part és bo.
L'alumne ha començat per la primera unitat didàctica (de les dues proposades) perquè, segons diu, és la primera que s´ha trobat al fulletó i com que li ha anat sortint ha continuat.
Ara preguntem a l'alumne, segons l'instrument de recerca nº 9, quin mètode creu més adient per ensenyar les matemàtiques, el tradicional o el creatiu. Contesta que el creatiu (basat en la modelització d'una situació real) ja que l'aplicació pràctica t'ajuda a entendre millor la teoria. La seva opinió es reflecteix en la fotocòpia (figura 57) que adjuntem :

[redacted]

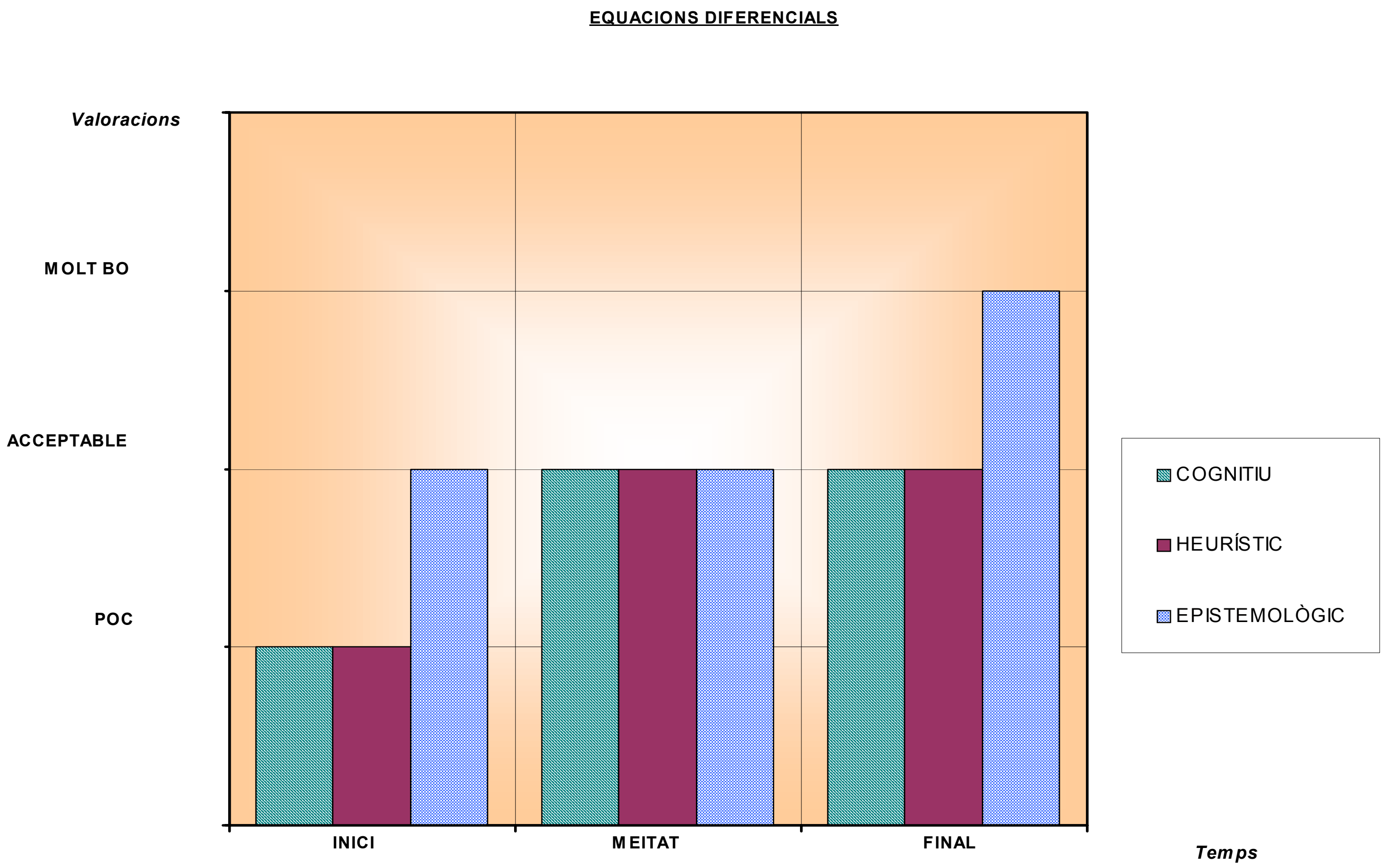
b) El creatiu (basat en un procès de modelització d'una situació real).
Aquest metode es bastant bo, ja que al veure aplicacions pràctiques ho entens millor, tot i que fora bo donar alguna que altra explicació apart d'aquestes unitats didàctiques

Figura 57. Declaracions del David referents a la metodologia.

Veiem com el David pensa que *es molt positiu aprendre matemàtiques a través de casos pràctics que t'ensenyin a veure quin sentit té l'aplicació de conceptes*. Certament, ell ha demostrat interpretar molt bé sempre la teoria. Per tant l'aspecte epistemològic es *molt bo* en tots els casos.
Els resultats d'aquesta pràctica els podem il·lustrar en la següent taula 42:

		INICI	MEITAT	FINAL
EDO'S	COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Molt bo

Amb aquest valors, podem dibuixar la gràfica que veiem :



Taula 42. Quadre i gràfica de les valoracions de la pràctica d'equacions diferencials.

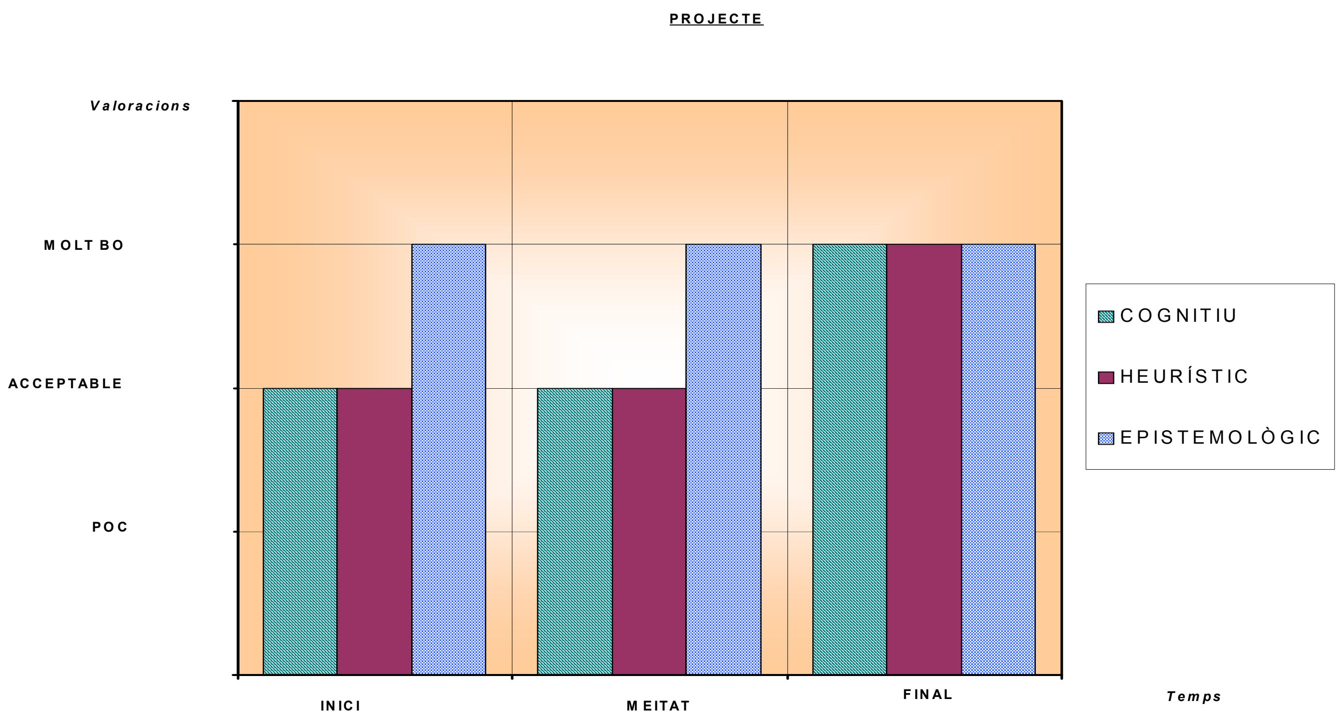
A l'inicia aquest tema, l'alumne no tenia cap coneixement i no sap resoldre les equacions diferencials que se li proposen (nivells baixos en els aspectes cognitiu i heurístic).
A la meitat del tema, s'interpreta de la gràfica, que l'alumne aprèn nous conceptes i millora la seva habilitat per resoldre les activitats.
Al final, considero que consegueix tenir uns coneixements i habilitats acceptables en aquest tema.

3. Diagonalització de matrius (projecte)
El projecte triat per l'alumne ha estat la successió de Fibonacci. L'ha resolt bé, amb un contingut matemàtic molt ric. Els seus comentaris personals són :
"*En la realització d'aquest treball he practicat amb conceptes que pràcticament tenia abandonats, com poden ser els relacionats amb les matrius. També n'he après de nous, que és al cap i a la fi del que es tractava*".
"*Crec que una possible extensió més àmplia de la memòria m'hauria possibilitat l'aprofundiment en alguns temes que pràcticament no he tocat, com ara la part d'espais i aplicacions vectorials*".
"*Pel que fa a les dificultats, han vingut a l'hora de relacionar el procés matemàtic que comporta la diagonalització d'una matriu dins l'univers més general dels espais vectorials de dimensió n-èsima ja que aquests no són tangibles*".

Pel que fa a aquest darrer comentari, vull afegir que en David és un enamorat de les matemàtiques. Al quadrimestre anterior va treure una qualificació d'excel·lent en l'assignatura d'àlgebra, i ell mateix va confessar en una classe de tutoria que pel seu compte ha llegit llibres de matemàtiques, això sí: tots teòrics i sense veure cap aplicació real. En el vídeo -instrument de recerca nº 10- podem visualitzar la presentació i defensa del treball.
Els resultats del treball en projectes podem esquematitzar-los en la taula 43 com:

		INICI	MEITAT	FINAL
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Molt bo
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo

I amb aquesta taula, podem construir la gràfica següent:

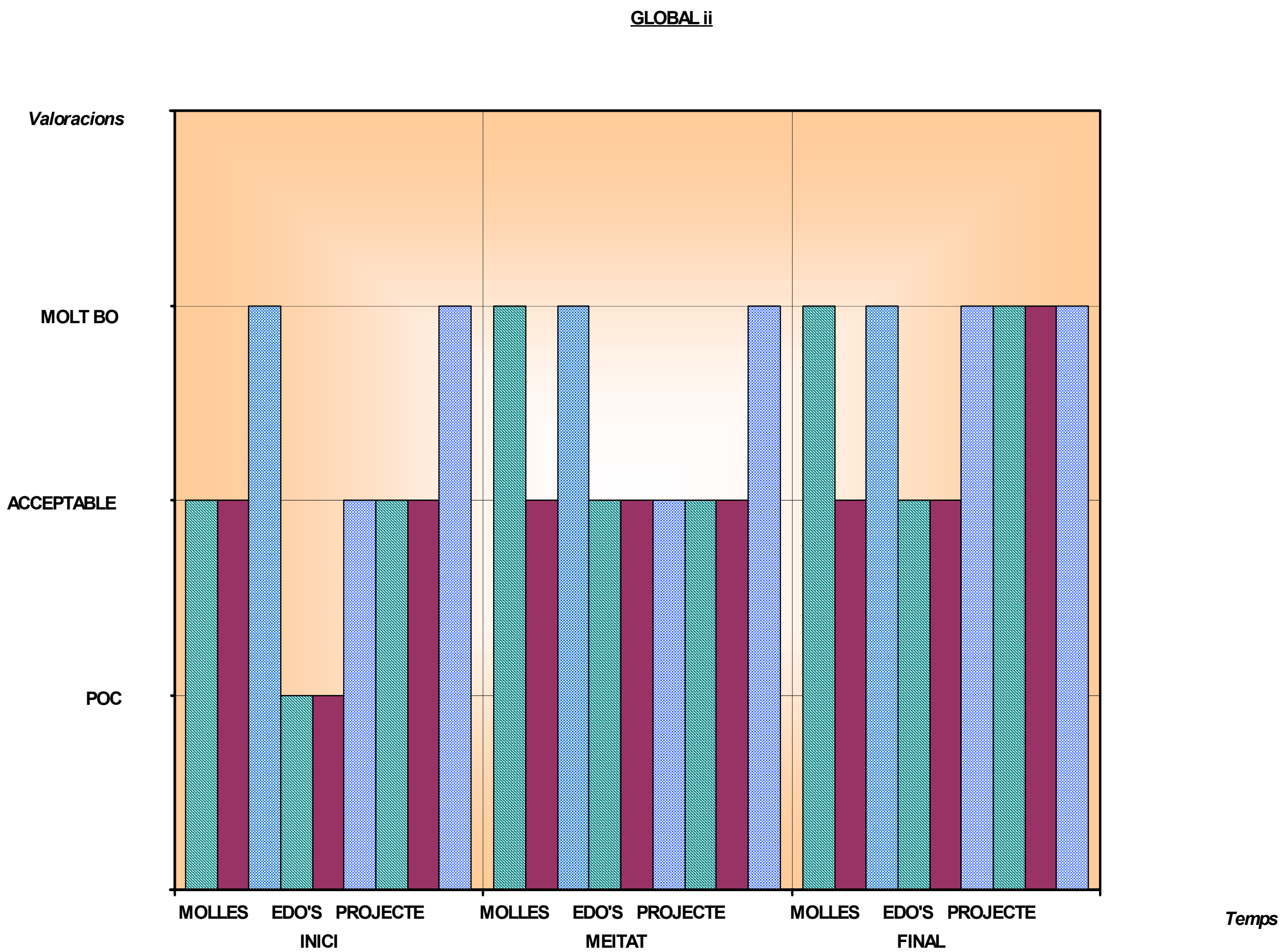


Taula 43. Quadre i gràfica de les valoracions del treball en projectes.

