CAPÍTULO 4. RESULTADOS DEL ANÁLISIS *MACRO*:

Restricciones institucionales

4.0. A manera de introducción

De acuerdo con Espinoza (1998), toda problemática didáctica posee un carácter institucional. Como el profesor se encuentra inmerso en un medio específico sobre el que construye sus propios procesos de funcionamiento y autorregulación, creemos que no actúa en soledad; más bien, se encuentra sometido a una serie de restricciones institucionales que van a influir decisivamente en su actividad profesional.

Según Espinoza (1998),

> "Estas restricciones afectan la práctica del profesor en dos niveles distintos. El primero, al nivel general de su actividad, a través de los contratos "pedagógico" y "escolar" establecidos por esta institución. El segundo, al nivel particular del sistema didáctico, mediante las relaciones institucionales a las obras matemáticas constitutivas del proyecto de estudio que une a profesor y alumnos y que se especifican en el contrato didáctico".

Se entenderán las restricciones institucionales como el conjunto de saberes socialmente aceptados (no cuestionables), que de una u otra forma influyen sobre el saber práctico del profesor. Y de lo que se trata es de mirar hasta dónde aquellas nos permiten entender y describir sobre la complejidad de dicho saber. Este punto de vista nos lleva a considerar el conocimiento profesional de los profesores, no como el resultado de decisiones libres y conscientes de cada uno de los profesionales de la enseñanza, sino más bien como la consecuencia del proceso de adaptación y socialización de los profesores a la cultura tradicional escolar, a la estructura del contexto, al referente disciplinar del currículo, a los modelos de formación inicial y permanente y, en definitiva, a los estereotipos sociales dominantes sobre la educación y sobre la escuela (Porlán y otros, 1997).

En este estudio valoramos que las investigaciones realizadas desde enfoques puramente cognitivos o puramente antropológicos, no alcanzan a contemplar toda la complejidad que envuelve el estudio del conocimiento y la actividad profesional del profesor. Si bien es cierto que cada uno de estos enfoques ha arrojado información valiosa, consideramos que se requieren aun más esfuerzos por mirar el problema desde el todo y no centrarnos sólo en cada una de las partes. Creemos que cuando se analiza el conocimiento y la práctica del profesor centradas en un concepto matemático específico, se debe asumir que el objeto matemático que queremos que el profesor reconstruya y afine a partir de la reflexión sobre su práctica y en la práctica, debe considerar tanto la dimensión institucional como la dimensión personal. Es decir que se debe llevar a los profesores a reflexionar sobre cómo vive el objeto matemático en la institución matemática y en la institución curricular concreta, pero también cómo ese objeto matemático se convierte en objeto de enseñanza y aprendizaje al diseñar, poner en práctica y evaluar en un contexto escolar específico (Badillo y Azcárate, 2002)

En nuestra investigación consideramos tres tipos de restricciones institucionales, que son: el conocimiento disciplinar en sí, el diseño curricular de base y la formación docente. Sabemos que existen otras restricciones institucionales que afectan a la práctica del profesor (p.e. el contexto, etc.), pero por motivos de prioridad, extensión y delimitación de nuestra investigación, nos centraremos en las señaladas en la figura 1.

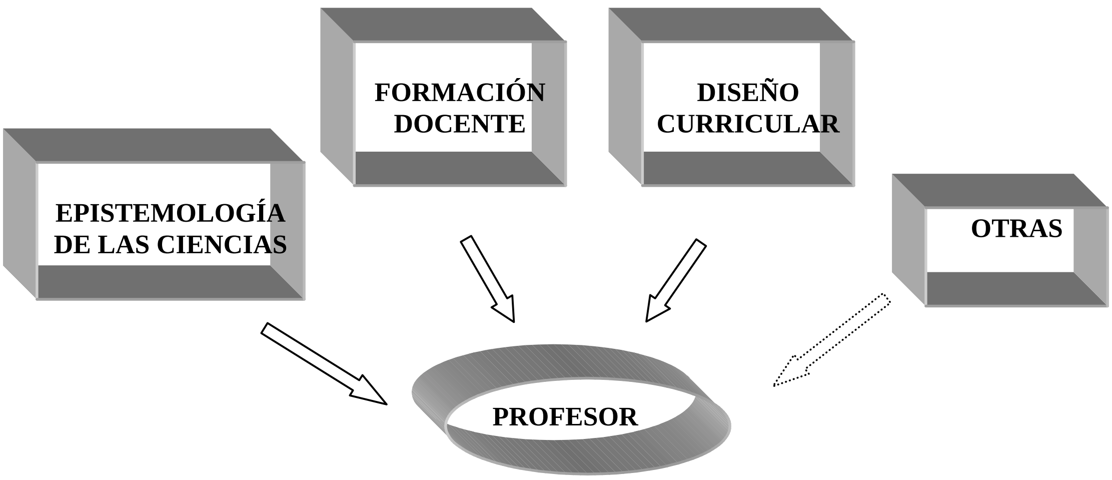


Figura 1. Esquema de las restricciones institucionales que consideramos en este estudio

A continuación nos centraremos en el análisis de cada una de las restricciones que hemos considerado en este estudio. Inicialmente, haremos una referencia a los aspectos históricos y epistemológicos claves del objeto matemático derivada que han orientado, en primer lugar, la construcción de la descomposición genética de este concepto; y en segundo lugar, la propuesta de los niveles de desarrollo del esquema de la derivada en las dos dimensiones definidas. Consideramos que estas dos reflexiones sobre la forma de entender el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje, adaptando el modelo teórico de APOE al estudio del conocimiento profesional del profesor, es uno de los grandes aportes de nuestro estudio.

Posteriormente, haremos una breve reflexión sobre los aspectos característicos de la formación inicial del profesorado, centrándonos en la revisión de los programas de cálculo diferencial y física mecánica de la Licenciatura en matemática y física de la universidad donde fueron formados los profesores. Finalmente, haremos una breve revisión del currículo de formación que orienta la práctica de los profesores, centrándonos en el análisis de la organización de los contenidos que proponen los libros de texto de matemática de 11º y física de 10º más usados por los profesores, como sustitutos de los programas curriculares oficiales.

4.1. Conocimiento matemático: Epistemología e Historia de la derivada

Nuestras lecturas sobre la génesis y evolución del cálculo diferencial nos han permitido rastrear en los orígenes del cálculo diferencial, que versa sobre incrementos y cantidades de cambio, los grandes problemas cruciales para la ciencia del siglo XVII que sirvieron para su desarrollo y posterior formalización. Éstos aparentemente diversos, pero en realidad, ambos íntimamente relacionados, eran los recientes problemas de la mecánica y los antiguos problemas de la geometría. En lo que respecta al primero, señalamos la urgencia por el estudio del movimiento, y en cuanto a los segundos, consisten en la determinación de tangentes a una curva dada. Todos estos problemas ya habían sido abordados por los antiguos. Sin embargo, el punto clave estuvo en la visión globalizadora de Newton y Leibnitz en relacionar estos dos tipos de problemas, ver que en esencia son uno solo, y proporcionar un método general para resolverlos (llamado diferenciación).

La relación encontrada por Newton y Leibnitz que les llevó a conectar los problemas de la mecánica con los de la geometría, fue posible gracias a la potente arma teórica que les brindaba el método de las coordenadas, pues les ofrecía la posibilidad de hacer una representación gráfica de la dependencia entre dos variables. Es decir que ya contaban con elementos para representar funciones y, con el poder de estas representaciones gráficas, les fue más fácil formular la relación antes mencionada entre los problemas de la geometría y la mecánica.

Por tanto, en este estudio, el papel de las representaciones, traducciones entre representaciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x), juegan un papel importante. De ahí que nos hayamos centrado en las lecturas sobre la evolución histórica del concepto de función y el papel de las traducciones entre representaciones de una función. Consideramos que cada una de las diferentes formas de representar la función: tabla, gráfica, expresión simbólica y descripción verbal, muy usadas actualmente en la enseñanza de este macro objeto en el nivel de secundaria y bachillerato (Janvier, 1987; Duval, 1999), tienen un origen histórico y epistemológico diferente. Por tanto, una reflexión sobre la historia de las diferentes técnicas que se han venido utilizando y perfeccionando, e incluso desapareciendo a lo largo de la historia, puede dar pistas para la construcción de las descomposiciones genéticas de los conceptos inmersos en la unidad didáctica de la derivada. En este sentido, los aportes de los estudios del Grup Zero (1982; 1984), Tall (1985; 1991), Azcárate (1990), Azcárate y otros (1996), Dubinsky y otros (1985), Font (2000) e Inglada y Font (2002), han sido un referente importante para el diseño de la descomposición genética del concepto de derivada que proponemos a continuación, centrada más que todo en el paso del macro objeto f ’(a) al f ’(x).

De estos trabajos queremos destacar los aspectos históricos y epistemológicos de los macro objetos f (x) y f ’(x) que han sido claves en las diferentes propuestas didácticas que hacen estos autores para el tratamiento e introducción de la derivada en el nivel de bachillerato, y que en este estudio hemos tenido en cuenta para la construcción inicial de la descomposición genética del concepto de derivada y para la definición de los niveles de comprensión del esquema de la derivada en los dos aspectos definidos: algebraico y gráfico.

1. La consideración de las diferentes metáforas históricas que han estructurado el concepto de gráfica de función (Font, 2000). Puesto que éstas permiten introducir al estudiante tanto en el análisis global como en el análisis local de la función.
    - Análisis global de la función: la curva como resultado de una sección. Es decir, la curva se entiende como un todo, y después se puede considerar formada por partes (puntos)
    - Análisis local o puntual de la función: la curva como la traza que deja un punto que se mueve sujeto a ciertas condiciones. Es decir, se considera un punto en movimiento que genera una curva.
    - Síntesis de los dos análisis: la curva como la traza que deja un punto que se mueve sobre la gráfica de la función.

2. Retomar los dos problemas históricos que dieron origen a la construcción del cálculo infinitesimal en la introducción de los macro objetos f ’(a) y f ’(x): el cálculo de la velocidad instantánea, considerada como una relación entre variables (razones de cambio propuestas por Newton) y la determinación de la tangente a una curva en un punto (Grup Zero, 1982; 1984; Azcárate, 1990 y Font, 2000). En todos estos trabajos subyace la afirmación de que la introducción del macro objeto f ’(a) a partir del objeto velocidad, además de la justificación que tiene desde la historia, tiene una fuerte componente contextual cercana a la realidad de los estudiantes que facilita la introducción de este concepto. Es decir que previamente ya han tenido contacto con el fenómeno de la velocidad a través de la experiencia diaria con velocímetros de los medios de transportes, divulgación de las marcas de velocidades de las principales carreteras, etc.

3. En estos estudios se han planteado diferentes itinerarios didácticos para introducir la derivada en el nivel de secundaria, en los que en general se contempla el tratamiento de la complejidad semiótica asociada a las notaciones utilizadas en las definiciones de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Sin embargo, en algunos casos, el énfasis es mayor (Dubinsky *et al*., 1985; Font, 2000; Inglada y Font, 2002)

    I. Itinerario 1. Siguiendo la génesis histórica del concepto: la derivada antes del límite.

        a) Definir primero el macro objeto f ’(a) y después el macro objeto f ’(x)

- Este itinerario no requiere necesariamente que los alumnos hayan estudiado los conceptos de límite y continuidad. De hecho se considera, que el estudio de la derivada sirve para introducir el concepto de límite de una función en un punto (Grup Zero, 1982; 1984; Azcárate 1990). Esta propuesta contempla la enseñanza conjunta de la tasa instantánea de variación y la pendiente de la recta tangente, puesto que implícitamente, se considera que el tratamiento conjunto de los aspectos gráficos, numéricos y algebraicos de estos dos conceptos facilita la superación de las dificultades que presenta cada uno de estos conceptos por separado (aunque hay estudios que creen conveniente la presentación por separados (Trigueros y Álvarez, 1995))

b) Definir primero el macro objeto f ’(x) y después el macro objeto f ’(a)

- Azcárate y otros (1996) proponen la siguiente secuencia: (1) un tratamiento previo con los conceptos del precálculo, utilizando diferentes representaciones de las funciones para visualizar estos conceptos, en especial de la tasa media de variación como pendiente de la recta secante y como velocidad media; (2) tener en cuenta las dificultades que entraña el proceso de límite, haciendo un tratamiento gráfico, numérico y algebraico que ayude a la comprensión del mismo; y (3), la utilización de calculadoras o instrumentos informáticos de cálculo y de representación gráfica.

II. Itinerario 2. El concepto de límite antes de la derivada.

a) Definir primero el macro objeto f ’(x) y posteriormente el macro objeto f ’(a).

- Tall (1985) propone partir de la idea intuitiva que tienen los estudiantes del concepto de pendiente a una curva y, a partir de ahí, propone un técnica para calcularla, que es la *función gradiente* o función pendiente de la función f para un incremento h, así: $pf_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$. Con este propósito sugiere una manera de calcular la pendiente a lo largo de los puntos de una gráfica de una función f como la pendiente de un coche imaginario que se moviera por la curva (ver figura 2). Entonces, si la longitud entre ejes (incremento de x) es h, se puede determinar la pendiente de la curva en el punto x, según el incremento h, mediante la fórmula $pf_h(x) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$, que es aproximadamente el valor del macro objeto f ’(x).

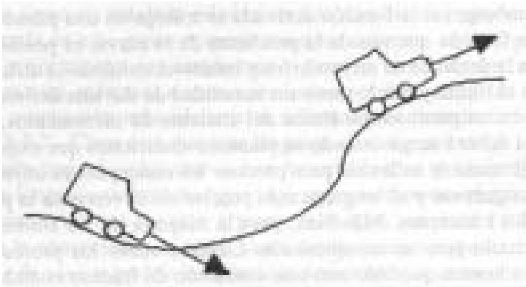


Figura 2.

b) Definir primero el macro objeto f ’(a) y posteriormente el macro objeto f ’(x):

- Font (2000) y Font e Inglada (2002), proponen la siguiente secuencia:

1) Definir la derivada en un punto como $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

2) Introducir la notación siguiente argumentando que con ella podremos calcular más fácilmente la indeterminación 0/0 que aparece al buscar la derivada de las funciones polinómicas en *x=a* ya que bastará simplificar y no será necesario utilizar la división por Ruffini para factorizar el numerador: $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$

3) Definir la función derivada como $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

4) Introducir previamente la notación incremental $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$, para llegar a representar la derivada como $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, ya que al utilizarla resulta más cómodo el manejo de la regla de la cadena o el cálculo de la derivada de la función inversa. Incluso es más fácil "justificarlas" con esta notación.

- Al igual que los autores anteriores, Dubinsky y otros (1985), proponen el uso de la misma cadena de notaciones, pero estableciendo una distinción notacional para el macro objeto f ’(a), que ayude a diferenciarlo del macro objeto f ’(x), pero a su vez que ayude en la comprensión de la relación entre estos dos macro objetos. Así, proponen el tratamiento coordinado de dos definiciones del macro objeto f ’(a), que ayude a una mejor comprensión del mismo:

1) “Definition of derivate at a point: If *f* is a function and a is a point in its domain, the derivate of *f* at a is $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$, provided this limit exists”.
2) “Definition 4.2. (Alternative definition of derivate at a point): If *f* is a function and a is a point in its domain, the derivate of *f* at a is $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, provided this limit exists”. (Dubinsky *et al.,* 1995, pp. 196-197).
3) Y paralelo a ello, proponen una notación especial para la derivada en un punto que favorezca la distinción y la relación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Es decir, que se sugiere el uso de una notación en la que se especifique que el macro objeto f ’(a) es un número que representa una imagen del macro objeto f ’(x) en el punto de abscisa *x* = *a.* $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=a} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

4. La justificación que tiene el uso de las diferentes notaciones (diferencial, incremental y funcional) en la definición de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), también obedece a los diferentes transformaciones que han tenido a lo largo de la historia de las ciencias. Igualmente, el uso de cada una de estas notaciones lleva implícita unas técnicas algebraicas y el uso de unos signos que es necesario tratar previamente porque son fundamentales para la compresión de estos macro objetos. Es así como el estudio del tratamiento que se ha dado históricamente a los diferenciales (*dx*) nos permite analizar la justificación que tiene en un momento determinado la utilización de la notación incremental como un medio para justificar posteriormente la regla de la cadena o la función inversa en términos de los diferenciales propuestos por Leibnitz, o por qué se utiliza la notación de diferenciales desde la visión propuesta por Cauchy justificada a partir de la definición de la derivada (Bos, 1984)

Si bien es cierto que los diferentes itinerarios descritos nos proporcionan un abanico de posibilidades para diseñar y proponer programas de formación docente que partan de una reflexión fina y rigurosa sobre la historia y epistemología de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), las restricciones institucionales que plantea el currículo de secundaria en el sistema educativo colombiano (ver sección 4.2.), nos lleva a optar por el itinerario 2 para construir la descomposición genética inicial del concepto de derivada, e intentaremos tener en cuenta las sugerencias que proponen los estudios centrados en el análisis de este itinerario.

Otro estudio histórico que hemos hecho, es el análisis de las diferentes interpretaciones que se han dado a lo largo del tiempo a las Paradojas de Zenón, más concretamente, la de *Aquiles y la tortuga*. Hemos considerado que esta paradoja constituye una situación potente para explorar, indirectamente, la aplicación de los conceptos del cálculo diferencial y los conceptos del precálculo en el contexto de la física (anexo 7). Los resultados de una investigación previa nos mostraron que algunos de los profesores de matemática en ejercicio pueden sostener ideas clásicas acerca del movimiento y manifestar en sus razonamientos espontáneos rasgos similares a los del pensamiento aristotélico, con una concepción potencial del infinito (Badillo, 1999). Estos resultados, no hicieron focalizar la atención en un tratamiento previo a la introducción del macro objeto f ’(a) de conceptos estructurantes como: infinito, límite, continuidad, diferentes tipos de discontinuidad, etc.

4.1.1. Descomposición genética de la derivada

Dentro de la teoría APOE el constructo de descomposición genética (DG) de un concepto matemático juega un papel importante, puesto que es el resultado del análisis teórico serio y riguroso del contenido matemático concreto a enseñar, que es uno de los pilares básicos del ciclo de investigación que proponen dentro de la teoría. Para la elaboración de la descomposición genética de un concepto matemático concreto sugieren que se han de tener en cuenta tres fuentes: la comprensión misma que tiene el investigador del concepto en cuestión (proveniente de su experiencia con el concepto como alumno y como profesor), la historia y epistemología del concepto, y los resultados de las investigaciones que se han hecho en el campo de la didáctica de la matemática con relación a dicho concepto.

