LISTADO DE ANEXOS

ANEXO 1. Protocolo de las entrevistas

ANEXO 2. Trascripción de la entrevista 1: Enseñanza del concepto de derivada (Fases de introducción e institucionalización del concepto)

ANEXO 3. Trascripción de la entrevista 2: Evaluación del concepto de derivada (elementos sobre la evaluación que diseñan y realizan los profesores del concepto de derivada)

ANEXO 4. Trascripción de la entrevista 3: Sobre el proceso de resolución del cuestionario indirecto

ANEXO 5. Trascripción de la entrevista 4: Entrevista con viñetas sobre el concepto de derivada

ANEXO 6. Trascripción de la entrevista 5: Documentos elaborados por el profesor (programación y unidad didáctica)

ANEXO 7. Análisis de la paradoja de Zenón de *Aquiles y la tortuga* en la descripción de la comprensión de los conceptos estructurantes del cálculo infinitesimal que tienen profesores de matemática en ejercicio

ANEXO 8. Tablas resumen de las respuestas de los profesores a las preguntas del cuestionario indirecto y de las viñetas para la construcción de las redes sistémicas

ANEXO 9. Evaluaciones elaboradas por los profesores (trascripción)

ANEXO 10. Unidad didáctica del concepto de derivada elaboradas por los profesores (trascripción)

ANEXO 11. Caso del profesor A

ANEXO 12. Caso del profesor C

ANEXO 13. Caso del profesor D

ANEXO 10

UNIDAD DIDÁCTICA DEL CONCEPTO DE DERIVADA ELABORADAS POR LOS PROFESORES (TRASCRIPCIÓN)

1. UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR A

2. UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR B

3. UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR C

4. UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR D

5. UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR E

ANEXO 1. PROTOCOLO DE LAS ENTREVISTAS

ENTREVISTA 1.

ENTREVISTA SEMIESTRUCTURADA PARA INDAGAR LAS ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA UTILIZADAS POR EL PROFESORADO DE MATEMÁTICA EN COLOMBIA

¿CÓMO ENSEÑAR EL CONCEPTO DE *DERIVADA*?

Objetivo: profundizar en algunos aspectos relacionados con la enseñanza del concepto de *derivada* en bachillerato.

Partiremos del supuesto de que se desea enseñar el concepto de *derivada* a alumnos del grado 11 en Colombia y que, para ello, se ha dividido esta enseñanza en tres fases: una de iniciación del concepto, una de institucionalización (introducción) del concepto y otra de aplicación del concepto. Se planteará entonces las siguientes situaciones para cada una de las fases, y se realizarán dos entrevistas como estrategia para facilitar la dinámica de las secciones de trabajo con los profesores.

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. ¿Qué finalidades consideras que se persiguen con la enseñanza de las Matemáticas en la Educación secundaria? ¿Consideras que es importante la Matemática en el currículo de la Secundaria?

2. ¿En qué contexto educativo sería mejor introducir el concepto de *derivada?* ¿Desde qué disciplina (asignatura) consideras que sería mejor introducirlo?

3. ¿Qué aspectos consideras que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?

4. ¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?

5. ¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de *derivada*? ¿Para qué sirve este concepto? ¿y a tus estudiantes?

6. ¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de *derivada*? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto de derivada?

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

7. A continuación te presentamos dos definiciones del concepto *derivada*, extraídas de los libros de texto más utilizados del grado 11 en Barranquilla, para que las valores y comentes si las consideras adecuadas para enseñar a los estudiantes de este nivel:

LIBRO 1: *"Definición de Derivada"*

"Sea f una función real. La DERIVADA de f es otra función que simbolizaremos por f ' y tal que su valor en cualquier punto x = x de su dominio está dado por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, Siempre que el límite exista".

LIBRO 2: *"Definición de la Derivada de una función"*

"La derivada de f en x viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Supuesto que exista tal límite."

LIBRO 3: *"Definición: Derivada de una función"*

Sea x un número del dominio de una función f, determinada por la ecuación y = f (x). La derivada de y respecto a x, representada por dy / dx se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Si el límite existe.”

8. ¿Cuál piensas que es el significado del concepto *derivada*?

9. ¿Cómo introduces en clase el concepto de *derivada*?

10. ¿Qué opinas del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de *derivada* que puedes comentarnos, ¿lo utilizas?

11. ¿Qué opinión tienes acerca de la aparición o no-aparición de este concepto en los textos de matemática de cualquier nivel educativo? ¿Crees necesaria su enseñanza en el bachillerato? ¿Por qué?

12. ¿Qué ejemplos utilizas en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto *derivada*? ¿Por qué?

EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA

FASE DE APLICACIÓN DEL CONCEPTO:

Se tomarán como referente dos de los instrumentos que hemos diseñado en esta investigación, para orientar el diálogo con los profesores acerca de la aplicación del concepto de *derivada.* Los instrumentos son los siguientes:

- Evaluación sobre el concepto de *derivada* (examen) realizada y proporcionada por el profesor investigado.
- Cuestionario diseñado por la investigadora: Evaluación simulada por un profesor de matemáticas para evaluar la comprensión del concepto de *derivada*.

1. ¿En qué situaciones particulares utilizas más frecuentemente el concepto de *derivada* o el cálculo de la función derivada de funciones (cálculo de velocidades, razones de cambio, problemas de la recta tangente, etc)?

2. ¿Qué aspectos del concepto *derivada* crees que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?

3. ¿Cómo sabes que tus alumnos han aprendido el concepto de *derivada*?

4. Podríamos hablar de este examen que tú realizaste...

5. ¿Qué opinión tienes de la evaluación realizada por el profesor X sobre dicho concepto, me explicas la respuesta que das a cada ítem?

6. Me puedes hacer algún comentario sobre las dificultades que crees que puedan tener tus estudiantes al resolver este examen.

7. ¿Cuáles crees que son los posibles errores esperados?

ENTREVISTA 4

VIÑETAS SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA

I

¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.

II

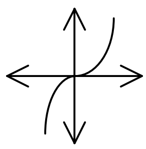
¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.

III

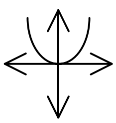
Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de $f(x) = 4^x$, en $x = 2$. Explica y justifica la solución.

IV

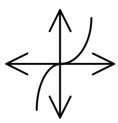
Si tienes el gráfico de la siguiente función:



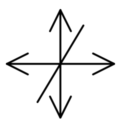
a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



I. ☐



II. ☐

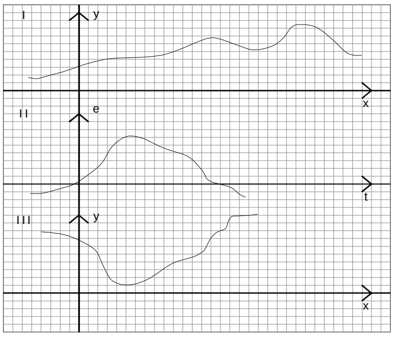


III. ☐

b. Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

V

Observa las siguientes gráficas:



Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (o de crecimiento más rápido) → $\boxed{+}$
- Para valores menores (o de decrecimiento más rápido) → $\boxed{-}$
- Para valores nulos → $\boxed{0}$

VI

Aquiles tiene una velocidad doble que la velocidad de una tortuga. Si al iniciar la persecución la tortuga tiene una ventaja de 1 Km, ¿Alcanzará o no Aquiles a la tortuga?

En caso afirmativo: ¿A qué distancia del punto de partida de Aquiles crees que éste alcanzará a la tortuga? **Justifica tu respuesta.**

ENTREVISTA 5

SOBRE LOS INSTRUMENTOS ELABORADOS POR EL PROFESOR

Entrevista semiestructurada para discutir y ampliar la información que nos proporcionaron los profesores mediante la elaboración y construcción de los siguientes instrumentos de la investigación que han sido entregados y estudiados previamente a la entrevista por parte de la investigadora. Ésta estará condicionada a cada una de las dudas que tengamos sobre los instrumentos proporcionados por los profesores, por tanto, no hay un guión predeterminado sino que se construirá dependiendo del caso de cada profesor.

- Programación de la asignatura de Matemática de 11º.

- Diseño de la unidad didáctica del concepto de *derivada*.

ANEXO 2.

TRANSCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA 1: ENSEÑANZA DEL CONCEPTO DE DERIVADA (FASES DE INTRODUCCIÓN E INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO)

Profesor A

I. DATOS DEL PROFESOR:

Titulación: Licenciatura en Matemática y Física
Fecha de graduación: 1974
Formación continuada:

- Maestría en Educación: Acciones pedagógicas (1993)
- Cursos doctorales en Educación
- Cursos de formación continuada ofrecidos por el MEN (actualización pedagógica)

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. *¿Qué finalidades consideras que se persiguen con la enseñanza de las Matemáticas en la Educación secundaria?*

R/: Bueno yo creo que la matemática es una disciplina que forma mentalmente a la gente, no solo la matemática sino las otras disciplinas también, pero por la misma naturaleza que tiene la matemática enseña a los estudiantes a tener un proceso lógico, yo diría que limpio de lo que es pensar, tener una buena organización de las ideas, de lo que es tener una buena estructura, un orden, una deducción, principios... O sea la matemática por sus propias características es muy ordenada y contribuye con otras ramas, a mi manera de ver, que los estudiantes tengan buena capacidad de pensamiento.

2. *¿Consideras que es importante la Matemática en el currículo de la Secundaria?*

R/: Por supuesto, es importantísima porque como te decía, uno de los objetivos en general, y en la matemática particularmente cuando se educa al estudiante es que tenga una buena formación cognoscitiva, es decir en el conocimiento, en su ética y en la estética. Y las matemáticas a mi manera de ver, estudiando todo el desarrollo histórico de ella persiguen estos tres principios.

3. *¿En qué contexto educativo sería mejor introducir el concepto de derivada? ¿Desde qué disciplina (asignatura) consideras que sería mejor introducirlo?*

R/: Bueno, yo pienso que la derivada tiene mucha relación con el mundo, o sea aunque esté en el contexto de la matemática no es ajeno a que la derivada se haga en el campo de la física o en el de la química o en la economía o en el campo de la misma vida corriente... Yo normalmente cuando enseño comienzo preguntándole a los estudiantes qué creen ellos que es una derivada y posteriormente en la medida en la que ellos van soltando sus ideas iniciales se van encontrando con alguno ejemplos, y podemos llegar en las conversaciones a ver que su propio desarrollo corporal, físico y mental es una derivada.

E: ¿Qué tipo de respuestas encuentras cuando indagas las ideas previas de los estudiantes?
Bueno, hay desde muy elementales, desde muy nocionales a encontrar algunas definiciones o ideas de ellos más estructuradas. Por ejemplo, que algún estudiante puede decir que la derivada es una razón de cambio e inclusive dan algún ejemplo... Bueno yo entiendo que como mis estudiantes han visto previamente el concepto de velocidad y el de pendiente en años anteriores... estos conceptos les sirven de referencia... bueno eso supongo... que les ayuda...

4. *¿Qué aspectos consideras que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?*

R/: Yo creo que comenzar con lo que los estudiantes conocen del tema... con sus ideas iniciales o preconcepciones y a partir de allí con ellos ir construyendo el concepto. Ahora como prerrequisitos matemáticos entiendo que deben manejar el límite, tener una idea del límite por lo menos intuitivamente, deben conocer la pendiente, esto me parece que es básico y tener algunos ejemplos de relaciones, desde relaciones aritméticas más sencillas hasta relaciones aplicadas en el mundo de la química como por ejemplo la densidad, por ejemplo la velocidad en la física... además el manejo de la recta, de la función lineal porque esto le va ayudar bastante a tener un concepto más estructurado cuando se llegue a las definiciones más formales de la derivada.

5. *¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?*

R/: Yo creo que hay que crear un ambiente de confianza en los estudiantes, porque si bien es cierto de que se está hablando de un concepto formal en el campo del cálculo, pues se debe comenzar con cosas muy relacionadas de la vida corriente y se aprovechan entonces los conceptos que ya manejan como de pendiente y de velocidad; además relaciones como oferta y demanda, que estas cosas le permitan ver al estudiante más el concepto antes de formalizarlo.

6. ¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de derivada? ¿Para qué sirve este concepto? ¿Y a tus estudiantes?

R/: Yo diría que se puede responder desde dos puntos de vista, desde la cotidianidad y desde fenómenos de la vida que ayuden a entender la derivada como una razón de cambio... ahora lo otro desde un punto de vista formal, y la justificación es tener que decir que hay situaciones que requieren de un cálculo muy refinado y necesitan cálculos a nivel micro, muy puntuales y que hay veces se necesita ir desde un valor x a uno Δx... y entonces solo la derivada en un puntito que casi no se ve, pero ya desde el punto de vista científico y formal, se necesita un límite que es el que da la derivada... Esa razón de cambio ya a nivel diferencial.

7. ¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de derivada? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto de derivada?

R/: En el previo... me parece que un concepto importante es el de pendiente... ahora dentro del mismo curso previo el concepto de límite, me parece también que las aproximaciones numéricas para calcular la variación de un punto a otro cuando la distancia se hace cada vez más pequeña es también necesaria. Ahora las funciones por supuesto y del dominio de la función.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

8. A continuación te presentamos dos definiciones del concepto derivada, extraídas de los libros de texto más utilizados del grado 11 en Barranquilla, para que las valores y comentes si las consideras adecuadas para enseñar a los estudiantes de este nivel:

LIBRO 1: ***"Definición de Derivada"***

"Sea f una función real. La DERIVADA de f es otra función que simbolizaremos por f ' y tal que su valor en cualquier punto x = x de su dominio está dado por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, Siempre que el límite exista".

LIBRO 2: ***"Definición de la Derivada de una función"***

"La derivada de f en x viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Supuesto que exista tal límite".

LIBRO 3: ***"Definición: Derivada de una función"***

Sea x un número del dominio de una función f, determinada por la ecuación y = f (x). La derivada de y respecto a x, representada por dy/dx se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Si el límite existe.

R/: Indiscutiblemente las que aparecen aquí son la definición formal de la derivada, tal como están aquí formalmente me parecen bien y yo las he utilizado, de pronto si algún reparo tuviese que hacerle es a la cuestión metodológica, es que no debe comenzarse con esta definición, ya esto lo mencioné antes, porque de pronto el estudiante no llega a entender ese f (x +h) – f (x) enseguida. Pero es eso, pero me parece interesante que se tenga bien claro lo que significa la derivada en todas sus acepciones y, pues éstas que me presentas son el modelo matemático de la derivada. Normalmente he visto que los estudiantes se familiarizan más, en cuanto a símbolos, con el f (x + h), me parece que le da como más facilidad a la hora de entender el concepto porque cuando ven el Δx parece que fuera distinto, yo no encuentro la razón todavía pero tienen mayor dificultad para comprender. Entonces hay que estarles haciendo siempre algunas aclaraciones sobre eso, aunque cuando se les explica lo que es un Δx y las diferencias que hay con el diferencial dx entonces ellos ya comprenden, pero claro esto con alumnos de ingeniería porque en el bachillerato solo lo defino con h. Para explicar lo hago poniendo el ejemplo del mundo macro y el micro, ambos se explican en términos de diferencias pero el Δx hace referencias a diferencias en el mundo macro perceptible, mientras que el dx hace referencia a diferencias infinitesimales imperceptibles del mundo micro o científico.

9. ¿Cuál piensas que es el significado del concepto derivada?

R/: Yo creo que la derivada es una razón de cambio, fundamentalmente yo la veo como una razón de cambio entre variables, ahora matemáticamente también podría decirte que es un límite. O sea la derivada yo la veo para que mis estudiantes la comprendan como una razón de cambio entre variables.

10. ¿Cómo introduces en clase el concepto de derivada?

R/: Yo inicialmente siempre arranco de los conceptos previos porque me parece que desde el fundamento constructivista es una manera de ir sacando a los estudiantes que creen ellos que no saben nada de un concepto, y entonces es interesante explorar las nociones y las preconcepciones que tienen y además porque históricamente fue así, las cosas no salieron ya acabadas sino que se fueron construyendo dialogando... Puede que sea un poco más lento pero el estudiante entra en un ambiente de más dinámica y de mayor confianza, y una vez con los ejemplos de unos y de otros ya se empiezan a hacer preguntas, porque es una clase más de tipo socrático es decir de preguntas que orienten, de contra preguntas, de darle la oportunidad al estudiante para que se vaya desenvolviendo y luego atacarlos a preguntas para que el concepto se vaya clarificando siempre con muchos ejemplos de la vida práctica. Y después ya si entramos a formalizar el concepto a través de otras actividades como lectura previa en el libro de texto, es más, el mismo texto este que seguimos tiene esa visión de que el estudiante debe ir construyendo sus ideas a partir de ciertas exploraciones hasta llegar pues a la formalización por parte mía o del propio libro de texto. Ahora me he encontrado con casos de estudiantes muy aventajados porque en los cursos hay mucha heterogeneidad entre el alumnado, entonces con los que están más avanzados yo trato de hacer un poco de lo que plantea Vygotsky con la zona de desarrollo próximo, o sea de retarlos con lagunas situaciones más complejas, por encima de lo que ellos conocen, para ver qué responden y después entramos a formalizar las respuestas dadas. Pero en general lo introduzco con casos concretos de la física y de la economía para después ya entrar a formalizar el concepto, pero nunca arrancar con la definición formal. Las situaciones muchas veces las saco de los mismos textos y otras de mi propia experiencia. Y como te digo nunca comienzo por la definición, porque alguna vez lo hice y los alumnos pueden hasta memorizar el concepto pero sin llegar a comprenderlo, en cambio con lo de proponer ejemplos que ayuden a dar significado el concepto, el alumno puede llegar no sé si a comprender el concepto pero si a ver su significado en otras ciencias y en la vida. Y luego pues ya si se entra a la interpretación geométrica de la derivada a la parte de la representación gráfica tradicional del paso de la recta secante a la tangente y en algunos casos sí es factible utilizamos la calculadora gráfica para ver viendo visualmente el proceso del cambio... Lo que ocurre es que todavía no hemos hecho masivamente el uso de software porque se cree en el medio que uno le está haciendo propaganda a las multimedia, y que estamos haciendo negocio con ellas, pero como muchos estudiantes ya tienen calculadora entonces yo aprovecho y las usamos en clase. Y luego de la representación geométrica y de la física, pues ya se entra a la definición formal de la derivada hasta ya entrar al álgebra de la derivada como te lo indico en la unidad didáctica.

E: Tengo una pregunta que hacerte para ubicarme un poco más, tú primero planteas la necesidad de indagar las preconcepciones, luego dices que hay una exposición del profesor sobre la interpretación y definición de la derivada y nos remites al libro de texto, entonces, ¿qué papel juega el libro de texto a la hora de diseñar unidad didáctica y proponer las tareas y situaciones?

R/: Es un medio, un medio más para hacer una interacción entre el profesor, estudiante y el saber. Como igualmente puede darse una conferencia o un artículo o ejercicios escritos por el profesor, pero en general lo uso para mediatizar el conocimiento. Ahora hay otra cosa es que esto se hace o se trabaja en dos niveles, yo trabajo con mis alumnos a nivel individual y a nivel de grupo, porque el de grupo me parece interesante porque los mismo estudiantes reconocen que aprenden mejor en grupo, claro aquí hay que aclarar que este trabajo en grupo hay que combinarlo con el trabajo individual previo, porque si se deja todo en grupo entonces los estudiantes lo manipulan y quieren estar siempre en el mismo grupo y se acomodan. Y hay que variar mucho, hacer grupos con diferentes criterios por competencia, por rendimiento, sexo, etc. Y la otra es centrarnos en el trabajo individual.

11. *¿Qué opinas del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de derivada que puedes comentarnos, ¿lo utilizas?*

R/: Esto es muy importante porque así el estudiante se da cuenta como se dio históricamente el desarrollo de los conceptos y de los procesos, una de las cosas que más me llama la atención es que la historia de un concepto matemático ha pasado en algunos casos muchos siglos, y en la escuela para enseñar esa clase a veces no ocupamos ni dos o tres sesiones en darlo, entonces la historia sirve para que ellos se den cuenta de ese aspecto dinámico de la construcción del conocimiento y entre otras cosas para que poco a poco vayan entrando en eso del epistemología del saber que es eso, su qué, su cómo, su para qué, cuáles problemas y su historia; y por otra parte también la historia da pie para que ellos también vean que estas personas en un tiempo con sus limitaciones construyeron los conceptos, algunos fueron muy brillantes, otros más bien luchadores y perseverantes, en fin pero es un aspecto muy importan. Ahora para el caso concreto de la derivada a veces se presenta la historia del concepto a través de una lectura corta que aparece en el libro de texto y que después pido que amplíen por investigación.

12. *¿Qué opinión tienes acerca de la aparición o no-aparición de este concepto en los textos de matemática de cualquier nivel educativo? ¿Crees necesaria su enseñanza en el bachillerato? ¿Por qué?*

R/: Bueno esa ha sido una polémica, yo creo que el problema no está en qué aparezca o no, sino en el tratamiento que se da del concepto. Yo si pienso que hay que situarse en el contexto de los estudiantes y de pronto derivada uno puede dar hasta en 6º, pero depende de cómo se introduce, pues sería violento dar en 6º la derivada como un límite pero hay mucho ejemplos a ese nivel que podrían acercarlos al concepto. Me parece que lo que hay que hacer es manejar todos esos conceptos a nivel estructural y poder introducirlos desde la pre-escolar y cada cual de acuerdo al nivel se va introduciendo. Yo pienso que el problema es cuando se centra en el proceso más algorítmico, al aspecto más formulístico y todo este truco matemático, pero es que si el concepto se dota de significado es interesante e importante que aparezca en el currículo de bachillerato. Y la reflexión sería con qué didáctica abordar ese tema en ese nivel, con qué representación, y contextualizarlo bien, y yo creo que no habrá problemas.

13. *¿Qué ejemplos utilizas en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto derivada? ¿Por qué?*

R/: Bueno ya lo he dicho no con la velocidad, el costo marginal y en general con situaciones que involucren razón de cambio entra variables.

Profesor B

I. DATOS DEL PROFESOR:

Titulación: Licenciatura en Matemática y Física
Fecha de graduación: 1987
Formación continuada:

- Especialista en Enseñanza de las Ciencias Naturales (1994-1996)
- Diplomado en Metodología de Investigación Pedagógica (2000)
- Cursos de formación continuada ofrecidos por el MEN (actualización pedagógica)
- Autoformación

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. *¿Qué finalidades consideras que se persiguen con la enseñanza de las Matemáticas en la Educación secundaria?*

R/: A ver me vas a ser pensar así en serio. Bueno nosotros orientamos un proceso de un plan de área donde visionamos las matemáticas que se trabajan en todos los grados de secundaria de 6º a 11º. Y entonces, buscamos allí por ejemplo:

- Primero, que el estudiante pueda tener una cierta autonomía en el manejo de un conocimiento matemático. O sea que sienta él como cierta seguridad para manejarlo y hasta cierto nivel.
- También otro es desarrollarles un pensamiento lógico y la crítica. Otra cuestión es el análisis y manejo de los algoritmos de una manera no mecánica, o sea que el estudiante comprenda porque cuando está multiplicando deja un espacio. Por qué lo debe hacer.
- Otra cosa también importante es el manejo del lenguaje y simbología matemática, que le haga una interpretación a ella. En doble vía, del lenguaje normal al matemático y viceversa.
- Y el otro sería el manejo de ciertos modelos matemáticos, bueno para que resuelva problemas. Distintos problemas que puedan presentárseles de pronto en Física, en Química o en las mismas Matemáticas.

2. *¿Consideras que es importante la Matemática en el currículo de la Secundaria?*

R/: Claro que sí es fundamental. O sea nosotros hablamos de educación para la vida, bueno digamos para la vida en el sentido de que el estudiante se pueda desenvolver sin ir a una universidad, es decir, que si él necesita montar un negocio él necesita manejar matemáticas. Entonces si va a una universidad, entonces necesita manejar la matemática en todos los frentes que vaya estudiar, yo diría que en todos los frentes.

Sí va escoger por ejemplo la medicina. Yo me quedé maravillado por ejemplo de la Física que debe conocer el médico, una física que es un bloque, Física aplicada y bueno ese estudiante para manejar Física debe manejar las Matemáticas, manejar Trigonometría, debe manejar Cálculo. Si va estudiar por ejemplo Electricidad en una escuela técnica, ese estudiante va necesitar de conocimientos de la Física también por tanto va necesitar de la Trigonometría, del Álgebra, del Cálculo. El abogado de la Lógica matemática... Es que yo pienso que si él va a ser o un profesional o un tecnólogo o un negociante tiene que conocer matemáticas.

3. *¿En qué contexto educativo sería mejor introducir el concepto de derivada? ¿Desde qué disciplina (asignatura) consideras que sería mejor introducirlo?*

R/: Bueno yo diría que yo no veo como una sola asignatura... Yo veo dos asignaturas, muy pero muy entrelazadas y que por lo general las separamos. Es el caso de la Física con la Matemática. Eh... Yo he venido analizando en el caso de la Física que se trabaja en 10º, allí hablamos de la velocidad media y el estudiante lo que ve normalmente es velocidad instantánea. En este caso en ver la relación entre variación media y velocidad media; y luego ver variación instantánea con velocidad instantánea... Y esto es una relación directa entre lo que se trabaja en Física con lo que se trabaja en Matemática. Yo le llamo variación media y variación instantánea hay quienes le llaman razón de cambio o tasa de cambio. Yo le llamo variación y utilizamos eso en el triángulo en el delta que simboliza la variación y lo hago con ese término variación, de cuánto a cuánto varía o cuál es el intervalo de variación. Entonces vemos muy enlazados esas dos asignaturas. Eh... como el estudiante trabaja en 10 en Física, eso lo retomamos en 11º en Matemáticas, para introducir el concepto de derivada y estudiar velocidad instantánea desde otra perspectiva desde la perspectiva de la derivada. Porque en 10º se estudia la velocidad y se centra en las fórmulas de la cinemática y yo creo que el estudiante muestra en su aprendizaje de 10º de Física puede ser bueno y que les sirve de muy buena base para introducir y desarrollar el concepto de derivada en 11º.

4. *¿Qué aspectos consideras que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?*

R/: Yo te diría que el profesor debe tener pendiente o revisar que los estudiantes tengan unos ciertos fundamentos, ciertos fundamentos... por ejemplo, un manejo del álgebra, que el alumno maneje bien la variación de una función, la variación media y que él maneje bien el concepto de pendiente de una recta, y las funciones sus gráficas, sus ecuación. Que el estudiante maneje lo anterior con bastante claridad y fíjate tú, que en Física nosotros trabajamos magnitudes directamente proporcionales y trabajamos la ecuación de la recta y eso también lo retomamos acá en matemática de 11º para introducir la derivada, o sea que habría que hacer una parte inicial de recordar de esos aspectos de la pendiente de la recta y su gráfica, la gráfica de una función. Yo insisto en la gráfica porque es como visualizar una parte de conocimiento de pronto que está abstracto y entonces a partir de ella que analice e interprete lo que sucede por ejemplo con magnitudes directamente proporcionales. Es decir que no es sólo suficiente el cálculo de la pendiente, sino que también interprete también la gráfica, interprete esa pendiente.

5. *¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?*

R/: Bueno, uno retomando lo que vieron el año anterior en Física, o sea él dice aquí yo voy a trabajar en algo que ya yo conozco. Dos, el aspecto histórico y la aplicabilidad de este concepto. Eh... del aspecto histórico que los estudiantes allí tengan un conocimiento de cómo transcurrió en la historia, entre los grandes matemáticos cómo se construyó y desarrolló ese concepto de derivada y dónde se aplica ese concepto de derivada para el bienestar del hombre. Entonces yo pienso que estos son aspectos fundamentales para que él se motive.

6. *¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de derivada? ¿Para qué sirve este concepto? ¿Y a tus estudiantes?*

R/: Cuando se le habla a los estudiantes de aplicabilidad del concepto en la vida diaria, ya se le está diciendo para qué sirve este concepto. Lo otro es que cuando nosotros comenzamos a hacer un cálculo numérico de una variación instantánea, eso es algo engorroso, ir reduciendo un intervalo hasta cero, hasta muy próximo a cero... Entonces eso es algo muy engorroso, y que el estudiante encuentre, se dé cuenta de que hay otro procedimiento más ágil y más rápido y fácil de hacerlo, entonces se les dice bueno aquí está la importancia de esto de las reglas de derivación... Pero claro sin descuidar lo gráfico, que también es muy importante la interpretación gráfica de la derivada y de la función derivada. Además de esa gran aplicabilidad que tiene en Física como ya lo dije, en Geometría, Química, etc. Aquí también desde el punto de vista del procedimiento, de que un procedimiento demasiado engorroso como es el del cálculo numérico, eso de hacer las diferencias, las divisiones cada vez más pequeñas, las aproximaciones. Él va ver un procedimiento fácil, rápido y ágil, entonces va a ver ahí la gran aplicabilidad y porque es necesario esa derivada.

7. ***¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de derivada? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto de derivada?***

R/: De conceptos previos de los estudiantes, ya te he comentado algo... Ya te hablé de la pendiente, las variaciones medias e instantáneas, es decir las variaciones en general. Lo anterior sería básicamente. Hay otros o muchos matemáticos que introducen la derivada desde el límite, pero yo lo hago desde una manera que muchos me dicen osada y terca, lo que pasa es que yo veo que ese límite le complica mucho la vida a los estudiantes, entonces si hay otra forma de introducir la derivada que es por la variación, que el vea por ejemplo, que por ejemplo si te quieres aproximar al dos lo puedes hacer tanto como se quiera por la izquierda y por la derecha, y que si este lo estamos aproximando por la izquierda por ejemplo tomamos: 1,1... 1,9; 1,99; 1,9999... Viendo que esto se está acercando cada vez a 2 y que prácticamente va a ser el 2...

E: pero entonces, ¿tú utilizas el concepto de límite o no?...

R/: Bueno sí, pero lo hago más como una idea intuitiva de límite, exacto! Ya eso lo haríamos y entonces fíjate comenzaríamos a trabajar enseguida con la variación media, sí hablándoles de velocidad media, hablándoles de pendiente**.** Retomaría fíjate aquí una situación que la estaba pensando, el de la función cuadrática $y = x^2$; el de un cuerpo que está cayendo porque es que ellos ya lo estudiaron en Física de 10º, un cuerpo en caída a través de una tabla de valores de altura y tiempo y ellos podrán deducir la una ecuación. Es decir que yo no les daría la ecuación de la situación problema sino que la deducirán de una tabla de datos. Es decir que no sólo me gusta trabajar con la ecuación y a partir de ella el gráfico, sino que también el alumno a partir de una tabla deduzca la ecuación o de una situación problema etc. Una cosa en la que quiero insistir de que esa tabla nos permite ir hacia muchos lados por ejemplo buscar la ecuación de la velocidad, la gráfica, nos permita hacer el cálculo de la velocidad media y luego hacer el cálculo de la velocidad en un punto, en un instante.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

8. A continuación te presentamos dos definiciones del concepto derivada, extraídas de los libros de texto más utilizados del grado 11 en Barranquilla, para que las valores y comentes si las consideras adecuadas para enseñar a los estudiantes de este nivel:

LIBRO 1: ***"Definición de Derivada"***

"Sea f una función real. La DERIVADA de f es otra función que simbolizaremos por f ' y tal que su valor en cualquier punto x = x de su dominio está dado por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, Siempre que el límite exista".

LIBRO 2: ***"Definición de la Derivada de una función"***

"La derivada de f en x viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Supuesto que exista tal límite".

LIBRO 3: ***"Definición: Derivada de una función"***

Sea x un número del dominio de una función f, determinada por la ecuación y = f (x). La derivada de y respecto a x, representada por dy/dx se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Si el límite existe.

R/: Es que aquí normalmente no se utiliza una, pero yo veo de pronto, este límite debe existir para poder hablar de derivada. Bueno, entonces yo aquí hablaría de una variación en caso de la número 2, de pronto esta por lo que tenemos la variación de la variable x. Pero aquí, fíjate tú si de pronto nosotros interpretamos la número 1. Este h, está representando este delta y aquí tenemos en el numerador de esta fracción la variación de la función. Es que hay una similitud... aquí nos hablan en el 3 de Δy/Δx, el Δy se refiere a la variación de la función y el Δx la variación de la variable x, que es similar a esta la número 2... Pero yo utilizo o me doy más con la número 2 porque en la tercera los estudiantes no entienden este cociente Δy/Δx o es menos complicado para mí de explicarlo... Pero me gusta la 2 porque se explicita en un lenguaje matemático la variación de la función cuando varía la variable independiente.

9. ¿Cuál piensas que es el significado del concepto derivada?

R/: El significado del concepto de derivada... Bueno ese significado... (risas)... Es... Podíamos pensar que es... es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto... en un punto... perfecto... Pero otra cosa... entonces te decía que es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto o también puede tomarse como la velocidad instantánea de un cuerpo en un tiempo fijo... en un instante... En general yo diría que es la razón de cambio entre dos magnitudes... Y lo mejores ejemplos son los anteriores...

10. ¿Cómo introduces en clase el concepto de derivada?

R/: Bueno, te comentaba que primero retomamos unas situaciones que se estudian en Física de 10º, que son a partir de unas situaciones de posición tiempo... con una situación precisa no... entonces entramos a estudiar la velocidad media y analizamos allí y hacemos hincapié en lo de la variación... más bien un recordar sobre la variación de posición con respecto al tiempo, para la velocidad media...

E: Pero ejercicios cómo cuál por ejemplo... que tipo de ejercicios me intentas ilustrar...

R/: Bueno ejercicio como el que te planteo aquí (Ver unidad didáctica)... de un auto que recorre cierta distancia en cierto tiempo... y se puede trabajar a partir de una tabla de datos y se hace allí un gráfico... si primero se hace el gráfico... después deducimos las pendientes, se hace cálculo de desplazamientos, cálculo de distancias y cálculo de velocidades medias...

También trabajamos con la pendiente de la recta tangente. Te hablé de la función $y = x^2$, que es una función fácil y muy accesible para los estudiantes... para que él... comprenda qué significa el cuadrado, su gráfica, cómo es... que es una parábola y es más fácil el trabajo con esta... Bueno quizás hay otras pero que uno no estudia... Y otro aspecto que tomamos otra situación es la de un cuerpo cayendo allí... que es la de un cuerpo cayendo que ya ellos lo han estudiado en Física de 10º... Se le presenta la situación problema a partir de los datos registrados en una tabla, luego que ellos hagan identificación de variables y así para que ellos deduzcan la ecuación, luego se les pide que hagan una gráfica y después que estudien y calculen la velocidad media y la velocidad instantánea. Allí se trabaja con... como esto también le dará de gráfico una parábola también, se trabaja para que ellos diferencien lo que es una secante de la recta tangente... Entonces ellos aquí van viendo la variación de esa secante como se va aproximando a la recta tangente cuando nos acercamos a ese punto fino... en este caso a un tiempo fijo... Bueno yo aquí te doy esto que estoy escribiendo... las situaciones que te estoy hablando por escrito... escribe y dice lo que hace... Bueno yo esto lo trabajo o les pido que trabajen con valores numéricos pequeños... con intervalos pequeñitos para que ellos vean y hagan este procedimiento engorroso y entonces entren a valorar... Por ejemplo aquí tenemos el $\Delta y/\Delta t$... de la pregunta que me hiciste hace un rato. O sea que hablábamos de la definición 2 y la 3... que era en lo que yo hago más hincapié... Bueno entonces ellos hacen esos cálculos y luego... lo llevamos a que hagan el cálculo en un tiempo fijo... En cómo cuando el tiempo varía... que tiende a cero, qué sucede con el valor de la variable dependiente... Y se deduce o introduce la velocidad instantánea en ese instante concreto... Luego hago... con este caso... yo lo utilizo para hacer el cálculo para otros tiempos... como aquí tenemos unos tiempos que varían en la tabla de 0 a 5 seg. Entonces podemos hacerlos para diferentes instantes concretos... por ejemplo primero fue para 2 seg. Después se les puede pedir para el instante 4 seg. , y esto a partir de cálculo numérico... esto lo harían ellos con mi orientación... pero lo harían ellos... Pues esto es más demorado así por este cálculo numérico pero yo pienso que los estudiantes al tener que hacer este tipo de actividad tienen que pensar más y aprenden más... Que si yo lo hago de manera tradicional que es explicándoselos yo...

Después de esto hacemos análisis con funciones que ellos puedan dar un ejemplo ellos y lo analizamos o yo se los doy... dependiendo de la ocasión... y a partir de este trabajo se introduce el concepto de derivada como el límite de la función cuando la variable independiente tiende a cero... Pero claro en este caso puede ser x o también t y así se relaciona la derivada con la velocidad instantánea y con la pendiente de la recta tangente... Y relaciono los dos ejercicios anteriores descritos... Y ya...
Sí después hacemos más estudios con otras funciones o que ellos me plantean o que yo se las planteo... sí como te dije varía de acuerdo al interés del grupo... Allí... podemos inmediatamente aprovechar este tipo de ejercicios de... con... como el cuerpo que va cayendo que en este caso es $y = 5t^2$... aquí se puede aprovechar para que ellos analicen las reglas de derivación... por ejemplo la derivada de una potencia... Sí y ellos van haciendo conclusiones... Sí porque cuando el tiempo es 2 nos da (por el cálculo numérico) 20 m/seg... que sería 10x2... Y cómo se les pide par otros instantes por ejemplo 4 seg., por cálculo numérico encontrarían que es 40 m/seg... que sería 10x4... Entonces pueden deducir que es siempre 10t... o sea que el 2 baja a multiplicar y en general deducir la regla de la potencia... Entonces allí podríamos aprovechar para que ellos analicen y vayan generalizando la derivada de una potencia... Lo que trato con esto es ir minimizando tanto el darles las reglas sin que ellos comprendan de dónde salen y le vean sentido al uso algebraico posterior de ellas... como instrumento facilitador de procesos menos tediosos y más prácticos...

11. *¿Qué opinas del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de derivada que puedes comentarnos, ¿lo utilizas?*

R/: Yo te decía hace un rato que eso es poco usado, ¿verdad? Y en mi caso también es poco usado, pero que muchas veces ocurre y en el caso de la derivada ocurre que tu leyendo algo... algo sobre la historia de este concepto de la creación y construcción de este concepto... te das cuenta de que hay dos enfoques... <u>Te permite la historia cuando habla de Isaac Newton y hablan de Leibnitz... Entonces tú ves las diferentes perspectivas que usaban estos matemáticos y... y... de pronto dices... bueno si este hombre trabajó así... Si Newton trabajó con esto de las fluxiones... y con esto de la pendiente... entonces él se mete a estudiar la derivada sin usar el límite... inicialmente... Y entonces esto me invita a decir bueno... entonces yo lo doy por aquí...</u>

E: Tratas de decirme con esto que la misma Historia de las Ciencias te proporciona estrategias de Enseñanza o entiendo mal
R/: Exacto... eso... tú lo dices mejor... Puede darme una estrategia de enseñanza que es la que yo uso y ya te conté en la pregunta anterior... Bueno ahora creo que me perdí me podrías repetir la pregunta por favor...

E: repito la pregunta
R/: Bueno por un lado te decía que me sirve como orientador de los procesos de enseñanza y por otro lado sirve como motivación a los estudiantes, o sea que también entienda y se enteren los estudiantes y el profesor que eso no ocurrió en un

abrir y cerrar de ojos, que eso costó dolores de cabeza, que son procesos largos la de la construcción y evolución de los conceptos... que es un proceso dinámico... dialéctico... cambiante... Y que hubo tropiezos grandes y que vean cómo la gente trabajó... Por ejemplo cómo lo hizo Newton, en ese Principia...

E: Pero lo utilizas o no en la enseñanza de la derivada o sólo lo conoces tú
R/: Mira ahora, ahora yo lo uso en una parte introductoria al concepto, en la unidad didáctica te lo coloco... Yo lo aprovecho como motivación al tema... que el estudiante allí valore esa construcción del concepto... los matemáticos que trabajaron, cómo trabajaron... Que eso no fue en un abrir y cerrar de ojos... que vean la evolución desde Newton y Leibnitz hasta Cauchy... tal y cómo se los enseñamos hoy... que fueron muchos años de trabajo... trabajo arduo... Que vean como funciona la creación del conocimiento científico y que entre a valorar algo importante... que nosotros estamos en un medio donde el conocimiento lo valoran unas pocas personas... que son especializadas en el ramo y los demás no...

12. *¿Qué opinión tienes acerca de la aparición o no-aparición de este concepto en los textos de matemática de cualquier nivel educativo? ¿Crees necesaria su enseñanza en el bachillerato? ¿Por qué?*

R/: Sí ya te lo decía que sí es fundamental... O más bien obligatorio... Es una cuestión o concepto que tiene una gran aplicabilidad en la vida práctica y en las demás áreas de conocimiento que los estudiantes ven. En la Matemática... en las Ciencias... Y entonces, sí es de esa gran aplicabilidad la derivada, para mí es obligatoria su enseñanza o que aparezca en los libros de matemática de los dos últimos grados y para nosotros aparece en el último grado.

E: ¿Cuándo hablas de aplicabilidad a qué te refieres?
R/: <u>Te hablo de aplicabilidad en la misma matemática para entender y mejorar el análisis de funciones... De aplicabilidad en la vida cotidiana mediante el uso de los máximos y mínimos... Cuando se va a construir por ejemplo un tanque (un recipiente para recoger agua) para un líquido... y bueno dicen por ejemplo... cómo hacen para saber si tiene esta capacidad cuál será lo mínimo de material que necesitamos para construir si las dimensiones deben ser así... Y entonces fíjate la derivada te da las herramientas potentes para hacer trabajos prácticos... Y eso te puedo hablar de otras ciencias en Biología, Química... ya te he hablado de la Física, otra en la Economía... el uso es potente par explicar muchos fenómenos... quizás hay algunos más que yo no conozco... Pero se que tiene mucha aplicabilidad... Por ejemplo el crecimiento de bacterias y poblaciones en general... en fin... Incluso los cambios de los mismos alumnos... Pero fíjate tu hay que reconocer que a veces los profesores de Matemática tendemos a meternos siempre en lo de matemática...</u> Y ahora menos mal los libros están trayendo la aplicación de ese concepto matemático en otros campos... Por ejemplo vi un libro acá que habla de algo en Economía... Si mal no estoy, otra cosa de... de Química... Por ejemplo temperatura aquí... en este que utilizo yo hay mira... además de ventas... etc... Y esto ayuda mucho a los profesores... lo que hay en los libros...

13. *¿Qué ejemplos utilizas en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto derivada? ¿Por qué?*

R/: <u>Bueno... caso concreto que te decía... la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto; el otro que te decía es el cálculo de la velocidad instantánea... Son los</u>

dos de introducción... Pero después todos lo que te hable de optimización... y ejemplos aplicados en otras ciencias... Para que vean la importancia del concepto no sólo en matemática y física sino en la vida en general.

Profesor C

I. DATOS DEL PROFESOR:

Titulación: Licenciatura en Matemática y Física

Fecha de graduación: 1991

Formación continuada:

- Cursos de formación continuada ofrecidos por el MEN (actualización pedagógica)

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. *¿Qué finalidades consideras que se persiguen con la enseñanza de las Matemáticas en la Educación secundaria?*

R/: Para mí creo que las matemáticas en la enseñanza secundaria tienen muchas finalidades, pero la más importante para mí es que desarrolla el pensamiento lógico, también genera en el estudiante una actitud positiva hacia las ciencias, aún cuando en la secundaria no se persigue mucho a nivel de educación aquí en Colombia el término científico, pero sí el pedagógico, entonces trata de que el estudiante se vaya motivando hacia las ciencias aun cuando no sea con conocimientos rigurosos.

E: ¿Cuándo hablas de pensamiento lógico a qué te refieres?

R/: Me refiero a que el estudiante se vaya estructurando, un pensamiento lógico, que todos los procesos lleven a eso, un seguimiento lógico de los conceptos matemáticos

2. ***¿Consideras que es importante la Matemática en el currículo de la Secundaria?***

R/: Yo creo que si, porque las matemáticas no son solamente una parte simbológica es más que eso, es casi toda una vida cotidiana, la matemática es fundamental en todas las ciencias, y como es fundamental en todas ellas es lógico que se dé en secundaria, porque este es el primer eslabón para que una persona siga profundizando sus conocimientos en todas las áreas.

3. *¿En qué contexto educativo sería mejor introducir el concepto de derivada? ¿Desde qué disciplina (asignatura) consideras que sería mejor introducirlo?*

R/: Normalmente cuando uno trabaja la derivada se nota que desde la física es más prudente o pertinente trabajar este concepto, pienso yo que sería con el movimiento uniforme y el acelerado también sería un buen punto de partida para tratar la derivada

E: ¿Pero y por qué no lo haces entonces?

R/: Bueno debe ser porque las matemáticas, como te había dicho por ser una de las ciencias más exacta y como abarca muchas temáticas de la economía, también se utilizan mucho la derivada, en la física, tal vez en la biología también en termino de incrementos de poblaciones. Entonces yo pienso que se hace desde la matemática porque la matemática es la que le da el argumento matemático, la estructura lógica, el aparato formal, pero sus aplicaciones son muchas en muchos campos de otras ciencias. Es decir, que creo que es mejor que se introduzca desde la matemática indiscutiblemente y como aplicación lo llevaría a la parte de la física y la economía.

4. *¿Qué aspectos consideras que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?*

R/: Bueno yo creo que el aspecto fundamental sería la parte de variación y cambio, sí porque la derivada eso es lo que nos está indicando un cambio que existe en una función determinada. Y por tanto, yo pienso que eso se debe tener en cuenta el concepto de razón de cambio y el concepto de función. O sea obviamente la derivada lleva implícita una función, entonces, yo estoy hablando de los cambios que pueden ocurrir en una función determinada con respecto a otra variable.

5. *¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?*

R/: Yo creo que debe ser la parte de otras ciencias, por ejemplo de la física, a mí me da la impresión de que normalmente cuando uno trabaja la derivada en 11º se trabaja ya cuando el estudiante a manejado bastantes conceptos de movimientos, y yo creo que es fundamental la derivada pero si se toma inicialmente como aplicación, no comenzar como hacemos normalmente que es trabajar la definición, luego ejercicios y finalmente la aplicación. Yo creo que deberíamos comenzar en términos de aplicación aún cuando la persona no domine mucho la parte del álgebra de derivada. Porque realmente pasa que los alumnos los centramos en hacer ejercicios de álgebra de derivadas y muchas veces acaban y no saben la aplicación del concepto... Y siempre aparecen al final de la unidad las típicas preguntas de por qué y para qué sirve este concepto.

E: Bueno ahora me hablas de lo que debería ser, pero en la actualidad cómo lo haces

R/: Bueno yo lo trabajo en con base en incrementos de funciones y su representación gráfica que es lo que yo veo más rico, pero hay que cambiar en eso y me doy cuenta ahora, creo que deberíamos cambiar y trataré de que no se quede en simples palabras contigo.

6. *¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de derivada? ¿Para qué sirve este concepto? ¿Y a tus estudiantes?*

R/: Yo creo que simplemente hasta la misma naturaleza nos obliga a hablar de este concepto, el mismo quehacer diario nos obliga, por ejemplo, los estudiantes hoy en día están bastante relacionados con la parte económica, y hoy en día vemos los incrementos, en la prensa gráficas de funciones que llevan implícitas razones de cambio entre magnitudes, por ejemplo la tasa de natalidad, etc., que considero que influyen y que ayudan a motivar el aprendizaje de este concepto, pero habría que usarlas más en el aula de clases, porque estas representan cambio y la derivada representa una razón de cambio y se puede ver en diferentes facetas de la vida cotidiana. Yo creo que en general es darles a entender que este es un universo cambiante y que lleva implícito el concepto de derivada.

E: Y a tus estudiantes se lo enfocas de esta forma o sólo lo tienes claro tú y no lo trasladas al aula cuando enseñas

R/: Bueno yo creo que cuando me diste la evaluación esta del profesor X, esta que conteste sobre la derivada, a veces yo he llegado a creer que muchas veces uno cree que porque uno lo sabe el estudiante lo debe saber, yo creo que ese es uno de los grandes errores que hemos cometido y que seguimos cometiendo en términos de que a veces uno conoce o maneja el conocimiento de la materia pero en el momento de llevarlo pedagógicamente al aula no lo transmite, yo pienso que tal vez eso uno lo trata como de esquivar dar muchas cosas específicas centradas en reglas, algoritmos y ya, y creemos que lo que para nosotros es fácil para el alumno también y ese es un gran error... Y la verdad es que muy pocas veces me preocupo por hacer hincapié en eso en la parte de aplicación y funcionalidad de la derivada... y de utilizar variedad de elementos por ejemplo tablas o gráficas como la evaluación esta que nos mostraste... pero claro supongo que este profesor no tiene los problemas que yo tengo de tiempo, de cantidad de trabajo, de perdida de tiempo por problemas en el pueblo, de que los niños no tengan libro y por comodidad me centro con el que cuento en el colegio y claro he de aceptar que lo sigo y punto... y lo más fácil es dar lo algorítmico y eso es lo que hago.

7. *¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de derivada? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto de derivada?*

R/: Bueno uno ve en los libros que siempre se arranca por los conceptos de intervalos, funciones y límite, casi siempre son los tres bloques conceptuales que uno maneja previamente para entrar al concepto de derivada, sobre la base del concepto de funciones y análisis de funciones que son también fundamental.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

8. *A continuación te presentamos dos definiciones del concepto derivada, extraídas de los libros de texto más utilizados del grado 11 en Barranquilla, para que las valores y comentes si las consideras adecuadas para enseñar a los estudiantes de este nivel:*

LIBRO 1: ***"Definición de Derivada"***

"Sea f una función real. La DERIVADA de f es otra función que simbolizaremos por f ' y tal que su valor en cualquier punto x = x de su dominio está dado por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, Siempre que el límite exista".

LIBRO 2: ***"Definición de la Derivada de una función"***

"La derivada de f en x viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Supuesto que exista tal límite".

LIBRO 3: ***"Definición: Derivada de una función"***

Sea x un número del dominio de una función f, determinada por la ecuación y = f (x). La derivada de y respecto a x, representada por dy/dx se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Si el límite existe.

R/: Todas al final nos están diciendo lo mismo que es el concepto de derivada, normalmente yo utilizo en el aula la tercera que es la más formal. Tal vez yo utilizo esta porque en esta uno nota que hay más simbología, que es más rigurosa desde la matemática y esto acerca más al estudiante al concepto de derivada desde la formalidad matemática. Entonces aquí hace uno hincapié en la simbología que es importante en matemáticas. Las demás dicen lo mismo, pero me quedo con la 3 porque maneja más la parte simbólica de las matemáticas.

E: Qué opinas sobre sí el hecho de manejar tantos símbolos no puede traer a los estudiantes dificultades para acceder al concepto, o tú haces bien las aclaraciones
R/: Claro, de pronto es posible eso, pero debe ser que como yo particularmente cuando trabajo la parte de límite siempre trato de que el estudiante maneje y tenga claridad sobre el manejo de símbolos que $f(x) = y$, $\Delta y/\Delta x$ significa un cambio, $f'(x)$ es derivada... Porque es que cuando uno comienza a manejar la derivada yo planteo unos ejercicios donde se ejerciten en el uso de símbolos.

9. ¿Cuál piensas que es el significado del concepto derivada?
R/: Para mí el concepto de derivada nos expresa una variación entre una variable dependiente con respecto a una independiente cuando esa variación de la variable independiente tiende a cero, o sea cuando esa variación es muy pequeña.

10. ¿Cómo introduces en clase el concepto de derivada?
R/: A ver yo siempre he trabajado más la parte de ejercitación, de ejercicios del álgebra de derivada pero casi siempre cuando yo arranco con el concepto de derivada yo parto del incremento de una función, después hacemos la razón entre dos incrementos y por último hablar de que la variación de la variable independiente tiende a cero apoyándonos en el gráfico, y así defino la derivada en término de límite. Luego hago bastantes ejercicios trabajando este concepto la parte algorítmica y procedimental, luego se dan unos teoremas fundamentales del álgebra de la derivada para que sea más ágil el proceso y por último se empiezan a hacer las derivadas con las reglas de derivación de forma muy mecánica. Ah ojo casi siempre hago que trabajen los mismos ejercicios que trabajaron con la definición que los hagan con las reglas para que vean la diferencia entre un proceso y el otro... para que vean que se les agiliza más. Básicamente son ejercicios algorítmicos donde usen los dos procesos y tengo que aceptar que no coloco muchos ejercicios donde se trabajen construcción de gráfica y demás, porque creo que de momento lo importante es la destreza en la utilización de algoritmos... Lo otro se podrá introducir mejor después... porque es que no hay tiempo...

11. ¿Qué opinas del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de derivada que puedes comentarnos, ¿lo utilizas?
R/: Yo pienso que son fundamentales pero sinceramente no los trabajo en el aula y en el caso concreto de la derivada a veces habla un poco para hablar de la simbología, para justificar que una simbología era de Leibnitz, por ejemplo, o así... pero en término general no lo trabajo para que voy a mentirte.

12. *¿Qué opinión tienes acerca de la aparición o no-aparición de este concepto en los textos de matemática de cualquier nivel educativo? ¿Crees necesaria su enseñanza en el bachillerato? ¿Por qué?*

R/: Yo pienso que el concepto es fundamenta y debe aparecer, y más aún si el estudiante tiende a seguir una carrera universitaria, pero lo que sí noto es que casi siempre aparece al final y que se debe buscar el mecanismo para poder terminar toda esta temática por el factor tiempo... Y entonces me toca hacer o centrarme en un trabajo más en lo algorítmico y la parte aplicación es bastante floja... Pero si no contamos con tanta intensidad horaria no se puede hacer más.

13. *¿Qué ejemplos utilizas en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto derivada? ¿Por qué?*

R/: Bueno casi siempre me apoyo más en el movimiento uniforme y el variado, y comienzo a trabajar eso de velocidad y aceleración... ahora también desde años atrás he venido trabajando con la economía, porque el colegio es de especialidad contable, y entonces algo de costo marginal y etc., pero casi siempre me baso más en la parte de velocidad y aceleración para trabajar la parte gráfica del concepto.

Profesor D

I. DATOS DEL PROFESOR:

Titulación: Licenciatura en Matemática y Física
Fecha de graduación: 1994
Formación continuada:

- Cursos de formación continuada ofrecidos por el MEN (actualización pedagógica)

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. *¿Qué finalidades consideras que se persiguen con la enseñanza de las Matemáticas en la Educación secundaria?*

R/: entre las finalidades tenemos, capacitar al joven para solucionar problemas de la vida cotidiana, resolver problemas, sentar las base para solucionar problemas de orden científicos, desarrollar el pensamiento abstracto y el lógico formal y en general crear una base sólida para las matemáticas de orden superior.

2. *¿En qué contexto educativo sería mejor introducir el concepto de derivada? ¿Desde qué disciplina (asignatura) consideras que sería mejor introducirlo?*

R/: En el momento en el que el estudiante tiene un dominio de los prerrequisitos para la comprensión del cálculo... lo cual puede variar de un colegio a otro... yo creo que es desde las matemáticas desde donde se debe introducir el tema de derivada... porque las otras disciplinas como la física, química y comerciales pueden ayudar en la aplicación del concepto... pero insisto yo creo que debe ser desde la matemática de 11º... porque he de confesar que de matemática financiera lo trato poco es que no me gusta.

3. ***¿****Qué aspectos consideras que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?*

R/: Bueno la experiencia aporta muchos elementos sobre el trabajo con derivadas... y uno como docente debe tener unos prerrequisitos o más bien asegurarse que el alumno los tenga... que es el dominio a mi juicio de los conceptos de intervalo, desigualdades, inecuaciones, función y límite.

4. *¿Cómo se puede motivar a los estudiantes hacia el aprendizaje de este concepto?*

R/: Haciendo énfasis en la importancia que tiene ala aplicación de la derivada en la solución de problemas de otras ciencias como la física y otras, dentro de la misma matemática en la solución de problemas como por ejemplo, hallar la ecuación de la recta tangente a una curva, el desarrollo de gráficos, etc.