Des de l'inici fins a la meitat d'aquest projecte, ens trobem que l'alumne té uns coneixements accceptables. Al final, considerem que són molt bons, ja que ha après conceptes nous.
Amb aquesta base tant bona, l'alumne resol amb relativa facilitat i cada vegada millor, les activitats proposades. A l'annex 5 s'inclou un exemplar del projecte totalment desenvolupat, en el mateix es mostra la presentació molt acurada i les produccions matemàtiques aportades.
Unificant totes les valoracions anteriors en un sol esquema, tenim la taula 44:

		INICI	MIG	FINAL
MATRIUS	COGNITIU	Acceptable	Molt bo	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo
EDO'S	COGNITIU	Poc	Acceptable	Acceptable
	HEURÍSTIC	Poc	Acceptable	Acceptable
	EPISTEMOLÒGIC	Acceptable	Acceptable	Molt bo
PROJECTE	COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Molt bo
	HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Molt Bo
	EPISTEMOLÒGIC	Molt bo	Molt bo	Molt bo

Que gràficament s'obté:

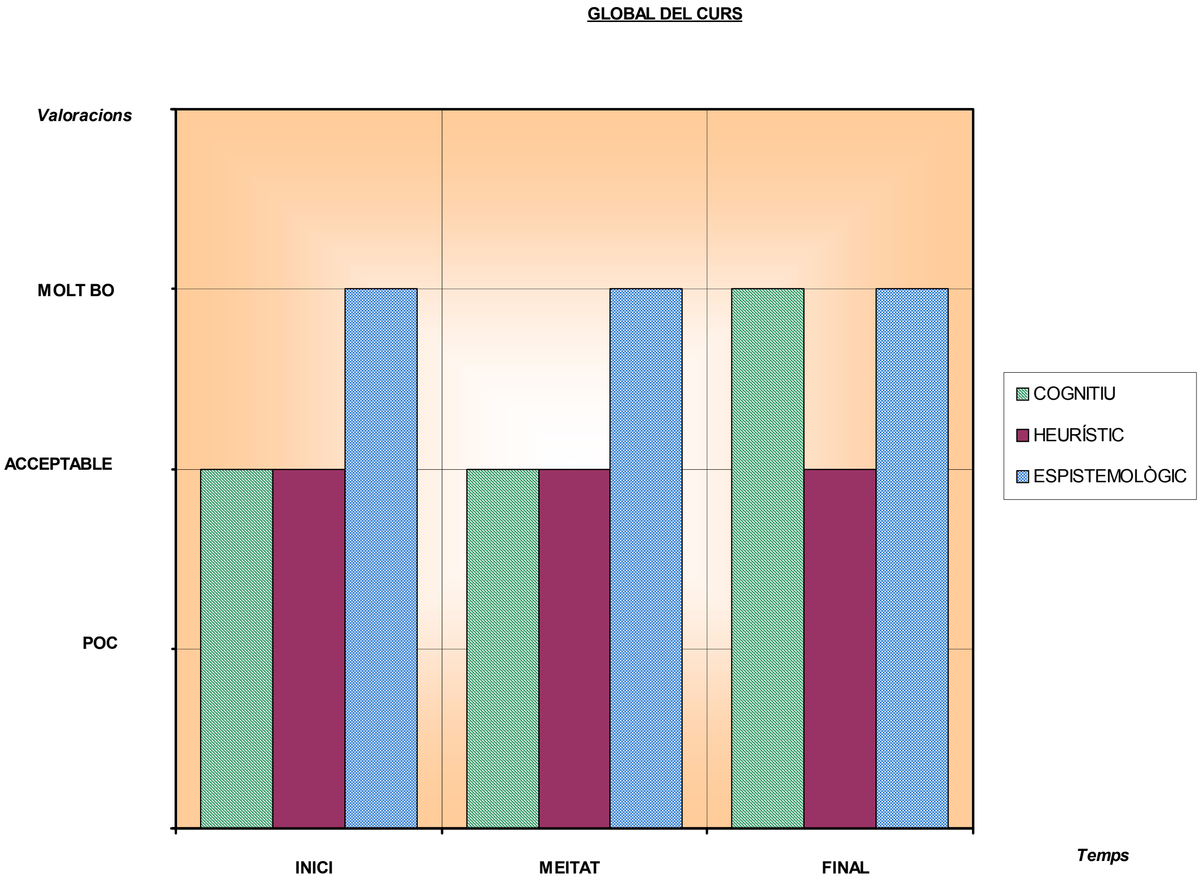


Taula 44. Unió dels resultats del curs.

I finalment, per fer la gràfica global del curs, s'ha fet una mitjana de totes les valoracions anteriors (taula 45):

	INICI	MEITAT	FINAL
COGNITIU	Acceptable	Acceptable	Molt Bo
HEURÍSTIC	Acceptable	Acceptable	Acceptable
EPISTEMOLÒGIC	Molt Bo	Molt Bo	Molt Bo

I això, pot graficar-se de la següent manera:



Taula 45. Valoracions globals del curs.

En conjunt, l'alumne parteix d'una molt bona base de coneixements teòrics que li permeten desenvolupar-se prou bé al principi de cada pràctica. A la meitat de les pràctiques i, encara que el grau de dificultat puja, no es veu amb gaires problemes a l'hora de resoldre-les. Això queda demostrat en aquesta gràfica, ja que com es pot veure, el concepte heurístic es manté.
Per altra banda, tal i com hem pogut veure, amb un escrit original, l'alumne entén els conceptes estudiats, i els sap relacionar amb els problemes quotidians, de manera notable. D'aquesta manera s'assoleix plenament la primera fase del procés de modelització, descobrint els models involucrats en cada situació proposada. Per tant, el nivell epistemològic s'ha mantingut sempre com a molt bo.

Dels aspectes globals més rellevant de les pràctiques efectuades pel David destaquem inicialment que respecte als continguts, en David s'adona que el producte de matrius no és commutatiu tal com podem comprovar amb les seves explicacions. A partir de la matriu de rigidesa i d'elasticitat descobreix que l'una és inversa de l'altra, és a dir: a partir d'una situació tècnica se li crea la necessitat d'esbrinar com pot cercar l'inversa d'una matriu per tal de poder resoldre el seu problema amb èxit, aquest comentari ens ve a dir que el modelatge és una forma de no adquirir coneixements incorrectes (el fet d'adonar-se que la matriu de rigidesa i elasticitat són inverses). Aquests fets suggereixen que el modelatge proporciona unes eines de construcció, que podríem anomenar aprenentatge per descobriment, i és una manera d'evitar coneixements incorrectes.
També observa l'analogia entre les diverses situacions que comparteixen el mateix model, integrant d'aquesta manera totes les situacions plantejades.
En tot el procés d'aprenentatge d'en David, s'assoleix amb èxit la formulació i resolució dels models matemàtics. Podem interpretar, per tant, que l'anàlisi empíric del procés de modelització s'aconsegueix correctament.
Destaquem, tanmateix, que comparteix l'opinió dels altres companys en que el mètode del modelatge millora notablement l'aprenentatge, doncs diu "*...l'aplicació pràctica t'ajuda a entendre millor la teoria...*". Podem afirmar doncs que el modelatge és una forma de presentar la teoria a partir de la pràctica.
Un comentari suggeridor és que en els seus comentaris -és l'únic estudiant que ho diu- destaca el fet que li hagués agradat aprofundir en les pràctiques per tal de treballar amb espais vectorials i aplicacions lineals. D'aquests comentari es desprèn que en David a après a estimar les matemàtiques.

4.2.3. Analogies i diferencies entre els estudiants

Seguidament considerem interessant incloure d'una manera sintetitzada els resultats acadèmics dels cinc estudiants analitzats, d'aquesta manera podrem efectuar un estudi comparatiu de les produccions realitzades i alhora visualitzar d'una forma ràpida la situació de cadascun, analogies i diferencies. Per això hem utilitzat l'instrument de recerca nº 6 (fitxa personal de l'alumne) per mostrar el perfil d'aprenentatge de cada un.
Mostrem, doncs, a continuació la fitxa personal de cada estudiant en les taules 46, 47, 48, 49 i 50.

Nom: Sung *Qualificació numèrica final: 8.5*

Procedència: COU ■ FP □ REFORMA □ MP-III □ REPETIDOR/A □

Coneixements previs:

Matrius SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □
Integrals SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □
Eq. diferencials SUFICIENTS □ POCS □ CAP ■

Pràctica d'àlgebra lineal

Dificultats trobades: 1) Signes de les forces quan hi ha moltes molles connectades
2) No sap resoldre el model econòmic i te dificultats en el geomètric
Suggeriments/aportacions: L'ensenyament tradicional no veu la utilitat de les matemàtiques a la vida real. Aquest mètode "creatiu" és millor.
Què ha après: Aplicacions de les matrius

Pràctica d'equacions diferencials

Dificultats trobades: Inicialment poques, mercès a les representacions gràfiques. En el problema de la màquina llevaneus ha tingut dificultats alhora de relacionar l'alçada, el temps i la distància
Suggeriments/aportacions: Per veure un tema per primera vegada és millor el mètode de les unitats didàctiques que el tradicional.
Què ha après: resoldre equacions diferencials de primer ordre i la seva interpretació física.

Projecte: Creixement de la població d'una granja de conills
Dificultats trobades: Cap
Suggeriments/aportacions: Cap
Què ha après: Les definicions i utilitat dels valors i vectors propis

Taula 46. Fitxa personal del Sung.

Nom: Joaquim *Qualificació numèrica final: 9*

Procedència: COU ☐ FP ■ REFORMA ☐ MP-III ☐ REPETIDOR/A ☐

Coneixements previs:

matrius SUFICIENTS ☐ POCS ■ CAP ☐
integrals SUFICIENTS ☐ POCS ☐ CAP ■
eq. Diferencials SUFICIENTS ☐ POCS ☐ CAP ■

Pràctica d'àlgebra lineal

Dificultats trobades: Resolució de sistemes (no en la interpretació).El model econòmic i geomètric. Troba “salts” entre les les activitats.
Suggeriments/aportacions: Dirigir mes les activitats.L'aplicació de les matemàtiques queda més clara aplicant-ho a casos reals.

Què ha après: Càlcul amb matrius i repàs de trigonometria.

Pràctica d'equacions diferencials

Dificultats trobades: Resoldre les equacions diferencials a través de les integrals.

Suggeriments/aportacions: Hi ha un salt molt gran entre les activitats.
Què ha après: Plantejar alguns tipus d’equacions diferencials lineals i l’homogènia.

Projecte: Creixement de la població d'una granja de conills

Dificultats trobades: Buscar informació en altres llibres i entendre-la.

Suggeriments/aportacions:

Què ha après: Concepte de valor propi i polinomi característic. Calcular determinants

Taula 47. Fitxa personal del Joaquim.

Nom: Imma *Qualificació numèrica final: 8.5*

Procedència: COU ■ FP ☐ REFORMA ☐ MP-III ☐ REPETIDOR/A ☐
Coneixements previs: *matrius* SUFICIENTS ■ POCS ☐ CAP ☐ *integrals* SUFICIENTS ■ POCS ☐ CAP ☐ *eq. Diferencials* SUFICIENTS ☐ POCS ☐ CAP ■
Pràctica d'àlgebra lineal *Dificultats trobades:* 1) signe de les forces, 2) càlcul de l'adjunt d'una matriu, 3) interpretació matricial de la llei de Hooke en varies masses. *Suggeriments/aportacions:* Explicar millor com es calcula la inversa.El mètode tradicional no es prou pràctic, es millor el creatiu però cal l'ajut del professor quan t'encalles. *Què ha après:* 1) comprovació de la llei de Hooke, 2) representació de forces mitjançant matrius, 3) Càlcul de solucions de problemes reals a través de matrius.4) Tractar problemes de circuits i xarxes vials amb matrius.
Pràctica d'equacions diferencials *Dificultats trobades:* Inicialment interpreta correctament les situacions i construeix les equacions però no les sap resoldre, li cal l'ajut del professor. *Suggeriments/aportacions:* Cal dirigir mes les activitats. *Què ha après:* Trobar models de situacions reals.
Projecte: Creixement de la població d'una granja de conills *Dificultats trobades:* Càlcul dels valors propis i vectors propis, li cal l'ajut del professor *Suggeriments/aportacions:* *Què ha après:* Concepte de valor i vector propi d'una matriu.

Taula 48. Fitxa personal de l'Imma.

Nom: Mònica *Qualificació numèrica final: 10*

Procedència: COU ■ FP ☐ REFORMA ☐ MP-III ☐ REPETIDOR/A ☐

Coneixements previs:

matrius SUFICIENTS ■ POCS ☐ CAP ☐
integrals SUFICIENTS ■ POCS ☐ CAP ☐
eq. Diferencials SUFICIENTS ☐ POCS ☐ CAP ■

Pràctica d'àlgebra lineal

Dificultats trobades: Aplicació de la teoria de matrius a la realitat mitjançant un sistema clàssic de masses connectades per molles. Troba dificultats al treballar en angles (model geomètric)
Suggeriments/aportacions: en l'ensenyament tradicional, normalment no es relacionen les matemàtiques amb el món real.
Què ha après: utilitat de les matrius per modelitzar una situació real: la llei de Hooke i les operacions amb matrius en un context no matemàtic

Pràctica d'equacions diferencials

Dificultats trobades: 1) el concepte de les equacions diferencials, que és nou, 2) aplicació de les equacions diferencials a la realitat.
Suggeriments/aportacions: la modelització d'una situació real permet entendre millor la utilitat de les equacions diferencials. En l'ensenyament tradicional no t'adones de la importància de les matemàtiques a la vida quotidiana.
Què ha après: familiarització amb el món de les equacions diferencials.

Projecte: creixement de la població d'una granja de conills
Dificultats trobades: buscar informació en altres llibres i entendre-la.
Suggeriments/aportacions: és fàcil agafar una idea global del que estàs fent, però es realment difícil aprofundir en els conceptes clau i entendre perfectament tot el procés.
Què ha après: Trobar la quantitat de conills al cap de cert anys mitjançant la diagonalització. Repassar Ruffini i operacions amb matrius i determinants.

Taula 49. Fitxa personal de la Mònica.

Nom: David *Qualificació numèrica final: 10*

Procedència: COU ■ FP □ REFORMA □ MP-III □ REPETIDOR/A □

Coneixements previs:

matrius SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □
integrals SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □
eq. Diferencials SUFICIENTS ■ POCS □ CAP □

Pràctica d'àlgebra lineal

Dificultats trobades: 1) No interpreta be la llei de Hooke en varies variables
Suggeriments/aportacions: coses positives de la modelització de les matemàtiques: 1) es veu la utilitat de les matrius, 2) es molt gratificant poder resoldre un problema sol, sense l'ajut del professor, 3) Caldria aprofundir en aplicacions lineals
Què ha après: 1) utilitat de les matrius a la vida real, 2) Com varies situacions comparteixen el mateix model

Pràctica d'equacions diferencials

Dificultats trobades: Relacionar el pendent amb les derivades
Suggeriments/aportacions: Caldria mes explicacions en la unitat
Què ha après: 1) familiarització amb les equacions diferencials, 2) representació gràfica d'una derivada, 3) resolució d'una equació diferencial i 4) en general tot el relacionat amb les equacions diferencials.

Projecte: La successió de Fibonacci
Dificultats trobades: Cap
Suggeriments/aportacions: Cal ampliar el projecte per assolir coneixement mes profunds d'espais vectorials i aplicacions lineals.En aquesta pràctica es veu la veritable utilitat de les matemàtiques. Les matemàtiques no són la típica branca de la ciència que ens fa la vida impossible, sinó una eina útil que ens ajuda a resoldre els problemes de la vida quotidiana.
Què ha après: aplicació de les matrius per a la resolució d'un problema que sembla complicat, però que amb les matrius no ho és.