Desde nuestro punto de vista, el constructo DG es el eje de la aplicación de la teoría APOE en estudios sobre la comprensión de conceptos matemáticos, porque permite en primer lugar, estructurar el concepto matemático, que es objeto de estudio, desde la disciplina matemática; en segundo lugar, es la base para el diseño de la instrucción. Es decir, orienta la organización del contenido a enseñar y el diseño de tareas y actividades que contribuyan a la construcción de las estructuras que se busca que los individuos construyan; y en tercer lugar, porque ofrece unas categorías conceptuales y analíticas para: (1) el diseño de instrumentos de recolección de información (evaluaciones, cuestionarios, entrevistas, etc.); (2) para el análisis de las construcciones mentales que construye el sujeto cuando se enfrenta a resolver problemas relacionados con el concepto en cuestión; y (3), para el análisis de los objetos matemáticos atendiendo a la problemática institucional en la que viven. Es decir, permite el análisis del concepto matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje, en el análisis de tareas, libros de texto, etc.

Consideramos que el constructo DG es importante y muy potente. Además, es el punto de partida para el diseño de unidades didácticas, pero es insuficiente para tratar la complejidad del diseño e implementación de éstas. Por ello, proponemos que la construcción de la DG de un concepto matemático cualquiera ha de estar acompañada por dos niveles de reflexión, uno *fino* y otro *grueso*[1]. El análisis *fino* requiere una inmersión en el contenido matemático tomando elementos de la propia disciplina científica y de la historia y epistemología del concepto en cuestión. El análisis, que hemos denominado *grueso*, debe proporcionar al profesor elementos teóricos y conceptuales bien construidos y funcionalmente potentes, que le permitan mejorar su propia formación y disponer de un marco de referencia didáctico adecuado para abordar la complejidad del aula. Los organizadores del currículo propuestos por Rico (1997) ofrecen a los investigadores y a los profesores un buen marco conceptual para la enseñanza de la matemática. Permiten generar espacios de reflexión que muestran la complejidad de los procesos de transmisión y construcción del conocimiento

[1] La necesidad de realizar un análisis grueso y un análisis fino es compartida por diferentes aproximaciones teóricas. Por ejemplo, en la teoría de las funciones semióticas se consideran también estos dos niveles (Contreras, Font, Luque y Ordoñez 2001); Por otro lado, en la fundamentación epistemológica del currículo se consideran dos niveles de análisis denominados macro y micro (Adúriz-Bravo, 2001).

matemático, y proporcionan criterios para abordar y manejar esta complejidad. Es decir, para el diseño y evaluación de unidades didácticas.

Igualmente, consideramos que el diseño de unidades didácticas de conceptos complejos, como por ejemplo, el concepto de derivada, requiere de la construcción de más de una descomposición genética que atienda a la complejidad de los diferentes objetos matemáticos necesarios para la comprensión del mismo. En efecto, la descomposición genética inicial que construimos se centra más en la introducción del macro objeto f ’(a), y en el paso de este macro objeto al macro objeto f ’(x). De momento dejamos de lado la reflexión sobre otros aspectos del concepto de derivada que requieren igualmente una atención; como por ejemplo: la regla de la cadena, determinación de máximos y mínimos, optimización de funciones, etc. En efecto, las investigaciones desarrolladas por el grupo RUMEC, han ido atendiendo puntualmente a la reflexión de diferentes aspectos relacionados con el concepto de derivada.

Estos elementos que hemos mencionados no son nuevos y creemos que desde hace ya algún tiempo lo contemplan otras teorías (Teoría de los esquemas conceptuales, Teoría antropológica, Teoría de las funciones semióticas, etc.). Consideramos que lo interesante de esta propuesta es el ciclo de investigación que sugieren donde el conocimiento que se produce en cada etapa es relativo y se construye cíclicamente a partir de la reflexión sobre cada una de las etapas que lo precede. Además, porque hay una intención de integrar en el diseño de la enseñanza de un concepto matemático, una reflexión fina y rigurosa sobre las componentes del conocimiento de contenido disciplinar y un análisis grueso del contenido a enseñar; es decir, un análisis didáctico del contenido. Elementos que consideramos claves en la formación del profesorado.

Asiala y otros (1997), proponen inicialmente, una descomposición genética del concepto de derivada como punto de partida para analizar la comprensión gráfica que tienen un grupo de estudiantes universitarios sobre el concepto de derivada en un punto, la cual se modifica a partir del análisis de la información que obtuvieron en este estudio. Esto muestra, una visión dinámica de la construcción del conocimiento, que se refleja en el carácter provisional del conocimiento que se produce, atendiendo a la realidad concreta de los individuos que se estudian.

A continuación presentamos la descomposición genética realizada por estos autores, que de hecho fue el punto de partida de la nuestra. Dado que en este estudio se centraban en estudiar sólo la comprensión gráfica de la derivada en un punto, las perspectivas acción, proceso y objeto les era suficiente; mientras que nosotros abordaremos el estudio del concepto de derivada como un esquema en que intervienen más objetos. Más concretamente la derivada en un punto y la función derivada, que requieren coordinarse y relacionarse para formar el esquema coherente de la derivada. En la próxima sección (4.1.2.) se hace una descripción detallada del esquema de la derivada, en ésta nos dedicaremos a presentar la descomposición genética del concepto de derivada que proponemos como categoría teórica y analítica para abordar el estudio del objeto de derivada que exhiben los profesores, tanto como objeto matemático como objeto de enseñanza y aprendizaje.

“**Revisión de la descomposición genética del concepto derivada:**

1. **Conocimiento prerrequisito**
   A. Representación gráfica de objetos matemáticos
      i. Representación gráfica de un punto
      ii. Representación gráfica de una línea incluyendo el concepto de pendiente
   B. Coordinación de representaciones de punto con una función
      i. Interpretación gráfica de (x, y), cuando y es dada por f (x)
      ii. Superar la necesidad de tener una fórmula para una función
2. **Caminos gráficos y analíticos hacia la derivada**

   1a. Gráfico: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante a través de los dos puntos junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos

   1b. Analítico: la acción de calcular la tasa media de variación a través de calcular el cociente incremental en el punto

   2a. Gráfico: interiorización de las acciones del punto 1a en un proceso único a medida que los dos puntos del gráfico se aproximan más y más

   2b. Analítico: interiorización de las acciones en el punto 1b en un proceso único a medida que la diferencia entre los intervalos de tiempo se hacen más y más pequeños, esto es a medida que la longitud del intervalo de tiempo se acerca más y más a cero

3a. Gráfico: encapsulación del proceso del punto 2a para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función

3b. Analítico: encapsulación del proceso del punto 2b para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra

4. Interiorización de los procesos de los puntos 2a y 2b en general para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en ese punto

3. Interpretación gráfica de la derivada

C. Interpretación gráfica de la derivada en un punto

i. Superar la necesidad de diferenciar una formula

ii. Coordinar con el punto A para ver f ’(a) como la pendiente de la recta tangente

iii. Coordinar varias interpretaciones de f ’(a)

D. Interpretación gráfica de la derivada como una función

i. Ver la derivada como la función que va de x a la tangente en (x, f(x))

ii. Identificar f ’ con la recta tangente en un punto

4. Uso del concepto derivada

E. Varias coordinaciones para obtener el gráfico de f

i. Interpretación gráfica de f (x) para un determinado x

ii. Interpretación de f ’ (x) para un determinado *x* como la pendiente

iii. Proceso de mover *x* a través de un intervalo

a. Monotonía de la función y signo de la derivada

b. Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita

c. Concavidad de la función y signo de la segunda derivada

iv. Dibujar un gráfico completo o representativo” (Asiala *et al.*, 1997; 426-427).

Como ya mencionamos en párrafos anteriores, dado que en el estudio de Asiala y otros (1997), se perseguía describir sólo la comprensión gráfica del objeto derivada en un punto, la descomposición genética no incluye al objeto función derivada, que nosotros sí tomamos en consideración. Igualmente, encontramos en las diferentes partes de la descomposición genética elementos que ellos no consideran y que a nosotros nos parecen relevantes a la hora de construir el esquema de la derivada.

Al igual que la DG propuesta por Asiala y otros (1997), la nuestra tiene cuatro apartados que hemos denominado: conocimientos prerrequisitos, contextos gráfico-analítico y algebraico-numérico hacia la función derivada, interpretación gráfica del macro objeto f ’(x) y aplicaciones del macro objeto f ’(x). A continuación presentamos la descomposición genética del concepto de derivada que construimos como referente para el análisis de los niveles de comprensión del concepto de derivada por parte de un individuo y, para el diseño y análisis de secuencias didácticas de este concepto. Con letra cursiva remarcamos los elementos nuevos que hemos incorporado a la descomposición genética propuesta por estos autores, partiendo de los aportes que nos proporcionan la Historia y Epistemología de este concepto, las investigaciones en Didáctica de la Matemática y los resultados de una investigación previa (Badillo, 1999).

I. Conocimientos prerrequisitos

1. Representación gráfica en sistema de coordenadas cartesianas de los objetos matemáticos
    1.1. *Reconocimiento de los ejes; del significado del origen; de las unidades; y de las escalas*
    1.2. Representación gráfica de los puntos
    1.3. Representación gráfica de una recta
2. Coordinación de representaciones de puntos con las de funciones
    2.1. Interpretación de (x, y), cuando y es dada por la ecuación de f (x)
    2.2. Interpretación de (x, y), cuando y es dada por la gráfica de f (x)
    2.3. Definición de las condiciones necesarias para que una relación sea función
    2.4. Interpretación gráfica de estas condiciones
    2.5. Superar la necesidad de tener una fórmula para interpretar toda la función
3. *Coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función*
    3.1. En un punto
        3.1.1. Discontinuidad evitable
        3.1.2. Discontinuidad no evitable
    3.2. En un intervalo
4. *Coordinación y traducción de diferentes modos de representación de función*
5. *Coordinación de representaciones del concepto de pendiente de una recta*
    5.1. La pendiente determina el grado de inclinación de la recta
    5.2. La pendiente es la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje x

5.3. La pendiente como el número (coeficiente) en la fórmula y = ax + b

5.4. La pendiente como la razón entre los incrementos de las variables

5.5. Traducción de registros (gráfico, tabla, fórmulas, verbal) en el cálculo de la pendiente de una recta

6. Coordinación de los conceptos pendiente y función en el análisis de la monotonía de funciones

6.1. Crecimiento y decrecimiento: puntos de singularidad, máximos y mínimos (relativos /absolutos)

6.2. Concavidad y convexidad: puntos de inflexión

6.3. Continuidad y discontinuidad

II. Contextos gráfico-analítico y algebraico-numérico hacia la función derivada

1a. **Gráfico-analítico**: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante, a través de los dos puntos, junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos

1b**. Algebraico-numérico**: la acción de calcular la tasa media de variación calculando entre el punto y otro punto "próximo"

2a**. Gráfico-analítico**: interiorización de las acciones del punto *1a*, en un proceso único, a medida que los dos puntos de la gráfica se aproximan más y más

*2b***. Algebraico-numérico***: interiorización de las acciones para calcular la tasa media de variación* $\left(m = \overline{V} = TMV = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$, cuando b→a*; en un proceso único, a medida que la diferencia entre los intervalos se hacen más y más pequeños, esto es a medida que la longitud del intervalo se acerca más y más a cero*

3a. **Gráfico-analítico**: encapsulación del proceso del punto *2a* para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes, y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función

3b. **Algebraico-numérico**: encapsulación del proceso del punto *2b,* de calcular las tasas medias de variación $\left(m = \overline{V} = TMV = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$, cuando b→a, para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra como el $\left(\underset{b \to a}{Lim} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right)$

4. *Coordinar las diferentes interpretaciones de la tasa instantánea de variación*

4.1. El valor de la pendiente de la recta tangente como el límite del cociente diferencial

4.2. La velocidad instantánea, el ejemplo más sencillo de la tasa instantánea de variación, como el límite de la velocidad media

4.3. Las razones de cambio de funciones que dependen del tiempo, como el límite del cociente de las tasas medias

4.4. Las razones de cambio de funciones que dependen de una magnitud cualquiera como límite del cociente de las tasas medias

5**.** Encapsulación de los procesos de los puntos *2a* y *2b,* en general, para producir la definición de la derivada de una función en un punto como el límite del cociente incremental en ese punto

6. Coordinación de los procesos de los puntos 2a y 2b en varias situaciones relacionadas con la derivada de una función en un punto presentadas en diferentes contextos

7. Interiorización de la acción de producir la derivada en un punto en el proceso de construir la función derivada f ’(x), la cual toma como entrada el punto x y produce en la salida el valor de f ’(x), que es el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, para cualquier x del dominio de la función

8. Encapsulación del proceso del punto 7 para producir la función derivada f ’(x) como un nuevo objeto complejo (que implica el proceso de síntesis del objeto derivada en un punto)

III. Interpretación gráfica del macro objeto f ’(x)

1. Interpretación gráfica de la derivada en un punto

1.1. Superar la necesidad de diferenciar una formula o expresión simbólica

1.2. Coordinar varias interpretaciones de f ’(a)

1.2.1. Como el límite del cociente diferencial en un punto dado

1.2.2. Como el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto dado

1.2.3. Como el valor de la velocidad instantánea en un instante dado

1.2.4. Como la razón de cambio entre magnitudes que dependen del tiempo en un instante dado

1.2.5. Como la razón de cambio entre dos magnitudes cualesquiera en un punto dado

2. Interpretación gráfica de la derivada como una función

2.1. Coordinar varias interpretaciones de la función derivada

2.1.1. La función derivada como la función límite del cociente incremental (tasa media de variación) de una función en todos los puntos del dominio.

2.1.2. La función derivada como una nueva función que hace corresponder a cada abscisa x del dominio de la función, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto (x, f (x))

2.1.3. La función derivada como la función límite de las razones de cambio entre magnitudes

2.2. Traducción entre representaciones del concepto función y función derivada y relación entre representaciones de los conceptos de función y función derivada (tabla, gráfica, descripción verbal, expresión simbólica) en el cálculo de la función derivada presentada en diferentes contextos.

IV. Aplicaciones del macro objeto f ’(x)

1. Coordinación de varios procesos para obtener la gráfica de f (x)

1.1. Interpretación gráfica de f (x) para un determinado *x* del dominio de f (x)

1.2. Interpretación de f ’(x) para un determinado *x* como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva

1.3. Proceso de mover *x* a través de un intervalo

1.3.1. Monotonía de la función y signo de la derivada primera

1.3.2. Pendiente infinita (tangente vertical) y derivada infinita

1.3.3. Concavidad de la función y signo de la segunda derivada

1.4. Dibujar una gráfica completa o representativa de f (x)

2. Generalización de la función derivada como la razón de cambio relacionadas

2.1. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de optimización (Geometría)

2.2. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de mecánica clásica (Física)

2.3. Aplicación en la interpretación y resolución de problemas de crecimiento y decrecimiento de magnitudes (Biología, economía, etc.).

Nos interesa remarcar que, en la elaboración de una unidad didáctica, no podríamos hablar de una sola descomposición genética que cubra toda la complejidad del concepto matemático, sino que se necesitaría la elaboración de varias descomposiciones genéticas que integren los diferentes aspectos del concepto matemático en cuestión. Igualmente, que la elaboración de una descomposición genética requiere de mucha riqueza teórica, tanto del concepto matemático como de las teorías de enseñanza y aprendizaje implícitas, puesto que pueden emerger fenómenos didácticos como el de la algebrización. La descomposición genética también orienta la elección de los problemas y de las actividades que el profesor diseña para que los estudiantes alcancen la construcción del concepto matemático. De igual forma, se convierte en una herramienta metacognitiva para el profesor sobre el proceso de enseñanza, ya que le proporciona categorías analíticas para mirar los logros de los estudiantes como resultado de la enseñanza y para cuestionar los procesos de transposición didáctica del concepto matemático.

4.1.2. Desarrollo del esquema de la derivada

En el marco de la teoría APOE se considera que la comprensión o nivel de competencia que tiene un individuo con relación a un concepto matemático se puede describir en términos de las siguientes construcciones mentales: acciones, procesos, y objetos, las cuales se encuentran organizadas en esquemas (Asiala *et al*., 1997). Las investigaciones realizadas por el grupo RUMEC, aplicadas a varios conceptos matemáticos, han utilizado los constructos acción, proceso y objeto para describir la comprensión que tiene un estudiante de un concepto matemático concreto. En estas investigaciones se ha dejado en segundo plano la complejidad de las conexiones con otros objetos matemáticos o esquemas. Estas investigaciones se corresponden con la primera etapa de trabajo del grupo RUMEC y no profundizan en el estudio de los conceptos matemáticos englobados en esquemas, puesto que no se preocupan por describir el esquema completo de un individuo asociado a un concepto matemático determinado. Es decir, no se estudia la totalidad de su conocimiento conectado consciente e inconscientemente a este concepto (Baker *et al*., 2000), que es el resultado de la coordinación con otros conceptos y esquemas.

El estudio de Asiala y otros (1997), nos muestra un ejemplo sobre la aplicación de las perspectivas acción, proceso y objeto para explorar la comprensión gráfica de estudiantes universitarios del cálculo de la función y la función derivada. Estos autores consideraron el objeto matemático "gráfica de una función" para describir las construcciones mentales que elaboran los estudiantes cuando aprenden sobre la interpretación gráfica de la derivada en un punto. Dado que no se propusieron estudiar la conexión o integración de este objeto con otros que forman el esquema de la derivada, encontraron que este marco de análisis fue útil y suficiente para describir las construcciones mentales que elaboran los estudiantes cuando aprenden la interpretación gráfica de la función y de su derivada.

En este mismo estudio los autores señalan que el concepto de derivada es un ejemplo de una situación en la cual el estudiante podría alternar entre la interpretación visual (*pendiente de la recta tangente*) y la interpretación analítica (*razón de cambio*) en la construcción de su comprensión (Asiala *et al*., 1997). En esta investigación encontramos dos elementos interesantes a destacar: en primer lugar, la presencia de dos objetos que se han de conectar para estructurar el esquema del concepto de derivada, el objeto pendiente de la recta tangente a la gráfica de la curva y el objeto razón de cambio[2]; y en segundo lugar, la presencia de argumentos analíticos y visuales en la comprensión del concepto de derivada, lo cual nos hace presuponer que en este estudio ya se intuye la necesidad de coordinar dos esquemas previos para una buena comprensión del concepto de derivada.