5. *¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de derivada? ¿Para qué sirve este concepto? ¿Y a tus estudiantes?*

R/: A ver hacer énfasis en que es un concepto fundamental en el campo de la matemática por las mismas aplicaciones que el hombre le ha encontrado en las distintas áreas del conocimiento y porque además ha contribuido a solucionar problemas dentro de la matemática y fuera de ella.

6. *¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de derivada? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto de derivada?*

R/: Pues el alumno debe estar familiarizado y dominar el álgebra básica, funciones polinómicas, trigonométricas... una cosa muy importante es el dominio de la geometría analítica, el estudio de la línea recta, la pendiente, y otros de mucha mayor importancia como lo es el límite de una función.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

8. *A continuación te presentamos dos definiciones del concepto derivada, extraídas de los libros de texto más utilizados del grado 11 en Barranquilla, para que las valores y comentes si las consideras adecuadas para enseñar a los estudiantes de este nivel:*

LIBRO 1: ***"Definición de Derivada"***

"Sea f una función real. La DERIVADA de f es otra función que simbolizaremos por f ' y tal que su valor en cualquier punto x = x de su dominio está dado por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, Siempre que el límite exista".

LIBRO 2: ***"Definición de la Derivada de una función"***

"La derivada de f en x viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Supuesto que exista tal límite".

LIBRO 3: ***"Definición: Derivada de una función"***

Sea x un número del dominio de una función f, determinada por la ecuación y = f (x). La derivada de y respecto a x, representada por dy/dx se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Si el límite existe.

R/: Bueno yo trabajo la primera porque creo que es más fácil de comprender para los estudiantes, estos símbolos como Δx, dy, etc., trato de evitarlos incluso porque me cuesta buscar la mejor forma de enseñarlos y por eso prefiero la del h, que es un número que varía y nos complica menos la vida a todos... Y no se pierde por ello la rigurosidad.

9. ¿Cuál piensas que es el significado del concepto derivada?
R/: Es el límite del incremento relativo de una función cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero

10. ¿Cómo introduces en clase el concepto de derivada?
R/: bueno... primero se debe trabajar sobre el incremento de una función, que el alumno tenga muy claro esta definición... pero haciendo énfasis en el lenguaje gráfico... Después pasar al incremento relativo de una función, también haciendo hincapié en que se trabaje mucho en la interpretación gráfica... después a partir de un ejemplo sencillo de una función... por ejemplo de una parábola $y = x^2$ se estudia el comportamiento del límite de un incremento relativo cuando Δx tiende a cero en un punto de dominio... puede ser x = 1 o x = 2... Pero apoyándome en la gráfica.... ah y lo relaciono enseguida con el concepto de velocidad media y velocidad instantánea de la física. Y después ya se pasa a las reglas de derivación... y a los problemas... Porque es mucho más rápido que con el límite.

11. ¿Qué opinas del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de derivada que puedes comentarnos, ¿lo utilizas?
R/: El aspecto histórico forma parte de la motivación para el estudio de este concepto... Yo creo que es importante que los estudiantes ubiquen el momento, las circunstancias y los problemas que dieron origen al concepto matemático. Ya en el caso concreto de la derivada es interesante... explicar como la derivada nace al darle solución a un problema de la física... como era el estudio del movimiento producido por diversas variables y además todo el problema del estudio del cálculo de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de una curva... y ni que decir de las diferentes maneras en que abordaron el problema Newton y Leibnitz y de la solución paralela que cada uno de ellos encontró al problema.

Ahora si lo aplico en clases... sí porque la experiencia me ha demostrado que el alumno muestra mayor interés cuando se les hace un en foque histórico en la enseñanza de la matemática.

12. ¿Qué opinión tienes acerca de la aparición o no-aparición de este concepto en los textos de matemática de cualquier nivel educativo? ¿Crees necesaria su enseñanza en el bachillerato? ¿Por qué?

R/: Es un concepto a mi parecer primordial en la matemática por la relación que tiene con otras ciencias y su aparición facilita la solución de muchos problemas tecnológicos... Además considero que si es necesario la enseñanza a nivel de secundaria porque los alumnos se apropian de este concepto a este nivel y encuentran su importancia y aplicabilidad en otras áreas del conocimiento.

13. ¿Qué ejemplos utilizas en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto derivada? ¿Por qué?

R/: A ver utilizo ejemplos donde... de funciones donde el alumno esté más familiarizado... ejemplos de fenómenos físicos, por decir el cálculo de la velocidad en un instante en un movimiento variado.

Profesor E

I. DATOS DEL PROFESOR:

Titulación: Licenciatura en Matemática y Física
Fecha de graduación: 1976
Experiencia docente: 24 años
Formación continuada:

- Profesor de física, física mecánica (facultad de Ingeniería y Educación), Estadística, álgebra lineal y ecuaciones diferenciales
- Cursos de formación continuada ofrecidos por el MEN (actualización pedagógica)
- Master en Educación

FASE DE INICIACIÓN PREVIA A INTRODUCIR EL CONCEPTO:

1. ¿Qué finalidades consideras que se persiguen con la enseñanza de las matemáticas en la Educación secundaria?

R/: La enseñanza de las matemáticas en la educación secundaria es una cuestión de vital importancia, puesto que las matemáticas están en todos los espacios, en todos los lugares, y al estudiante eso es lo que se le debe mostrar, cómo las matemáticas se involucran en todos los procesos de la vida cotidiana, en el mercado, en la economía, en la administración, en la ingeniería, en los procesos biológicos, y aún en la literatura, la métrica. La matemática cómo decía Galileo Galilei: el universo es un libro abierto escrito en lenguaje matemático. La finalidad última de la enseñanza de las matemáticas, yo pienso que es desarrollar el pensamiento lógico y el pensamiento abstracto en los estudiantes.

2. ¿Consideras que es importante la Matemática en el currículo de la Secundaria?

R/: Claro que sí, considero que es importante, porque ya te lo dije anteriormente. Aunque considero más importante el aspecto de la lecto-escritura, yo pienso que no solamente leyendo y escribiendo se pueden lograr muchas cosas en los avances científicos, sino también desarrollando ese pensamiento crítico que solamente la matemática puede proyectar desde el punto de vista del conocimiento de lo abstracto.

3. ¿En qué contexto educativo sería mejor introducir el concepto de derivada? ¿Desde qué disciplina (asignatura) consideras que sería mejor introducirlo?

R/: Yo creo que... yo siempre he vivido convencido de que el cálculo debe bajar, en mi concepto el cálculo debe enseñarse antes de la física porque conociendo el cálculo podemos interpretar muchos conceptos físicos. En mi concepto, yo pienso que desde un noveno grado ya debe incrementarse en los estudiantes el estudio del cálculo diferencial, por lo menos, que facilitaría mucho el entrar a los conceptos físicos. Sobre todo, sabiendo lo que es el concepto de velocidad, el concepto de aceleración, que no son más que aplicaciones del concepto de derivación. Yo creo entonces que se tendría que introducir desde el cálculo diferencial, pero bajándole un nivel más y adaptándolo al medio y al contexto en el que se encuentra. Es decir, abordar la enseñanza un curso antes del que se hace, pero teniendo en cuenta el nivel de matemáticas que posee ese estudiante, porque no es lo mismo enseñarle a un niño el cálculo diferencial en grado 11, que enseñarlo en grado noveno, pero creo que sí sería positivo que cuando él en grado noveno se hubiera metido, sumergido en el campo de las funciones introducir el cálculo diferencial, de una manera más intuitiva, sin muchas cosas sofisticadas de las matemáticas, ir metiendo al alumno poco a poco en el estudio de las funciones, la tasa de cambio, razón de cambio promedio, aplicaciones, etc., y entonces la física se le hace más fácil.

4. *¿Qué aspectos consideras que sería conveniente que el profesor/a tuviera presente a la hora de iniciar la introducción del concepto en el aula?*

R/: Bueno yo considero que el profesor debe tener presente que el estudiante tenga unos conocimientos claros de unos prerrequisitos previos, por ejemplo, que el alumno domine las operaciones matemáticas algebraicas, que tenga un dominio del concepto de función y como también el estudiante pueda hablar del valor numérico de una expresión, de un polinomio, porque eso prima, porque muchas veces los estudiantes esas operaciones elementales no las dominan y es lo que les dificulta un poco el tratamiento del tema. Pero yo creo que si el profesor se preocupa por que estos conceptos básicos desde el punto de vista conceptual y procedimental el alumno los domine, utilizando también un orden porque no podemos olvidar los procesos volitivos, un orden dentro de la cronología del estudio, el estudiante puede lograr muchos avances.

E: Es decir me hablas de operaciones algebraicas y del concepto de función, ¿a parte de estos dos conceptos necesitas algo más para que el estudiante pueda comprender el concepto de función?

R/: Bueno, claro, indudablemente que hay un concepto primario como lo es el de la factorización, un estudiante debe factorizar y saber qué es la factorización, no desde el punto de vista de tener algo ahí como mecánico, sino algo significativo, qué es factorar, desde el punto de vista significativo, el teorema del factor, el teorema del residuo, la división sintética, integran muchos estos procesos y hacen que los alumnos desarrollen más los concepto abstractos.

Ahora también el concepto de límite también juega un papel importante, saber por ejemplo, que es un intervalo, en una función cómo está definida en su rango y en su dominio dentro de una gráfica, es interesantísimo también que el estudiante sepa graficar una función y la teoría de conjuntos que no podría faltar, porque claro imagínate tú que vas a hablar de función sin la teoría de conjuntos. Hay unos conceptos que yo diría que están arriba de este. Es decir que jerárquicamente hablando, yo diría que los prerrequisitos son primordiales.

5. *¿Cuál es la justificación que se puede dar a los estudiantes para tener que introducir el concepto de derivada? ¿Para qué sirve este concepto? ¿Y a tus estudiantes?*

R/: Para mí el concepto de derivada yo creo que es uno de los conceptos más preciosos que tiene la matemática, y lo vemos en la economía, en la administración, en la contabilidad, en los procesos de tasa de cambio, cuando hablamos de una velocidad, de una aceleración, de todas estas cosas, de crecimiento y decrecimiento de población, de la demografía. En todas estas cuestiones, en todo en todo lo rutinario del querer hacer y ser matemática. Y a mis estudiantes les sirve para involucrarse en esos fenómenos y para estar preparado en una prueba de estado que les toca hacer donde el gobierno siempre introducen algunas cosa de esto. Y además para que cuando lleguen a la universidad no pasar las dificultades que afrontan quienes no han visto estos conceptos.

6. *¿Con qué conceptos previos debe estar familiarizado el alumnado antes de introducir el concepto de derivada? ¿Qué modelos matemáticos debe manejar los estudiantes para acceder al concepto de derivada?*

R/: Bueno si te refieres a modelos constructivitas.

(Bueno yo me refiero a al proceso de modelizar en matemáticas, al proceso de entender los aspectos de interpretar situaciones problemas o fenómenos con el aparato formal de las matemáticas)

Bueno yo estoy de acuerdo que el alumno trabaje con gráfica, si con la interpretación de gráficas que le ayuden a interpretar mejor el concepto matemático, igualmente que se formule problemas y se enfrente a la resolución de problemas porque esto ayuda a la construcción del conocimiento, teniendo como base los ejemplos anteriores que te mencioné.

FASE DE INSTITUCIONALIZACIÓN DEL CONCEPTO:

8. *A continuación te presentamos dos definiciones del concepto derivada, extraídas de los libros de texto más utilizados del grado 11 en Barranquilla, para que las valores y comentes si las consideras adecuadas para enseñar a los estudiantes de este nivel:*

LIBRO 1: ***"Definición de Derivada"***

"Sea f una función real. La DERIVADA de f es otra función que simbolizaremos por f ' y tal que su valor en cualquier punto x = x de su dominio está dado por la expresión:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, Siempre que el límite exista".

LIBRO 2: ***"Definición de la Derivada de una función"***

"La derivada de f en x viene dada por:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Supuesto que exista tal límite".

LIBRO 3: ***"Definición: Derivada de una función"***

Sea x un número del dominio de una función f, determinada por la ecuación y = f (x). La derivada de y respecto a x, representada por dy/dx se define como:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$, Si el límite existe.

R/: Con relación a estas definiciones que encuentro aquí, yo siempre he sido una persona muy ecléctica, yo pienso que no hay libro malo hay estudiante perverso. Yo pienso que cada libro tiene algo de positivo y por eso me gusta acoger las definiciones como ellos las traen. Yo creo que el concepto de derivada aquí es claro, es preciso, porque nos muestra una función incrementada, una función original y nos muestra la tendencia del incremento de la variable dependiente y que esto de manera intuitiva el estudiante lo trae, porque cuando le enseñamos la parte de límite que es la básica que es la más fregada de ellas, ya esto lo hemos metido en los estudiantes, entonces ya tiene un concepto previo de la derivada que es importantísimo. Me parece más difícil el concepto de límite cuando hablamos de épsilon y delta y esta cuestión, que los estudiantes confunden mucho. Y por eso yo inicio el estudio de la derivada de una manera intuitiva, más bien conceptualizando porque siempre he vivido pensando que definir es muy difícil, definir encasilla mucho y las definiciones no siempre son dadas a entenderse muy claramente. Creo que las tres definiciones enmarcan un concepto claro de lo que es la derivada, lo dicen en diferentes palabras pero es lo mismo, me parece que hay es un cambio de nomenclatura nada más en algunos aspectos.

E: ¿Pero cuál utilizas tú en el aula?

R/: Yo utilizo el concepto este, me gusta utilizar el que tiene el Δx, la tercera, pero claro algunas veces he utilizado el h también, porque claro yo trabajo por procesos y si el estudiante investiga una definición en un libro de texto que la definen con h, yo tengo que adaptarme al estudiante y si otro con Δx, entonces yo me adapto al estudiante y trataré de abarcarlo todo, es decir me es independiente el Δx que el h, lo que trato es de centrarme en lo que el alumno quiere, en lo que el alumno entiende de acuerdo como el a encontrado el proceso en sí.

E: Hace un rato hablabas de una definición intuitiva, cuando hablas de esto, ¿a qué te refieres?

R/: Bueno yo siempre he dicho que la intuición es un tipo de razonamiento, porque yo creo que en el fondo para poder intuir hay que conocer. Entonces, cuando hablo de la definición de un concepto intuitivamente me estoy refiriendo a que uno le muestra al estudiante como son las cosas no con el fin de definir sino con el fin de que él entienda lo que uno quiere decir.

E: A ver me podrías aclarar porque no me queda claro cuando dices que conceptualizas intuitivamente

R/: Lo que digo es como una idea intuitiva... como...

E: Podrías concretarme para el caso de la derivada ¿qué sería conceptuar intuitivamente?

R/: Lo conceptualizo a partir de una función incrementada a la cual le resto la función original, entonces allí hallo un Δy, o sea el diferencial de la variable dependiente. Luego divido entre el diferencial de la variable independiente y ya obtengo un cociente incremental de la función, y de ese cociente incremental hallo el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, a eso es lo que llamo yo la derivada de función y'.

9. ¿Cuál piensas que es el significado del concepto derivada?

R/: Bueno el significado del concepto de derivada no es más que una razón de cambio. Eso simplemente, aplicado en otras áreas del saber, como en la Economía para hallar el costo marginal, utilidad... Y en el campo de la matemática geométrica para calcular área volumen, área... Además para calcular cambios de movimientos en la física como es la velocidad, la aceleración. Sí una razón de cambio promedio en pocas palabras.

10. ¿Cómo introduces en clase el concepto de derivada?

R/: Sí parto del concepto intuitivo o de la idea intuitiva de límite, yo defino el incremento de una función, y el cociente diferencial y luego aplico el límite cuando el Δx tiende a cero y después hacemos ejercicios, sí bastantes, para que quede claro. Después que introduzco el concepto de derivada trato que los estudiantes lo interprete geométricamente, y esta interpretación geométrica basado en el concepto de lo que es una recta secante que poco a poco va tendiendo a un punto hasta que coincide o se confunde con una tangente, y allí el estudiante tiene la tendencia de lo que es llegar a un punto sin tocar ese punto. Inclusive me gusta mucho utilizar la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga, porque es una muestra bien chévere de lo que es el concepto de límite y de derivada y para explicar las funciones asintóticas es genial. La uso mucho... porque meter al estudiante a comprender estos conceptos no es fácil, entonces utilizo este ejemplo solucionándolo gráficamente para poder obtener buenos resultados en la aplicación de este concepto. Después de la interpretación geométrica, doy unas técnicas de derivación utilizando los teoremas de derivación: derivada del producto, del cociente, de una función polinómica, de una exponencial, etc., esto lo voy dando con ejercicios de aplicación de tal manera que ellos puedan utilizar esto a manera de obtener más rápido la derivada de una función cualquiera. Es decir, utilizar las técnicas como palancas para que hagan menos esfuerzos para realizar sus ejercicios.

11. ¿Qué opinas del uso de los aspectos históricos y evolutivos en la enseñanza de los conceptos matemáticos? Para el caso concreto del concepto de derivada que puedes comentarnos, ¿lo utilizas?

R/: Yo soy un enamorado de la biografía de la matemática... porque yo siempre he vivido convencido de que un buen profesional en el campo donde se mueva debe de saber biografía de su materia, biografía de su asignatura, porque así lo que hace es hacer la matemática más humana y la matemática necesita eso, porque genéricamente los estudiantes han perdido el amor hacia ella porque no se a humanizado la matemática. Narrarles a los estudiantes antes de una clase un pasaje biográfico de la matemática de algún matemático ilustre que ha hecho cosas extraordinarias eso les fascina a los estudiantes. Y esto nos lleva a meternos en conceptos como la matemática recreativa. A mí me gusta que los estudiantes piensen sobre los problemas de los matemáticos, porque aparentemente a los estudiantes no les importa quién inventó la teoría de conjuntos, pero saber en la forma como George Cantor se metió en la teoría de conjuntos, esto les enriquece a ellos. Saber como Euler se metieron en el cuento de las representaciones de los diagramas eso es interesante, o ver como Leibnitz y Newton se introdujeron en el concepto de la derivada eso es muy bonito.

E: Concretando un poco para el caso de la enseñanza de la derivada, ¿utilizas o no aspectos históricos, y cuáles?

R/: Sí los utilizo, porque por ejemplo yo tengo unos textos en donde se narra muchos apartes acerca de la historia de cómo por ejemplo los señores Galileo y Barrow dependían mucho de la intuición y la especulación, y de los ejemplos prácticos para calcular razones de cambios, ya que carecían de un método general y de una definición clara de este concepto. Sin embargo, con el descubrimiento de Newton y Leibnitz, el método del cálculo se convirtió en una apreciable herramienta. Entonces en ese aspecto se lo digo a mis estudiantes, cómo estos hombres contribuyeron a ver más claramente los conceptos matemáticos que parecen difíciles o que parecen muy abstractos. Por tanto, llevo las historias de Newton y Leibnitz a la clase y los narramos... O a veces los pongo a investigar y aprendemos entre todos. Lo importante, es meterlo en la cultura de eso. Como ya te dije nosotros trabajos por proceso y les damos unas preguntas para que ellos investiguen, y entonces entre estas meto una de lo que llamo biografía de la matemática

12. *¿Qué opinión tienes acerca de la aparición o no-aparición de este concepto en los textos de matemática de cualquier nivel educativo? ¿Crees necesaria su enseñanza en el bachillerato? ¿Por qué?*

R/: Bueno yo considero que el libro de matemática de cualquier nivel educativo que no tenga este concepto está desfasado, porque es uno de los conceptos más claros, uno de los conceptos más necesarios en la aplicación del mundo moderno, de la informática y de todo... la matemática prima y entre los aspectos que más priman de ella son los conceptos del cálculo diferencial.

13. *¿Qué ejemplos utilizas en clase para que los alumnos comprendan el significado del concepto derivada? ¿Por qué?*

R/: Bueno yo creo que a través del trabajo que has venido haciendo conmigo te he dicho cuáles son los ejemplos que utilizo, por ejemplo el concepto de utilidad, el concepto de tasa de cambio, el concepto de pendiente. Sí porque el mismo concepto de pendiente cuando estoy enseñando las partes de la recta en 10º, la pendiente de una recta que prima para la cuestión de derivada cuando te hablaba de la secante y la tangente a una función, estaba tácito decirte cuando te hablaba de razón de cambio ya te estaba hablando de pendiente, la pendiente es una razón de cambio. El concepto de velocidad, el de aceleración, el de potencia, el de trabajo en física, el de la variación de los volúmenes cuando se le dice en los ejercicios del área de una esfera varía en función del tiempo, cuál será la variación si el radio disminuye a una razón de tanto... Y así... cosas así por el estilo lo llevan a ellos... los meten en la idea, en el concepto central de derivada, para poder uno avanzar en los procesos tiene uno que hacer esto... sino no avanza en los procesos.

ANEXO 3

TRASCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA 2: EVALUACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA (ELEMENTOS SOBRE LA EVALUACIÓN QUE DISEÑAN Y REALIZAN LOS PROFESORES DEL CONCEPTO DE DERIVADA)

PROFESOR A

1. *¿En qué situaciones particulares utilizas más frecuentemente el concepto de derivada o el cálculo de la función derivada de funciones (cálculo de velocidades, razones de cambio, problemas de la recta tangente, etc.)?*

R/: Bueno, situaciones problemáticas. Si de mi parte pienso que en los problemas de… de variables relacionadas o de razón de cambio y en los problemas de optimización de máximos y mínimos… **Ahora los estudiantes no son muy dados a estos eh…** Les cuesta un poco de trabajo porque encontrar la fórmula de la ecuación para ellos es difícil**... Pero yo les coloco problemas y trabajamos sobre ellos.** Sin embargo, donde yo veo que a los estudiantes les gusta más o les cuesta menos trabajo o se desenvuelven mejor es en el caso del análisis de una curva… Ò sea en el crecimiento, decrecimiento, donde hay máximos, donde hay mínimos. A pesar de que les cuesta trabajo ya elaborar o dibujar una curva… En donde yo veo facilidades es que cuando la curva ya está dada y entonces lo que tienen que analizar es cuál es el comportamiento de ella. **O sea,** a mí lo que me gusta es manejar el criterio de los distintos sistemas de representación tabla, mapa, situaciones físicas reales concretas, igual también que la parte algorítmica **eh… Hay veces que hay que hacerlo así... la mayoría de las veces lo hago centrándome más en la parte algorítmica… Un poco en contra de lo que uno… eh… que te digo yo… eh… quisiera, porque al menos en el caso personal, ellos tienen que presentar un examen estándar internacional y entonces, hay que entrenarlos… Afortunada o desafortunadamente pero hay que meterles algunas cosas…** Pero de todas maneras este examen también trabaja con muchos sistemas de representación, ò sea ya curvas dadas y tienen que analizarlas… Pienso que de parte mía me parece que es en los problemas de optimización, de razón de cambio, problemas de aplicaciones físicas, por ejemplo de altura máxima, de aceleración, de velocidad… y de parte del estudiante yo veo que hay mejor facilidad y mayor gusto que en el análisis de gráficas: crecimiento, decrecimiento… *y con la gráfica para elaborar... porque ya dada es más difícil aún... muy difícil...*

(E: Pero dada la gráfica)… ¡No! que la tengan que elaborar**… Cuando la tienen que elaborar y el otro es otro… caso porque estamos trabajando es ya en el manejo de la calculadora gráfica… Es** decir cuando utilizo los medios informáticos como herramienta**… Allí si que les es más fácil… partir de la gráfica... Esto tanto se ve en el libro de texto…**

2. *¿Qué aspectos del concepto derivada crees que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?*

R/: Yo pienso que el significado de lo que es la derivada, fundamentalmente la interpretación geométrica de la derivada**…** Es algo fundamental… y también la velocidad**... Me parece igualmente que problemas de aplicabilidad a lo que es la vida corriente,** en donde hay una situación real en la cual el estudiante tenga que determinar que allí hay un crecimiento, decrecimiento, aplicando los conceptos de recta tangente o de pendiente**… Me parece que los problemas de optimización son también muy ricos para el concepto de derivada… Pero sí el significado… la riqueza en cuanto a ver que** eso es una razón entre variables se puede ver en otras ciencias, como la física, la economía... pero también en la propia matemática. Luego ya pues… eso fundamentalmente como elementos centrales… como algo significativo… Y muchas situaciones problemas que le demuestren a uno que el concepto de derivada está aprendido que te digo yo… Encontrar la ecuación de la recta tangente a una curva con unas condiciones dadas… **Aunque eso no quiere decir que la parte algorítmica del cálculo de derivada y eso se deje de lado, pero, a mí me parece, que eso es más de forma que de fondo en relación con el concepto…** Porque al fin y al cabo las fórmulas las tienen allí y las pueden utilizar cuando quieran… Porque al fin y al cabo las fórmulas las tienen allí... se las doy yo en el examen... y las pueden utilizar cuando quieran**… para problemas que tengan que utilizar el álgebra de la derivada, entonces yo se las escribo en la hoja de evaluación, porque hay veces… Entonces a mí me parece que es una cosa si interesante que la memoricen y eso… pero no como tan fuerte y tan importante como el hecho de que ellos conozcan el manejo de éstas…** Es decir que me importa más el uso que hacen de ellas en la resolución de problemas.**”**

3. *¿Cómo sabes que tus alumnos han aprendido el concepto de derivada?*

R/: Yo pienso que en la medida en que ellos desarrollen las competencias de interpretación de una gráfica, el análisis… que puedan analizar las funciones… determinar intervalos de crecimiento, decrecimiento, etc… Resolver problemas o sea mediante la argumentación… que demuestren pues su competencia propositiva, pues en el sentido de pensar en qué pasará si se altera esta condición o que pasará si aquí se da esto o si la curva casa… *(Te refieres al pensamiento conjetural)*… Sí, a eso me estoy refiriendo… En ese sentido cuando ellos puedan demostrar a través de la resolución de problemas la aplicación de estas competencias… Entonces me parece que puedo decir que este estudiante ha aprendido el concepto.

4. *Podríamos hablar de este examen que tú realizaste...*

R/: *A ver coméntame, tu divides el examen en dos partes… una parte que le llamas preguntas y otra parte que le llamas problemas y me llama la atención que esto (Un listado de fórmulas de derivación) que muchos profesores lo colocan como objetivo central de sus evaluaciones, tu lo planteas o lo presentas en las evaluaciones como marco conceptual para que los estudiantes lo utilicen en el desarrollo de las situaciones problemas que planteas… A ver me gustaría que nos comentaras que persigues con cada una de estas partes por qué les proporcionas las fórmulas de las derivadas a tus alumnos…*

Bueno inicialmente el objetivo lo coloco para que ellos sepan el propósito de la evaluación para que ellos sepan qué es lo que se pretende buscar con la evaluación. Como es inevitable que para definiciones, **para problemas tengan que utilizar el álgebra de la derivada, entonces yo se las escribo en la hoja de evaluación, porque hay veces… la experiencia me ha indicado que… por no conocer una fórmula… ya sea por olvido o por los nervios en el examen… los estudiantes no resuelven y no razonan un problema… Entonces a mí me parece que es una cosa si interesante que la memoricen y eso… pero no como tan fuerte y tan importante como el hecho de que ellos conozcan el manejo de éstas…** Es decir que <u>me importa más el uso que hacen de ellas en la resolución de problemas.</u> Entonces, (**...) la primera parte es más bien teórica, de fundamento… Es decir que expliquen con sus palabras que es la derivada para ellos…** para uno ver si todavía están en un nivel de preconcepción o después de haber pasado ya por un entrenamiento, si se puede llamar así, de haber interactuado con alumnos, ya ese nivel de razonamiento o de preconcepciones está un poco más refinado**. De pronto, sigue preconceptualmente, pero uno espera que lo hayan refinado, que elaboren mejor unas proposiciones…Igualmente como notarás** acá hay mucha cosa teórica de interpretación de la recta tangente**… eh… la parte esta también tiene que ver con lo que te decía ahorita,** cuando se le pregunta qué conclusiones puedes describir de esto… Lo que se busca es que desarrollen el pensamiento proposicional… pero primero han de calcular. **Y luego que viene** es una combinación entre la parte algorítmica con la parte aplicada**, con la parte de dada una curva como** pueden combinar esa parte teórica y práctica para los máximos, los mínimos**… Sin embargo, donde yo veo que** a los estudiantes les gusta más o les cuesta menos trabajo o se desenvuelven mejor es en el caso del análisis de una curva**… Ò sea en el crecimiento, decrecimiento, donde hay máximos, donde hay mínimos. A pesar de que les cuesta trabajo ya elaborar o dibujar una curva…** En donde yo veo facilidades es que cuando la curva ya está dada y entonces lo que tienen que analizar es cuál es el comportamiento de ella. **Y la otra parte fuerte de la derivada es la cuestión de los problemas que son situaciones físicas o geométricas en donde le permite a uno ver la integración de esas cosas**. Es una amalgama pues, de la teoría y práctica, como la unidad lo dice… la derivada y sus aplicaciones. Ah y el 4 que tiene que ver con la economía... tú sabes para ver la aplicación en otras ciencias.... Sin embargo, tendría que decirte que esto es una evaluación de la unidad completa, pero previamente he ido haciendo evaluaciones cortas durante el desarrollo de la unidad, pero manteniendo la misma clase de situaciones problemas y manteniendo las mismas dos partes teóricas y prácticas, además de los módulos y talleres en grupo evaluativos.

PROFESOR B

1. *¿En qué situaciones particulares utilizas más frecuentemente el concepto de derivada o el cálculo de la función derivada de funciones (cálculo de velocidades, razones de cambio, problemas de la recta tangente, etc.)?*

R/: La que más uso es la de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva, la trabajamos esencialmente con el cálculo de velocidad instantánea, o sea velocidad. Porque manejo la idea de que el estudiante cuando ve una situación problema concreta va a comprender más fácilmente la situación y aterriza en la aplicación del concepto de derivada.

2. *¿Qué aspectos del concepto derivada crees que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?*

R/: Los aspectos de la derivada... Digo yo que el manejo de la razón de cambio... y luego ver la variabilidad de las variables x y y, para ver la tendencia de una cero y como tiende la otra o ver a qué tiende la otra.

3. *¿Cómo sabes que tus alumnos han aprendido el concepto de derivada?*

R/: Cuando ellos entran a resolver situaciones donde aplican este concepto... El caso del cálculo que ya nombramos de la velocidad instantánea o de la pendiente de la recta tangente a una curva. Llamo curva a la gráfica de una función. Es decir que sea capaz de resolver situaciones problemas dados diferentes enunciados y diferentes contextos... Me refiero como dije anteriormente a la velocidad en física o la pendiente de la recta tangente en geometría u optimización en otras ciencias... Ya sea que se le de una tabla o una gráfica o un problema, etc.

4. *Podríamos hablar de este examen que tú realizaste. Cuéntanos qué persigues con cada problema. Cuál es la forma como enfocas la evaluación.*

R/: Yo con esta evaluación me planteo el objetivo de aplicar el concepto de derivada y sus propiedades en la solución de problemas. Porque como te decía que cuando el estudiante entra a enfrentar una situación... que es accesible a él... él puede entrar a comprender mejor esa situación y entrar a aplicar mejor el concepto de derivada.

En la primera situación, que es un problema de estos normales que aparecen en los libros lo que quiero es que vean la aplicación del concepto en la Geometría, tal y como en realidad comenzó en la historia. Y más que todo se centra en calcular la derivada en un punto.

Con la segunda, ya esta es más complicadita, y ya el alumno para hacerla tiene que comprender el tema bien, o sea es ver los criterios de 1ª y 2ª derivada implícitos en el gráfico. Es aprender a analizar la función a partir de su gráfico. Cosa que hemos trabajado en clase, pero que tiene cierta dificultad para ello. Pero es que lo pongo porque para mi es importante que el alumno pueda trabajar con el concepto en varios contextos y el gráfico creo que es uno de los más complejos, porque ellos está familiarizados es a pasar de la fórmula a la tabla y después graficar.

El tercero va en la misma dirección del anterior, pero aterrizado al campo de la física, porque es que a veces en física grafican cosas y no saben que hay conceptos matemáticos que los estructuran y a mi me interesa que vean la aplicación a otros campos científicos... Ah y ojo también con la base histórica del problema, que yo les he insistido en eso, por eso lo pongo.

En cuanto al cuarto, es lo mismo que te dije con el anterior, solo que aquí se trabaja el proceso algebraico, pero me interesa tanto la función derivada como la derivada en un punto.

En el quinto, tenemos un problema que tiene que ver con máximo y mínimo, tiene que ver con el mínimo de material que se requiere para que tenga un volumen de $16\pi m^3$. Este es más o menos típico también, pero claro está el cuento de saber encontrar la expresión que represente la función, allí está la dificultad, porque el resto es saber derivar con las reglas que ya se deben conocer de memoria.

En la sexta situación, le hablamos de un balón esférico y estamos allí planteándole la variación del volumen en un intervalo de tiempo... la variación media y luego cuál es la variación instantánea en un tiempo. Cuando estamos hablando de la variación instantáneas del volumen en un tiempo fijo estamos allí exigiéndole la aplicación del concepto de derivada.

E: nos podías explicar que esperas que el estudiante realice al colocarle este ejercicio... Este parte de una situación problema donde se le proporciona la ecuación del radio en función del tiempo

R/: Bueno primero se le pide que elabore una tabla de datos del volumen en función esférico. Pero aquí el estudiante debe saber la fórmula del volumen de una esfera y la tabla tendría tres filas una con radio, otra con tiempo y otra con volumen. Y luego que haga la gráfica si cree que la necesita. Otra cosa importante de esta situación es que en el ítem d) se le pide que busque la velocidad instantánea en cualquier tiempo, para tratar de buscar la generalización... Es decir que vea la función derivada. O sea, que en un tiempo halla la derivada en un punto, pero que hay una función derivada que para cada tiempo le permite hallar la velocidad instantánea en cada punto del dominio.

Bueno esto yo le llamo taller evaluativo, no lo veo como un examen tradicional que persigue medir el grado de conocimiento del alumno. Aquí lo que quiero mirar es el grado de comprensión del concepto, lo cual implica dominio conceptual y procedimental, por tanto, el estudiante tiene la posibilidad de buscar sus apuntes, usar libros... en general consultar porque les pongo situaciones de interpretación más de aplicación de formulas... y en un tiempo de 2 horas clases. Además, yo ya te he dicho en la otra entrevista que para mí la evaluación es formativa y continua, es decir que tengo en cuenta todo el proceso del alumno, su participación, el trabajo en pequeños grupos y sus trabajos individuales... por eso nunca le llamo examen... sino taller evaluativo...Yo acostumbro a colocarles en cada evaluación o taller evaluativo una frase o pensamiento que contribuya a su formación integral en este les coloque: trabaja con autonomía y responsabilidad

---

PROFESOR C

1. *¿En qué situaciones particulares utilizas más frecuentemente el concepto de derivada o el cálculo de la función derivada de funciones (cálculo de velocidades, razones de cambio, problemas de la recta tangente, etc.)?*

R/: Este, yo creo que en la charla anterior estuvimos comentando que normalmente yo lo relaciono más con la física, específicamente más con el movimiento uniforme, uniformemente acelerado, casi siempre… Pero cuando voy a hacer la evaluación, casi siempre tiendo a hacer la parte de ejercicio solamente… Por lo que se ve esa clase de ejercicios es la que hemos manejado más directamente. *(A ver cuando me hablas de ejercicios te refieres a ejercicios tipos donde buscas que los estudiantes apliquen los algoritmos de la derivación y las reglas de derivación.* Sí me refiero a la parte algorítmica, que apunta a resolver estos ejercicios, calcular la derivada de una función dada, pero casi siempre cuando uno hace la explicación… casi siempre… casi siempre trabajo con física… la parte de la economía… Claro que acaso allí en la evaluación que te di hay uno nada más… pero son muy pocos los ejercicios que uno maneja en las evaluaciones entorno de eso… a la aplicación…

E: A ver según yo observo en tu evaluación del concepto de derivada, generalmente los ejercicios parten de una ecuación que te describa el movimiento de un cuerpo, que represente a una curva… o sea partes siempre de una ecuación para que el alumno te aplique las reglas de derivación en la solución del mismo, desde una perspectiva algorítmica

R/: Sí la verdad es que es así, tú lo puedes ver bien en la evaluación y los talleres que te entregue, sin embargo te digo que en la clase y allí lo ves en algunos talleres, aunque sea poco, yo les evalúo la aplicación del concepto en la física, en la geometría… Porque es un tema que uno da siempre es el de variación y uno habla de tangente y de recta normal y de esas cosas… Pero casi siempre la parte algorítmica como tú lo planteas… Pero te repito en la parte de la charla en la introducción al tema para motivar a los estudiantes casi siempre lo hago desde la física… Y entonces les hablo del movimiento uniforme, de la aceleración, de la velocidad… de los cambios que se producen, pero más que todo en la parte esa de la charla, pero ya propiamente en el examen busco aplicar y preguntar sobre la parte algorítmica… reconozco ahora eso…

2. *¿Qué aspectos del concepto derivada crees que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?*

R/: Bueno yo creo que siempre que uno habla de derivada eh… no sé por qué pero casi siempre uno maneja el concepto de los puntos críticos, puntos de inflexión, el signo de la derivada… de que si es mayor que cero o menor que cero, igual a cero… Casi uno siempre se maneja eso… siempre uno debe llevarlos en función de esos dos puntos que son bastantes fundamentales… más que todo porque después los vamos a manejar casi siempre en la parte de aplicación. *(A ver cuando me hablas de aplicación te refieres al análisis de la monotonía de una función e interpretación de gráficas.* No… no más que todo a ejercicios de maximización, optimización, de razones de cambio… en la fase de aplicación…

E: Me has hablado de los elementos conceptuales que consideras importante evaluar, pero no me has hablado el sistema de representación que utilizas para evocar esas respuestas en los estudiantes, es decir a través de que enunciados, de que forma preguntas a los estudiantes sobre estos elementos

R/: Bueno normalmente… uno… eh… lo coloca casi como una condición como una regla de juego, de que si la derivada es mayor que cero entonces la recta tangente es así… y la función es creciente… Entonces, entorno a eso uno comienza a hacer ejercicios… ejercicios pero más que todo puro ejercicios donde tienes que aplicar ese concepto… quizás no lo hago en la parte de gráfica… pero uno plantea… ejercicios donde se apliquen las formulas y generalmente partiendo de una ecuación…

E: Me imagino que esta dinámica también reina en la clase no, donde lo que se proponen y se desarrollan son ejercicios tipos donde se privilegia la representación a partir de ecuaciones y fórmulas y la aplicación de las reglas de derivación en la solución de algunos problemas contextualizados en la física o en la geometría pero siempre fortaleciendo el lenguaje algebraico

R/: Sí la verdad es que sí… correcto…

3. *¿Cómo sabes que tus alumnos han aprendido el concepto de derivada?*

R/: Bueno la verdad es que… que… se supone que uno hace varios tipos de evaluaciones, una puede ser con pasadas al tablero, con talleres, con exámenes, etc.… pero de todas maneras uno casi nunca puede decir con certeza si un estudiante aprendió o no un concepto… Pero… las evaluaciones que uno hace llevan un proceso lógico donde se determine si una persona maneja o no algunos criterios… Por ejemplo, no se si notaste que en la primera evaluación… son simplemente conceptos… mas nada no tiene que hacer ejercicios sino simplemente conceptos, ya en la siguiente evaluación ya se van planteando ejercicios y se le va colocando una serie de ejercicios que tienen que ver con el desarrollo del programa que son derivadas sencillas, derivadas implícitas y luego las razones de cambio… Ò sea, es casi un proceso lógico… Si el estudiante no… no…alcanza los logros en la primera evaluación, uno puede decir que tiene que volver a reformular esos conceptos…

4. *Podríamos hablar de este examen que tú realizaste... Ahora queremos que nos hables de la evaluación que tu realizaste… la planteas en tres talleres…*

R/: Tal vez es llevar a los estudiantes a la ejercitación y entonces ya aquí… se supone que si el ya pasó la primera evaluación (la aprobó), ya… por lo menos uno es consciente que el estudiante puede resolver una serie de ejercicios, y por último vienen unos ejercicios que son de… de… derivada un poco más complejas de derivación implícita… y después aplicaciones de las derivadas… Siempre con ese proceso lógico de las matemáticas… En el primer punto trato de ver si manejan el incremento de una función, como parte preliminar para comprender la regla de los cinco pasos. Ya en el segundo les pregunto más concretamente sobre la regla de los cinco pasos, para mirar un poco como trabajan el límite... es decir la derivada... Con el tercero es para ver como aplican lo anterior a un problema conocido como este... y ya del cuarto en adelante es la aplicación de lo que yo llamo teoremas sobre derivadas... es decir, como aplican las reglas de derivación para derivar funciones... primero más sencillas en la 4 y ya más difíciles en la 5, porque tenemos funciones trigonométricas y logarítmicas... Ahora con los ejercicios 6, 7, 8, 9 y 10 ya es de aplicación pura en el análisis de la función para que terminen graficándola... los tres primeros, quiero decir el 6, 7 y 8 en intervalos del dominio, y el último 10 en todo el dominio de la función... ah y finalmente el 11es para mirar la aplicación de la derivada en la física... que es lo más importante... Ahora por si acaso yo les recuerdo la definición... porque es importante esto...

E: Qué nos podrás decir de los ejercicios que planteas y de los sistemas de representación que utilizas, ò sea de la forma en que los presentas o preguntas a los estudiantes.

R/: Normalmente, sí nos damos cuenta… después de haber analizado la… la evaluación del profesor español que tu me diste… La evaluación del profesor sí correcto… Noto que la verdad es que uno… o yo particularmente, trato de evaluar mas que todo la parte de la algebrización de los conceptos… puros ejercicios rutinarios de resolver aplicando fórmulas… De pronto en la primera parte de la evaluación que te entregué yo, donde trato de que los estudiantes conceptualicen… en realidad ahora veo después de reflexionar sobre el examen del profesor de España, que en realidad lo que yo propicio es que los estudiantes se aprendan de memoria… es decir de potencia la memoria más que todo… y en la parte donde se supone que son las aplicaciones de la derivada… seguimos casi siempre el mismo esquema… el esquema de colocar un ejercicio a partir de una fórmula y pedirles en última que lo resuelvan aplicando reglas algebraicas de derivación… A través de los conceptos de puntos críticos, los criterios de la primera y segunda derivada… criterios así… Pero creo realmente que hemos fallado allí… con base en la evaluación esta que me proporcionaste… y creo que de verdad que esa es bastante pertinente, completa y rica… Y creo que deberíamos retomar y aprender de ella y tomar algunos puntos sugerentes que están allí… para mejora la práctica nuestra en el aula...

PROFESOR D

1. *¿En qué situaciones particulares utilizas más frecuentemente el concepto de derivada o el cálculo de la función derivada de funciones (cálculo de velocidades, razones de cambio, problemas de la recta tangente, etc.)?*

R/: O sea como aplicación… Pues nosotros en el campo de las matemáticas aplicamos el concepto mucho más en la física… nos vamos más a la física, en los conceptos de velocidad instantánea, O depende del gráfico de v contra t nos puede dar por ejemplo aceleración. Ya en el campo del colegio donde trabajo que es comercial… pero tengo que ser sincero en decirte que muy poco tocamos la parte de aplicación en la economía…lo que sería costo marginal o cosas así… De verdad lo hacemos pero no le damos la importancia que debería tener en un bachillerato comercial… tengo que reconocer esto… porque es que no nos alcanza el tiempo y claro el programa es tan largo que nos terminamos centrando en los procesos algebraicos nada más y olvidamos la interpretación gráfica, la geométrica, la física y otras... Además trabajamos sobre la cuestión de la recta tangente, tratamos de que el alumno… de pronto nos conformamos muy… como muy poco… no le exigimos mucho al alumno sobre trabajar e interpretar sobre esa representación gráfica de la recta tangente… Y finalmente el análisis de funciones... la monotonía... Y problemas de aplicación de razones de cambio... sí optimización.... Sí… lo hacemos de pronto una sola vez bien y nos conformamos con eso… De pronto no volvemos a esto con funciones más complejas o de pronto en un intervalo donde la función presente más dificultad para comprender el concepto de recta tangente… Y nos vamos… eso si la practica nos dice que por el tiempo nos vamos más a los algoritmos… si los algoritmos de las reglas de derivación… si se les da una ecuación y se les pide a los alumnos que deriven la función utilizando las reglas… mecánicamente nos quedamos con el álgebra de derivada… y que de resultados, que simplifique y de pronto nos conformamos con eso… Esto pasa tanto en el aula de clases como en las evaluaciones… si… nos vamos más a la parte algorítmica.

2. *¿Qué aspectos del concepto derivada crees que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?*

R/: O sea se debería trabajar lo que es… el alumno comprenda realmente lo que es el incremento relativo de una función, interpretación gráfica de ese incremento relativo que es mucho más importante que todo y que vea que esa secante en un instante va a cambiar cuando la variación se hace sumamente pequeña… cuando ese incremento… ese Δx se hace pequeño y tiende a cero… esa secante se va a convertir más adelante en una recta tangente al gráfico de la función en ese punto… Eso… es una de las cosas en las que hay que trabajar más sobre eso… hay que de pronto motivar al alumno a que facilite también esa parte pues digamos con un poco de dificultad… porque realmente tenemos unos alumnos con un nivel no muy óptimo… Si… O sea creo que la experiencia me dice que el programa hay que Reestructurarlo dentro de nuestra institución… hablando con los profesores de todo el área… De manera que la función se vea como un tema mucho más importante… Yo diría como un tema transversal que se vaya trabajando durante toda la secundaria… y que ya en 11º el alumno tenga mayor habilidad en interpretar una función en el plano… porque esa falla la estamos observando y es una limitación para poder desarrollar bien el concepto de derivada… y hay que reestructurar el programa… pero me estoy dando cuenta ahora que tu me estás haciendo estas entrevistas y me estás haciendo reflexionar sobre mi trabajo… Otra cosa es que además del concepto de función que es importante para poder entender la derivada como una función, hay que tener claro el concepto de pendiente… pendiente y de lo que es secante… porque hay alumnos que confunden esto… El concepto de pendiente que normalmente… eh… Se da en 10º y no se explota bien… se debería trabajar mas esa función lineal, que normalmente no se da bien la geometría analítica en 10º por falta de tiempo porque nos centramos mucho en la trigonometría y esta absorbe mucho el tiempo y que no les damos espacio importante a la interpretación geométrica.

3. *¿Cómo sabes que tus alumnos han aprendido el concepto de derivada?*

R/: Bueno evaluamos la parte por definición, tomando una función sencilla el alumno halla la derivada por definición… Hace una interpretación geométrica, con sinceridad no con esa exigencia que debería ser respecto a este concepto… De pronto nos conformamos con muy poco de esta interpretación… Yo creo incluso que el alumno hace más bien lectura de gráfico y no interpretación de funciones… Y nos vamos más a evaluar lo que es el álgebra de la derivada…

E: ¿A ver cuando me hablas de que dad la función el estudiante sea capaz de aplicar la definición, a qué te refieres cuando utilizas el término de definición?

R/: Mira lo importante es que el alumno entienda que ese incremento relativo visto en el gráfico sí… que viene a ser la pendiente… que en un instante esa recta va a tocar la curva en ese punto y que no es el álgebra de la función… de las fórmulas de la derivada… lo que va a decir si un alumno sabe o comprende un concepto o no… porque hay muchos alumnos que te derivan perfectamente y te simplifican la expresión, pero cuando le dices aplicar la derivada por definición se hacen un enredo en utilizar la fórmula del limite del cociente incremental… presentan muchas fallas…

4. *Podríamos hablar de este examen que tú realizaste... Ahora queremos que nos hables de la evaluación que tu realizaste… la planteas en seis ítems… Qué perseguías tú con ella…*

R/: Bueno normalmente se le plantea una evaluación final con seis puntos pero no… no evaluamos los seis puntos solamente en una única evaluación, sino que nosotros vamos evaluando por temas… a lo largo del desarrollo de la unidad… lo que pasa es que aquí lo que te consignamos es el tipo de ejercicios que les ponemos en esas evaluaciones para que tengas una idea global de la evaluación que realizamos… En cuanto a los primeros puntos que es encontrar el incremento en y de una función dada… lo que intento trabajar es la aproximación numérica, con ello lo que queremos ver es si el alumno puede o no trabajar la interpretación numérica con claridad… que se vea de pronto ampliando escalas para que se vea mejor el trazado, para que se vea mejor la pendiente o el proceso de secante a tangente… Es decir, para ver si visualizan mejor… no el alumno si lo trabajamos con escala pequeña se vuelve tedioso a ver eso allí… Entonces él debería acostumbrarse a trabajar con variaciones de escalas en el gráfico para poder ver mucho mejor el proceso, que le facilite una mejor interpretación de gráficos… El segundo punto si es el concepto de la derivada como un límite… Eso es dada una función sencilla como es la cuadrática… creo que el alumno debe realizar el problema sin ninguna dificultad… después tomamos… El tercer punto es una de las aplicaciones del concepto de derivada, hallar la recta tangente y la normal a una curva dada por medio de una ecuación. Luego en el punto cuarto, nos referimos al álgebra de derivada, donde el alumno va aplicar las reglas de derivación y la regla de la cadena. El quinto es un problema de aplicación de la de la derivada en la economía, como es la utilidad marginal, ya que trabajamos en un colegio comercial, y por último el sexto punto, tenemos una función donde el alumno va encontrar los puntos críticos, intervalos de crecimiento, decrecimiento, etc., en general tiene que hacer una análisis de la monotonía de la función a partir del concepto de derivada.

PROFESOR E

1. *¿En qué situaciones particulares utilizas más frecuentemente el concepto de derivada o el cálculo de la función derivada de funciones (cálculo de velocidades, razones de cambio, problemas de la recta tangente, etc.)?*

R/: En lo relativo al concepto de derivada… Bueno utilizo… Cuando voy a hablar del incremento de una función… cuando voy a hablar del cociente diferencial… cuando voy a definir la pendiente de la recta tangente… que va a ser el limite hacia donde va a seguir la secante en… al transportar el punto Q hacia donde está P, el punto donde la tangente corta a la curva… específicamente en eso… También cuando voy a referirme a algunos conceptos básicos como son los conceptos de velocidad y aceleración, en lo que refiere a la aplicación de la derivada… O también cuando voy a referirme al concepto de utilidad o costo marginal… O cuando voy a referirme al concepto de pendiente de una recta…

E: O sea que estás haciendo referencia a elementos conceptuales que tú tienes en cuenta cuando evalúas el concepto de derivada

R/: Sí tiendo a que el estudiante… eh… lo analice desde el punto de vista de la cotidianidad, que vea al concepto de derivada en la velocidad de un carro… que lo veo en una recta que está en el tablero, en estas cuestiones… Es decir que él el concepto… se de cuenta que el concepto de derivada es un concepto que está inmerso en la realidad… que es un concepto que esta dado en la utilidad que puede generar el vender algo, en producir algo, en lo que refiere al costo marginal en el campo de la economía… de la administración, y en las aplicaciones Físicas.

Bueno yo diría que en general habría que tener en cuenta a la hora de evaluar el concepto de derivada… el concepto de función, una función original y una función incrementada… Como también que el estudiante entienda bien el concepto de incremento de una variable dependiente, como el de una variable independiente

2. *¿Qué aspectos del concepto derivada crees que necesariamente deben figurar en una evaluación de su aprendizaje?*

R/: Bueno los aspectos de lo que es una función original y lo que es una función incrementada. También que los estudiantes entiendan bien el concepto de incremento de una variable dependiente y el de una variable independiente, y que realmente el concepto de incremento de la variable independiente va a depender de esa variación de la dependiente, y que no necesariamente tiene que ser el mismo valor, que porque se incremente en 0,5 la otra también se va a incrementar en 0,5, y que el estudiante comprenda que el concepto de incremento no siempre es aumento sino que también es de disminución.

Bueno yo lo que trato de decir, es que si ya el estudiante a interpretado gráfica y analíticamente el concepto de derivada, que ya sabe lo que es una secante a una curva, la normal, la tangente, la pendiente de la recta tangente... Es decir cuando ya domina estos conceptos. Entonces que ya tiene también definido la regla de los cinco pasos, que en algunos casos dicen que son cinco pasos y en otro que son tres pasos para el cálculo de la derivada a partir de la incrementación, entonces que el conozca ya detalladamente los teoremas, para ya hacerlo más rápido, más ágilmente. Es decir, que cuando un estudiante ya se da cuenta que no trabaja tanto para calcular la derivada de una potencia, etc., que ya sabe que lo puede hacer directamente, se corre menos riesgos de equivocarse. Claro que procuro que ellos apliquen esos teoremas, pero que los demuestren, que sepan de dónde salen y que no lo aprendan de forma mecánica, sino que interpreten, argumenten y propongan.

3. *¿Cómo sabes que tus alumnos han aprendido el concepto de derivada?*

R/: Bueno hay muchas maneras de conocer si el estudiante ha aprendido el concepto, porque es que yo acostumbro a hacer las pruebas diagnósticas, que veo dónde están fallando y entonces ya profundizo con argumentos de ejercicios más fuertes. Sí se logra detectar por ese ánimo, por ese querer hacer las cosas que se les nota a ellos... Y que no es solo una evaluación de un examen sino a través de la observación directa de los progresos que uno ve en el aula de clase.

4. *Podríamos hablar de este examen que tú realizaste...*

R/: Bueno con la primera situación problema lo que busco es que después de haber conceptualizado sobre el incremento de una función él trate de recordar como introduce el concepto a un cálculo numérico. O sea que en este ejercicio se le dan las funciones para que el trate de introducir el concepto de derivada a través del cálculo numérico. Además lo que se persigue es que a la vez de estar utilizando los procesos algebraicos se vaya introduciendo los procesos numéricos que explican el concepto. Porque fíjate tú con el segundo ejercicio, entonces va desde que se da la función original hasta que se busca la función incrementada y después la necesidad de establecer un cociente diferencial y después la razón de cambio que le lleve a encontrar un límite posterior.

Ya en el tercer ejercicio, lo que busco es que con la regla de los cinco pasos el estudiante a través de ella se conscientice un poco en cuál es el proceso total que se da para llegar a la derivada. Es decir que este recoge el proceso total de los dos ejercicios anteriores. Te lo repito, así:

1. Identificar la función original
2. Identificar o calcular la función incrementada
3. Hacer una diferencia entre la función incrementada y la función original (incremento de la variable dependiente)

4. Dividir este incremento entre el incremento de la variable independiente y hallar una razón... una razón de cambio... Y entonces esta razón de cambio me implica que ya el estudiante aquí debe tener un concepto de lo que es la pendiente de la recta secante y como esta recta secante se va acercando al punto de la tangente.
5. Será hallar el límite... Es decir que la pendiente de la recta tangente será el límite... Entonces allí aquí determina la derivada... Y no se dice que es la derivada, se va llevando hasta que ya ellos se ambientado con esto... Pero allí está el concepto de límite... lo importante es que sepan operar con él... Entonces le digo que han hallado la derivada... entonces en el próximo a pesar de que hagan los cinco pasos yo les digo calculen la derivada de la función aplicando la regla de los cinco pasos, y mato dos pájaros con una sola piedra... Porque se ayuda y se evalúa también en la parte esta de teoría de límite, que tampoco es un concepto nada fácil... Por eso te hablo del concepto de límite como idea intuitiva de aproximaciones numéricas.

   En la cuarta pregunta de la primera parte, lo que trato de sintetizar lo que ha hecho arriba... o sea que todo el examen lo que busca evaluar es el proceso, porque ahora lo que tienen es que aplicar lo anterior para resolver esta situación del cálculo de la ecuación de la recta tangente y la normal.

   Luego en la segunda parte tenemos otra evaluación, ahora en esta parte, con el primer ejercicio, ya el estudiante conoce una serie de propiedades o teoremas verificables sobre aspectos de la derivada de una potencia, de un producto, etc., entonces aquí ya maneja todo lo evaluado anteriormente, es decir comprende el concepto de derivada, y ahora con estos ejercicios va a probar estas reglas o teoremas y le va a permitirse meterse más en el concepto de derivada de una manera más rápida y fácil... Y a ellos les gusta porque a la larga ve que lo anterior era un trabajo muy largo, pero ahora aquí una derivada la va obtener rápidamente sin tantos pasos.