Taula 50. Fitxa personal del David.

Observem que tots ells provenen de COU, llevat en Joaquim que prové d'FP. Els coneixements adquirits amb anterioritat de les pràctiques, segons han manifestat ells mateixos en la secció anterior, eren de matrius i d'integració en una variable.Tots ells han estudiat aquests temes a partir d'un ensenyament tradicional i manifesten que no sabien la seva utilitat ni el grau d'aplicabilitat. Tots han desenvolupat una adquisició de coneixements per construcció i han assolit l'anàlisi empíric com ha procés d'abstracció per construir el model. Això ens avala el fet de que efectivament el modelatge es una eina d'aprenentatge eficient. En Joaquim i la Imma són els que han manifestat més dificultats en les habilitats per construir els model, i han necessitat l'ajut del professor. Malgrat aquest fet, han arribat a resoldre les activitats proposades.
A nivell epistemològic, podem afirmar que tots coincideixen en el fet de que les matemàtiques són una eina de servei per resoldre problemes de la vida quotidiana i que en l'ensenyament tradicional no es contemplen les seves aplicacions. Això ho podem comprovar en les figures 28,22, 31, 48 i 57.
En la pràctica de modelització d'un sistema de ressorts, les principals dificultats han estat en el signe de les forces i en la interpretació del model geomètric. Aquestes deficiències les atribuïm, respectivament, a una manca de coneixements previs de conceptes tècnics i de qüestions de trigonometria. Cal destacar que en Joaquim no ha tingut masses problemes en les interpretacions, aquest fet es conseqüència de que en els seus estudis previs de formació professional, ha treballat amb problemes més propers a la tècnica.
En relació a la pràctica d'equacions diferencials, els problemes comuns mes habituals han estat de temes puntuals: recerca d'alguna primitiva en les integrals que hi apareixent. Això ho hem resolt aportant algunes indicacions per la seva resolució. L'Imma i en Joaquim, que són els alumnes que els hi a costat més temps fer les pràctiques, creuen que les activitats han de ser més dirigides.
Pel que fa al paper del professor, l'Imma fa especial èmfasi en la importància del professor com orientador de les pràctiques. Cal destacar que en David –que manifesta agradar-li les matemàtiques- considera que caldria aprofundir més en d'altres aspectes de les matemàtiques: espais vectorials i aplicacions lineals. En David troba molt interessant aquesta metodologia. En David, probablement per la seva motivació a priori amb temes matemàtics, s'en surt prou bé en totes les pràctiques i considera que es gratificant (a diferencia dels altres) aprendre sense l'ajut del professor.
En els projectes no han tingut pràcticament dificultats, llevat en Joaquim que li ha costat cercar informació en els llibres complementaris. Cal destacar que l'Imma ha fet el projecte amb el mateix grup que en Sung, malgrat això ha treballat bastant doncs ha tingut diverses entrevistes amb el professor (instrument de recerca nº 11, àudio) per tal d'aclarir els dubtes que tenia. El projecte mes elaborat –tant en presentació com en rigor matemàtic- ha estat el d'en David.
En les fitxes personals anteriors hem afegit la quantificació numèrica que valora el treball de l'estudiant. Hem valorat el que sabien inicialment amb el que han après al final de curs. A final de curs hem de presentar el resultat de l'avaluació de forma numèrica, aquesta qualificació representa a nivell oficial el resultat de valorar el què han après.
Per tal d'establir tipologies de comportament matemàtic, presentem tot seguit l'anàlisi de les produccions dels cinc alumnes.
En aquest punt, detallarem a partir de les interpretacions del investigador i les taules presentades en la secció anterior, la producció matemàtica adquirida pels cinc alumnes durant el curs d'anàlisi matemàtica. També hem usat en aquest anàlisi, a més dels instruments de recerca, la llista oficial de problemes de l'assignatura que anualment

publica el departament de matemàtica aplicada i telemàtica. Ens fixarem, doncs, no amb els comentaris i opinions vers la metodologia sinó amb els coneixements pròpiament matemàtics que han adquirit.
En aquest aspecte, el cas que considerem mes interessant és el d'en Joaquim. En Joaquim, tal i com hem dit anteriorment, és un alumne que ve d'FP i té inicialment menys coneixements matemàtics que els seus companys que provenen de COU. Per aquest motiu ens hi entretindrem més que en els altres. Malgrat això la seva qualificació ha estat bona i ha mostrat un elevat grau de coneixements matemàtics. El fet d'estar fluix de matrius i no saber res d'integrals, les pràctiques de modelatge l'han ajudat molt a assolir aquests conceptes que no tenia i a adquirir-ne de nous. En la pràctica d'equacions diferencials ha topat per primer cop amb problemes de càlcul integral. Per aquest motiu va realitzar la pràctica de Michael Schumaker que el va endinsar en el càlcul d'integrals, posteriorment va realitzar manualment una llista proporcionada pel professor, d'exercicis de càlcul de primitives (immediates, parts, canvis de variable senzills, i racionals amb zeros reals). A nivell d'equacions diferencials a après, a partir de la unitat didàctica i amb l'ajut del professor, el concepte de família de corbes com a solució, a resoldre les equacions de primer ordre (variables separables , homogènies i lineals) i la de segon ordre a coeficients constants a partir de l'estudi d'un circuit elèctric. Arran de treballar en el projecte, ha après els conceptes de valor propi i de vector propi per diagonalitzar una matriu. Com a complement de les activitats de modelatge, s'ha preocupat per iniciativa pròpia i amb l'assessorament del professor de treballar amb el derive i el mathematica, això ho ha fet per tal de comprovar els resultats d'exercicis que realitzava. En l'arxiu del professor consten diversos gràfics i exercicis fets amb ordinador. D'aquesta manera, el resultat numèric de l'avaluació del curs ha resultat ser d'un 9 (taula 47).
En David, amant de les matemàtiques, dominava perfectament les integrals i les matrius. La seva producció, ha estat bàsicament, en assolir sense l'ajut del professor la resolució de la totalitat d'activitats proposades en les unitats, només ha necessitat algun ajut puntual en algunes interpretacions tècniques; cal afegir que aquest comentari serveix també per la Mònica. A demostrat el domini, amb rigor i elegància, en la resolució de sistemes, equacions diferencials (de primer ordre i de segon ordre amb coeficients constants), en el càlcul de valors propis i vectors propis, ha après també a realitzar el canvi de base matricial per la diagonalització. En les exposicions a classe va ser el que va obtindre qualificació més alta per part dels seus companys. A més de les activitats pròpies de modelatge, ha resolt problemes de la llista oficial sense cap mena de dificultat. El qualifiquem com un alumne brillant, en David mostra que les unitats didàctiques i el projectes han sigut suficients per assolir els coneixements matemàtics fixats. Per aquest motiu, l'avaluació numèrica del curs ha resultat ser de 10 punts (taula 50).
El Sung, coneix les matrius i el càlcul d'integrals, però no sabia calcular matrius inverses. Arran de la pràctica de modelatge, s'adona no només d'interpretar el significat d'una matriu inversa, sinó de com es calcula utilitzant adjunts. En el problema geomètric es mostra reticent a revisar els conceptes de trigonometria i acaba no fent el problema. En el tema d'equacions diferencials, inicialment li costa entendre i relacionar a nivell algebraic el fet de variació instantània respecte al temps com la derivada. Aquest fet l'arrossega en diversos exercicis fins l'activitat 4, a partir d'aquí i arran de les indicacions plasmades en la unitatl s'adona del significat i assoleix amb èxit la resolució i interpretació de les equacions diferencials plantejades. En el projecte, fet conjuntament amb l'Imma, aprèn el concepte de valor propi com solució d'un polinomi anomenat característic, i de vector propi com a solució d'un sistema d'equacions lineals compatible

indeterminat que s'esdevé del càlcul dels valors propis. Numèricament la qualificació del curs ha estat d'un 8,5 (taula 46).
L'Imma, malgrat les dificultats que te de càlculs i les dificultats d'interpretació de les situacions tècniques, a après a resoldre equacions diferencials de primer ordre i a reconèixer les solucions com una família de corbes. Pel que fa a àlgebra lineal, ja sabia resoldre correctament sistemes d'equacions i operar en matrius. En el projecte a après el concepte de valor i vector propi i a diagonalitzar la matriu que apareix en el projecte.
Cal recordar que els casos tractats són matrius d'ordre dos i tres amb valors propis diferents i per tant sempre diagonalitzen. Al finalitzar els projectes aquest resultat els hi es lliurat pel professor. En la defensa a classe del projecte fa una exposició molt acurada i entenedora, mostrant que finalment a après conceptes matemàtics a mes de llur interpretació. La qualificació obtinguda va ser de 8,5 (taula 48).
La Mònica no ha tingut masses dificultats i no li cal l'ajut del professor. Ja sabia operar amb matrius i resoldre sistemes, l'única cosa aportada per la unitat es el fet de relacionar els continguts matemàtics amb els tècnics (això a estat per la Mònica i els altres companys una novetat). En les equacions diferencials sap distingir la tipologia d'equacions i aprèn a resoldre els tipus tractats: lineals, variables separables, segon ordre a coeficients constants, sistemes d'equacions diferencials de segon ordre a coeficients constants usant diagonalització; per aquest darrer cas el projecte li ha estat de gran utilitat. La qualificació obtinguda ha estat de 10 punts (taula 49).
En síntesi, podem unificar i resumir les produccions matemàtiques que s'esdevenen de les pràctiques de modelatge amb el següent inventari:

0. Revisar conceptes apresos a secundària: Trigonometria, tècniques elementals d'integració.
1. Interpretar el significat tècnic i reconeixement dels models lineals.
2. Familiarització amb la terminologia d'àlgebra lineal: compatible, adjunt, determinant.
3. Reconèixer diversos tipus de matrius: simètrica, transposta, identitat, diagonal.
4. Consolidar coneixements adquirits anteriorment: operacions amb matrius, la no commutabilitat del producte, resolució de sistemes, càlcul d'inverses usant determinants, adquirir habilitats de càlcul.
5. Assolir conceptes nous d'àlgebra: polinomi característic, valor i vector propi, diagonalització.
6. Reconeixement d'una equació diferencial i la seva tipologia: ordre, lineal, homogènia.
7. Familiarització amb conceptes propis d'equacions diferencials: camp de pendents, variació instantània.

Abans d'establir les conclusions fonamentals i valoracions, hem fet una tria de comentaris - ja exposats en la secció anterior- per tal de justificar les conclusions de l'experiència. Aquests comentaris els hem extret de les manifestacions escrites dels cinc estudiants i de la transcripció del instrument de recerca nº 10 (vídeo).
Els cinc alumnes han treballat les unitats didàctiques del modelatge d'un sistema de ressorts i la dels astronautes i les equacions diferencials; i per tant tenen experiència en l'aprenentatge a través del modelatge.
Tot seguit recollim una selecció de les opinions -d'entre les explicitades en la secció anterior- mes rellevants dels cinc alumnes. Exposarem doncs conclusions concretes i referides als cinc alumnes analitzats. En la secció següent formulem resultats més generals de la metodologia a partir de l'experimentació i del contrast amb els autors estudiats en el marc teòric per tal d'establir la validesa de la metodologia.

Sung: Quan li preguntem quin mètode d'ensenyament troba més interessant i li deixem triar entre el mètode tradicional (format per teoremes, definicions, etc.) i el mètode didàctic (basat en la modelització de situacions físiques reals), contesta:

"M'estimo més el mètode didàctic perquè veus en quin àmbit pots aplicar el que has après. En canvi, amb el mètode tradicional només veus temari i no aplicació"

Segons aquestes declaracions del Sung podem interpretar que amb el modelatge a après a desenvolupar-se amb les matemàtiques en un context real. De les seves afirmacions es conclou que a l'ensenyament tradicional no s'observa en cap moment la vinculació de les matemàtiques amb les necessitat d'un tècnic, mentre que amb el modelatge sí. Aquesta opinió confirma les paraules de Mogens Niss (1992) quan diu que "amb el modelatge les matemàtiques s'han convertit en una eina potent en mans de l'estudiant per resoldre problemes de la vida mateixa, mentre que abans les matemàtiques només tenien sentit dins el món de les matemàtiques i estaven desconnectades de la realitat".

El fet que l'alumne s'adoni que amb les matemàtiques es poden resoldre diversos problemes o situacions es un dels principals objectius que es pretenen fent servir el modelatge com a mètode d'ensenyament. Per tant podem dir que aquest tipus d'ensenyament, com a mínim, aconsegueix que l'alumne vegi clara la necessitat de les matemàtiques al món real, i per tant compleix un dels objectius inicials.

Joaquim ens diu:

"El que trobo de positiu es que amb aquest mètode didàctic es presenten casos molt propers a tu. El que trobo de negatiu es que de vegades i ha un salt massa gran entre la part propera a l'alumne (que consistiria en buscar enunciats entretinguts sobre casos reals, i a donar la resolució de l'exercici una mica guiada perquè l'alumne no es perdi) i la part veritablement matemàtica".

D'aquestes declaracions interpretem que el modelatge matemàtic apropa i mostra un lligam de les matemàtiques amb la realitat propera a l'estudiant. Segons aquest alumne però de vegades la resolució de les unitats no es fàcil i es fa imprescindible l'ajut del professor per guiar a l'alumne.

D. Leris (1993) i els seus companys a la Universitat de Saragossa diuen que es important aconseguir despertar en els alumnes l'interès per les matemàtiques, i que aquesta motivació es pot aconseguir mitjançant problemes d'assignatures no matemàtiques que s'hagin de resoldre utilitzant eines matemàtiques. Les unitats didàctiques que ha hagut de resoldre el Joaquim tractaven de problemes no purament matemàtics i propers a l'alumne per poder aconseguir aquesta motivació, i podem veure que el Joaquim ha trobat aquest aspecte molt positiu.

Imma:

"El mètode tradicional crec que no es suficient perquè no es prou pràctic. El mètode didàctic, doncs, és millor però cal que hi hagi un professor per ajudar-te quan t'encalles".

L'Imma també valora positivament l'ensenyament didàctic de les matemàtiques, i al mateix temps resumeix molt bé les opinions que hem recollit abans dels matemàtics defensors del modelatge, quan diu que l'ensenyament tradicional no es prou pràctic. D'altra banda, igual com l'alumne anterior, ressalta la importància del professor com a tutor del procés d'aprenentatge.

La Mònica contesta:

"Crec que aquest nou mètode es important, perquè et trobes amb situacions reals que amb l'ajut de les matemàtiques pots resoldre, cosa que amb el mètode tradicional no et dónes compte de la importància que tenen les matemàtiques per a la vida quotidiana".