En esta investigación compartimos el punto de vista de las últimas investigaciones que, en el marco de la teoría APOE, han reportado que si sólo se consideran los constructos acción, proceso y objeto, y se prescinde de los esquemas que los engloban, tenemos un

[2] En esta memoria, para facilitar la lectura, cuando nos referimos al objeto razón de cambio se entiende el objeto límite de la razón de cambio como la derivada en un punto; y cuando hablamos del objeto razones de cambio se entiende el objeto función límite de las razones de cambio como la función derivada.

punto de vista insuficiente para describir la comprensión que tienen los estudiantes de conceptos matemáticos complejos como, por ejemplo, la comprensión gráfica de la derivada (Baker *et al*., 2000), la comprensión de la regla de la cadena (Clark *et al*., 1997), la comprensión de las sucesiones (McDonald *et al*.,2001); y la comprensión del límite de funciones (Cottrill *et al*., 1996). Consideramos que las perspectivas acción, proceso y objeto permiten describir sólo parcialmente la comprensión que tiene un sujeto de un concepto matemático, puesto que no se tiene en cuenta la coordinación con otros objetos matemáticos y los esquemas que los engloban. Concretamente, el concepto de derivada, que es el que nos interesa, en nuestra opinión es un concepto matemático de una gran complejidad que, en términos de la teoría APOE, hay que considerar como un esquema, y postulamos que para describir la comprensión que tiene un individuo del mismo, se requiere tener en cuenta, por un lado, la coordinación de varios objetos que se conecten consciente o inconscientemente conformando objetos más complejos; y a su vez, estos nuevos objetos se coordinan para conformar el esquema de la derivada.

En investigaciones recientes lideradas por el grupo RUMEC, se muestra una evolución de la teoría al intentar describir la comprensión que tienen los sujetos con relación a un concepto matemático, considerándolo como un esquema, y para ello, han incorporado a la teoría APOE la *triada* propuesta por Piaget y García (1982/89, 1996) para analizar el desarrollo de un esquema, proponiendo tres niveles de comprensión del esquema de un concepto matemático: *intra*, i*nter* y *trans* (Asiala *et al*., 1997). Las investigaciones de Clark y otros (1997); Baker y otros (2000), McDonald y otros (2001); y Cottrill y otros (1996), nos muestran la preocupación del grupo RUMEC por el estudio de la comprensión de conceptos matemáticos considerándolos como esquemas. En estas investigaciones incorporan el uso de la *triada* en la descripción de la comprensión que tienen estudiantes universitarios de conceptos matemáticos, más concretamente, los estudios de los esquemas de la regla de la cadena, de la comprensión gráfica de la derivada, de sucesiones y de límite de funciones, respectivamente. Estas investigaciones han reportado que el tratamiento del desarrollo del esquema en términos de la *triada* puede explicar por qué los individuos tienen dificultad con las diferentes partes de un concepto matemático, y explicar el hecho de que los individuos pueden tener alguna dificultad con el concepto matemático cuando se enfrentan a problemas enunciados en diferentes contextos.

Las limitaciones anteriormente descritas, las hemos constatado en nuestro primer intento de describir el grado de comprensión que tienen los profesores de matemática en ejercicio sobre el concepto de derivada a partir de las perspectivas acción, proceso y objeto que contempla la teoría APOE, ya que hemos detectado que los profesores muestran diferencias en el grado de comprensión del concepto de derivada dependiendo del contexto en el que se enuncia el problema y de los objetos matemáticos que conforman el concepto de derivada que intervienen en el mismo. Igualmente hemos identificado, a partir de los problemas que les propusimos resolver, la presencia de dos esquemas previos que se requieren coordinar: uno gráfico y uno algebraico. Esta nueva visión nos ha llevado al tratamiento del concepto de derivada como un esquema, lo cual implica la incorporación de la *triada* de la teoría APOE para el análisis y descripción de la comprensión que tienen los profesores que participaron en esta investigación de este concepto cuando se enfrentan a la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios.

La opción de centrarnos en la descripción de los niveles de comprensión del esquema de la derivada, pasa por postular explícitamente la siguiente hipótesis: el esquema del concepto de derivada está conformado por la coordinación de varios objetos matemáticos. Concretamente en este estudio nos centraremos en describir el esquema de la derivada como la conexión interna de dos objetos complejos[3] o macro objetos, como son: el macro objeto derivada en un punto f ’(a) y el macro objeto función derivada f ’(x). Estos dos macro objetos, a su vez, son el resultado de la coordinación, consciente o inconsciente, de tres objetos: pendiente de la recta (O_1), límite de las tasas medias de variación (O_2) y razón de cambio (O_3).

La elección de considerar el esquema de la derivada conformado por los dos macro objetos f ’(a) y f ’(x) los cuales a su vez son el resultado de la conexión interna de tres objetos previos (O_1, O_2 y O_3), la hicimos basándonos en la información que nos proporcionan tres fuentes. En primer lugar, el análisis teórico inicial del concepto de derivada que nos lleva a la construcción de la descomposición genética del concepto de derivada, la cual toma en cuenta, entre otras cosas, la historia y la epistemología del mismo concepto. En segundo lugar, la información que arrojan las diferentes

[3] Los consideramos como objetos complejos, porque podrían ser tratados como esquemas separados que engloban a su vez la coordinación de los objetos: pendiente de la recta, razón de cambio y límite de las tasas medias de variación.

investigaciones en didáctica de la matemática que se han centrado en el estudio tanto del aprendizaje como la enseñanza del concepto de derivada, las cuales han revelado la complejidad y riqueza que tiene el concepto y las dificultades que tiene la comprensión del mismo cuando un sujeto se enfrenta a la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios (Thompson *et al*., 1994; Ferrini-Mundy y Graham, 1994; Slavit, 1997; Amit y Vinner, 1991; Tall, 1991; Azcárate, 1990; Font, 2000; entre otras). Y finalmente, el análisis preliminar de las respuestas que han dado los profesores que participan en este estudio a los dos instrumentos que diseñamos para analizar su comprensión sobre el concepto de derivada (cuestionario indirecto y viñetas), que han evidenciado diferentes grados de comprensión de los objetos definidos dependiendo del contexto en el que se enuncia el problema.

La coordinación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) cuando se enfrentan a la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos, nos permite describir el nivel de comprensión que tienen los sujetos del esquema de la derivada. Los resultados del análisis previo de las respuestas de los profesores a los problemas propuestos, nos permite definir dos dimensiones del esquema del concepto de derivada, una dimensión gráfica y una dimensión algebraica; por tanto, para llegar a tener un esquema coherente del concepto de derivada se requiere coordinar dos esquemas previos, uno algebraico y otro gráfico, los cuales son el resultado de la coordinación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), que requieren a su vez de la coordinación interna de tres objetos: O_1, O_2 y O_3. En el esquema de la figura 3, se esquematizan los diferentes objetos que se han de coordinar para organizar cada uno de los esquemas previos del concepto de derivada, y se esboza la coordinación de estos dos esquemas para formar el esquema coherente del concepto de derivada.

Más detalladamente, con la figura 3, se pretende ilustrar, por una parte, los procesos cognitivos implicados en la coordinación interna de los tres objetos que conforman el macro objeto f ’(a). Cada uno de estos objetos (O_1, O_2 y O_3), a su vez, engloban acciones, procesos y otros objetos que se encapsulan para formar el macro objeto f ’(a); y el proceso reversible de desencapsulación del macro objeto f ’(a), nos llevará a cada una de estas acciones, procesos y objetos que lo constituyen. Por tanto, la riqueza en la comprensión del macro objeto f ’(a) dependerá de la coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3. En los ítem del *1* al *5* de la descomposición genética del concepto de derivada que hemos realizado, presentada en la sección anterior, se describen más detalladamente los procesos cognitivos que se requieren para llegar a construir el macro objeto f ’(a), representados en la figura 3; los cuales involucran los objetos O_1, O_2 y O_3 en las dos dimensiones del esquema que hemos definido: algebraica y gráfica.

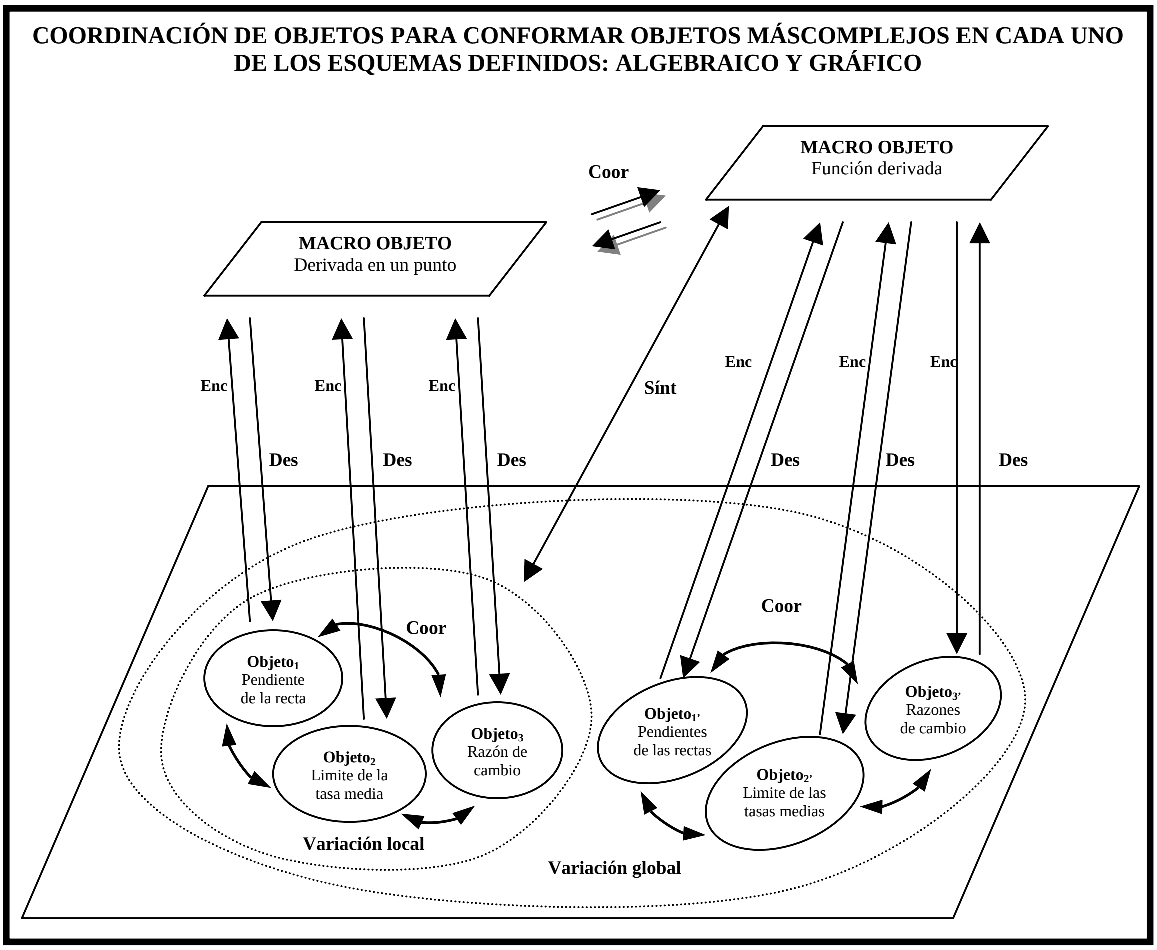


Figura 3. Esquema coherente del concepto función derivada: requiere inicialmente la conexión de dos macro objetos como resultado de la conexión de tres objetos en cada uno de los esquemas previos, y posteriormente la coordinación de los dos esquemas.

Por otra parte, ya definidos los procesos cognitivos que intervienen en la construcción del macro objeto f ’(a), el esquema de la figura 3, muestra cómo se llega a la construcción del macro objeto f ’(x); si bien es cierto que estos macro objetos se encuentran fuertemente relacionados, comprender el macro objeto f ’(a) no implica tener construido el macro objeto f ’(x). Así visto, la comprensión del macro objeto f ’(x) implica una comprensión simultánea o previa del macro objeto f ’(a). Una vez se puede coordinar y generalizar el análisis de la variación de la función en cada uno de los puntos a todo el dominio de la función, se llega a un proceso de síntesis de las transformaciones, que implica la tematización del macro objeto f ’(a) en el macro objeto f ’(x). Este proceso de síntesis del macro objeto f ’(a) en el macro objeto f ’(x) implica la síntesis de cada uno de los objetos que organiza (O_1, O_2 y O_3) en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3, respectivamente. Es decir, que la comprensión del macro objeto f ’(x) también requiere de la coordinación de tres objetos más complejos: el objeto función de las pendientes de las rectas tangentes (O'_1), el objeto función límite de las tasas medias de variación (O'_2) y el objeto función de las razones de cambio (O'_3). En los ítems del *6* al *8* de la descomposición genética se describen detalladamente los procesos cognitivos implicados en la construcción del macro objeto f ’(x), que también se encuentran representados en la figura 3.

Finalmente, la figura 3, muestra que para una buena construcción del esquema de la derivada se requiere de la coordinación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Es decir, que se requiere tanto la comprensión local de la variación de la función (punto a punto) como la variación global de la función (coordinación en cada punto, en cada intervalo, o bien en todo el dominio de la función) teniendo en cuenta la complejidad de los objetos que organizan y de los procesos cognitivos que intervienen.

Teniendo en cuenta todo lo anteriormente expuesto, para describir el grado de comprensión del esquema de derivada hemos optado por utilizar la triada *intra*, i*nter* y *trans* dentro del marco que nos ofrece la teoría APOE. Partiendo de la descomposición genética inicial que hemos construido del concepto de derivada (ver sección 4.1.2.1) y de los resultados del análisis preliminar de las repuestas de los profesores, hemos concluido que la comprensión del concepto de derivada implica la coordinación de dos esquemas, uno algebraico y otro gráfico, cada uno de los cuales lleva implícito los niveles de comprensión de los objetos que organiza, y que se conectan, consciente e inconscientemente, en la resolución de problemas para conformar cada uno de los esquemas que estamos considerando (ver figura 4).

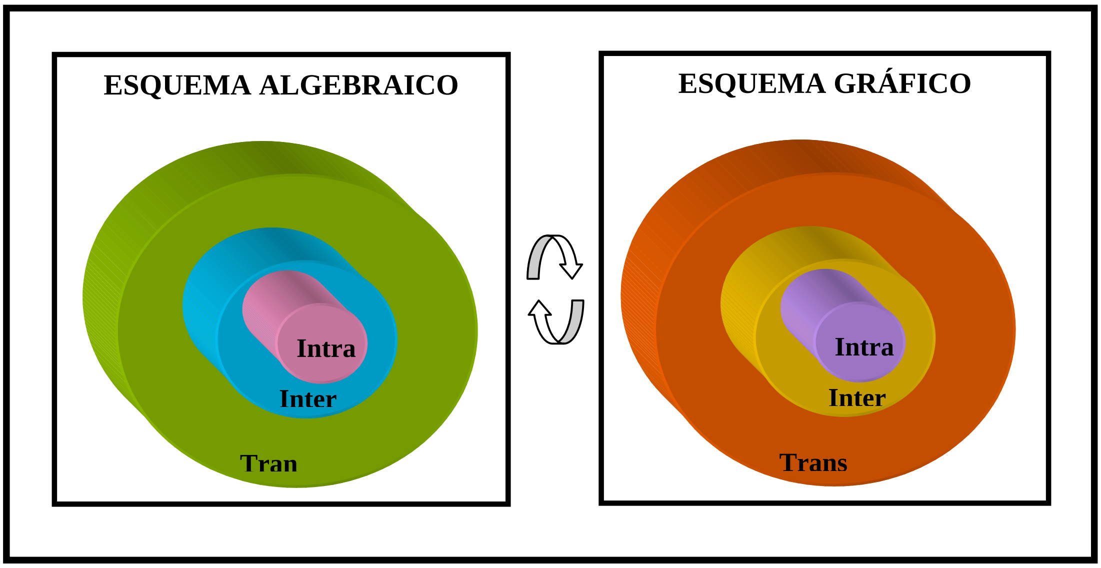


Figura 4. Niveles de comprensión del esquema del concepto de derivada

i. Desarrollo del esquema algebraico de la derivada

El esquema algebraico desarrolla dos aspectos que consideramos importantes de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en los que hemos focalizado el estudio del esquema, como resultado de la coordinación de los tres objetos previos anteriormente descritos (O_1, O_2 y O_3). En primer lugar, la aplicación de las técnicas de derivación directa o indirecta; y en segundo lugar, la justificación del uso de las mismas en la resolución de problemas enunciados en diferentes contextos. La *triada* se aplica a este esquema particular de la siguiente manera, y lo resumimos en la tabla 1.

Nivel intra del esquema algebraico: en este nivel no existe una coordinación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), lo cual se detecta en las aplicaciones concretas en las que hay que utilizar el objeto razón de cambio o bien el objeto pendiente de la recta tangente. Por tanto, no hay una clara coordinación entre los objetos razón de cambio, pendiente de la recta tangente y límite de las tasas medias de variación, entendidos tanto como números y como funciones. Dado que estos tres objetos no están coordinados no han llegado a construir el macro objeto f ’(x) como síntesis de estos tres objetos, lo cual lleva a cometer errores, como por ejemplo: confundir la f ’(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto fijo.