   También cuando ya vamos a referirnos al manejo de las aplicaciones, por ejemplo, en el ejercicio de encontrar el área de un triángulo... ya el estudiante verifica algunos de los conceptos dados... Es decir que aplicaciones tiene en la cotidianidad el concepto. También tú observas que los puntos de inflexión, puntos de máximo y mínimo... es decir, desgraciadamente en este tema creo que si me quedo un poco corto, porque la verdad es que el tiempo es muy corto.... Pero de todas maneras trato de que ellos se vayan a la universidad con lo poco que se le da, con objetividad y claridad... es decir lo poco que se le da pero es lo esencial, es decir, que trato es que se lleven los conocimiento mínimos de ese concepto... porque yo solo tengo 3 horas semanales de 45 minutos.

ANEXO 4

TRASCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA 3: SOBRE EL PROCESO DE RESOLUCIÓN DEL CUESTIONARIO INDIRECTO

PROFESOR A

1. *¿Qué opinión tienes de la evaluación realizada por el profesor X sobre dicho concepto, me explicas la respuesta que das a cada ítem?*

R/: Me parece un examen bastante interesante, porque trabaja mucho esto que te comente ahora, de distintos sistemas de representación... Como en el primer punto... o sea a partir de una situación gráfica, también se puede trabajar la interpretación de la derivada y ir manejando acá el concepto de derivada, la teoría.... Realmente este tipo de ejercicio es nuevo para mí... en el sentido de lo que yo hago en clase con mis alumnos. En el segundo punto igual, hay una representación gráfica y analizar a partir de la gráfica, pues, sí puede ser que una función sea la derivada de la otra. Este problema *(señala **el tercer ítem)*** **me parece bueno, bonito de una situación real práctica donde se combina la parte de la derivada, y el estudiante aún no manejando el concepto de derivada lo podría realizar**. ***La misma evaluación, lo veo interesante porque le permite al estudiante a aprender. O sea que la evaluación no solamente, en este momento, se convierte en un medidor, sino que también en un instrumento de aprendizaje***. Entonces por eso me parece interesante este tercer punto, es decir este tipo de ejercicio. **Igual aquí hay una aplicación física, pues que... que da para que muchos estudiantes saquen a flote algunas preconcepciones, ya propias de la física, que se dan mucho, ya que se da el caso que muchos van a decir que ahí los carros chocan o los carros se interceptan y otros seguramente que no van a decir eso**. Pero veo igualmente que en este punto, pues, los alumnos pueden argumentar, pueden analizar y proponer. Y ya la parte esta, **el del quinto punto, pues es netamente un punto algorítmico y es lo que más se trabaja.**

Yo **pienso que... a mí parece buena, por todo eso, porque trabaja los distintos sistemas de representación de una manera muy sencilla, que permite ver... ver eh... es muy rica conceptualmente, la evaluación**... eh... y **veo en el trasfondo de eso a un profesor que tiene bien claro... la estructura pues de... del constructo matemático, o sea hacer una evaluación a partir de las competencias, de argumentar, proponer, interpretar, porque es muy interpretativo el examen, no se nota ahí una algoritmación... muchos trucos matemáticos, ni el manejo**. Porque esto permite hacernos una crítica, del por qué le estamos dando tanto... tanta matematización pero en el sentido, de... memorizar... Aunque en el examen que yo propongo, bueno, las fórmulas están allí...

E: Podríamos entrar ahora a analizar las respuestas que diste a cada una de las preguntas del examen, en relación con las posibles respuestas que esperas que puedan dar tus estudiantes, después de haber culminado la unidad del cálculo diferencial. Por ejemplo ante el ítem a) de la pregunta 1, tu planteas que el alumno calcula la pendiente de la recta a partir de los dos puntos que les dan, y que luego su ecuación porque tiene puntos y la pendiente de la recta L, y ya obtenida la ecuación calcula f (5) que debe darle 3.

1-a) Calculo la pendiente de la recta L, luego la ecuación. Obtenida la ecuación calcula f (5) en la ecuación que debe darle 3

R/: Bueno yo creo que el alumno lo realizaría así, porque con el proceso comprobaría que f (5) le debe dar 3, tal y como se ve en el gráfico.

E: En cuanto al ítem b del punto 1, me dice que como ya el chico encontró la ecuación de la recta tangente en el punto a), ahora le tocaría calcular la derivada dy/dx en x = 5, que representa la derivada de la función en el punto de tangencia, y además afirmas que, seguramente el alumno deducirá que f '(x) = m1, y por tanto que f' (5) será la pendiente de la recta L.

1-b) En la ecuación de la recta tangente hallada calcula dy/dx en x = 5, que representa la derivada de la función en el punto de tangencia, **seguramente el alumno deducirá que f '(x)= m_L, f ' (5) será la pendiente de la recta L que en este caso da 2/5.** (...) Sí, porque el f '(5) como interpretación es la pendiente de la recta tangente en ese punto

R/: Sí, porque el f '(5) como interpretación es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

E: en cuanto a la parte c) del punto 1, me podrías explicar mejor tu respuesta.

1-c) Como x = 5.08 apenas es 5.08 > 5, bastará hallar f (5.08) en la ecuación de la recta tangente que le dará algo más de 3 (exactamente 3.032)

R/: Sí, ellos pienso que responderían de esta manera, mira como el valor en x es 5, 08 el incremento en la función apenas es de 0,08. Entonces como ya él tiene la función, la función de la recta L, pues simplemente le bastaría calcular f (5,08) en la ecuación de la recta tangente que le dará aproximadamente algo más de 3, más exactamente 3, 032, pues en 5, f (5) es 3 y 5 por la derecha es 5, 08; entonces seguramente cuando calcule f (5, 08) le dará algo más de 3, pues ya sabe que 5, 08 > 5**. Es por aproximación, porque allí, allí en ese punto un poquito a la derecha o un poquito a la izquierda, la recta tangente y la curva coinciden.**

E: En cuanto al punto 2, qué nos puedes decir al respecto

2. Los alumnos argumentarían que ninguna función será la derivada de la otra, porque ninguna de ellas es tangente a la otra en un punto (x, y)

R/: Por la gráfica, no sé si me suspenderán *(risas y silencio de 10 segundos)*, bueno yo pienso que los estudiantes dirían, mirándolo por la parte de los estudiantes no, que... eh... creo que contestarían que ninguna es la derivada de la otra, porque no hay tangentes... Los alumnos argumentarían que ninguna función será la derivada de la otra, porque ninguna de ellas es tangente a la otra en un punto (x, y), porque nunca habría una como recta tangente a la otra o tangente a la otra en un punto determinado. Ah no ser que estas sean funciones trigonométricas y una sea seno y la otra sea coseno, pienso yo que los estudiantes lo que van a contestar es eso, que ninguna es la derivada de la otra, porque nunca habría una como recta tangente a la otra o tangente a la otra en un punto determinado.

E: En cuanto al punto 3, qué nos puedes decir al respecto

3) a) El alumno observando la gráfica dirá que el consumo de agua en 24 horas será de 20, pero algunos de ellos preguntarán por las unidades que no se especifican en la gráfica. b) Seguramente contestarán que entre 15 y 20 y muchos de ellos dirán que en ese intervalo el consumo es creciente. c) Dirán que el consumo a las 14 > a las 9 horas. d) Contestarán que entre las 6 y 12 horas, porque en ese intervalo la pendiente es mayor, pero no todos justificarán y contestarán la pregunta. e) Aproximadamente 2 unidades, pero no podrán expresar las unidades porque no se especifican en la gráfica.

R/: Bueno si algo hay aquí que aclarar a la repuesta que di, es que en la pregunta de que cuánta agua se está consumiendo y en qué unidades, entonces como no se expresa en eje y las unidades, ellos no lo van a dar, pero es un punto bastante rico.

E/: Bueno tú que unidades supones que debe ir en el eje de las y.

R/: Bueno yo sé que en ese eje debe haber litros, o que sé yo o cualquiera unidad de volumen... porque sino tendrán que decir unidades. Es posible que... los alumnos generalmente no manejan las unidades, pero haber es interesante el punto, porque al no colocar las unidades, creo que casi me atrevo a decir, que alguno va decir, bueno en qué unidades las doy, sobre todo que cuando uno enseña hace mucho énfasis en las unidades, entonces seguramente que cuando no las vean en y porque en x dice tiempo, se preguntarán algunos u otros la van a apuntar, de pronto no todos pero sí algunos.

E/: En lo que respecta al punto 4, qué tienes que decirnos.

R/: En el caso de las velocidades de los coches en el punto P, eh... creo que... pienso que algunos van a decir que aquí chocan y hay otros que van a ver que no porque la trayectoria aquí curva y aquí recta y que estén aquí en este segundo no pasará eso. Pienso que, bueno hay una pregunta que en donde dicen que en qué momento los coches tienen la misma velocidad, pues como ellos ya tienen el concepto, pues en donde sean paralelas a la recta.

E/: En cuanto a cómo son las velocidades en el punto P, qué podrías decirnos.

4) a) Algunos alumnos dirán que los coches A y B se interceptarán en el punto P, pero otros analizarán más y observarán que la trayectoria del coche B es diferente de la del coche A, porque la trayectoria del coche A es curva y la del coche B es recta.
b) Del análisis anterior muchos alumnos deducirán que las velocidades serán diferentes pues ya saben que la velocidad es una pendiente o una representación de la derivada.
c) Para muchos alumnos las velocidades de los coches A y B serán iguales en el momento en que la tangente a la curva sea paralela a la trayectoria recta, pero no todos los estudiantes desarrollarán ese razonamiento.
d) Seguramente que muchos estudiantes dirán que en el trayecto curvo, porque allí hay mayor pendiente (señala en la gráfica y)

R/: Ah... la verdad es que... no lo vi... leí mal... Pero de todas maneras en el punto P las velocidades... cómo serían... uhm... (15 segundos)... serían la misma... ¿no?... **A ver, aquí esta recta... porque este punto sería de inflexión allí... pero... la verdad es que no sé... uhm... déjame pensarlo mejor... con más tiempo... después...**

E/: En cuanto al último punto

5) Hallan f '(x) = 6x - 2
Hallan f ' (2) = 10, que será la pendiente.
Seguramente que algunos estudiantes hallarán f (2) = 8, f (x) = $3x^2$ - 2x y ya con el punto (2,8) y m = 10, muchos calcularán la ecuación:
y - 8 = 10 (x - 2) ó y = 10x - 12 ó - 10x + y + 12 = 0

R/: Bueno, con **este no hay ningún problema, pues muy típico, de la aplicación de la analítica de la derivada. Lo resolverían creo que muy fácil.**

E/: Me puedes hacer algún comentario sobre las dificultades que crees que puedan tener tus estudiantes al resolver este examen. ¿Cuáles crees que son los posibles errores esperados?

R/: En este examen, bueno siempre... eh... normalmente todos los estudiantes en las evaluaciones pues muestran alguna inseguridad, pero yo pienso que en general lo resolverían, porque el concepto fundamental se ha trabajado, y eso espera uno, pero lo que pasa es que siempre hay... hay sorpresas, seguramente... bueno yo les he colocado algún tipo de estos ejercicios, no tan exactamente, eh... el examen internacional con el que a ellos se le evalúan, tiene mucho de este tipo de ejercicios, sobre todo de representación. Además, hoy por hoy aquí en Colombia se está trabajando mucho con este sistema, porque el examen nacional (pruebas ICFES), ahora lo cambiaron y viene en esta forma, entonces, pienso que en su mayoría lo podrían resolver. Las dificultades o no sé si son dificultades, pero más bien la omisión de las unidades en el ejercicio 3, pero no sé si esto es una dificultad, no sabría expresarlo. Ellos que te digo yo, a ellos, si se puede hablar de dificultades, que a los estudiantes les cuesta, pero ya mas por cultura, ser explícito en crear proposiciones, pero esto es un caso más, me imagino yo de tipo cultural, en el sentido de que a ellos les cuesta el trabajo de argumentar, escribir. **Entonces ellos quieren dar respuestas a los ejercicios de matemáticas como 5, a, etc., son muy lacónicos en el sentido de crear propos**iciones. Bueno yo pienso que el hecho de que... desde la primaria y los años iniciales y pasando por toda la secundaria, de todos maneras los estudiantes tienen la tendencia a no crear buenos hábitos de lectura y de escritura y esto se va notando; a pesar de que sé... ellos inclusive a veces me dicen, usted que quiere que nosotros le expliquemos todo... porque yo les digo que hay que explicar, que hay que argumentar... Entonces ellos son muy dados a que en las matemáticas no se tiene porque estar argumentando.

PROFESOR B

1. *¿Qué opinión tienes de la evaluación realizada por el profesor X sobre dicho concepto, me explicas la respuesta que das a cada ítem?*

R/: Sobre esta evaluación del concepto de derivada, **mi primera impresión es que para los estudiantes que manejamos nosotros de bachillerato me parece fuerte, fuerte en especial el ítem 2, sí el punto 2 especialmente. Porque, de pronto... porque presentan unas gráficas, no te dan cuál es la... la fórmula que corresponde a cada una de esas gráficas y te están preguntando cuál es la función y cuál es la función derivada, con dos gráficos allí escuetos en un plano de y contra x, entonces esto no es fácil para un estudiante que nosotros manejamos.**

E: Pero por qué consideras tú que no es fácil

R/: Te **estoy diciendo una... no... no está identificando cuál es la ecuación correspondiente a la función, ni mucho menos la de la variables, o sea no conoce ninguna de las dos, o sea para él fácilmente no va a saber cuál es la función y cuál es la derivada. Eh... tiene que manejar una... una serie de conceptos como la concavidad de la función, qué si es creciente o decreciente, para hacerla corresponder con la función derivada, y entonces este tipo de cosas, un poco abstractas no las maneja con facilidad el estudiante, de nuestro medio**. Yo veo este examen como para que el estudiante de secundaria coja un énfasis en matemática, o sea que entre a profundizar el conocimiento matemático... porque el bachiller normal nuestro no hace esto.

E: Y qué diferencias ves entre este tipo de examen y el que tu realizas para evaluar el concepto de derivada a tus estudiantes.

R/: Bueno, **similitudes le veo el punto 3 y el 4 que son situaciones problemas similares a las que yo les planteo a mis estudiantes. Eh... la diferencia esta en el ítem 1 y el 2... Ah... y el ítem 5 este sí que lo manejamos también, el ítem 5 donde dan la función, dan la fórmula y allí en este caso el muchacho deriva y halla la pendiente y halla la ecuación de la recta tangente, este caso se maneja, pero en los ítems 1 y 2, te dan la función aquí pero no te dan la fórmula, este tipo de... de casos no los maneja el estudiante, y de pronto uno mismo las maneja muy poco, en general el profesor que orienta la maneja muy poco**.

E/: Bueno explícame la respuesta que diste al ítem a) del punto 1.

1-a) f (5) = 3 porque el punto (5,3) pertenece a la curva que representa a y = f (x), para x = 5, y = f (5) = 3

R/: Sí, yo además en otra hoja te escribí además de las respuestas, algunos comentarios... entonces, en este caso nos dan una curva que corresponde a una función f y nos dan el punto de tangencia de coordenada (5, 3) y nos preguntan f (5), f (5) sería el valor de la segunda variable, de la ordenada, es decir f (5) = 3, porque el punto (5,3) pertenece a la curva, que representa a y = f (x) y entonces para x = 5, y = 3. Sin embargo, es posible que el estudiante no responda a esta pregunta por no relacionar *y* con f (x), o sea (y = f (x)); concretamente f (5) = y en el punto (5,3) Esta sería la dificultad, porque como te digo el estudiante está acostumbrado a manejar, y =f (x) = $5x^2$ + 3, por ejemplo. Es decir, que le den a él la fórmula, que le den la ecuación.

E/: Bueno explícame la respuesta que diste para el ítem b del punto 1

1-b) La pendiente de la recta tangente a y = f (x) es m = Δy/Δx = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5, luego la derivada de f en el punto (5,3) será f ’(x) = 2/5.

R/: En el b) la derivada en 5... la derivada en 5 sería la pendiente de la recta tangente, aquí nos dan la recta tangente que pasa por los puntos de coordenadas (0,1) y (5,3), y luego hallamos la pendiente por la fórmula m = Δy/Δx = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5, luego la derivada de f en el punto (5,3) será f ’(5) = 2/5. En este ítem yo no vería tanto el problema, el estudiante debe tener claro que la pendiente de la recta tangente de f en el punto (5,3) es la derivada en ese punto. Entonces allí, creo que no... no creo, sino no tendría dificultades.

E/: Me podrías explicar ahora la respuesta que diste para el ítem c del punto

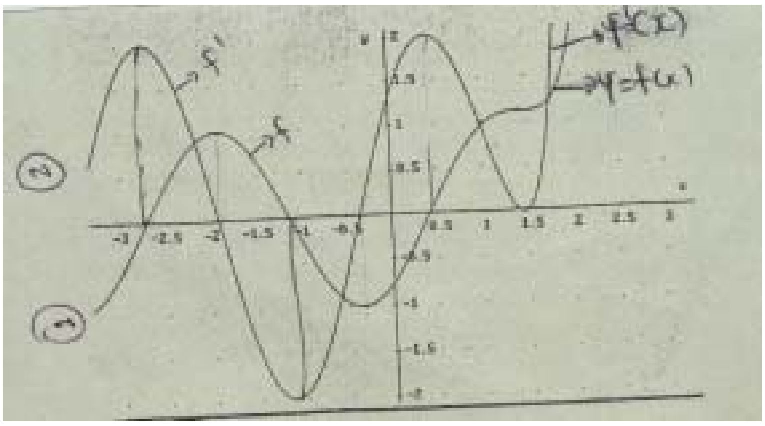
1-c) f (5.08)≈3 por el comportamiento de la curva (gráfica) en valores cercanos a x = 5

R/: En el ítem c), este me dio una frenada, cuánto es el valor de f (x) en x = 5.08, como solamente conocemos el punto de coordenadas (5,3) la respuesta que yo daría es que f (5,08) es aproximadamente 3 y lo miré de dos formas, bueno una forma mirando la ecuación de la recta tangente, entonces calculo f (5.08) y me da aproximadamente 3, 02... o un valor próximo a 3. Y con la... en la gráfica también mirando lo del límite cuando nos aproximamos a 5 por la derecha y por la izquierda, o sea nos aproximamos a 3 por la derecha, o sea de esas dos formas la vi, pero no es un valor exacto. **Para el estudiante para mí sería bastante difícil, porque él está acostumbrado a manejar situaciones concretas, o sea que él conozca la ecuación, la fórmula de la función e intenta calcular y así no lo haría. Lo otro es que como la respuesta no es un valor exacto... esto le daría problema porque no está acostumbrado a dar valores aproximados.**

E/: En cuanto al segundo punto.

2. Si hay función derivada porque la marcada como f es creciente hasta –2 y f ’ tiene valores positivos, de –2 a –1 es decreciente f y f ’ toma valores negativos. Otro aspecto fue confirmar que de –2,5 a –1 f es cóncava hacia abajo y f ’ es decreciente

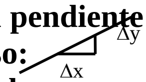
R/: El **segundo punto, ya yo diría que el estudiante nuestro no resolvería esta situación... no la resolvería porque entrarían unos elementos... unos elementos en que el estudiante eh... no lo maneja con toda precisión... yo trabajaría esta situación en el aula de clase para discutir en grupo... a mí me parece una situación poco adecuada para estudiantes de secundaria, estaría bien para un universitario.**.. Tal, para el caso de que la función aquí... yo diría que la función es la de abajo que yo la marqué con f (x) y con el número 1 en el gráfico... Esta... En este caso, aquí esta función es creciente, si la función es creciente, su derivada debe ser con valores positivos, eso va desde menos infinito, aquí no aparecen valores de este lado, hasta -2, luego de -2 hasta -1 es decreciente, sí entonces los valores de la derivada deben ser negativos, y aquí están negativos. Seguimos entonces, otro f es aquí cóncava desde -2,5 hasta -1, sí es cóncava hacia abajo entonces la función derivada debe ser decreciente, como está aquí *(señala en el gráfico la curva que definió como f ’ (x) con el número 2).* Y eso lo seguimos corroborando con los demás intervalos.



E/: Qué tienes que decirme en cuanto al punto 3.

3.-a) El consumo total de agua en las 24 h fue de 20 m³, pues a las 24 h le corresponden 20 m³.
b) El consumo de t = 20 a t = 24 h es de ∆C = 20 - 15 = 5 m³, o sea que en las 4 h últimas del día se consumen 5 m³.
c) El consumo a las 9 h es mayor, porque la recta tangente en este instante tiene mayor pendiente que la recta tangente a las 14h.
d) Aproximadamente entre las 8 y las 12 seg. se está consumiendo más agua porque en ese intervalo la pendiente de la recta tangente es mayor que en los demás puntos del gráfico la pendiente de la recta tangente es mayor que en los demás puntos de la gráfica.
e) A las 7:00 horas se está consumiendo aproximadamente 0,75 m³, deducido del gráfico, porque lo que hago es aplicar la tasa media de variación en valores muy cercanos que pueda obtener del gráfico y entonces lo aproximo al valor que tendrá en ese instante. Entonces tomo el de 6 y el de 8 que son los más próximos que puedo

leer en el gráfico y entonces me da que aproximadamente es 0,75, $f'(7) \approx \frac{f(8)-f(6)}{8-6} = \frac{3-1{,}5}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75m^3$”. Ah y se mide en m³ o en litros, por segundo.

R/: Allí, el muchacho para poder responderlo debe tener claridad sobre el concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente, es decir el estudiante debe dominar la interpretación de gráficas, y en nuestro medio esto es una debilidad, y además comprender a la derivada como pendiente de la recta tangente. En este caso específico la diferencia que veo con el examen que yo realizo es que aquí te dan una gráfica, aquí no hay fórmula por ningún lado, en el examen que yo realizo, doy una tabla de datos y pedimos una gráfica, y se entra en hacer un análisis similar. **Aquí no usan ninguna ecuación, sin embargo, en uno de los problemas que yo planteo se entra a dar una tabla y a deducir una ecuación**... Básicamente la... la diferencia aquí es que no trabajan aquí con una función que le den la ecuación o la ley que rige el comportamiento de la función... sí esa es la diferencia... Las dificultades que podrían tener en este punto es que... ver cuando la pendiente de la recta tangente es mayor o es menor en un punto que en otro... cuando más... tocará hacer la recta y la que tenga mayor inclinación, mayor tangente y si está más acostada tendrá menor inclinación y por tanto menor tangente. Eso básicamente deben manejarlo ellos... Esto **aquí no te piden hacer cálculo directo sino es analizar la pendiente de la tangente en cada punto, así como te la dibujo yo aquí en este caso:** 

... y tendrían que hacer esto del dibujo para resolverlo, es decir trazar las tangentes.

Entonces en la pregunta en que me detendría a explicarte sería la c), qué es mayor la cantidad de agua que se estaba consumiendo a las 9 horas o a las 14 horas... Entonces miramos la inclinación que tiene la recta tangente a las 9 y la que tiene a las 14 horas, entonces al trazar estas tangentes en este instante, vemos que a las 9 horas tiene una mayor inclinación, lo que indica que hay un mayor consumo. Ah y en cuanto a la d) bueno lo mismo la tangente que tenga mayor inclinación. **En cuánto a la pregunta en qué unidades se medirá el agua que se está consumiendo en un instante específico, me parece una pregunta muy interesante, porque el estudiante descuida a menudo las unidades de medidas, y las unidades son interesantes... y además allí entraríamos nosotros de pronto a reforzar si el estudiante comete el error de no escribir las unidades correspondientes o de escribir otras equivocadas y también permite ver si los estudiantes entienden la derivada como una razón de cambio entre magnitudes.**

E/: Y qué del punto 4, cuéntanos un poco...

4-a) El coche A ha recorrido la misma distancia que el coche B en ese tiempo. La pendiente de la recta tangente en P es mayor que la de la recta de B
b) La velocidad del coche A es mayor. El mismo argumento dado en el ítem a)
c) Sí, pues hay un momento (aprox. 10 seg.) en que la recta tangente es paralela a la recta (iguales pendientes)
d) En el punto P, porque la pendiente de la recta tangente es mayor en ese punto (mayor inclinación)

R/: 4 a) El punto 4 me gustó mucho, porque esto lo trabajamos en física... sí entonces, acá nosotros utilizamos automóvil y aquí dice coches... El coche para

nosotros es el que tiene caballo... *(risas)...* Bueno**, aquí también se usa la recta tangente a la curva**, en la primera pregunta, sobre qué ocurre en el punto P de la gráfica, entonces comencé a analizar la gráfica desde abajo, desde antes del punto P a la gráfica correspondiente al coche A y noté que la tangente tiene mayor inclinación en el punto P y esto significa que la velocidad en ese punto es mayor para el coche A y eso hace concluir que en ese punto el coche A se alcanza al coche B para sobrepasarlo no... Ese es lo del punto P... porque en realidad alcanza a recorrer la misma distancia en el mismo tiempo...
b) En cuánto a cómo son las velocidades en el punto P... de hecho la velocidad de A es mayor que la velocidad de B, entonces son diferentes... Además hay que anotar que la velocidad del coche B es constante... y la del A es variable, aumenta y luego entra a disminuir...
c) Sí en este instante... a los 10 segundos... a los 10 segundos, porque al trazar aquí la recta tangente en este punto es paralela con la recta que corresponde a la trayectoria del coche B y lo mismo ocurre aquí en aproximadamente que 3,5... Es decir en los lugares donde las rectas tangentes sean paralelas entre sí. O sea que tengan la misma pendiente, que en este caso es cero. Bueno yo creo que el estudiante que ya tenga bien claro lo que hemos repetido muchas veces de que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en ese punto y que la derivada en un punto es la velocidad en ese punto... **Entonces si él maneja bien esto no tendrá ningún problema, y más aún porque ya hemos visto problemas similares a este se trabajan en física, de pronto no con curvas... no gráficas con curvas como el coche A, sino gráficas rectas... pero el ya maneja de cierta manera desde física de 10º, él maneja situaciones como estas**.
d) Y si preguntas cuál es la velocidad mayor y por qué es mayor, entonces allí usa pendiente, calcula la pendiente del gráfico de distancia contra tiempo.

E/: Qué errores posibles esperas que tus estudiantes cometan frente a esta situación problema.

R/: Bueno... En cuanto a los errores posibles... **que él descuide que el caso que la tangente sea paralela con la recta del coche B**, que descuide esto, y diga entonces que nunca van a ser las velocidades iguales... Ese es un error posible... Que él diga por ejemplo en el b) que las velocidades son iguales... porque se cruzan los dos gráficos... Esto para ellos es lógico, es una idea del sentido común... **Esto obedece simplemente porque ven el cruce de las dos gráficas... o porque ellos hacen una mala interpretación del gráfico porque no están acostumbrado a trabajar con ello confunde la trayectoria con el dibujo del gráfico... y eso es algo que los lleva a creer que en realidad el carro A se mueve en una carretera curva y el otro el B se mueve en una carretera recta... Lo cual habría que trabajar mucho...**

E/: Y por último que tienes que decirnos del punto 5.

5. Si $f(x) = 3x^2 - 2x$, en el punto de abscisa 2, entonces $y = f(2) = 8$
$f'(x) = 6x - 2$, $f'(2) = 10$, esta será la pendiente... y como esta recta tangente pasa por el punto (2,8), entonces:
$y - 8 / x - 2 = 10 \Rightarrow y - 8 = 10x - 20 \Rightarrow -10x + y + 12 = 0$ es la ecuación pedida.

R/: Yo creo que ese sería el más fácil... *(risas)***... el más fácil de resolver, el que más se usa, sí porque allí tendría que calcular únicamente la pendiente por la**

derivada... Porque ya tienen la ecuación... Este es el tipo de situaciones que ellos manejan más. Está como que más fácil para ellos... Yo lo resuelvo así.

PROFESOR C

1. *¿Qué opinión tienes de la evaluación realizada por el profesor x sobre dicho concepto, me explicas las repuestas que diste a cada ítem?*

R/: Yo pienso que... que **para mí particularmente me generó una crisis, puedo decirte sinceramente, que después de haber resuelto esta evaluación, creo que hubo un cambio**... Esa es la verdad... **Pues uno arranca con el primer ejercicio, aparentemente uno dice si uno tiene bien claro algunos conceptos... pero a medida que uno va desarrollando se da cuenta que uno como docente a veces como que tiende a que el estudiante memorice mucho, memorice los criterios... que tales criterios y reglas de derivación y que estos otros... pero cuando en sí es la aplicación del concepto derivada, ya uno como que falla**... Uno nota que por ejemplo,

1-a) Según la gráfica f (5) = 3, puesto que el punto (5,3) pertenece también a la función y = f (x)

a) En la primera parte, dice encuentre f (5), el estudiante enseguida gráficamente creo que puede determinarlo, no creo que haya problema ahí...

1-b) Por definición la pendiente de la recta tangente a la función es igual a la derivada de ese valor (de la abscisa), es decir: f ’ (5) = pendiente = $\Delta y/\Delta x$ = 3 - 1 / 5 - 0 = 2 /5.

b) En esta **parte también lo mismo, pero entonces aquí ya viene el principio de derivada, el concepto de pendiente**. Parece ser que en este ejercicio uno nota que hay una lógica, hay un proceso lógico y que no se sale de unos lineamientos... La verdad es que si el estudiante resuelve esto, eh... de hecho podríamos garantizar que el estudiante comprende el concepto de lo que es una pendiente de la recta tangente a la curva.

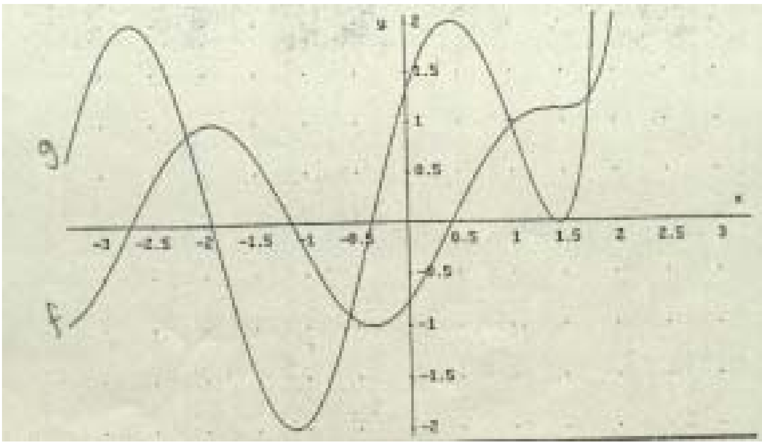
1-c) Podrán decir es que me da lo mismo... casi lo mismo... el mismo valor... que el valor de f (5), porque el intervalo es muy... muy cercano... se puede decir que la tendencia es casi cero

b) Yo no sé... yo tengo algunas dudas en cuanto a que yo reconozco que mis estudiantes no podrían resolver la parte c. O al menos lo que creo yo que me podrán decir, es que me da lo mismo... casi lo mismo... el mismo valor... que el valor de f (5), porque el intervalo es muy... se puede decir que la tendencia es casi cero... es lo que me podrían decir ellos, pero como aquí dice... **sea lo más exacto posible... estoy seguro que esa exactitud... no se si llamarla precisión... estoy seguro que no la darían porque no están acostumbrados a trabajar en clase ejercicios así... sino más de aplicación de algoritmos... reglas... derivar ecuaciones.**

E/: Qué me dices del segundo punto

2. Llamemos las gráficas f y g, según la gráfica g es la derivada de f, puesto que: cuando g >0 entonces f es creciente y cuando g < 0 entonces f es decreciente y esto está acorde con los criterios de f ’(x) > 0 y f ’ (x) < 0 para que f (x) sea creciente y decreciente, respectivamente. Y en los puntos donde f tiene un máximo o un mínimo g es cero... O sea sí f es la función y g es la derivada

R/: Bueno pues esto si ya es... ya podríamos decir que una maravilla... Este, creo que aquí se nota demasiado el ingenio del profesor... yo no sé quién lo hizo... ¿fuiste tú o qué?... Bueno, lo que sí es cierto es que cuando uno ve este tipo de ejercicio uno nota, de que si el estudiante logra resolver este ejercicio es porque en realidad comprende la aplicación de... de los criterios de la derivada... de la primera derivada... cuando es mayor que cero o menor que cero. Particularmente, para mí... para mí como docente me fue difícil... me fue difícil el poder resolver esto, yo creo que nuestros estudiantes o mis estudiantes... tampoco... no lo hubiesen hecho... Claro está que los estudiantes de por sí tienen una habilidad, que uno no podría decir... como decir... o ser tajantes... Pero yo creo que no lo harían... a mi me costó trabajo hacerlo y tuve que pensarlo varias veces, de pronto un estudiante lo hubiese logrado, pues ellos tienen otras...



E/: Pero por qué tú crees que los estudiantes en general no podrán resolver esta situación problema

R/: Es que no... es simplemente porque el profesor es un guía... y a veces uno... uno como docente va encasillando a los estudiantes en el tipo de ejercicio que uno siempre ha trabajado, entonces los estudiantes casi siempre como que uno le limita o le mata mucho la creatividad, esto simplemente es de creatividad, **entonces el profesor que montó este taller, es un trabajo donde se ve que maneja mucho las gráficas y todo el taller está hecho así en función de gráficas, en función de la conceptualización más propiamente dicho**. **Yo creo que este segundo punto, me dejó bastante inquieto sobre el mismo conocimiento que yo tengo de la derivada**. **Además, porque nosotros como docentes, nos preocupamos por proponer ejercicios donde los estudiantes tengan que resolver todo y dar respuestas algorítmicas y no nos hemos preocupado por trabajar sobre análisis de gráficas.**

E/: Y qué tienes que decirnos del tercer punto.

3-a) Según la gráfica el consumo total de agua es de 20 m^3 b) La gráfica muestra que entre las 20 y las 24 h una línea recta, o sea que el incremento en el consumo es constante con respecto al tiempo. c) Según la gráfica a las 9 h, la figura en ese punto presenta mayor inclinación, o sea que la pendiente es mayor, con lo cual existe mayor variación en el consumo es positivo (ver punto a). d) En el punto A =12 seg., puesto que existe una pendiente mayor que en los demás puntos del gráfico. e) $1 < \text{consumo} < 2$, unidades ^{3}, cm^3, m^3, ó litros.

R/: En el tercero también, es una aplicación muy buena de la derivada, uhm... insisto, yo creo que... **que aquí no solamente se maneja el concepto de derivada, sino de muchos otros más... Yo creo que de verdad, es un taller... un taller muy completo, en cuanto se manejan muchos criterios de representación que yo no uso en clase...**

E/: Y qué tienes que decirnos del punto cuarto.

4-a) Punto de encuentro en su trayectoria b) Las velocidades instantáneas son iguales, puesto que habrán recorrido la misma distancia a igual tiempo, pero esto no significa que los cuerpos lleven la misma rapidez, ni la misma velocidad media. c) En los puntos donde se intersecan las gráficas, son las velocidades instantáneas iguales, ese instante los dos coches se encontrarán. d) En el momento en el cual la gráfica de A está por encima de la de B y la pendiente en esos intervalos será mayor. Se debe analizar la gráfica y también manejar el concepto de derivada o de la pendiente...

R/: En cuanto al punto cuatro, **también yo creo que es una aplicación muy buena de la derivada y que nos lleva aun concepto muy claro de velocidad, pero que en la medida que uno empieza a analizar encuentra muchísimas cosas escondidas dentro del mismo ejercicio... o sea que es una... una caja de Pandora**... *(risas)...*

E/: Pero qué errores esperas de tus estudiantes frente a la pregunta b)

R/: ... Yo creo que lo más usual es que nos dijeran que las velocidades son iguales... que nos dijeran que la velocidad en ese punto es igual, pero en ese instante, o sea velocidad instantánea, porque eso uno lo hace ver, que no es velocidad media y mucho menos rapidez que es lo que uno maneja en física... En cuanto a eso yo en la parte de matemática... yo... yo hago bastante énfasis en eso... Y en cuanto a la última parte, cuándo crees que el coche A tiene mayor velocidad, sí entonces, aquí si analizamos la gráfica, el estudiante debe analizar la gráfica y también manejar el concepto de derivada o de la pendiente... si no logra hacer eso, obviamente nunca podrá determinar en qué instante el coche A puede tener mayor velocidad que el B... o sea que lo que te estoy planteándote, es que este tipo de taller o de evaluación está en función o en base de funciones, de gráficas, pero que dicen mucho más... que uno en la medida que lo empieza a analizar eso no está dando mucho más conocimiento que simplemente hacer unos ejercicios... hallen la derivada de esto... o de esto...

E/: Y qué del quinto ejercicio

5. Si f (x) = $3x^2 - 2x$, entonces la pendiente de la recta tangente es f' (x) = 6x - 2. Evaluada en x = 2 la pendiente es igual a 10, puesto que la derivada nos da la pendiente de la recta tangente a la función.
f (x) = $3x^2 - 2x$ evaluado en x = 2, será: f (2) = 12 - 4 = 8, entonces P (2, 8), como este punto pertenece también a la recta tangente podemos aplicar la ecuación de punto pendiente:
$y - 8 = 10 (x - 2) \Rightarrow y = 10x - 12 \Rightarrow -10x + y + 12 = 0$ es la ecuación de la recta tangente

R/: En cuanto al último ejercicio... Eh... también... este si se maneja... Este es el más cotidiano... De pronto este si fue el más fácil... para que un estudiante lo pudiera resolver... Este es lo que él está acostumbrado a hacer... La parte esta algorítmica de desarrollar en el ejercicio...

E/: Qué comentarios puedes hacernos sobre las posibles dificultades de tus estudiantes frente a la resolución de este examen

R/: Vamos a tratar de fraccionarlas por preguntas... En la primera pregunta la parte a) y la b), la podrían resolver bien, pero la c) eso le generaría crisis, pero que es muy buena, porque esto los va a inquietar a ellos a explorar... a mejorar... Les generará crisis porque como la gráfica, como obviamente no va a lograr a través de estos datos conseguir que es f (x), por intuición uno cree que va simplemente a reemplazar el valor de x, si entonces estoy seguro que no va... que esto le va a generar... Lo mismo en la segunda, en la segunda sí estoy convencido que... que no podrá resolver... quizás, bueno hubiera dicho algo, pero no creo que hubiese logrado responderla. En la tercera, yo creo que la... la parte... no, mentira hay una parte donde preguntan en que intervalo se ha consumido más... sí, sí correcto... eh... a dónde se ha consumido más alas 9 h o a las 14 h. En este punto, bueno porque el se tiene que apoyar en la gráfica y tiene que hacer uso del concepto de pendiente, que también esto le generará algunos conflictos, pero se que estas la podrán superar. En cuanto al cuarto, en el ítem d), cuando preguntan en qué momento el coche a tiene mayor velocidad, esta parte, también les generaría conflicto a los estudiantes, porque tendría que analizar los conceptos de pendiente y también tener en cuenta la gráfica... en cuanto note, por ejemplo en el punto de 10 segundo está por encima de la gráfica y a la vez la pendiente es mayor... En cuanto a las preguntas a) y b)... yo creo que la b) tiene o es de más análisis... El te va a decir lo que posiblemente ocurre... lo que si va... o también puede generarle como que un estado de... de mayor complicación para él, es la pregunta b) porque estamos hablando de velocidades, y uno aquí casi siempre va a tender a confundir de que como esto es una línea recta, estoy seguro que ellos lo podrán plantear ya como un movimiento uniformemente acelerado... pero ellos relacionan... Y del quinto no, esta es la parte algorítmica que es la que uno maneja...

PROFESOR D

1. *¿Qué opinión tienes de la evaluación realizada por el profesor x sobre dicho concepto, me explicas las repuestas que diste a cada ítem?*

R/: Primero, felicito al profesor que realizó este examen, porque es un examen de mucho análisis, de mucha interpretación, que ayuda al alumno a... pues digamos a visualizar mejor ese concepto de derivada sin utilizar muchos cálculos... Es una cosa de mucha importancia que vi en este examen. **Creo que en general tiene... hasta aplicaciones en la física de mucha importancia, el concepto de velocidad, el concepto de... razones de cambio... y de geometría la recta tangente.**.. Me parece un examen muy completo, creo que es un modelo a seguir y a cultivar acá en Barranquilla. Yo **creo sinceramente que mis alumnos no responderían fácilmente un examen como este, creo que no, pues tendríamos que ensayar, pero primero tendríamos que trabajarlo más en el aula, hacer este tipo de preguntas, trabajar con interpretación de gráficos y entonces así si el alumno podría resolver este tipo de problemas.**

E/: Qué diferencias encuentras con el que tú realizaste del concepto de derivada
R/: Sí, de pronto acá se está trabajando más la observación, la interpretación de gráficos y la aplicación de conceptos... Claro que acá nos resulta complejo hacer esto porque esto amerita costos en el profesor, de tiempo, de preparación de impresión, etc... Con esto no quiero escudarme, porque sé que con este tipo de exámenes el alumno avance sobre el proceso. **Acá en Barranquilla, trabajamos más en el punto más numérico, más como función numérica y algebraica, en nuestros exámenes hay que hacer más cálculos algebraicos y en el que tu me presentas**, **en este se trabaja más la interpretación**... se está trabajando mucho más la interpretación, que ojo... ¡ es mucho más importante! **Desde el punto de vista conceptual, que los va a llevar a comprender más ese concepto de derivada**.

E/: Haber, podríamos ahora entrar a hablar un poco sobre las respuestas que diste o más bien que darán tus alumnos a cada ítem, por ejemplo cuéntanos sobre la respuesta a la pregunta 1, y sus respectivos apartados a), b) y c). Y si quieres comentar seguidamente algo sobre los posibles errores esperados en tus estudiantes.

1-a) Como la recta L es tangente a la curva en el punto (5,3) por lo tanto f (5) = 3 ya que el punto (5,3) $\in$ f.

R/: a) Bueno del primer punto verdaderamente que la recta tangente está relacionando el punto (5,3) y ya un alumno a este nivel, pues puede manejar bien el concepto de que el punto 5 en el Dominio su imagen es 3, por tanto, f (5) = 3, porque la recta tangente toca a la función en ese punto. Entonces, los alumnos muy pocos presentarían dificultad en este ítem.

1-b) f '(5) = pendiente de la recta tangente a la curva en (5,3), entonces: m = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5.

b) Bueno ya aquí si tenemos que trabajar más, teniendo en cuenta de que los alumnos ya tienen el concepto de que la derivada representa la pendiente de la recta tangente en ese punto. Y como nos están dando dos puntos por donde pasa la recta tangente, pues solamente es hallar la pendiente, así: m = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5.

No tendrán problemas, siempre y cuando sepa y maneje bien eso de que la derivada representa esa pendiente de la recta tangente en dicho punto. Yo lo veo interesante porque le estás preguntando al estudiante para mirar el grado de comprensión del concepto de derivada, sin colocarlo frente a un problema de álgebra, que lo asuste más.

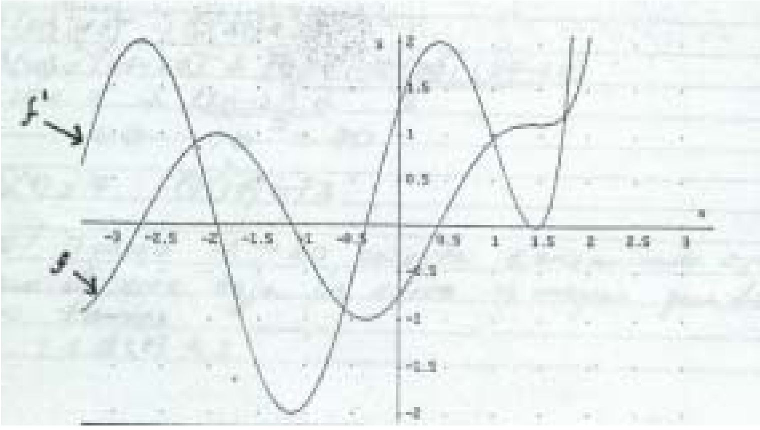
1-c) f '(5)≈$\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$; como Δx = 0,08 ⇒f '(5) ≈ $\frac{f(5+0.08)-f(5)}{0.08}$ ⇒$\frac{2}{5}$(0, 08) ≈f (5, 08)-3 ⇒ f (5, 08) ≈ 3, 05

c) **Sí el pues, este 5, 08, pues como no tenemos una función definida, es decir como no tenemos la ecuación o la ley de esta función, pero sí nos ayuda un poco a observar que ese incremento relativo, se hace muy próximo a ese 5,08 y esto nos ayudaría a calcular la imagen de ese 5,08 a través de ese concepto de incremento relativo y nos daría un valor muy aproximado en el gráfico**. Además lo interesante de este punto, es que acercamos a los estudiantes a trabajar con valores aproximados en matemáticas y es algo alternativo al tipo de respuestas precisas que siempre le pedimos que nos den. Sí porque si bien es cierto que la matemática exige precisión, también la aproximación es una parte válida del proceso matemático. Yo creo que mis alumnos a que si van a presentar esa... pues mis alumnos, si van a presentar dificultad, te lo digo sinceramente, porque... pues estas aproximaciones nunca... nunca las hemos trabajado... sinceramente y menos a partir de un gráfico... Pero me parece a tener en cuenta este aspecto en el futuro. Yo lo hago así:

E/: Y en cuanto al segundo punto

2. Si hay función derivada, porque al observar las gráficas, los puntos críticos (máximos o mínimos) de una función f, corresponden a los ceros para la otra la función f '. Además la función f es creciente de -∞ hasta –2, por tanto la función f ' toma en este intervalo valores positivos; de -2 a –0.5 f es decreciente y f ' toma valores negativos, etc. Además, de -2,5 a -1 f es cóncava hacia abajo y f ' es decreciente, etc.

R/: El **segundo punto... sí este segundo punto me parece de mucho... de interpretación geométrica y de tener claro ya... que el alumno haya trabajo el trazado de gráficas, es decir que una función es la derivada de otra o no**. Digamos que si observamos los puntos críticos que aparecen allí, serían cero para la otra función, que sí aparece en ambas, con lo cual aquí los estudiantes podrían decir sí corresponden y esta es la derivada de esta, pero en últimas tendrían muchas dificultades porque creo que este problema requiere del dominio de estos conceptos y no sé hasta dónde mis estudiantes los tienen, porque la verdad yo no pongo este tipo de ejercicios ni en los exámenes, ni los hago en la clase...



E/: Qué tienes que decirnos del punto 3

3-a) $\sum_{t=1}^{24} Q(t)$ = Q (t1) + Q (t2) +... + Q (t n)

b) Q (20) = 15 y Q (24) = 20

$$Q(20)\cdot[24-20]+\frac{[Q(24)-Q(20)]\cdot(24-20)}{2}$$

$$15\cdot[4]+\frac{[20-25]\cdot(4)}{2} = 60 - 10 = 50$$

c) Q (9) = 4 y Q (14) = 12, pero la inclinación de la recta tangente a la curva en 9 es mayor que la inclinación en 14, por tanto el consumo en 9 es mayor que en 14.

d) En el tramo 8 $\rightarrow$ 12, se está consumiendo agua, porque el área bajo al curva es mayor que los otros tramos, y porque la pendiente de la recta tangente a la curva es mayor que en los otros tramos. Por tanto, nos quiere indicar que allí hay mayor consumo de agua.

e) Hay que hacer un cálculo aproximado, porque el valor del consumo en este instante 7, corresponde a la tasa de variación instantánea, de seguro las unidades serán de capacidad / tiempo.

R/: Pues, haber este tipo de problemas de interpretación gráfica, pues se sale de los problemas que normalmente nosotros colocamos aquí a discutir en el salón de clase o que le mandamos a investigar a los estudiantes, estos casi siempre están más que todo centrados en los procedimientos algorítmicos. Y éste... Sí es de mayor... de mucha interpretación... exige interpretación geométrica digámoslo así, ubicación del alumno con la gráfica en el plano, y bueno yo creo que tendrían dificultades para resolverlo porque claro no están acostumbrados... pero me parece muy bien y muy sugerente.

a) Aquí vemos preguntas del consumo total de agua a lo largo del día...

b) Del consumo de agua caliente entre las 20 y las 24 h, entonces observamos de que la... de allí tenemos una función lineal en ese tramo. Ahí la relación entre consumo de agua con respecto al tiempo... y la pendiente sería una constante ahí.

c) Ya entre el tramo entre... entre... aquí hay una pregunta de que cuál es mayor la cantidad de agua que se está consumiendo alas 9 o a las 14, observamos que la pendiente es mayor en 9 con respecto a 14, la pendiente, la inclinación de la recta tangente a la curva, por lo tanto nos quiere indicar que allí hay mayor consumo de agua.

d) En esta parte, creo que se está consumiendo más agua caliente en los tramos en donde la pendiente sea mucho mayor, o en el punto donde la pendiente sea mucho mayor. Allí aparece un tramo entre 8 y 12, parece mayor que en los otros.
e) En cuanto a esta parte, la unidad es la correspondiente a una tasa de variación instantánea, es decir medida de capacidad con respecto al tiempo... y el consumo está entre 1 y 2. Entonces nos tenemos que referir a hacer un cálculo aproximado.

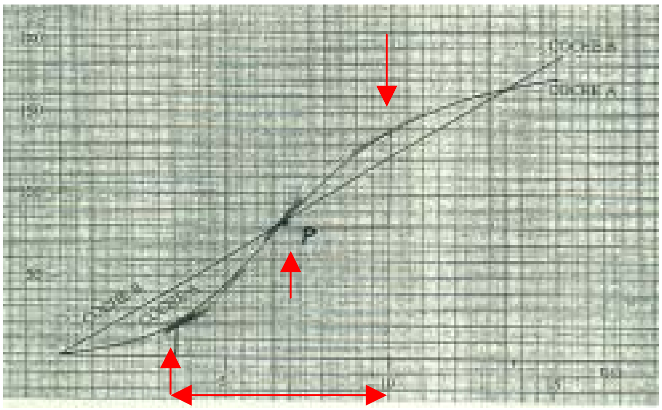
E/: En lo que respecta al cuarto punto

a) Los dos coches se encuentran a igual distancia en ese instante

b) El coche A tiene mayor velocidad que el coche B por tener mayor su pendiente que representa la velocidad y que no es más que la derivada en ese punto.

c) Sí, Sí, donde las pendientes son iguales, es decir cuando la recta tangente a la curva que representa el movimiento del coche A sea paralela a la recta que representa el movimiento del coche B.

d) Donde el tramo de la curva A tienen mayor pendiente que la recta B, aproximadamente de 3,5 a 10 horas, siendo el valor mayor en P (como señala en la figura).



R/: a) Este ejercicio es muy bueno... yo realmente lo he trabajado en la física pero en matemáticas no... pues aquí me centro más en ejercicios donde apliquen la parte de los algoritmos de la derivación..., el cuarto punto habla de una gráfica de distancia vs. tiempo, y nos muestra la trayectoria de dos movimientos diferentes de dos coches. En cuanto a la parte a) En este punto P lo que nos está diciendo es que para ese tiempo están tomando la misma distancia. Yo creo que los alumnos ya deberían tener base de esto, porque ya estamos en grado 11 y ellos ya vieron en física de 10º vieron movimiento rectilíneo y movimiento uniformemente variado, entonces yo creo que si lo resolverán... Yo no creo que los alumnos cometan el error de decir que allí hay un choque o algo por el estilo... No creo... Sí el alumno interpreta bien, los gráficos de x contra t y v contra t, no debería tener dificultad allí... y podría presentarte alguna dificultad en estos alumnos que no dominen esto, pero observamos que de ahí en adelante sigue el movimiento, luego no podríamos pensar que allí hubo un choque.

b) En cuanto a las velocidades en el punto P, yo diría que es mayor... pues en coche A por tener mayor pendiente que el coche B. La pendiente allí va representar la derivada y la velocidad. Ahora, bueno... para los alumnos que tengan facilidad para la interpretación de gráficos en física de dos gráficos, sí te responderán bien... Pero a los alumnos que tengan dificultades muy... muy marcadas en esto y no sólo en el gráfico si no en la interpretación del concepto de velocidad instantánea como la derivada en ese punto... como la pendiente de la recta tangente en ese punto... sí... sí van a presentar dificultades... Pueden decir que son las velocidades iguales... pero eso sería fuerte y habría luego que trabajar mucho para cambiarles estas ideas...

c) <u>En cuanto a las velocidades iguales, si hay... y es donde tiene iguales pendientes, es decir cuando las tangentes de la curva de movimiento de A sea paralela a la trayectoria recta de B... Hay dos tramos, donde la recta tangente... sean paralelas... aquí y aquí... en 10 y 3.5 aproximadamente</u>

d) <u>El coche A tiene mayor velocidad en los tramos donde la pendiente el grado de inclinación tiene mayor pendiente que la de la recta B... Por ejemplo en el intervalo que va de 3.5 a 10 seg. aproximadamente... y más concretamente también en el punto P...</u> bueno pero yo creo que los alumnos si van a tener errores, errores de los conceptos **fundamentales de la física... sí... como interpretación de la velocidad instantánea como la derivada... es decir como la pendiente de la recta tangente a la curva en ese instante... en ese punto...**

E/: Qué opinión tienes del último punto.

$f(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f(2) = 3.(2)^2 - 2.2 = 3.4 - 4 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow f(2) = 8$
$f'(x) = 6x - 2$
$m = f'(2) = 6\cdot(2) - 2 = 10 \Rightarrow m = 10$
$y - y_o = m(x - x_o)$
$y - 8 = 10\cdot(x - 2)$
$y - 8 = 10x - 20$
$10x - y - 20 + 8 = 0$
$10x - y - 12 = 0$, es la ecuación de la recta tangente.

R/: Bueno... En este ejercicio, pues, de pronto... no acá... ese es el tipo... modelo de ejercicio que normalmente evaluamos... creo que los alumnos no presenten ninguna dificultad... A no ser de tipo algebraico... es decir que se equivoquen al aplicar la fórmulas o al hacer los cálculos... pero esto si lo resolverían con mayor facilidad...

PROFESOR E

1. *¿Qué opinión tienes de la evaluación realizada por el profesor x sobre dicho concepto, me explicas las repuestas que diste a cada ítem?*

R/: Para ver, cuando tú me pediste que hiciera un examen del concepto de derivada, yo no conocía este examen, sin embargo, observo que hay algunos puntos que coinciden con los que yo coloco... Sí es una prueba común y corriente que muestra... que puede mostrar en un momento determinado... el grado de avance de los estudiantes en cada uno de los temas propuestos. **Sin embargo, noto también que cuando se trata de gráficas hay que ser muy claro, porque a veces una gráfica no se interpreta tan fácilmente**... Entonces la no-interpretación de una gráfica, sobre todo cuando no se trabaja sobre un papel milimetrado... Eh... que claro que yo pienso que esto que está aquí es una copia... Entonces no se puede tener una visión clara de ellas... **Yo creo que la mayor dificultad que yo veo en este examen está en la interpretación de gráficas, porque considero que interpretar gráfica no es sencilla... interpretar gráfica**... tienen uno que ir sobre el texto original, para ver bien que quiere mostrarnos la gráfica. **Es posible también nosotros adolezcamos de esto**... pero hay que estudiar duro esto de análisis e interpretación de gráficos, sobre todo cuando se tratan de gráficos en 2 dimensiones y en 3 dimensiones... ver el concepto de derivada allí no es fácil para nuestros estudiantes... serían ejercicios nuevos para ellos...

E/: Qué opinión tienes de las respuestas que diste en el punto 1 al ítem a)

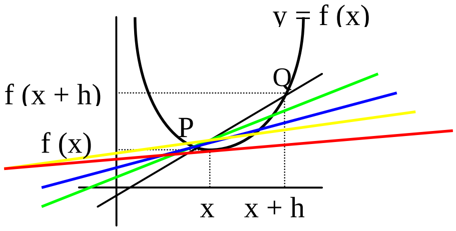
1-a) f (5) = 3 está es la solución... el f (x) está tácito como quien dice, porque aquí el punto (5,3) que es un punto común donde la tangente se tropieza o toca a la curva y = f (x), vemos que tiene una abscisa 5 y una ordenada 3

R/: "Eh... en cuanto al primer punto... yo observo que es un punto sencillo que cualquier estudiante puede resolver, obviamente mis alumnas me irían a preguntar... estoy seguro que me preguntarían y... Profesor... *y = f (x)* y cuál es la fórmula de f (x), porque ellas no entienden y no están acostumbradas a este tipo de ejercicios como este con aproximaciones... en el que aquí digamos, **el f (x) está tácito como quien dice, porque aquí el punto (5,3) que es un punto común donde la tangente se tropieza o toca a la curva *y = f (x)*, vemos que... que ese punto, tiene una abscisa 5 y una ordenada 3...** Luego allí vemos que a f (5) le corresponde 3... 3. Y entonces allí no hay ninguna cuestión, f (5) = 3 está es la solución."