Amb les declaracions de la Mònica podem veure que el modelatge proporciona una visió del fet que les matemàtiques són presents arreu. Fet compartit per P. Abrantes (1992), M. Niss (1989), De Lange (1987).
Podem comparar les paraules de la Mònica amb les afirmacions de Mogen Niss i veure que efectivament no entren en contradicció perfectament. Recordem que Mogens Niss (1992) afirma : "Amb el procés d'aprenentatge a través del modelatge, l'estudiant primer veu la necessitat d'usar tècniques matemàtiques per resoldre problemes no matemàtics, després dedueix ell mateix les eines matemàtiques necessàries, i finalment resol el problema". Així, l'estudiant aprèn matemàtiques d'una forma relaxada, donat que treballa dins un context real i pràctic. Podríem dir que les paraules de la Mònica, "Crec que aquest nou mètode es important, perquè et trobes amb situacions reals que amb l'ajut de les matemàtiques pots resoldre", gairebé resumeixen les declaracions de Mogens Niss.
David afegeix:
"Aquest mètode es bastant bo, ja que al veure aplicacions pràctiques ho entens millor, tot i que fóra bo donar alguna que altra explicació apart d'aquestes unitats didàctiques".
De les declaracions del David s'extreu que el modelatge no pot substituir totalment l'ensenyament tradicional, donat que segons ell són necessàries unes mínimes aportacions teòriques, tot i que també valora positivament aquesta metodologia, perquè t'ajuda a entendre millor la teoria.
L'Imma pensa que les unitats didàctiques són una eina eficaç per fer les classes més didàctiques, sobretot a l'hora d'introduir conceptes per primera vegada.
Aspectes que trobem recollits en l'instrument de recerca nº 10 (vídeo):
D'entre els vídeos que hem usat per la investigació, n'hem seleccionat les imatges i comentaris més significatius per tal d'il·lustrar el treball efectuat i la font de recollida de dades. Tal com expliquem en la secció de metodologia d'investigació, hem construït un vídeo d'aproximadament deu minuts de durada. En el mateix, podem visualitzar les imatges del treball desenvolupat i adquirir una idea global de l'aportació dels estudiants. En la primera part, presentem l'experiència del modelatge d'un sistema de ressorts i s'observa el problema de interpretació d'esquemes, i la necessitat d'introduir nos elements per modelar. També es fa palesa de la vessant utilitarista de les matemàtiques i de la relació amb la tècnica. Finalment recollim imatges que sintetitzen tres presentacions de projectes, on en les mateixes destaca la importància de presentar les matemàtiques lligades a situacions reals i la integració de les pràctiques fetes (de matrius i equacions diferencials).
Segons podem veure en les declaracions dels estudiants i la transcripció del vídeo, aquest mètode d'ensenyament a través de modelatge els agrada i els motiva. Segons l'opinió dels mateixos alumnes, aquest tipus d'ensenyament és molt més pràctic; han pogut comprovar la utilitat dels coneixements i conceptes que estaven aprenent per resoldre problemes físics reals o situacions amb que es poden trobar a d'altres assignatures o fins i tot a la vida en general, i aquest era un dels principals objectius, i a més ratifica les opinions que hem recollit en el marc teòric, i que podem sintetitzar afirmant que les matemàtiques s'aprenen amb més facilitat i motivació a través de tècniques de modelatge que mitjançant les classes teòriques clàssiques.
Hi ha alumnes (comentaris alumnes secció anterior i vídeo) però, que diuen que els conceptes que s'han d'aprendre a través de les unitats didàctiques no són fàcils d'assolir, de forma que definitivament sempre es necessita l'ajut d'un professor o la introducció prèvia, d'una manera teòrica o tradicional, d'alguns conceptes.

Sí podem assegurar, però, que gairebé tots els alumnes consideren que el modelatge matemàtic pot complementar l'ensenyament de les matemàtiques per fer-les més divertides i atractives per a ells. El modelatge, doncs, es una eina eficient d'aprenentatge. Podem concloure, també, que els alumnes no han valorat tant la utilitat d'aquest ensenyament per aprendre nous conceptes matemàtics com el fet d'obtenir una visió de que les matemàtiques són presents arreu i els seran molt útils per resoldre problemes que es podran trobar al llarg de la seva vida.

4.2.4. Enquesta complementària

Abans de passar al punt següent (4.3.), on es presenten els resultats de l'experimentació, i per tal de complementar la investigació hem considerar oportú incloure una breu ressenya a l'enquesta realitzada per la pròpia UPC. La mateixa es un element que pot reforçar la inclusió del modelatge com a eina d'ensenyament eficient.
Al final de cada curs, la UPC efectua enquestes relatives a l'actuació del professorat.
El contingut de les mateixes és un seguit de preguntes del tipus:
El professor és puntual?. Creus que és un bon professor?. Hi és a les hores de consulta? etc.
Al curs 1995-96 la UPC ha confeccionat un model d'enquesta diferent (com una prova pilot) i només adreçada a 11 professors de la politècnica. Cal dir que jo vaig ser un dels escollits per ser enquestat. L'enquesta -anònima- consistia en una simple pregunta:
M'interessa la teva opinió...:
Volem reproduir una petita mostra del model d'enquesta amb la resposta que hi apareix per tal de valorar l'opinió dels estudiants. Tal com podem observar en les fotocòpies d'aquestes enquestes incloses en l'annex 6, destaquem algunes de les opinions anònimes manifestades i que avalen la metodologia del modelatge. Per aquest motiu hem utilitzat l'enquesta com element de recerca (instrument nº 12).
"*Crec que en general el plantejament de l'assignatura està molt pensat de cara a l'alumne, però perquè fos una mica més "interactiu" penso que es podrien fer més treballs del tipus "projecte" que hem fet últimament. Estimula el poder aprendre més autodidàcticament*".
"*Considero correcte la didàctica de l'assignatura tot i que resulta una mica difícil de seguir, ja que suposa un treball continu i constant a casa que comporta l'abandonament d'altres assignatures per poder portar aquesta al dia. Les pràctiques i modelatge de sistemes reals són molt positives*".
"*Intenta aproximar més el temari de l' assignatura al que veiem de "mates" durant la resta de la carrera*"
"*Crec que no tenim prou temps per tanta matèria. Malgrat això, he après molt*"
Aquests comentaris, tal com hem dit anteriorment, estan recollits en les enquestes que s'adjunten en l'annex 6.
De les enquestes anònimes conclueixo que és adequada aquesta metodologia i que caldrà orientar el disseny de les assignatures en incloure treballs en grup en els currículums del futur enginyer. Els resultats de l'enquesta (anònima) són doncs coherents amb els comentaris aportats pels estudiants.

4.3. RESULTATS DE L'EXPERIMENTACIÓ

4.3.1. Valoracions de l'experimentació

D'aquest seguiment efectuat dels cinc alumnes com a resultat d'aplicar els instruments de recerca, i considerant les gràfiques explicitades en els apartats anteriors, podem

establir un seguit de resultats que estan d'acord amb els principis didàctics establerts en la problemàtica de la tesi.
Tal com mostren les respostes dels estudiants que hem transferit a partir dels instruments de recerca, descobreixen majoritàriament i correctament el model esperat per professor/investigador. Aquest fet mostra que, efectivament, l'anàlisi empíric del procés d'abstracció s'ha assolit amb èxit: formulen tant a nivell mental com escrit les equacions i expressions adients que caracteritzen el model. Observem que es verifica i es segueix el procés de matematització proposat en l'esquema conceptual de De Lange (1987) tal com s'explica en el marc teòric (capítol 2).
En els aspectes epistemològics podem avançar, que de l'estudi graficat dels cinc estudiants, les matemàtiques són una eina de servei per resoldre problemes de la tècnica i que ajuden a resoldre i interpretar situacions d'altres àrees de coneixement, per tant són també una eina eficient d'aprenentatge i d'adquisició de cultura.
A partir dels instruments de recerca utilitzats observem:

1. En l'ensenyament tradicional no es veu la utilitat de les matemàtiques en un context real. Aquests fet no es nou, en Puig Adam (1958) ja reivindica la presència de situacions reals en els currículums de matemàtiques (capítol 2). Avui, cinquanta anys després, ratifiquem les inquietuds de Puig Adam. Això es un dels factors que justifica donar una nova orientació en l'ensenyament de les matemàtiques.
2. Els alumnes, treballant en modelització, descobreixen el significat de les situacions plasmades, aprenen a construir models matemàtics de les situacions i veuen la necessitat de resoldre models específics per assolir llur solució.
3. Per l'estudi i aprenentatge de sistemes d'equacions lineals i equacions diferencials no cal la formulació clàssica estructurada en una successió de definicions i teoremes. La càrrega d'abstracció en els continguts d'un enginyer es per tant totalment innecessària, ja que l'enginyer es un usuari de les matemàtiques no un investigador de les matemàtiques.
4. En les pràctiques sorgeixen dubtes i per tant el professor té un pes important a l'hora d'orientar l'alumne i d'ajudar-lo.
5. En els projectes, els estudiants han après a desenvolupar-se en un context real, tot fent ús de les matemàtiques. D'aquesta manera s'aconsegueix establir una imatge equilibrada de les matemàtiques i donar-los la importància que els pertoca en el món real.

Aquestes valoracions exposades les podem formalitzar amb quatre punts a tall de conclusions fonamentals:

1. Les aplicacions i el modelatge matemàtic constitueixen una forma de motivació dels alumnes.
2. Les aplicacions del modelatge com una component cultural.
3. El modelatge constitueix una forma d'evitar aprenentatges incorrectes.
4. El modelatge com a forma de reconeixement d'estructures.

1. Les aplicacions i el modelatge matemàtic constitueixen una forma de motivació dels alumnes.

Els alumnes no massa afavorits en matemàtiques (principalment per l'ensenyament tant teòric que han patit anteriorment) es senten fortament motivats per que li veuen un sentit al que estudien. En tots els casos estudiats, i en particular en els cinc alumnes analitzats, es fa palesa de l'interès mostrat per l'aprenentatge dels temes que configuren l'assignatura. El fet de treballar en situacions properes a les seves necessitats professionals i a l'entorn quotidià proporciona una motivació que l'ensenyament tradicional no cobreix. Segons l'element de recerca nº 10 (vídeo) es mostra, en les intervencions públiques, un fort engrescament pels temes tractats, aquest fet es un element que prova l'elevat grau de motivació. També podem afegir que en l'esforç i entusiasme mostrat en la recollida de dades per realitzar els projectes, els estudiants no s'han limitat en la recerca i recopilació de dades a aplicar "la llei del mínim esforç", aquest fet també avala l'elevat grau de motivació adquirit en la metodologia del modelatge com eina innovadora d'ensenyament.

2. Les aplicacions del modelatge com una component cultural.

Certes aplicacions de la matemàtica que hem tractat en les unitats didàctiques i els projectes: com ara el modelatge d'un sistema de ressorts, el món de les equacions diferencials, l'estudi del creixement d'una població de conills, les oscil·lacions esmorteïdes, la successió de Fibonnaci. Tenen una component cultural important, els estudiants han descobert aspectes no pròpiament matemàtics (per exemple la biografia d'en Robert Hooke, anàlisis de circuits elèctrics, el funcionament d'una granja de conills, l'existència de l'astronauta Miguel López Alegria i la seva aportació als viatges espaials, etc) que formen part del context de la vida quotidiana, no només de l'enginyer, i que a través dels treballs desenvolupats pels estudiants hem pogut comprovar que han adquirit uns coneixements que podríem anomenar de cultura general. Tots ells han adquirit coneixements que tradicionalment no són propis de l'entorn matemàtic, i tal com hem mencionat anteriorment, han après conceptes de xarxes de circulació vial, problemes econòmics, conceptes de circuits elèctrics. En particular, en Joaquim en la unitat complementària de càlcul integral (annex 4), ha après l'estructura del circuit de Montmeló. En David, ha estudiat i a après conceptes matemàtics addicionals (no contemplats en el temari de l'assignatura) com ara les propietats de la successió de Fibonnaci. Els altres, i com a conseqüència de treballar amb el projecte del creixement de la població d'una granja de conills han adquirit coneixements d'un àmbit més proper a la biologia: com viuen els conills, quina durada de vida tenen, com es reprodueixen.

Un altre factor que considerem adient mencionar, es el fet de que, arran dels treballs realitzats, han après a utilitzar i familiaritzar-se amb un processador de textos per tal de fer una presentació acurada (veure annex 5) dels projectes.

3. El modelatge constitueix una forma d'evitar aprenentatges incorrectes.

En els exemples i situacions que hem tractat, els alumnes, per desenvolupar un problema concret i en particular en el cas del modelatge d'un sistema de ressorts, havien de conèixer algunes tècniques de càlcul matricial. Aquest fet comportava que alhora de cercar una matriu inversa usaven una fórmula memorística que havien après anteriorment; abans de fer la pràctica alguns alumnes dubtaven de si en fer la inversa havien de transposar la matriu inicial o no ho havien de fer. En la pràctica hem observat que partint d'una situació tècnica ells mateixos construïen la matriu inversa tot construint les matrius de rigidesa i elasticitat.

D'aquesta manera hem aconseguit que desaparegui la tendència a la memorització de fórmules, les aplicacions de les quals no tenien prou clares.

En el cas de les equacions diferencials, els cinc estudiants analitzats, han formulat correctament les expressions que modelen la situació, tot analitzant i comparant les solucions obtingudes, la seva coherència amb la situació plantejada. D'aquesta manera poden esbrinar la validesa del model trobat. Aquest fet ratifica que ha través del modelatge s'evita un aprenentatge incorrecte.

Amb el modelatge s'estimula el procés creatiu, ja que els alumnes (com podem comprovar en les seves aportacions i afirmacions) han tingut inquietuds pel descobriment i d'una manera dirigida han descobert i modelat les eines escaients per resoldre les diverses activitats plantejades.