NIVEL INTRA	NIVEL INTER	NIVEL TRANS
• No existe una clara coordinación entre los objetos f '(a) y f '(x),lo cual se detecta en las aplicaciones concretas (cuando utilizan el objeto razón de cambio o bien el objeto pendiente de la recta tangente) • Se necesita tener o construir la expresión simbólica de la función para obtener el valor de la derivada en un punto: ES f (x) ⇒ ES f '(x) • Se tiene una perspectiva proceso de la diferenciación de funciones, lo cual implica que para obtener la expresión simbólica de f '(x) a partir de f (x) se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), pero sin justificación alguna de las mismas, y luego para calcular f '(a) se calcula f '(x) en x = a • No existe una coordinación de los objetos: razón de cambio, pendiente de la recta tangente y límite de las tasas medias de variación (O_1, O_2 y O_3) • Dado que los objetos O_1, O_2 y O_3 no están coordinados no han llegado a construir el objeto f '(x) como síntesis de estos tres objetos, lo cual lleva a cometer errores, como por ejemplo: confundir la f '(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto • El objeto razón de cambio sólo se sabe aplicar en situaciones de la cinemática para resolver la velocidad instantánea [$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$] • En determinados problemas en los que es necesario calcular el límite de las razones de cambio se aplica correctamente tanto las reglas de derivación como la definición de la función derivada en términos de límite. Esto lleva a considerar la posibilidad de que hay una coordinación entre estos dos objetos, pero cuando se les pregunta sobre ésta relación dan respuestas que muestran que no son conscientes de ella o que no la tienen elaboradas	• Dependiendo del contexto de la situación relacionan los objetos f '(a) y f '(x), como elemento y clase • La función derivada se entiende como la función que asocia, a cada valor *x* del dominio de la función, el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto. La pendiente de la recta tangente que es entendida básicamente como el coeficiente de la *x* en la ecuación de la recta tangente (coeficiente angular) • Dependiendo del contexto de la situación puede darse una coordinación entre los objetos: pendiente de la recta tangente, razón de cambio y límite de las tasas medias de variación. Pero, en otros contextos esta relación no se da • El objeto razón de cambio ahora se puede aplicar a situaciones donde la magnitud que depende del tiempo no es sólo el espacio [$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$] • Se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), justificando el uso de las mismas, y aparecen algunas técnicas de aproximación (función *pendiente*), mostrando una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones. • En algunos contextos para calcular el límite de las razones de cambio aplican correctamente tanto reglas de derivación como la definición de función derivada en términos de límite, mostrando una coordinación entre estos dos objetos, pero en determinados casos puede no darse esa coordinación	• El objeto f '(x), según la situación se puede entender como una clase de objetos los cuales son la derivada de la función en cada punto del dominio, o bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, p. e.: la segunda derivada • La expresión simbólica de objetos f '(x) es el modelo matemático que les permite asociar, a cada punto del dominio, el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto; y obtener el límite de las razones de cambio y el límite de las tasas medias de variación • Independientemente del contexto de la situación se coordinan los tres objetos: pendiente de la recta tangente, límite de las razones de cambio y límite de las tasas medias de variación • El objeto razón de cambio se puede aplicar ahora a situaciones donde se puede considerar las variaciones de dos magnitudes cualesquiera, sin necesidad de limitarse a variaciones donde la variable independiente sea el tiempo [$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$; $\lim_{\Delta mag' \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'}$] • Se hacen traducciones entre diferentes representaciones de funciones • Se coordinan algunas representaciones de la función y la función derivada y se hacen algunas traducciones entre diferentes representaciones de la función derivada • Se manejan y coordinan justificadamente todas las técnicas directas e indirectas de derivación: utilizando límites, reglas de derivación, ecuaciones diferenciales, y aproximación gráfica y numérica

Tabla 1. Niveles de comprensión del *esquema algebraico* de la derivada

El objeto razón de cambio sólo se aplica en situaciones de la cinemática para resolver la velocidad instantánea [$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$]. En determinados problemas, para calcular el límite de las razones de cambio, aplican correctamente tanto las reglas de derivación como la definición en términos de límite, lo cual parece suponer que hay una coordinación entre estos dos objetos, pero cuando se pregunta sobre esta relación parece que no se es consciente de ella.

Para calcular el valor de f ’(a), se necesita tener o construir la expresión simbólica de la función: ES f (x)⇨ES f ’(x)↻. Para obtener la expresión simbólica de f ’(x) a partir de f (x) se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), pero sin justificación alguna de las mismas, y luego para calcular f ’(a) se calcula f ’(x) en $x=a$, mostrando una perspectiva proceso de la diferenciación de funciones.

Nivel inter del esquema algebraico: en este nivel los sujetos, dependiendo del contexto del problema, relacionan los macro objetos f ’(a) y f ’(x), como elemento y clase respectivamente. Por tanto, puede darse una coordinación entre los objetos O_1, O_2 y O_3; donde el objeto razón de cambio se aplica ahora a situaciones donde la magnitud que depende del tiempo no es sólo el espacio [$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}; \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$]. Sin embargo, a diferencia del nivel anterior, en la mayoría de contextos para calcular el límite de las razones de cambio aplican correctamente las reglas de derivación y la definición en términos de límite, mostrando una coordinación entre estos dos objetos. Sólo en contextos muy específicos puede no darse esa coordinación.

La función derivada se entiende como la función que asocia, a cada valor x del dominio de la función el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto, entendiendo la pendiente de la recta tangente como el coeficiente de la x en la ecuación de la recta tangente (coeficiente angular). Para resolver problemas de pendientes se aplican correctamente las técnicas de derivación directa (definición formal del concepto en términos del límite) y de derivación indirecta (reglas de derivación), justificando el uso de las mismas; aparecen algunas técnicas de aproximación (función *pendiente*), mostrando una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones.

Nivel trans del esquema algebraico: en este nivel los sujetos, independientemente del contexto del problema, coordinan los tres objetos O_1, O_2 y O_3; donde el objeto razón de cambio se aplica a situaciones en las que se puede considerar las variaciones de dos magnitudes cualesquiera, sin necesidad de limitarse a variaciones donde la variable independiente sea el tiempo [$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$; $\lim_{\Delta mag' \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'}$].

El macro objeto función derivada, según la situación, se puede entender como una clase de objetos que son la derivada de la función en cada punto del dominio, o bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, p. e.: la segunda derivada. La expresión simbólica de la función derivada es el modelo matemático de la función que nos permite asociar a cada punto del dominio el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto y obtener el límite de las razones de cambio y el límite de las tasas medias de variación.

Además, en este nivel, los sujetos pueden hacer traducciones entre diferentes representaciones de funciones, coordinar algunas de las representaciones de la función y la función derivada y hacer algunas traducciones entre diferentes representaciones de la función derivada. Igualmente, manejan y comprenden todas las técnicas directas e indirectas de derivación: utilizando límites, reglas de derivación, ecuaciones diferenciales, y aproximación gráfica y numérica, y hay una clara justificación de su uso en la resolución de problemas enunciados en diferentes contextos.

ii. Desarrollo del esquema gráfico de la derivada

El esquema gráfico desarrolla dos aspectos que consideramos importantes de los dos macro objetos f ’(a) y f ’(x) en los que hemos focalizado el estudio del esquema. En primer lugar, la interpretación de las gráficas de f (x) y f ’(x) en términos de las condiciones analíticas (incluye los criterios de la primera y segunda derivada, y la continuidad de la función). En segundo lugar, la comprensión del análisis de la monotonía de la función punto a punto o todos los puntos (de un intervalo o de todo el dominio). La *triada* se aplica a este esquema particular de la siguiente manera, y que resumimos en la tabla 2.

NIVEL INTRA	NIVEL INTER	NIVEL TRANS
• Se tiene una única interpretación de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva, como el límite de las rectas secantes • Se interpreta gráficamente $f'(x)$ como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, y la gráfica de $f'(x)$ se tiende a confundir con la gráfica de esta recta tangente a la gráfica de la función en un punto • Los objetos O_1, O_2 y O_3 son analizados aisladamente en términos de las condiciones analíticas. Más concretamente se puede utilizar la inclinación de la recta tangente para determinar el signo de la derivada de la función en algunos puntos concretos (intuitivamente se aplica el criterio de la primera derivada), pero no se generaliza esta técnica para hacer la representación gráfica de $f'(x)$ • Para obtener la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función se requiere hacer las siguientes traducciones y relaciones: $G\,f(x) \rightarrow ES\,f(x) \Rightarrow ES\,f'(x) \rightarrow G\,f'(x)$ • Dado que no hay una coordinación entre los objetos O_1, O_2 y O_3, se tiene dificultad para resolver problemas que involucran el objeto razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. • La interpretación de la derivada como velocidad instantánea le permite saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo lo puede hacer en un punto o varios puntos y no en infinitos puntos (sean intervalos o bien todo el dominio • En situaciones que involucran razones de cambio se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea	• Se tiene dos, o más, interpretaciones de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva: como el límite de las rectas secantes y como la recta más próxima a la gráfica de la función (curva) en el entorno del punto • Se coordinan el objeto de pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto límite de las razones de cambio en un punto, estas últimas aplicadas ahora a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo. • Se maneja con propiedad el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función expresada gráficamente, y por tanto, pueden hacer la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de $f(x)$ • Se comienza a distinguir los objetos $f'(a)$ de $f'(x)$, pero dependiendo del contexto de la situación aún se tiene dificultad para diferenciarlos • De manera incipiente y especialmente en los puntos de inflexión se utiliza gráficamente el criterio de la segunda derivada coordinadamente con el criterio de la primera derivada, pero no pueden justificar gráficamente que si $f''(x)>0$ en un intervalo del dominio de la función, entonces la función es cóncava hacia arriba en dicho intervalo • Pueden obtener la gráfica de $f'(x)$ a partir de la gráfica de la función ($G\,f(x) \Rightarrow G\,f'(x)$), sin tener que hacer las siguientes traducciones y relaciones: $G\,f(x) \rightarrow ES\,f(x) \Rightarrow ES\,f'(x) \rightarrow G\,f'(x)$ • Se diferencia la variación media de la variación instantánea, en problemas representados en diferentes contextos	• Se coordina los objetos O_1, O_2 y O_3. Por tanto, se puede entender la pendiente de la recta tangente como: 1. La inclinación de la recta tangente 2. Límite de las pendientes de las rectas secantes; 3. Cuando la situación se relaciona con la variación de dos magnitudes cualesquiera, representadas gráficamente, pueden entender que la pendiente de la recta tangente es el límite de las razones de cambio • El objeto razón de cambio es aplicado ahora a la variación de dos magnitudes cualesquiera. • Se agrupa en una nueva función todas las derivadas en cada punto, como el valor de las pendientes de la recta tangente a la gráfica de la función en cada punto del dominio, como el límite de las tasas medias de variación y como el límite de las razones de cambio en cada punto del dominio • Se maneja con propiedad los criterios de la primera y la segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente. Lo cual le permite hacer las siguientes relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada: $G\,f(x) \Rightarrow G\,f'(x)$; $G\,f'(x) \Rightarrow G\,f(x)$; $DV\,f'(x) \Rightarrow G\,f(x)$; $DV\,f(x) \Rightarrow G\,f'(x)$ • Se discrimina entra aquellas relaciones y propiedades que están incluidas y aquellas que no están incluidas en la coordinación de los tres objetos, demostrando una *coherencia* en el esquema

Tabla 2. Niveles de comprensión del *esquema gráfico* de la derivada

Nivel intra del esquema gráfico: en este nivel los objetos, pendiente de la recta tangente, límite de las tasas medias de variación y razón de cambio, son analizados aisladamente por los sujetos en términos de las condiciones analíticas antes mencionadas (aplican intuitivamente el criterio de la primera derivada). Es decir, que pueden utilizar la inclinación de la recta tangente para determinar el signo de la derivada de la función en algunos puntos concretos, pero no pueden generalizar esta técnica para hacer la representación gráfica de la función derivada.

Encontramos además que se tiene una única interpretación de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva: como el límite de las rectas secantes y se puede cometer el error de interpretar gráficamente la función derivada como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto fijo. Incluso en algunos casos la gráfica de la función derivada se tiende a confundir con la gráfica de esta recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo (). Para obtener la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función se requiere hacer las siguientes traducciones y relaciones: G f (x) $\rightarrow$ES f (x) $\Rightarrow$ ES f ’(x) $\rightarrow$G f ’(x).

Puesto que no hay una coordinación de los tres objetos O_1, O_2 y O_3, se tiene dificultad para resolver situaciones que involucran el límite de la razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. El objeto razón de cambio se reduce al manejo de la velocidad instantánea. Esta interpretación de la derivada como velocidad instantánea permite a estos sujetos saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo pueden hacerlo en un punto o varios puntos y no en infinitos puntos (sean intervalos o bien en todo el dominio). Y en algunos casos, en problemas que involucran razones de cambio se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea.

Nivel inter del esquema gráfico: en este nivel los sujetos pueden coordinar gráficamente dos de los objetos: el objeto de pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto razón de cambio en un punto; estas últimas aplicadas ahora a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo, llegando a diferenciar con claridad la variación media de la variación instantánea, en diferentes contextos.

Se tienen dos, o más, interpretaciones de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de una curva: como el límite de las rectas secantes y como la recta más próxima a la gráfica de la función (curva) en el entorno del punto. Y se maneja con propiedad el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función expresada gráficamente, y por tanto, se puede hacer la gráfica de f ’(x) a partir de la gráfica de la función (G f (x)⇨G f ’(x)), sin tener que hacer las siguientes traducciones y relaciones entre representaciones de la función y la función derivada: G f (x)→ES f (x)⇨ES f ’(x)→G f ’(x).

En este nivel, los sujetos comienzan a distinguir el macro objeto f ’(a) del macro objeto f ’(x), pero, dependiendo del contexto de la situación, aún tienen dificultad para diferenciarlos en algún caso. Además, de manera incipiente y especialmente en los puntos de inflexión, utilizan gráficamente el criterio de la segunda derivada coordinadamente con el criterio de la primera derivada, pero no pueden justificar gráficamente que si f’’(x)>0 en un intervalo del dominio de la función, entonces la función es cóncava hacia las *y* positiva en dicho intervalo.

Nivel trans del esquema gráfico: en este nivel los sujetos coordinan los tres objetos; el objeto de pendiente de la recta tangente a la gráfica en un punto con el objeto límite de las tasas medias de variación y con el objeto razón de cambio en un punto, estas últimas aplicadas ahora a la variación de dos magnitudes cualesquiera. Por tanto, se puede entender la pendiente de la recta tangente como: (1) la inclinación de la recta tangente; (2) el límite de las pendientes de las rectas secantes; y (3), cuando la situación se relaciona con la variación de dos magnitudes cualesquiera, representadas gráficamente, puede entender que la pendiente de la recta tangente es el límite de las razones de cambio.

Además, se agrupan en una nueva función todas las derivadas en cada punto, como el valor de las pendientes de la recta tangente a la gráfica de la función en cada punto del dominio, como el límite de las tasas medias de variación y como el límite de las razones de cambio en cada punto del dominio, manejando con propiedad los criterios de la primera y la segunda derivada para describir tanto la variación local como la variación global de la función representada gráficamente. Lo cual permite hacer las siguientes relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada: G f (x)⇨ G f ’(x); G f ’(x)⇨G f (x); DV f ’(x)⇨G f (x); DV f (x)⇨ G f ’(x)

Finalmente, un aspecto significativo en este nivel es que los sujetos discriminan entre aquellas relaciones que están incluidas en la coordinación de los tres objetos (O_1, O_2 y O_3) que conforman los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y aquellas que no lo están, demostrando una *coherencia* en el esquema.

iii. El esquema general de la derivada y sus dos dimensiones

A continuación describiremos coordinadamente el nivel algebraico y el nivel gráfico de la doble triada en un esquema conjunto. En total obtuvimos nueve categorías teóricas y analíticas para describir los niveles de comprensión del concepto de derivada que exhiben los sujetos. Para cada una de estas categorías hemos tenido en cuenta los niveles definidos para cada una de las dimensiones del esquema. La síntesis de los niveles de los esquemas algebraico y gráfico definidos en cada categoría de la doble triada del esquema de la derivada incluye los aspectos más relevantes de cada nivel, para evitar ser repetitivos.

Creemos conveniente destacar que, inicialmente, la propuesta que estamos presentando de los niveles de la doble triada es de carácter provisional, al ser el primer acercamiento al problema, y consideramos que ha de ser revisada posteriormente del análisis de las respuestas de los profesores a los instrumentos aplicados, para ver hasta qué punto son todas las categorías viables de encontrar. Esta aclaración la hacemos sobre la base de que los esquemas intra algebraico-trans gráfico y trans algebraico-intra gráfico se tienen que usar con mucho cuidado, puesto que la misma naturaleza de la triada puede llevar a contradicciones en la definición que hemos hecho de los mismos. Tal y como lo conciben Piaget y García (1982), “la naturaleza de los elementos de la triada es funcional y no estructural. Obedecen, por consiguiente, a un orden necesario, puesto que la elaboración del trans, en tanto sistema de las transformaciones reunidas en una totalidad con propiedades nuevas, supone la formación de algunas de estas transformaciones en el inter, y que estas últimas implican el conocimiento de los caracteres analizados en el intra” (Pág. 171). Además añaden, que si las descripciones se hacen en términos de la triada (intra, inter, trans), estarán vinculadas a cuestiones de escalas y hay que tener en cuenta que, a su vez, cada una de estas grandes etapas o niveles encierra subetapas o subniveles, que siguen un mismo orden y sólo se puede pasar a otro nivel cuando se ha alcanzado el previo.

De lo anterior, podemos concluir que tendríamos que profundizar cuidadosamente, a partir de los datos, hasta dónde es posible encontrar un nivel avanzado y complejo de transformaciones gráficas del concepto de derivada y un nivel elemental y básico de propiedades y acciones operatorias algebraicas del concepto de derivada, y viceversa. De antemano, postulamos que el nivel intra algebraico-trans gráfico cognitivamente es muy difícil de encontrar por la complejidad de los objetos que se involucran en la interpretación gráfica de la derivada, los cuales requieren un grado de formalización que no están construidos en un nivel intra; mientras que el nivel trans algebraico-intra gráfico cognitivamente es más fácil de encontrar, influenciado por la enseñanza tradicional de los conceptos matemáticos.

1. **Nivel intra algebraico-intra gráfico (esquema intra-intra)**: los sujetos, en problemas que involucran cualquiera de los siguientes objetos O_1, O_2 y O_3, no coordinan los macro objetos f '(a) y f '(x), mostrando una perspectiva proceso de la diferenciación de funciones. Esta limitación tiene las siguientes implicaciones: (1) la necesidad de construir la expresión simbólica de la función para obtener la función derivada aplicando las técnicas de derivación directa (definición en términos de límite) o bien las técnicas de derivación indirecta (reglas de derivación), sin justificación alguna de las mismas; y posteriormente, calculan la derivada en un punto sustituyendo el valor de x = a en la expresión de la función derivada (ES f (x)⇨ES f '(x) ↻); y (2), la posibilidad de cometer errores como, por ejemplo, confundir f '(x) con la expresión simbólica de la recta tangente a la curva en un punto.