1-b). $M_L = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5 \Rightarrow$ $y - 3 = 2/5 (x - 5)$
$5y - 15 = 2x - 10$
$5y = 2x + 5$
$\boxed{y = 2/5. x + 1}$

$y - 1 = 2/5 (x - 0)$
$5y - 5 = 2x - 0$
$5y = 2x + 5$
$\boxed{y = 2/5. x + 1}$

Debe definir un punto Q (en la curva) para así encontrar la pendiente de la secante y estudiar seguidamente el comportamiento de esta pendiente cuando el punto Q se aproxime cada vez a P. Luego define la recta tangente a una curva en el punto P, como aquella recta que pasa por (5,3) y tiene pendiente 2/5 = m, siendo m = 2/5 el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando el punto Q se aproxima a P, si este límite existe.
P (5, 3) y Q (x + Δx, f (x + Δx))



Pendiente de la recta secante = $\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow$ m = $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

$\Rightarrow \boxed{2/5 = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}}$

b) Ahora cuando nos hablan de f ' (x) si tenemos entonces que tener presente, que la función aquí es y = f (x) = 3 y vemos que ya hay una independencia de... ya... justifica el paso a la solución siguiente, a la derivada.

c) Y <u>cuando se incrementa en 0. 08, ya si tuviésemos que hacer la resta de la función (5 + 0, 08) - 5, porque sería la función incrementada menos la función original dividido por el incremento</u>. Entonces allí se va explicando claramente esto... Y esto será aproximadamente cercano a 3. Entonces sí... sí es un punto muy fácil de trabajar.

1-c) f '(5)≈ $\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$; ya sabemos que Δx = 0,08; que f (5)=3 y que f '(5) = 2/5   ⇒f '(5)≈ $\frac{f(5+0.08)-f(5)}{0.08}$ ⇒ $\frac{2}{5}$(0, 08) ≈f (5, 08)-3 ⇒ f (5, 08) ≈ 3, 05

E/: Para ver, me gustaría que me comentarás algo sobre una expresión que dijiste al inicio de la conversación y es: que las alumnas te preguntarían y = f (x) y cuál es f (x), qué me puedes comentar al respecto.

R/: *Porque* genéricamente, ellas están acostumbradas a que uno tiene que definirles la función, es decir, hay que darles el f (x) igual a algo, o sea la fórmula matemática. Por eso te decía que lo más difícil es cuando vamos a trabajar con gráficos. El estudiante tiene que meterse mucho en el concepto para poder encontrar, y... las variables que se están buscando. Sin embargo te digo que, en eso estoy tratando de trabajar fuerte... Porque con la reforma de las nuevas pruebas del estado que vienen ahora, juega un papel importante el concepto de función, juega el papel importante el concepto de a través de una gráfica definir las variables de una función, es decir interpretación de gráficos para poder resolver los ejercicios... Este es un elemento positivo en esta evaluación.

E/: Ahora cométanos algo del segundo punto de este examen

2. Más claridad en la gráfica para poder resolverlo.

R/: Bueno en el segundo punto yo observo que hay dos funciones que sí tienen algo en común... parece ser que una de ellas es la función derivada de la otra, pero no se ve claramente. Yo creo que no... que no se ve claramente... pero no es culpa de esta evaluación... sino que es culpa, creo yo de que... yo pienso que no hay como que un papel milimetrado para que me pueda mostrar la variación de una... Bueno a ver, una está por debajo de la otra, pero no tengo exactamente el punto. A ver esto estará en el centro en el centro, no sé... Esto está a cuánto aquí arribita... no sé... Es decir no puedo determinar bien porque no hay un... una... eh... una... que te digo... la recta metrizada no... no... no tengo un parámetro claro... Entonces yo creo que aquí sí... si van a tener problemas mis alumnas en la resolución de este ejercicio, por la poca claridad que tiene la gráfica, pero obviamente no es un ejercicio difícil, siempre y cuando se conozca bien la distribución y la escala de medición en la que está. <u>Quisiera este ejercicio analizarlo más detalladamente... ¡pero después!</u>

E/: Bueno explícame la respuesta que diste para el punto 3.

3-a) 20 litros o m^3 b) 20 h $\rightarrow$ 15 $\rightarrow$ P1 (20, 15) $\Rightarrow \frac{20-15}{24-20} = \frac{5}{4}$, transcurren 4 horas y se consumieron 5 litros 24 h $\rightarrow$ 20 $\rightarrow$ P2 (24, 20) c) 9 h $\rightarrow$ 4 $\Rightarrow$ 14 h > 9 h 14 h $\rightarrow$12 d) Habría que determinar los puntos y observar entre qué hora y qué hora se consume más. e) Aproximadamente 1,8 litros o m^3

R/: Cuando comencé a leerlo me extrañó de que no hubiera unidades de medición, pero al final veo que lo colocan aquí. Sí... esto es un ejercicio donde no hay más que una... gráfica de Q contra t, donde se dice que... que en un hotel se consume agua caliente durante un día... y nos da la función que va desde tal hora hasta el consumo... Que me imagino que será en litros o cm ^{3} ó m^3...
a) Sí en el día se consumen 20 litros o 20 cm^3, transcurrido 24 horas.

b) Entre las 20 y las 24 horas, bueno según lo que puedo ver aquí han transcurrido 4 horas y se han consumido 5 litros o cm^3. Si porque aquí vemos los puntos (24, 20) y el (20, 15)... Entonces, haciendo un cociente diferencial allí, se obtiene que en 4 horas se consumen 5 litros.

c) Observamos también como es mayor la cantidad de agua caliente que se está consumiendo a las 14 horas, porque a las 14 h ya se han consumido un total de 12 litros aproximadamente, mientras que a las 9 h se están consumiendo apenas 4 litros de agua caliente, mientras que a las 14 se han consumido 12 litros. Sí el estudiante puede establecer un punto... y compararlos... también aquí es muy fácil en el aspecto de que él halle... la pendiente de... de la tangente a la curva en ese... ese punto y por allí puede determinar fácilmente estas cuestiones.

d) Cuándo cree que se estaba consumiendo más agua caliente, bueno eso... eso depende, porque... depende del intervalo donde lo vaya a tomar... depende del intervalo donde lo vaya a tomar, porque aquí de 6 a 12 yo noto que hay un incremento bastante grande en el consumo... Porque de un litro que se ha consumido a las 6 de la mañana, a las 12... 11 litros, o sea que se han consumido 10 litros, en esa parte de aquí, después fíjate tú aquí... desde las 12 en donde se han consumido aproximadamente 10 litros hasta las 15... hasta las 20 se han consumido apenas 5 litros... o sea la variación depende donde el tipo de horario que quiera uno analizar... yo creo que allí... cuándo cree que se está consumiendo más agua... yo pienso que eso tiene una dependencia del intervalo que uno quiera medir.

e) Bueno a las 7:00 parece que se está consumiendo casi 1,8 litros ó m^3... Bueno y las unidades... tiene que ser unidad de volumen.

E/: Qué puedes comentarnos del punto 4.

4-a) Se encuentran los carros
b) Han recorrido espacios iguales en tiempos iguales
c) no porque las distancias recorridas son diferentes y esto hace que la velocidad de uno sea mayor que la del otro
d) Siempre porque B tiene aceleración constante mientras A tiene aceleración variable

R/: Aquí... veo por ejemplo que hay dos coches que se mueven verdad... hay una... aquí vemos la aplicación de la derivada en el concepto de velocidad, porque es el cambio de la distancia en la unidad de tiempo... <u>Aquí vemos una recta, el coche B parece que se moviera como en línea recta, pero con un movimiento acelerado, el coche A parece que tiene otro tipo de movimiento, un movimiento como curvilíneo, cierto... Sin embargo, ellos convergen en el punto P, esto nos da un significado que en el punto P se encuentran lo cual no quiere decir que llevaban una mima velocidad, eso no quiere decir eso, sino que uno iba más veloz que el otro pero que lograron encontrarse allí</u>. A mí me da la impresión aquí en P que el coche a es más veloz que el coche B, y... no creo... es decir, con la gráfica como no las estás presentando, no creo que... que en algún momento, tengan la mima velocidad nunca, porque para poder tropezarse allí... es decir en trayectoria el coche A parece recorrer más trayectoria que el coche B, porque mientras B recorre una recta, A está recorriendo una curva. Entonces creo que el coche A... si analizamos esto desde el punto de vista de definir una secante y una tangente para poder definir un cociente diferencial y poder definir la tangente, vemos que el coche A debe tener más velocidad que el coche B, es más en la parte de acá, en toda la trayectoria yo pienso que el coche A tiene más velocidad que el coche B.

E/: Crees que en algún instante los coches A y B tienen la misma velocidad

R/: Yo no creo... no creo, porque cuando pasan por aquí, por el punto P, aquí nada más es un punto por donde pasaron, pero esto no quiere decir que tengan la misma velocidad, porque se encontraron allí, aunque aquí hay un punto común para los dos... un punto que tiene una abscisa común y una ordenada común, pero esto me indica que por allí iban...

E/: Y por último qué tienes que decirme del punto 5.

- Esto lo pueden resolver antes de conocer las fórmulas o reglas de derivación, utilizando la derivada como un límite del cociente incremental de la función. Pero es muy largo.
- O de manera corta utilizando las reglas de derivación: $m = f\,'(x) = 6x - 2$, entonces:

$m(2) = f\,'(2) = 6(2) - 2 = 10$, Entonces como $m = 2$ y $f(2) = 3(2)^2 - 2.\,2 = 8$
$m = 2$ y $P(2,8) \Rightarrow\; y - 8 = 10(x - 2)$ (aplicando la ecuación punto pendiente)
$\boxed{y = 10x - 12}$; **Y ojo:** $m = 6x - 2$ (indica la pendiente de la recta tangente en cada punto del dominio de la función).

R/: El quinto punto no es más de lo que hemos venido hablando, es más... es lo más tradicional, es lo que generalmente evaluamos. Es fácil.

ANEXO 5

TRASCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA 4: ENTREVISTA CON VIÑETAS SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA

PROFESOR A

I . ¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.

R/: Yo veo a la derivada básicamente como una razón de cambio, pero al formalizarlo desde la rigurosidad matemática es,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{h} \text{, Ec. 1}$$

... la definición formal, pero siempre ya desde el punto de vista didáctico como profesor de matemática todo el trasfondo que hay allí. Es muy importante eso que quede bien claro, no quedarse nada más ahí, digamos ese es el modelo matemático, pero que es un constructor de toda una discusión de por qué eso es así, por ejemplo: desde la interpretación geométrica, desde la interpretación física desde el concepto de pendiente y mucho más atrás. Entonces termina allí, pero eso es digamos como decir bueno esto *(señalando la ecuación 1)* como decir bueno, lo representativo, el icono, pero detrás de ese icono hay toda una construcción de lo que es la derivada.

Es decir que desde la interpretación geométrica la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado, desde la física es una razón de cambio por ejemplo, buenos ejemplos son la velocidad instantánea, la aceleración, el flujo de un fluido en un tiempo determinado, el caudal, la relación oferta y demanda en economía en un punto determinado.

II

¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.

R/: Si f (x) es la función x^2, la derivada 2x representa la recta tangente a la curva f (x) = x^2 en un punto (x, y), o sea la ecuación 2x viene a representar el modelo matemático de la recta tangente a la función f (x) = x^2 en un punto (x, y). En el supuesto caso que se diga f ’(0), ese f ’(0) vendría siendo la pendiente de esta curva, que efectivamente sería en la parte donde tiene el mínimo. O sea desde este punto de vista está el modelo estructural de lo que es derivada, pero cuando ya tu le colocas o le das un valor viene el caso específico y digo que es f ’(1) me da 2 en ese punto 1 en donde aquí también da 1, sería la recta tangente a la curva f (x) = x^2, verdad, cuya pendiente da 2 y pues se puede inclusive calcular el ángulo de la recta tangente con la curva en ese punto.

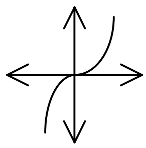
III

Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de f x) = 4^x, en x = 2. Explica y justifica la solución.

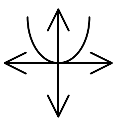
R/: Bueno ahí hay dos formas o hay varias formas. Una utilizar el procedimiento de derivar, se deriva una función exponencial, que esto tiene un algoritmo, tiene un álgebra y se calcularía después esa derivada en ese punto, que sería el logaritmo natural. Ahora que va representar, igualmente en ese punto 2 y su correspondiente que sería 4^2 que es 16, en este punto (2, 16), representaría la recta tangente a la curva exponencial 4^x. Ahora se puede hacer algorítmica mente, o sea utilizando la derivada, igualmente se podría utilizar una calculadora de gráfica para trabajar esta gráfica en este punto y ver que la recta es tangente efectivamente coincide, es decir tanto la parte algorítmica como la parte gráfica.

IV

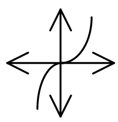
Si tienes el gráfico de la siguiente función:



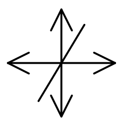
a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



I. ☐



II. ☐



III. ☐

b. Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

R/: Bueno, esta no tiene ecuación *(señalando a la gráfica 1)*

E: No simplemente tenemos el gráfico de esta función y tenemos estas otras tres, entonces la situación problema es, dada esta función (gráfica 1), encontrar el gráfico de su función derivada y justificar la respuesta elegida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

R/: Bueno hay que analizarlas a ver *(pasan 10 segundos y pregunta nuevamente)* ¿puedo escribir? *(Respondo afirmativamente) (pasan 18 segundos más y vuelve a preguntar).* O sea así por observación esto viene a ser una parábola cúbica, que sería igual a x^3 y la derivada sería $3x^2$, sí eso es así la primero sería la derivada de esta. Pues sí es la que más se aproxima porque esta tiene origen cero, en este caso la I sería la derivada.

E: ¿Y por qué no las otras dos?
R/: primero porque esta la II volvería a ser una cúbica y III es una lineal, y la derivada de esta función que me das es una cuadrática y la forma de la cuadrática es esta *(señalando la I nuevamente).*
E: ¿Tienes alguna otra argumentación que dar o crees que con esta es suficiente?
R/: Bueno en ésta porque me di cuenta que era la cúbica, ahora de qué otra manera... podría hacer una superposición de estas dos gráficas a ver... para ver si es tangente (*señala la gráfica III e intenta ver si es tangente a la curva de la gráfica 1*)... Pero es que el gráfico que me das me ayuda para saber cuál es la respuesta

E: ¿Pero en el caso que nos den gráficos de funciones dónde no sea fácil identificar la ecuación que rige su comportamiento?
R/: Tendría que hacer un manejo gráfico verdad, tendría que hacer un manejo gráfico y de pronto aquí estoy cayendo un poco en por qué a lo mejor contesté el punto 2 del examen que me diste que elaboró el profesor de España, de pronto erróneamente, porque aquí uno no ve que esto sea *(toma el instrumento examen y señala el gráfico del punto 2)*... eh... tangente en algún punto de acá, pero mirando la derivada de esta que es esta *(señala ahora las gráfica 1 y la I de la viñeta)* sí es posible que una curva sea la derivada de la otra, **entonces posiblemente tenga un error en el, en el procedimiento que hice en el punto 2 del examen... Pero claro! Yo me imagino que los estudiantes van a contestar así, que como es una curva con otra curva no hay tangente. Pero si es posible**... Sí, si se maneja el modelo ¿no? Quiero aclarar que aquí de pronto estoy muy sesgado a ver el modelo matemático para poder trabajar con esto y de pronto mirar otra forma... gráfica sería. Pero me parece que... *(baja la voz a tal punto que no entiendo lo que dice)*

V

Observa las siguientes gráficas:

Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

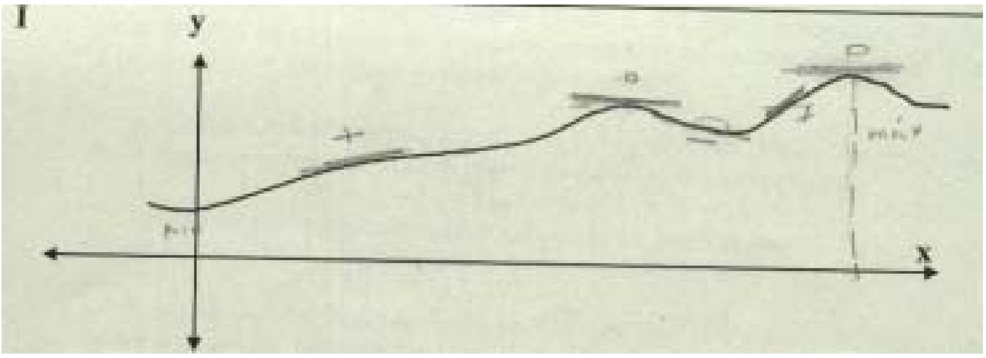
- Para valores mayores (o de crecimiento más rápido) → $\boxed{+}$
- Para valores menores (o de decrecimiento más rápido) → $\boxed{-}$
- Para valores nulos → $\boxed{0}$

R/: Pero en intervalos o en toda la gráfica... Ah dónde es máxima en la primera gráfica... En dónde es máxima puedo dar más de uno o uno sólo? *(No los que tú consideres)*

E: Te repito la situación, lo que te preguntamos es dónde la tangente es máxima (positiva), dónde es mínima (negativa) y los puntos donde la tangente es cero.
R/: Ah... bueno, dónde es máxima, dónde es cero, ahora sí te entendí... dónde la tangente es cero, ah bueno aquí es cero, aquí es cero, aquí es cero *(señalando en un*

folio que le proporcionamos donde se encuentran los tres gráficos)... Ahora aquí es positivo entre este trayecto, aquí es positivo y... ¿dónde es negativo?... bueno... aquí es negativo, y aquí es positivo.

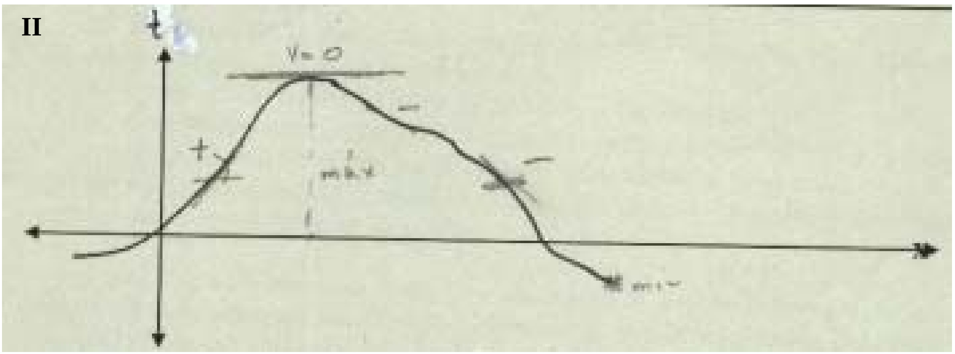
E: ¿Dónde crees que la función tiene la pendiente de la tangente es máxima en qué punto?
R/: Máxima, pero ¿a qué te estás refiriendo al punto máximo o a dónde la función es creciente? Porque si es el punto máximo, máximo sería aquí, dónde alcanza el punto máximo *(Señala en la gráfica los puntos de las crestas, y afirma que el que está más a la derecha del gráfico es el absoluto)...* Pero este sería el absoluto y los demás serían relativos... ya... Pero igualmente en los puntos donde la derivada es máxima o donde es mínima, por ejemplo en el caso aquí la derivada es cero, bueno así lo entiendo yo...



Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

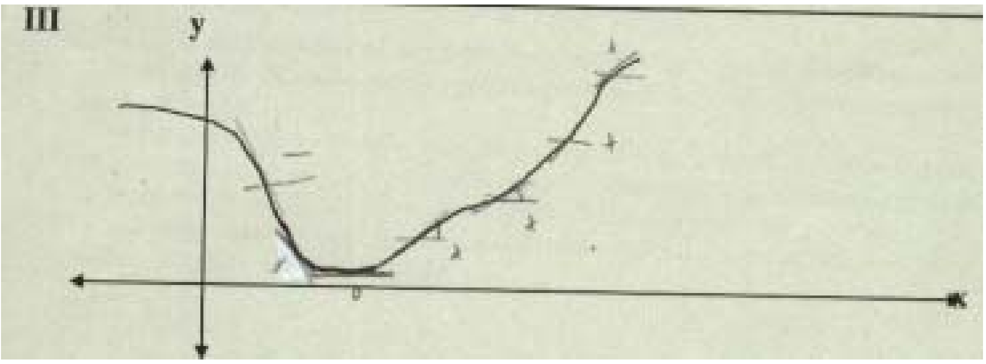
R/: Bueno aquí es cero *(señala la cresta dónde la tangente es paralela al eje de las x)*, o sea como la velocidad es una derivada entonces aquí va a ser cero, verdad. Ahora, en todo este trayecto es positiva porque todas las tangentes son positivas *(señala un intervalo de 0 hasta donde señaló anteriormente v = 0)*, bueno aquí es positiva y entonces aquí es negativa... y aquí también es positiva *(señala un segundo tramo separado más a la derecha)* a ver aquí también es negativa... Si aquí es negativa.

E: A ver si te piden el punto ¿dónde la velocidad es máxima y en qué punto la velocidad es mínima?
R/: Bueno, la máxima... el valor máximo de la velocidad... (20 segundos de silencio)... sería aquí, el valor máximo sería aquí *(y señala la cresta en la gráfica de la figura)* y el mínimo sería aquí *(y señala el final del gráfico)*, creo que me había equivocado"



Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto dónde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

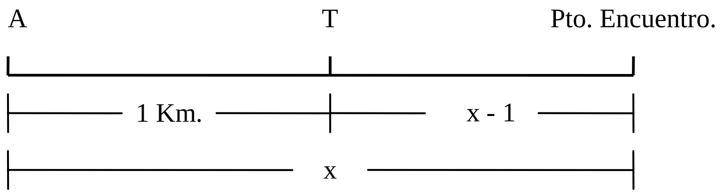
R/: dónde crece más deprisa... Bueno aquí de este intervalo hasta este intervalo decrece bastante... aquí es menos *(lo coloca en el folio y señala el tramo de la izquierda de)*... Ahora aquí crece, positivo; aquí también crece positivo; aquí también crece... En todo este intervalo crece. Ahora el punto más bajo, ¿también lo pides?... Aquí es cero.



VI

E: Hay un problema clásico que le llaman "la situación de Aquiles y la tortuga", yo no sé si tu la habrás oído, la situación es la siguiente: AQUILES TIENE UNA VELOCIDAD DOBLE QUE LA VELOCIDAD DE LA TORTUGA. SI AL INICIAR LA PERSECUCIÓN LA TORTUGA TIENE UNA VENTAJA DE 1 KM, ¿A QUÉ DISTANCIA DEL PUNTO DE PARTIDA DE ALQUILES, ÉSTE ALCANZARÁ O NO A LA TORTUGA?
R/: O sea que la velocidad de Aquiles es el doble que la velocidad que tiene la tortuga *(escribe el dato en un folio, VA = 2 Vt)* y la tortuga tiene qué una ventaja de un km... Yo pienso que ellos llegan al mismo tiempo, ellos tienen el mismo tiempo verdad, ellos deben llegar al mismo tiempo... Y entonces la pregunta es si Aquiles alcanza o no a la tortuga. Lo que pasa es que no encuentro aquí cómo determinar esto... No, no... *(pasan 25 segundos)*, o sea Alquiles alcanzará a la tortuga, porque la velocidad d Aquiles es mayor que la de la tortuga 2 veces, al ser dos veces, en un momento determinado él iguala la tortuga, pero lo sobrepasa al llevar una velocidad mayor y al recorrer una distancia que es la misma, ¿no?, o bueno pero el tiempo sí, porque es un movimiento uniforme, entonces Aquiles alcanzará a la tortuga. Ahora,

¿a qué distancia? ¿Exactamente a qué distancia? *(Dibuja un esquema en el folio así, y dice: si este es x...)*



$V_A = 2\,V_T$, t el mismo.

$$1)\ V_A = \frac{x}{t} \qquad 2)\ V_T = \frac{x-1}{t}$$

$$\frac{x}{t} = 2\left(\frac{x-1}{t}\right) \Rightarrow x=2x-2 \Rightarrow x=2$$

E: Si te pidiéramos que explicarás la respuesta obtenida, o sea qué significado tiene ese 2 Km.

R/: Bueno se refiere a que la diferencia entre Aquiles y la tortuga es de 1 km., ¿cierto? Lo que le resta la tortuga para llegar a su punto final, sería esa diferencia, o sea el total que le hemos llamado x menos la diferencia... entonces, ¿qué viene representando el dos?, qué vendría representando el 2... *(silencio de 10 segundos)*, en este caso el... el...el 2 viene a representar la distancia completa al punto de llegada, entonces como la distancia completa es el punto de llegada, en ese punto, o sea en la meta exactamente, Aquiles igualaría y sobrepasaría al límite a la tortuga, o sea en ese instante, en ese instante; Porque si miramos que x es igual a 2, y miramos esto acá matemáticamente, al reemplazarlo en el reemplazo de esto, 2 - 1 es lo que le hace falta, es la otra parte del kilometraje para que esto sea dos, o sea que exactamente en la meta, exactamente en la meta, Aquiles va alcanzar a la tortuga, pero en la meta exactamente.

PROFESOR B

I. ¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.

R/: El concepto de derivada, la derivada en un punto viene siendo como la pendiente de la recta tangente en un punto y que es igual al límite de la variación de la función sobre la variación de la variable independiente, cuando la variación de la variable independiente tiende a cero. Y daría el ejemplo del caso de la velocidad instantánea o de la aceleración en la física. En general es una razón de cambio que es el límite del cociente incremental cuando el Δx tiende a 0.

II

¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.

R/: Si f (x) es la función x^2, la derivada 2x, yo entiendo acá que f ’(x) = 2x, o sea que la función derivada es igual a 2x. La función derivada de f (x) = x^2 es f (x) = 2x. Mira si tengo, f (x) = x^2 derivo y es 2x, aquí para cualquier x le corresponde un f ’(x) =2x y esta es la función derivada, o sea un F (x) = 2x, es decir otra función. Esto me da cualquiera de las rectas tangentes a la función f (x) = x^2 en cualquier punto. Y entonces el muchacho aquí si quiere hallar una tangente particular, basta con que le de el valor de x, si x = a, entonces a ese *a* le corresponde un: f ’(a) = 2a.

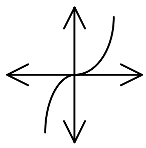
III

Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de f (x) = 4 ^{x}, en x = 2. Explica y justifica la solución.

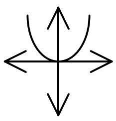
R/: Sí f (x) = 4 ^{x}, cuál es la derivada de esta función exponencial en x = 2, ¿verdad? Entonces yo primero calcularía la derivada en general f ’(x), que sería 4 ^{x}.ln 4, entonces se reemplazaría el x = 2, f ’(2) = 4 ². Ln 4, entonces con una calculadora hallaría el Ln 4 y lo multiplicaría por 4 ² = 16 y me da el resultado de lo que tú me pides, o sea 22 aproximadamente

IV

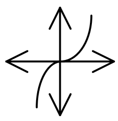
Si tienes el gráfico de la siguiente función:



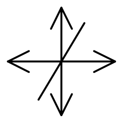
a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



I. ☐



II. ☐



III. ☐

b. Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

R/: Bueno el gráfico de esta función corresponde, por su forma a una función cúbica, y su derivada corresponde entonces a una función cuadrática, porque si la función tiene potencia *n*, entonces la función derivada tendrá potencia *n - 1*. Otro aspecto es que cuando la función es creciente, y esta función que tú me das en el gráfico 1 es creciente en todo su dominio, entonces los valores de la función derivada deben ser positivos. Por tanto yo escojo la I y no las otras dos. Porque las otras dos toman valores negativos en el intervalo de (∝, o) y además los grados de la función derivada son de tercer grado y de primer grado en la II y III respectivamente.

V

Observa las siguientes gráficas:

Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

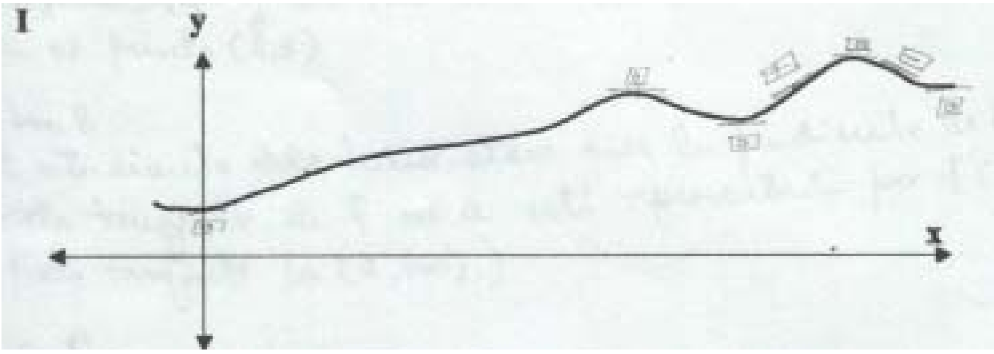
Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (o de crecimiento más rápido) → $\boxed{+}$

- Para valores menores (o de decrecimiento más rápido) → $\boxed{-}$

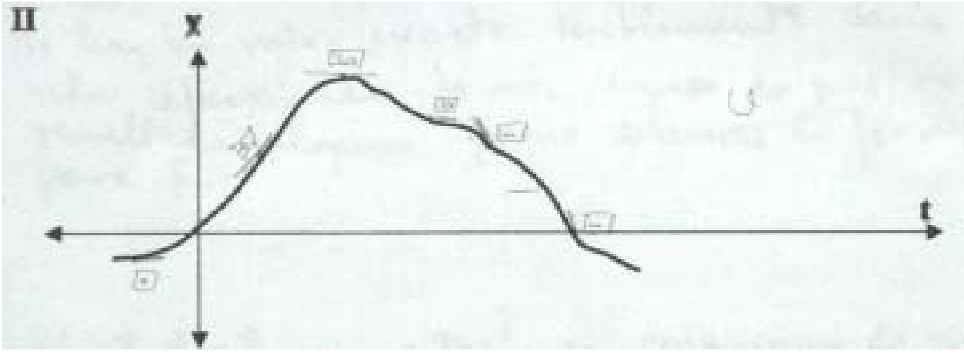
- Para valores nulos → $\boxed{0}$

R/: Bueno primero buscando los puntos donde la tangente es cero, encontramos varios puntos... Perdón tú me dijiste un punto o varios puntos ¿dónde la tangente fuera cero? Yo los identifico con la recta tangente, si es horizontal (paralela al eje de las x), tiene pendiente cero. Ahora un punto donde la tangente a la recta sea máxima, espera, creo que aquí *(y va señalando en el folio que le proporcionamos)*, porque aquí veo que la tangente tiene la máxima inclinación y ahora, decrecimiento, aquí va creciendo, crece, decrece y aquí decrece, ósea sería menor, o sea aquí la pendiente es más inclinada, ósea aquí es menos, aquí la pendiente es mínima, porque la pendiente tiene una inclinación y la curva está decreciendo y la inclinación está en sentido contrario al positivo, en sentido contrario, es decir los valores de la pendiente son negativos.



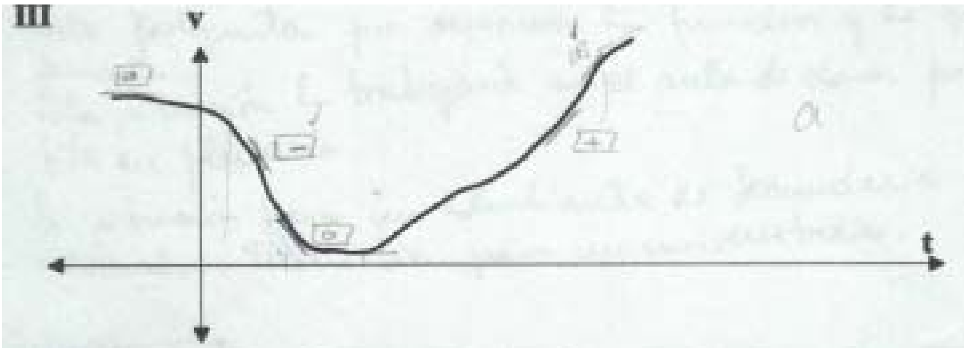
Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

R/: Bueno si me dices un punto donde tenga velocidad máxima, yo lo situaría por aquí, porque aquí la pendiente tiene una inclinación grande y coloco el signo más. Y digo que la velocidad es cero, donde las tangentes son paralelas al eje x y señalo aproximadamente aquí, entonces tenemos uno, dos puntos donde es cero y acá creo que también. Y aquí te repito considero el valor máximo positivo. Por último, veo la posibilidad de dos puntos, porque la inclinación la veo casi que igual. ¡Ojo!, Te hablo de velocidad porque estoy en un gráfico de x vs. T, y la pendiente de la recta tangente en un punto, que es la derivada en ese punto, corresponde a la velocidad en dicho punto.



Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

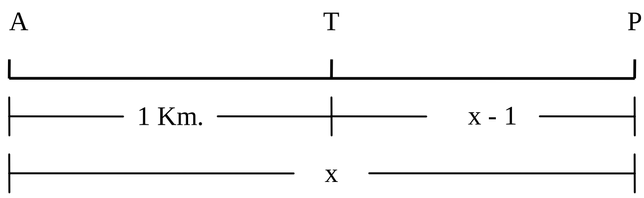
R/: Este es similar al anterior, pero como aquí es V vs. T, entonces quiere decir que aquí estamos hablando es de la aceleración. Entonces en este intervalo grandecito es aproximadamente cero, aquí será negativo, porque decrece, y aquí veo también una tangente horizontal por tanto también será la variación cero. Y aquí va creciendo, entonces será más. Y en ambas la inclinación es mayor. Te pondré en la gráfica un chulito donde creo que crece más y menos deprisa.



VI

E: Hay un problema clásico que le llaman "la situación de Aquiles y la tortuga", yo no sé si tu la habrás oído, la situación es la siguiente: AQUILES TIENE UNA VELOCIDAD DOBLE QUE LA VELOCIDAD DE LA TORTUGA. SI AL INICIAR LA PERSECUCIÓN LA TORTUGA TIENE UNA VENTAJA DE 1 KM, ¿A QUÉ DISTANCIA DEL PUNTO DE PARTIDA DE ALQUILES, ÉSTE ALCANZARÁ O NO A LA TORTUGA?

R/: (Silencio de 26 segundos)... Si cómo enfrento yo este tipo de problemas... tratando de hacerlo con un poco de experiencia que se tiene. Planteando un esquema donde tenga unos dibujos, uno donde esté Aquiles [*y dibuja en una hoja]*... y más adelante a 1 Km., está la tortuga, luego a una distancia más adelante está el punto de encuentro... si... es decir, que desde donde está Aquiles hasta el punto de encuentro, le llamo X, luego la distancia del punto de partida de la tortuga al punto de encuentro será X-1 Km., bueno yo tomo como dos movimientos uniforme, donde la velocidad de Aquiles es el doble del de la tortuga. Entonces intento plantear un sistema de ecuaciones lineal 2x2, fíjate que voy a usar matemáticas. Dos movimientos rectilíneos, entonces la distancia X va a ser igual a la velocidad de Aquiles por el tiempo empleado, el tiempo empleado por ambos hasta el punto P de encuentro debe ser igual. Y la distancia que recorre la tortuga hasta el punto de encuentro será X - 1 Km., y será igual a la velocidad de la tortuga por el tiempo. Entonces trato de tener un sistema lineal 2x2, sabiendo que la velocidad de Aquiles es el doble de la velocidad de la tortuga *(ver hoja anexa, donde realiza los cálculos)* y llega a X = 2.



$V_A = 2\,V_T$, t el mismo.

1) $x = V_A.t$ 2) $x - 1 = V_T.t$

3) $x = 2(V_T).t$ 4) $x - 1 = V_T.t$

$$\frac{(3)}{(4)} = \frac{x}{x-1} = \frac{2V_T.t}{V_T.t}$$

$x = 2\,(x - 1) \Rightarrow x = 2x - 2$

Por tanto, $x = 2$ Km.

Esto quiere decir que por este procedimiento algebraico, desde el punto de partida de Aquiles hasta el punto de encuentro hay 2 Km. y desde el punto de partida de la tortuga hasta el punto de encuentro hay 1 Km., o sea que Aquiles se lo alcanza a los2 Km. Del punto de partida.

E: Si te pidiéramos que explicarás la respuesta obtenida, o sea qué significado tiene ese 2 Km.

R/: Ahora, la explicación que le doy desde un punto de vista cualitativo es: cuando Aquiles ha alcanzado el punto de partida de la tortuga, la tortuga ha recorrido 1/2 de Km., cuando Aquiles avanza el ½ Km., la tortuga ha avanzado ¼ de Km. más... *(risas)* y así sucesivamente, indica esto que aquí se forma que... una progresión aritmética... no... no una sucesión... *(risas)*... esto está fregado... *(risas)*... está bueno este problema... *(risas)*... es una sucesión... o sea que si yo sigo con el cuento, cuando la tortuga recorre... *(silencio de 10 segundos)*... o sea si Aquiles llega al punto que ha recorrido la tortuga, la tortuga se ha movido a su vez la mitad de esa distancia. Si Aquiles se recorre esa mitad, la tortuga recorre otra mitad de lo que había recorrido antes. O sea que si seguimos con eso, se podría llegar a afirmar que la... *(risas)*... que Aquiles no se alcanza a la tortuga *(más risas)*... contrario a lo matemático, que Aquiles no se alcanza la tortuga *(risas)*... Es un problema muy bueno... yo no lo había resuelto. Pero, es algo que deja a uno para pensar por largo rato, cómo es posible que si yo analizo después desde un punto de vista cualitativo, puedo llegar a la conclusión de que Aquiles nunca se va a alcanzar a la tortuga, porque siempre va a ver una pequeña distancia que los va a separar, en últimas será una pequeñísima distancia, pero siempre habrá una pequeñísima distancia entre los dos. En cambio matemáticamente, mejor algebraicamente, al establecer un sistema lineal 2x2, pues me da un resultado de que si lo alcanza a los 2 Km. Entonces, Eh... enlazando el concepto matemático, yo diría que esto, el 2, vendría a ser un límite, un límite de qué, de algo... estoy pensando de qué sería y ese límite nos da 2, debe ser de alguna, de... de la sucesión que nos da aquí, debe ser... sí, ¡así es!

PROFESOR C

I. ¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.

R/: Yo creo que en la primera charla estuvimos definiéndola, como una razón de cambio entre una variable dependiente y una independiente, o sea como yo siempre defino que la derivada es eso, es la razón de cambio entre esas dos variaciones, pero cuando la tendencia es cero, de la variable independiente. Además, hay que tener claro que la derivada en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente en ese punto. Para definir la derivada casi siempre me apoyo más en el movimiento uniforme y el variado, y comienzo a trabajar eso de velocidad y aceleración... ahora también desde años atrás he venido trabajando con la economía, porque el colegio es de especialidad contable, y entonces algo de costo marginal y etc., pero casi siempre me baso más en la parte de velocidad y aceleración para trabajar la parte gráfica del concepto

II

¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.

R/: ¿Qué significa?, para mí significa que esa es la derivada de la función, pero, ¿qué significa?, Aquí según esto, me está planteando que la función f (x) = x^2, eh... cambia, cambia en un punto determinado, me imagino que será en un punto determinado... *(risas)*. Bueno en esta pregunta, estamos diciendo que la función esta f (x) que es x^2, cuya derivada es 2x por las reglas de derivación se que es así, entonces... estamos planteando aquí que... al final esta f (x) es una curva ¿verdad? Y ésta *(señalando a la función y = 2x)* viene siendo la ecuación que va en un momento determinado, nos da el valor de la pendiente de la recta tangente... en un punto x o x_o, que va a tocar a la gráfica de la función f (x), en un punto... si en un punto, donde existe una variación de la función.

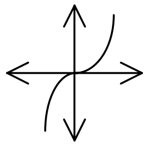
III

Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de $f(x) = 4^x$, en x = 2. Explica y justifica la solución.

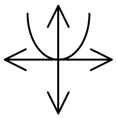
R/: Sí, si... habría que utilizar el logaritmo... Bueno aquí uno **debe utilizar el concepto de logaritmo para, sí para obviamente tratar de que la variable x, que está como un exponencial baje, y después entonces a través de las tablas, o sea manejo de tablas o calculadora puede conseguirse unos valores posibles de ellos**... Es decir, creo que estoy enredando el asunto, más bien podría hacerlo más sencillo **utilizando las reglas de derivación y la evaluaría en 2. Es decir, 4^2. Ln 4**. Es claro está mira, que a pesar de esto, cuando yo hago los talleres, uno siempre lo hace en función de variaciones, pero casi siempre con funciones que no son exponenciales, casi siempre con funciones polinómicas, pero casi nunca se trabaja con este tipo de funciones, ya aquí cuando uno utiliza este tipo de funciones, lo que aplica es la regla específica de derivación, para resolver este tipo de derivadas y luego reemplazaría al resultado el valor de x = 2.

IV

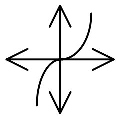
Si tienes el gráfico de la siguiente función:



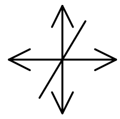
a. *Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:*



I.



II.



III.

b. *Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.*

R/: Yo escogería la I, bueno de todas maneras, si esta es la función *(señala la gráfica 1)*, esta es la función f (x), vamos a suponer que es una función elevada a la *n*, la derivada me daría elevada a la *n - 1*, esta para mí podría ser una función cúbica, y entonces la derivada tendría que representar a una cuadrática, que es la I, y por eso escojo la I.

E: ¿Y por qué no las otras dos?
R/: primero porque la II volvería a ser de la misma potencia de la función inicial y III porque es una de primer grado.

E: ¿Tienes alguna otra argumentación que dar o crees que con esta es suficiente?
R/: bueno, no yo lo entiendo así.

V

Observa las siguientes gráficas:

Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

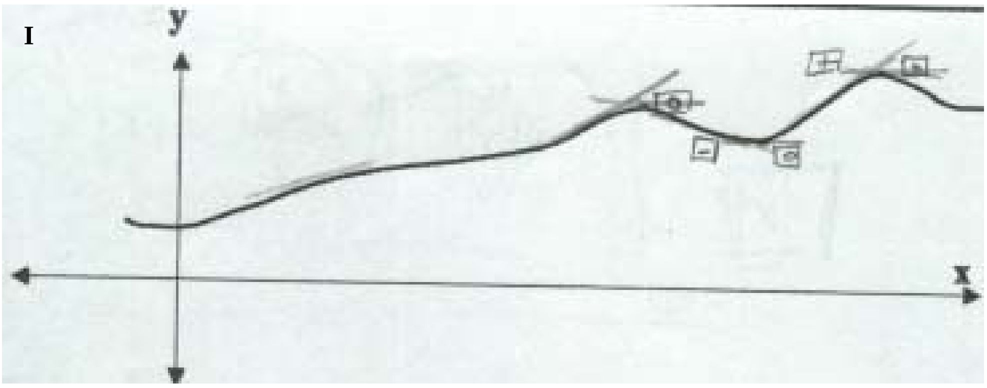
Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (o de crecimiento más rápido) → $\boxed{+}$

- Para valores menores (o de decrecimiento más rápido) → $\boxed{-}$

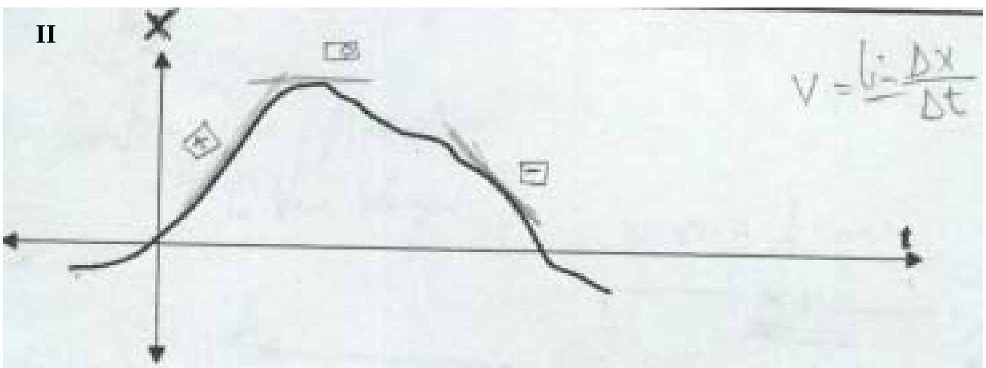
- Para valores nulos → $\boxed{0}$

R/: Tendría yo que colocar los puntos aquí en esta hoja que me das o qué. *(Silencio de 23 segundos)*, yo diría que aquí y aquí es cero, porque aquí hay dos máximos y aquí un mínimo, relativo eh... porque la derivada en estos puntos es cero, porque son puntos críticos, porque la pendiente es cero aquí en estos puntos. Y acá en este punto la derivada es máxima, porque la inclinación es máxima, creo que acá también, pero no acá lo señalo como máximo, porque es mayor la inclinación, la pendiente tiene mayor valor ahí positiva. Y es mínima aquí, es negativa porque la pendiente tiene mayor inclinación, la pendiente tiene valor ahí negativa.



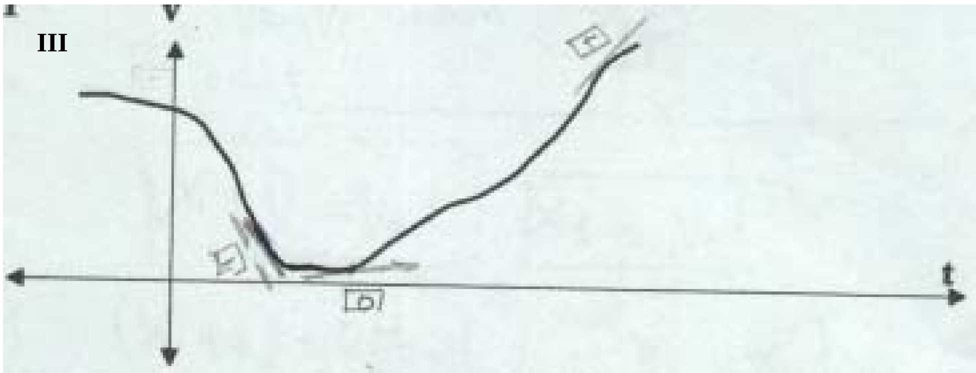
Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

R/: ¿Dónde la velocidad? Correcto... *(silencio de 31 segundos)...* Realmente por qué uno aquí no trabaja con este tipo de ejercicios... Bueno listo *(silencio de 10 segundos)...* Bueno supuestamente nosotros manejamos que la velocidad es el cambio de la distancia en el cambio del tiempo, entonces lo que me pides hallar es la derivada, más que todo la derivada, entonces donde exista mayor pendiente positiva, ahí va a ser mayor la velocidad, puede ser aquí. Aquí va ser cero, porque la tangente es paralela al eje de las x y aquí por ejemplo, va a ser negativa y entonces la velocidad es mínima.



Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

R/: Aquí... dónde es que decrece... Aquí en este punto... hay un cambio, para mí debe ser cero aquí, la pendiente es nula... Y cuando decrece, aquí en este punto porque la pendiente es negativa, y crece aquí porque la pendiente es positiva y tiene mayor inclinación.



VI

E: Hay un problema clásico que le llaman "la situación de Aquiles y la tortuga", yo no sé si tu la habrás oído, la situación es la siguiente: AQUILES TIENE UNA VELOCIDAD DOBLE QUE LA VELOCIDAD DE LA TORTUGA. SI AL INICIAR LA PERSECUCIÓN LA TORTUGA TIENE UNA VENTAJA DE 1 KM, ¿A QUÉ DISTANCIA DEL PUNTO DE PARTIDA DE ALQUILES, ÉSTE ALCANZARÁ O NO A LA TORTUGA?

R/: No lo conozco... repite para ver... No han dicho en qué momento verdad, es indeterminado saber hasta dónde va llegar, y como es indeterminado es obvio que se lo va a alcanzar, pues porque esa velocidad es el doble. Ahora el punto dónde lo va a ser, el punto de encuentro será, bueno tendría que hacer la ecuación, me imagino, pero para mí que sí lo alcanza, lo tiene que alcanzar, puesto que la velocidad de Aquiles duplica la velocidad de la tortuga, es tanto cuando él llegue a 2 Km... vamos a ver qué pasa en 2 Km... Cuando el llegue a dos Km., cómo es el doble, será en los 2 Km. Donde se encuentran, bueno no necesariamente tiene que ser en los dos Km., para ver... lo que le lleva es 1 Km. de ventaja, supondré que se encuentran a una distancia cualquiera... y entonces tiene que ser en un punto P, en un punto de encuentro... no podría decir exactamente que sea a los dos Km. Ahora cómo lo haría, bueno tendríamos que suponer que la tortuga tiene una velocidad, y como me dices que la de Aquiles es el doble. Además, suponer que hay una distancia de encuentro, entonces como es un punto de encuentro, lo que vamos a suponer es que la tortuga para llegar a ese punto P deberá recorrer una distancia x_1 y Aquiles tendría que recorrer $x_1 + 1$. Entonces yo plantearía lo siguiente, utilizando las *formulitas (escribe en un folio)*

A T P

1 Km. x_1

x

$V_A = 2\,V_T$, t el mismo.

$$\begin{aligned}
&x_1 = V_T .t\\
&x_1 + 1 = V_A .t\\
&x_1 + 1 = 2.V_T .t\\
&\frac{x_1 + 1}{2V_T} = \frac{x_1}{V_T}\\
&x_1 + 1 = 2.x_1 \Rightarrow x_1 = 1
\end{aligned}$$

Es decir que se encuentran a un Km. más adelante, o sea que a los 2 Km. sí lo alcanzaría, es decir, a 2 Km. de Aquiles.

E: Si te pidiéramos que explicarás la respuesta obtenida, o sea qué significado tiene ese 2 Km.

R/: Bueno este, lo que da la impresión es que la tortuga pasado un tiempo t, recorre una distancia de 1 Km. y en ese momento podemos decir que Aquiles duplica la velocidad, entonces si uno duplica la velocidad, entonces en el doble de la distancia lo tendrá que alcanzar, es lo que yo podría decir allí, no más.

PROFESOR D

I. ¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.

R/: A ver la derivada de una función en un punto la definiría como la pendiente de la recta tangente que toca a la función en ese punto. Además diría que es el límite del incremento relativo cuando él incremento de la variable independiente tiende a cero.

II

¿Qué significa que la derivada de la función y = x² sea la función y = 2x? Explica y justifica la solución.

R/: Pues aquí cuando estamos derivando la función $y = x^2$ y su derivada es 2x, ésta es el comportamiento de la pendiente de la recta tangente con respecto a toda la curva en cualquier punto, es decir, que estamos hablando de otra función... de la función derivada... o sea que todas las tangentes en cada uno de los puntos de la función inicial, se comportarían con esta regla funcional (2x). Es decir que éste es el comportamiento general.

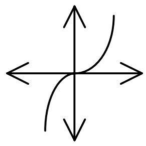
III

Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de $f(x) = 4^x$, en x = 2. Explica y justifica la solución.

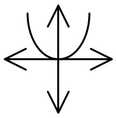
R/: Bueno yo lo haría aplicando la regla de derivación para funciones exponenciales y luego reemplazaría el valor de x. Es decir que en este caso nos daría otra función, que sería:
$y = 4^x \Rightarrow \ln y = x \ln 4 \Rightarrow (1/y) . y' = \ln 4 \Rightarrow y' = y . \ln 4 \Rightarrow y' = 4^x \ln 4$, sería entonces, $f'(2) = 4^2 . \text{Ln } 4 = 16 . \text{Ln } 4$. Y lo que me indicaría es lo mismo, este resultado es otra función que nos indica el comportamiento de las tangentes a la función inicial en los diferentes valores que puede tomar x.

IV

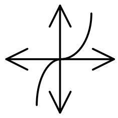
Si tienes el gráfico de la siguiente función:



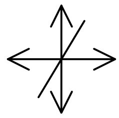
a. Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:



I. ☐



II. ☐



III. ☐

b. Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.

R/: Esta es igual *(señalando a la II y a la gráfica 1)*, no creo que la derivada de una función sea la igual. Esto parece ser una parábola cúbica... Me centrará a analizar el comportamiento de cada una de estas... La derivada de ésta *(señalando la gráfica 1)*... daría positiva... Aquí las rectas tangentes son positivas, en este intervalo que puedo ver, Aquí también... Ahora vuelvo a analizar por tramos a esta función de la gráfica 1, todas las tangentes tienen pendientes positivas, por tanto la función derivada debe tener valores positivos, estar su gráfica sobre el eje positivo de las *y*. Entonces sería esta la I, yo creo que es la I. Además, parece que la gráfica una es una función cúbica, con lo cual su derivada se debe acercar a una parábola a una función cuadrática y es la I la que más se aproxima. Y no escojo las otras dos, porque primero, la función derivada toma valores negativos de *y*, lo cual no obedece con el comportamiento de la función inicial de la gráfica 1, además no puede ser su derivada la misma función, ni la lineal, porque si es una función cúbica debe disminuir en un grado, y no mantenerse, ni disminuir en dos grados como lo hacen las funciones II y III respectivamente.

V

Observa las siguientes gráficas:

Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

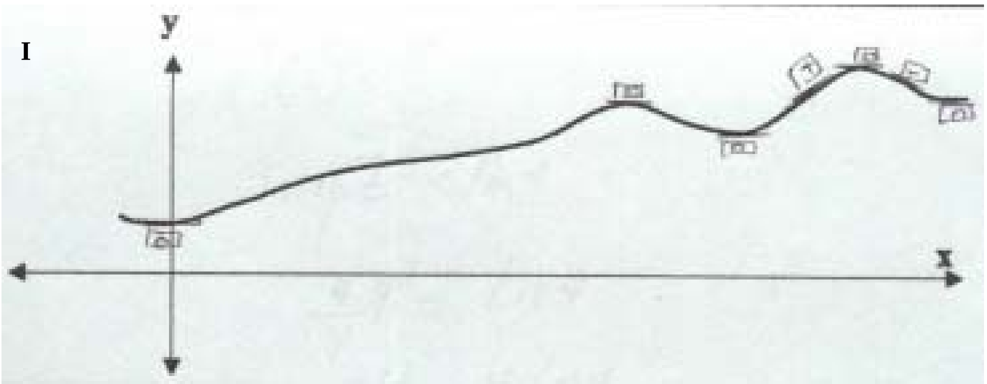
Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (o de crecimiento más rápido) → $\boxed{+}$

- Para valores menores (o de decrecimiento más rápido) → $\boxed{-}$

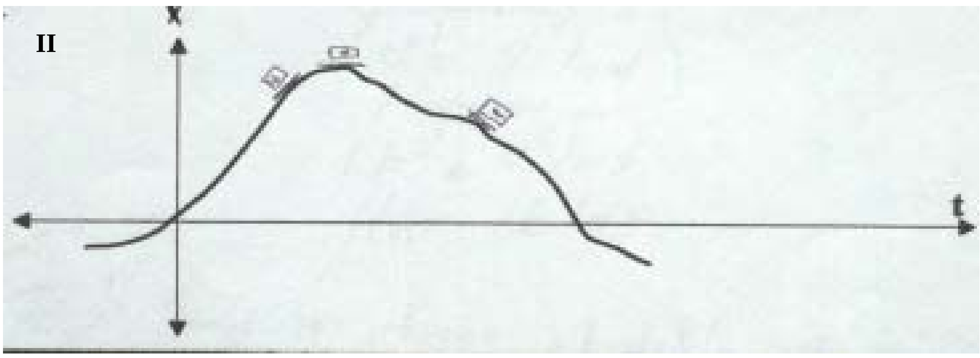
- Para valores nulos → $\boxed{0}$

R/: Primero busco los valores donde la pendiente de la recta tangente es nula y son aquí, aquí, aquí y aquí, porque las rectas tangentes en estos puntos *(los señala en el folio)* son paralelas al eje de las x. Ahora busco por inclinación la máxima y la mínima... ya... a ver donde tenga mayor inclinación sería la máxima, pero hay muchos tramos... me parece que aquí... Aquí sería la máxima *(y coloca el símbolo en la gráfica)*... Y la mínima... donde tenga menos inclinación... no donde tenga menor inclinación negativa, es decir buscare tramos donde la función esté decreciendo... Yo creo que aquí porque está más inclinada pero cuando la función está decreciendo... Sí aquí es la mínima.