4. El modelatge com a forma de reconeixement d'estructures.

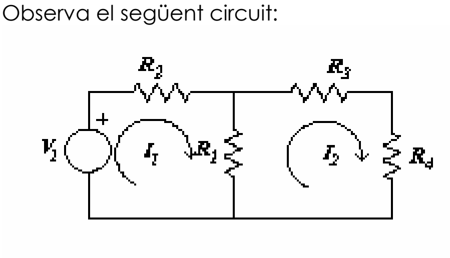
Conèixer un conjunt d'axiomes és quelcom diferent de reconèixer una estructura matemàtica en situacions físiques, químiques, i fins i tot de la pròpia matemàtica. A partir de l'ús de tècniques de modelatge, els cinc estudiants han reconegut que diferents situacions comparteixen el mateix model. Només cal posar com exemple el cas de les matrius: situacions de xarxes vials, problemes econòmics, estructura d'un circuit elèctric, model geomètric de girs en el pla; tots comparteixen el mateix model matricial. En l'annex 2 es poden consultar aquestes analogies, malgrat tot he considerat oportú incloure un extracte (figura 58) de la unitat modelatge d'un sistema de ressorts per tal d'il·lustrar les anteriors afirmacions:

" Hi ha un paral·lelisme entre la llei de Ohm i la llei de Hooke, les dues són expressions del tipus:

$A = B \cdot C$ en el cas que $\begin{cases} A = V \quad C = I \quad \Rightarrow \quad Ley\ de\ Ohm \\ A = F \quad C = x \quad \Rightarrow \quad Ley\ de\ Hooke \end{cases}$

Guaita els dos esquemes:

Observa el següent circuit:



Si plantegem les equacions::

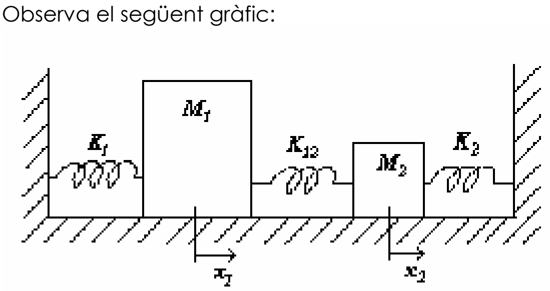
$$V = (R_1 + R_2) \cdot I_1 - R_2 \cdot I_2$$

$$0 = -R_2 \cdot I_1 + (R_2 + R_3 + R_4) \cdot I_2$$

matricialment:

$$\begin{pmatrix} V \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 + R_2 & -R_2 \\ -R_2 & R_2 + R_3 + R_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Observa el següent gràfic:



Plantegem les equacions:

$$f_1 = -K_1 \cdot x_1 + K_{12} \cdot (x_2 - x_1)$$

$$f_2 = -K_{12} \cdot (x_2 - x_1) - K_2 \cdot x_2$$

matricialment:

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(K_1 + K_{12}) & K_{12} \\ K_{12} & -(K_{12} + K_2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Noteu l'analogia entre les dues situacions.
T'adones que també obtenim matrius, a més a més simètriques !
Et proposem que a casa perdis una estona cercant més ambients on apareguin matrius, i que posteriorment les portis a classe i plegats cerquem propietats i relacions. Què et sembla? "

Figura 58. Analogies entre el model mecànic i l'elèctric

Els estudiants han après el significat dels conceptes involucrats: el producte de matrius -per posar un exemple- no té el mateix significat per un enginyer mecànic (matriu d'elasticitat i rigidesa) que per un enginyer elèctric (matriu de resistències i intensitats).
En els projectes també es mostren situacions que comparteixen el mateix model matemàtic, en aquest cas la diagonalització. Hi apareixent el creixement d'una població de conills, la recerca del terme general de la successió de Fibonnaci, i la resolució d'una equació diferencial lineal. Tots ells tenen com a denominador comú la diagonalització. En els projectes la resolució dels problemes suggerits és idèntica i les situacions són diferents. Vull destacar que és admirable el fet que un mateix model comparteixi i contribueixi a l'estudi de situacions inicials tan distants. Això proporciona una visió integradora dels conceptes apresos i alhora l'agermanament entre matemàtica i realitat.
Des de una perspectiva social, en el treball en projectes -segons l'instrument de recerca nº 10- els alumnes realitzant tasques en grup i d'aquesta manera s'observa un debat i negociació entre els membres del grup. Podríem afirmar, doncs, que en les pràctiques de modelatge hi apareixent certs indicis que contribueixen a desenvolupar la competència

democràtica dels alumnes. Aquest fet ja va ser teoritzat per Skovsmose (1990) on afirma: "el modelatge pot contribuir a desenvolupar la competència democràtica dels ciutadans..". Paulo Abrantes (1992) avala amb les seves experiències les paraules de Skovsmose. Personalment, comparteixo l'argument de Skovsmose, malgrat tot, els indicis observats en l'experiència estan molt limitats. Aquest fet m'agradaria que fos més visible en d'altres actuacions.
De l'actuació dels estudiants i com aplicació dels 13 instruments de recerca, deduïm que els lligams entre situacions extretes del món de la ciència i la tècnica, provoquen un grau més elevat d'integració del paper de les matemàtiques en la societat. Aquest aspecte ja es apuntat en les consideracions de Griffiths i Howson (1974) on "...en el modelatge es prepara als alumnes per una millor integració en la societat, ja que tots els ciutadans estant forçats -per la dinàmica de la vida quotidiana- a resoldre problemes, fer estimacions, prendre decisions...". En els casos mostrats podem concloure, a partir dels instruments de recerca, que els alumnes han adquirit una capacitat de reconèixer, comprendre, identificar, analitzar i avalar diversos estadis de l'ús de les matemàtiques, i contribuir a la resolució de problemes d'enunciat no matemàtic rellevants en d'altres àrees fora del context de la matemàtica teòrica.
En aquest aspecte coincidim amb en Niss i Blum (1989) quan parlen de la necessitat que "Cal que l'ensenyament de les matemàtiques proporcioni als alumnes la possibilitat de realitzar experiències d'aplicació i modelatge en situacions diverses, tals que la matemàtica en si els ofereixi les seves eines"
Aquest reconeixement i identificació d'estructures provoca insertar àrees de la matemàtica en altres camps de la ciència.
Ja hem comentat en d'altres seccions que la capacitat d'usar un concepte matemàtic envolta quelcom més que simples coneixements del concepte.
Dels comentaris fets pels estudiants i extrets del capítol anterior es desprèn que saber fer càlculs no és garantia que se sàpiga decidir en quines situacions és precís realitzar aquests càlculs i com s'ha d'usar un resultat un cop obtingut. Per poder interpretar els resultats d'uns càlculs, cal un reconeixement de l'estructura en què treballem i que hem modelat.
Amb el contingut exposat fins aquest punt considerem que cal realitzar un anàlisi i reflexions sobre la viabilitat del modelatge i el seu paper en l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques com a resultats de la investigació. Per això exposem un recull de conclusions sobre aquests aspectes en la següent secció.

4.3.2. Reflexions sobre el procés d'ensenyament/aprenentatge per modelització

Com a resultats de l'experimentació i aplicació dels tretze instruments de recerca, aportarem un seguit de reflexions i resultats focalitzats en els aspectes epistemològics i cognitius. Com a conseqüència natural de l'aplicació de les tècniques de modelatge a l'Eupvg i en funció de les gràfiques que sintetitzen el procés d'aprenentatge dels alumnes analitzats i el marc teòric exposat en el capítol 2, aportem a tall de conclusions les següents reflexions contrastades amb els arguments proporcionats pels autors mencionats en el marc teòric.
En la metodologia experimentada hem notat que una component que cal tenir en compte es la formació matemàtica i tècnica de l'estudiant abans d'ingressar a la universitat, les dificultats per a l'aprenentatge es deuen majoritàriament al fet de que els coneixements previs esperats no són prou consistents. Les mancances de conceptes d'altres àrees també hi són presents (lleis de Kirchoff i Hooke en són un exemple clar). En el cas de l'Eupvg la proposta aportada per solventar aquestes deficiències ha estat suggerir les activitats d'una manera dirigida per tal de tots els estudiants puguin assolir amb èxit els

objectius finals de les activitats. Amb aquest aspecte senyalem com a peça clau el paper del professor com orientador i presentar els projectes com una component dirigida de recerca. El fet de la formació prèvia de l'estudiant es un paràmetre que en Niss no contempla, la formació tècnica prèvia dels estudiants es deficient. Els alumnes no estan familiaritzats ni amb la terminologia ni amb les notacions usuals de l'especialitat. Per això en el modelatge existeix la voluntat d'integració i connexió entre diverses àrees de coneixements i hem presentat situacions reals que poden resoldre's matemàticament (matematització), seguint l'esquema d'abstracció i creació de models conceptuals mentals suggerit per De Lange (1987). Inicialment, i per tal d'encetar el procés de modelització, caldrà doncs establir indicacions per tal de dirigir més el procés de matematització. Recordem que hem anat modificant unitats didàctiques per tal de que els alumnes puguin identificar els esquemes, la terminologia i les notacions utilitzades.
El fet de la formació prèvia també es destacat per L.Leris (1993), Leris imparteix docència a l'Escola universitària d'enginyeria tècnica de la Universitat de Zaragoza i aquest aspecte podríem afirmar que es una realitat compartida.
També destaquem de l'anàlisi graficat, que l'estudiant aprèn d'una manera natural, dirigida i amena -aquest resultat, també es compartit per M. Niss (1992) i per P. Abrantes (1992)- . En l'aportació, l'estudiant veu la necessitat d'allò que s'els hi ensenya, doncs poden aplicar-les a d'altres assignatures més específiques del currículum, i per tant adquireix un elevat grau de motivació. En aquesta línia, estem d'acord amb Paulo Abrantes, Paulo Abrantes (1992) comenta: "...les matemàtiques s'aprenen amb més facilitat i motivació a través de de les tècniques de modelatge que mitjançant les classes teòriques...".
Aquesta afirmació d'en Paulo Abrantes es fruit de l'experimentació d'aquestes tècniques amb alumnes de 15 anys a dues escoles de Lisboa. Es destacable el fet de que malgrat la diferència generacional i geogràfica dels estudiants, les conclusions són coincidents, això avala el fet de que les tècniques del modelatge com a eina d'ensenyament no estan limitades a nivells molt concrets d'aprenentatge.
Aquest procés d'aprenentatge es fa mitjançant la unificació de tres elements:

1) El modelatge i les aplicacions
2) La resolució de problemes
3) La connexió amb altres assignatures

Es parteix d'un problema real que pertanyi a alguna assignatura que no sigui la de matemàtiques (per exemple mecànica, electrònica,...). L'estudiant s'enfronta així a una situació real que a primera vista no té res a veure amb les matemàtiques, neix la motivació. Per resoldre aquest problema (element 2) cal usar tècniques matemàtiques (element 3), i això es fa mitjançant uns models com poden ser les unitats didàctiques (element 1). Això és el que bàsicament s'ha fet a l'Eupvg.
En contrast amb els nostres resultats, en el primer punt mencionat, L.Leris (1992) va més enllà, creu que en la forma de presentar els problemes per modelar a les escoles tècniques cal fer una selecció extreta de la pròpia indústria, doncs és en la indústria on el futur enginyer -en el dia a dia- s'enfronta amb problemes veritablement reals.
En la contribució hem provat que el que té de bo aquest procés és que l'estudiant primer veu la necessitat d'usar tècniques matemàtiques per resoldre problemes no matemàtics, després dedueix ell mateix les eines matemàtiques necessàries, i finalment resol el problema. Així, l'estudiant aprèn matemàtiques d'una forma relaxada ja que treballa dins un context real i pràctic.
Aquests arguments mostren una visió utilitarista de l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques. Des de un punt de vista heurístic podem afirmar:

A partir de situacions usuals construeixen conceptes matemàtics nous i el seu significat, mostrant la utilitat dels conceptes matemàtics lligats al currículum d'un enginyer.
D'aquesta manera, en l'experiència efectuada a l'Eupvg, recuperem i provem la validesa les encertades reivindicacions ja enunciades als anys cinquanta per Puig Adam (1958) d'incloure situacions reals en els currículums de matemàtiques d'enginyeria. L'ensenyament tradicional de les matemàtiques, com hem apuntat anteriorment, no contempla aplicacions, trencant la connexió matemàtica-realitat. No només Puig Adam introdueix la visió utilitarista, aquest resultat també es avalat per G. Lusa, L. Leris, De Lange, M. Niss, P. Abrantes.
En les enquestes realitzades per G.Lusa (1985) a col·legits de professionals destaca com a conclusions: "...caldria menys formalismes i notacions no tant embolicades, doncs s'allunyen de la realitat del futur professional..." i més endavant destaca, coincidint amb Puig Adam (1958) "...cal relacionar les matemàtiques amb la tècnica...". En aquesta línia L. Leris (1993) destaca: "...Les matemàtiques s'han de coordinar amb d'altres àrees de coneixement, s'ha de tendir més a la integració de l'especialitat.Les matemàtiques han de servir com a eina útil per a les altres assignatures...".
Els resultats obtinguts són coherents, doncs, amb l'afirmació de M. Niss (1989) que diu que "...el modelatge es l'art d'aplicar les matemàtiques a una situació de la vida real...".
Per tant, podem afirmar que hi ha un ampli consens en evitar una presentació de la matèria massa formal, donar pas a la intuïció i deixar una mica de banda la rigurositat dels teoremes per tal de crear un espai utilitarista d'acord amb les necessitats curriculars i professionals dels nostres deixebles.
Aquest resultant aparentment recent, no es pas recent. Ja als anys vint en J. Rey Pastor (1921) en el pròleg del llibre "Curso de Cálculo Infinitesimal" fa un comentari en aquesta línia:
"les matemàtiques de l'enginyer han de diferir de les del matemàtic pur en la quantitat, en la qualitat, en l'orientació i en el mètode"
L'ensenyament de les matemàtiques s'ha d'enfocar, doncs, de cara a donar una bona formació bàsica que prepari l'alumne per poder continuar aprenent matemàtiques al llarg dels seus estudis i de la seva vida professional. Per això, cal insistir en els conceptes, i llur interpretació tècnica en lloc de carregar els programes de l'assignatura amb excessos de teories i tècniques.
D'aquesta manera podem establir una nova concepció de l'ensenyament de les matemàtiques:
El modelatge ajuda a aprendre i aplicar conceptes matemàtics d'una forma intuïtiva i la connexió amb situacions de la vida quotidiana.
En la tècnica de modelatge i aplicació, el professor és l'encarregat de crear els models didàctics necessaris per a l'ensenyament de les matemàtiques. Aquests models es poden dur a la pràctica de forma escrita (com per exemple les unitats didàctiques) o de forma oral (classes), o bé contemplant un treball en grup presentat de forma escrita i defensat oralment a classe. Cal destacar que la tercera manera mencionada de dur a la pràctica l'ensenyament de les matemàtiques ja va ser experimentada per P. Abrantes (1992) en el treball en projectes. Tant en un cas com en l'altre, hi ha quatre aspectes a tenir en compte que ja van ser apuntats per M. Niss (1992), i que compartim plenament, i que són verificats i implementats en l'aportació de l'Eupvg:

- El contingut
- L'extensió
- L'enfocament
- L'activitat de l'estudiant

El contingut: fa referència a la mena de situacions no matemàtiques que cal usar per portar a terme el modelatge i l'aplicació. D'aquestes situacions, n'hi ha de molts tipus. Podríem dir que s'estenen al llarg d'un espectre continu, en un extrem del qual trobem afers que, de fet, són purament matemàtics: equacions diferencials i càlcul matricial en són un exemple, però que estan disfressats amb un llenguatge no matemàtic, i en l'altre extrem hi ha situacions que pertanyen plenament a assignatures i contextos no matemàtics: l'estudi i anàlisi de com es reprodueixen un col·lectiu de conills, el moviment d'una colla de masses lligades amb ressorts, el llançament d'una nau espaial, en són un exemple.
L'extensió: fa referència a la quantitat de temps que caldria dedicar al modelatge i aplicació dins un curs normal de matemàtiques. S'hi poden dedicar des de poques sessions fins a parts substancial senceres de curs.
L'enfocament: fa referència a com s'haurien de tractar els aspectes no matemàtics dins el modelatge. Hi ha, bàsicament, dues maneres de fer-ho: exposant clarament els problemes no matemàtics a tractar -és a dir, donant un guió fet- o bé deixant que sigui l'estudiant mateix qui seleccioni i especifiqui els problemes que s'han d'abordar. En el cas de l'Eupvg, i en general de totes les escoles tècniques, hem comprovat que les mancances de coneixements previs de conceptes tècnics suggereixen donar un guió fet per tal de dirigir millor el procés d'aprenentatge. Si no donem un guió fet, l'ensenyament es menys eficient doncs els estudiants s'encallen en qüestions extramatemàtiques i no saben continuar i per tant queda avortat el procés d'aprenentatge.
L'activitat de l'estudiant: fa referència al tipus d'activitats que es podrien arribar a dissenyar. Així, tindrem des d'activitats passives, en les quals l'estudiant rep coneixements a través d'exposicions orals i escrites dirigides pel professor, fins a activitats actives, en les quals l'estudiant realitza -de vegades en grups- treball independent sobre material que ell mateix ha creat.
En l'experimentació trobem alguns aspectes negatius. Cal destacar que la primera unitat efectuada es considera llarga i els alumnes troben mancances en coneixements d'altres branques de les ciències. El comentari potser mes valuós és el que diu "com que tot està relacionat, si et perds al principi no pots continuar".
Una alternativa vàlida és combinar l'ensenyament tradicional amb pràctiques de modelatge. Això es pot justificar amb els següents punts:
1. La gran quantitat d'eines matemàtiques de què precisa un enginyer tècnic, degut a la complexitat dels problemes i la seva terminologia.
2. L'extensió dels temaris i el poc temps disponible.
Per justificar la utilitat d'un concepte, calen uns coneixements previs de matemàtiques.
Llavors seria oportú -en les unitats didàctiques- efectuar uns temes previs on s'establissin les hipòtesis necessàries i suficients per a un bon seguiment de les pràctiques, aquests temes els explicaria el professor a l'aula de manera que els estudiants adopten una actitud passiva. En el treball en projectes, però, el paper del professor seria d'orientador i director, en lloc d'explicar conceptes a la pissarra, lliuraria un guió als estudiants per tal de que ells fecin la recerca de la informació adient. D'aquesta manera s'economitza temps i podem modelar i tractar diverses situacions. Aquesta alternativa es en certa manera compartida per M. Niss (1989), Niss proposa compaginar d'una manera alternada el modelatge escrit i oral. Aquesta alternància la suggereix en Mogen Niss, distingint entre activitats passives -escoltar el professor a la pissarra- i activitats actives -els treballs fets pels propis estudiants-. Pel que fa a l'afirmació de que les unitats són llargues per experimentar-les en un curs normal també coincidim amb en Niss. El criteri proposat per tal d'evitar l'extensió -segons Niss- és donar un guió fet al començament de l'activitat on es destaquin a modus de resum teòric els conceptes i fórmules més habituals, en nivells educatius superiors es més adient -

degut a la complexitat dels problemes- facilitar la informació oralment a classe i deixar el guió pels treballs en grup -doncs la component de recerca es una de les característiques del treball en grup-. Considerem que això economitzaria temps. Per fixar idees, en el cas de les molles, ha fet falta donar directament la llei de Hooke i modelar tot seguit situacions amb diverses masses per tal de modelar els sistemes lineals. A continuació passar a l'estudi d'altres situacions reals que tinguin el mateix model matemàtic.
L.Leris (1993) també s'ha preguntat quina es la millor manera de solventar els límits temporals. Leris proposa proporcionar un bon llibre de text, com a substitut del professor, que contempli els conceptes més significatius que requereix l'estudiant per desenvolupar situacions properes a l'enginyeria i afirma:"...el llibre de text desenvolupa l'habilitat de l'estudiant per aprendre matemàtiques sense l'ajut del professor...". Malgrat que Leris imparteixi classes amb una escola tècnica, en aquest aspecte diferim, considerem que el paper del professor com a comunicador es fonamental per tal d'introduir els temes. Els llibres de text poden ser un complement vàlid, però no com a eina substitutoria del professor.
Com a cloenda, podem establir que coincidim amb els autors mencionats en aquesta secció en el fet de que el modelatge és una eina de servei a la societat.
1. Avui dia, hi ha la tendència general a acceptar que la tècnica de modelatge i aplicació de les matemàtiques té la capacitat de fer un servei a la societat. Aquest servei consisteix en el fet de demostrar, a través del modelatge de problemes tècnics, quina és la utilitat que tenen les matemàtiques dins la nostra societat.
2. Aquests darrers anys, s'ha produït un augment de la demanda de les matemàtiques per part de diferents àrees de l'activitat investigadora -tant en ciències naturals com socials- i hi ha hagut una expansió cap a diversos aspectes de la nostra vida quotidiana. Les reformes educatives dels darrers anys -principalment en educació secundària- i la introducció dels nous batxillerats ja contemplen aquests aspectes.
3. La presència de les matemàtiques no està limitada en els currículums tradicionals de les àrees anomenades de ciències. La seva influència s'extrapola en d'altres àrees de coneixement no considerats clàssicament de ciències. D'algunes ciències, com ara la física i la química, les matemàtiques n'han estat sempre una part inseparable. Però és en economia, sociologia, psicologia, urbanisme, lingüística, geografia, etc., on la necessitat de considerar científica la feina feta en aquests camps s'ha promogut un ús creixent de tècniques i mètodes matemàtics (estadística, optimització,...). A través d'aquestes ciències, les matemàtiques es van endinsant lentament en la societat, estenent-se des dels centres de planificació i direcció fins a arribar al ciutadà del carrer, que viu desbordat per nombres, des d'estimacions de percentatges de vot fins als interessos del seu compte corrent.
Potser, doncs, s'està fent realitat el somni de Descartes sobre la matematització del món:
"Les llargues cadenes de raons simples i fàcils, per mitjà de les quals els geòmetres aconsegueixen assolir normalment les demostracions més difícils, m'havien proporcionat l'ocasió d'imaginar que totes les coses que poden arribar a ser conegudes pels homes s'entrellacen de la mateixa forma." (Citat a Davis-Hersch, 1989).
En funció dels resultats obtinguts segons els mecanismes anteriors i el marc teòric es configura el capítol de conclusions.

4.3.3. Resum sobre dades i resultats de l'experiència

Abans de presentar les conclusions de la tesi, establim un breu resum sobre dades i resultats de l'experimentació que s'esdevé de l'estudi i seguiment del procés d'aprenentatge dels cinc alumnes analitzats:

i) Dades: L'experiència es localitza a l'EUPVG, durant els cursos d'àlgebra lineal (1994-95) i anàlisi matemàtic (1995-96) en els temes de càlcul matricial i equacions diferencials. L'investigació es centra en el seguiment del procés d'aprenentatge de cinc alumnes a partir del modelatge matemàtic com a eina d'ensenyament.
ii) Síntesi d'intencions inicials i objectius que han estat assolits en l'experimentació:
a) Aconseguir que els estudiants assumeixin una actitud creativa.
b) Desenvolupar la seva habilitat en les aplicacions de les matemàtiques i motivar-los per les seves finalitats acadèmiques i professionals.
c) Capacitar als estudiants en les tècniques de modelització.
d) Proporcionar una imatge de les matemàtiques i del seu ensenyament diferent al tradicional.
e) Ajudar a l'estudiant a adquirir i comprendre tècniques i conceptes matemàtics a partir de les seves aplicacions.
iii) A continuació, exposem arran de l'experiència, la necessitat d'un canvi en la metodologia de l'ensenyament de les matemàtiques per no matemàtics.
1. Aconseguim una millor connexió amb el món real. Històricament les matemàtiques han estat desvinculades de la realitat.
2. El modelatge és una eina d'aprenentatge eficient:
2.1. Els alumnes aprenen d'una manera espontània, dirigida i agradable.
2.2. Els estudiant veuen la utilitat del que aprenen.
2.3. Els estudiants veuen la necessitat de les matemàtiques per resoldre problemes i dedueixen ells mateixos les eines.
2.4. Hem observat una forta motivació pels temes tractats.
2.5. Desenvolupa l'habilitat en l'ús de les matemàtiques en situacions no matemàtiques.
3. L'ensenyament tradicional manté excessius formalismes que s'allunyen de la realitat del futur enginyer. En la modelització s'evita la càrrega de formalismes apostant per un aprenentatge més intuïtiu i proper als problemes de la tècnica.

Capítol 5

Conclusions de la tesi

5. CONCLUSIONS

“ Plantejar preguntes noves, possibilitats noves, veure els problemes des d’un angle nou, requereix imaginació creativa i és senyal d’un autèntic avenç...”

Albert Einsten i L. Infeld. L’evolució de la física, 1938.

Índex del capítol

En aquest capítol aportem un resum dels principals resultats manifestats a la memòria. Al final del capítol 4, hem exposat una breu síntesi del què hem aconseguit amb el modelatge arran de l'experiència desenvolupada a l'EUPVG. En el present capítol aportem les conclusions de la investigació materialitzades en tres nivells: Implicacions didàctiques de la metodologia, limitacions de la investigació i problemes oberts que s'esdevenen de la investigació i que proposem com noves línies de recerca.

5.1. IMPLICACIONS DIDÀCTIQUES

Dels comentaris recollits en el capítol anterior, i que no tornarem a reproduir en aquesta secció per no ser reiteratius, en podem establir resultats a tall de conclusions de la tesi: Què hem aconseguit en les diverses pràctiques realitzades? Quines orientacions docents podem aportar arran de l'experimentació?

Amb aquesta secció expliquem dos tipus d'implicacions:

a) Conclusions didàctiques que s'esdevenen de l'experimentació, es a dir, el que hem aconseguit arran de treballar amb el modelatge matemàtic com eina d'ensenyament/aprenentatge.

b) Recomanacions que s'esdevenen d'aplicar la metodologia d'investigació, que consisteixen en oferir orientacions docents (hipòtesi de treball, context, etc.), i que per tant caldria tenir en compte en futures investigacions.

a) Conclusions didàctiques que s'esdevenen de l'experimentació:

1. Al mateix temps que l'alumne/a aprèn conceptes matemàtics desconeguts per a ell fins ara: elements de càlcul matricial (operacions amb matrius, diagonalització), equacions diferencials (lineals, homogènies, de segon ordre a coeficients constants); veu la utilitat de les matemàtiques en qualsevol faceta del seu entorn curricular i de la vida quotidiana. Aquest es el cas dels sistemes de ressorts i models elèctrics modelitzats per sistemes d'equacions lineals i equacions diferencials.
2. Cal explicar conceptes nous per a l'alumne, no a través d'un ensenyament teòric, sinó fent servir problemes tècnics modelats de forma adient; per tal que aquests estudiants puguin comprovar la utilitat de les matemàtiques en la seva formació i alhora descobrir llur necessitat per resoldre problemes de l'entorn professional.
3. Amb aquesta metodologia hem aconseguit en les unitats didàctiques:

3.1. Que en un mínim de coneixements de secundaria i sense els formalismes propis de l'ensenyament tradicional, els estudiants, aconsegueixin construir el model matemàtic de la situació plantejada i aprenguin conceptes matemàtics que els siguin útils.

3.2. Que resolguin el problema en termes matemàtics i que tot seguit interpretin el/s resultat/s en termes tècnics. D'aquesta manera tanquem el cicle del procés de modelització proposat en la figura 1 del capítol 1.

3.3. Motivar a l'estudiant per l'aprenentatge de nous conceptes matemàtics que ell mateix anirà construint. Aprenentatge auto-dirigit. Aquest fet motivador s'esdevé com a conseqüència de presentar les matemàtiques relacionades amb d'altres àrees de la ciència, com una activitat cultural i social lligada als interessos curriculars de l'estudiant.

4. Amb aquesta metodologia hem aconseguit en els projectes:

4.1. Hi ha un component pedagògic diferent de l'anterior, un component de recerca: l'estudiant ha de recollir informació per tal de desenvolupar les activitats que li són proposades, d'aquesta manera es pretén que l'alumne prengui contacte amb el món extra acadèmic i s'espavili per recollir informació en el context real -fet habitual de tot professional que acaba l'enginyeria-. En tots els projectes suggerits, els estudiants tenien de cercar informació tant a l'interior com a l'exterior de l'entorn acadèmic, consultar referències bibliogràfiques i fins i tot realitzar entrevistes amb professionals d'àrees de coneixement no classificades en els currículums matemàtics.

4.2. Els objectius principals assolits de la realització d'un projecte els podem resumir en els següents punts:

a) Les matemàtiques com a eina. Els alumnes són capaços de relacionar els coneixements matemàtics i les habilitats adquirides amb les situacions presentades, i d'aquesta manera saben usar la matemàtica per a fins pràctics. Es a dir , han de ser capaços d'apreciar el paper de les matemàtiques en situacions complicades, com un mitjà per resoldre problemes que se li plantegen. Notar el paper de la matemàtica com un mitjà per resoldre els problemes que se li plantegen.

b) Adquisició de conceptes. En els projectes hi ha gran quantitat de conceptes matemàtics i extramatemàtics involucrats, amb aquesta metodologia es descobreixen per tant nous conceptes, no només de l'entorn purament matemàtic.

c) Els alumnes han adquirit un grau de coneixement que els permet utilitzar més endavant, en la vida diària, elements matemàtics com ara taules, manuals, gràfics, revistes tècniques, calculadores, etc. En aquest sentit, el treball en projectes hi juga un paper molt important. Es a dir, els alumnes han d'estar preparats per utilitzar com a eines temes i idees matemàtiques noves, en un sentit que l'escola no els va ensenyar de manera explícita i sistemàtica.

Entendrem per projecte, una activitat d'aprenentatge per la qual l'estudiant adquireix i aplica coneixements i habilitats per solucionar un problema autèntic o simulat que té relació amb el món quotidià.

Introduir mètodes d'aprenentatge basats en el treball en projectes no ha sigut una tasca senzilla. En especial, quan els alumnes estan acostumats a mètodes tradicionals centrats en el professor i orientats cap els continguts. La dificultat principal ha estat els criteris d'elecció dels problemes. Hi ha gran varietat de problemes, però en realitat, estan limitats ja que els estudiants no tenen prou coneixements tècnics per fer-los tots. Podríem concloure que els estudiants estan poc familiaritzats amb els aspectes extra-matemàtics.