   No pueden obtener directamente la gráfica de la función derivada a partir de la gráfica de la función, sino que requieren hacer las siguientes traducciones y relaciones: G f (x)→ES f (x)⇨ES f '(x)→G f '(x). Gráficamente la función derivada la interpretan como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, tendiendo a confundir la gráfica de la función derivada con la gráfica de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Además, tienen una única interpretación de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de la curva, como el límite de las rectas secantes.

Para el análisis de la gráfica de la función y su derivada se utiliza intuitivamente el criterio de la primera derivada en algunos puntos concretos del dominio, sin llegar a conectar y generalizar esta información en infinitos puntos (de un intervalo o en todo el dominio).

Dado que no coordinan los objetos O_1, O_2 y O_3, se tiene dificultad para resolver problemas que involucran el límite de la razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. El objeto razón de cambio se reduce al manejo de la velocidad instantánea. Esta interpretación de la derivada como velocidad instantánea permite saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo se puede hacer en un punto o varios puntos y no en todos los puntos (de un intervalo o de todo el dominio). Y en algunos casos, en problemas que involucran razones de cambio se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea.

2. **Nivel intra algebraico-inter gráfico (esquema intra-inter)**, los sujetos ahora pueden obtener la gráfica de la función derivada a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función (G f (x)⇨G f '(x)), manejando con propiedad los criterios de la primera derivada para describir la variación local y global de la función expresada gráficamente, y de manera incipiente, y especialmente en los puntos de inflexión, utilizan el criterio de la segunda derivada coordinadamente con el criterio de la primera derivada, pero no pueden justificar gráficamente que si $f''(x)>0$ en un intervalo del dominio de la función, entonces la función es cóncava hacia arriba.

   Coordinan gráficamente el objeto pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto y el límite de las razones de cambio, mostrando dos o más interpretaciones de la representación gráfica de la recta tangente, y aplicando ahora las razones de cambio a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo. Sin embargo, dependiendo del contexto de la situación tienen aún dificultades para diferenciar los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

3. **Nivel intra algebraico-trans gráfico (esquema intra-trans)**, los sujetos coordinan gráficamente los tres objetos O_1, O_2 y O_3, y tienen varias interpretaciones de la pendiente de la recta tangente como; la inclinación de la recta tangente; el límite de las rectas secante; y cuando la situación se relaciona con la variación de dos magnitudes cualesquiera, representadas gráficamente, pueden entender que la pendiente de la recta tangente es el límite de las razones de cambio, éstas ultimas aplicadas ahora a la variación de dos magnitudes cualesquiera.

   Además, agrupan en una nueva función todas las derivadas en cada punto, como el valor de las pendientes de la recta tangente a la gráfica de la función en cada punto del dominio, como el límite de las tasas medias de variación y como el límite de las razones de cambio en cada punto del dominio, manejando con propiedad los criterios de la primera y la segunda derivada para describir tanto la variación local como la variación global de la función representada gráficamente. Lo cual les permite hacer las siguientes relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada: G f (x)⇨G f ’(x); G f ’(x)⇨G f (x); DV f ’(x)⇨G f (x); DV f (x)⇨G f ’(x). Ya hemos argumentado anteriormente lo improbable de este esquema.

4. **Nivel inter algebraico-intra gráfico (esquema inter-intra)**, los sujetos dependiendo del contexto de las situaciones que involucren cualquiera de los objetos O_1, O_2 y O_3, tienen construida la relación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x), mostrando una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones. Lo cual implica que hay una aplicación justificada de las reglas de derivación directa e indirecta, y aparecen técnicas de aproximación. Por tanto, dependiendo del contexto de la situación, puede darse una coordinación de los tres objetos (pendiente de la recta tangente, entendida básicamente como el coeficiente de x en la ecuación de la recta tangente; límite de las tasas medias de variación; y razón de cambio, aplicada ahora a situaciones donde la magnitud que depende del tiempo no sólo es el espacio $[\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}; \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}]$.

Sin embargo, gráficamente en problemas que involucren cualquiera de los objetos O_1, O_2 y O_3, no hay una coordinación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x), lo cual sólo les permite hacer una análisis local de la variación de la función, aplicando intuitivamente el criterio de la primera derivada en algunos puntos concretos del dominio sin llegar a conectar esta información en infinitos puntos (por intervalos o bien en todo el dominio). Y para obtener la gráfica de f ’(x) a partir de la gráfica de f (x) requieren hacer las siguientes traducciones y relaciones: G f (x)$\rightarrow$ES f (x)$\Rightarrow$ ES f ’(x)$\rightarrow$G f ’(x).

Además, puesto que gráficamente no hay una coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3 se tiene dificultad para resolver situaciones que involucran el límite de la razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. El objeto razón de cambio se reduce al manejo gráfico de la velocidad instantánea. Esta interpretación gráfica de la derivada como velocidad instantánea les permite saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo lo pueden hacer en un punto o varios puntos y no en todos los puntos (de un intervalo o de todo el dominio). Y en algunos casos, en problemas que involucran razones de cambio enunciados en un registro gráfico, se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea.

5. **Nivel inter algebraico-inter gráfico (esquema inter-inter)**, dependiendo de la situación en la que intervienen los tres objetos: pendiente de la recta tangente, entendida básicamente como el coeficiente de x en la ecuación de la recta tangente; límite de las tasas medias de variación; y razón de cambio, aplicadas ahora a situaciones donde la magnitud que depende del tiempo no sólo es el espacio [$\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$; $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$], puede darse una coordinación entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Se tiene una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones, lo cual implica una coordinación y justificación de las técnicas de derivación directa e indirecta, y aparecen técnicas de aproximación.

   Además, los sujetos manejan con propiedad el criterio de la primera, y en algunos casos, incipientemente, lo coordinan con el criterio de la segunda derivada para describir el análisis de la variación local y global de la función. Y pueden obtener la gráfica de la función derivada a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función (G f (x)⇨G f ’(x)).

En este nivel, dependiendo del contexto de la situación tienen aún dificultades para diferenciar gráficamente los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Sin embargo, coordinan gráficamente el objeto pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto y el límite de las razones de cambio, mostrando dos o más interpretaciones de la representación gráfica de la recta tangente; y aplican las razones de cambio a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo.

6. **Nivel inter algebraico-trans gráfico (esquema inter-trans)**, los sujetos tienen una perspectiva objeto de la diferenciación de funciones, lo cual implica la aplicación justificada de las técnicas de derivación directa e indirectas, apareciendo técnicas de aproximación, pero en algunos contextos para calcular el límite de las razones de cambio tienen dificultades para coordinar estos dos objetos. Dependiendo del contexto de la situación se puede tener una coordinación de los macro objetos derivada en un punto y función derivada, como elemento y clase.

   Además, manejan coordinadamente los criterios de la primera y segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente, lo cual les permite hacer traducciones y relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada: G f (x)⇨G f ’(x); G f ’(x)⇨G f (x); DV f ’(x)⇨G f (x); DV f (x)⇨G f ’(x).

   Igualmente, tienen varias interpretaciones de la pendiente de la recta tangente como; la inclinación de la recta tangente; el límite de las rectas secante; y cuando la situación se relaciona con la variación de dos magnitudes cualesquiera representadas gráficamente, pueden entender que la pendiente de la recta tangente es el límite de las razones de cambio, éstas ultimas aplicadas ahora a la variación de dos magnitudes cualesquiera.

7. **Nivel trans algebraico-intra gráfico (esquema trans-intra)**, los sujetos comprenden que el macro objeto f ’(x) según la situación se puede entender como una clase de objetos que son la derivada de la función en cada punto del dominio, o

bien como un objeto en el que se pueden realizar nuevas acciones, p. e.: la segunda derivada, manejando y coordinando todas las técnicas de derivación directa e indirecta (perspectiva objeto de la diferenciación de funciones). La expresión simbólica de la función derivada es el modelo matemático que les permite asociar, a cada punto del dominio, el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto; y obtener el límite de las razones de cambio y el límite de las tasas medias de variación. Es decir que algebraicamente coordinan los objetos O_1, O_2 y O_3.

Sin embargo, gráficamente en problemas que involucran cualquiera de los objetos O_1, O_2 y O_3, no hay una coordinación entre los macro objetos f '(a) y f '(x), lo cual sólo les permite hacer un análisis gráfico de la variación local de la función, aplicando intuitivamente el criterio de la primera derivada en algunos puntos concretos del dominio sin llegar a conectar esta información en infinitos puntos (intervalos o bien en todo el dominio).

Además, para obtener la gráfica de f '(x) a partir de la gráfica de f (x) tienen que realizar las siguientes traducciones y relaciones: G f (x)$\rightarrow$ES f (x)$\Rightarrow$ES f '(x)$\rightarrow$ G f '(x). Gráficamente la función derivada la interpretan como la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto, tendiendo a confundir la gráfica de la función derivada con la gráfica de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto, mostrando una única interpretación de la representación gráfica de la recta tangente a la gráfica de la curva, como el límite de las rectas secantes.

Dado que no coordinan los objetos O_1, O_2 y O_3, se tiene dificultad para resolver situaciones que involucran el límite de la razón de cambio a partir de la información que le proporciona la gráfica de la función. El objeto razón de cambio se reduce al manejo de la velocidad instantánea. Esta interpretación de la derivada como velocidad instantánea les permite saber en una gráfica los puntos en los que la velocidad es máxima, mínima o nula. Sin embargo, sólo lo pueden hacer en un punto o varios puntos y no todo los puntos (de un intervalo o de todo el dominio). Y en algunos casos, en problemas que involucran razones de cambio, enunciados gráficamente, se tiende a confundir la variación media con la variación instantánea.

8. **Nivel trans algebraico-inter gráfico (esquema trans-inter)**, los sujetos gráficamente coordinan los macro objetos f ’(a) y f ’(x) en situaciones que involucran los objetos O_1, O_2 y O_3, pero aún tienen dificultades para diferenciarlos en determinadas situaciones en las que se aplican las razones de cambio a la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo.

   En este nivel se tienen dos, o más, interpretaciones gráficas de la recta tangente: como el límite de las rectas secantes y como la recta más próxima a la gráfica de la función en el entorno del punto. Además, manejan con propiedad el criterio de la primera derivada para describir la variación local y global de la función, y en algunos casos, y especialmente en los puntos de inflexión, lo coordinan con el criterio de la segunda derivada.

   Igualmente, para obtener la gráfica de f ’(x) a partir de la información que le proporciona la gráfica de f (x) no requieren hacer las siguientes relaciones y traducciones entre representaciones de estos conceptos: G f (x)→ES f (x)⇨ ES f ’(x)→G f ’(x).

9. **Nivel trans algebraico-trans gráfico (esquema trans-trans)**, los sujetos agrupan en una nueva función todas las derivadas en cada punto, como el valor de las pendientes de la recta tangente a la gráfica de la función en cada punto del dominio, como el límite de las tasas medias de variación y como el límite de las razones de cambio en cada punto del dominio. Independientemente del contexto de la situación manejan y coordinan justificadamente todas las técnicas directas e indirectas de derivación: utilizando límites, reglas de derivación, ecuaciones diferenciales, y de aproximación (perspectiva objeto de la diferenciación de funciones); y realizan todas las traducciones y relaciones entre representaciones de la función y de la función derivada.

   Además, manejan coordinadamente los criterios de la primera y segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente, discriminando aquellas propiedades y relaciones que están incluidas y aquellas que no están incluidas en la coordinación de los objetos, mostrando una coherencia en el esquema.

4.2. Formación docente

Los profesores que participaron en nuestro estudio son egresados de la Facultad de Educación de la única universidad pública que hay en la ciudad de Barranquilla y tienen la titulación de *Licenciados en Ciencias de la Educación con especialidad en Matemática y Física.* Son profesores que han recibido una formación en tres áreas del conocimiento: matemática, física y psicopedagogía, pero en mayor proporción en las áreas de matemática y física.

Teniendo en cuenta que los profesores estudiados se formaron en épocas diferentes, y que los planes de estudio no son totalmente iguales debido a las reformas educativas que se han venido dando a lo largo del tiempo en la enseñanza superior en Colombia, nos hemos centrado en el estudio del primer ciclo de la licenciatura porque es el ciclo que ha sufrido menos modificaciones y porque allí se encuentra enmarcada la formación del profesorado en el área del cálculo diferencial, que es la que nos interesa aquí. Creemos conveniente aclarar que este análisis no es exhaustivo y, más que hacer un estudio profundo de la formación del profesorado, lo que pretendemos es buscar y desvelar algunos aspectos de la organización y estructura de las asignaturas de *cálculo diferencial* y *física mecánica* que nos ayuden a interpretar los resultados del análisis *micro*.

El plan de estudio para los cuatro primeros semestres de la licenciatura, que forman el primer ciclo, consta de las asignaturas registradas en la tabla 3, las cuales son prerrequisitos de las otras para ser cursadas en el semestre posterior. Por ejemplo, para cursar Cálculo I en el segundo semestre, se tiene que aprobar la asignatura de Álgebra y Trigonometría del primer semestre. Resaltamos los siguientes elementos del cuadro anterior: (1) la asignatura de Física I (Física mecánica) se desarrolla en el primer semestre, mientras que la asignatura de Cálculo I (Cálculo diferencial) en el segundo semestre; (2) La asignatura de Cálculo I tiene como prerrequisito inmediato la aprobación del curso de Álgebra y Trigonometría y no es necesario la aprobación del curso de física I, por tanto curricularmente no hay relación entre los contenidos programáticos de estas dos asignaturas; y (3), la asignatura de Geometría Analítica se plantea en el tercer semestre y tiene como prerrequisito la aprobación del curso de Cálculo diferencial.

PRIMER CICLO DE FORMACIÓN DE LA LICENCIATURA EN MATEMÁTICA Y FÍSICA			
I SEMESTRE	**II SEMESTRE**	**III SEMESTRE**	**IV SEMESTRE**
Álgebra y Trigonometría	**Cálculo I**	Cálculo II	Cálculo III
Geometría euclidiana I	Geometría euclidiana II	Geometría analítica	Ecuaciones diferenciales
Física I	Física II	Física III	Física IV
Laboratorio de Física I	Laboratorio de Física II	Laboratorio de Física **III**	Laboratorio de Física IV
Español	Inglés	Lógica Matemática	Teoría de conjuntos
Psicología general	Psic. del desarrollo	Psic. del aprendizaje	Didáctica general
Métodos de Estudio e Investigación	Sociología general		

Tabla 3. Asignaturas del primer ciclo de la licenciatura en matemática y física

Los resultados encontrados en una investigación previa (Badillo, 1999), nos muestran que los profesores egresados de esta licenciatura no encontraban relación entre las dos componentes de su formación, y en muchas ocasiones la naturaleza del objeto de estudio de cada disciplina se convertía en obstáculo para comprender conceptos que histórica y epistemológicamente estaban relacionados. Más concretamente, el hecho de desarrollar primero la física mecánica en el primer semestre, en el cual muchos de los futuros profesores provenían de colegios públicos donde no habían alcanzado a desarrollar completamente las unidades del cálculo diferencial e integral, se encontraban con dificultades para comprender el aparato sintáctico y semántico de los conceptos físicos, como la velocidad, la aceleración, etc. El estudio de éstos se centraba más en el manejo de formalismos matemáticos que en el mismo estudio fenomenológico. Es decir que el tratamiento que le daban usualmente en la física, basado en la aplicación de la definición en términos del límite y el uso de la notación incremental, influía fuertemente a la hora de desarrollar los conceptos del cálculo. Otro aspecto también importante es la ausencia dentro del plan de estudio de formación de la Historia y Epistemología de las Ciencias, tanto como asignatura independiente o como herramienta para tratar e introducir los aspectos fenomenológicos que dieron origen a la construcción de los conceptos matemáticos.

A continuación analizamos brevemente los programas de física y de cálculo diferencial que nos proporcionaron en la Facultad de Educación de la universidad, para tener una idea global de la estructura de estos cursos que forman parte de la formación inicial de los profesores que participaron en este estudio. El propósito de este análisis es mirar hasta qué punto las estructuras de organización de los contenidos que se desarrollan en la universidad guardan relación con las estructuras organizativas de los contenidos de las asignaturas de matemática de 11º y física de 10º que se implementan en el currículo de secundaria y bachillerato del sistema educativo colombiano.

4.2.1. El programa de Física I: Física Mecánica

La Física Mecánica forma parte del grupo de asignaturas que se desarrollan en el primer semestre de la Licenciatura está dentro del área de la Física básica y se inscribe dentro del campo de formación científico metodológico. El programa que analizaremos a continuación está estructurado en trece apartados: identificación, descripción, requisitos, valoración académica, tiempo y duración, objetivos, contenidos, selección de actividades, selección de recursos, funcionalidad, proceso didáctico, criterios de evaluación y bibliografía.

En la descripción de la asignatura de Física I, se enfatiza en el manejo primordial que se le dará al tratamiento de las leyes del movimiento de Newton. Además se señala que el movimiento se enfocará a partir de los conceptos de trabajo y energía, atendiendo además a la geometría del movimiento (Cinemática). Esto se ve reflejado en la forma como están estructurados los contenidos del programa:

PROGRAMA DE FÍSICA I
CONTENIDOS POR UNIDADES
UNIDAD I. Mediciones unidades y vectores. UNIDAD II. Leyes de Newton - Equilibrio. UNIDAD III. Cinemática de una partícula. UNIDAD IV: Segunda ley de Newton y la dinámica de la traslación. UNIDAD V. Trabajo y energía.

Los requisitos que se deben tener en cuenta para el desarrollo de esta asignatura se presentan explícitos, y se enuncian de la siguiente manera:

> "Conceptos básicos de Matemática elemental, nociones de Cálculo diferencial e integral y elementos básicos de trigonometría"

No obstante, la asignatura que se desarrolla en la componente de matemática en el primer semestre es la de Álgebra y Trigonometría, asumiendo entonces que los estudiantes ya traen del bachillerato nociones del Cálculo diferencial e integral. Esto no es siempre cierto y no se puede generalizar, de ahí que muchos estudiantes tengan problemas en la asignatura de Física, pues no ingresan en la universidad con las bases suficientes para abordar un estudio desde la rigurosidad que ameritan estas disciplinas. Por otra parte, el programa tampoco se encarga de compensar estas deficiencias, pues su estructura no está diseñada para ello, como tampoco para favorecer el intercambio y la relación de los conceptos matemáticos y físicos mediante la integración o mediante el diseño y desarrollo interdisciplinar de programas de asignaturas que tomen elementos de la historia de las ciencias y de los conceptos mismos a desarrollar.