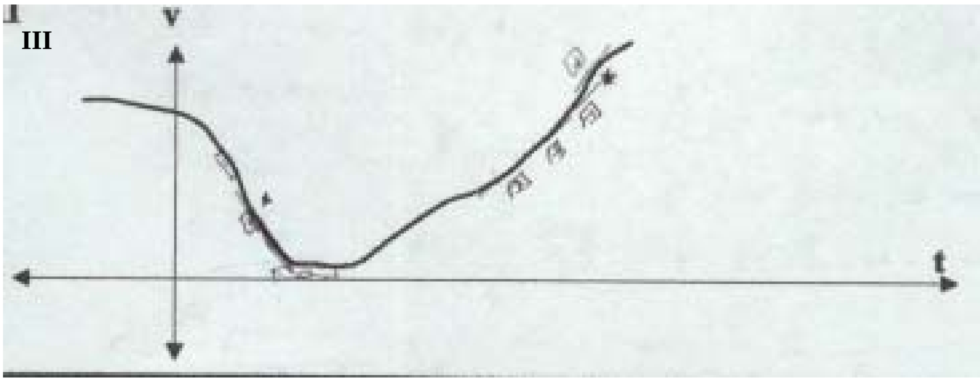
Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

R/: Está tangente de aquí es nula, por la misma razón que la anterior, la recta tangente en este punto es paralela al eje de las x. Ahora dónde es máxima, por inclinación mayor en tramos donde la función es creciente, aquí la velocidad es máxima, yo creo que aquí... Y mínima creo que aquí, porque la función está decreciendo y yo veo aquí la mayor inclinación negativa.... la pendiente es negativa... sí aquí... Y busco las tangentes para hallar la velocidad porque la velocidad es una derivada y por tanto al hallar la inclinación o más bien la pendiente de la recta tangente en un punto, estoy hallando aproximadamente la velocidad del móvil en ese punto. Es parecido al ejercicio anterior.



Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

R/: <u>Bueno aquí en todo este tramo veo que va decreciendo rápido la función, pero me pides sólo uno verdad, bueno escojo este porque hay mayor inclinación negativa, la pendiente es mayor negativa, lo señalo aquí con un * y el símbolo (-)... Luego siguiendo la gráfica veo que en todo este tramo no hay variación, te señalo todo el tramo, porque me parece que aquí hay un tramo lineal horizontal, por tanto la pendiente es cero, con lo cual me indica que no hay variación, y por último... A ver y dónde crece más rápido... pues aquí la función va creciendo en todo este tramo, aquí, aquí, aquí, pero dónde con más prisa de forma más acelerada, creo que aquí, porque hay mayor inclinación, la pendiente es mayor positiva.</u>

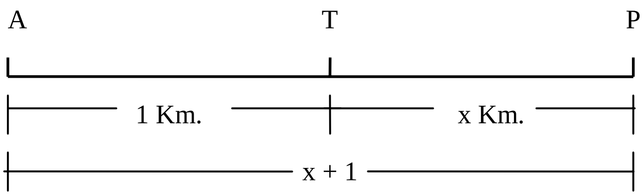


VI

E: Hay un problema clásico que le llaman "la situación de Aquiles y la tortuga", yo no sé si tu la habrás oído, la situación es la siguiente: AQUILES TIENE UNA VELOCIDAD DOBLE QUE LA VELOCIDAD DE LA TORTUGA. SI AL INICIAR LA PERSECUCIÓN LA TORTUGA TIENE UNA VENTAJA DE 1 KM, ¿A QUÉ DISTANCIA DEL PUNTO DE PARTIDA DE ALQUILES, ÉSTE ALCANZARÁ O NO A LA TORTUGA?

R/: Espérate un momento... comienza a dibujar en un papel... Yo supongo que lo alcanza, porque Aquiles tiene una mayor velocidad que la tortuga, como los tiempos van a ser iguales y entonces, comienza escribir:

$V_A = 2 V_T$, $t_A = t_t$, entonces:



$$\frac{x+1}{V_A} = \frac{x}{V_T}$$

$$\frac{x+1}{2V_T} = \frac{x}{V_T}$$

$$x+1 = 2x \Rightarrow x = 1$$

Entonces lo alcanza a 2 Km. de Aquiles.

E: ¿Qué significa para nosotros que se encuentren y que se encuentren en 2 Km?

R/: Bueno tenemos que tener en cuenta de que estamos hablando aquí de un movimiento rectilíneo a velocidad constante y que el hecho de que la tortuga le lleve una ventaja de 1 Km. a Aquiles, se plantea y se supone que como Aquiles tiene una velocidad mayor lo debe alcanzar, al transcurrir algo de tiempo. Se encontrarán a una distancia más a la derecha, porque el tiempo que gastarán es igual. Y lo veo como un problema físico de movimiento donde se plantea el encuentro de dos móviles o cuerpos, que no tendría ninguna... ninguna dificultad para el encuentro.

E: ¿Qué significado tiene este 2 matemáticamente?
R/: Sí este valor tiene... pues, no nos vamos a poner ahora como la situación de la paradoja de que todavía entre dos puntos hay otro punto... o sea así nunca no lo va encontrar, no lo va a alcanzar... Yo conozco esta paradoja porque me la plantearon en el colegio en filosofía, y... pues... físicamente y matemáticamente yo sé que se van a encontrar a dos kilómetros de Aquiles... tomado como distancia de siempre...

E: ¿Cómo es eso que no lo vas a tomar cómo la paradoja, puedes explicarme un poco?
R/: Yo no lo veo, ni lo voy a tomar como la paradoja, porque partiendo del hecho de que entre dos puntos siempre vamos a encontrar otro punto entonces nunca va a ver... habría sólo que hacer un límite de esa sucesión... éste nos permite en el caso del problema que me planteaste encontrar el resultado de encuentro que es dos... El dos es el límite... y corresponde a una explicación práctica del fenómeno y corresponde o resuelve el problema paradójico... de la explicación del límite.

PROFESOR E

I. ¿Qué es una derivada? Defínelo o explícalo como desees.
R/: Bueno una derivada no es más que una razón de cambio promedio, sin tanta complicación. Lo conceptualizo a partir de una función incrementada a la cual le resto la función original, entonces allí hallo un Δy, o sea el diferencial de la variable dependiente. Luego divido entre el diferencial de la variable independiente y ya obtengo un cociente incremental de la función, y de ese cociente incremental hallo el límite del cociente incremental cuando Δx tiende a cero, a eso es lo que llamo yo la derivada de función y'. Y en cuento al significado del concepto de derivada no es más que una razón de cambio. Eso simplemente, aplicado en otras áreas del saber, como en la Economía para hallar el costo marginal, utilidad... Y en el campo de la matemática geométrica para calcular pendientes, volumen, área... Además para calcular cambios de movimientos en la física como es la velocidad, la aceleración. Sí una razón de cambio promedio en pocas palabras.

II

¿Qué significa que la derivada de la función $y = x^2$ sea la función $y = 2x$? Explica y justifica la solución.

R/: Eso significa que... cuando $\Delta x \to 0$ de la función f (x) es igual al límite cuando $\Delta x \to 0$ del cociente diferencial... o de la razón de cambio promedio, $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x+\Delta x) - f(x)}{h}$.

Esta es la interpretación tipo analítica, podríamos hablar también desde el punto de vista... desde el punto de vista geométrico, eh... La pendiente de la tangente a la curva va a ser el límite del cociente diferencial cuando $\Delta x \to 0$, que no es más que la derivada, o sea que 2x es... **Este 2x me representa la tangente en un punto x, sí cada vez que tu le das un valor a x, vas obteniendo cada una de las secantes a la función, porque tangente es una sola**. Es decir, que **hallarías una de las secantes aproximándose a la tangente**. **Cada una de las secantes porque la tangente es única, las secantes si hay bastantes**. Pues cada vez que yo tome aquí un punto referencial y le dé un valor a *x* asumo el punto para la pendiente de cada una de las secantes... **la pendiente de cada una de las secantes se van acercando y el límite de ellas es la pendiente de la tangente y eso es lo que está significando esto**. **O sea que al final el 2x me da la ecuación de la recta tangente, es lineal,** lo ves ¿o no?"

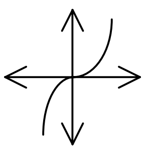
III

Usando sólo una calculadora, puedes conseguir un método para calcular el valor aproximado de la derivada de f (x) = 4^x, en x = 2. Explica y justifica la solución.

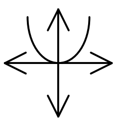
R/: Bueno yo pienso que aquí podríamos irnos por una función exponencial, trasladarla a una función exponencial, luego podríamos irnos por una función logarítmica también, entonces no es más que decir que log y = x. Log 4, entonces después derivar, o <u>aplicar la regla de derivación, afirmando que f '(x) = 4^x ln 4 = 16. Ln 4, en el caso de x = 2, es como 22.</u>

IV

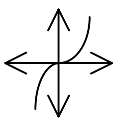
Si tienes el gráfico de la siguiente función:



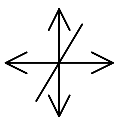
a. *Escoge la función derivada que le corresponde entre los gráficos de las funciones representadas a continuación:*



I. ☐



II. ☐



III. ☐

b. *Justifica la respuesta escogida y por qué la no-elección de las otras dos opciones.*

R/: <u>La II parece la idéntica ¿verdad? Pero podría ser esta la III, porque si yo coloco aquí esta y trazo aquí *(y dibuja sobre la función de la gráfica 1, a la gráfica III)*, entonces teniendo esta aquí... no, no esta sería secante</u>. Espérate un momento. Esta viene así *(uhm...) hace un ruido y sigue la gráfica 1... (continúa en silencio durante de 45 segundos)...*

E: ¿Qué información te proporciona cada uno de estos gráficos de las funciones representadas?
R/: Bueno comienzo porque por allí no sé... la de la gráfica 1, es la función cúbica, la de la III es una lineal, la de la II es cúbica también, es la idéntica a la de la gráfica 1 y la I es la cuadrática. Entonces como la gráfica uno es cúbica, su derivada será $3x^2$ y entonces... o sea que sería una parábola... Ah, ahora si entendí la pregunta, claro... ya entendí la pregunta... sí, sí... escojo la I... porque es una parábola... Lo que pasa es que no te había entendido la pregunta... sí, sí.

E: ¿Y por qué no las otras dos?
R/: primero porque esta la II volvería a ser una cúbica y III es una lineal.

E: ¿Tienes alguna otra argumentación que dar o crees que con esta es suficiente?
R/: No, no tengo más.

V

Observa las siguientes gráficas:

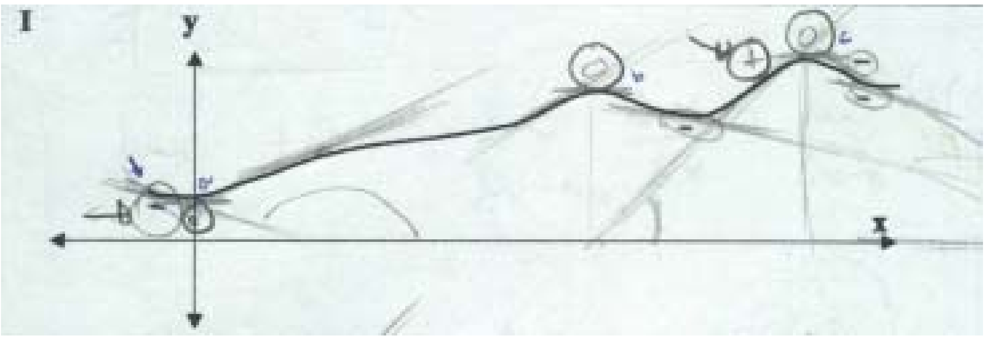
Gráfica I: Indica el punto de la gráfica donde la pendiente de la recta tangente es máxima (positiva) y el punto donde es mínima (negativa). Indica también los puntos donde es cero.

Nota: Utiliza los siguientes indicadores para señalar los puntos de las gráficas:

- Para valores mayores (o de crecimiento más rápido) → $\boxed{+}$
- Para valores menores (o de decrecimiento más rápido) → $\boxed{-}$
- Para valores nulos → $\boxed{0}$

R/: Aquí parece que hay un máximo, aquí parece que hay un mínimo *(y señala del gráfico los puntos c y a, respectivamente)*... ¿Un sólo máximo?... *(Pregunta y le recuerdo que lo que le estamos pidiendo es el punto dónde considere que la pendiente de la recta tangente es máxima, dónde es mínima y donde es cero)...* Bueno sí, pero aquí hay un máximo... pero me está pidiendo las pendientes de las rectas tangentes... (pasan 20 segundos)... La pendiente de la recta tangente... Aquí es paralela a esta *(señala el eje de las x)* y aquí la pendiente de la tangente es cero... Por eso aquí hay un máximo *(dice señalando y dibujando sobre el punto c la recta tangente y luego hace lo mismo en los puntos b y a)...* Aquí también es cero porque es paralela y aquí hay otro cero, porque también es paralela. Para ver... Lo que pasa es que ahora tenemos que observar bien la gráfica para hallar las pendientes máxima y mínima.... Fíjate tu, aquí puede haber un punto... aquí hay uno bajando... Es decir...cuando tenemos pendientes así... *(señala con el brazo rectas con inclinación positiva)*... Y cuando las tenemos así son negativas... ... *(señala con el brazo rectas con inclinación negativa)*... Ahora para buscar cuál es la máxima y cuál es la mínima, por ejemplo, tenemos es... es... que observar bien la curva... Por ejemplo, si yo voy a ver aquí, cuando vaya por aquí... no... no se... es que la curva no es... haber si estoy por aquí busco esto aquí y esta pendiente es positiva.... *(silencio de 10 segundos)*

E: Te repito la situación, lo que te preguntamos es dónde la tangente es máxima (positiva), dónde es mínima (negativa), en qué elementos te tienes que centrar para poder concluir de todas las tangentes que me estás señalando cuál consideras que es la máxima y cuál la mínima.
R/: Ah... bueno... lo que tengo que ver de todas cuál es la mayor... la que tenga mayor inclinación y la negativa la que tenga menor inclinación... *(comienza a dibujar tangentes en el gráfico I y a marcar los ángulos de inclinación)*... aquí se ve así... aquí se ve así... Entonces puede ser esta porque la inclinación es la tangente al ángulo... puede ser está aquí... aquí colocaré un (+)... Y menos o negativa... Es cuando el ángulo sea... sea más agudo... más obtuso... Este aquí así... Pero es que no es muy clara la gráfica oye... aquí... hay otro aquí... aquí también hay otro... aquí también hay otro... sí... sí, aquí hay un menos, aquí así también hay un menos... Y dónde es menor... depende del gráfico... A ver... este está así... bueno la mayor inclinación negativa será esta *(y señala la tangente más próxima al punto a.)*... Bueno lo que pasa es que esta gráfica está como que un poco confusa oíste... Aquí hay otra... pero la menor es la que ya te dije... ésta... No... no se tú que opinas...

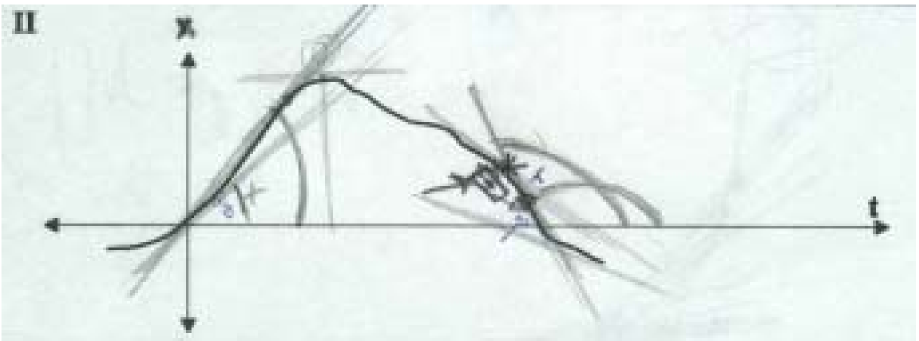


Gráfica II: Indica el punto de la gráfica donde la velocidad del móvil es máxima (positiva) y el punto donde la velocidad del móvil es mínima (negativa). Indica también dónde vale cero.

R/: Bueno aquí hay una tangente, ¿no?.. A ver, siendo que la velocidad también es una... es una tasa de cambio, entonces aquí también hay una tangente, entonces, lo que pasa es que aquí la tangente es cero... Entonces, aquí la velocidad es mínima, aquí en este punto es mínima la velocidad, cuando viene aquí en esta parte aquí... Aquí es una pendiente positiva... Aquí es máxima y aquí se presenta una mínima... No se si la miras de otra manera...

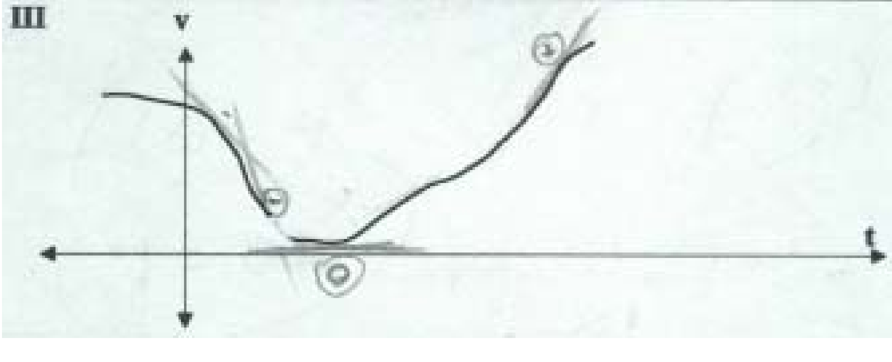
E: A ver lo que aún no me queda claro es el punto ¿dónde consideras que la velocidad es máxima y en qué punto la velocidad es mínima?
R/: Bueno, depende de, lo que pasa... depende... bueno sí el ángulo aquí es mayor, sí el θ es mayor... y la inclinación es mayor... Sí, entonces aquí pongo el símbolo que me dices para velocidad máxima... el (+)... Pero aquí también hay otra hacia abajo... Lo que pasa es que la irregularidad de la curva a veces... aquí parece, aquí viene

aquí... bueno yo creo que aquí es donde está el mínimo... aquí la velocidad es mínima, es negativa la inclinación es mayor de la pendiente... bueno coloco el (-)... Pero el ángulo aquí es menor... Pero aquí esta otra también negativa y el ángulo con la horizontal es mayor... Entonces, la tangente de 90º es... a medida que el ángulo va siendo mayor la tangente va disminuyendo... entonces si es mayor la de menor ángulo... Vamos a ver, sí aquí yo tengo tangente de 30º es seno de 30º sobre coseno de 30º, o sea 1/2 sobre √3/2 da 1 sobre √3, da √3/3 da 0, 5... y algo... Mientras que si yo voy a hablar de tangente de 60º, entonces me da seno de 60º sobre coseno de 60º, me está dando √3/2 sobre 1/2 y da √3 y √3 es mayor, o sea que entre más grande es el ángulo es mayor la cobertura, entre más grande es el ángulo mayor es... porque la pendiente es la tangente, entonces entre más grande es el ángulo es mayor la tangente... Entonces no sé decidirme entre las dos, porque este punto es de esta y este de esta, entonces tendríamos que medir los ángulos... Me parece que el mayor es este... Bueno eso depende de la gráfica del análisis de la gráfica... Pero señalo este... *(lo señalo con la letra T)*



Gráfica III: Indica el punto de la gráfica donde la función crece más deprisa y el punto donde decrece más rápidamente. Indica los puntos donde la tasa instantánea de variación es cero.

R/: Para aceleración... Por ejemplo aquí la variación es cero, uhm... *(Silencio de 15 segundos)*... Bueno trazo aquí esta y aquí esta otra... Yo creo que aquí está creciendo más deprisa... y un decrecimiento... aquí... pero aquí hay uno más pequeño... Aquí... Aquí... Aquí hay un menos, pero aquí hay otro menos... Bueno escojo este de aquí... Y la razón la misma que las anteriores...

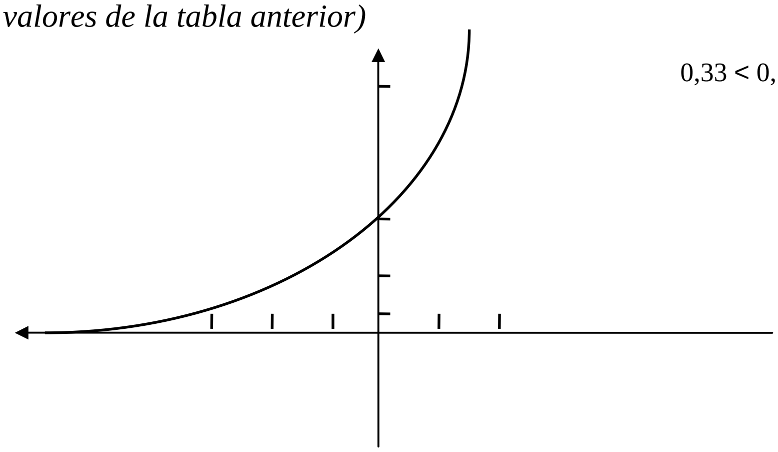


VI

E: Hay un problema clásico que le llaman "la situación de Aquiles y la tortuga", yo no sé si tu la habrás oído, la situación es la siguiente: AQUILES TIENE UNA VELOCIDAD DOBLE QUE LA VELOCIDAD DE LA TORTUGA. SI AL INICIAR LA PERSECUCIÓN LA TORTUGA TIENE UNA VENTAJA DE 1 KM, ¿A QUÉ DISTANCIA DEL PUNTO DE PARTIDA DE ALQUILES, ÉSTE ALCANZARÁ O NO A LA TORTUGA?
R/: Sí la conozco... Pero la había oído diferente... Pero es que aquí hace falta algo, que siempre que Aquiles recorra una distancia la tortuguita va recorrer la mitad de lo que recorra él... Uhm... Falta ahí eso que no me lo dices... Yo lo saco de allí... Yo esto lo comparo con la ecuación $y = 2^x$, lo comparo porque... y es la mejor manera de explicársela a las alumnas... Es decir es como una manera de explicarles lo que es una... una curva asintótica... Porque *x* es la variable independiente e *y* es la dependiente y entonces tu observas que cuando x vale 0, y = 1... Voy a hacer una variación más clara para que me entiendas lo que quiero hacer... *(y realiza la siguiente tabla de valores)...*

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0.125	0.25	0.50	1	2	4

Fíjate tú que el valor siempre va a ser el de abajo... Fíjate cuando x aumenta una unidad y va aumentando el doble de su valor anterior, entonces si nosotros hacemos una gráfica aquí, vemos que nosotros colocamos a desde aquí y debe ser una escala diferente... Esto para mí va a ser 1 y este 2... *(y realiza el siguiente gráfico utilizando los valores de la tabla anterior)*



$0,33 < 0,333 < 0,3333$

$1/3 < 0,\overset{\frown}{3}$

Entonces observa tu esto... Siempre habrá una diferencia así éste llegué hasta donde llegué siempre habrá una mitad de la escala y esa es la relación que yo digo... Aquiles puede recorrer lo que quiera para allá... que la tortuguita siempre le llevará ventaja... mira date cuenta es el ejemplo más clásico de lo que es una curva asintótica y la asíntota... fíjate tú sigue dando para acá y verás que siempre va a dar la mitad... Claro si tuviéramos una escala más amplia lo vemos mejor... Esta ocurriendo de que según esta curva... Aquiles nunca alcanzará a la tortuga

E: ¿Y si lo trasladas a la realidad qué crees que ocurre?

R/: No, en la realidad es una paradoja... porque es imposible, con un salto él se la puede alcanzar... es una cuestión meramente es para explicar el infinito... En mi concepto es para enfrentarse al infinito, es como decir 0,33 < 0, 333 < 0, 3333, y así sucesivamente van siendo cada vez menor, hasta que llegamos a una fracción periódica pura como $0,\overset{)}{3}$; Sin embargo ellas tienen una tendencia a 1/3 y es más fácil representar 1/3 que representar esas en una recta, entonces prácticamente Aquiles y la tortuga lo que muestra... es para que comprendamos un poquito lo que significa el infinito, es un concepto muy particular, muy personal... Es decir, y para mostrar lo que es una asíntota, porque es muy difícil que un estudiante entienda que esta curva se aproxima a esta recta y no la toca nunca, inclusive yo esto lo uso cuando voy a hablar del concepto de límite para tender por la izquierda o por la derecha, sin asumir el punto de la tangencia.

E: A ver si estás de acuerdo conmigo, matemáticamente según tu razonamiento no lo alcanza...
R/: No lo alcanza, sí, pero es imposible que Alquiles no se lo vaya a alcanzar, en la práctica... Es una paradoja, sí, simplemente... la paradoja de Zenón, se llama... Pero es como simplemente, un ejercicio de demostrar que la tortuguita siempre, recorra lo que recorra Aquiles, le llevará la mitad de lo que él recorra.

E: Crees que hay otras formas de solucionarlo
R/: Hay otras formas de resolverla, por ahí dicen que la paradoja de Zenón es fácil mirarla desde el punto de vista de fracciones periódicas, con fracciones periódicas como las de este tipo que te mencione ahorita, con la expresión de la función logarítmica, con la función exponencial, es posible mostrar lo que significa, lo que quiere decir... Es como para mostrar este tipo de función, es decir, con eso trataron como de hacer concreto un tema tan abstracto, concretizar un poco un tema tan abstracto. Tú si entendiste lo que te quiero decir, fíjate tú, te vas acercando a esta recta y nunca llegarás a la recta, ¿cierto?

ANEXO 6

TRASCRIPCIÓN DE LA ENTREVISTA 5: DOCUMENTOS ELABORADOS POR EL PROFESOR (PROGRAMACIÓN Y UNIDAD DIDÁCTICA)

Profesor A

I. EN RELACIÓN CON LA PROGRAMACIÓN DE MATEMÁTICA DE 11º

E: El objetivo que planteas como general, cuándo hablas de dimensiones internacionales a qué haces referencia

R/: Nosotros en el colegio entendemos que el saber matemático no es un saber cerrado, sino que es un saber universal, y que por ende cuando se trabaja con el alumno hay que promover ese sentido, porque la matemática no es una asignatura cerrada sino que tienen amplia conexión con todos los saberes de manera integral y que no se quede en un nivel contextual local sino global.

E: Cuándo hablas del pensamiento lógico en el segundo objetivo a qué haces referencia

R/: Bueno el pensamiento lógico en el sentido de que, es decir, la lógica, la deducción, la inducción, las inferencias, la intuición son procesos a desarrollar, son partes fundamentales de la organización mental, de la organización del pensamiento.

E: En qué te basas a la hora de realizar las programaciones

R/: Bueno en varios puntos, uno: sin perder la secuencia del programa emanado por el Ministerio, dos: el programa internacional con el que se trabaja en el colegio, entonces tratar de integrar estos dos, tercer: tratar de darle la siguiente secuencia, o sea ser muy claro en qué se pretende enseñar, es decir tener claro que se pretende enseñar, otra cosa el qué enseñar, los propósitos, por supuesto los contenidos, que sean los mínimos pero lo más significativos, que sea una secuencia lógica por ser matemática, digamos que esa es la parte del currículo en cuento a lo pedagógico y ya vendría entonces la parte didáctica es decir la metodología y los recursos, o sea como ves prima más el qué y el cómo es una subordinación de qué en este caso del programa. Es decir tener en cuenta qué se va enseñar teniendo en cuenta los parámetros locales que da el Ministerio e Internacional por el programa en el que estamos, recuerda que el colegio es bilingüe.

E: Con qué criterios seleccionas los contenidos

R/: Bueno los criterios... en el colegio está el departamento de matemática que es el encargado de integrar los conocimientos matemáticos desde preescolar hasta bachillerato, encadenado con el programa internaciones, y de lo que se trata es de hacer estructuras, tiene que ver mucho con que no se aparte de lo legal pero se tiene en cuenta la autonomía que tiene cada profesor para organizar y diseñar sus programas pero que obedezca a una estructura que tiene la institución y que da cuenta de la parte local para que el estudiante tenga una buena preparación para presentarse a las pruebas nacionales e igualmente tenga una buena preparación para presentarse a la prueba internacional de acuerdo al nivel que le asignan al colegio. Ahora después de esto la selección propia de los contenidos matemáticos, el orden en que los programas ya obedecen más a la lógica de la disciplina como la matemática que ya es la que nos orienta en eso.

E: Consideras que el tratamiento del límite de funciones y el de funciones debe ser un prerrequisito para el concepto de derivada

R/: No necesariamente, yo pienso que no, es lo que normalmente se hace en matemática pero de pronto podría uno ensayar el concepto de derivada sin previamente dar límite, sería una buena propuesta, así de momento nunca lo he hecho pero por la pregunta que me haces, yo pienso que si se utiliza una buena didáctica y una buena motivación al estudiante y una buena introducción, creo que la misma manera de dar derivada puede extractarlo de la realidad y que la gente lo analice podríamos llegar a ver que es un límite y después formalizarlo, no necesariamente podría ser históricamente límite y después derivada, pero no lo he hecho, me lo imagino ahora por la pregunta que me haces y estoy haciendo el ejercicio mental para ver cómo podría hacerlo.

EN RELACIÓN CON LA UNIDAD DIDÁCTICA

E: Tienes algo que comentarme o decirme de la elaboración de la misma. Dificultades, cosas llamativas etc.

R/: La verdad es que me parece interesante y de hecho creo que es una actividad necesaria para el proceso de enseñanza, tener claro cada uno de los ítems de la tabla que nos proporcionaste... pero claro el tiempo, no alcanza para hacer todo esta reflexión, es verdad que con ella he aprendido, quiero decir, con el modelo que nos proporcionaste, pero claro he de confesar que en la práctica todo está más implícito... más pensado que escrito y aunque me ha ayudado de cara al futuro, tengo que ser sincero y confesarte que ordinariamente el proceso de planificación de una clase lo centro en las definiciones y las tareas en su mayoría salen del libro de texto que pido y que yo sigo, como ya te mencioné, de la Editorial Prentice Hill, porque va con la visión que yo tengo de la matemática y seguirlo me ahorra esfuerzos.

E: Nos planteas una variedad de actividades, nos gustaría aclarar cuándo planteas por ejemplo exposición del profesor y nos remites a páginas del libro de texto, esa exposición va guiada por el contenido del texto guía, qué papel juega el texto guía dentro de la planeación de una unidad didáctica

R/: La función ya yo lo dije anteriormente ya, es una mediación, se toma una preparación con base a lo que el autor muestra allí pero sin ser un recital de eso, sino simplemente a manera de guía, a manera de parámetro porque de alguna manera al estudiante hay que remitirlo a ese texto y entonces de alguna manera se trata de que no encuentre divergencias entre lo que el profesor le expone y lo aparece en el libro de texto, aunque no es camisa de fuerza es más uno siempre tiende a salirse un poco, pero el libro tiene unos límites para que el lenguaje sea común.

E: Cuando planteas talleres o trabajos en grupo, de dónde sacas los ejercicios que propones

R/: Bueno hay dos formas, a veces se hacen exactamente las prácticas que hay en el libro porque vienen estructuradas así, el libro y la misma clase se hace partiendo de que el estudiante siempre sabe algo, no consideramos al alumno como una tabla rasa, no algo conoce pero hay que sacarlo, y así lo plantea también el texto y luego viene una práctica con base a esa construcción que inicialmente han hecho los estudiantes; en otras ocasiones se hace un taller o una práctica diseñada por el profesor y no necesariamente sacada del libro, pero la realidad es que muchas de las prácticas son tomadas del libro porque guarda coherencia con mi manera de pensar las matemáticas.

E: Cuando planteas actividades en clase de qué tipo son, los ejercicios a qué apuntan

R/: Bueno hay trabajos individuales, después de una exposición o de una construcción por parte del alumno, algunos realizan ejercicios en el tablero; en otras ocasiones las actividades son grupales, pero las de grupo quisiera aclarar algo, los estudiantes nuestros es muy dado a buscar el trabajo de grupo por facilismo, ellos generalmente se entusiasman al principio pero después quieren hacer el grupo para sacar provecho del que más sabe por eso entramos a manejar eso con distintos criterios. De todas maneras en las evaluaciones del curso ellos tienen inclinación por el trabajo de grupo porque consideran que aprende mucho más, interactúan mucho más y eso se nota, es más hay muchas veces que parece ser que el lenguaje común entre ellos es un instrumento de mayor comprensión que el mismo lenguaje que maneja el profesor, pero para que no se manipule hay que ir aplicando distintos criterios para la formación de los grupos, rotativa, colocando monitores, etc. Por eso yo les aclaro que esto es trabajo de grupo lo cual implica que deben trabajar todos y no trabajo en grupo que es algo de remiendos.

E: En la parte 9 dice ejercicios sobre derivada de funciones y dices anexo ejercicios y no están, no sé si te paso o qué porque no los anexaste

R/: Bueno de pronto se olvido, pero en ese caso son ejercicios del texto del mismo tipo, y son muy parecidos a los que aparecen en las evaluaciones que te entregué. Pero cuando digo ejercicios de derivada, es de alguna manera para que los estudiantes hagan una práctica **de la parte del álgebra de las derivadas, más que todo. Sí se toman del libro pero básicamente te repito es para que practiquen el álgebra de derivadas: la de la suma, el producto, etc.**

E: En cuanto al nivel de dificultad de las actividades que planteas en la unidad didáctica, entonces aquí hay códigos que usas que me gustaría que aclararas el significado

R/: Bueno entonces en la primer clase, cuando coloco el código MOT es de motivación, yo creo que aquí está la dificultad en mis alumnos, porque yo considero que hay dos tipos de motivación intrínseca que tiene el alumno por sí y las extrínsecas que son las que proporciona el profesor, entonces esas que nace del fuero interno del estudiante son las difíciles, porque le guste ese tema, porque lo vea interesante, aunque algunas veces se motiva pero es lo que más uno nota. Y además lograr que se expresen es muy difícil y más aún escribir, por eso es que hablo de esta dificultad. Y esta de

COT, a ver yo lo entendí como conclusiones cotidianas de acuerdo al tema que puede dar el estudiante, por ejemplo, ellos consideran las clases muy formales a pesar de que uno genere un ambiente de confianza, ese momento de formalidad cuando un profesor les hace preguntas no lo logran romper, entonces eso es a lo que me refiero. Y resultado de la falta de conocimientos anteriores bueno porque cuando uno pide una interpretación del concepto de derivada uno necesita que manejen el concepto de pendiente o el de límite, entonces ese conocimiento inicial es clave y si no lo tienen puede ocasionar problemas para comprender la derivada, por eso lo coloco.

E: En cuanto a las actividades que consideras más importante quieres argumentar algo de cada una

R/: Bueno en cuanto a las preguntas obedecen más bien a una estructura metodológica o a una corriente pedagógica, yo considero que el conocimiento pasa por una tríada de elementos: la realidad, el pensamiento y el lenguaje, entonces hoy por hoy pienso que hay que extractarle a los estudiantes con preguntas lo que ellos están observando a su alrededor y cómo eso lo están conectando o como lo pueden conectar con el saber escolar. Entonces, desde la metodología socrática, la pregunta a los alumnos es motivante, entre otras porque crea un clima de confianza siempre que tenga un buen tono, por eso es muy distinto pregunta qué piensas tú de la derivada o que crees que es la derivada, de la pregunta define la derivada, porque ya en la segunda te debe decir algo exacto, mientras que con las primeras son sus ideas. Ya después vendría la segunda parte de la metodología que sería tratar de desmontar eso que él cree que es lo correcto hasta que vea sus conflictos y llegar a conciliar algo que se acerque más al conocimiento científico. En cuanto al trabajo de grupo, bueno primero porque permite que ellos interactúen y socializar el conocimiento, es decir como pueden hablar alrededor de un tema, y sobre todo el aprendizaje entre iguales. Y finalmente, con la exposición, ya aquí me voy un poco a lo que plantea Ausubel, ya el profesor es el que le da una organización a toda esa lluvia de ideas que han surgido del trabajo en grupo o de las preguntas, entonces es el que formaliza y organiza las ideas.

Profesor B

I. EN RELACIÓN CON LA PROGRAMACIÓN DE MATEMÁTICA DE 11º

E: Te pedimos que nos proporcionarás la programación de Matemática de 11º y nos entregaste un plan de área, nos gustaría que nos comentarás qué hay detrás de este plan de área

R/: Bueno hay una intención, ¿cierto?, toda acción que uno hace tiene una intención. La intencionalidad es que el profesor de Matemática de secundaria, no solamente se centre en la programación y planificación de la asignatura de un grado específico. Si no que él tenga una visión integral de toda la matemática que se trabaja en secundaria. Más aún, planteo que el debe conocer lo que se trabaja en primaria, debe conocerlo para que en un momento dado él sepa cuáles son las fortalezas y debilidades del estudiante. Tenga ya... o sea como que se adelante... se adelante un poco al pensamiento de los estudiantes y diga ya... bueno yo espero que los estudiantes tengan estas dificultades, entonces voy a prepararme estas acciones. Por eso yo planteo allí, eh... la propuesta integral y... y esto no solamente es mi visión, es la visión de los colegas del área de matemáticas de mi colegio, ahí hubo aportes de mis colegas de área... Esto lo presentamos a discusión, se hicieron varias jornadas de trabajo... este año hace falta una reunión porque aquí yo les estoy proponiendo el trabajo por competencias: la competencia argumentativa, interpretativa y la prospectiva. Ya aquí hay algo escrito sobre esto y tenemos que discutir si lo asumiremos o no. Ahora aquí aparece lo que se trabaja en matemática del grado 11.

E: Cuando ustedes se sientan a elaborar un plan de área, sobre todo cuando tienen que estructurar los contenidos, de qué se valen, ¿qué elementos tienen en cuenta?
R/: Que te digo... bueno cuando se hizo la propuesta, nosotros nos salimos del esquema de cualquier libro... Es decir que rompimos con ese esquema, bueno porque decíamos que cada vez que uno se mete con un libro, el libro tiene una visión, que es distinta a la de nosotros y entonces nosotros nos desgastamos tratando de cumplir con ese tema. Entonces, ya hace varios años que buscamos el libro de acuerdo a las necesidades y... y eso de acuerdo también al tema... Sí, porque hay autores que trabajan muy bien un tema en matemática y otros no los trabajan igual... u otro tema en ese mismo libro no está tan bien manejado...
E: Es decir qué en tu caso no podríamos hablar del uso de un texto guía o el seguimiento de un solo texto guía
R/: No, no hay un texto único. No hay un texto único hay varios textos. El caso de matemática de 11, te puedo nombrar unos que ya tienen unos años, por ejemplo éste matemática en acción 6, que es de la Editorial Mc Graw Hill que es del año 79, es viejito pero tiene cosas actuales. Este es un libro muy bueno también se llama matemática 6, proyección al cálculo, es un librito muy bueno de Editorial Pime, este también tiene sus años, es del año 86... Pero es un libro, pero muy bueno... Y este que es el 2000, se llama Alfa 11 de Editorial Norma, es un libro de actualidad y que tiene... Bueno la intención de las actividades que se trabajan es por competencia, que es la novedad aquí en Colombia y otra novedad que tiene es que tiene dos Software educativos... Pero que por desgracia no contamos con un laboratorio de informática y difícilmente por no decir que ningún estudiante tiene acceso en sus casas un computador.

E: Centrándonos un poco en la programación de matemática de 11º que tu elaboraste, que referente sigues a la hora de estructurar los contenidos a desarrollar, en tu caso por ejemplo: primero un trabajo con funciones; luego el estudio del límite, pero veo que primero hay un enfoque intuitivo hasta llegar al concepto formal y el manejo de las propiedades y el álgebra; y por último el concepto de derivada, partiendo de la interpretación geométrica y la interpretación cinemática del concepto, luego las propiedades y el cálculo de la derivada. Lo que trato de preguntarte es ¿cuál ha sido la referencia que has tenido para proponer el desarrollo de estos contenidos, la secuenciación de los mismos y la jerarquización de los conceptos?
R/: Esta es una propuesta que yo hice a los colegas y que es la propuesta consensuada, pero que no es precisamente la que yo pongo en práctica. O sea, yo mismo la propongo y la discutimos, pero juego con esos temas que están allí, juego con una jerarquización. Por ejemplo, el concepto de derivada que es del que estamos hablando ahora, yo lo enfrento por la variación media y la instantánea... Pero fíjate que allí como está se coloca o percibe desde la óptica de que primero veo el límite y luego la derivada... y esa es la forma tradicional de enseñanza de este concepto en Colombia... el capítulo del límite y luego el capítulo de la derivada... Pero fíjate déjame aclarar... yo para introducir

el concepto de derivada no entro enseguida definiéndolo como un límite... al final cuando formalizo el concepto sí que lo hago a partir de la definición del límite... porque es un límite... pero para presentarlo a mis estudiantes lo hago a partir de la interpretación física y de la geométrica... Y esta nueva propuesta que yo hago... es el resultado de mis lecturas personales de la Historia de la Derivada...

E: A ver si te entiendo bien, tu me dices que atendiendo a la jerarquía del currículo tu desarrollas primero el concepto de límite y posteriormente el concepto de derivada; sin embargo, a la hora de introducir el concepto de derivada y buscar la comprensión de los estudiantes del mismo, lo haces a partir de los dos problemas históricos que estuvieron en la génesis de este concepto, para luego definirlo en términos de límite...
R/: Más aún... más aún... estoy pensando... estoy pensando ahora que se puede trabajar primero el concepto de derivada y a partir de este introducir el concepto de límite... Sí ahí mismo trabajar el concepto de límite... integrar allí las dos cosas... No... no separar las dos cosas... primero límite y luego derivada... Yo considero que primero deberíamos partir de algo concreto. Cómo lo es... yo te hablo de concreto es porque ellos manejan la velocidad media y la instantánea... eso ya lo manejan del año anterior de 10º... Entonces, eso es un buen punto de partida... en matemática ya ellos manejan lo que es la pendiente de la recta, las funciones, el gráfico de curvas, las rectas tangentes y secantes... Es entonces conjugar las dos cosas que ya ellos conocen para aprovechar e introducir el concepto de derivada y luego durante el transcurso de formalización del concepto de derivada se puede introducir el concepto de límite... Porque durante la temática de derivada hay un momento en que se trabaja el concepto intuitivo de límite (aproximación de la recta secante a la tangente... el paso de la velocidad media a la instantánea)... Por tanto se puede aprovechar esto para introducir formalmente el concepto de límite de una forma más significativa para los estudiantes... Porque es que esa definición de límite... eh... bueno es mi apreciación... eh... los estudiantes parecen que no tienen la comprensión... de los intervalos en el cuál varía la función... No hay una comprensión real de los Δx, Δy, de los dy, dx, y al final ni de los x y los y...

Ahora espero haber dejado claro que en cierta manera los lineamientos curriculares son los parámetros que sigo para estructurar los contenidos, o sea nosotros hacemos la propuesta no dejando de lado los lineamientos curriculares... No la hacemos nosotros solos a la loca o teniendo en cuenta sólo nuestros criterios... sino lo hacemos teniendo como norte los lineamientos curriculares de matemática... Ahora lo bueno de los últimos lineamientos es que son lineamientos curriculares y no propuestas rígidas como las anteriores... Sino que ahora te hablan del desarrollo del pensamiento numérico, del pensamiento espacial, del pensamiento aleatorio, variacional, etc... Son cinco tipos de pensamiento, ligados a los sistemas, es decir se trabaja con el enfoque de sistemas... El enfoque de sistemas que nos propone el Dr. Vasco... Entonces, esa visión de los Lineamientos curriculares, nos sirve de norte en unos textos que hemos venido utilizando y que hay en la bibliografía que te cito en el plan de área... sobre libros que nosotros tenemos en cuenta, no sólo de matemática te menciono allí uno de investigación... Bueno por ejemplo el de Orovio y Ortiz sobre Educación Matemática y desarrollo del sujeto, ese es un trabajo que están haciendo un grupo de matemática de la Asociación distrital de educadores de Bogotá. Ellos vienen haciendo una propuesta muy buena... Eh... Rosario Cubero como trabaja con las ideas de los alumnos, también se tiene... El enfoque de sistemas de Carlos Eduardo Vasco... que se llaman examen de Estado para el ingreso a la educación superior... ósea que tomamos libros de matemática, de didáctica de las matemáticas, de investigación en la enseñanza de las

matemáticas, de aprendizaje de los estudiantes y yo hasta de historia de las matemáticas... Además de las propuestas curriculares del gobierno para enriquecer la propuesta. Lo otro que es muy interesante es lo de investigación en el aula, nosotros tenemos una copia del grupo de Sevilla y nos ha servido mucho para mejorar nuestra visión sobre la enseñanza de las matemáticas y sobre el aprendizaje de los estudiantes.
Esta propuesta se presentó formalmente al Colegio en el 97, pero la hemos ido revisando cada año y la mejoramos teniendo en cuenta los resultados y dificultades que se tienen en el transcurso del año... Y este año por lo de las competencias se debe revisar, porque ahora debemos dar más énfasis a desarrollar competencias argumentativas, interpretativas, etc. En nuestros estudiantes y debemos revisar para ver si se cumple o no.

II. EN RELACIÓN CON LA UNIDAD DIDÁCTICA

E: Tienes algo que comentarme o decirme de la elaboración de la misma. Dificultades, cosas llamativas etc.
R/: Siendo concreto y sincero, nosotros hacemos un plan de área y en un cuaderno anotamos unas actividades para realizar... Estos apuntes son generalmente sueltos... No es una cosa que sea el resultado de habernos sentado a reflexionar lo que vamos a hacer, cómo y por qué... eh... como en esta propuestas que tu nos solicitaste que hiciera... en donde uno tiene que colocar la descripción de la actividad, el propósito o intencionalidad... o sea este es un tipo de trabajo que uno realmente descuida en la realidad... Tengo que ser sincero en esto... se descuida este tipo de trabajo que tiene mucha trascendencia e importancia, porque en la medida que uno planifica y diseña este conjunto de actividades, uno tiene una visión más clara de lo que quiere hacer en el aula y le das como que... si... no como que, sino que le das una jerarquización a las mismas actividades y nos lleva a reflexionar sobre el por qué de una actividad sobre el propósito de las actividades, un propósito a lograr con los estudiantes. Yo pienso que uno como orientador tiene un objetivo, un objetivo en cada actividad y el estudiante lo va a explicitar con sus indicadores, con sus indicadores de logros como los llamamos... porque los logros son del estudiante... porque hay algunos profesores que piensan que los logros se tienen que programar desde antes porque esos son los que tienen que lograr los estudiantes y yo creo que no es así, sino que nosotros los profesores nos planteamos objetivos como orientador, diseñamos actividades para que los estudiantes logren construir ciertos conocimiento, siendo precisamente los estudiantes los que logran o no alcanzarlos. Este trabajo o tarea que me pediste me pareció muy bueno, por eso porque nos lleva a reflexionar sobre la intencionalidad de cada actividad y es un trabajo serio que deberíamos hacer antes de la enseñanza, es una reflexión que se debe hacer así como tú lo planteas antes de las clases y acompañado con esto debe haber una reflexión durante el desarrollo porque hay cosas que se nos saldrá de las manos y tendremos que incorporar cambio en el camino y también debemos revisar y reflexionar después de haberla desarrollado para incorporar cambios que nos permitan mejorar nuestro trabajo y compartirlo porque un conocimiento que se comparte entre colegas o así como contigo será un conocimiento más fructífero y fácil de mejorar.

E: Ahora quieres comentarnos algo de las actividades que elegiste como fundamentales
R/: Bueno mira yo elegí como número 1 el aspecto histórico, ¿por qué la escojo?, porque es lo más descuidado que hay, el aspecto histórico no se tienen en cuenta ala hora de elaborar una unidad didáctica de un concepto cualquiera, yo creo que son muy

pocos los profesores que tienen en cuenta el aspecto histórico y evolutivo de los conceptos; o sea para que el estudiante vea cómo fue el proceso de desarrollo tanto del pensamiento humano como del conocimiento matemático y para que el estudiante pueda entre a valorar cómo hicieron los matemáticos para llegar a la construcción de un conocimiento, la aplicabilidad del mismo, las dificultades sociales y las propias del mismo conocimiento matemático que tuvieron que superar a lo largo de la evolución de un concepto. Por esto la veo como una de las actividades más importantes o como un elemento muy fuerte dentro del desarrollo de esta temática, creo que ya te lo dije anteriormente en otra parte de la entrevista, para mi las historia de las matemáticas es una aspecto clave a la hora de hacer las programaciones y a la hora de diseñar y desarrollar los conceptos... Y aclaro que me ha tocado estudiarla solo, porque desgraciadamente en la Universidad no tocamos a profundidad una asignatura que nos ayudara a los profesores en este aspecto, como tampoco recuerdo que la tuvieran en cuenta mis profesores de matemáticas en las clases.

E: A ver a mí me gustaría que me aclararas algo, que es lo que resaltas cómo importante en esta actividad, que los estudiantes lean una historia (anexo %: actividad 1. O que me digas cual es la estrategia didáctica que persigues con ella.

R/: Bueno, ellos van a hacer una lectura, sí claro, pero en grupo y la idea es que después hacen una puesta en común; o sea que ellos hacen una lectura en grupo y cada grupo nombrará un relator, luego extraerán las ideas principales del texto, generalmente centradas en aspectos concretos del concepto y luego se hace una socialización. Y la idea última es que cada grupo tome una posición frente a la parte histórica tratada, que se ubique en el tiempo, que traten de identificar dificultades que tuvieron los científicos con los conceptos y que enumeren cómo las superaron. Qué traten de ver cómo ha evolucionado el concepto desde sus inicios hasta como se lo presentamos hoy en la clase... En última lo que busco es que se vea el carácter dinámico de la construcción del conocimiento... Porque como siempre les estoy insistiendo en eso.

La segunda actividad escogida habla de la variación media y la variación instantánea, o sea ver la relación entre derivada y velocidad instantánea. Eso de pronto se nos dificulta un poco por el tipo de trabajo que nosotros hacemos en física, pero el aspecto matemático en sí... vamos a hablar de la variación media y de la instantánea, en el caso de una gráfica, yo te mencioné a ti en la actividad 4 un trabajo con la función $y = x^2$, entonces... primero un trabajo numérico combinado con uno gráfico, y después uno algebraico de cálculo de pendiente de la recta tangente... La idea básica es ir viendo a partir de la variación media (pendiente de una recta) como se construye el concepto de variación instantánea la pendiente de la recta tangente en un punto y definirlo como la derivada en un punto... la idea es que logren comparar esto con la velocidad instantánea que ya se había trabajado en la actividad tres y vayan tejiendo un concepto de derivada más robusto y no solo quise presentarlo como una aplicación de reglas de memoria... sino trato de darle más significado en las propias matemáticas (pendiente de la recta tangente) y en la física y otras ciencias o casos reales (variación instantánea)... Ese es mi propósito con esta actividad. Por eso pienso que es importante, porque se busca ir guiando a los estudiantes a través del diseño de un ejercicio hacia la construcción de un concepto más complejo tratando intuitivamente el paso al límite, y claro lo importante es la discusión del grupo o equipo de estudiante y la orientación que yo pueda darles en la plenaria cuando ellos estén argumentado sus respuestas, sean matemáticamente correctas o no, porque de cada una de ellas incluyendo sus errores se pueden aprovechar para mejorar la comprensión del concepto. Ojo aquí se les permite usar sus apuntes, un libro de texto, la calculadora (aunque muchos de ellos no tienen calculadora)... Ojo

repito mi papel es de orientador, pero claro si veo que un grupo no puede realizando entro allí yo a hacerles preguntas más concretas que les ayuden a salir adelante... pero sobre todo que lo hagan ellos así se apropiarán mejor del conocimiento. Ah otra cosa que quiero remarcar el alumno hará cálculo aproximado de velocidad instantánea, concepto coherente con su sentido común, porque ellos ven los cuerpos es su velocidad instantánea...
La otra actividad que escogí fue la número 6, la aplicación del concepto de derivada, para mí es trascendental... porque es la forma en la que ellos van a develar que tienen la apropiación del concepto precisamente cuando lo logran aplicar en un ejercicio de matemática o de otra ciencia... o sea que lo que me interesa aquí básicamente es la resolución de problemas aplicando el concepto de derivada que ya hemos trabajado, pero fíjate retomo una situación de una actividad que realizamos anteriormente y que hemos venido retomándola hasta que el alumno tenga elementos más formales de la derivada para resolverlo... Es decir, que primero la vamos resolviendo intuitivamente, luego se trabaja el paso de la variación media a la instantánea y ahora se retoma para resolverla con el concepto de derivada ya formal es decir derivando con la definición matemática de derivada. O sea con esto lo que trato de decir, es que yo no comparto eso de que para saber si alguien comprende un concepto se le pida "dígame la definición de derivada", porque la pueden recitar de memoria, a mí me gusta ver como la aplican en la resolución de problemas y sobre todo si se salen del ámbito matemático, es decir que les ayude el concepto de derivada a tratar matemáticamente situaciones más reales y cercanas para ellos, allí es donde se ve si se domina o no un concepto.

Profesor C

I. EN RELACIÓN CON LA PROGRAMACIÓN DE LA ASIGNATURA

E: ¿Qué elementos tienes en cuenta cuando haces la programación de matemática de 11? ¿En qué te basas para escoger contenidos, Jerarquización de contenidos?
R/: Inicialmente la verdad es que trato de llevar una secuencia: primero repaso lógica matemática, luego desigualdades, el concepto de sucesiones, límites, derivadas y finalmente integrales. Eso programo integrales pero la verdad es que nunca alcanzo a desarrollarlo por el poco tiempo. O sea la verdad es que trato de llevar siempre este orden lógico de la matemática. Bueno además, primero que todo me baso en el mismo plan curricular que monta el gobierno, luego en la misma experiencia que ya uno tiene por la práctica de tantos años y es como definimos las temáticas que se van a dar en el curso, claro está que esto es modificable y flexible en términos de que a veces los alumnos traen algunas inquietudes y uno entonces modifica un poco.

E: No entiendo porque en esta parte primero colocas incremento, incremento relativo y derivada de una función; y posteriormente cuando hablas de la unida de la derivada aparece primeo la interpretación geométrica y la interpretación física y después la definición de la derivada de una función.

R/: Sencillo, te estoy hablando de lo mismo, lo que pasa es que antes de definir la derivada les hago un recuento de la historia del concepto es decir de la interpretación geométrica y de la física, pero no lo desarrollo es como si les dijera unas historieta pequeña, pero en realidad como bien te explico en el programa que te di para definir la derivada lo hago construyendo la regla de los cinco pasos, es decir, primero les doy el incremento de la función, después el incremento relativo, después les explico el límite del incremento relativo cuando Δx tiende a cero, y después les digo que esa es la definición de derivada. Y ya después es que desarrollo la interpretación geométrica y la física, casi mezcladas, y sigo el orden del programa teniendo como guía el texto de matemática constructiva.