5. Proporcionar un ensenyament més eficient:

Epistemològicament l'aprenentatge de les matemàtiques no es du a terme explorant les construccions matemàtiques en si mateixes, en les diferents formes en què han cristal·litzat al llarg dels segles, sinó en contacte continu amb les situacions del món real. Es tracta de donar un enfoc heurístic, d'afavorir la creativitat i motivar als estudiants a les necessitats reals dels continguts matemàtics. Per tant, cal posar a la disposició dels estudiants d'enginyeria un conjunt de recursos per tal de que entenguin més àmpliament l'aplicabilitat dels conceptes que els transmetem en la seva formació; en definitiva, com usar les tècniques apreses en un context real. Considerem doncs, que el treball en unitats didàctiques i els projectes són elements que cobreixen aquestes perspectives, i proporcionen per tant un ensenyament eficient.

6. L'ensenyament a través del modelatge proporciona:

6.1. Desenvolupar la capacitat de resoldre problemes i la creativitat.

6.2. Preparar els alumnes a usar les matemàtiques.

6.3. Desenvolupar la capacitat crítica de la matemàtica en la societat.

6.4. Donar una visió completa de les matemàtiques.

6.5. Ajudar en la comprensió dels conceptes i mètodes matemàtics

7. És evident la necessitat d'un canvi en la metodologia de l'ensenyament de les matemàtiques per a no matemàtics, doncs això implicaria:

7.1. Aconseguir una millor connexió amb el món real.

7.2. La introducció del modelatge com una eina d'aprenentatge eficient:

Els alumnes aprenen d'una manera espontània, dirigida i agradable, veuen la utilitat del que aprenen, els estudiants veuen la necessitat de les matemàtiques per resoldre problemes i dedueixen ells mateixos les eines tot adquirint una actitud creativa, desenvolupen l'habilitat en l'ús de les matemàtiques en situacions no matemàtiques.

8. L'ensenyament tradicional manté excessius formalismes que s'allunyen de la realitat del futur enginyer. En la modelització s'evita la càrrega de formalismes apostant per un aprenentatge més intuïtiu i proper als problemes de la tècnica.

b) Recomanacions que s'esdevenen d'aplicar els instruments de recerca:
D'entre els aspectes fonamentals, triats i sorgits de l'autoavaluació suggerida per la taula 1 del capítol 3, en la metodologia de investigació, i el paper del professor /investigador en el cas de l'eupvg, podem enumerar a tall de recomanacions i per futures investigacions els següents punts:

1. Establir un estadi inicial i final de treball. Aquest espai ens proporciona el domini de les hipòtesis: definir el context, clarificar i seleccionar els problemes de manera que siguin adients per modelar.
2. Cal tenir cura en l'elecció dels problemes. Això es fonamental en la metodologia d'investigació. Un problema complex es difícil de desenvolupar doncs manquen coneixements d'altres àrees de coneixement.
3. L'investigador/professor ha de tenir una predisposició al diàleg amb d'altres professors d'àrees més aplicades. Això ens proporciona situacions usuals del currículum d'enginyeria susceptibles de matematitzar, per tant caldrà fer una selecció coherent de problemes que siguin adequats a cada nivell.
4. En les classes es combinen les exposicions teòriques clàssiques, referenciades a problemes i situacions que apareixent en els estudis tècnics, amb el desenvolupament de les unitats didàctiques. Cal puntualitzar que l'explicació d'un tema o concepte només es realitza a posteriori de que els estudiants hagin descobert la necessitat del seu ús, el concepte ha estat introduït, construït i descobert al sí de la unitat didàctica. Aquest element proporciona als alumnes un paràmetre motivador i integrador en les aules.
5. En el desenvolupament de les classes el professor interpel·la als estudiants per fomentar el debat, amb aquesta actuació s'aconsegueix enriquir els coneixements doncs els alumnes comenten entre ells aspectes referents a les activitats.
6. Al finalitzar la classe, el professor proposa exercicis per casa. En el cas de l'experiència de l'eupvg, dos d'ells de caire tradicional (d'enunciat matemàtic) i dos relacionats amb els conceptes que han treballat a les unitats.
7. Per tal de dur a terme una bona recerca i extreure'n resultats fiables, cal considerar que el treball independent dels alumnes constitueix quelcom necessari en les activitats.
8. Cal atribuir un paper important i especial atenció a les activitats de modelatge.
9. Considerar el treball del professor fonamentalment com orientador de les activitats i discussió de les qüestions més rellevants, i no com element de simple orador i qualificador.
10. Si els estudiants van a fer ús de les oportunitats d'aprenentatge, els professors no només han d'assegurar que tenen un alt percentatge de disponibilitat, sinó que també tenen que relacionar-se amb els estudiants d'una forma coherent amb la pràctica de les habilitats dels estudiants.
11. El paper del professor ha de contribuir a facilitar recursos. Això vol resistir a les temptacions de l'ensenyament tradicional, rebutjant jugar el paper d'expert i utilitzar tècniques que permetin als estudiants descobrir les respostes i solucionar els problemes per ells mateixos.
12. En la investigació, el professor/investigador cal que des dels inicis seleccioni els comentaris que tenen a veure amb la metodologia que volem validar. Això està justificat per tal de no perdre informació pel pas del temps.

13. En la confecció de les unitats didàctiques, cal que per desenvolupar una bona investigació i establir la validesa de la unitat, s'experimentin versions prèvies en estudiants que voluntàriament es prestin a desenvolupar-les. Llavors cal anotar les suggerències i intentar millorar les errades.
14. En la metodologia de treball es oportú que el professor mantingui reunions amb d'altres professors d'altres àrees de coneixement. Això es recomanable, doncs permet esbrinar la tipologia de situacions necessàries pel futur enginyer i tanmateix establir situacions properes a la realitat professional. També ens proporciona la terminologia i notació empleada a la tècnica.

5.2. LIMITACIONS OBJECTIVES DE LA TESI

En aquesta secció volem esmentar un conjunt de fets que han actuat com obstacles pel desenvolupament del treball:
1. Insuficiència de la formació tècnica prèvia de l'estudiant.
2. Visió departamental de la docència i l'ensenyament.
3. Temporalització de les pràctiques.
4. Insuficiència de mitjans tècnics.

1. Insuficiència de la formació tècnica prèvia de l'estudiant.
Els estudiants que han experimentat la metodologia ja tenien uns coneixements matemàtics força sòlids. Contràriament, no podem afirmar el mateix dels coneixements tècnics tractats. Aquest fet acota les situacions susceptibles de ser matematitzades. És, per tant, oportú que cal seleccionar problemes adients de manera que no siguin "mediocres" ni massa complexos. Si els estudiants gaudissin de prou coneixements tecnològics i físics, el procés de modelització hagués estat més fluït. Aquest fet ha limitat bastant el treball. Per tal de resoldre aquestes qüestions, i tal com hem vist en les unitats, ha fet falta proporcionar als estudiants indicacions de lleis físiques per familiaritzar-se en les situacions reals.
2. Visió departamental de la docència.
La manca de coordinació entre els departaments ha estat una limitació per la investigació. El grau de compromís i de integració de les diverses àrees de coneixement no ha sigut massa lluïda: la manca de informació i la manca d'integració entre les matèries que s'estudien a l'escola ha estat un fet que ha limitat bastant l'experimentació. Per posteriors edicions seria un paràmetre a considerar. La metodologia pot ser més eficient si existeix una una bona dinàmica de lligams amb d'altres col·legues i departaments.
3. Temporalització de les activitats.
Sovint existeixen limitacions temporals, que per imperatiu de la programació i l'extensió dels continguts dels temaris establerts tradicionals, fan difícil la tasca de desenvolupar en un cert interval de temps un conjunt d'activitats de modelatge.
Això ha dificultat aprofundir més en les pràctiques de modelització. Aquest fet també ha impedit estudiar en profunditat el fet d'integrar l'epistemologia de les matemàtiques en els currículums, i alhora mostrar la influència de les mateixes en el desenvolupament social i de competència democràtica com element integrador del modelatge.
4. Insuficiència de mitjans tècnics.
El fet de tractar en situacions reals, contempla el tractament de dades i càlculs que analíticament no són fàcilment tractables. Aquest fet comporta el perill d'efectuar simplificacions de les situacions, de manera que els resultats obtinguts que

s'esdevinguin difereixin notablement del problema inicial. Les noves tecnologies i l'ús dels ordinadors permeten treballar amb dades reals. Aquesta eina no l'hem utilitzada en la investigació. Els recursos del centre i el fet de ser el primer cop que es desenvolupen pràctiques d'aquesta tipologia no han permès la utilització de les noves tecnologies. Malgrat tot es recomanable el seu ús en properes edicions, doncs a mesura que s'avança en l'experimentació es fa necessari.

5.3. PROBLEMES OBERTS

De l'experiència efectuada s'esdevenen línies de recerca i actuació per tal d'aportar una continuïtat i millores complementaries al present treball. Alguns dels temes que ens ofereix aquest estudi i que poden ser tractats en futures recerques, els detallem i proposem a continuació.

1. Extensió/generalització de l'experiència a d'altres escoles universitàries/superiors.
2. Impacte de les noves tecnologies.
3. Recopilació de situacions útils per implementar la metodologia.
4. Influència de la metodologia en l'eficàcia de l'aprenentatge d'altres assignatures tècniques.
5. Generalització de l'estudi a altres parcel·les de les matemàtiques.
6. Nous enfocs: simbolització i modelització

1. Extensió/generalització de l'experiència a d'altres escoles universitàries/superiors.

Localment hem provat que el modelatge com a eina d'ensenyament, malgrat les limitacions, es una metodologia viable. La projecció exterior a d'altres escoles i l'estudi de com responen col·lectius de diferents nivells educatius i titulacions, és un repte que caldria aprofundir. Això pot proporcionar l'obtenció de respostes a tot un seguit de qüestions:

i) La resposta del procés d'aprenentatge es equivalent en alumnes d'altres escoles universitàries?

ii) Com responen alumnes d'escoles superiors?

Aquest treball serviria per contrastar els resultats obtinguts amb d'altres indrets i a partir d'aquí establir la viabilitat de l'ensenyament a partir del modelatge a nivell més ampli. S'obtindrien respostes per caracteritzar el modelatge com una metodologia solida i consolidada en qualsevol nivell educatiu i situació geogràfica.

2. Impacte de les noves tecnologies.

Com pot influir en el procés d'aprenentatge i en tractament de problemes reals l'ús de noves tecnologies? . Un possible treball a realitzar en aquest context, seria la construcció de recursos adients per l'aula -per exemple presentar les unitats didàctiques en suport informàtic-, una mena de taller/laboratori amb software interactiu de matemàtiques on siguin simulades situacions reals. De fet el treball proposat es assajar la metodologia amb la incorporació de les noves tecnologies i tot seguit analitzar l'evolució del procés d'aprenentatge.

3. Recopilació de situacions útils per implementar la metodologia.

Un dels problemes que s'esdevenen del present estudi, es realitzar un inventari i establir una relació d'equivalència entre les diverses tipologies de situacions que poden ser tractades matemàticament. Aportar propostes i criteris de simplificació, selecció i classificació de problemes adients d'enginyeria de manera que siguin vàlids per l'aprenentatge i matemàticament susceptibles de ser modelitzats d'acord amb cada nivell educatiu. Aportar propostes i criteris de simplificació de situacions complexes d'enginyeria i la selecció de problemes adients pot contribuir a un ensenyament més eficient. Amb aquest estudi hi ha la complicitat de la matematització a nivell mental: analitzar el primer pas d'abstracció del procés de modelització per tal d'evitar situacions on el model mental no estigui d'acord amb la situació, i heurísticament les habilitats de càlcul siguin correctes i epistemològicament també. Establir i acotar el domini de situacions i formular criteris de selecció i simplificació de les situacions com paràmetres de treball per consolidar el procés d'aprenentatge a través del modelatge.

4. Influència de la metodologia en l'eficàcia de l'aprenentatge d'altres assignatures tècniques.

La proposta consisteix en fer un estudi i seguiment del rendiment i habilitats amb les assignatures pròpies de l'especialitat que no són de l'àrea de matemàtiques de dos grups d'alumnes - denotem-los G1 i G2-, de manera que G1 a fet pràctiques de modelatge i G2 ha rebut un ensenyament tradicional. L'objectiu seria analitzar i extreure'n resultats de l'estat final cognoscitiu al finalitzar els estudis d'enginyeria. Per tal de desenvolupar aquesta recerca, cal que l'investigador imparteixi docència en ambdós grups, d'aquesta manera obtindria una informació més fiable i indicadors que li permetrien obtenir elements comparatius. El ressò que es pot esdevenir d'aquest estudi consisteix en ratificar la modelització com una bona "carta de presentació" com a metodologia eficient, innovadora i totalment vàlida per l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques; ja que d'aquesta manera podríem contrastar el nivell de coneixement obtingut i la seva influència curricular a partir de l'aplicació d'ambdues metodologies.

5. Generalització de l'estudi a altres parcel·les de les matemàtiques.

El treball ha desenvolupar consistiria en realitzar el mateix estudi presentat en la tesi, però amb d'altres temes crucials de matemàtiques dels continguts plasmats en els currículums de les escoles tècniques. Per exemple: situacions que condueixen a models de sèries de Fourier (electrònics, telecomunicacions, elèctrics). Seguidament avaluar si les conclusions d'aplicar el procés de modelització són anàlogues.

6. Nous enfocs: simbolització i modelització.

En la secció 2.4.3. hem apuntat noves tendències en l'ensenyament/aprenentatge de les matemàtiques a partir del concepte de cultura virtual i les formes de representació simbòlica, com elements que poden influir en el procés d'ensenyament/aprenentatge. La proposta consistiria en estudiar la dinàmica d'evolució i la seva viabilitat en l'ensenyament. Les formes d'implementar en els currículums aquesta nova via, i les implicacions socials de la cultura virtual per l'aprenentatge i la cognició de les matemàtiques.