En lo que respecta a la formulación de los objetivos, encontramos demasiada ambición y ambigüedad, pues éstos no se encuentran en consonancia con la estructura de los contenidos, las actividades que se plantean, los libros de texto que se usan y el tipo de evaluación que se implementa. Es decir que no podemos ver detrás de estos aspectos, una teoría de aprendizaje unificada que los fundamente.

Los objetivos que se enuncian en el programa de Física son:

> "Al finalizar el curso de Física I, el estudiante será capaz de:
> 1. Emplear con propiedad los diversos sistemas de medidas, así como las ecuaciones dimensionales.
> 2. Aplicar los conceptos adquiridos en la resolución de problemas y ejercicios".
> 3. Tener una visión unificada de la Física mediante una adecuada presentación de los temas.
> 4. Identificar los principios fundamentales de la Mecánica, sus aplicaciones, sus limitaciones.
> 5. Desarrollar el pensamiento crítico y creativo con relación a los fenómenos de la Física (Mecánica)".

Siguiendo a Taba (1975), encontramos que los objetivos anteriores fueron formulados apoyándose en los tipos de conductas que se esperan. Por un lado, se ve la leve intención de tener en cuenta aspectos procedimentales, conceptuales y actitudinales, pero que no son reales y no incluyen todo lo que en la realidad se traslada al aula de clases. Somos conscientes de que no tenemos información directa de lo que ocurre u ocurrió durante el desarrollo de estas asignaturas, pero si comparamos lo que se persigue en los objetivos con lo que se propone en las actividades y en la evaluación, nos damos cuenta de las contradicciones que se presentan.

En realidad, lo que se persigue es la adquisición de conocimientos para aplicarlos a la resolución de problemas; lo cual se enmarca en una visión tradicional, tal y como lo muestra la siguiente postura sobre los "procesos didácticos" que se enuncian en el programa objeto de estudio:

> "El método empleado es el científico: a) Observación, b) Experimentación, c) Hipótesis y d) Verificación.
> El profesor motivará a los alumnos con la presentación de fenómenos físicos de lo cotidiano, suscitará y orientará discusiones en los grupos, que permitan a cada alumno descubrir las leyes que se investigan. Asignación de lecturas complementarias y problemas para ser estudiados y resueltos como trabajo fuera de clases. Los temas y ejercicios expuestos por el profesor, serán los fundamentales o tipos. El profesor formulará preguntas en el desarrollo de la clase".

Los criterios que se siguen para evaluar nos muestran el énfasis en la apropiación de las definiciones, y no en la comprensión de los conceptos, predominando la evaluación cuantitativa y no una perspectiva cualitativa y formativa.

> "El estudiante tendrá tres notas durante el semestre, las dos primeras valen 30% cada una y el final 40% de la nota definitiva El estudiante presentará exámenes escritos al final de cada tiempo llamados parciales (30%) y examen final (40%) respectivamente.
>
> Durante el semestre y en cada tiempo determinado el estudiante presentará informes escritos u orales, tareas y exámenes cortos (quizes), que se promediarán".

Centrándonos ahora en el concepto de velocidad que se desarrolla en la universidad, nos damos cuenta de que se ubica en la unidad de Cinemática de una partícula; previamente a esta unidad se manejan las magnitudes escalares y vectoriales, y seguidamente a ésta las leyes de Newton sobre equilibrio. En cuanto a la unidad que nos interesa como lo es la de Cinemática, se encuentra organizada de la siguiente forma:

CONTENIDOS	OBJETIVOS
• Desplazamiento, velocidad y aceleración. • Movimiento en una dimensión cuerpo en caída libre. • Movimiento parabólico o de proyectiles. • Movimiento de rotación, desplazamiento, velocidad y aceleración angulares. • Enfoque vectorial del movimiento de rotación. • Movimiento rotacional uniformemente acelerado. • Componentes radial y acimutal del movimiento de una partícula en un plano. • Movimiento relativo de traslación uniforme. Transformaciones de Galileo.	• Definir los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración. • Distinguir los diferentes tipos de movimiento. • Describir con exactitud los diferentes tipos de movimiento teniendo en cuenta los conceptos de desplazamiento, velocidad y aceleración. • Resolver ejercicios y problemas propuestos de esta unidad.

Tabla 4.

Los resultados de una investigación previa piloto (Badillo, 1999), desvelaron que los profesores consideraban que en los programas de formación de la universidad en física se privilegiaba más el uso de fórmulas y algoritmos matemáticos que la interpretación y la comprensión de fenómenos físicos. Igualmente, afirmaban que en el caso concreto de la velocidad, el énfasis en lo algebraico estaba puesto en el formalismo del límite y el uso de los incrementos para demostrar las ecuaciones y, posteriormente, se utilizaban las ecuaciones diferenciales para resolver los problemas; pero casi nunca se trabajaba la interpretación de gráficas o demás sistemas de representación.

No obstante, no creemos que no sea necesario el uso riguroso de la matemática para poder introducir conceptos físicos que requieren de dicho tratamiento; lo que no nos parece correcto es: (1) la complejidad semiótica que introducen al definirlos; y (2), reducir el estudio de los fenómenos físicos a la simple resolución de ejercicios de aplicación desde una aproximación netamente matemática algoritmizada. En efecto, al definir los conceptos como velocidad instantánea, etc., simplemente mediante la enunciación de fórmulas sin significado alguno para los estudiantes, se anula por completo la semántica de los conceptos matemáticos. Esto se puede inferir también de los objetivos que describimos en la tabla 4, donde se coloca mucho énfasis en la resolución de ejercicios y demostración de teoremas propios del contexto matemático a partir de una definición rigurosa.

Al final del programa se presenta la bibliografía, especificando tanto el libro de texto como los libros de consulta. El libro de texto que sigue el profesor para la organización y desarrollo de los contenidos es *Fundamentos de Física* de Halliday, D. y Resnick, R. Si bien es cierto que no hemos hecho un análisis profundo de este libro de texto, al estudiar la forma como presenta los contenidos, nos damos cuenta de que el programa se diseñó con base en él. Esto se ve confirmado por las opiniones de los egresados investigados, que afirmaban que la dinámica que seguían los profesores de física de la licenciatura era definir los conceptos, con énfasis en las fórmulas matemáticas y luego resolver unos ejercicios (que en el mismo programa los denominan fundamentales o tipo), para luego plantear como trabajo individual la resolución de los ejercicios del libro de texto.

4.2.2. El programa de Cálculo I: Cálculo diferencial e Integral

Esta asignatura se desarrolla en el segundo semestre del programa de Licenciatura en matemática y física. Suponemos que la programación obedece a un modelo interno del programa, pues al igual que la de física I, está conformada por trece bloques: identificación, descripción, requisitos, tiempo y duración, contenidos, selección de actividades, selección de recursos, valoración académica, funcionalidad, proceso didáctico, criterios de evaluación y bibliografía.

Inicia ubicando a la asignatura dentro del campo de formación científico y metodológico; posteriormente, en la descripción se hace énfasis en la intención de relacionar aspectos del cálculo integral y el diferencial, y la aplicación de éstos en la solución de problemas tanto en matemática como en física.

Nos llama la atención el hecho de que se hable de manejarlos *a posteriori* en los conceptos de física, mientras que vemos que el desarrollo de esta asignatura aparece en segundo semestre, después de haberse ya desarrollado en el primer semestre conceptos de la física mecánica: velocidad instantánea, aceleración, etc., que requieren elementos del cálculo diferencial e integral para llegar a su comprensión. Están suponiendo que los alumnos que ingresan a la universidad ya manejan los elementos del cálculo diferencial e integral; lo cual no es siempre cierto, pues la mayoría de los alumnos que ingresan a dicho programa provienen de escuelas públicas que en muchos casos, por diversas razones, no alcanzan a terminar los programas oficiales.

> "El programa tiene como finalidad proporcionar a los estudiantes los elementos básicos del Cálculo Integral y Diferencial, así como la relación que existe entre ellos. Se utilizarán además, algunas aplicaciones de los mismos con el objeto de que se **capacite al estudiante para manejar a posteriori los conceptos del Cálculo II y de la Física**"

Lo anteriormente dicho se ve confirmado, al presentar como único requisito para cursar la asignatura de Cálculo I el haber aprobado la asignatura de Álgebra y Trigonometría del primer semestre. En cuanto a los objetivos que se persiguen, se enuncian los siguientes:

> "El estudio del Cálculo I busca que el alumno se capacite para:
> - Cambiar las operaciones elementales del Cálculo integral y diferencial, con base en teoremas y propiedades específicas de cada uno.
> - Resolver ejercicios y/o problemas de aplicación del Cálculo integral y diferencial, teniendo en cuenta las diferentes clases de funciones.
> - Mantener una actitud de razonamiento científico frente al estudio del Cálculo I para posteriores aplicaciones en situaciones de problemas matemáticos, físicos o de otras ciencias".

Encontramos que los objetivos son coherentes con la descripción que se hace de la asignatura; sin embargo, no con los objetivos específicos de cada unidad, pues en ninguno de ellos se persigue tratar la semántica de los conceptos en otras áreas del conocimiento, por ejemplo la física. Es decir que la aplicación de los conceptos sólo se hace en el mismo contexto matemático (fenomenología matemática), y no se hace explícito el estudio de las relaciones entre conceptos matemáticos y conceptos físicos y, en general, de las relaciones de los conceptos matemáticos con otras áreas del conocimiento.

Teniendo en cuenta los aspectos señalados por Taba (1975) para la formulación de los objetivos, podemos concluir que éstos apuntan hacia puntos terminales y no evolutivos; Por tanto, representan caminos por recorrer (Rico, 1997); pues lo que se persigue es poner en práctica los conceptos definidos en la resolución de ejercicios enunciados en un contexto matemático. Tampoco en ellos se establecen diferencias entre las experiencias de aprendizaje apropiadas para lograr conductas diferentes. Es decir, no se especifican ni los procesos que se pretenden desarrollar, ni los ámbitos de aplicación de los contenidos que se presentan.

PROGRAMA DE CÁLCULO I	
CONTENIDOS POR UNIDADES	**OBJETIVOS ESPECÍFICOS POR UNIDADES**
UNIDAD I. Conceptos del Cálculo Integral.	• Practicar el concepto de integral con sus propias propiedades en ejercicios con funciones escalonadas, monótonas y acotadas.
UNIDAD II. Aplicaciones de la Integración.	• Calcular el área de regiones entre dos curvas y volúmenes de cuerpos geométricos. Trazar con destrezas las gráficas correspondientes a las funciones utilizadas en el cálculo integral.
UNIDAD III. Funciones Continuas.	• Interpretar los teoremas correspondientes al cálculo integral, para funciones continuas.
UNIDAD IV: Cálculo Diferencial.	• Comprobar en diversos ejercicios el lenguaje matemático de las derivadas para funciones simples y compuestas con base en su interpretación geométrica, en sus propiedades y teoremas específicos.
UNIDAD V. Relaciones entre Integración y Derivación.	• Relacionar los conceptos de integración y derivación teniendo en cuenta los teoremas fundamentales del cálculo y las propiedades de las derivadas.

Tabla 5.

Según Taba, existe una gran cantidad de categorías en las cuales apoyarse a la hora de anunciar y agrupar objetivos: necesidades vitales del individuo, necesidades de la sociedad, especialidades del contenido o la conducta que se intentan lograr (Rico, 1997). Creemos que en este caso se formulan los objetivos específicos atendiendo a las conductas que se esperan (practicar el concepto de..., calcular el área de..., etc.), pues a nuestro juicio esta forma es mucho más funcional a la hora de evaluar el conocimiento impartido. Además, no se tienen en cuenta objetivos sobre valores, actitudes o sentimientos.

Centrándonos en el tema de la derivada, nos damos cuenta de que se programa atendiendo a la lógica de la disciplina. Previamente al desarrollo de éste, se introduce el límite de funciones y continuidad y no se tiene en cuenta la génesis histórica del concepto. Al analizar la estructura jerárquica de los contenidos, nos damos cuenta de que se parte de la definición del concepto en términos de límite del cociente incremental y, posteriormente, se definen las reglas algebrizadas de derivadas y la aplicación de éstas.

CONTENIDOS	OBJETIVOS
• Derivada de una función. • Álgebra de derivadas. • Interpretación geométrica. • Regla de la cadena para la derivación de las funciones compuestas. Derivación implícita. • Aplicaciones de la derivación a la determinación de los extremos de las funciones. • Teorema del valor medio para derivadas. • Criterio de la derivada segunda para los extremos. • Trazado de curvas.	• Comprobar en diversos ejercicios el lenguaje matemático de las derivadas para funciones simples y compuestas con base en su interpretación geométrica, en sus propiedades y teoremas específicos.

Tabla 6.

Tal y como arrojan los resultados de una investigación previa (Badillo, 1999), en el desarrollo de las clases no había trabajo en equipos, y las evaluaciones sólo se reducían a los dos exámenes parciales y al final. Todos eran por escrito y constaban de ejercicios para demostrar y de poca teoría, en muchos casos ninguna, contrariamente a lo que se encuentra escrito en la programación. Esto reafirma lo que ya conocemos y es que no todo lo que es resultado de la transposición didáctica externa se lleva a cabo y de ahí la importancia de conocer lo que se hace realmente en el aula.

> "En el transcurso del desarrollo del programa se realizarán actividades como las siguientes:
> a. Se emplearan talleres para la solución de ejercicios y problemas de aplicación al cálculo integral y diferencial en grupos de trabajo.
> b. Los alumnos practicarán individualmente, el trazado de curvas utilizando los materiales pertinentes.
> c. Se tratará de investigar, siempre, diferentes textos del cálculo, para conectar a los estudiantes con ideas y problemas propuestos por diferentes autores".

En cuanto a la forma de evaluar y a los criterios de evaluación, se deja claro en la programación que se tendrá en cuenta la forma como los estudiantes usan los conocimientos en la resolución de problemas y ejercicios relacionados con el cálculo, privilegiando la aplicación memorística de leyes, reglas, fórmulas y procedimientos, que concuerdan con lo dicho por los profesores investigados.

> "Los criterios que se tendrán en cuenta para evaluar el curso serán los siguientes:
> a. Reflexión científica: este parámetro medirá en el estudiante la manera como interpreta y usa criterios, leyes, teoremas, que tengan que ver con elementos básicos del cálculo diferencial e integral.
> b. Habilidad: en tal caso se medirá la manera como el estudiante demuestre que maneja conceptos, procedimientos, fórmulas, etc., que se necesitan para la solución de problemas y ejercicios relacionados con el cálculo.
> c. Interés: iniciativa y puntualidad.
> Los requisitos académicos de evaluación, consisten en dos evaluaciones parciales (30%) y una final (40%)".

Para terminar, se señala la bibliografía, detallando el libro de texto y los libros de consulta. El libro de texto que se sigue es el *Cálculo* de Tom M. Apóstol, Vol. I. Al consultar este libro de texto, nos dimos cuenta que la estructura de los contenidos del programa y la forma como se aborda el desarrollo de los mismos, se ciñen a él. Sin embargo, no hemos realizado un análisis completo de este libro. Además, se presentan algunos libros de texto de consulta, pero para que los estudiantes amplíen el abanico de problemas y desarrollen competencias en la resolución de los mismos.

4.3. Diseño curricular

Siguiendo el mismo itinerario de análisis que hemos utilizado en la formación del profesorado, en esta sección nos interesa rastrear las restricciones institucionales que tienen los profesores con relación a la enseñanza del cálculo diferencial. En una investigación previa (Badillo, 1999), encontramos que los profesores cuestionan la estructura curricular que propone el MEN[4] para la enseñanza de la física y la matemática en los dos últimos cursos del sistema educativo colombiano. Esta investigación nos permitió desvelar como conflictivo para los profesores el desarrollo del concepto de velocidad instantánea y, en general, del estudio del movimiento en la asignatura de física de 10º antes de desarrollar la enseñanza del cálculo diferencial que es un contenido de la matemática de 11º. Sin embargo, no pudimos llegar a conclusiones contundentes que nos permitieran encontrar las raíces del conflicto, y es por ello, que volvemos a retomar en esta investigación el análisis de los programas

[4] Se entenderá MEN como Ministerio de Educación Nacional de Colombia.

curriculares de estas dos asignaturas, para posteriormente comparar y triangular los resultados encontrados con los resultados del análisis micro.

En Colombia, podríamos hablar de tres momentos que marcaron “cambios” en el sistema educativo en general y, muy particularmente, en los contenidos de la matemática escolar. El primero de ellos en el período comprendido entre los años 60 y 70. Con el surgimiento de la “Matemática Moderna” se produjeron transformaciones en la enseñanza, traducidas en el énfasis que se daba a las estructuras abstractas y la profundización en el rigor lógico. Esto conllevó el énfasis en la fundamentación a través de la Teoría de conjuntos y el arraigamiento del Álgebra, dejando de lado la Geometría elemental, lo cual llevó a que las actividades y problemas se alejaran del contexto inmediato para incursionar en el mundo de lo abstracto.

Pero muy seguidamente se comienza a percibir inconformidad hacia los cambios introducidos, pues se consideraba que no habían resultado muy acertados, y es entonces cuando entre los años 70 y 80 surge un gran debate entre los que defendían esta “nueva Matemática” y los que defendían la propuesta anterior (MEN, 1998). Es así como a finales de los años 70 y a comienzos de los 80, nace un nuevo enfoque como resultado de la revisión de los programas de matemática vigentes en la educación básica (nueve años de escolaridad, de 1º a 9º), y se propone el diseño de los programas bajo un marco teórico global. El enfoque propuesto para los programas de la matemática escolar de la “renovación curricular”, consistía en estudiar los diversos aspectos de la matemática como sistemas y no como conjuntos; a éste se le denominó *enfoque de sistemas* (MEN, 1998). Sin embargo, tal y como hemos observado en el análisis de los programas propuestos por los profesores, aun hoy, algunos profesores definen el concepto de función poniendo el énfasis en los pilares de la matemática moderna (capítulo 5).