E: ¿Qué papel juega el libro de texto dentro de las programaciones?
R/: Hay que tener en cuenta que donde yo doy clases son escuelas muy alejadas de la ciudad y de muy bajo recurso económico, normalmente trabajo con los textos que están en la pequeña biblioteca que tenemos en el colegio que contamos con aproximadamente unos cinco ejemplares y entonces yo trabajo con este libro de texto por eso más que todo, condicionado con lo que tengo en el medio, aún cuando yo me ayudo con otros libros como el de PHH que ya te dije y lo que hago es proporcionarle a los chicos algunas fotocopias del material que necesito. De todas maneras el texto guía se utiliza más que todo en el aula de clases para que ellos hagan los talleres, pero en la medida en que ellos siempre son de otros pueblos y se tienen que movilizar no pueden llevarse el libro para la casa, sino solo el material que yo les proporciono, así que el trabajo es en clase. Y a mi me sirve para sacar definiciones, todo lo que hay que demostrar conceptualmente, los ejercicios, saco los talleres, etc.

II. EN RELACIÓN CON LA UNIDAD DIDÁCTICA

E: ¿Qué tienes que comentarnos del ejercicio de elaborar y diseñar la unidad didáctica del concepto de derivada?
R/: No que de todas maneras el instrumento que nos diste como guía es bastante sintético y esquematiza bastante el trabajo que uno hace en clase. Ahora, en la medida en la que fui haciendo me di cuenta que casi siempre repito lo mismo, o sea para mi al hacer este trabajo que me pediste es un proceso en el que uno se da cuenta si tenemos fallas en la práctica, entonces en esa parte ha sido muy interesante. De todas manera ha sido un trabajo muy interesante porque uno cada vez va perdiendo esa dinámica de hacer por escrito el desarrollo de la unidad didáctica y mucho menos reflexionar sobre todos esos apartes que nos colocaste, yo de verdad me he dado cuenta que repito siempre las mismas cosas. Es decir, que siempre defino conceptos y hago ejercicios casi iguales en donde lo que me importa es la aplicación de algoritmos... Tendré que cambiar porque viendo la evaluación del profesor de España que nos diste, si evalúa toda esa complejidad del concepto, con procesos algebraicos pero también con gráficas y todo eso... bueno eso indica que las clases de ese profesor no solo se centran en resolver problemas de algebrización sino que ha se enseñar más cosas... Así que me he dado cuenta ahora que fallo mucho...

E: Había una parte que consistía en escoger tres actividades y justificar la elección y no la veo aquí, tienes algo que comentar
R/: Es verdad que no lo hice pero puedo comentarte algo, normalmente casi siempre arranco la clase con una pregunta de motivación, siempre arranco así, luego hago una exposición y planteo una serie de ejercicios, una serie de ejercicios que los estudiantes tienen que hacer en grupo o individualmente para después hacer una puesta en común sobre el proceso de resolución y resultados, y finalmente les coloco una serie de ejercicios de ampliación. Es decir que para mí las actividades claves son: tratar de

buscar ideas previas de los estudiantes a través de preguntas para generar una crisis en el conocimiento de los estudiantes, luego viene la exposición del profesor y después ejercicios de aplicación y afianzamiento con trabajo en grupo y socialización de procesos y resultados.

Profesor D

I. EN RELACIÓN CON LA PROGRAMACIÓN DE LA ASIGNATURA

E: que aspectos tienes en cuenta al hacer la programación de la asignatura de matemática de 11º

R/: Para realizar la programación tenemos en cuenta lo siguiente, el nivel académico de los chicos, la intensidad horaria con la que contamos y los recursos bibliográficos. Lo primero, porque es fundamental saber el estado con el que llegan los estudiantes, sus dificultades en los conceptos que ya han desarrollado y que son prerrequisitos para la asignatura del curso que van a desarrollar. Lo segundo, porque hay que ser realista y confeccionar una programación que se cumpla y no pretender dar tanto contenido y sin calidad o darlo rápido y que los alumnos terminen el curso sin comprender qué han dado y por qué lo han dado. Y lo tercero, porque a este colegio viene gente muy pobre y muchas veces no compran texto guía, por tanto, partimos de lo que hay en el colegio y nos acomodamos con estos libros.

E: ¿De dónde tomas o con qué criterios escoges los contenidos a desarrollar en el programa de matemática?

R/: Tomo la decisión a partir de libros de texto de autores que tienen reconocimiento en el área, además de los puntos que te señale anteriormente, yo creo que se deben tener en cuenta o que es muy importante la secuencia temática... pero yo me guío de autores reconocidos en el área.

E: ¿qué criterios sigues a la hora de secuenciar los contenidos en el programa, es decir que podrías explicarme por qué planteas la siguiente secuencia de contenido en la programación que me proporcionaste: Funciones, limite de funciones, derivada de funciones, máximos y mínimos, razones de cambio relacionadas?

R/: Yo creo que la lógica de la disciplina, porque en conceptos tan complejos como el de límite y derivada subyacen conceptos más simples que lo estructuran que requieren ser identificados y desarrollados para una mejor comprensión, por ejemplo, en la definición formal del límite aparecen conceptos de función real, valor absoluto, intervalo, inecuaciones... que son necesarios para su comprensión.

E: ¿Qué función juega el libro de texto o texto guía a la hora de realizar la programación de la asignatura?

R/: Juega una función de vital importancia, porque allí suponemos que se determinan los temas y los subtemas a desarrollar.

E: ¿Qué uso le das al libro de texto dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje?

R/: A ver yo los veo como herramientas fundamentales, ya que sin ellos el estudiante tendría dificultades para el proceso de investigación. Ahora yo nos sigo linealmente un libro de texto me apoyo del el pero puedo usar más de uno...

E: ¿De dónde sacas las definiciones, los ejemplos y ejercicios que presentas a tus estudiantes en el aula de clases?
R/: En cuanto a las definiciones y ciertos ejercicios de los libros de texto, y algunos ejercicios son producto de mi creatividad basada en mi experiencia... pero la mayoría salen de los libros de texto...

III. EN RELACIÓN CON LA UNIDAD DIDÁCTICA

E: ¿Qué tienes que comentarnos del ejercicio de elaborar y diseñar la unidad didáctica del concepto de derivada?
R/: como ya te dije con el examen que hizo el supuesto profesor X de España, que yo creo que hiciste tu (risas...) este modelo que me diste de la unidad didáctica es muy bueno también, porque creo que contiene todos los elementos que deberíamos tener en cuenta a la hora de preparar la enseñanza de un concepto, pero honestamente, para mi ha sido difícil llenarlo y hacerlo, porque en la realidad no lo hago. Me parece perfecto, pero con qué tiempo... Así que es muy bueno y de ahora en adelante trataré de tenerlo en cuenta, pero honestamente no estoy tan seguro de poder hacerlo... Ahora, lo que si me permitirá es ser más crítico con el texto guía que escoja, es decir, que de ahora en adelante... con las preguntas que me has hecho, miraré que texto guía, que es el que uso, tenga en cuenta los aspectos que hemos discutido en estas entrevistas... la historia, las representaciones... en fin todo de lo que hemos venido hablando durante este mes... ¿No se si respondo a tu pregunta?...

E: en la actividad 3 de la unidad didáctica planteas una dificultad a la hora de tratar el límite del incremento relativo, o sea el concepto de derivada... ¿A qué se debe esa dificultad?
R/: A ver el nivel de dificultad que aquí tiene el alumno, lo va presentar no desde el punto vista gráfico... sino desde el punto de vista simbólico, abstracto... del hecho del concepto límite en sí... el alumno presenta dificultad... en el desarrollo del concepto límite... este concepto le cuesta mucho trabajo al alumno.

E: Luego en la actividad 5 también planteas una dificultad con la regla de la cadena
R/: Sí es la cuestión de que el alumno... presenta dificultad para identificar la derivada interna y la externa, de pronto te la hacen mecánicamente, pero no la comprenden... yo insisto mucho en las actividades para que alcancen esta diferencia y las identifiquen... el alumno te lo hace y derivan bien mecánicamente, pero cuando tu le dices indícame cual es la derivada interna y la externa... hay se quedan un poco...

E: Aquí en cuanto la actividad 7 que es la derivación implícita
R/: Sí... allí presentan dificultad cuando nos dan una relación con dos o tres variables y tiene que despejar y’... Es decir la dificultad que señalo ahora es un poco más de álgebra... Allí el alumno para despejar, agrupar, pasar al otro lado... le cuesta mucho... y que... observar que tienen que tabular para buscar la recta tangente... allí cuesta mucho... Sobre todo si la relación es compleja.

E: En la actividad 8 también has planteado otra
R/: Sí... hay una dificultad no tanto en el trazado de gráficas... o sea en el trazado de gráficas cuando el alumno ya entiende y se apropia de los criterios de la derivada, es decir que los reconoce y los identifica... de pronto en el gráfico no presenta tanto esta

dificultad... ya sabe que hay un máximo o hay un mínimo y sabe como ver decreciente y creciente, lo puede manejar bien... el problema está cuando vamos a pasar a los problemas de aplicación... Esto de relacionar las variables... de modelizar... Esa es una gran dificultad que tenemos con los estudiantes... A ver yo he notado que es base de geometría... cuando los problemas son de geometría... eh... de cono... de cilindro... el alumno no relaciona muy bien esas variables y... y... no sabe de pronto decir cual de las dos variables están den dependencia una de la otra... Por tanto, hay que resaltar la importancia de la geometría allí... hacer hincapié allí... hay que repasar un poco las cuestiones geométricas.

E: Por qué elegiste estas tres actividades
R/: Mira nosotros aquí viendo todas las actividades desarrolladas en la unidad, para mí es de mucha importancia... lo que te decía lo que es el concepto de derivada... para mí la representación gráfica de esa recta tangente a la curva en un punto es muy importante y ayuda mucho a la comprensión del concepto... Pero cuando ya uno termina de explicar ese proceso se debe reforzar con talleres... con talleres y tratar de que al alumno no le de pereza al alumno representar gráficamente esto... te lo decía en la entrevista anterior... que sería de mucha importancia que ese intervalo que se toma para ver el cambio de la secante a la tangente se haga a una escala más amplia, el alumno no vea dificultad de colocar ese 2,001 como algo tedioso... si ampliamos la escala... es para que el alumno lo maneje bien... y no va a permitir que el alumno se apropie más de ese concepto...
La segunda actividad que escogí es la aplicación de los criterios de la primera y segunda derivada... Esto es para la realización de los trazados de gráfica que los va hacer más fácil, con más soltura y también nos ayuda a resolver...
Y la tercera la coloqué, porque es un error que estamos cometiendo los profesores. Yo especialmente confieso que lo cometo... sinceramente te lo digo cometo ese error de que uno le presta mucha más atención a esa parte mecánica de la derivación... y de pronto el alumno te deriva con mayor rapidez y piensa uno que el alumno comprende bien... Y no caemos o no prestamos más interés al trabajo con gráficas o con otros registros... Y la aplicación de la regla de la cadena y de la derivada implícita... ¿por qué?, porque quizás uno como docente piensa que esa es la parte que los alumnos deben dominar más... y es un error... porque lo que debe manejar es la interpretación del concepto en diferentes contextos, análisis e interpretación de gráficas... etc... Pero confieso que me estoy centrando en la parte más algorítmica... y ahora me estoy dando cuenta con todas las preguntas que me haces.

E: Por ejemplo tu tienes aquí IPT = investigación previa del tema, exposiciones, ejercicios de papel y lápiz, actividades extraescolares, trabajo en grupo... Es decir de estas actividades ¿cuáles crees importante y por qué?
R/: Para mí... yo creo que ya uno en 11º ya debe irse preparando a una cuestión de mucha importancia... y es el de investigar temas... y eso lo pongo en práctica yo... por tanto la investigación previa al desarrollo de un tema se les pide que investiguen sobre ciertos conceptos... porque el alumno no llega sin nada... sino que se preocupa por comprender algo y eso te ayuda a bordar la enseñanza de los conceptos y te facilita el desarrollo de la clase porque ya traen algo previo y de lo que se trata es de que se apropie... Entonces después uno puede socializar esto... y entonces cobra importancia los trabajo en grupo... de pronto uno si expone un rato... pero ya no tanto como cuando el alumno viene sin preparación... Después y dependiendo del tema también hay trabajos individuales... si es gráfico mucho mejor individual porque así uno detecta las

dificultades de los chicos... y se les puede ayudar y después compartir en grupo... porque yo trabajo con 50 alumnos...

Profesor E

I. EN RELACIÓN CON LA PROGRAMACIÓN DE LA ASIGNATURA

E: ¿Cuándo tú haces una programación en qué te basas?
R/: Bueno nosotros tenemos un grupo de profesores que estamos bastante integrados... Trabajamos como área pero respetamos nuestras asignaturas... El área determina las unidades modulares de aprendizaje... El profesor anterior me dice llegué hasta aquí... o sea hay un diagnóstico inicial... por eso es que tú ves que nosotros introducimos unidad cero de repaso, precisamente porque la unidad cero me permite trabajar con firmeza en los prerrequisitos que necesitan los estudiantes para abordar el estudio de un curso determinado... yo no puedo entrar a hablar de factorización a los alumnos sin haberle hablado primero de productos y cocientes notables... Entonces hay una reunión previa para determinar las unidades modulares que se desarrollarán en un año determinado... o sea que el programa lo comenzamos a estructurara a partir de un diagnóstico de los profesores de la problemática de los estudiantes...

E: Y los contenidos ¿de dónde lo sacan... cómo los eligen y con qué criterios los estructuran?
R/: Bueno lo que pasa es que con la experiencia que tiene uno en la asignatura y los programas que da el gobierno para empalmar las diferentes unidades modulares... vienen determinadas ya en unos textos que el gobierno... ya... proporciona...

E: pero te cuento que hace dos años yo vine a entrevistar profesores y me encontré que la mayoría no utilizaba los programas curriculares, ni los conocían o decían que no habían... ¿tú que opina de esto?
R/: Sí hay... sí hay, porque precisamente si quieres yo te lo consigo... por ejemplo los lineamientos curriculares... Por tanto te resumo, primero estructuramos el programa a partir de un diagnostico inicial de los estudiantes, luego la elección y secuenciación de los contenidos la hacemos, primero a partir de la experiencia docente y el conocimiento que se tiene de los programas curriculares oficiales, de las estructuras de las unidades modulares de aprendizaje de cada asignatura... Es más pero tratamos más bien de escoger los temas centrales... los temas básicos... eh... que el estudiante se lleve los conocimientos mínimos... no llenarlos de tanto... Ahora ya te lo he dicho antes... en nuestra programación hay claro una teoría de enseñanza que es por procesos... nosotros le damos a ellos el material y ellos a veces les toca investigar cosas más profundamente de lo normal... entonces nosotros tenemos que estar preparados para abordarla y enriquecerla...

E: ¿Qué papel juega entonces el libro de texto en su proceso de programación?
R/: Bueno es que nosotros prácticamente no tenemos un libro de texto... el colegio da una bibliografía... yo no les exijo a los estudiantes un texto en particular... sino que les doy libertad a que ellos me traigan el texto que ellos quieran... pero como se ponen de acuerdo ellos... y generalmente hay una tradición por tener un texto... entonces seguimos el libro de matemática constructiva, pero yo he procurado quitar ese ambiente

de texto... entonces ellos me ven llegar con un libro y de repente otro día les saco el examen de otro libro... claro que yo de antemano les doy fotocopia... y entonces al día siguiente veo dos libros en el salón de clase... Entonces tienen varios libros... Pero yo sí que sigo par sacar las definiciones, el orden de las clases y la mayoría de los ejercicios del libro que te mencioné hace un ratito...

E: Por eso entonces, ¿qué papel juega entonces el libro de texto en su proceso de programación?
R/: Yo no diría texto guía... los textos juegan un papel importante porque de allí es donde se extraen los ejercicios y donde se sacan las definiciones... El libro me permite guiarme sobre cada uno de los temas... para que vayan entrelazados y no tener uno que estar saltando y coger una cosa de aquí y otra de allá... o sea que me sirve para secuenciar los temas... el libro siempre ayuda... Aunque yo me he acostumbrado más a guiarme por los títulos de un libro de texto... y que el título lo puede conseguir uno en cualquier texto...

E: En cuento a las unidades que colocas aquí... tu siempre me has hecho énfasis en la rigurosidad qué tienen en los prerrequisitos... o sea que este orden que me presentas del programa de 11º... ¿crees tú que es el que se debería seguir para enseñar la matemática de 11º?
R/: Sí ese es un orden ya estudiado como te dije por el grupo de profesores... porque tu no puedes entrar en las funciones sino conoces estos prerrequisitos... pero cada unidad tiene sus prerrequisitos... para tratar el límite de funciones hay que trabajar primero funciones, para definir derivada hay que primero trabajar el límite, etc... Es decir que tal y como lo planteo yo creo que se debe desarrollar el programa...

II. EN RELACIÓN CON LA UNIDAD DIDÁCTICA

E: ¿Qué tienes que comentarnos del ejercicio de elaborar y diseñar la unidad didáctica del concepto de derivada?
R/: Bueno estuvo bien, el instrumento que me diste fue una buena guía, pero claro estar haciendo esto para cada una de las unidades es imposible, no creo que tú lo hicieras cuando trabajabas aquí o ¿sí?, porque es que yo no tengo tiempo. A ver, uno lo hace implícitamente cada vez que va a dar la clase pero tener que escribirlo con tal minuciosidad como tu me lo pides es imposible... ahora creo que el truco está en escoger un buen libro de texto que te facilite todo este proceso... porque claro un buen libro de texto que trabaje bien el contenido matemático, que sea claro, que tenga buenos y variados ejercicios sustituye a mi manera de ver todo esto que me pediste hacer... Con esto no quiero decir que no sea bueno lo que me pides, pero en la realidad es imposible y creo que nadie lo hace.

E: En la primera actividad hablas de la exposición del profesor y justificas el por qué Luego citas en el taller individual citas ejercicios 3.1, 3.2 del libro de texto que de pronto tienen una gran cantidad de ejercicios... ¿Eso implica que lo deben hacer todos? ¿O te refieres a la tipología de ejercicios?
R/: No... no... lo que trato de decir es que de allí se sacan algunos ejercicios... o sea ejercicios 3.1, 3.2, y 3.3... significa la fuente donde el estudiante va a buscar la información y de allí yo le voy a evaluar en el taller... Esta es la fuente para información de ellos... Y ya yo le llevaré el taller preparado en una hoja con bases en esos ejercicios

siempre muy parecidos a los que yo te entregué a ti en la evaluación... Es que el trabajo es en procesos... y uno antes tiene que darle al estudiante las preguntas... Por ejemplo el taller es de derivada, entonces yo antes le he dado la conceptualización todo el proceso conceptual y procedimental... Ahora todo lo volitivo, es decir cómo quiero yo que ellos me presenten el trabajo... porque se evalúa todo el orden, el aseo, la presentación del tema, es integral... La evaluación es integral y negociada con ellos, porque de un tema puede evaluarse una o dos... En fin...

ANEXO 7

ANÁLISIS DE LA PARADOJA DE ZENÓN DE *AQUILES Y LA TORTUGA* EN LA DESCRIPCIÓN DE LA COMPRENSIÓN DE LOS CONCEPTOS ESTRUCTURANTES DEL CÁLCULO INFINITESIMAL QUE TIENEN PROFESORES DE MATEMÁTICA EN EJERCICIO[1]

Edelmira Badillo y Carmen Azcárate
Departament de Didàctica de les Matemàtiques i de les Ciències Experimentals
Universitat Autònoma de Barcelona
Bellaterra, España

INTRODUCCIÓN

En este documento se analizan las respuestas dadas por siete[2] profesores de matemática de secundaria en ejercicio a una de las famosas paradojas de Zenón de Elea, la de Aquiles y la tortuga. La situación problema que planteamos a estos profesores, adaptada de la original, fue la siguiente (Badillo, 1999):

Aquiles y la tortuga corren una carrera. Aquiles tiene una velocidad doble que la velocidad de la tortuga. Si al iniciar la carrera se da a la tortuga una ventaja de 1 Km., ¿logrará Aquiles alcanzarla?

El espectro de las respuestas que hemos obtenido nos muestra que los profesores

[1] Agradecemos la accesoria del Dr. Agustín Adúriz-Bravo en la definición de las categorías epistemológicas y metacognitivas de esta parte del trabajo de investigación.

sostienen ideas clásicas acerca del movimiento y manifiestan en sus razonamientos espontáneos rasgos similares a los del pensamiento aristotélico, con una concepción *potencial* del infinito (Garbin, 2000).

Este trabajo forma parte de un estudio más amplio que persigue interpretar las diferentes formas de conocer el concepto de derivada que tienen profesores de matemáticas en ejercicio (Badillo, 2000b). Hemos considerado que la paradoja de Zenón constituye una situación potente para explorar la aplicación de este concepto al campo de la física y su rol histórico como solución integradora a los dilemas de divisibilidad y correspondencia del espacio y del tiempo (Delgado, 1998).

Las respuestas dadas por los profesores muestran que, frente a esta versión de la paradoja de Aquiles y la tortuga, existen tres elementos independientes que pueden aparecer en su resolución:

1. El conocimiento de la solución real del problema en el contexto físico de la carrera (la idea intuitiva de que el corredor más veloz siempre alcanza al más lento con el tiempo suficiente),
2. La reproducción de los argumentos eleáticos acerca de la divisibilidad infinita del tiempo y del espacio, y
3. El conocimiento de la solución formalizada a través de la aplicación de las ecuaciones diferenciales de movimiento de la cinemática clásica y, en algún caso, mediante un modelo de series infinitas.

Las distintas combinaciones de estos tres elementos nos han permitido definir una *tipología* para clasificar a los profesores. La presencia o ausencia de los diferentes elementos da cuenta de si los profesores llegan a una solución completa del problema y si detectan el carácter paradójico de la situación cuando es abordada desde dos manifestaciones distintas del pensamiento del sentido común.

Para el análisis de las concepciones de los profesores frente al problema de Aquiles y la tortuga hemos definido dos categorías, una *conceptual* y una *metaconceptual*. En

[2] En este documento se analizan las respuestas de siete profesores de matemática en ejercicio de Colombia, de los cuales, sólo dos participaron en la tesina (profesores F y G) y cinco participaron en la tesis (A, B, C, D y E)

relación con la categoría conceptual, las respuestas de los profesores nos permiten ahondar indirectamente en su manejo de los conceptos fundamentales del cálculo infinitesimal (número real, infinito, serie, límite) y de la cinemática clásica (espacio, tiempo, movimiento, encuentro).

La categoría metaconceptual apunta a estudiar el nivel de conciencia de los profesores sobre sus procedimientos de solución al abordar la situación problema, sea como una paradoja o como un ejercicio tipo de cinemática. El abordaje elegido puede condicionar el uso que los profesores hacen de las diferentes formas de representación (*registros semióticos*) en el proceso de resolución (Font, 2000).

Un aspecto relevante de nuestro estudio es que retoma un episodio central de la historia de la ciencia que ha sido controvertido y ha generado múltiples respuestas a lo largo del tiempo (Boyer, 1986). Hemos recurrido a la historia de la ciencia con el fin de que nos ayude a indagar en algunos aspectos concretos del conocimiento profesional de los profesores en ejercicio; queremos ser capaces de incidir con fundamento teórico en la formación inicial y permanente del profesorado de matemática (Llinares, 1998; Badillo, 1999).

En la primera sección elaboraremos brevemente el contexto histórico de la paradoja de Zenón. La segunda sección contiene los instrumentos de análisis que hemos diseñado para la interpretación de las concepciones de los profesores. En la tercera sección se presentan los resultados del análisis de las soluciones que siete profesores de matemática de secundaria dieron a nuestra versión de la paradoja. Se establece una tipología de estos profesores con base en nuestro análisis. Hay una cuarta sección dedicada a las conclusiones e implicaciones.

LA PARADOJA DE AQUILES Y LA TORTUGA

Zenón, discípulo de Parménides y defensor de sus argumentos, vivió en Elea, al sur de la actual Italia, alrededor del año 450 a.C. Zenón de Elea es conocido por las llamadas paradojas, con las cuales perseguía apoyar las tesis de Parménides sobre la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y de divisibilidad infinita del espacio, el tiempo y el movimiento. Para ello adoptó el método dialéctico, que más tarde Sócrates usaría con el nombre de método indirecto de razonamiento; este consistía en partir de las premisas que defiende el adversario para culminar reduciéndolas al absurdo.

En la reconstrucción dialéctica que hace Tannery (Cajori, 1915), las cuatro paradojas de Zenón más conocidas (la dicotomía, la flecha, Aquiles y la tortuga, y el estadio) apuntan en forma sucesiva y encadenada a diversos problemas de la concepción pitagórica del movimiento, entre ellos: que la cantidad (punto en el espacio o tiempo) no tiene magnitud, que la suma de infinitas partes con magnitud es infinita, y por tanto no puede ser recorrida en tiempo finito, y que, aceptada la divisibilidad infinita del espacio y del tiempo, el movimiento es imposible.

La paradoja de *Aquiles y la tortuga* pinta a Aquiles “el de los pies ligeros” compitiendo en una carrera con una tortuga a la que se ha dado una ventaja inicial. Lo que se trata de demostrar es que Aquiles, por muy velozmente que corra, no podrá alcanzar nunca a la tortuga. Cuando Aquiles haya alcanzado la posición inicial de la tortuga, esta habrá avanzado alguna distancia, aunque sea pequeña, y cuando Aquiles haya recorrido esta distancia, la tortuga habrá avanzado algo más lejos. El proceso continuará así indefinidamente, con el resultado paradójico de que el veloz Aquiles no podrá alcanzar a la lenta tortuga.

En el razonamiento de Zenón, Aquiles no puede adelantar a la tortuga, porque para hacerlo tendría que realizar un número infinito de actos en un período finito de tiempo. Por lo tanto, la concepción pitagórica del espacio, el tiempo y el movimiento plantea una inconsistencia con el hecho bien conocido de que Aquiles sí alcanza a la tortuga. De allí el carácter paradójico de la argumentación. El valor histórico de la paradoja radica en su importancia como argumento contra la existencia de indivisibles o átomos matemáticos como constituyentes del espacio y el tiempo (Delgado, 1998).

Las paradojas de Zenón en su conjunto fueron ideadas para resaltar las dificultades conceptuales que surgen al intentar explicar el movimiento descomponiendo la trayectoria espacial en puntos individuales ubicados uno a continuación del otro, y descomponiendo el tiempo en instantes discretos, distintos y diferenciados, que se suceden unos a otros y que pueden ser puestos en correspondencia biunívoca con los elementos de la partición del espacio.

Un aspecto notable es lo que se tardó en resolver estas paradojas satisfactoriamente: fue necesaria la creación de la teoría de las series infinitas y de algunas de las técnicas del cálculo diferencial para aclarar los enigmas que Zenón planteó hace 2500 años. Durante los siglos XVII y XVIII, por ejemplo, algunos matemáticos se preocuparon por ver si era posible extender la idea ya elaborada de suma ordinaria de conjuntos finitos a conjuntos infinitos, tratando de mostrar que en algunos casos la suma de un conjunto de infinitos números puede ser finita (Apostol, 1998).

En la actualidad, centrados en la teoría de las series infinitas, la solución a la paradoja de Aquiles y la tortuga pone en evidencia que Zenón supone incorrectamente que la suma de una infinidad de intervalos positivos de tiempo (en los cuales Aquiles recorre los elementos de la partición del espacio) es infinita, de lo que deduce que Aquiles nunca alcanza a la tortuga. En la versión que utilizamos en nuestra investigación, obtenemos una serie infinita convergente de la distancia que separa a los corredores, que podemos describir así: 1, 1/2, 1/4, 1/8, 1/16, 1/32,..., $1/2^n$. Esta serie convergente tiende a cero cuando n crece indefinidamente, manifestando el hecho del encuentro. De igual forma, el tiempo utilizado por Aquiles para recorrer estas distancias viene dado por una serie similar, que también tiende a cero y *cuya suma finita T representa el tiempo necesario para el encuentro*. El proceso de paso al límite en este caso parece invalidar la objeción de Zenón de que la suma de un número infinito de intervalos de tiempo no puede ser nunca finita.

Si bien es cierto que las paradojas de Zenón en la actualidad tienen solución satisfactoria en el marco del llamado análisis estándar, utilizando los números reales y la teoría de las series infinitas (Alper y Bridger, 1997), aún hoy sigue abierta la discusión sobre el significado histórico de estas paradojas. Existe un gran número de trabajos que aportan soluciones, e incluso hay autores que opinan que dichas soluciones no eliminan totalmente el carácter paradójico de los argumentos, proponiendo así nuevas vías, en el marco del análisis no estándar, para reemplazar las demostraciones clásicas (Garbin, 2000).

A lo largo de la historia se han elaborado distintas versiones de la paradoja de Aquiles y la tortuga que, sin perder su esencia, se enfocan en diferentes cuestiones conceptuales (Núñez, 1997). En nuestra investigación, utilizamos una versión particular de la paradoja que puede ser considerada como una situación problema familiar en el contexto de la cinemática escolar (problema de encuentro). Nuestra formulación obedece a la necesidad de indagar sobre los conceptos *estructurantes* de esta disciplina: espacio, tiempo y velocidad, que pueden iluminar nuestro análisis de la comprensión que tienen los profesores del concepto de derivada en su aplicación física (Azcárate, 1990).

HERRAMIENTAS CONCEPTUALES PARA EL ANÁLISIS DE LAS CONCEPCIONES CON RELACIÓN A LA PARADOJA

En un estudio preliminar (Badillo, 1999), definimos tres *modelos de pensamiento* en torno a la paradoja tomando como eje las rupturas epistemológicas que se han presentado a lo largo de la historia de la ciencia. Los modelos definidos fueron:

1. El modelo de *pensamiento griego*, que pretende recoger algunos elementos del pensamiento de Platón y de Pitágoras, tomando como eje la posición crítica de Aristóteles frente a estos dos sistemas filosóficos.
2. El modelo de *pensamiento clásico*, que hace referencia a las contribuciones clave en torno a la constitución de la dinámica como disciplina científica en los inicios de la era moderna.
3. El modelo de *pensamiento actual*, que realiza una aproximación a las soluciones a la paradoja de Zenón en el marco de los modelos de Cantor y de otros pensadores del siglo XX.

Estos tres modelos fueron utilizados para una categorización inicial de los profesores involucrados en ese estudio. Posteriormente (Badillo, 2000a), en un intento por describir con más detalle las respuestas obtenidas, diseñamos tres instrumentos que nos permitieran mostrar analítica y secuencialmente los diferentes razonamientos utilizados por los profesores y definir una tipología en relación con la resolución que dan a la paradoja.

El primer instrumento consiste en una tabla de categorías analíticas que da cuenta de los diferentes elementos constituyentes del abordaje que hace el profesor del problema. Las cinco categorías que hemos propuesto son:

1. *El profesor manifiesta conocer la solución real.* Desde el sentido común o la propia experiencia, sabe que Aquiles alcanzará a la tortuga si se le da suficiente tiempo.
2. *El profesor reproduce los argumentos eleáticos.* Manifiesta conciencia acerca de los problemas de divisibilidad infinita del espacio y del tiempo.
3. *El profesor conoce la solución basada en el cálculo diferencial.* Aplica correctamente el aparato formal de la cinemática clásica y, en algún caso, un modelo de series infinitas.
4. *El profesor percibe la contradicción entre los tres registros anteriores.* Ve el carácter paradójico de la situación cuando es abordada desde múltiples perspectivas. El grado de conciencia acerca de la existencia de una contradicción remite a la categoría metaconceptual que desarrollaremos más abajo.
5. *El profesor consigue la consistencia entre los registros contradictorios.* Plantea argumentos formales para apantallar la contradicción descartando la solución pitagórica y usando el concepto de límite.

El segundo instrumento es una tabla de categorías analíticas que da cuenta de los procesos metacognitivos que los profesores hacen explícito durante el abordaje y solución del problema. Las tres categorías que hemos propuesto son:

1. *Verbaliza el carácter paradójico de la situación.* Frente a dos o más posturas contradictorias, percibe la paradoja que se genera al intentar aceptarlas simultáneamente.
2. *Verbaliza su conocimiento del valor histórico de la situación.* Reconoce la situación como una problemática que ha sido objeto de debate a lo largo de la historia de la ciencia.
3. *Verbaliza la necesidad de nuevas categorías conceptuales.* Echa mano en su

argumentación a modelos teóricos (como el modelo de series infinitas) para fundamentar la solución planteada.

El tercer instrumento es un esquema que permite representar secuencialmente el recorrido del proceso de resolución de la situación problema para cada profesor. Este esquema se muestra en la figura 1.

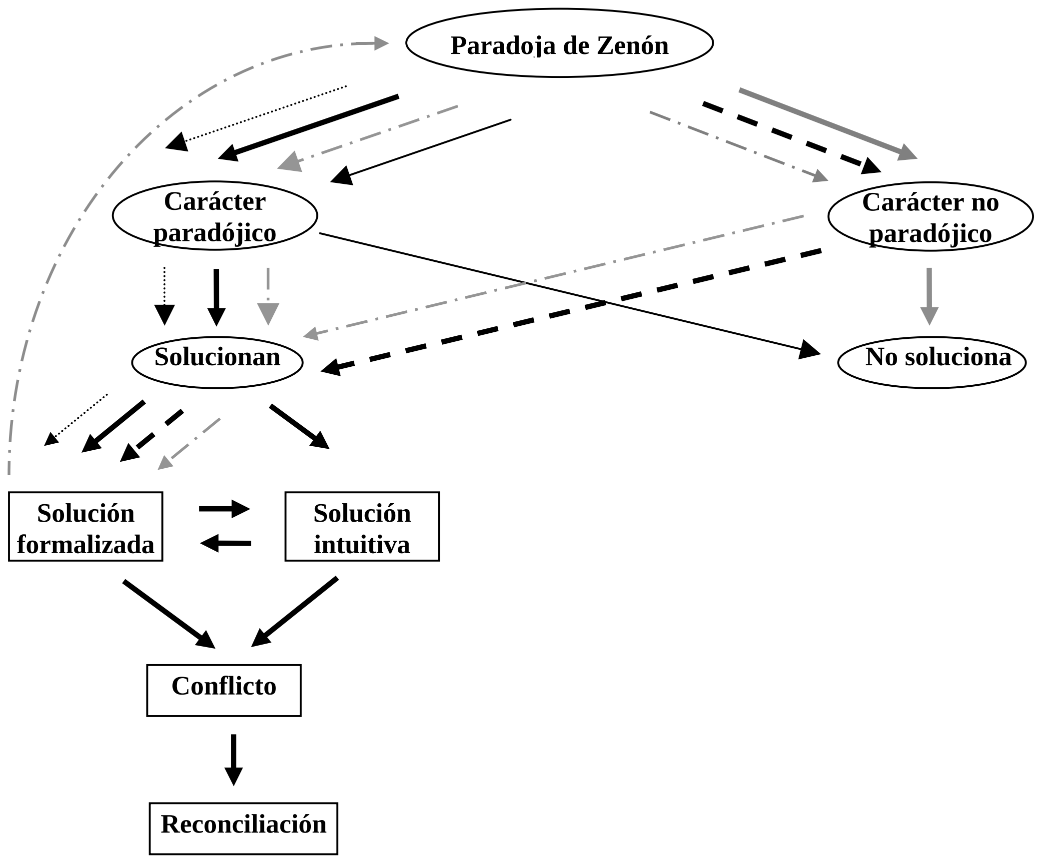


Figura 1. El tercer instrumento de análisis de datos es un esquema donde se ilustran secuencialmente las posibles respuestas de los profesores frente a la paradoja de Aquiles y la tortuga.

LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES A LA PARADOJA DE ZENÓN, *AQUILES Y LA TORTUGA*

Presentamos nuestra versión de la paradoja a siete profesores de matemática en activo del Departamento del Atlántico, Colombia. Recogimos sus respuestas por medio de una entrevista individual semiestructurada (grabada en audio), que fue acompañada por un registro escrito del proceso de solución. A continuación reseñamos las respuestas de los profesores analizadas a través de nuestros tres instrumentos.

A nivel global, las respuestas encontradas al plantear la paradoja a profesores en ejercicio reflejan que todos los profesores tendieron a contrastar la situación problema con la realidad; es decir que se observa la fuerza que tiene el razonamiento intuitivo a la hora de abordar la solución de problemas contextualizados.

PROFESOR	A	B	C	D	E	F	G
1. Manifiesta conocer la solución real (Aquiles alcanza a la tortuga)	X	X	X	X	X	X	x
2. Manifiesta conocer los argumentos eleáticos (Problemas de divisibilidad de espacio y tiempo)		X		X	X		X
3. Conoce la solución basada en el cálculo diferencial (Aplicación de la cinemática clásica)	X	X	X	X		X	
4. Percibe la contradicción entre los registros (Ve el carácter paradójico)		X		X	X		x
5. Consistencia entre los registros (Plantea argumentos para apantallar la contradicción)		X		X			

Tabla 1. Categorías analíticas que da cuenta de los diferentes elementos constituyentes del abordaje que hace el profesor del problema (*Análisis conceptual*).

Si bien es cierto que cinco de los profesores abordan la solución de la situación como un ejercicio tipo de la cinemática clásica, encontramos profundas diferencias en las justificaciones que dan al resultado (el hecho del encuentro), pues sólo tres profesores fundamentan la solución con el aparato formal del modelo de series infinitas. Uno de ellos deja entrever la necesidad de un aparato formal para modelizar el fenómeno estudiado. Otros dos plantean un uso *naturalizado* de los conceptos, basado en la utilización acrítica de las ecuaciones de la cinemática clásica, sin llegar a comprender los conceptos del precálculo y del cálculo infinitesimal inmersos. De igual forma, encontramos que dos profesores reproducen en sus razonamientos los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad del tiempo y del espacio, evidenciando algunos errores conceptuales, tales como una concepción potencial del infinito y la no formalización de conceptos del cálculo infinitesimal, como límite y velocidad (derivada).

En relación con la categoría metaconceptual, resaltamos que sólo dos de los profesores verbalizaron su conocimiento sobre el valor histórico de la situación planteada. Sin embargo, sus argumentaciones fueron contradictorias. El profesor D muestra una comprensión de los conceptos matemáticos acorde con la evolución histórica de los mismos, mientras que el profesor E exhibe un mal manejo de los conceptos involucrados, evidenciando un esquema potencial del infinito que le impide comprender conceptos como límite y derivada. En los razonamientos de tres de los profesores, que se basan en el manejo algebraico de las ecuaciones de la cinemática clásica, no hay preocupación por buscar una fundamentación sintáctica para los conceptos inmersos que permita apantallar las contradicciones que se presentan o justificar los razonamientos realizados a la luz de modelos teóricos actuales.

PROFESOR	A	B	C	D	E	F	G
1. Verbaliza el carácter paradójico de la situación.		X		X	X		x
2. Verbaliza su conocimiento del valor histórico de la situación.				X	X		
3. Verbaliza la necesidad de nuevas categorías conceptuales.	x	X		X			

Tabla 2. Categorías analíticas que da cuenta del nivel de conciencia de los profesores sobre sus procedimientos de solución al abordar la situación problema (*Análisis metaconceptual*).

A continuación nos centraremos en el análisis particular de cada uno de los siete casos estudiados.

El caso del profesor A

Al plantearle la situación problema al profesor A, encontramos que en una primera instancia la contrasta con la realidad, afirmando que Aquiles alcanza a la tortuga. Posteriormente aborda el problema como un ejercicio tipo de la cinemática clásica, logrando resolverlo correctamente con las ecuaciones de movimiento, y manteniendo la consistencia entre los registros semióticos utilizados. El hecho de no utilizar los argumentos eleáticos y centrar la solución en la utilización de las ecuaciones del movimiento uniforme, le impide ver el carácter paradójico de la situación.

Inicialmente, el profesor hace una lectura del enunciado y presupone que Aquiles alcanza a la tortuga porque tiene una velocidad mayor. Seguidamente, dibuja un esquema que sintetiza los elementos planteados. La forma en la que enfoca la solución nos muestra que el profesor centra la situación en un ámbito físico, pues plantea una solución basada en la cinemática clásica, partiendo de la ecuación $x = v.t$.

Las argumentaciones del profesor A se centran en la hipótesis de que los movimientos realizados por Aquiles y la tortuga son uniformes. El profesor no da una respuesta inmediata acerca de la distancia de encuentro; se ve en la necesidad de recurrir al planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales y a su resolución por el método de la igualación, obteniendo así correctamente la respuesta buscada.

Se observa que el profesor utiliza una *perspectiva de proceso* (Asiala et al., 1996) de los conceptos involucrados en la cinemática clásica, pues necesita el planteamiento de la ecuación $x = v.t$ y su solución para llegar a la respuesta requerida. La respuesta del profesor está enmarcada en un contexto algebraico, ya que la fuerza de sus argumentaciones se basa en la manipulación de las ecuaciones del movimiento de la mecánica clásica, sin recurrir a otro tipo de argumentación, sea geométrica o numérica.

Posteriormente, al indagar sobre qué interpretación y significado otorga al resultado obtenido mediante la manipulación algebraica, el profesor nos comenta lo siguiente:

> "Bueno, se refiere a que la diferencia entre Aquiles y la tortuga es de 1 Km., ¿cierto? Lo que le resta a la tortuga para llegar a su punto final, sería esa diferencia, o sea el total que le hemos llamado x menos la diferencia... Entonces, ¿qué viene representando el 2? ¿Qué vendría representando el 2? <u>(silencio de 10 segundos)</u> En este caso el... el... el 2 viene a representar la distancia completa al punto de llegada; entonces, como la distancia completa es al punto de llegada, en ese punto, o sea, en la meta exactamente, <u>Aquiles igualaría y sobrepasaría al límite a la tortuga, o sea, en ese instante, en ese instante; porque si miramos que x es igual a 2, y miramos esto acá matemáticamente</u>, al reemplazarlo en el reemplazo de esto, 2 - 1 es lo que le hace falta, es la otra parte del kilometraje para que esto sea 2. O sea que exactamente en la meta, exactamente en la meta, Aquiles va a alcanzar a la tortuga, pero en la meta exactamente."

Hemos subrayado una parte de este fragmento de la entrevista realizada al profesor, donde encontramos algunos elementos teóricos interesantes. Por un lado observamos que el profesor fue inducido por nuestra pregunta a dar significado a la respuesta encontrada, recurriendo a la sintaxis de los conceptos matemáticos que maneja en la solución del problema. Podemos inferir de su respuesta que dota de contenido a la ecuación utilizada, $x = v.t$, pues, aunque no explicita los conceptos inmersos, hace referencia al concepto de límite. Podríamos decir que de alguna manera se refiere al límite de la serie que se forma a partir de la diferencia de distancias entre Aquiles y la tortuga, que converge a cero.

El profesor utiliza indirectamente en su argumentación aspectos sintácticos de las ecuaciones cinemáticas del movimiento; suponemos que implícitamente los relaciona con los aspectos formales del cálculo diferencial. El profesor A no hace explícita una formalización matemática elaborada que justifique su planteamiento, es decir, no hace referencia a las sucesiones convergentes con la cual está trabajando implícitamente, ni a la suma infinita de los términos de las sucesiones, ni al límite de la misma, como tampoco hace ninguna aproximación numérica, ni geométrica, de la situación. Esto permitiría inferir que quizás el enunciado de la situación problema indujo este tipo de respuesta en el profesor, quien no percibió la intención de obtener la serie en el proceso de modelización de los movimientos implícitos en el problema (Ramírez, 1999).

A continuación, en la figura 2, se esboza la respuesta dada por el profesor A a la paradoja.

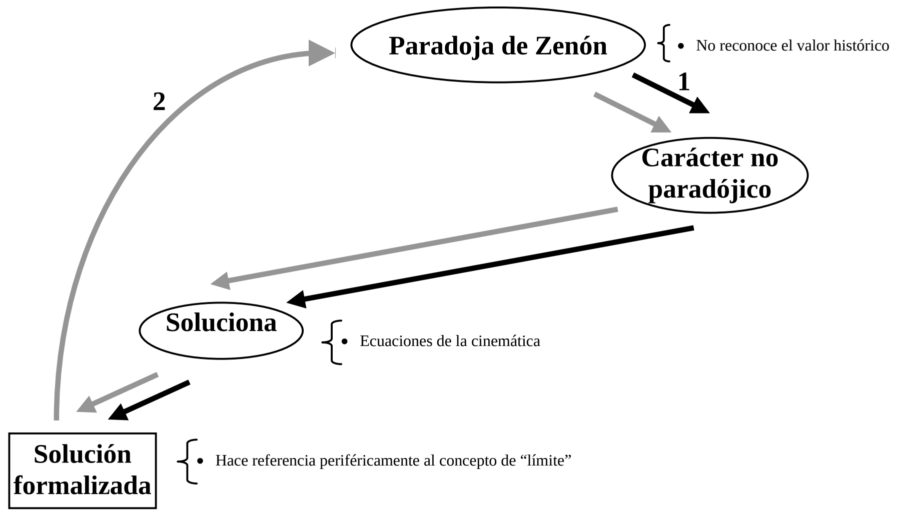


Figura 2. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor A, a la situación problema.

En relación con la categoría metaconceptual, encontramos que el profesor A no reconoce el valor histórico de la situación. El no reflexionar metacognitivamente sobre el proceso de resolución le impide ver el carácter paradójico del problema, pues aborda su solución como un ejercicio tipo de cinemática.

El caso del profesor B

Encontramos que el profesor B no reconoce la situación como un problema histórico fundamental en el desarrollo de la matemática. Frente al problema, plantea tres tipos de razonamientos. Inicialmente, aborda la solución como un ejercicio tipo, y lo enfrenta igual que el profesor A, planteando una solución basada en la aplicación de la ecuación $x = v.t$, a partir de los datos que se le proporcionan. Responde correctamente que Aquiles alcanzará a la tortuga a una distancia de dos kilómetros de su posición inicial, después del manejo algebraico de un sistema de ecuaciones lineales.

La argumentación que da para sustentar el planteamiento de estas ecuaciones es considerar que tanto Aquiles como la tortuga se mueven con velocidades constantes; por tanto se centra en el movimiento uniforme y aplica la ecuación $x = v.t$. Al igual que el profesor A, inicialmente no ve el carácter paradójico de la situación problema, más bien la enfrenta como un ejercicio rutinario de la cinemática clásica. En la figura 3 se ilustra esta primera argumentación con las flechas en negro y el número 1.

El profesor B opta inicialmente por una *perspectiva proceso* de los conceptos involucrados en la cinemática, que requiere el planteamiento formal de un sistema de ecuaciones lineales para llegar a la respuesta. Dado que la fuerza de sus argumentaciones está basada en la manipulación de las ecuaciones del movimiento de la mecánica clásica, podemos inferir que su respuesta ubica la situación problema en un ámbito físico y en un contexto algebraico.

Posteriormente, en su intento por comparar la situación problema con la realidad, plantea el acuerdo entre el resultado encontrado y lo que él considera que ocurre en la vida real. Es decir que el profesor B no encuentra ninguna contradicción entre los registros utilizados.

Al indagar sobre el significado que da al resultado hallado, observamos que el profesor comienza a plantearse la solución desde una “forma cualitativa” (denominada así por el propio profesor). Es entonces cuando ve que está frente a una situación paradójica: primero da una respuesta formal y posteriormente reconstruye los argumentos eleáticos, llegando a la conclusión contradictoria de que Aquiles no alcanza a la tortuga. Esta segunda fase de la argumentación está representada en la figura 3 mediante las flechas de color gris y el número 2.

El profesor B percibe la contradicción entre los registros que ha manejado en la solución del problema; aquí emerge la conciencia metacognitiva del conflicto entre las diferentes argumentaciones que ha planteado para dar la solución:

> “(...) Ahora, la explicación que le doy desde un punto de vista cualitativo es que cuando Aquiles ha alcanzado el punto de partida de la tortuga, la tortuga ha recorrido 1/2 km, cuando Aquiles avanza el 1/2 km, la tortuga ha avanzado 1/4 de km más... <u>(risas)</u> y así sucesivamente. Indica esto que aquí se forma que... una progresión aritmética... no... no, una sucesión... <u>(risas)</u> Esto está fregado... <u>(risas)</u> Está bueno este problema... <u>(risas)</u> Es una sucesión... o sea que si yo sigo con el cuento, cuando la tortuga recorre... <u>(silencio de 10 segundos)</u> O sea, si Aquiles llega al punto que ha recorrido la tortuga, la tortuga se ha movido a su vez la mitad de esa distancia. Si Aquiles recorre esa mitad, la tortuga recorre otra mitad de lo que había recorrido antes. O sea que si seguimos con eso, se podría llegar a afirmar que la... <u>(risas)</u> ¿que Aquiles no se alcanza a la tortuga? <u>(risas)</u> Contrario a lo matemático, que Aquiles no se alcanza a la tortuga. Es un problema muy bueno... yo no lo había resuelto.”

Seguidamente viene la tercera fase, que hemos denominado de síntesis o reconciliación, representada en la figura 3 con las flechas punteadas y el número 3. El profesor vuelve a analizar la situación con el aparato matemático formal que tiene construido, el límite de sucesiones, y ve que lo que se forma es una sucesión convergente de las distancias que separan a Aquiles y la tortuga. Postula que esa distancia tiende a cero, porque ya sabe que Aquiles y la tortuga se encuentran; concluye que las sumas parciales de los términos de la sucesión tienden al límite finito 2. Es así como logra plantear argumentos para apantallar la contradicción, pues asocia lo que hizo inicialmente mediante procesos algebraicos con lo que sabe que ocurre en la realidad y, finalmente, con los conceptos matemáticos formalizados:

“Es algo que deja a uno para pensar por largo rato, cómo es posible que si yo analizo después desde un punto de vista cualitativo, puedo llegar a la conclusión de que Aquiles nunca va a alcanzar a la tortuga, porque siempre va a haber una pequeña distancia que los separa, en últimas será una pequeñísima distancia, pero siempre habrá una pequeñísima distancia entre los dos. En cambio, matemáticamente, mejor algebraicamente, al establecer un sistema lineal de dos por dos, pues me da un resultado de que sí la alcanza a los dos kilómetros. Entonces, enlazando el concepto matemático, yo diría que esto, el 2, vendría a ser un límite, un límite de qué, de algo... Estoy pensando de qué sería, y ese límite nos da 2. Debe ser de alguna, de... de la sucesión que nos da aquí, debe ser... ¡Sí, así es!”

En la figura 3 quedan esquematizadas las diferentes fases de la argumentación que muestra el profesor B en la solución de la situación planteada.

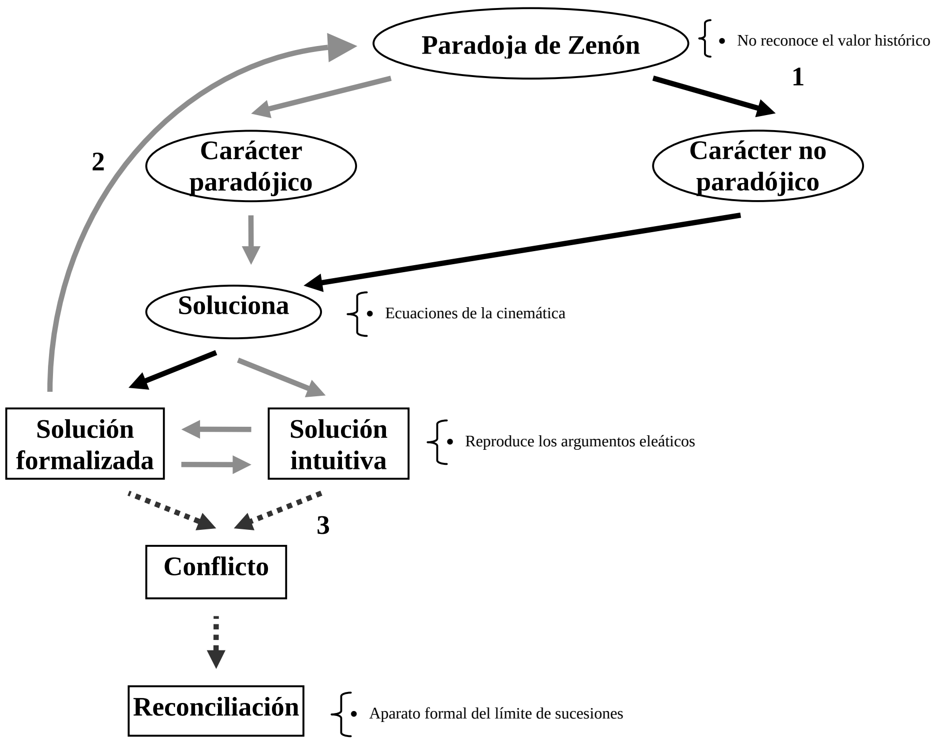


Figura 3. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor B, a la situación problema.

El caso del profesor C

El profesor C manifiesta no haber escuchado ni resuelto nunca esta situación problema clásica dentro de la historia de la ciencia, y la identifica fácilmente como un problema tipo de la cinemática clásica. Expresa inicialmente la visión espontánea de que el más rápido siempre alcanza al más lento, y asegura que en la práctica esto ocurre después de un período de tiempo suficientemente largo.

Un aspecto interesante es que el profesor C, antes de abordar la solución por un método algebraico, da una respuesta correcta basada en el manejo conceptual que tiene del movimiento uniforme. Posteriormente, y para verificar la respuesta dada inicialmente, plantea y soluciona, al igual que los profesores A y B, un sistema de ecuaciones lineales de cinemática clásica. Parte del supuesto de que los dos corredores se mueven con velocidades constantes, y propone la resolución del sistema de ecuaciones de la forma *x = v.t* por el método de sustitución, llegando finalmente a la solución correcta de que Aquiles alcanza a la tortuga a una distancia de dos kilómetros de su posición inicial, lo que verifica su argumentación inicial.

Encontramos consistencia en los registros que ha utilizado el profesor C en la resolución. Al indagar sobre el significado que tiene para él la respuesta hallada, el profesor responde utilizando argumentos que se basan en los postulados de la mecánica clásica. No llega a modelizar la situación problema en ningún otro plano del cálculo infinitesimal. Los datos que tenemos sólo nos permiten esbozar la hipótesis de que el profesor no encuentra la necesidad de buscar otro tipo de modelización del problema, debido quizás a la forma en que él percibe el enunciado.

En la figura 4 queda ilustrado el tipo de razonamiento desarrollado por el profesor C en relación con la situación problema.

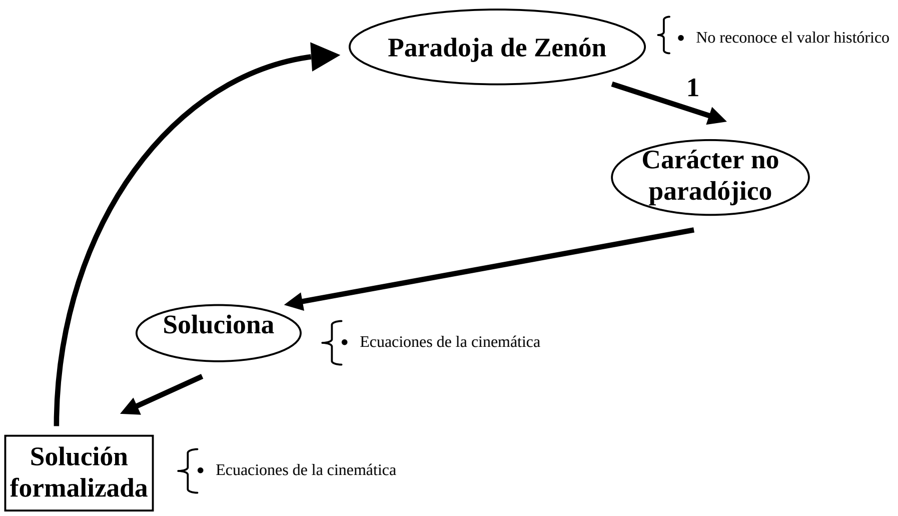


Figura 4. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor C, a la situación problema.

El caso del profesor D

El profesor D comienza trasladando la situación a la vida real y supone que Aquiles alcanza a la tortuga al transcurrir un tiempo determinado. Inmediatamente plantea la solución mediante la formulación de un sistema de ecuaciones lineales, llegando a la respuesta correcta.

Al igual que los tres profesores anteriores, el profesor D parte del manejo algebraico de las ecuaciones de movimiento de la mecánica clásica y ubica la situación problema en el ámbito físico. Lo interesante de su justificación radica en la clasificación tajante que él hace de la situación problema, definiéndola como un ejercicio típico y sencillo de movimiento uniforme.