Capítol 6

Bibliografia

6. BIBLIOGRAFIA

1. Abrantes, Paulo(1993). "Project work in school mathematics: an experience in Portugal". University of Lisboa.
2. Abrantes, Paulo. (1989). "Matemática, realidade e trabalho de projecto na escola secundária". Lisboa.Educaçao e Matemática 12.
3. Abrantes, Paulo.(1994). "O Trabalho de Projecto e a Relaçao dos Alunos com a Matemática". Tesi doctoral. Lisboa.
4. Ahlfors, L.V. (1962). "On the mathematics curriculum of the High School". Maathematical Teacher nº 55 vol 3 (1962), American Mathematical Monthly, nº 3 (1962).
5. Alsina, Claudi. (1995) "Una matemàtica feliz". Ed. Red Olimpica. Buenos Aires.
6. Alsina, Claudi. (1997). "La tecnologia educativa és la resposta,la formació universitària és la qüestió". Jornades sobre la reforma acadèmica. 23 d'octubre de 1997. UPC. Barcelona.
7. Alsina, Claudi. Miguel de Guzmán. (1996) "Los matemáticos no son gente seria". Barcelona. Ed. Rubes.
8. Alsina, Claudi.(1996)."Apología de la utilidad y el realismo".Matemáticas en Escuelas técnicas.S. Romero i d'altres. Serie Collectanea nº 4. 1996. Huelva Publicacions de la Universitat de Huelva.
9. Aris, R. (1978). "Mathematical Modelling Techniques". London. Ed.Pitman.
10. Artigue, M. (1994) "Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products" in R. Biehler et altri (ed) Didactics of mathematics as a scientific discipline.Kluwer.Dordrech.
11. Artigue,Michéle.(1995) "Ingeniería didàctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas". México.Grupo Editorial Iberoamérica.
12. Azcárate, C. (1990). "La velocidad: Introducción al concepto de derivada". Tesi doctoral. UAB.Barcelona.
13. Bishop, A. I Goffree, F. (1986). "Perspectives on Mathematics Education". Dordrecht, Holanda: D.Reidel.
14. Blum W, Berry JS, Biehler R, Huntley ID, Kaiser-Messmer G and Profke L, (1989), "Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics", Ellis Horwood, Chichester.
15. Blum, W. & Niss, M. (1991)."Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects-state, trends and issues in mathematics instruction" Educational Studes in Mathematics, vol 22, nº 1, pàg 37-68.
16. Blum, W. Houston, S.K.(1997) "Mathematical Modelling". Albion Mathematics&applications Series.
17. Blum,W. (1994) "Teaching of mathematical modelling and applications".Ed. E. Horwood.
18. Bolt, Brian. (1992) "Matemáquinas: La matemática que hay en la tecnología". Editorial Labor.Barcelona.
19. Borrell, J. (1992) "La república de Taxonia".Ed. Pirámide.Madrid
20. Carbonell, Jordi. (1986). "Integrar es un art".Barcelona. Edit. Claret.

21. Carvalho, Marcelo.(1995). “A Pesquisa em educaçao Matemática”. Catálogo de resumos de dissertaçoes do programa de pós-graduaçao em educaáo matemática da unesp-rio claro 1987-1994.UNESP. Rio Claro -SP-Brasil .
22. Castillo, Enrique. (1993) “Ecuaciones funcionales y modelización en ciencia, ingeniería y economía”. Editorial Reverté.
23. Chaston, I. (1971) “Mathematics for ecologists”. London Butterworths.
24. Cockcroft, W. (1982). "Mathematics counts". Londres: Her Majesty Stationery Office.
25. Corbalán, Fernando.(1995) “La matemática aplicada a la vida cotidiana”.Biblioteca Aula. Edicions Graó.Barcelona.
26. Costa, Sueli.(1995) “La enseñanza del cálculo: una cuestión de involucramento”. Educación Matemática. Vol. 7. Abril 1995. pp.100-107.
27. D.Edwars i M. Hamson (1990).”Guide to Mathematical Modelling”.London. Macmillan Education
28. Davinson, N. (1990). The small-group discovery method in secondary and college level mathematics. Editor N. Davinson.Cooperative learning in mathematics. Addison-Wesley.
29. Davis, Philip (1989) “Experiencia matemática”.Barcelona. Ed. Labor.
30. De Lange J, Keitel C, Huntley ID and Niss M, (1993), “Innovation in Maths Education by Modelling and Applications”, Ellis Horwood, Chichester.
31. De Lange, Jan.(1987). “Mathematics, Insight and meaning”.Teching.Learning and Testing of Mathematics for the Life and Social Sciences. Utrecht.
32. De Lange,J. (1993). “Assesment in Problem-oriented Curricula”. In Weeb, N.L. and Coxford (Ed) Assesment in the Mathematics classroom.NCTM,Reston, pp 197-208
33. Dekker, R. (1987). "Roos and José, two children in a mixed ability group". Educational Studies in Mathematics 18, pàg. 317-324.
34. Del Rio Sànchez, José. (1991). "Aprendizaje de las matemáticas por descubrimiento".MEC. Madrid.
35. Dewey,John. (1938). “Experience and education”. New York:collier books, Macmillan Publishing Company.
36. EUPVG.Guía docent (1992-93-94-95-96-97).
37. Fernandes, D. i d'altres.(1994). “ Resoluçao de problemas:Processos cognigtivos concepçoes de professores e desenvolvimiento curricular”. Instituto de inovaçao educacional. Lisboa.
38. Fischbein, E. (1987) "Intuition in Science and mathematics: An Educational Approach ",-Reidel, Dordrecht, pp.121-75.
39. Fortuny, J.Mª. Alsina, Claudi.(1992) “La matemàtica del consumidor”. Institut català del consum. Generalitat de Catalunya.
40. Fortuny, J.Mª.(1994). “Información y control en educación matemática”.MEC.
41. Freudenthal, H. (1973). "Mathematics as an Educational Task". Reidel. Dordrecht.
42. Freudenthal, H. (1978). "Weeding and sowing:preface to a science of mathematical education". Dordrecht, Holanda: D. Reidel.
43. Freudenthal, H. (1983). "Didactical phenomenology of mathematical structures". Reidel, Dordrecht.
44. Freudenthal, H.(1967). “Las matemáticas en la vida cotidiana”.Madrid. Ediciones Guadarrama.

45. Gibbs, Graham. “Aprenentatge independent i realització de projectes”. ICE de la UPC. 1995.
46. Gómez, Joan.(1992). “Història de l'eupvg”. Institut d'estudis penedesencs.
47. Gómez, Joan.(1997). "La modelització com a eina didàctica per a l'ensenyament de les matemàtiques". Experiències de millora de la qualitat docent a la UPC. Publicacions UPC. Barcelona.
48. Griffiths,H. Howson, G. (1973). “Mathematics: society and curricula”. Cambridge University. London.
49. Guzmán, Miguel.(1996) “El rincón de la pizarra”.Ed. Pirámide.
50. Guzmán,M.(1993) “Tendencias innovadoras en educación matemática”. http:// www.oei.es/edumat.htm.
51. Hernández, Amparo.(1994). “Breve historia de la educación matemática en España”. SMPM. S.M. Ediciones.
52. Hilton, P.(1976). "Education in Mathematics and Science Today:The Spread of False Dichotomies". Proceedings ICME3. Karlsruhe.
53. Houston, Ken(1996). Mathskills Newsletter nº 6. Ulster
54. Internet (1997) http://www.pie.es
55. Internet (1998). http://ued.uniandes.edu.co/servidor/ued/boletinema/boletin6.html#50
56. Internet (1998). http://www.fi.ruu.nl/en/icsmmeCongress/beschrijving.html.
57. Internet(1998). http://www.hull.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/guest.htm
58. Internet.(1997) http://www.hll.ac.uk/mathskills/newsletters/issue2/no2.htm#updates
59. Internet.(1997). http://www.fi.ruu.nl. Pàgina de l'Institut Freudenthal.1996.
60. Internet.(1998).http://www.fc.ul.pt/departs/educacao/ictma9/
61. Jones, Sonia. Tanner, Howard.(1994) “Using peer and self-assessment to develop modelling”.Educational Studies in mathematics. Joseph Fourier. Grenoble.France.
62. Karman, T. (1945). “Métodos de análisis matemático en ingeniería”. Ministerio del aire. Madrid.
63. Keitel, C.Ruthven, K. (1993). "Beyond the Tunnel Vision:Analysing the Relationship Between Mathematics, Society and Technology". Learning from computers: Mathematics Education and Technology.Springer-Verlang.
64. KilpatricK, J. Gómez, P. Rico, L.(1994) “Educación matemática: Errores y dificultades de los estudiantes”.México. Grupo editorial iberoamérica.
65. Kilpratick,W.H. (1918). “The project method”.Teachers college record.Vol XIX, nº 4.
66. Klaoudatos, N. Papastavridis, S.G. (1995). “Assessing the effectiveness of teaching applications of mathematics, in the greek high schools”. Research Fellow. Mathematics Department. University of Athens, Greece.
67. Kline, M. (1986). “El fracaso de la matemática moderna”. Madrid. Siglo veintiuno editores.
68. Kolb, D.A. (1984). "Experiental Learning". Prentice Hall.
69. Laborde, Colette.(1992). “Enseigner la géométrie:permanences et révolutions”. Conférence plénière. Université Joseph fourier, Grenoble. Proceedings/Actes ICME-7.
70. Lakatos, I. (1967). "A Renaissance of Empiricism in the Recent Philosophy of Mathematics?". North Holland. Amsterdam

71. Leris, Lola.(1992). "¿Qué matemáticas debe conocer un ingeniero técnico?: Una prospección sobre el tema". ICE. Universidad de Zaragoza.
72. Leris, Lola.(1993). "¿Qué matemáticas debe conocer un ingeniero técnico?: Unas propuestas didácticas". ICE.Universidad de Zaragoza.
73. Lesh, R. (1981). "Applied Mathematical Problem Solving". Educational Studies in Mathematics,nº 12,vol. 2, 235-264.
74. Lusa, G.(1982). "Evolución hitórica de la enseñanza de las matemáticas en las escuelas técnicas superiores de ingenieros industriales". Conferéncia pronunciada a Vigo el 13 de setembre de 1982. Dptm. Matemátiques de l'ETSIIB. UPC.
75. Lusa, Guillermo (1975). "Las matemáticas en la ingeniería". ICE. UPC.
76. Mason,J. Davis,J. (1991). "Modelling with Mathematics in Primary and Secondary Schools". Victoria: Deakin University Press.
77. Matos, J. Paula, S. (1994). "Projecto Modelaçao no ensino da matemática". Facultade de Ciencias.Dptm. Educaçao. Universidad de Lisboa.
78. Matos, J.F. (1995). "Modelaçao Matemática". Universidade Aberta. Lisboa.
79. Minsky,M.(1985)."The Society of Mind".New York:simon and Schuster.
80. Niss, M.(1993) "O papel das aplicaçoes e da modelaçao na Matemática escolar". Educaçao e matemática. nº 23.
81. Niss, M.(1996). "¿Por qué enseñamos matemáticas en las escuelas?". Dinamarca. Revista Investigación y didáctica de las matemáticas.MEC. pàgines 19-30.
82. Niss, Mogen.(1992) "Applications and Modeling in school Mathematics-directions for Future Development", in I. Wrszup i Steint (ed) Developement in school mathematics around the world V. 3 NCTM. Reston.
83. Niss,M. Blum,W.(1989)."Applications and modelling in learning and teaching mathematics". Chichester:Ellis Horwood.
84. Ormell,Christopher (1991). "How ordinary meaning underpins the meaning of mathematics". For the Learning of Mathematics,11,3,25-30.
85. Ortega i Gasset, J. (1930) "Missió de la Universitat". Obras completas.Vol.4.Alianza Editorial-Revista Occidente.Madrid.
86. Pollak, H.O. (1976). "The Interaction between Mathematics and Other School Subjects". New Trends in Mathematics Teaching Vol IV.
87. Polya, G. (1966). "Matemáticas y razonamiento plausible".Tecnos. Madrid.
88. Pólya, G. (1994). "Métodos matemáticos de la ciencia". Madrid.Euler Editorial.
89. Ponte,J. (1992). "Problemas de Matemática e Situaçoes da Vida Real". Lisboa.Revista de Educaçao, II (2).
90. Puig Adam, P. (1958)."Ecuaciones diferenciales". Nuevas gráficas S.A.
91. Puig Adam, P.(1979). "Cálculo integral". 17ª edició. Gráficas Lormo. Madrid
92. Puig, Luis.(1996). "Investigación y didáctica de las matemáticas". Ministerio de Educación y ciencia.
93. Quinet, J.(1983). "Curso de matemáticas superiores: Ecuaciones diferenciales". Madrid. Paraninfo.
94. Renuka Vithal,Iben Christiansen, Ole Skovsmose .(1995). "Project work in university mathematics education". Alborg University. Denmark.
95. Resnick,L.(1987). "Education and learning to think".Washinton,D.C:National Academy Press.
96. Ríos, Sixto.(1995). "Modelización". Alianza Editorial.

97. Robertson, L. (1990). "Implementing group work:issues for teachers and administrators". Cooperative learning in mathematics. Addison-Wesley.
98. Rosenberg, D.(1989) “Matrices”. Biblioteca ciencies educació.UAB. Bellaterra.
99. Santaló.(1985). “Educació matemàtica, avui”.Barcelona.Editorial Teide.
100. Scales, Penny.(1973). “Vectores y matrices”. Ediciones del castillo.
101. Schoenfeld, Alan H.(1992). “What's in a model?;issues in the use of simulation models to analyze student understanding: a reaction to ohlsson,ernst,and rees”. University of California-Berkeley. Journal for research in mathematics education. vol 23, nº 5, 468-473.
102. Skovsmose, O. (1990). "Mathematical education and democracy". Educational studes in mathematics ,vol. 21, pàg. 109-128
103. Skovsmose, Ole. (1997). "Competencia democrática y conocimiento reflexivo en matemáticas". Revista EMA. Vol2, nº 3, 191-216.
104. Skovsmose,O.W. Blum, J.S. Berry, R. Biehler (1989)."Towards a Philosophy of an Oriented Mathematical Education".Applications and Modelling in Learning and Teaching Mathematics. Chichester: Ellis Horwood.
105. Taniguchi, Pablo.(1986). “Como superar las matemáticas de Cou”. Edunsa.
106. Tanner, Howard and Sonia Jones.(1994). “Using peer and self-assessment to develop modelling skills with students aged 11 to 16: A socio-constructive view”. Educational Studies in Mathematics 27: 413-431.
107. Treefers, A. (1986). "Three Dimensions". Reidel. Dordrecht.
108. Udina, F. (1991-92). “Matemàtiques I: Apunts primer d'económiques curs 1991-92”. Univ. Pompeu Fabra.Barcelona.
109. Valderrama, Mariano.(1995). “Modelos matemáticos en las ciencias experimentales”. Ediciones Pirámide.
110. Valero, P. (1994). "La educación matemàtica y la construcción de la democrácia". Una empresa deocente. Butlletí Club EMA. nº 6, agost de 1994.
111. Varis (1995) “Enciclopedia de las matemáticas”. Edit. Rubiños
112. Varis (1995) “Gran Enciclopédia Catalana” Edicions DIGEC.
113. Varis (1997). "Sinera en disc". Cdrom. PIE. Dptm. Ensenyament. Generalitat de Catalunya.
114. Varis. (1997). Actas 8ªJAEM.Sociedad castellano-leonesa de profesorado de matemáticas.Salamanca.
115. Varis. (1998). "Educación matemática e Internet". Revista UNO.Revista de didáctica de las matemáticas,nº 15.Edit.Graó.
116. Varis.(1991). “Breve historia de la educación matemática en España”. Ed.Emma Castelnuovo.
117. Vithal, Renuka.(1995). “Project work in university mathematics education. A danis experience: aalborg University. departament of applied curriculum studies”. University of Durban-Westville. South Africa.
118. Wenzelburger, Elfriede.(1993). “Didàctica del càlculo diferencial”. Grupo editorial iberoamérica.
119. Wheeler,D. (1982). “Mathematitzation matters”.Learning of Mathematics vol 3. nº1, pp. 45-47.