Hay que señalar que la reforma de los sistemas cobijaba sólo los nueve grados de educación básica, quedando los dos últimos grados del bachillerato (10º y 11º) para un análisis posterior. Además, hay que aclarar que este movimiento de renovación se dio en todas las áreas del conocimiento escolar dentro de la educación básica (1º a 9º).

El tercer cambio, aún vigente, se da en virtud del establecimiento de la Ley 115 de 1994 (Ley general de educación), donde se adopta igualmente para el área de matemática el enfoque de sistemas, y con base en él, se sugiere a los profesores unos *lineamientos curriculares* para el área de matemática, que toman como punto de partida los "avances" logrados con la renovación curricular. Sin embargo, éstos aún no están muy difundidos en el medio de los profesores, y sólo hasta ahora se hacen algunas propuestas para el área de matemática en los grados 10º y 11º, que en su mayoría son desconocidos por el profesorado. Quedan aún por conocer los lineamientos del área de Ciencias Naturales (Física de 10º y 11º). Este desconocimiento se vió claramente cuando entramos a analizar lo que el profesor dice y hace en relación con su práctica profesional, lo cual desarrollaremos más adelante.

En los últimos años ha cobrado cierta importancia dentro del campo de la Educación Matemática los estudios sobre la evolución de los programas oficiales y el análisis de los libros de texto desde diferentes enfoques teóricos y metodológicos. Los resultados de estas investigaciones han corroborado, por un lado, la importancia del análisis del libro de texto, en el sentido de que pone en evidencia el tipo de actividad matemática que se vive en el aula de clases de matemáticas (Sierra *et al*., 1999; 1997; García y Llinares, 1994; 1999); y por otro lado, han reflejado que en muchos contextos la práctica de la enseñanza de los profesores está directamente influenciada por el uso de los libros de texto y no por los decretos y programas oficiales (Schubring, 1987; Badillo, 1999).

En nuestro propósito por estudiar los programas curriculares de la matemática y la física de 10º y 11º, nos hemos encontrado con grandes dificultades para encontrarlos sistematizados; tanto en nuestra indagación en las entidades gubernamentales encargadas de la educación en Barranquilla (Secretarias de Educación Departamental y Distrital), como en la posesión por parte de los profesores que participaron en nuestro estudio. Por tanto, teniendo en cuenta la realidad institucional concreta y los resultados de las investigaciones anteriormente citadas, nos detendremos en analizar la organización de los contenidos que presentan los libros de texto que siguen los profesores de matemática de 11º, los *lineamientos curriculares* para el área de matemática y la organización de los contenidos que presentan algunos libros de texto de física de 10º tradicionalmente más usados en Barranquilla.

Los contenidos programáticos de matemática y física de los dos últimos grados de escolaridad del sistema educativo colombiano, nos muestran que copian el modelo estructural propuesto en la Licenciatura de matemática y física. Nos encontramos que los estudiantes de bachillerato primero desarrollan en 10º la asignatura de física mecánica (en este caso el problema es más agudo porque no han tenido contacto previo con los conceptos del cálculo) y, posteriormente, al año siguiente, desarrollan la matemática que contiene una o dos unidades dedicadas al cálculo diferencial, tal y como se ilustra en la tabla 7.

CONTENIDOS PROGRAMÁTICOS DE LAS ASIGNATURAS DE MATEMÁTICA Y FÍSICA DE 10º Y 11º			
Física 10º	**Física 11º**	**Matemática 10º**	**Matemática 11º**
1. Introducción a la física 2. Mediciones técnicas magnitudes: vectores **3. Cinemática** 4. Dinámica 5. Estática 6. Gravitación 7. Trabajo y Energía 8. Impulso y cantidad de movimiento 9. Mecánica de fluídos 10. Calor y temperatura	1. Movimiento circular uniforme 2. Movimiento armónico simple 3. Movimiento ondulatorio: luz y sonido 4. Electricidad 5. Electrostática	I. Trigonometría 1. Razones trigonométricas 2. Solución de triángulos rectángulos 3. Ley del seno y del coseno 4. Solución de triángulos oblicuángulos 5. Identidades y ecuaciones trigonométricas II. Geometría analítica: 1. Estudio de la línea recta 2. Estudio de las cónicas	1. Funciones, límite de funciones y continuidad **2. Cálculo diferencial: la derivada y aplicaciones de la derivada** 3. Introducción al cálculo integral

Tabla 7. Contenidos programáticos de matemática y física de 10º y 11º

Consideramos que este caso es más grave que el descrito en la formación inicial del profesorado (ver sección anterior), porque si simplemente nos encontramos que los estudiantes no tienen el nivel de comprensión de los conceptos estructurantes de la matemática, el profesor puede posponer la notación de los incrementos, o incluso utilizar un itinerario didáctico diferente (derivada antes de límite, etc.). Pero si, desde la física, se introducen la definición de los objetos velocidad instantánea y tasa instantánea de variación usando la definición de límite y la notación incremental en el grado 10º, aunque el profesor de matemática posponga en el curso siguiente (11º) el uso de la notación incremental al definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x), el tratamiento previo desarrollado en el curso anterior sigue actuando como obstáculos e incluso puede llegar a generar inconsistencias e incoherencias en los estudiantes para comprender el mismo concepto en contextos diferentes. Es decir, estaríamos frente a formas diferentes de definir un mismo concepto dependiendo del contexto en el que se introduce. Estas incoherencias en la enseñanza de los conceptos genera el fenómeno de compartimentación (Amit y Vinner, 1991), que actúa como obstáculo en la comprensión fenomenológica de los conceptos matemáticos.

4.3.1. Análisis de los programas curriculares de Matemática de 11º

El único documento oficial emanado por el MEN que pudimos conseguir fueron los *lineamientos curriculares* para el área de matemática (MEN, 1998; 1999). En este documento oficial se proponen *grosso modo* unos contenidos básicos para el área de matemática en general, pero no llegan a profundizar, ni a concretar los contenidos específicos a desarrollar en cada uno de los grados. Esta falta de concreción le permite a los profesores seguir manteniendo los contenidos programáticos que tradicionalmente se han venido desarrollando y a intentar justificarlos en términos de las exigencias actuales; pero al analizar rasgos de la actividad que diseña e implementa cada profesor, nos damos cuenta que las incorporaciones que hacen los profesores de las reformas en su práctica profesional son bastantes cuestionables y lentas (Llinares, 1996; 1999; Llinares y García, 1996).

- Pensamiento numérico y sistemas numéricos.
- Pensamiento espacial y sistemas geométricos.
- Pensamiento métrico y sistemas de medidas.
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
- Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos.

Igualmente, en los lineamientos curriculares se proponen unos procesos generales para llegar a lo descrito anteriormente:

- Resolución de problemas.

- Razonamiento.
- Comunicación.
- Modelización: Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos (algebraicos, gráficos y usando varios sistemas de representaciones).

En lo que respecta concretamente a los contenidos de la matemática de 10º y 11º, la propuesta curricular que hacen toma como eje principal los sistemas analíticos, y alrededor de ellos y subordinados, los otros sistemas. Al respecto esta propuesta dice:

> "Uno de los primeros acuerdos es el énfasis en los sistemas analíticos que constituyen el tronco principal de nuestro árbol; las células vivas de ese tronco son las funciones, tomadas como modelos de cambio, incluyendo, entre otras, distintas funciones circulares, que permiten pasar en forma muy sencilla a las funciones trigonométricas. Además de la circunferencia, también aparecen como lugares geométricos la elipse, la parábola y la hipérbola, y algunas curvas mecánicas como la cicloide y la sinusoide. Se trabajan distintos modelos de cambio donde entra en juego la variable tiempo, lo que posibilita trabajar las ideas fuertes del cálculo: tasa de cambio, velocidad de cambio, tasa de crecimiento y acumulación, etc.
>
> (...)el estudio de la variación puede ser iniciado pronto en el currículo de matemática aun cuando sea desde acercamientos más intuitivos que formales, y que el significado y sentido acerca de la variación puede establecerse a partir de las situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los históricamente estudiados o bien referidos a fenómenos de cambio y variación en la vida práctica". (Propuesta curricular para 10º y 11º, MEN, 1998).

Nuestra interpretación de la anterior consideración propuesta por el MEN, es que sugieren una nueva visión del cálculo diferencial menos formalista y más inductiva de la que se venía tratando tradicionalmente. Encontramos que es una visión en la que se resalta el papel del contexto, la resolución de problemas, la traducción entre representaciones y los aspectos históricos al pretender estudiar los fenómenos asociados.

Dado que los *lineamientos curriculares* y la propuesta de los programas de matemática establecidos por el MEN son tan recientes (1998), no podemos entrar a valorar la incorporación de los mismos en la práctica del profesor en nuestra investigación, pues la recogida de la información la realizamos en abril de 2000 y aún todos los profesores no tenían mucho conocimiento de ellos. Si que es cierto que, en las entrevistas sobre la elaboración de las programaciones y la unidad didáctica (anexo 6), algunos de los profesores manifestaron conocer y tener en cuenta los *lineamentos curriculares*. Sin embargo, todos coincidían en reconocer que la organización y jerarquización de los contenidos programáticos de la matemática de 11º la hacen siguiendo los libros de texto, y manifestaban que eran las editoriales las encargadas de recoger e incorporar las reformas o lineamientos que plantea el MEN. Tal y como se encuentra registrado en la tabla 7, el programa de matemática que se desarrolla en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano propone hacer la siguiente distribución de contenidos:

1. Funciones, límite de funciones y continuidad
2. Cálculo diferencial: la derivada
3. Aplicaciones de la derivada (optimización y representación gráfica -análisis monotonía de la función)
4. Introducción al cálculo integral

En efecto, esta organización es la que siguen los profesores en el diseño de la programación que nos proporcionaron de la asignatura de matemática de 11º. Para un análisis más detallado del mismo, remitimos a la lectura del capítulo 5. A continuación, nos centraremos a dar una revisión rápida a la organización que hacen de los contenidos de la física de 10º y nos centraremos en las definiciones que proponen algunos de los libros de física más utilizados.

4.3.2. Análisis de los programas curriculares de Física de 10º

El libro de texto desempeña un papel prioritario en el sistema de enseñanza colombiano. Se concibe como un objeto de representación en torno del cual se organizan los conocimientos escolares por impartir. Es el apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos, e instrumento de poder dado que contribuye a la unificación lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes (Cantoral, s/f).

Dada la relevancia del libro de texto en nuestro contexto, y partiendo de la creencia de que los libros de texto constituyen un fiel reflejo del saber que se tiene que enseñar, es decir del tipo de conceptos (matemáticos o físicos) que se tienen que reconstruir en la escuela para ser enseñados (Espinoza, 1998), pero igualmente conscientes de las diferencias que aparecen una vez se convierte éste en saber enseñado (de ahí la importancia de hacer una revisión de lo que el profesor hace en el aula de clases), hemos decidido centrar nuestro análisis en la organización de los contenidos y la forma cómo definen el objeto velocidad algunos de los libros de texto de física más utilizados por los profesores en Barranquilla. Esto nos dará una visión general de las restricciones que el profesor tiene en lo que concierne al conocimiento específico, ya que en los libros de texto se manifiestan, entre otros, concepciones, obstáculos (epistemológicos y didácticos) y también dificultades (Sánchez y Contreras, 1998), todas ellas relacionadas con el saber específico. Su análisis nos permitirá sacar conclusiones que afectarán la enseñanza de los conceptos de derivada y velocidad.

En total nos centraremos en la organización que hacen de los contenidos y la forma como definen el objeto velocidad instantánea cuatro de los libros de texto de Física de 10º más utilizados en la actualidad (Badillo, 1999):

Libro de texto 1: - **Física 10.**
Quiroga, Jorge
Medellín: Editorial Bedout (1996).

Libro de texto 2: - **Investiguemos Física 1.**
Villegas, Mauricio y Ramírez, Ricardo.
Editorial Voluntad, Bogotá, 1989.

Libro de texto 3: **- Física 1**
Tippens, Paul.
Bogotá: Editorial McGraw Hill (1992).

Libro de texto 4: - **Física 1.**
Valero, Michel.
Bogotá: Editorial Norma (1976).

Como ya referenciamos en la tabla 7, el programa de física de 10º que plantean los libros de texto incluye la introducción y el desarrollo del objeto velocidad instantánea dentro del estudio general de la cinemática clásica. A continuación presentaremos las definiciones que proponen los cuatro libros de texto que usualmente son más seguidos por los profesores de física en Barranquilla. Éstas nos permiten verificar que la definición del objeto velocidad en la institución de bachillerato colombiano se introduce utilizando la notación de incrementos, y en la mayoría de los textos no se hace un tratamiento previo de los conceptos y de los signos matemáticos inmersos en ellas.

En la definición que propone el libro de texto 1, encontramos que en la intención de simplificar la definición formal en términos de límite que están utilizando para introducir el objeto de velocidad instantánea, los autores cometen los siguientes errores: (1) hay un intento por utilizar coordinadamente la notación incremental y la notación funcional del objeto velocidad media pero sin llegar a relacionarlos, lo cual puede generar conflictos semióticos y dificultades en la comprensión de estos objetos; (2) se apoyan en una representación gráfica que permite visualizar el paso del objeto tasa media de variación al de velocidad media, pero que es poco clara y no está acompañada de una aproximación numérica que ayude a los estudiantes a ver realmente el paso al límite; y (3), se utiliza la notación funcional para definir la tasa media de variación y la notación incremental para definir el objeto velocidad instantánea, dejando a los estudiantes la responsabilidad de coordinarlas y relacionarlas.

Para hallar el valor de la velocidad en el punto P, basta tomar en cuenta otro punto tal como el M, muy cercano de P. Si unimos los puntos PM y buscamos la pendiente de la recta, hallamos la velocidad media entre ellos; pero si el punto M se considera cada vez más cercano al P, llegará un momento en que los dos puntos se superpongan y la recta que los unía se habrá transformado en una tangente a P, cuya pendiente será la velocidad en dicho punto.

A la velocidad hallada para el punto P se le conoce como velocidad instantánea y su expresión matemática sería:

$$Vi = \text{límite de: } \frac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1} \text{ conforme: } t_2 - t_1 \text{ tiende a } 0.$$

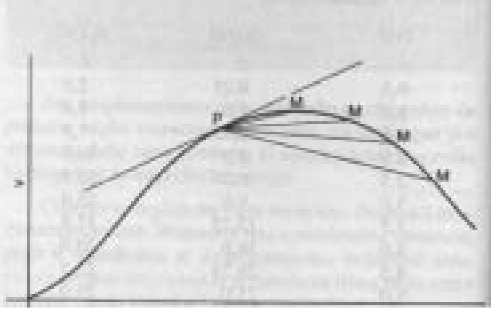
En otra forma:

$$Vi = \text{lím } \frac{\Delta d}{\Delta t} \quad \text{cuando } \Delta t \text{ tiende al valor } 0.$$

En resumen: la velocidad instantánea corresponde al límite de la velocidad media, cuando el valor del tiempo tiende hacia cero.

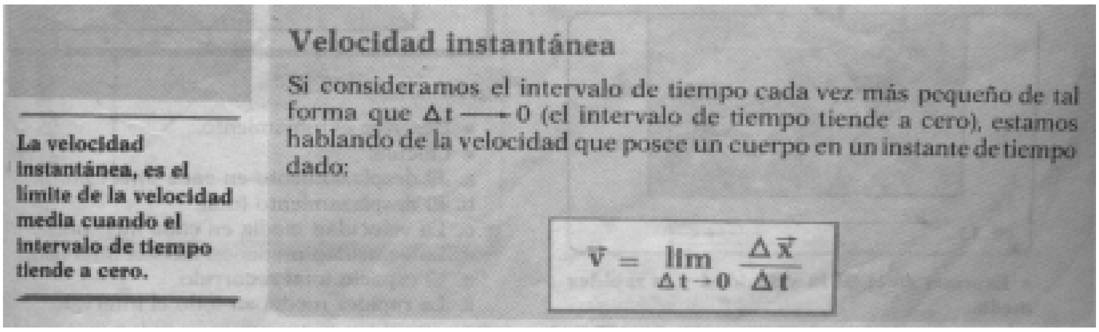
Veamos otra clase de movimiento en el que el cuerpo se ha desplazado de acuerdo con la siguiente tabla de valores:

Ya sabemos cómo hallar la velocidad media entre dos puntos, pero ahora nos interesaría, cómo hallar la velocidad en un punto como el P, figura 4-8.



(Tomado del libro de texto de Física de la *Editorial Bedout*, 1996)

El segundo libro de texto inicia con la definición de la tasa media de variación utilizando la notación incremental y posteriormente, y de manera rápida, introduce la definición de la velocidad instantánea dedicándole solo el espacio que mostramos a continuación. En esta definición, encontramos las mismas dificultades descritas en el análisis de la definición del libro anterior, con el agravante que no hay ningún apoyo gráfico que ayude a los estudiantes a visualizar los objetos inmersos.



Velocidad instantánea

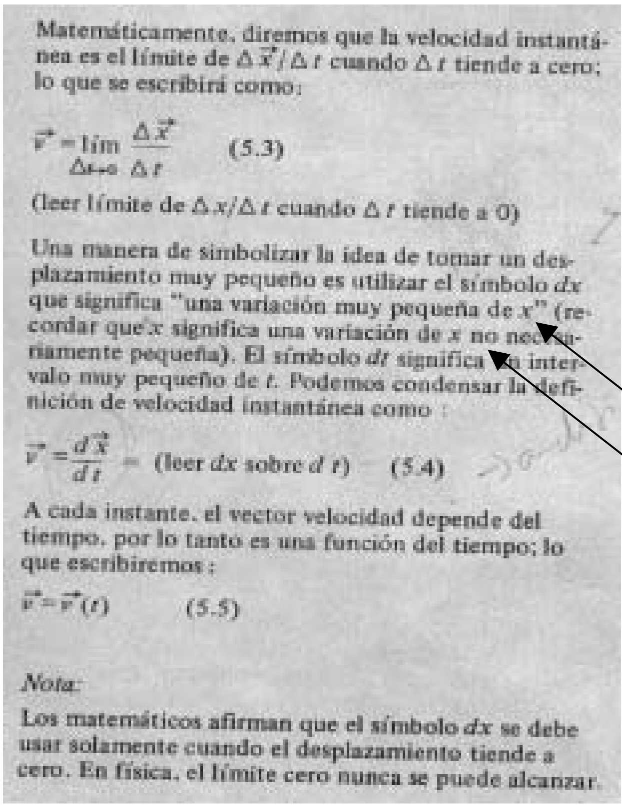
Si consideramos el intervalo de tiempo cada vez más pequeño de tal forma que $\Delta t \longrightarrow 0$ (el intervalo de tiempo tiende a cero), estamos hablando de la velocidad que posee un cuerpo en un instante de tiempo dado:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

La velocidad instantánea, es el límite de la velocidad media cuando el intervalo de tiempo tiende a cero.