> "Bueno, tenemos que tener en cuenta que estamos hablando aquí de un movimiento rectilíneo a velocidad constante, y que el hecho de que la tortuga le lleve una ventaja de 1 km a Aquiles, se plantea y se supone que como Aquiles tiene una velocidad mayor lo debe alcanzar al transcurrir algo de tiempo. Se encontrarán a una distancia más a la derecha, porque el tiempo que gastarán es igual. Yo lo veo como un problema físico de movimiento donde se plantea el encuentro de dos móviles o cuerpos, que no tendría ninguna... ninguna dificultad para el encuentro."

Otro aspecto relevante dentro de su argumentación es el conocimiento que tiene de esta situación problema y la especificación que hace de ella en los ámbitos matemático y físico, mostrando consistencia de los registros que utiliza para llegar a una correcta solución de la misma. Destaca también la riqueza para combinar las *perspectivas proceso* y *objeto* de los conceptos utilizados.

El profesor D inicialmente toma la situación problema como un ejercicio tipo de la cinemática, y no ve la necesidad de justificar los aspectos formales que subyacen; es decir que toma el enunciado y lo resuelve correctamente a través del manejo algebraico de las ecuaciones que plantea a partir de los datos que se le proporcionan. Observamos cómo, en la medida en que indagamos en el proceso de resolución que aplica, el profesor D va proporcionando argumentos formales desde la teoría de conjuntos y la de las series infinitas para respaldar los conceptos utilizados. El manejo que tiene el profesor de los conceptos y de los aspectos históricos de su construcción le permite ubicar la situación en dos momentos dentro de la historia: la actualidad y el debate histórico antes de la formalización de los conceptos del cálculo. El profesor D logra apantallar con argumentos válidos cualquier tipo de contradicción entre registros que quisiéramos postular.

El proceso inicial seguido por este profesor queda ilustrado en la figura 5 mediante la flecha negra y el número 1. Posteriormente, manifiesta conocer el carácter paradójico de la situación en la historia de la ciencia y concluye que, gracias al aparato formal con el que hoy contamos en la física matemática, no podemos llegar a reconstruir los argumentos eleáticos como se hacía hasta el siglo XVIII. Este último razonamiento se especifica en la figura 5 con las flechas de color gris y el número 2.

> “Yo no lo veo, ni lo voy a tomar como la paradoja, porque partiendo del hecho de que entre dos puntos siempre vamos a encontrar otro punto, entonces nunca va a haber... habría sólo que hacer un límite de esa sucesión... Este nos permite, en el caso del problema que me planteaste, encontrar el resultado de encuentro, que es 2. El 2 es el límite... y corresponde a una explicación práctica del fenómeno; resuelve el problema paradójico... de la explicación del límite.”

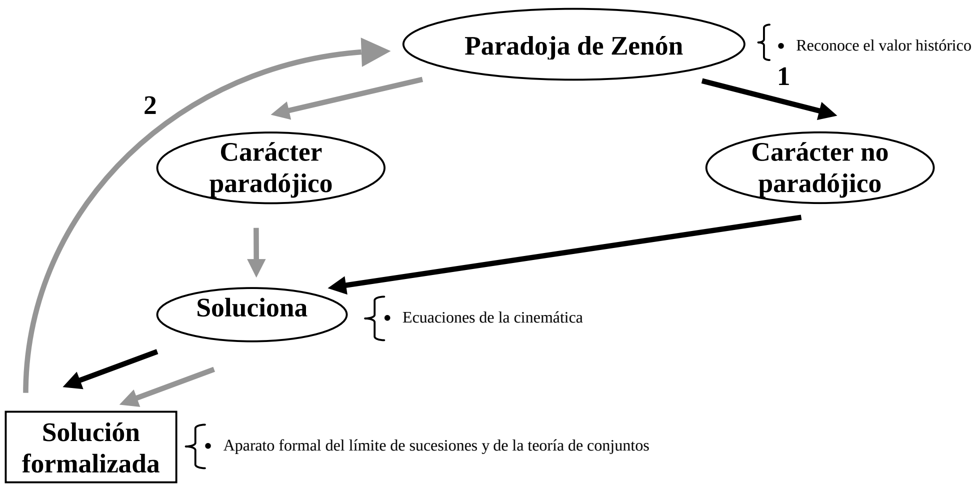


Figura 5. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor D, a la situación problema.

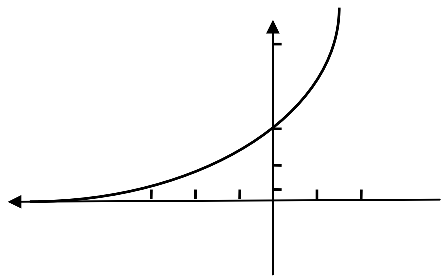
La respuesta dada por el profesor D nos permite inferir que él muestra consistencia en el manejo de los diferentes registros utilizados en la solución del problema y habilidad para trasladar los conceptos involucrados en la paradoja, tanto en el ámbito matemático como en el físico. Reconoce el valor histórico de la situación problema y este conocimiento da coherencia a sus esquemas de los conceptos involucrados, como son infinito (actual), teoría de series, relación entre derivada y velocidad. En la figura 5 resumimos la forma en que el profesor aborda la situación problema.

El caso del profesor E

Un aspecto interesante de la forma en que aborda el profesor E la solución del problema radica en que, a lo largo de toda su argumentación, defiende el carácter paradójico de la situación. Inicialmente manifiesta conocer la paradoja de Zenón y la relaciona con la versión que le presentamos, e inmediatamente reproduce los argumentos eleáticos en contra del movimiento, y por tanto en contra de la divisibilidad infinita del tiempo y del espacio. Posteriormente, con el propósito de dar sentido al carácter paradójico de la situación problema, plantea un ejercicio donde traslada analógicamente los argumentos eleáticos al análisis de la función $y = 2^x$. Es decir que busca elementos formalizados dentro del análisis funcional para dotar de significado a los argumentos defendidos por Zenón de Elea:

> “Sí conozco la paradoja... pero la había oído diferente. Pero es que aquí hace falta algo, que siempre que Aquiles recorra una distancia, la tortuguita va a recorrer la mitad de lo que recorra él... Falta ahí eso que no me lo dices... yo lo saco de allí. Yo esto lo comparo con la ecuación $y = 2^x$, lo comparo porque... es la mejor manera de explicárselo a las alumnas... Es decir, es como una manera de explicarles lo que es una... una curva asintótica... Porque x es la variable independiente e y es la dependiente, y entonces tú observas que cuando x vale 0, y = 1... Voy a hacer una variación más clara para que me entiendas lo que quiero hacer... <u>(realiza la siguiente tabla de valores)</u>

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	0.125	0.25	0.50	1	2	4



> Fíjate tú que el valor siempre va a ser el de abajo... Fíjate que cuando x aumenta una unidad, y va aumentando el doble de su valor anterior. Entonces, si nosotros hacemos una gráfica aquí, vemos que nosotros colocamos desde aquí y debe ser una escala diferente... Esto para mí va a ser 1 y este, 2... <u>(realiza el siguiente gráfico utilizando los valores de la tabla anterior)</u>

A continuación nos detendremos a analizar algunos conceptos que están implícitos en el razonamiento que muestra el profesor E. En relación con el procedimiento que utiliza para plantear en análisis de la función y = 2^x, consideramos que el profesor muestra elementos suficientes para inferir que tiene una concepción potencial del infinito, que le hace defender los argumentos eleáticos. Basándonos en los resultados de la investigación realizada por Garbin (2000), podemos señalar que la consideración, por parte del profesor, de que 0,3 < 0,333 y por tanto 1/3 y 0, 33333... son números distintos, es decir 1/3 > 0,3, es un obstáculo que pone de manifiesto la concepción de infinito potencial, es decir, la creencia de que al infinito no se llega sino que sólo es posible acercarse. Esta versión de la paradoja lo lleva a defender el hecho de que Aquiles nunca alcanzará a la tortuga, pues siempre habrá una pequeña diferencia; en este caso concreto, una "pequeña mitad".

Otro aspecto a resaltar es la separación de las respuestas teórica y práctica que da el profesor E como solución a la paradoja. Igual que los eleáticos, conoce que en la realidad el más veloz alcanzará, al transcurrir un tiempo determinado, al menos veloz; sin embargo, plantea argumentos contradictorios para la solución de la paradoja. Deja ver una inconsistencia entre los registros que utiliza en la solución y no percibe la contradicción de dichos argumentos como problemática.

> "No, en la realidad es una paradoja... porque es imposible. Con un salto, él se la puede alcanzar... Es una cuestión meramente para explicar el infinito. En mi concepto, es para enfrentarse al infinito. Es como decir 0,33 < 0,333 < 0,3333, y así sucesivamente; va siendo cada vez menor, hasta que llegamos a una fracción periódica pura como 0,3. Sin embargo, ellas tienen una tendencia a 1/3, y es más fácil representar 1/3 que representar esas en una recta. Entonces, prácticamente, Aquiles y la tortuga lo que muestra... es para que comprendamos un poquito lo que significa el infinito, es un concepto muy particular, muy personal... Es decir, para mostrar lo que es una asíntota, porque es muy difícil que un estudiante entienda que esta curva se aproxima a esta recta y no la toca nunca, inclusive yo esto lo uso cuando voy a hablar del concepto de límite para tender por la izquierda o por la derecha, sin asumir el punto de la tangencia."

Nuestro interés por ahondar más en la argumentación que el profesor E muestra frente a la situación problema, nos llevó a seguir preguntándole sobre los elementos matemáticos que utilizaba dentro de su razonamiento. Logramos develar que el profesor basaba su justificación en su concepción *potencial* del infinito, como se ve claramente en la última cita, lo cual le impedía ver otras posibles formas de abordar la situación problema.

Ramírez (1999) señala que, cuando nos enfrentamos a una paradoja, lo que se trata es de buscar en qué parte de la argumentación se ha fallado, y plantea los siguientes interrogantes a tener en cuenta:

> "¿Nuestra intuición no ha podido percibir con claridad la situación o problema planteado? ¿Hemos aplicado un concepto equivocado o usado inadecuadamente una definición? ¿Hemos aplicado mal una regla de un cierto procedimiento estándar? ¿Nos hemos equivocado en aplicar la regla lógica que se requería o usado una regla que no era pertinente en el caso tratado?" (Ramírez, 1999)

Basándonos en la metodología de análisis propuesta anteriormente, podemos entender por qué el profesor E no ve otra opción para abordar la solución de la situación planteada. En ningún momento acepta la necesidad de abordarla como un ejercicio tipo de la cinemática; quizás esto se deba a la influencia que ejerce el conocimiento que tiene de la solución de la paradoja dada desde la historia de la matemática.

> "Hay otras formas de resolverla. Por ahí dicen que la paradoja de Zenón es fácil mirarla desde el punto de vista de fracciones periódicas, con fracciones periódicas como las de este tipo que te mencioné ahorita, con la expresión de la función logarítmica, con la función exponencial; es posible mostrar lo que significa, lo que quiere decir... Es como para mostrar este tipo de función; es decir, con eso trataron como de hacer concreto un tema tan abstracto, concretizar un poco un tema tan abstracto. Tú sí entendiste lo que te quiero decir; fíjate tú, tú te vas acercando a esta recta y nunca llegarás a la recta, ¿cierto?"

En términos generales, el profesor E presenta dos momentos en el proceso de argumentación frente a nuestra versión de la paradoja, sintetizados en la figura 6. Un primer momento, señalado con flecha negra y número 1, donde el profesor reproduce los argumentos eleáticos en contra del movimiento, y un segundo momento en el cual el profesor recurre a elementos formales del análisis funcional para defender el carácter paradójico de la situación problema y las ideas pitagóricas acerca del movimiento.

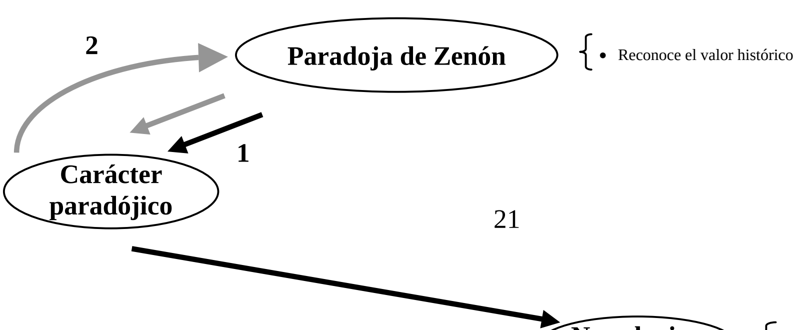


Figura 6. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor E, a la situación problema.

Caso del profesor F

Al igual que los profesores A y C, la profesora F plantea una solución basada en el manejo naturalizado de las ecuaciones de la cinemática clásica. No reconoce el valor histórico de la situación problema ni genera procesos metacognitivos durante la resolución. Soluciona correctamente la situación mediante una manipulación algebraica de las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniforme. Conoce la solución de la situación en el contexto real, pero no compara los registros utilizados, lo cual la lleva a no ver el carácter paradójico de la situación. La respuesta de la profesora F a la situación no nos permite inferir sobre los niveles de comprensión que ella tiene de los conceptos matemáticos, pero sí evidencia una fuerte *perspectiva proceso* de los mismos. Los razonamientos de la profesora al abordar la solución de la situación presentada se muestran en la figura 7.

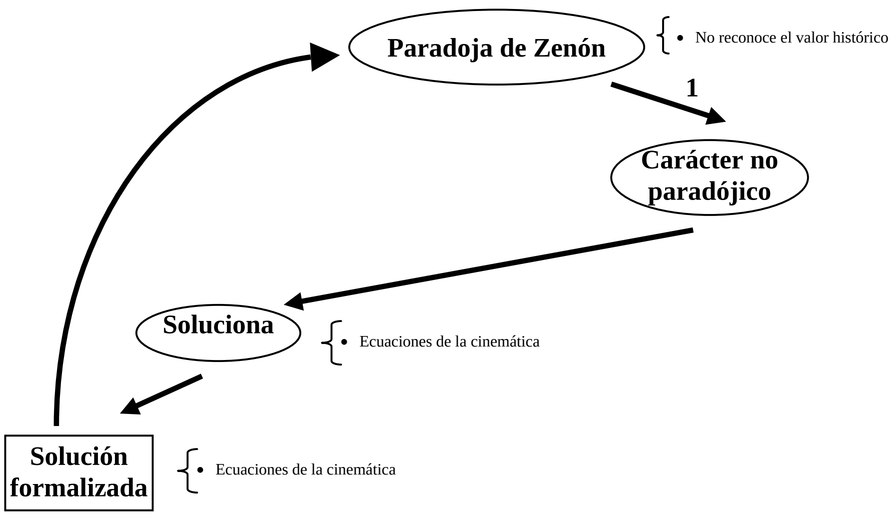


Figura 7. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución de la profesora F, a la situación problema.

Caso del profesor G

El profesor G no logra solucionar la situación; la aborda mediante un razonamiento verbal (que denomina “a nivel de lógica”) que reproduce los argumentos eleáticos en contra del movimiento. Conoce que en la realidad el más veloz alcanza al menos veloz en un tiempo determinado; sin embargo, no utiliza con fuerza este argumento. El profesor G plantea una solución incorrecta que no confronta con la realidad; esto le impide ver el carácter paradójico de la situación y la incoherencia e inconsistencia entre los registros utilizados. Concluye que Aquiles nunca alcanza a la lenta tortuga, ya que considera, igual que los eleáticos del siglo V a.C., que a cada espacio le corresponde un tiempo específico, y si hay un número infinito de espacios se necesitará por tanto un tiempo infinito. Este tipo de razonamiento y esta forma de abordar los problemas físicos se corresponden con el *razonamiento aristotélico*, sustentado en un esquema potencial del infinito.

> “Se hace a nivel de lógica. Bueno, ahí dice que Aquiles tiene el doble de velocidad de la tortuga, supuestamente tiene el doble. Bueno, así como está... fíjate que hay una diferencia de 1 km... Aquiles recorre 1 km; ¿cuánto ha avanzado la tortuga? Supuestamente ha avanzado la mitad, medio kilómetro. Entonces ya está a una diferencia del punto de partida de 1 1/2 km. Seguimos avanzando: para Aquiles recorrer ese medio kilómetro, la tortuga avanza 250 m, quedaría 1/4 de km pendiente. Para cubrir Aquiles ese cuarto de kilómetro, entonces la tortuga ya ha recorrido 125 m, y ahí vamos (risas), es decir, 1/8 km... Y ahí vamos, hasta que eso... hasta que eso... (risas) tiende a infinito la fracción esa... Es decir que nunca la va alcanzar, Aquiles nunca alcanza a la tortuga. Ese es el análisis que yo le doy... No se la alcanza porque siempre va haber una diferencia... siempre va haber una mitad, y si siempre hay una mitad... nunca se lo va a alcanzar. Pero ojo que en la realidad sí que se... se la alcanza, eh... Pero aquí con los datos que me das... veo que no.”

El profesor no reconoce el valor histórico de la situación problema, pero tampoco la aborda como un ejercicio tipo de la cinemática clásica. Tampoco se genera en él ningún proceso metacognitivo que le permita ver las inconsistencias de los conceptos que maneja, ni las incoherencias entre los dos registros que utiliza en el discurso (el verbal y el matemático).

En la figura 8 se ilustra el razonamiento del profesor G.

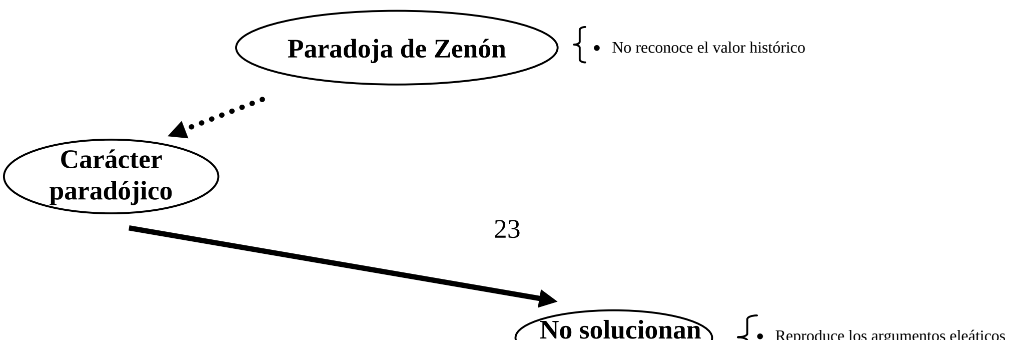


Figura 8. Esquema donde se ilustra el proceso de resolución del profesor G, a la situación problema.

TIPOLOGÍA DE LOS PROFESORES FRENTE A LA PARADOJA

En las respuestas de los siete profesores a la situación problema encontramos los diferentes elementos que aparecen reseñados en la tabla 1. Los profesores presentan tres combinaciones de las categorías, lo cual nos permite definir tres *tipos* o *perfiles* de respuestas dadas a la versión de la paradoja que utilizamos en este estudio. Estos tres tipos se exponen a continuación:

1. **Profesores eficaces no metacognitivos.** Son profesores que muestran una visión naturalizada de los conceptos matemáticos y físicos (espacio, velocidad, tiempo), reducida al manejo acrítico de las ecuaciones cinemáticas del movimiento. Este primer grupo está conformado por los profesores A, C y F. Sus respuestas difícilmente nos permiten explorar sus ideas sobre los *conceptos estructurantes* involucrados, pues ellos no ven necesaria la reflexión sobre dichos conceptos, reduciendo así la resolución del problema al manejo algebraico de ecuaciones sin contenido alguno (concepción *proceso* de los conceptos). Sólo el profesor A hace referencia tímidamente al concepto de límite, pero sin argumentos conceptuales claros que le permitan asociarlo con el fenómeno modelizado. Estos profesores son conscientes de que en la realidad el más veloz alcanza al menos veloz en un tiempo determinado; sin embargo, al no contrastar esto con la argumentación eleática, no atribuyen carácter paradójico a la situación.

Este grupo de profesores no reconoce el valor histórico de la paradoja de Zenón, lo cual nos da pistas sobre la ausencia de la historia de la ciencia en su formación inicial y permanente y nos brinda argumentos para generar nuevos programas de formación que tengan en cuenta las situaciones históricas que dieron origen a la construcción de los conceptos matemáticos.

2. **Profesores eficaces metacognitivos.** Estos profesores solucionan inicialmente la situación problema como un ejercicio tipo de la cinemática clásica, utilizando versiones naturalizadas de los conceptos e, v y t. Consideramos que quizás el enunciado de la versión de la paradoja que utilizamos en esta investigación indujo este tipo de respuesta en los profesores, que no vieron la necesidad de obtener una serie en el proceso de modelización del fenómeno. Durante el proceso de resolución, fueron profesores que se detuvieron en justificar sus razonamientos, lo que los llevó a detectar errores y contradicciones (caso del profesor B) al contrastar las diferentes etapas de resolución, y posteriormente, a buscar un modelo teórico formalizado que le permitiera apantallar dicha contradicción, o a identificar la situación con un problema tipo de la cinemática clásica, pero mostrando una riqueza de en el esquema exhibido (caso del profesor D) al justificar el punto de encuentro mediante la coordinación de diferentes representaciones de los conceptos matemáticos involucrados: referencia al infinito actual, definición de la serie convergente y en términos de límite de la serie. Encontramos coherencia entre los diferentes registros semióticos utilizados, manifestando una comprensión de los conceptos del cálculo utilizados que modelizan el problema planteado en un ámbito físico.

Encontramos dos tendencias en este grupo formado por los profesores B y D. El profesor B no verbaliza su conocimiento del valor histórico de la situación problema, mientras que el profesor D manifiesta haberla estudiado en la asignatura de filosofía en el bachillerato.

3. **Profesores ineficaces.** Este grupo está conformado por los profesores E y G. Son profesores que muestran inconsistencias en los conceptos matemáticos que manejan, pues tienen grandes problemas con los conceptos estructurantes involucrados en la situación. Exhiben una visión del infinito potencial que les lleva a reproducir los argumentos eleáticos en contra de la divisibilidad infinita del espacio, del tiempo y del movimiento. En este grupo vemos dos tendencias, los profesores que reconocen el valor histórico de la situación y los que no lo conocen; sin embargo, su esquema sobre el infinito potencial es un obstáculo para acceder a la comprensión de los

conceptos del cálculo infinitesimal. Es curioso cómo el profesor E, cuyo esquema sobre el infinito potencial es tan fuerte, modeliza la situación problema para dar más argumentos sobre la imposibilidad de la partición infinita del espacio y del tiempo. Lo cual nos muestra que sus ideas son coherentes internamente, pero inconsistentes con la matemática, pues él muestra serios errores conceptuales. La elicitación de estos razonamientos muestra la potencia de esta situación problema en la detección de obstáculos y errores en las formas de conocer los conceptos matemáticos que tienen los profesores. Esto puede ser una componente clave en el diseño de programas de formación.

CONCLUSIONES E IMPLICACIONES PARA LA FORMACIÓN DEL PROFESORADO

Los resultados de esta investigación nos muestran una variedad de perfiles de los profesores frente a las cuestiones epistemológicas y didácticas. La paradoja nos permitió ver con alguna fundamentación teórica cómo los profesores manejan las ideas clásicas del movimiento, y detectar que aún se mantienen en los razonamientos espontáneos rasgos del pensamiento aristotélico, con una concepción potencial del infinito (Garbin, 2000).

La definición de las categorías conceptuales y metaconceptuales nos permitió identificar diferentes rasgos en las respuestas de los profesores, tales como la presencia de razonamientos aristotélicos, el uso de esquemas algebraicos en la resolución de problemas, sin reflexión teórica de los conceptos inmersos en ellos, el desconocimiento de episodios históricos que han sido clave en el desarrollo de los conceptos matemáticos, y la importancia de los procesos metacognitivos en la resolución de problemas. A nuestro juicio, estos elementos deberían ser tenidos en cuenta a la hora de diseñar programas de formación inicial y permanente (Badillo *et al*., 2001).

Otro aspecto significativo ha sido el rescatar episodios controvertidos de la historia de la matemática como herramienta para elicitar indirectamente las ideas que tienen los profesores acerca de los conceptos del cálculo infinitesimal. El estudio de casos y la detección de obstáculos cognitivos en conceptos como *infinito*, *límite*, *derivada*, pueden utilizarse en el diseño de casos ideales como herramienta en la formación del profesorado.

BIBLIOGRAFÍA

Alper, J. y Bridger, M. (1997). Mathematics, models and Zeno's paradoxes. *Synthese*, *110*, 143-166.

Apostol, T. (1998). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable con una introducción al algebra lineal.* Barcelona: Reverté.

Asiala, M., Brown, A., DeVries, D.J., Dubinsky, E., Matthews, D. y Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathemathics education. *Research in Collegiate Mathemathics Education*, 2, 1-32.

Azcárate, C. (1990). *La velocidad: Introducción al concepto de derivada.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E. (1999). *Estudio del conocimiento profesional de profesores de secundaria en Colombia: El caso de la relación entre derivada y velocidad.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E., Adúriz-Bravo, A. y Azcárate, C. (2001). Estudio del pensamiento de profesores de física en activo acerca de la paradoja de Aquiles y la tortuga. *Enseñanza de las Ciencias*, número extra VI Congreso, 381-382.

Badillo, E. y Azcárate, C. (2000a). Conocimiento profesional de profesores de matemática en secundaria. Las relaciones entre derivada y velocidad en la enseñanza del cálculo diferencial. *Actas de les primeres Jornades d'Educació Matemàtica de Catalunya*, Mataró.

Badillo, E. y Azcárate, C. (2000b). *Análisis de las respuestas de los profesores a la paradoja de Zenón de Aquiles y la tortuga*. Documento inédito sin publicar. Universitat Autònoma de Barcelona.

Boyer, C. (1986). *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad.

Cajori, F. (1915). History of Zenon`s arguments on motion. *American Mathematical Monthly,* 22.

Delgado, C. (1998). *Estudio microgenético de esquemas conceptuales asociados a definiciones de límite y continuidad en universitarios de primer curso.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Font, V. (2000). *Procediments per obtenir expressions simbòliques a partir de gràfiques. Aplicacions a les derivedes.* Barcelona: Universitat de Barcelona.

Garbin, S. (2000). *Infinito actual: inconsistencias e incoherencias de estudiantes de 16 – 17 años.* Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

Llinares, S. (1998). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas y procesos de formación. *UNO. 17*, 51-63.

Nuñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: paradoja y espacios consensuales. *Educación matemática, 9* (1), 20-32.

Ramírez, J. (2001). *Paradojas.* Documento inédito sin publicar. Bellaterra: Universitat Autònoma de Barcelona.

ANEXO 8

TABLAS RESUMEN DE LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES A LAS PREGUNTAS DEL CUESTIONARIO INDIRECTO Y DE LAS VIÑETAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS REDES SISTÉMICAS

Ítem	Profesor	Afirmación
1a	A	Calcula la pendiente de la recta a partir de los dos puntos que les dan, y que luego su ecuación porque tiene puntos y la pendiente de la recta L, y ya obtenida la ecuación calcula f (5) que debe darle 3
	B	f (5) = 3 porque el punto (5,3) pertenece a la curva que representa a y = f (x), para x = 5, y = f (5) = 3
	C	Según la gráfica f (5) = 3, puesto que el punto (5,3) pertenece también a la función y = f (x)
	D	Como la recta L es tangente a la curva en el punto (5,3) por lo tanto f (5) = 3 ya que el punto (5,3) $\in$ f
	E	f (5) = 3 está es la solución... el f (x) está tácito como quien dice, porque aquí el punto (5,3) que es un punto común donde la tangente se tropieza o toca a la curva *y = f (x)*, vemos que tiene una abscisa 5 y una ordenada 3
1b	A	Con la ecuación de la recta tangente hallada en el punto a), ahora le tocaría calcular la derivada dy/dx en x =5, que representa la derivada de la función en el punto de tangencia, seguramente el alumno deducirá que f ’(x) = m_L, y por tanto que f ’(5) será la pendiente de la recta L
	B	La derivada en 5 sería la pendiente de la recta tangente, aquí nos dan la recta tangente que pasa por los puntos de coordenadas (0,1) y (5,3), y luego hallamos la pendiente por la fórmula m = $\Delta y/\Delta x$ = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5, luego la derivada de f en el punto (5,3) será f ’(5) = 2/5
	C	Por definición la pendiente de la recta tangente a la función es igual a la derivada de ese valor (de la abscisa), es decir: f ’(5) =pendiente = $\Delta y/\Delta x$ = 3 - 1 / 5 -0 = 2 /5
	D	f ’(5) = pendiente de la recta tangente a la curva en (5,3), entonces: m = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5. El concepto de que la derivada representa la pendiente de la recta tangente en ese punto
	E	Define la recta tangente a una curva en el punto P, como aquella recta que pasa por (5,3) y tiene pendiente 2/5 = m, siendo m = 2/5 el límite de las pendientes de las rectas secantes cuando el punto Q se aproxima a P, si este límite existe. Pendiente de la recta secante = $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$, m_L = $\underset{\Delta x\to 0}{Lím}\ \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ m_L = 3 - 1 / 5 - 0 = 2/5 $\Rightarrow$ y - 3 = 2/5 (x - 5) y -1 = 2/5 (x - 0) 5y - 15 = 2x - 10 5y - 5 = 2x - 0 5y = 2x + 5 5y = 2x + 5 y = 2/5. x + 1 y = 2/5. x + 1
1c	A	Como x = 5.08 apenas es 5.08 > 5, bastará hallar f (5.08) en la ecuación de la recta tangente que le dará algo más de 3 (exactamente 3.032)
	B	f (5, 008) $\approx$ 3 por el comportamiento de la curva (gráfica) en valores cercanos a x =5
	C	Casi lo mismo... el mismo valor... que el valor de f (5), porque el intervalo es muy... se puede decir que la tendencia es casi cero
	D	f ’(5)$\approx \frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$; como Δx = 0,08 $\Rightarrow$f ’(5) $\approx \frac{f(5+0.08)-f(5)}{0.08} \Rightarrow$ $\frac{2}{5}$ (0, 08) $\approx$f (5, 08)-3 $\Rightarrow$ f (5, 08) $\approx$ 3, 05. Pues como no tenemos una función definida, es decir como no tenemos la ecuación o la ley de esta función, pero sí nos ayuda un poco a observar que ese incremento relativo

Ítem	Profesor	Afirmación
1c	E	f '(5)≈ $\frac{f(5+\Delta x)-f(5)}{\Delta x}$; ya sabemos que Δx = 0,08; que f (5)=3 y que f '(5) = 2/5 $\Rightarrow$f '(5)≈ $\frac{f(5+0.08)-f(5)}{0.08}$ $\Rightarrow \frac{2}{5}$ (0, 08) ≈f (5, 08)-3 $\Rightarrow$ f (5, 08) ≈ 3, 05. Porque sería la función incrementada menos la función original dividido por el incremento. Entonces allí se va explicando claramente esto... Y esto será aproximadamente cercano a 3
2	A	... Ninguna función será la derivada de la otra, porque ninguna de ellas es tangente a la otra en un punto (x, y). Los alumnos argumentarían que ninguna función será la derivada de la otra, porque ninguna de ellas es tangente a la otra en un punto (x, y), porque nunca habría una como recta tangente a la otra o tangente a la otra en un punto determinado. Ah no ser que estas sean funciones trigonométricas y una sea seno y la otra sea coseno
	B	Si hay función derivada porque la marcada como f es creciente hasta -2 y f ' tiene valores positivos; de -2 a -1 es decreciente y f ' toma valores negativos. Otro aspecto que confirma: de –2,5 a -1 f es cóncava y f ' es decreciente
	C	Llamemos las gráficas f y g, según la gráfica f es la derivada de g, puesto que: cuando f >0 entonces g es creciente y cuando f < 0 entonces g es decreciente y esto está acorde con los criterios de f ' (x) > 0 y f ' (x) < 0 para que f (x) sea creciente y decreciente respectivamente
	D	Si hay función derivada, porque al observar las gráficas, los puntos críticos (máximos o mínimos) de una función f, corresponden a los ceros para la otra la función f '. Además la función f es creciente de -∞ hasta –2, por tanto la función f ' toma en este intervalo valores positivos; de -2 a –0.5 f es decreciente y f ' toma valores negativos, etc. Además, de -2,5 a -1 f es cóncava hacia abajo y f ' es decreciente, etc.
	E	Más claridad en la gráfica para poder resolverlo. Quisiera este ejercicio analizarlo más detalladamente... pero después
3 a	A	El alumno observando la gráfica dirá que el consumo de agua en 24 horas será de 20
	B	El consumo total de agua en las 24 h fue de 20 m³, pues a las 24 h le corresponden 20 m³
	C	Según la gráfica el consumo total de agua es de 20 m³
	D	$\sum_{t=1}^{24} Q(t)$ = Q (t_1) + Q (t_2) +... + Q (t_n)
	E	20 litros o 20 cm³ ó m³
3 b	A	Entre 15 y 20 y muchos de ellos dirán que en ese intervalo el consumo es creciente
	B	El consumo de t = 20 a t = 24 h es de ΔC = 20 - 15 = 5 m³, o sea que en las 4 h últimas del día se consumen 5 m³.
	C	La gráfica muestra que entre las 20 y las 24 h una línea recta, o sea que el incremento en el consumo es constante con respecto al tiempo
	D	Q (20) = 15 y Q (24) = 20 $Q(20)\cdot[24-20]+\frac{[Q(24)-Q(20)]\cdot(24-20)}{2} = 15\cdot[4]+\frac{[20-25]\cdot(4)}{2}$ = 60-10 = 50 Del consumo de agua caliente entre las 20 y las 24 h, entonces observamos que la... de allí tenemos una función lineal en ese tramo. Ahí la relación entre consumo de agua con respecto al tiempo... y la pendiente sería una constante ah
	E	Entre las 20 y las 24 horas, bueno según lo que puedo ver aquí han transcurrido 4 horas y se han consumido 5 litros o cm³. Si porque aquí vemos los puntos (24, 20) y el (20, 15)... Entonces, haciendo un cociente diferencial allí, se obtiene que en 4 horas se consumen 5 litros.
3 c	A	Dirán que el consumo a las 14 > a las 9 horas
	B	El consumo a las 9 h es mayor, porque la recta tangente en este instante tiene mayor pendiente que la recta tangente a las 14h.
	C	Según la gráfica a las 9 h, la figura en ese punto presenta mayor inclinación, o sea que la pendiente es mayor, con lo cual existe mayor variación en el consumo es positivo
	D	Q (9) = 4 y Q (14) = 12. Ya entre el tramo entre... aquí observamos que la pendiente es mayor en 9 con respecto a 14, la pendiente, la inclinación de la recta tangente a la curva, por lo tanto nos quiere indicar que allí hay mayor consumo de agua

Ítem	Profesor	Afirmación
3 c	E	Observamos también como es mayor la cantidad de agua caliente que se está consumiendo a las 14 horas, porque a las 14 h ya se han consumido un total de 12 litros aproximadamente, mientras que a las 9 h se están consumiendo apenas 4 litros de agua caliente, mientras que a las 14 se han consumido 12 litros. Sí el estudiante puede establecer un punto... y... también aquí es muy fácil en el aspecto de que él halle... la pendiente de... de la tangente a la curva en ese... ese punto y por allí puede determinar fácilmente estas cuestiones
3 d	A	Contestarán que entre las 6 y 12 horas, porque en ese intervalo la pendiente es mayor, pero no todos justificarán y contestarán la pregunta
	B	Aproximadamente entre las 8 y las 12 seg. se está consumiendo más agua porque en ese intervalo la pendiente de la recta tangente es mayor que en los demás puntos del gráfico
	C	En el punto A = 12 seg., puesto que existe una pendiente mayor que en los demás puntos del gráfico
	D	El tramo 8 $\rightarrow$ 12, se está consumiendo agua, porque el área bajo al curva es mayor que los otros tramos. En esta parte, creo que se está consumiendo más agua caliente en los tramos en donde la pendiente sea mucho mayor, o en el punto donde la pendiente sea mucho mayor. Allí aparece un tramo entre 8 y 12, parece mayor que en los otros
	E	Habría que determinar los puntos y observar entre que hora y hora se consume más... depende del intervalo donde lo vaya a tomar... depende del intervalo donde lo vaya a tomar, porque aquí de 6 a 12 yo noto que hay un incremento bastante grande en el consumo... Porque de un litro que se ha consumido a las 6 de la mañana, a las 12... 11 litros, o sea que se han consumido 10 litros, en esa parte de aquí, después fíjate tú aquí... desde las 12 en donde se han consumido aproximadamente 10 litros hasta las 15... hasta las 20 se han consumido apenas 5 litros... o sea la variación depende donde el tipo de horario que quiera uno analizar... yo creo que allí... cuándo cree que se está consumiendo más agua... yo pienso que eso tiene una dependencia del intervalo que uno quiera medir.
3 e	A	Aproximadamente 2 unidades, pero no podrán expresar las unidades porque no se especifican en la gráfica.
	B	A las 7:00 horas se está consumiendo aproximadamente 0,75 m^3/h, deducido del gráfico. Se mide en m^3 o en litros, por segundo o por hora... se entiende la derivada como una razón de cambio.
	C	1 < consumo < 2, unidades ^{3}, cm^3, m^3, ó litros.
	D	1 < Q (t) < 2. En cuanto a esta parte, la unidad es la correspondiente a una tasa de variación instantánea, es decir medida de capacidad con respecto al tiempo... y el consumo está entre 1 y 2. Entonces nos tenemos que referir a hacer un cálculo aproximado
	E	Aproximadamente 1, 8 litros ó m^3. Bueno a las 7:00 parece que se está consumiendo casi 1,8 litros ó m^3... Bueno y las unidades... tienen que ser unidades de volumen
4a	A	Los coches A y B se interceptarán en el punto P, pero otros analizarán más y observarán que la trayectoria del coche B es diferente de la del coche A, porque la trayectoria del coche A es curva y la del coche B es recta
	B	El coche A ha recorrido la misma distancia que el coche B en ese tiempo. La pendiente de la recta tangente en P es mayor que la de la recta de B.
	C	Punto de encuentro en su trayectoria
	D	Los dos coches se encuentran a igual distancia en ese instante
	E	Se encuentran los carros... Aquí vemos una recta, el coche B parece que se moviera como en línea recta, pero con un movimiento acelerado, el coche A parece que tiene otro tipo de movimiento, un movimiento como curvilíneo, cierto... Sin embargo, ellos convergen en el punto P.
4b	A	Las velocidades serán diferentes pues ya saben que la velocidad es una pendiente o una representación de la derivada
	B	En cuánto a cómo son las velocidades en el punto P... de hecho la velocidad de A es mayor que la velocidad de B, entonces son diferentes... Además hay que anotar que la velocidad del coche B es constante... y la del A es variable, aumenta y luego entra a disminuir...
	C	Las velocidades instantánea son iguales, puesto que habrán recorrido la misma distancia a igual tiempo, pero esto no significa que los cuerpos lleven la misma rapidez, ni la misma velocidad media
	D	El coche A tiene mayor velocidad que el coche B por tener mayor su pendiente que representa la velocidad

Ítem	Profesor	Afirmación

4b	E	Han recorrido espacios iguales en tiempos iguales... Sin embargo, ellos convergen en el punto P, esto nos da un significado que en el punto P se encuentran lo cual no quiere decir que llevaban una mima velocidad, eso no quiere decir eso, sino que uno iba más veloz que el otro pero que lograron encontrarse allí
4c	A	Las velocidades de los coches A y B serán iguales en el momento en que la tangente a la curva sea paralela a la trayectoria recta
	B	Sí en este instante... a los 10 segundos... a los 10 segundos, porque al trazar aquí la recta tangente en este punto es paralela con la recta que corresponde a la trayectoria del coche B y lo mismo ocurre aquí en aproximadamente que 3,5... Es decir en los lugares donde las rectas tangentes sean paralelas entre sí. O sea que tengan la misma pendiente
	C	En los puntos donde se intersecan las gráficas, son las velocidades instantáneas iguales, ese instante los dos coches se encontrarán
	D	En cuanto a las velocidades iguales, si hay... y es donde tiene iguales pendientes, es decir cuando las tangentes de la curva de movimiento de A sea paralela a la trayectoria recta de B... Hay dos tramos, donde la recta tangente... sean paralelas... aquí y aquí... en 10 y 3.5 aproximadamente
	E	No porque las distancias recorridas son diferentes y esto hace que la velocidad de uno sea mayor que la del otro
4d	A	En el trayecto curvo, porque allí hay mayor pendiente
	B	En el punto P, porque la pendiente de la recta tangente es mayor en ese punto (mayor inclinación)
	C	En el momento en el cual la gráfica de A está por encima de la de B y la pendiente en esos intervalos será mayor... Se debe analizar la gráfica y también manejar el concepto de derivada o de la pendiente...
	D	El coche A tiene mayor velocidad en los tramos donde la pendiente el grado de inclinación tiene mayor pendiente que la de la recta B... Por ejemplo en el intervalo que va de 3.5 a 10 seg. aproximadamente... y más concretamente también en el punto P
	E	Siempre en todo el movimiento... porque B tiene aceleración constante mientras A tiene aceleración variable
5	A	Hallan $f'(x) = 6x - 2$. Hallan $f'(2) = 10$, que será la pendiente. Seguramente que algunos estudiantes hallarán $f(2) = 8$, $f(x) = 3x^2 - 2x$ y ya con el punto (2,8) y $m = 10$, muchos calcularán la ecuación: $y - 8 = 10(x - 2)$ **ó** $y = 10x - 12$ **ó** $-10x + y + 12 = 0$
	B	Sí $f(x) = 3x^2 - 2x$, en el punto de abscisa 2, entonces $y = f(2) = 8$ $f'(x) = 6x - 2$, $f'(2) = 10$, esta será la pendiente... y como esta recta tangente pasa por el punto (2,8), entonces: $y - 8 / x - 2 = 10 \Rightarrow y - 8 = 10x - 20 \Rightarrow -10x + y + 12 = 0$ es la ecuación pedida
	C	Si $f(x) = 3x^2 - 2x$, entonces la pendiente de la recta tangente es $f'(x) = 6x - 2$. Evaluada en $x = 2$ la pendiente es igual a 10, puesto que la derivada nos da el punto por donde pasa la recta tangente a la función. $f(x) = 3x^2 - 2x$ evaluado en $x = 2$, será: $f(2) = 12 - 4 = 8$, entonces P (2, 8), como este punto pertenece también a la recta tangente podemos aplicar la ecuación de punto pendiente: $y - 8 = 10(x - 2) \Rightarrow y = 10x - 12 \Rightarrow -10x + y + 12 = 0$ es la ecuación de la recta tangente
	D	$f(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f(2) = 3.(2)^2 - 2.2$ $= 3.4 - 4 = 12 - 4 = 8 \Rightarrow f(2) = 8$ $f'(x) = 6x - 2$ $m = f'(2) = 6\cdot(2) - 2 = 10 \Rightarrow m = 10$ $y - y_o = m(x - x_o)$ $y - 8 = 10\cdot(x - 2)$ $y - 8 = 10x - 20$ $10x - y - 20 + 8 = 0$ $10x - y - 12 = 0$, es la ecuación de la recta tangente.
	E	$m = f'(x) = 6x - 2$, entonces: $m(2) = f'(2) = 6(2) - 2 = 10$, Entonces como $m = 2$; $f(2) = 3(2)^2 - 2.2 = 8$ $m = 2$ y P (2,8) $\Rightarrow$ $y - 8 = 10(x - 2)$ (aplicando la ecuación punto pendiente) $y = 10x - 12$; **Y ojo:** $m = 6x - 2$ (indica la pendiente de la recta tangente en cada punto del dominio de la función)

TABLAS RESUMEN DE LAS RESPUESTAS DE LOS PROFESORES A LAS PREGUNTAS DE LAS VIÑETAS PARA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS REDES SISTÉMICAS

Ítem	Profesor	Afirmación
I	A	Yo veo a la derivada básicamente como una razón de cambio, pero al formalizarlo desde la rigurosidad matemática es, $f'(x) = \mathop{Lim}_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathop{Lim}_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ Desde la interpretación geométrica, desde la interpretación física desde el concepto de pendiente y mucho más atrás. Es decir que desde la interpretación geométrica la derivada es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto determinado, desde la física es una razón de cambio por ejemplo, buenos ejemplos son la velocidad instantánea, la aceleración, el flujo de un fluido en un tiempo determinado, el caudal, la relación oferta y demanda en economía en un punto determinado
	B	El concepto de derivada, la derivada viene siendo como la pendiente de la recta tangente en un punto y que es igual al límite de la variación de la función sobre la variación de la variable independiente, cuando la variación de la variable independiente tiende a cero. Y daría el ejemplo del caso de la velocidad instantánea. En general es una razón de cambio que es el límite del cociente incremental cuando el Δx tiende a 0.
	C	Yo creo que en la primera charla estuvimos definiéndola, como una razón de cambio entre una variable dependiente y una independiente, o sea como yo siempre defino que la derivada es eso, es la razón de cambio entre esas dos variaciones, pero cuando la tendencia es cero, de la variable independiente
	D	A ver la derivada de una función en un punto la definiría como la pendiente de la recta tangente que toca a la función en ese punto. Además diría que es el límite del incremento relativo cuando él incremento de la variable independiente tiende a cero
	E	Bueno, una derivada no es más que una razón de cambio promedio, sin tanta complicación
II	A	Si f (x) es la función x^2, la derivada 2x representa la recta tangente a la curva f (x) = x^2 en un punto (x, y), o sea la ecuación 2x viene a representar el modelo matemático de la recta tangente a la función f (x) = x^2 en un punto (x, y). O sea desde este punto de vista está el modelo estructural de lo que es derivada, pero cuando ya tu le colocas o le das un valor viene el caso específico y digo que es f ‘ (1) me da 2 en ese punto 1 en donde aquí también da 1, sería la recta tangente a la curva f (x) = x^2, verdad, cuya pendiente da 2 y pues se puede inclusive calcular el ángulo de la recta tangente con la curva en ese punto
	B	Si f (x)es la función x^2, la derivada 2x, yo entiendo acá que f ’(x) = 2x, o sea que la función derivada es igual a 2x. La función derivada de f (x) = x^2 es f (x) = 2x. Mira si tengo, f (x) = x^2 derivo y es 2x, aquí para cualquier x le corresponde un f ’(x) =2x y esta es la función derivada, o sea un F (x) = 2x, es decir otra función. Esto me da cualquiera de las pendientes de las rectas tangentes a la función f (x) = x^2 en cualquier punto. Y entonces el muchacho aquí si quiere hallar la pendiente de una tangente particular, basta con que le dé valor de x, si x = a, entonces a ese *a* le corresponde un: f ’(a) = 2a
	C	Viene siendo la ecuación que va en un momento determinado, en un punto x o x_o, va a tocar a la gráfica de la función f (x), en un punto... si en un punto, donde existe una variación de la función.
	D	Pues aquí cuando estamos derivando la función y = x^2 y su derivada es 2x, ésta es el comportamiento de la pendiente de la recta tangente con respecto a toda la curva en cualquier punto, es decir, que estamos hablando de otra función... de la función derivada... o sea que todas las tangentes en cada uno de los puntos de la función inicial, se comportarían con esta regla funcional (2x). Es decir que éste es el comportamiento general.
	E	Este 2x me representa la tangente en un punto x, sí cada vez que tu le das un valor a x, vas obteniendo cada una de las secantes a la función, porque tangente es una sola.

Ítem	Profesor	Afirmación
III	A	Bueno ahí hay dos formas o hay varias formas. Una utilizar el procedimiento de derivar, se deriva una función exponencial, que esto tiene un algoritmo, tiene un álgebra y se calcularía después esa derivada en ese punto, que sería la función por el logaritmo natural de la base. Ahora que va representar, igualmente en ese punto 2 y su correspondiente que sería 4^2 que es 16, en este punto (2, 16), representaría la recta tangente a la curva exponencial 4^x
	B	Sí $f(x) = 4^x$, cuál es la derivada de esta función exponencial en x = 2, ¿verdad? Entonces yo primero calcularía la derivada en general, $f'(x)$, que sería $4^x.\ln 4$, entonces se reemplazaría el x = 2, no sé, $f'(2) = 4^2$. Ln 4, entonces con una calculadora hallaría el Ln 4 y lo multiplicaría por $4^2 = 16$ y me daría el resultado de lo que tu me pides, o sea 22 aproximadamente
	C	Utilizaría las reglas de derivación y la evaluaría en 2. Es decir, 4^2. Ln 4
	D	Bueno yo lo haría aplicando la regla de derivación para funciones exponenciales y luego reemplazaría el valor de x. Es decir que en este caso nos daría otra función, que sería: $y = 4^x \Rightarrow \ln y = x \ln 4 \Rightarrow (1/y) \cdot y' = \ln 4 \Rightarrow y' = y \cdot \ln 4 \Rightarrow y' = 4^x \ln 4$, sería entonces, $f'(2) = 4^2 \cdot \mathrm{Ln}\, 4 = 16 \cdot \mathrm{Ln}\, 4$. Eso da 22, y lo que me indicaría es lo mismo, este resultado es otra función que nos indica el comportamiento de las pendientes de las tangentes a la función inicial en los diferentes valores que puede tomar x
	E	Aplicar la regla de derivación, afirmando que $f'(x) = 4^x \ln 4 = 16$. Ln 4, en el caso de x = 2, es como 22
IV	A	O sea así por observación esto viene a ser una parábola cúbica, que sería igual a x^3 y la derivada sería $3x^2$, sí eso es así la primero sería la derivada de esta. Pues sí es la que más se aproxima porque esta tiene origen cero, en este caso la I sería la derivada... aquí uno no ve que esto sea *(toma el instrumento examen y señala el gráfico del punto 2)*... eh... tangente en algún punto de acá, pero mirando la derivada de esta que es esta *(señala ahora las gráficas de la función y la I de la viñeta)* sí es posible que una curva sea la derivada de la otra... Quiero aclarar que aquí de pronto estoy muy sesgado a ver el modelo matemático para poder trabajar con esto y de pronto mirar otra forma... gráfica sería.
	B	Bueno el gráfico de esta función corresponde, por su forma a una función cúbica, y su derivada corresponde entonces a una función cuadrática, porque si la función tiene potencia *n*, entonces la función derivada tendrá potencia *n - 1*. Otro aspecto es que cuando la función es creciente, y esta función que tú me das en el gráfico 1 es creciente en todo su dominio, entonces los valores de la función derivada deben ser positivos. Por tanto yo escojo la I y no las otras dos. Porque las otras dos toman valores negativos en el intervalo de $(\propto, o)$ y además los grados de la función derivada son de tercer grado y de primer grado en la II y III respectivamente
	C	Yo escogería la I, bueno de todas maneras, si esta es la función *(señala la gráfica 1)*, esta es la función f (x), vamos a suponer que es una función elevada a la *n*, la derivada me daría elevada a la *n - 1*, esta para mí podría ser una función cúbica, y entonces la derivada tendría que representar a una cuadrática, que es la I, y por eso escojo la I
	D	Esta es igual *(señalando a la II y a la gráfica 1)*, no creo que la derivada de una función sea la igual. Esto parece ser una parábola cúbica... Me centrará a analizar el comportamiento de cada una de estas... La derivada de ésta *(señalando la gráfica 1)*... daría positiva... Aquí las rectas tangentes son positivas, en este intervalo que puedo ver, Aquí también... Ahora vuelvo a analizar por tramos a esta función de la gráfica 1, todas las tangentes tienen pendientes positivas, por tanto la función derivada debe tener valores positivos, estar su gráfica sobre el eje positivo de las *y*. Entonces sería esta la I, yo creo que es la I. Además, parece que la gráfica una es una función cúbica, con lo cual su derivada se debe acercar a una parábola a una función cuadrática y es la I la que más se aproxima.
	E	La II parece la idéntica, ¿verdad? Pero podría ser esta la III, porque si yo coloco aquí esta y trazo aquí *(y dibuja en el aire sobre la función de la gráfica 1, a la gráfica III)*, entonces teniendo esta aquí... no, no esta sería secante. Bueno, la de la gráfica 1, es la función cúbica, la de la III es una lineal, la de la II es cúbica también, es la idéntica a la de la gráfica 1 y la I es la cuadrática. Entonces como la gráfica uno es cúbica, su derivada será $3x^2$ y entonces... o sea que sería una parábola... Ah, ahora si entendí la pregunta, claro... ya entendí la pregunta... sí, sí... escojo la I... porque es una parábola... Lo que pasa es que no te había entendido la pregunta

Ítem	Profesor	Afirmación
V	A	**I:** Máxima, pero a qué te estás refiriendo al punto máximo o ¿a dónde la función es creciente? Porque si es el punto máximo, máximo sería aquí, dónde alcanza el punto máximo *(Señala en la gráfica los puntos de las crestas, y afirma que el que está más a la derecha del gráfico es el absoluto)*... Pero este sería el absoluto y los demás serían relativos... ya... Pero igualmente en los puntos donde la derivada es máxima o donde es mínima, por ejemplo en el caso aquí la derivada es cero, bueno así lo entiendo yo... **II:** Bueno aquí es cero *(señala la cresta dónde la tangente es paralela al eje de las x)*, o sea como la velocidad es una derivada entonces aquí va a ser cero, verdad. Ahora, en todo este trayecto es positiva porque todas las tangentes son positivas *(señala un intervalo de 0 hasta donde señaló anteriormente v = 0)*, bueno aquí es positiva y entonces aquí es negativa... y aquí también es positiva *(señala un segundo tramo separado más a la derecha)* a ver aquí también es negativa... Si aquí es negativa. Bueno, la máxima... el valor máximo de la velocidad sería aquí, el valor máximo sería aquí *(y señala la cresta)* y el mínimo sería aquí *(y señala el final del gráfico)* **III:** dónde crece más deprisa... Bueno aquí de este intervalo hasta este intervalo decrece bastante... aquí es menos *(lo coloca en el folio y señala el tramo de la izquierda de)*... Ahora aquí crece, positivo; aquí también crece positivo; aquí también crece... En todo este intervalo crece. Ahora el punto más bajo, ¿también pides?... Aquí es cero
	B	**I:** Bueno primero buscando los puntos donde la tangente es cero, encontramos varios puntos... Yo los identifico con la recta tangente, si es horizontal (paralela al eje de las x), tiene pendiente cero. Ahora un punto donde la tangente a la recta sea máxima, espera, creo que aquí *(y va señalando en el folio que le proporcionamos)*, porque aquí veo que la tangente tiene la máxima inclinación y ahora, decrecimiento, aquí va creciendo, crece, decrece y aquí decrece, ósea sería menor, o sea aquí la pendiente es más inclinada, ósea aquí es menos, aquí la pendiente es mínima, porque la pendiente tiene una inclinación y la curva está decreciendo y la inclinación está en sentido contrario al positivo, en sentido contrario, es decir los valores de la pendiente son negativos. **II:** Bueno si me dices un punto donde tenga velocidad máxima, yo lo situaría por aquí, porque aquí la pendiente tiene una inclinación grande y coloco el signo más. Y digo que la velocidad es cero, donde las tangentes son paralelas al eje x y señalo aproximadamente aquí, entonces tenemos uno, dos puntos donde es cero y acá creo que también. Y aquí te repito considero el valor máximo positivo. Por último, veo la posibilidad de dos puntos, porque la inclinación la veo casi que igual. ¡Ojo!, te hablo de velocidad porque estoy en un gráfico de e vs. t, y la pendiente de la recta tangente en un punto, que es la derivada en ese punto, corresponde a la velocidad en dicho punto. **III:** Este es similar al anterior, pero como aquí es v vs. T, entonces quiere decir que aquí estamos hablando es de la aceleración. Entonces en este intervalo grandecito es aproximadamente cero, aquí será negativo, porque decrece, y aquí veo también una tangente horizontal por tanto también será la variación cero. Y aquí va creciendo, entonces será más. Y en ambas la inclinación es mayor
	C	**R/ I:** Yo diría que aquí y aquí es cero, porque aquí hay dos máximos y aquí un mínimo, relativo eh... porque la derivada en estos puntos es cero, porque son puntos críticos, porque la pendiente es cero aquí en estos puntos. Y acá en este punto la derivada es máxima, porque la inclinación es máxima, creo que acá también, pero no acá lo señalo como máximo, porque es mayor la inclinación, la pendiente tiene mayor valor ahí positiva. Y es mínima aquí, es negativa porque la pendiente tiene mayor inclinación, la pendiente tiene valor ahí negativa. **R/ II:** Bueno supuestamente nosotros manejamos que la velocidad es el cambio de la distancia en el cambio del tiempo, entonces lo que me pides hallar es la derivada, más que todo la derivada, entonces donde exista mayor pendiente positiva, ahí va a ser mayor la velocidad, puede ser aquí. Aquí va ser cero, porque la tangente es paralela al eje de las x y aquí por ejemplo, va a ser negativa y entonces la velocidad es mínima. **III:** Aquí... dónde es que decrece... Aquí en este punto... hay un cambio, para mí debe ser cero aquí, la pendiente es nula... Y cuando decrece, aquí en este punto porque la pendiente es negativa, y crece aquí porque la pendiente es positiva y tiene mayor inclinación.

Ítem	Profesor	Afirmación
V	D	**I:** Primero busco los valores donde la pendiente de la recta tangente es nula y son aquí, aquí, aquí y aquí, porque las rectas tangentes en estos puntos *(los señala en el folio)* son paralelas al eje de las x. Ahora busco por inclinación la máxima y la mínima... ya... a ver donde tenga mayor inclinación sería la máxima, pero hay muchos tramos... me parece que aquí... Aquí sería la máxima *(y coloca el símbolo en la gráfica)*... Y la mínima... donde tenga menos inclinación... no donde tenga menor inclinación negativa, es decir buscare tramos donde la función esté decreciendo... Yo creo que aquí porque está más inclinada pero cuando la función está decreciendo... Sí aquí es la mínima. **II:** Está tangente de aquí es nula, por la misma razón que la anterior, la recta tangente en este punto es paralela al eje de las x. Ahora dónde es máxima, por inclinación mayor en tramos donde la función es creciente, aquí la velocidad es máxima, yo creo que aquí... Y mínima creo que aquí, porque la función está decreciendo y yo veo aquí la mayor inclinación negativa... la pendiente es negativa... sí aquí... Y busco las tangentes para hallar la velocidad porque la velocidad es una derivada y por tanto al hallar la inclinación o más bien la pendiente de la recta tangente en un punto, estoy hallando aproximadamente la velocidad del móvil en ese punto. Es parecido al ejercicio anterior. **III:** Bueno aquí en todo este tramo veo que va decreciendo rápido la función, pero me pides sólo uno verdad, bueno escojo este porque hay mayor inclinación negativa, la pendiente es mayor negativa, lo señalo aquí con un * y el símbolo (-)... Luego siguiendo la gráfica veo que en todo este tramo no hay variación, te señalo todo el tramo, porque me parece que aquí hay un tramo lineal horizontal, por tanto la pendiente es cero, con lo cual me indica que no hay variación, y por último... A ver y dónde crece más rápido... pues aquí la función va creciendo en todo este tramo, aquí, aquí, aquí, pero dónde con más prisa de forma más acelerada, creo que aquí, porque hay mayor inclinación, la pendiente es mayor positiva.
	E	**I:** La pendiente de la recta tangente... Aquí es paralela a esta *(señala el eje de las x)* y aquí la pendiente de la tangente es cero... Por eso aquí hay un máximo *(dice señalando y dibujando sobre el punto c la recta tangente y luego hace lo mismo en los puntos b y a)*... Aquí también es cero porque es paralela y aquí hay otro cero, porque también es paralela. Para ver... Lo que pasa es que ahora tenemos que observar bien la gráfica para hallar las pendientes máxima y mínima... Entonces puede ser esta porque la inclinación es la tangente al ángulo... puede ser está aquí... aquí colocaré un (+)... Y menos o negativa... Es cuando el ángulo sea... sea más agudo... más obtuso... Este aquí así... Pero es que no es muy clara la gráfica oye... aquí... hay otro aquí... aquí también hay otro... aquí también hay otro... sí... sí, aquí hay un menos, aquí así también hay un menos... Y dónde es menor... depende del gráfico... A ver... este está así... bueno la mayor inclinación negativa será esta *(y señala la tangente más próxima al punto a.)...* **II:** A ver, siendo que la velocidad también es una... es una tasa de cambio, entonces aquí también hay una tangente, entonces, lo que pasa es que aquí la tangente es cero... Entonces, aquí la velocidad es mínima, aquí en este punto es mínima la velocidad, cuando viene aquí en esta parte aquí... Aquí es una pendiente positiva... Aquí es máxima y aquí se presenta una mínima... No se si la miras de otra manera... Bueno, depende de, lo que pasa... depende... bueno sí el ángulo aquí es mayor, sí el θ es mayor... y la inclinación es mayor... Sí, entonces aquí pongo el símbolo que me dices para velocidad máxima... el (+)... Pero aquí también hay otra hacia abajo... Lo que pasa es que la irregularidad de la curva a veces... aquí parece, aquí viene aquí... bueno yo creo que aquí es donde está el mínimo... aquí la velocidad es mínima, es negativa la inclinación es mayor de la pendiente... bueno coloco el (-)... Pero el ángulo aquí es menor... Pero aquí esta otra también negativa y el ángulo con la horizontal es mayor... Entonces, la tangente de 90º es... a medida que el ángulo va siendo mayor la tangente va disminuyendo... entonces si es mayor la de menor ángulo... Vamos a ver, sí aquí yo tengo tangente de 30º es seno de 30º sobre coseno de 30º, o sea 1/2 sobre √3/2 da 1 sobre √3, da √3/3 da 0, 5... y algo... Mientras que si yo voy a hablar de tangente de 60º, entonces me da seno de 60º sobre coseno de 60º, me está dando √3/2 sobre 1/2 y da √3 y √3 es mayor, o sea que entre más grande es el ángulo es mayor la cobertura, entre más grande es el ángulo mayor es... porque la pendiente es la tangente, entonces entre más grande es el ángulo es mayor la tangente... Entonces no se decidirme entre las dos, porque este punto es de esta y este de esta, entonces tendríamos que medir los ángulos... Me parece que el mayor es este... Bueno eso depende de la gráfica del análisis de la gráfica... Pero señalo este... *(lo señalo con la letra T)* **III:** Para aceleración... Por ejemplo aquí la variación es cero... *(Silencio de 15 segundos)*... Bueno trazo aquí esta y aquí esta otra... Yo creo que aquí está creciendo más deprisa... y un decrecimiento... aquí... pero aquí hay uno más pequeño... Aquí... Aquí... Aquí hay un menos, pero aquí hay otro menos... Bueno escojo este de aquí... Y la razón la misma que las anteriores...

ANEXO 9.

EVALUACIONES SOBRE EL CONCEPTO DE DERIVADA DISEÑADAS POR LOS PROFESORES

1. EVALUACIÓN DEL PROFESOR A

2. EVALUACIÓN DEL PROFESOR B

3. EVALUACIÓN DEL PROFESOR C

4. EVALUACIÓN DEL PROFESOR D

5. EVALUACIÓN DEL PROFESOR E

1. EVALUACIÓN DEL PROFESOR A

Evaluación sobre el concepto de derivada y sus aplicaciones

Objetivo: Esta evaluación tiene el propósito de indagar si has comprendido el concepto de derivada y sus distintas aplicaciones
Tiempo: 90 minutos

Recuerda las siguientes fórmulas para derivar:

1. d (K)/dx = 0
2. d (x)/dx = 1
3. d (x^n)/dx = nx^{n-1}
4. d (U + V)/dx = dU/dx + dV/dx
5. d (U.V)/dx = U.dV/dx + V.dU/dx
6. d (U/V)/dx = $\frac{V.dU/\ dx - U.dV/dx}{V^2}$

PREGUNTAS

1. ¿Explica con tus palabras qué entiendes por la derivada de una función?

2. Escribe dos grandes ejemplos de la vida práctica que expresen la derivada como una razón de cambio.

3. a. ¿Cuál es la pendiente de la recta y = 2x + 1?
   b. Calcula dy/dx
   c. ¿Qué conclusión puedes sacar de a y b?

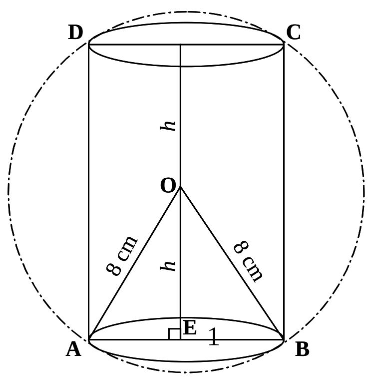
4. Sea la función f (x) = 4x - x^2 + 3
   a. Halla f ’(x)
   b. Calcula el punto crítico de la función o los puntos críticos
   c. Determina si el punto crítico o los puntos críticos son máximos o mínimos
   d. Elabora el bosquejo gráfico
   e. ¿Qué significará f ’(1)?

PROBLEMAS

1. Si el área de un rectángulo es de 100 m^2, cuáles deben ser las longitudes del rectángulo cuyo perímetro sea mínimo. Sol: 10m y 10 m.

2. La altura de un objeto que se mueve verticalmente está dada por s (t) = $-16t^2 + 96t + 112$, con s en pies y t en segundos. Calcula el tiempo t cuando alcanza su máxima altura.

3. Cortamos un cilindro de una esfera maciza de madera de radio 8 cm., tal y como se muestra en la figura. La altura del cilindro es de 2h cm.



a. Halle AE (radio del cilindro), en función de h.
b. Demuestre que el volumen (V) del cilindro se puede escribir como

$$V = 2\pi h\,(64 - h^2)\ \text{cm}^3$$

c. Determine, aproximando con tres cifras significativas, la altura del cilindro con el volumen máximo que se puede obtener por este procedimiento
d. ¿Cuál es el volumen del mayor cilindro posible? Dé su respuesta aproximando al cm^3

4. Si $C(x) = 3x^2 - 6x + 4$ representa el costo total en dólares de x unidades de una mercancía:

a. ¿Cuántas unidades de mercancía hacen el costo mínimo?
b. ¿Cuál es el valor en dólares de ese costo mínimo?

2. EVALUACIÓN DEL PROFESOR B

TALLER EVALUATIVO 1

Objetivo: Aplicar la derivada y la función derivada

Metodología: De manera individual y en un tiempo de 90 minutos, analiza y resuelve los siguientes problemas. Puedes usar apuntes, libros y calculadora.

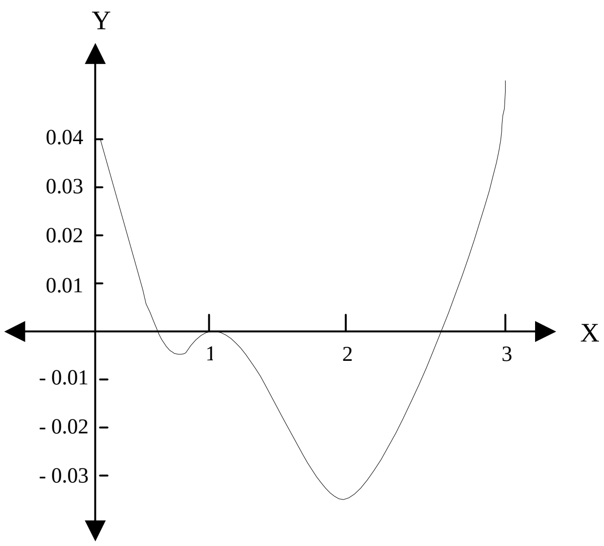
Problema 1:

Encuentra la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f (x) = x^3 en (2,8). Haz el gráfico de la función y de la recta tangente en dicho punto.

Problema 2:

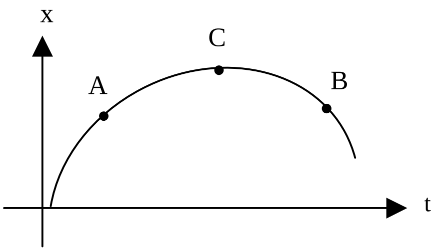
Para la gráfica de la función f determina:

1. Dominio y Rango de la función f
2. ¿Dónde la función es creciente?
3. ¿Dónde la función es decreciente?
4. Puntos críticos de la función
5. Puntos máximos para f
6. Puntos mínimos para f
7. ¿Qué puedes decir de la gráfica de la función en general?



Problema 3:

En la gráfica x-t, indica en qué punto la velocidad v es positiva (v >0), donde la velocidad es negativa (v < 0) o cuando es nula (v =0). Justifica tu respuesta y haz una interpretación del gráfico. Podrías hacer un gráfico de v-t.



TALLER EVALUATIVO 2

Objetivo: Aplicar el concepto de derivada y sus propiedades en la resolución de problemas.

Problema 4:

Al soltar un objeto y dejarlo caer libremente desde una altura de 100 m, su altura en el instante t viene dada por la función posición $y(t) = 100 - 16t^2$, con y en m y t en seg.

a. Halla la velocidad en cualquier instante t.
b. Halla la velocidad en $t = 1$ seg.,

Problema 5:

Se van a fabricar tanques en serie para almacenar fertilizantes químicos, en forma de cilindro circular recto completamente cerrado, cuya capacidad sea 16π metros cúbicos.

a) Hallemos las dimensiones que debe tener el tanque más económico.

Problema 6:

Se infla un balón esférico de tal forma que a los t segundos el radio $r(t) = 2t$ (cm.). Elabora una tabla de datos con las variables tiempo t en segundos y el volumen V en centímetros cúbicos, tomando incrementos de 1 segundo en la variable t,

a) ¿Cuál es la variación media del volumen de la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los 12 segundos? ¿Y a los 15 segundos?
b) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los t segundos de empezarse balón entre los 12 y los 15 segundos
c) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los t segundos de empezar a inflar?

3. EVALUACIÓN DEL PROFESOR C

Taller evaluativo 1

1. Si f (x) = {(x,y)/ y = x^3 + 1, x $\in$ R}, halle el incremento de y si x cambia de 1 a 2.

2. Sea el movimiento de un móvil dado por la ecuación x = $4t^2$+ 3t + 5, donde x viene dada en metros y t en segundos, halle la velocidad promedio y la velocidad instantánea del móvil. (Recuerde que: $v_{prom} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ y $v_{inst} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$)

3. Hallar la ecuación de la recta tangente y la recta normal en el punto dado, si h= i^3 - 2i, en i = 1.

4. En el siguiente ejercicio emplee la regla de los cinco pasos para hallar la derivada de f (x) = $2x^2 - x + 5$.

5. Efectúe las siguientes derivadas, aplicando los teoremas sobre derivadas:

- f (x) = $x^3 - 5x^2 + 5$
- f (m) = $m^3 - 5m^2 + 1$
- y = x / $(x-2)^{½}$

Taller evaluativo 2

1. Encuentre el intervalo donde la función es creciente y el intervalo donde la función es decreciente, trace la gráfica de la función g (r) = $r^2 + 4r + 5$

2. Usando los teoremas sobre derivadas encuentre la derivada de las siguientes funciones:
   - g (x) = $\sqrt[3]{(2x-1)^2}$
   - h (u) = $\text{Sen}^2\, 5u$
   - m (v) = ln [sec (2v)]

3. Hallar dy/dx en el punto que se indica, $x^2 - 4xy^2 + 2xy^2$, en (2,1)

Taller evaluativo 3

1. Dada la función f (r) = $r^2 + 1/2r - 1$, en el intervalo -3<r<2, determinar el punto mínimo. ¿Existe la derivada en ese punto?. Si existe, ¿cuál es su valor?

2. Estudiar la siguiente función, g (m) = ½ $m^3 + m^2 - 3m$, analizar la derivada y utilizar el resultado para dibujar la gráfica de la función en el intervalo -3<m<5.

3. Analiza la función f(x) = $2x^2 - 6x + 5$, con referencia a máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad y dibuja la gráfica.

4. EVALUACIÓN DEL PROFESOR D

Objetivo: identificar e interpretar el concepto de derivada y sus diferentes aplicaciones.

1. Encontrar el incremento en y de la función y = f (x) = $x^3 - 1$. Si x cambia de 2 a 2,1. Representa gráficamente el incremento.

2. Utilizando la definición $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, halla la derivada de:

$$y = f(x) = 5x^2 + 1.$$

3. Encontrar las ecuaciones de las rectas normal y tangente a la curva que representa la función determinada por la ecuación $y = x^2 + x$, en el punto (1,2)

4. Utiliza la regla de derivación en los siguientes ejercicios:

   a. $f(x) = x^{50}$
   b. $f(x) = (x - 3)(2x + 4)$
   c. $f(x) = (4x^2 - 1)/x$
   d. $f(x) = 2^{x^2+1}$
   e. f (x) = sen (cos x)
   f. f (x) = f (x) = $\sqrt{2x+9}$

5. La utilidad obtenida al producir y vender x artículos se expresa por: $P(x) = 200x - 3x^2$. Determinar la utilidad marginal. ¿Cuándo es igual a cero la utilidad marginal?

6. En la función $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$, hallar:

   a. Los puntos críticos (máximos y mínimos)
   b. Los intervalos donde la función es creciente o decreciente
   c. La concavidad
   d. Dibuja las gráficas que cumple las condiciones anteriores.

5. EVALUACIÓN DEL PROFESOR E

Prueba 1

1. Después de conceptuar sobre el incremento de una función, trata de recordar cómo introduces el concepto de derivada con un cálculo numérico, dadas las siguientes funciones:

   - $y = f(x) = x^2 + x$, en términos de x y Δx, cuando se pasa de 2 a 2,25

2. Encontremos el incremento relativo, $\Delta y / \Delta x$ de la función:

$$y = f(x) = x + \frac{1}{x} - 4$$

3. Aplicando la regla de los cinco pasos, encuentra la derivada de:

   - $y = 2x^2 + x - 1$

4. Encuentra la ecuación de la recta tangente y la normal a la curva que representa la función determinada por la ecuación $y = x^2$ en el punto P(2,4), y grafica para una interpretación geométrica del concepto de derivada.

Prueba 2

1. Aplicando las diferentes fórmulas de derivación encontrar las siguientes derivadas:

   a. $y = (x^2 - 7x + 2)^{-4}$
   b. $y = [(2x^2 + 1)^2] / [(3x - 1)^3]$
   c. $y = (4 - x)(\sqrt{4 - x})$
   d. $y = \csc(4x - 1)^2$

2. Encontrar el área del triángulo que forma el eje x, la normal y la tangente a la curva $y = f(x) = 4x^2 - x$ en el punto (1,3).

3. En cada uno de los ejercicios encontrar los extremos de la función dada (puntos máximos y mínimos), si los hay, y hacer donde sea posible un gráfico

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: A**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
1	PA	Preguntas a los alumnos sobre ¿qué entienden por derivada?	90 ’	Preconcepción de derivada	MOT, DE, COT	Indagar por las nociones o preconcepciones de derivada	Motivar a los alumnos sobre el tema a partir de lo que saben
2	EXP	Exposición del profesor (ver DIMATE. Matemática 11, p. 164)	90 ’	Interpretación y definición de derivada	INIC, MOT	Cotejar las preconcepciones de los alumnos con la de los matemáticos	Concepción y aplicación de la derivada
3	TEG	Práctica 1: ver DIMATE, p. 165 (ejercicios A, B y D)	90 ’	Aplicación del concepto e interpretación geométrica del concepto	COT, INIC	Interacción de los alumnos para socializar el conocimiento y aplicación de la derivada entre ellos	Comprender el concepto y la aplicabilidad de la derivada
4	EXP	Exposición del profesor (ver DIMATE, p. 166)	90 ’	Interpretación física de la derivada	COT, MOT	Ampliar la aplicabilidad de la derivada	Avanzar en la comprensión e interpretación de la derivada
5	TEG	Taller del libro DIMATE, p. 167 (ejercicios A, B, C, D y E)	120 ’	Interpretación física de la derivada	CIEN, INIC	Comprender la relación entre la física y el cálculo	Que los estudiantes que más saben guíen a los que menos comprenden
6	AEE	Investigación previa sobre derivada de una función (DIMATE, p. 170)	120 ’	Derivada de funciones	COT, MOT, INIC	Que el alumno independientemente sea capaz de determinar la derivada de una función	Seguir en el proceso de aprendizaje de la derivada
7	PEC	Puesta en común por parte de los alumnos de lo que investigaron	180 ’	Derivada de una función	DE	Iniciar a los alumnos a que comuniquen sus indagaciones	Avanzar en el proceso de aprendizaje de la derivada y de la derivada de una función
8	EXP	Algebra de derivadas de funciones (DIMATE, p. 172, 173, 174)	150 ’	Derivada de suma, potencia, producto, constante, cociente	MOT, INIC	Proporcionar herramientas para derivar más rápidamente	Aprender el álgebra de la derivada
9	TEG	Ejercicios sobre derivada de funciones (ejercicios A, B, C, H e I pág. 177; D pág. 179, y A pág. 183)	180 ’	Derivada de funciones	MOT, INIC	Adquirir habilidad para derivar funciones algebraicas	Aprender a usar el álgebra de las derivadas
10	AEE	DIMATE, p. 215 (Ejercicios C, D y G)	180 ’	Análisis de gráficas	MOT, INIC, CIEN	Aplicar la derivada al análisis de gráficas	Promover el trabajo independiente

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: A**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
11	PEC		150’	Crecimiento y decrecimiento de gráficas de funciones	INIC, DE	Aplicabilidad de la derivada al grafo de funciones	Promover la comunicación entre los alumnos y su capacidad de liderazgo
12	EXP	Cada representante de un grupo expone la actividad que se mandó a investigar Guías para resolver problemas de máximos y mínimos (se anexa copia)	150 ’	Aplicación de la teoría de máximos y mínimos a la solución de problemas	INIC, MOT (D)	Aplicación de la derivada en la solución de problemas	Promover en los alumnos la capacidad de resolver problemas
13	EXP	Exposición del profesor sobre razón de cambio. Ver matemática de 11º DIMATE, p. 192	180 ’	Aplicación de la derivada a variables relacionadas	INIC, MOT, (D)	Otra aplicación de la derivada	Integrar el concepto de derivada a la solución de problemas de diferentes disciplinas
14	TEG	Práctica y ejercitación de problemas sobre razón de cambio. DIMATE, pág. 195 (todos los ejercicios del A-H)	210 ’	Razón de cambio y variables relacionadas	COT (D)	Determinar el aprendizaje de los alumnos en la solución de problemas sobre razón de cambio	Compartir aprendizajes, que el que más haya comprendido guíe al que menos sabe

ANEXOS DEL PROFESOR A

I. GUÍA PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS SOBRE MÁXIMOS Y MÍNIMOS	II. ACTIVIDADES MÁS IMPORTANTES
1. Lea el problema hasta entenderlo 2. Construya la función objetivo (Aquella que tenga que derivar) 3. Construya la función relación (Aquella que le habla de relaciones entre variables) 4. Escriba la función objetivo en términos de una sola variable 5. Derive la función objetivo 6. Iguale a cero la derivada calculada 7. Halle el valor de la variable independiente o valor crítico 8. Examine si el valor crítico hace parte del Dominio de definición de la función objetivo 9. Compruebe que el valor hallado es el máximo o mínimo que pide el problema 10. Si la derivada no existe para algún valor compruebe si ese valor puede ser máximo o mínimo	• *Preguntas a los alumnos sobre las nociones iniciales que tienen sobre derivada* **Justificación:** Porque se le brinda confianza al alumno para que construya un concepto a partir de lo que él sabe. Se indaga sobre las preconcepciones que los alumnos tienen hasta que sean capaces de armar el concepto que se pretende enseñar • *Trabajo de grupo* **Justificación:** Porque permite socializar el conocimiento matemático, lo que más saben le enseñan a los que menos saben. Permite compartir ideas y se práctica el valor de la tolerancia, las clases son más dinámicas y hay menos problemas de disciplina • *Exposición del profesor* **Justificación:** Es importante aclarar para jerarquizar y ordenar conceptos, pero sólo después que los alumnos hayan trabajado

TEMA: Derivada NIVEL: 11º PROFESOR: B

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
1	LEC, PEG	Se hará lectura en pequeños grupos sobre la historia y aplicabilidad de la derivada. Se hará socialización de ideas	2	La derivada. ¿Cómo surgió? ¿En qué se aplica?	N - ADP	El estudiante tendrá una visión del origen y aplicabilidad de la derivada, lo que podrá servir de elemento motivador para los contenidos cognitivos a desarrollar	Los estudiantes entran a conocer y valorar el proceso histórico de la derivada y su aplicabilidad en las ciencias
2	PPL, ORP	Se hallará la ecuación de magnitudes linealmente proporcionales a partir de una situación problema. Se pedirá la gráfica y la pendiente de la misma. Otra forma de hallar la ecuación de la recta será dando dos puntos, o un punto y la pendiente. Se pedirá elaborar la gráfica	3	La ecuación de la recta, el concepto de pendiente, gráfica de una línea recta	N - ADP	Interpretación de la gráfica y ecuación de la recta desde varias perspectivas, simbólica, real, gráfica	Análisis e interpretación de la recta desde una visión integradora de lo real, lo gráfico y lo simbólico
3	PPL, ORP	Solución de situaciones problemas que ameritan análisis de gráficos y cálculo de pendientes	4	Gráficos de posición -tiempo y cálculo de pendiente	D - COT	Indagación de ideas sobre el sentido común sobre derivada	Categorización y análisis de las ideas del sentido común sobre derivada
4	TEG, PEC	Se discutirán en pequeños grupos las situaciones planteadas en la actividad 3. Se hará puesta en común y conclusiones con la orientación del profesor	3	Variación media e instantánea y pendiente	N - INIC	Relacionar y manejar la variación instantánea y la pendiente a partir de situaciones	Introducir la variación media mediante situaciones contextualizadas el estudiante
5	TEG, PEC, ORP	Se retoma el problema sobre el consumo de agua del colegio y se concreta la variación instantánea de consumo como la derivada. También se trabaja una situación problema sobre la caída de un cuerpo	2	Derivada y función derivada	N - INIC	Introducir el concepto de derivada y función derivada	Manejo del concepto de derivada y de la función derivada a partir de situaciones significativas del contexto

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: B**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
6	APL, TEG, ORP	Se retoman las situaciones planteadas en la actividad 3 para resolverlas usando el concepto de derivada. Se usará el concepto de aceleración para trabajar la segunda derivada	3	Aplicación del concepto de derivada	D - CIEN	Aplicación del concepto de derivada	Solución de unas situaciones problemas aplicando el concepto de derivada desde otra perspectiva
7	PPL, APL	Resolución de problemas aplicando el concepto de derivada. Se usarán los apuntes y libros	2	Derivada y función derivada	N	Revisión de la definición de derivada en su uso	Evaluación de la temática
8	APL, TEG, ORP	Se deducirán las propiedades de la derivada (reglas de derivación) a partir de su definición	4	Propiedades de las derivadas	D - CIEN	Deducción por parte de los estudiantes con orientación del profesor de las propiedades de la derivada	Desarrollo de las competencias argumentativas y prospectivas
9	EXP, TEG, ORP	Se expondrá la fundamentación teórica de máximos y mínimos, puntos críticos, concavidad. , se resolverán problemas en grupos con la orientación del profesor	4	Máximos y mínimos (criterio de la primera derivada), puntos críticos, criterio de la segunda derivada	D - CIEN	Habilidad para hallar máximos y mínimos	Cálculo de dimensiones mínimas y máximas para ciertas magnitudes pretendidas
10	TEG	Resolución de problemas sobre máximo y mínimos	2	Maximización y minimización	N - CIEN	Aplicación de la derivada en problemas de maximización y minimización (optimización de funciones)	Evaluación de máximos y mínimos
11	TEG, ORP, PEC	Los estudiantes analizarán las derivadas de las funciones trigonométricas fundamentales, de la función exponencial y logarítmica, a través de un material que el profesor les dará fotocopiado	4	Derivada de las funciones trascendentes: trigonométricas fundamentales, exponencial y logarítmica	D - CIEN	Conocimientos e interpretación de las derivadas de las funciones trascendentes	Manejo de la autonomía para aplicar los conocimientos matemáticos
12	TEG	Solución de problemas que permitan la aplicación de los conocimientos adquiridos	3	Derivada, función derivada, reglas de derivación, máximos y mínimos	N	Aplicación de los conocimientos adquiridos sobre la derivada y la función derivada	Evaluación de la temática

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
1	P. A.	¿Qué entiendes por incremento de una función?	3 min.	Función Variación de una función	N	Motivar y extraer los preconceptos de los estudiantes	Ubica al docente sobre las pre-concepciones de los estudiantes
2	EXP.	Ejemplos a desarrollar	25 min.	Función, variables, variación, factorización, incremento	N	Apropiarse de los pasos lógicos y ejercitarlos	Los estudiantes visualizan la forma como se pueden resolver algunos ejercicios sobre el tema
3	P. E. C. A. E. E.	Se proponen unos ejercicios para resolver en clase y se dejará como trabajo del estudiante el análisis de los ejercicios resueltos en el libro guía	10 min.	Función, variables, variación, factorización, incremento	N	Ejercitar los contenidos aprendidos	Los estudiantes visualizan la forma como se pueden resolver algunos ejercicios sobre el tema
4	P. A.	¿Qué sucede con el incremento relativo de una función, si el incremento de la variable independiente tiende a cero?	5 min.	Incremento, incremento relativo	D. Científ.	Despertar el interés por la clase y reflexionar sobre un aspecto muy abstracto para el estudiante	Reflexionarán y sacarán conclusiones, se promoverá la abstracción
5	EXP.	Se utilizaran los conceptos de aceleración, velocidad para explicar el concepto de derivada y resolverán ejercicios de aplicación (pág. 152 del 1 al 10)	25 min.	Incremento, incremento relativo	N	Formalizar el concepto de derivada mediante la utilización de conceptos de la física	La comprensión del concepto y ver su aplicación
6	P. E. C.	Proponer ejercicios	8 min.	Definición de derivada	N	Ejercitar y determinar el grado de comprensión	Revisar si realmente los alumnos han comprendido el proceso de derivación a partir de la definición
7	EXP.	Se plantean ejercicios de aplicación de derivadas para encontrar la velocidad media, instantánea, la altura, etc. en diferentes movimientos (p. 158, 1- pares y 5 impares)	40 min.	Derivada, interpretación física de la derivada (velocidad, aceleración, M.U., M. U. V.)	D INIC (MUA)	Utilizar el concepto de velocidad media, instantánea para explicar el concepto de derivada	Motivar el aprendizaje de este concepto y relacionarlo con la experiencia cotidiana
8	P. E. C.	Proponer y se resuelven en el tablero todos los ejercicios del	40 min.	Derivada, interpretación física de la derivada	N	Detectar las dificultades que presentan los estudiantes al	Aplicación de los conceptos

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
		libro PHC práctica 2, pág. 167				resolver estos problemas	
9		Evaluación 1	30 min.	Ver taller evaluativo 1			
10	T. E. G	Resolver en grupo de 3 estudiantes algunos ejercicios de aplicación del libro guía, pág. 158, ejercicios: 1. a, c, e; 2 a.	45 min.	Definición de derivada	N	Retroalimentación del tema visto, propiciar espacios de colaboración entre estudiantes y fomentar el trabajo en grupo	Se detectarán los estudiantes que trabajan y los que poseen mayor distancia o dificultad en el tema
11	P. E. C.	Se resolverán en el tablero algunos de los ejercicios para confrontar resultados	45 min.	Definición de derivada	N	Detectar y revisar posibles errores	Confrontación y evaluación de los resultados
12	A. E. E.	Resolver en casa los ejercicios pág. 159, 3, 5 (a al e) y 7 (pares)	45 min.	Definición de derivada	D (MOT)	Fomentar la responsabilidad	Fortalecimiento y afianzamiento del concepto
13	P. A.	¿Qué es tangente a una curva? Graficar una recta tangente a una función en un punto A	8 min.	Recta, recta tangente, gráfica de una función, interpretación geométrica de la derivada	D (INIC)	Revisar el concepto recta tangente a una curva	El concepto de recta tangente está muy relacionado con el concepto de derivada
14	EXP.	Aplicando la definición de derivada se desarrollan ejercicios para calcular la ecuación de la recta tangente, la normal a una curva	20 min.	Recta, gráfica de una función, ecuación de la recta, recta normal y tangente	N	Introducir el concepto de pendiente de la recta tangente de una función	Relación de la pendiente con f ’(x)
15	A. E. E.	Propuesta y desarrollo de los ejercicios del libro guía de la pág. 162-165	45 min.	Recta, gráfica de una función, ecuación de la recta, recta normal y tangente	N	Analizar los problemas resueltos	Ayuda a la comprensión del proceso de calcular la derivada a partir de la definición
16	T. E.G.	Taller de aplicación de los conceptos de derivada, recta tangente, pág 165 del libro guía, ejercicios 1 a, b, c y e; 2 a, c, e. En grupo de 3 estudiantes	45 min.	Recta, gráfica de una función, ecuación de la recta, recta normal y tangente, crecimiento y decrecimiento de la función	D (INIC)	Analizar el comportamiento del crecimiento o decrecimiento de una función	Relacionan la pendiente con la derivada y ven la relación con el comportamiento de crecimiento o decrecimiento de la función

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
17	A. E. E	Resolver práctica 3 del libro PHC, pág 169 del A-D	30 min.	Recta, gráfica de una función, ecuación de la recta, recta normal y tangente, crecimiento y decrecimiento de la función	D (INIC)	Revisar la comprensión de los conceptos tratados	Afianzamiento de los conceptos tratados
18	P. E. C.	Se colocan algunas funciones y sus respectivas derivadas y se pregunta: ¿Existe alguna relación entre f y f ’? ¿Cómo podemos hallar la f ’ (x) sin realizar los 5 pasos sugeridos?	15 min.	Función, función derivada, tipos de funciones, factorización, teoremas sobre derivadas	N	Comparar los dos métodos para resolver la derivada de una función: aplicando la definición y aplicando los teoremas	El estudiante aprende a resolver problemas sobre derivada de una función de una manera más rápida, después de haber desarrollado la definición del concepto
19	P. E. C.	Realizamos ejercicios aplicando los teoremas sobre derivadas	25 min.	Función, función derivada, tipos de funciones, factorización, teoremas sobre derivadas	N	Comparar los dos métodos para resolver la derivada de una función: aplicando la definición y aplicando los teoremas	El estudiante aprende a resolver problemas sobre derivada de una función de una manera más rápida, después de haber desarrollado la definición del concepto
20	A.E. E.	Ejercicios para desarrollar individualmente en casa, pág. 174 del libro guía, ejercicios 1 a, b, e, h; 3 a, c, f, i; y 7 a, c.	45 min.	Función, función derivada, tipos de funciones, factorización, teoremas sobre derivadas	N	Aplicar los conceptos dados	Aplicación de los conceptos dados
21		Evaluación 2	45 min.	Ver taller evaluativo 2			
22	P. P. L.	Cada estudiante deberá resolver el taller en forma individual con ayuda de textos y apuntes. Libro de cálculo Astor Roland, Ed. Larson, pág. 132	35 min.	Función, continuidad, derivada	D (MOT; INIC-Conceptual)	Detectar los errores de cada uno de los estudiantes	El profesor aprovecha para mirar el avance de sus estudiantes
23	A. E. C.	Resolver los ejercicios de la práctica 4 del libro guía PHC, pág. 171ejercicio C.	35 min.	Pendiente, derivada, reglas de derivación, definición de derivada	D (MOT; INIC-Conceptual)	Afianzar los conceptos	

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
24	P. A.	¿Cómo podemos derivar: $(t+5)^3 = h(t)$? ¿Cuál es el valor de h '(t)?	6 min.	Función, composición de funciones, derivada, reglas de derivación, regla de la cadena	D (CIENC)	Introducir la regla de la cadena	La crisis que se crea para motivar a los estudiantes hacia el estudio y aplicación de esta regla
25	EXP.	Se introduce la regla de la cadena y se desarrollan ejercicios del libro pág. 177, 1 a, b; 2 d, y 3 b. Y además los estudiantes proponen otros	45 min.	Función, composición de funciones, derivada, reglas de derivación, regla de la cadena	D (CIENC)	Se desarrollan ejercicios para que comprendan y aprendan a tratar funciones compuestas	Comprender la regla de la cadena para agotar los procesos de derivación
26	A. E. E.	Ejercicios propuestos de la pág. 177 del libro guía (los que faltan por hacer)	35 min.	Función, composición de funciones, derivada, reglas de derivación, regla de la cadena	N	Se desarrollan ejercicios para que comprendan y aprendan a tratar funciones compuestas	Afianzar la regla de la cadena y las de derivación
27	T. E. G.	Analizarán en grupo de 3 estudiantes el taller correspondiente a la pág. 180.	25 min.	Derivada, aplicación de los teoremas, recta tangente, regla de la cadena	D (INIC)	Evaluar al estudiante sobre ejercicios de derivada	Detectar las dificultades y errores de los estudiantes mediante la solución de ejercicios
28	P. A.	¿Cómo hallarían la pendiente de la curva xy + y = x en P (1, ½)?	5 min.	Funciones, variables, función derivada, factorización	D (CIENC, INIC)	Comparar los diferentes tipos de funciones	Se pone en juego la capacidad de recursividad del estudiante
29	EXP.	Introducir la derivación implícita y resolver ejercicios de aplicación, ejercicios pág. 180 del libro guía: 1 a y d; 2 a, d, i, j	90 min.	Funciones, variables, función derivada, factorización, derivación implícita	D (INIC)	Comprender los pasos para derivar funciones compuestas de dos variables y sintetizar el proceso de derivación implícita en una serie de pasos lógicos	Orientar a los estudiantes sobre la forma en que se resuelven este tipo de ejercicios
30	P. E. C.	Se proponen tres ejercicios para que el estudiante individualmente los realice, ejercicio pág. 180, 2 b; 3 f y 4 a	10 min.	Funciones, variables, función derivada, factorización, derivación implícita	D (INIC)	Ejercitar a los estudiantes y revisar sus posibles dificultades	Facilita a los estudiantes a trabajar e identificar sus propias dificultades
31		Evaluación 3	45 min.	Ver taller evaluativo 3			

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
32	P. A.	¿Dada la función f (x) = $3x^2 + 6x + 1$, en x [-2, 0], dónde la curva tiene su valor más alto y el más bajo, qué método utilizaríamos?	5 min.	Gráfica de una función, derivada, análisis monótono de una función, intervalo, función continua	N	Determinar dónde la función crece o decrece, hallar intervalos de decrecimiento y crecimiento de la función	Es una herramienta para analizar el comportamiento de una función
33	EXP.	Exposición de puntos máximos y mínimos y análisis monótono de funciones y desarrollo de ejercicios de aplicación, pág. 212, ejercicios 1, 3, 6 a	45 min.	Gráfica de una función, derivada, análisis monótono de una función, intervalo, función continua, puntos máximos y mínimos	N	Proponer una serie de pasos lógicos para obtención de máximos y mínimos de una función	Ayuda al establecimiento de pasos necesarios para lograr los objetivos y permite detectar dificultades de los estudiantes
34	P. E. C	Se propone un ejercicio para que los alumnos lo resuelvan: f (x) = $2x^2 + 1$ en $x \in [-4, 4]$	10 min.	Gráfica de una función, derivada, análisis monótono de una función, intervalo, función continua, puntos máximos y mínimos	N	Ejercitar los contenidos dados	Detectar dificultades de los estudiantes
35	A E. E.	Proponer ejercicios para que los resuelvan en casa pág. 212 del libro los que restan	45 min.	Gráfica de una función, derivada, análisis monótono de una función, intervalo, función continua, puntos máximos y mínimos	N	Ejercitar y afianzar los contenidos dados	Afianzamiento de conceptos y procesos
36	P. P. L	Taller sobre máximos y mínimos y se trata de encontrar gráficamente los puntos máximos y mínimos, ejercicio del libro PHC la práctica 21 pág. 205, parte A	40 min.	Gráfica de una función, derivada, análisis monótono de una función, intervalo, función continua, puntos máximos y mínimos	N	Relacionar el concepto de derivada con el análisis gráfico de la función	Se detecta si el estudiante comprende el concepto de derivada y si lo aplica al análisis gráfico de la función
37	A. E. E.	Revisión y discusión sobre los ejercicios de la práctica 21 del PHC, pág. 205 parte A	45 min.	Gráfica de una función, derivada, análisis monótono de una función, intervalo, función continua, puntos máximos y mínimos	N	Afianzar los temas vistos	Se ejercita y se aplica el análisis de gráfica de funciones

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
38	P. A.	Sea f (x) = $x^3 - 9x^2$, ¿Cómo hallar los intervalos donde f es creciente y decreciente? ¿Cómo es el comportamiento de la función?	5 min.	Criterios de 1ª y 2ª derivada	D (INIC)	Revisar la concavidad de la función por medio de f ’ y f ’’	Presentación de métodos gráficos y algebraicos para agilizar la construcción de la gráfica de una función
39	EXP.	Se introducen los criterios de 1ª y 2ª derivada y los conceptos de concavidad y puntos de inflexión, además se resuelven ejercicios de la pág. 229 y 231 del texto guía	45 min.	Criterios de 1ª y 2ª derivada	N	Desarrollar ejercicios para que los estudiantes interioricen una serie de pasos lógicos para la construcción del gráfico de la función aplicando los criterios	Afianzamiento de los métodos gráficos y algebraicos para agilizar la construcción de la gráfica de una función
40	P. E. C.	Se proponen ejercicios para que los realicen los estudiantes en clase, pág. 232 1 a, y 4 d	45 min.	Criterios de 1ª y 2ª derivada	N	Revisar si los estudiantes tienen claro la forma de realizar los ejercicios	Afianzamiento de los métodos gráficos y algebraicos para agilizar la construcción de la gráfica de una función
41	A. E. E.	Se proponen ejercicios para desarrollar en casa, los restantes de la pág. 232, el resto del 1 y 4.	45 min.	Criterios de 1ª y 2ª derivada	N	Revisar si los estudiantes tienen claro la forma de realizar los ejercicios	Afianzamiento de los métodos gráficos y algebraicos para agilizar la construcción de la gráfica de una función
42	T. E. G.	Se proponen ejercicios de aplicación para resolver en grupo, sección 4.3 del libro de Larson, pág. 144 del 1 - 30.	40 min.	Función, análisis de función, crecimiento y decrecimiento, criterios de 1ª y 2ª: concavidad, máximos, mínimos, inflexión	N	Detectar si el estudiante comprende el concepto de concavidad gráficamente y analíticamente	Se relaciona la gráfica de una función y el estudio matemático de sus propiedades a través de la derivada
43	A. E. E.	Puesta en común de los ejercicios anteriormente resueltos para aclarar dudas y ampliar conocimientos.	45 min.	Función, análisis de función, crecimiento y decrecimiento, criterios de 1ª y 2ª: concavidad, máximos, mínimos, inflexión	N	Afianzar los conceptos involucrados	Se afianzan y mecanizan procesos de resolución de problemas de este tipo

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: C**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
44	P. A.	¿Encontrar dos números positivos cuya suma sea 60 y su producto sea el máximo?	5 min.	Máximos y mínimos, criterios de 1ª y 2ª derivada, simbolización de ecuaciones	D (INIC)	Solucionar problemas de aplicación de máximos y mínimos	A través de la aplicación de máximos y mínimos se simplifican los procesos algebraicos y se aplican el concepto de derivada
45	EXP.	Se resuelve el ejercicio anterior utilizando los criterios de 1º derivada y se propone una técnica de resolución de problemas de este tipo, luego se proponen dos ejercicios más de la pág. 237 el 2 y 6	40 min.	Máximos y mínimos, criterios de 1ª y 2ª derivada, simbolización de ecuaciones	D (INIC)	Solucionar problemas de aplicación de máximos y mínimos	A través de la aplicación de máximos y mínimos se simplifican los procesos algebraicos y se aplican el concepto de derivada
46	P. E. C.	Se proponen y resuelven dos ejercicios en clase y se discute la solución, pág. 237, 1 y 3	45 min.	Máximos y mínimos, criterios de 1ª y 2ª derivada, simbolización de ecuaciones	D (INIC)	Afianzar problemas de aplicación de máximos y mínimos	Se afianzan los procesos de resolución de problemas de este tipo
47	A. E. E.	Se proponen los ejercicios restantes de la pág. 237 para resolverlos en casa los que faltan hasta el 10	45 min.	Máximos y mínimos, criterios de 1ª y 2ª derivada, simbolización de ecuaciones	D (INIC)	Mirar el grado de comprensión de los estudiantes de este tema	Ayuda a observar si los alumnos han comprendido o no el tema visto
48		Evaluación 4	45 min.	Ver taller evaluativo 4			

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: D**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
1	IPT PEC EXP PPL AEE	Investigación previa al tema socializando en clase los diferentes puntos de vista y concretando las variaciones de las imágenes Explicación de ejercicios por parte del profesor Taller individual haciendo uso del papel milimetrado Propuesta de ejercicios 23 de la página 138 (Matemática Progresiva) y ejercicio 5 página 104 (Matemática 2000)	2 horas	Incremento de una función	N	Dada una función hallar el incremento e interpretarlo gráficamente	En la realización del taller se tendrá en cuenta la ubicación del incremento en la gráfica
2	EXP PPL TEG	A través de la observación directa en el gráfico de una función (cuadrática) analizaremos el incremento relativo $\Delta y/\Delta x$. Luego se realizarán ejercicios en clase tomados del libro guía, ejercicio 12-14 página 141 (Matemática progresiva). Tema de investigación ejercicio 5 (a, b, c, d) página 109 (Matemática 2000)	2 horas	Incremento relativo de una función	N		
3	EXP PPL AEE	Teniendo en cuneta la dificultad para la comprensión del tema, observamos el comportamiento del incremento relativo cuando $\Delta x \to 0$. Se realizarán varios ejercicios modelo para observar el límite del $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$. Ejercicios en clase, página 146 (Matemática progresiva)	2 horas	Límite del incremento relativo, concepto de derivada	D	Determinar la derivada de una función por definición Observar gráficamente el comportamiento de la recta tangente en un punto dado (ampliación de escala)	Después de la realización del lim $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$, se analizará la recta tangente en ese punto (caso particular)

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: D**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
4	EXP PPL TEG	Haciendo uso del concepto de derivada demostraremos la derivada de una función constante, de una potencia, de la suma, del producto y del cociente. Se resolverán ejercicios en clase de la página 132 y de la página 136 del libro (matemática 2000). Se propondrán ejercicios de investigación página 168 de (Matemática progresiva)	4 h	Algebra de derivadas	N	Aplicar las propiedades y las reglas del álgebra de derivada en la solución de ejercicios	En los talleres propuestos el alumno identifique y aplique correctamente las propiedades o reglas de derivación
5	IPT EXP PPL	Haciendo uso de la investigación previa al tema sobre funciones compuestas se realizará la demostración de la regla de la cadena por definición de derivada Ejercicios en clase página 173, número 2 (Matemática progresiva) Ejercicio de investigación página 173, ejercicios 15, 16, 17 del texto (Matemática progresiva)	3 h	Regla de la cadena	D	Derivar funciones compuestas aplicando la regla de la cadena	Al derivar funciones compuestas, identifique la derivada externa y la interna correctamente Observar la rapidez de la derivada al aplicar la regla de la cadena o resolverlo aplicando el teorema del binomio de Newton
6	EXP PPL AEE	Se demostrará la derivada de la función seno, de la función coseno y de la tangente a partir de la definición Ejercicios de investigación de la página 125 del 1 – 15 (McGraw-Hill)	4 h	Derivada de funciones trascendentes: trigonométricas, exponenciales y logarítmicas	D	Derivar funciones trascendentes haciendo uso de la regla de la cadena	La aplicación correcta de la derivada de funciones trascendentes haciendo uso de la regla de la cadena y del álgebra de derivadas

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: D**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
7	EXP PPL TEG	Tomando una relación f (x, y)=0 haciendo uso de la regla de la cadena, hallaremos la derivada implícita. Ejercicios en clase página 174, números 35 y 36 (Matemática progresiva) Ejercicios de investigación página 174 número 37 (matemática progresiva) De una relación f (x, y)=0 se tomarán ejercicios de fácil despeje para que el alumno demuestre o verifique la derivada implícita y la funcional, página 125 (1-15) de (McGraw-Hill)	4 h	Derivada implícita	D	Derivar implícitamente teniendo en cuenta la regla de la cadena y el álgebra de derivada De una relación f (x, y)=0 se tomarán ejercicios de fácil despeje para que los alumnos demuestren y verifiquen la derivada funcional implícita	Aplicación correcta de la regla de la cadena y del álgebra de derivada En los ejercicios de investigación número 37 de la página 174, se observará la representación gráfica de la recta tangente a la curva
8	IPT EXP PPL TEG	Investigación previa al tema tabulación de valores cercanos a los puntos críticos: máximo – mínimo Comportamiento de las rectas tangentes en las funciones monótonas: creciente – decreciente (gráfica) Explicación de la primera y segunda derivada Problemas de aplicación páginas 225 (pares), 233 (impares) (matemática progresiva)	4 h	Aplicación de la derivada	D	Identificar puntos críticos en el gráfico Hallar puntos máximos y mínimos dada una función Calcular los intervalos donde la función es monótona Resolver problemas de optimización haciendo uso de la primera y segunda derivada	Aplicación de los criterios de la derivada en la interpretación y ubicación de los puntos críticos, concavidad y puntos de inflexión

ANEXOS DEL PROFESOR D

1. **Bibliografía**:
   Matemática progresiva
   Matemática 2000.

2. **Valoración de las actividades**: Todas las actividades propuestas en clase son importantes porque conducen al alcance de los objetivos propuestos, motivando los diferentes tipos de aprendizaje.

   - La representación gráfica de la recta tangente a una curva, estimula la interpretación lógico-espacial
   - La aplicación de los criterios d la primera y segunda derivada en la realización de trazado de gráficas y resolución de problemas
   - Mecanización de los ejercicios:
     a) Algebra de derivadas
     b) Aplicación de la regla de la cadena
     c) Derivación implícita

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: E**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
1	EXP	Explicar el concepto intuitivo d derivada utilizando un gráfico cartesiano (ver fotocopias del texto guía)	4 h	• Introducción histórica • Concepto de derivada de una función • La derivada y el problema de la recta tangente • Rectas secantes • Concepto de incremento de una función • Cociente incremental • Definición de derivada de una función Ver páginas 80, 81, 82, 83, 84 y 85 del texto guía	D (INIC)	Adquirir el concepto de función derivada Adquirir habilidad para interpretar, reconocer e identificar el concepto	La exposición del profesor es importante porque allí es donde el alumno corrobora más aciertos y corrige los errores cometidos en la elaboración y construcción de su conocimiento
2	Taller individual	Ejercicios sobre los temas tratados, actividad 1 ejercicios 3.1 (impares), 3.2 (1-10), 3.3 (1, 2 y 3 a-b; 5 a, b, c, d, e, p y q; y 7 a-b) del libro Nueva matemá-tica constructiva, página 150-159	2 h	Todos los anteriores contenidos de la actividad 1	Pueden aparecer algunas dificultades por INIC, MOT o CIENT	Tener un conocimiento claro de cómo se han formado los alumnos en el concepto y cómo lo aplican para poder continuar con el proceso	Permite información diagnóstica para avanzar o retroalimentar los diferentes contenidos
3	Taller formativo en equipo	Interpretación geométrica de la derivada y regla de los cinco pasos, la tangente y la normal. Páginas 160, 161, 162 y 163 del texto guía	2 h	• Regla de los 5 pasos • Interpretación geométrica de la derivada • Ejercicios 3.4 de la página 165 del texto guía	Falta mejor interpretación de funciones y graficar en algunos casos	Representar e interpretar mediante una gráfica el significado de incremento en la derivada Conocer que la derivada es la pendiente de la función correspondiente	Estimula el desarrollo dl pensamiento abstracto y da significado e interpretación al concepto de derivada
4	EXP TEG	Explicación sobre otras técnicas de derivación, teoremas de utilidad en el proceso, fórmulas que acortan el trabajo y discusión sobre la demostración de los diferentes teoremas, página 166 a 172 del texto guía	4 h	Derivada de una función constante, de la suma, del producto de funciones, del cociente y de función compuesta	N	Adquirir habilidad para demostrar las fórmulas que permiten hallar la respectiva derivada de una función dada	Porque el estudiante puede encontrar un camino más corto para hallar la derivada de cualquier función algebraica

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: E**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
5	Taller para medición de logros	Prueba escrita para determinar los avances. Ejercicios 3.5. página 174 (1 pares), 3 (impares) y 8 a, c, d y f) del texto guía	2 h	Los descritos en la actividad 4	N	Aplicar los conceptos aprendidos en la solución de ejercicios afines	Se puede establecer un diagnóstico de los avances, avanzar o retroalimentar
6	Presentación de los procesos EXP	Demostrar con ayuda del texto guía la regla de la cadena y discutir los ejemplos en los que se aplica. También definir funciones implícitas y los pasos que se siguen para derivarlas	4 h	• Regla de la cadena • Aplicaciones • Funciones implícitas, definición • Derivación implícita • aplicación	N	Adquirir habilidad y destreza para reconocer e interpretar las funciones compuestas y poder derivarlas Adquirir habilidad y destreza para calcular la derivada cuando no está bien definida la dependencia o independencia de la variable	El estudiante alcanza un mayor nivel de preparación y madurez en las aplicaciones del cálculo diferencial
7	Taller prueba escrita	Prueba escrita individual sobre el tema tratado. Ejercicios 3.7. página 180 (1 a-b; 2 i-j; 3 K-l; 4 a-b; 5 e-d), texto guía	1 h	Los de la actividad 6	D (CIENT), al tener que despejar o al tener que hallar una derivada interna compuesta	Aplicar la regla de la cadena para calcular la derivada de funciones compuestas	Porque se puede mostrar a la derivada como un instrumento atractivo en la solución de problemas de la cotidianidad
8	EXP	Se explicarán algunas derivadas de funciones especiales, las trigonométricas y sus inversas, la de la función logarítmica, la función exponencial, página 181-197 del texto guía	5 h	• Funciones trigonométricas y sus inversas • Funciones logarítmicas • Función exponencial • Propiedades y aplicaciones	D (CIENT), de algunos conceptos básicos que son pre-requisitos para entender	Adquirir habilidad y destreza en la solución de derivada de funciones especiales	Importante porque el estudiante adquiere mayor profundidad y madurez académica en la aplicación del cálculo diferencial
9	Taller prueba escrita	Prueba sobre ejercicios de la página 197 del texto guía, ejercicios 1 a, b, c, d , e y f.	1 h	Los contenidos de la actividad 8	D (CIENT)	Adquirir habilidad y destreza para la solución de ejercicios alusivos al tema	Desarrolla el pensamiento abstracto y aumenta el nivel de formación académica en el tema
10	EXP	Definir el teorema del valor medio y resolver los ejercicios de la página 217 del libro guía	1h	Teorema del valor medio	D (CIENT)	Aplicar el teorema del valor medio para resolver ejercicios para hallar el valor de un punto del intervalo	Importante porque el estudiante adquiere mayor profundidad y madurez académica en la aplicación de este teorema.

TEMA: Derivada **NIVEL: 11º** **PROFESOR: E**

Actividad	Tipo de actividad	Descripción de la actividad	Tiempo aprox.	Contenidos implicados	Nivel y causa de la dificultad	Intención educativa de la actividad	Importancia de la actividad
11	EXP Taller individual	Exposición sobre las aplicaciones de la derivada. Taller páginas 207, 208, 209, 210 y 211 del texto guía Ejercicios 4.1 pág. 212 (1, 3, 5 y 7 a), ejercicios 4.2 pág. 217 (1 a-e) y ejercicios 4.3 pág. 222 (1-10) del texto guía.	6 h	• Aplicaciones de la derivada representación gráfica • Máximos y mínimos, concavidad y punto de inflexión • Ejercicios texto guía	D (CIENT) D (INIC), también es muy corto el tiempo para profundizar en el tema	Aplicar los tópicos a tener en cuenta en la determinación de los puntos máximos y mínimos, concavidad y puntos de inflexión	Este tema permite construir expresiones que representan problemas significativos en el marco de la solución de derivar