(Tomado del libro de texto de Física de la *Editorial Voluntad,* 1989)

Por su parte, el libro 3, además de las dificultades y errores descritos en el análisis de los libros 1 y 2, introduce más complejidad semiótica al tratamiento del objeto velocidad instantánea, al introducir en este nivel, además de la notación incremental la notación diferencial. La justificación que dan los autores de este libro al diferencial de *x* (*dx*), está basada en la visión inicial que proponía Leibnitz del diferencial (Bos, 1984; Font, 2000), en la que lo consideraba como una *variación muy pequeña de x*; al incremento de *x* (*Δx*) lo consideran como una variación no necesariamente muy pequeña. A partir de ahí, introduce la notación diferencial sin relacionarla con la incremental, dejando la responsabilidad al alumno de hacerlo.



Matemáticamente, diremos que la velocidad instantánea es el límite de $\Delta \vec{x} / \Delta t$ cuando Δt tiende a cero; lo que se escribirá como:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad (5.3)$$

(leer límite de $\Delta x/\Delta t$ cuando Δt tiende a 0)

Una manera de simbolizar la idea de tomar un desplazamiento muy pequeño es utilizar el símbolo *dx* que significa "una variación muy pequeña de *x*" (recordar que *x* significa una variación de *x* no necesariamente pequeña). El símbolo *dt* significa un intervalo muy pequeño de *t*. Podemos condensar la definición de velocidad instantánea como:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{x}}{dt} \quad = \text{(leer } dx \text{ sobre } dt\text{)} \qquad (5.4)$$

A cada instante, el vector velocidad depende del tiempo, por lo tanto es una función del tiempo; lo que escribiremos:

$$\vec{v} = \vec{v}(t) \qquad (5.5)$$

Nota:

Los matemáticos afirman que el símbolo *dx* se debe usar solamente cuando el desplazamiento tiende a cero. En física, el límite cero nunca se puede alcanzar.

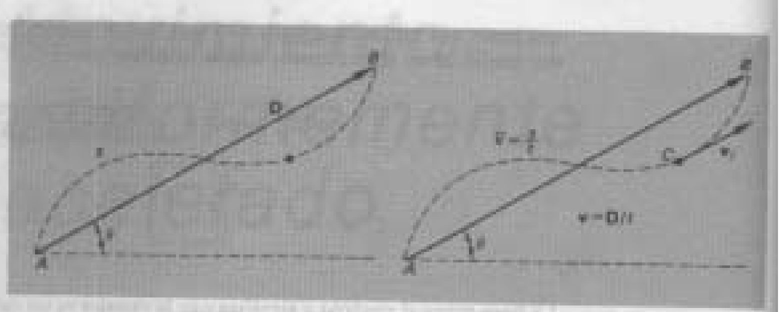
(Tomado del libro de texto de Física de la *Editorial Norma*, 1996)

dx

Δx

Finalmente, el libro 4, pasa de definir el objeto velocidad media utilizando las notaciones incremental y funcional, y lo reduce a la definición de una ecuación o fórmula sin significado alguno: $\overline{v} = \frac{s}{t}$. La velocidad instantánea aparece definida muy superficialmente y sin justificación alguna como la relación de cambio del desplazamiento al tiempo transcurrido. En ejercicios posteriores, y al definir la aceleración, simplemente los reducen al planteamiento de las ecuaciones o fórmulas de la cinemática clásica: $2as = v^2{}_f - v^2{}_o$; $v_f = v_o + at$; $s = \frac{v_f - v_o}{2} t$; $s = v_o . t + \frac{1}{2} a t^2$

Fig. 5-1 El desplazamiento y la velocidad son cantidades vectoriales, mientras que la distancia y la rapidez son independientes de la dirección; s, distancia; $\mathbf{D}$, desplazamiento; $\mathbf{v}$, velocidad; t, tiempo.



Como un ejemplo, supóngase que la distancia s de la figura 5-1 sea de 500 mi y que el desplazamiento sea de 350 mi a 45°. Si el tiempo real de viaje fuera de 8 h, la rapidez media sería

$$\bar{v} = \frac{s}{t} = \frac{500 \text{ mi}}{8 \text{ h}} = 62.5 \text{ mi/h}$$

Sin embargo, la *velocidad* media debe considerar la magnitud y dirección del desplazamiento. La velocidad promedio está dada por

$$\bar{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{D}}{t} = \frac{350 \text{ mi, } 45^\circ}{8 \text{ h}}$$

$$\bar{\mathbf{v}} = 43.8 \text{ mi/h, } 45^\circ$$

Por lo tanto, si la trayectoria de un objeto en movimiento es curva, la diferencia entre rapidez y velocidad es de dirección así como de magnitud.

Los automóviles no siempre pueden viajar con rapidez constante durante largos periodos de tiempo. Para ir de un punto A a otro B quizá nos sea necesario frenar o aumentar nuestra rapidez por las condiciones de la carretera. Por ello es a veces útil hablar de *rapidez instantánea* o de *velocidad instantánea*.

La rapidez instantánea es una cantidad escalar que expresa la rapidez que el automóvil posee en un instante dado en un punto arbitrario C. Es, por tanto, la relación de cambio de la distancia al tiempo transcurrido.

La velocidad instantánea es una cantidad vectorial que expresa su velocidad en el punto C. Es la relación de cambio del desplazamiento al tiempo transcurrido.

(Tomado del libro de texto de Física de la *Editorial McGraw Hill*, 1994)

Por tanto, el contexto en el que vive el objeto derivada en la institución de bachillerato del sistema educativo colombiano lleva a los profesores a adoptar alguna de las siguientes soluciones: (1) que los conceptos físicos (velocidad, aceleración, etc.) se reducen a la manipulación de reglas, fórmulas y técnicas, propias de la matemática, y distintas del tratamiento que se hace de los mismos conceptos en las otras ciencias; (2) El uso de la notación incremental, en la asignatura de física de 10º, para definir la velocidad instantánea prevalezca en la definición de los macro objetos f ’(a) y f (x), lo cual no ayuda a la comprensión y relación de los mismos y genera conflictos semióticos que son explicados más detalladamente en el análisis *micro* (capítulo 5); y/o (3), los profesores hacen caso omiso de los conflictos semióticos y la introducción de los conceptos del cálculo diferencial se centran también en la manipulación y aplicación de técnicas algebraicas de derivación en detrimento de la fenomenología asociada a los conceptos.

Todo lo anteriormente descrito, podría ayudar a entender: (1) los conflictos semióticos con los que se encuentran los profesores al definir los macro objetos f ’(a) y f ’(x) usando la notación incremental influenciados por la física; (2) el fenómeno de compartimentación exhibida por algunos de los profesores en el tratamiento de los objetos espacio, tiempo y velocidad cuando se enfrentan a situaciones enunciadas en un contexto físico que involucran indirectamente a los conceptos del cálculo. Igualmente, cuando se plantean situaciones, que involucran a los mismos conceptos, pero en un contexto algebraico del cálculo diferencial –nos referimos al caso de las respuestas de la paradoja de Zenón, en donde algunos de los profesores aplican las ecuaciones de la cinemática no fueron capaces de interpretar los resultados en términos de los conceptos del cálculo. Sin embargo, cuando le pides explícitamente encontrar la velocidad de un móvil en un problema propuesto en el contexto del cálculo diferencial, son capaces de resolverlo y justificarlo coordinando los objetos velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente y tasa instantánea de variación.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS DEL ANÁLISIS *MICRO*:

Conocimiento profesional del profesor

5.0. A manera de introducción

Este capítulo recoge el análisis de las componentes del conocimiento profesional del profesor que hemos considerado en este estudio, como son: el conocimiento del contenido (disciplinar) y el conocimiento didáctico del contenido. Dado que hemos considerado la naturaleza situada del conocimiento profesional del profesor en la institución en la que desarrolla su práctica profesional, como un paso inicial hacia la sugerencia de algunos lineamientos para la formación permanente e inicial del profesorado de matemática y de física de Colombia, nos interesa en cada uno de los casos describir minuciosa y rigurosamente cada una de estas componentes y la integración de las mismas en la definición de la agenda de enseñanza del concepto de derivada en el nivel de bachillerato del sistema educativo colombiano.

Esta rigurosidad en la descripción detallada de cada una de las categorías definidas para el estudio de las componentes del conocimiento profesional del profesor puede, en algún momento, valorarse como negativa debido a las siguientes razones: (1) la extensión de la memoria si presentábamos por escrito los cinco casos; (2) las similitudes que hay en algunos de los casos estudiados; y (3), la metodología que adoptamos para describir cada caso, en la que el formato de redacción es bastante parecido, porque tratábamos siempre de manejar las mismas variables, llegándose a tornar repetitivo y aburrido. Por estas razones, tomamos la decisión de presentar en este capítulo el estudio completo de dos de los casos, con el objetivo de mostrar tanto la metodología diseñada como la adaptación de los marcos teóricos utilizados; y remitir a los anexos el análisis de los otros tres casos estudiados; así: caso A, caso C y caso D.

Por tanto, este capítulo se encuentra estructurado en tres secciones. En las dos primeras secciones, describimos el análisis de dos de los casos de los profesores, así: caso B y caso E. Posteriormente, en la tercera sección, presentamos una descripción del análisis global de los cinco casos en la que ya se sugieren algunas conclusiones e implicaciones del estudio. La lectura de este apartado, puede ser bastante interesante, porque permite ver los matices generales que caracterizan a cada uno de los casos; e igualmente, se describe como se incorporan los resultados del análisis de las componentes del conocimiento profesional del profesor en la revisión de la descomposición genética inicial del concepto de derivada.

5.1. CASO DEL PROFESOR B

5.1.0. A manera de descripción del caso del profesor B

El profesor B es licenciado en ciencias de la educación con especialidad en matemática y física, egresado de la Universidad del Atlántico en el año 1980. Tiene una experiencia laboral de 22 años como profesor de matemática y de física en un colegio oficial del sector rural del Departamento del Atlántico (Colombia), y 5 años como formador de futuros profesores de educación básica con énfasis en matemática, en la misma universidad pública. Es un profesor preocupado por su formación permanente, manifiesta haber participado en muchos cursos de actualización ofrecidos por las entidades gubernamentales, haber realizado una especialización en la enseñanza de las ciencias naturales y un diplomado en educación matemática en la misma universidad.

Consciente de la importancia de la reflexión sobre la práctica docente en el seno de colectivos de profesores, ha dirigido grupos de reflexión de profesores (microcentros financiados por el gobierno) enfocados en las ventajas, dificultades y problemas del trabajo en el laboratorio de física. Se considera una persona muy activa y constante en su autoformación, manifiesta interés por la lectura de libros de Historia de la matemática, Educación matemática, Investigación e innovación educativa y de todas las publicaciones de las reformas y actualizaciones curriculares emanadas por el MEN. Ha desarrollado y dirigido investigaciones en el campo de la enseñanza de las ciencias y la matemática en los niveles de secundaria y primaria del sistema educativo colombiano.

5.1.1. Conocimiento disciplinar: la derivada como objeto matemático

Para el análisis del esquema de derivada que tiene el profesor B, se tendrán en cuenta las respuestas dadas a los problemas 1, 2, 3, 4 y 5 del cuestionario indirecto -nos referiremos a lo largo del análisis como 1-C, 2-C, 3-C, 4-C y 5-C, respectivamente y las respuestas a los problemas I, II, III y IV de las viñetas como I-v, II-v, III-v y IV-v, respectivamente. Las respuestas a los problemas 3-C, 4-C y V-v, nos permiten una primera aproximación a la relación entre los objetos pendiente de la recta tangente, límite de la tasa media de variación y razón de cambio de los profesores. Posteriormente, el análisis de los problemas 1-C, 2-C y IV-v nos permite profundizar en la comprensión gráfica de la función derivada y su relación con la comprensión gráfica de la función y de su derivada en un punto. Por otra parte, las respuestas a los problemas 5-C, I-v, II-v y III-v nos permiten profundizar en las relaciones entre la derivada en un punto y la función derivada desde la dimensión algebraica. Finalmente, la unión de estos tres análisis parciales nos permite describir la comprensión que tienen los profesores, entendida en términos de relación y coordinación, de los macro objetos derivada en un punto y función derivada, y, por tanto, definir el nivel de comprensión que tienen del esquema de la derivada.

Después de analizar las respuestas del profesor B a los problemas planteados, inferimos que tiene un nivel de comprensión del esquema de la derivada trans algebraico-trans gráfico, tal y como se ilustra en el figura 1. Este esquema se caracteriza por tener una perspectiva objeto de los macros objetos f '(a) y f '(x), que son coordinados en la resolución de problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos. Esta perspectiva objeto de los macro objetos f '(a) y f '(x), está determinada a su vez, por la coordinación interna de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f '(a); y por el proceso de síntesis de estos tres objetos O_1, O_2 y O_3 en los objetos O'_1, O'_2 y O'_3 que engloba el macro objeto f '(x). En general, encontramos que el profesor B, en los procesos de resolución de los problemas planteados, activa una serie de procesos cognitivos complejos como son: (1) interiorización de acciones en procesos; (2) encapsulación de procesos en objetos y desencapsulación de objetos en procesos; (3) síntesis de procesos en esquemas; y (4), coordinación de acciones y procesos, tal y como se ilustran en la figura 1.

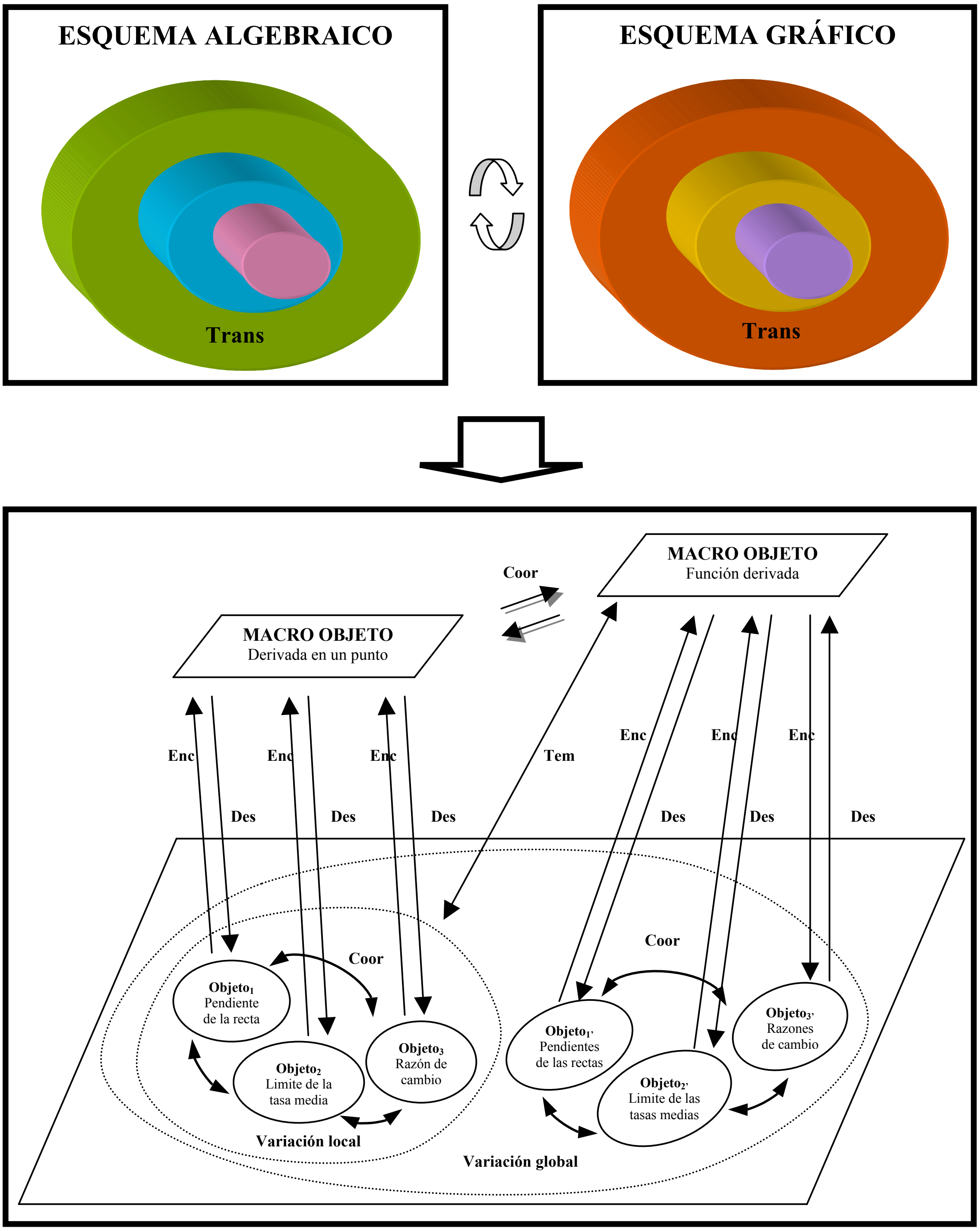


Figura 1. Nivel trans algebraico - trans gráfico del esquema de la derivada

A continuación nos detendremos a describir los aspectos del concepto de derivada que tuvimos en cuenta para caracterizar el desarrollo del esquema de este profesor.

5.1.1.1. Relación entre el objeto pendiente de la recta tangente y el objeto razón de cambio en la construcción del macro objeto derivada en un punto

Las respuestas del profesor B a los problemas 3-C, 4-C y V-v muestran que, por un lado, existe una coherencia interna en los procesos de resolución que aplica cuando aborda los problemas enunciados en un registro gráfico, y por otro lado, hay una consistencia en el manejo de los conceptos implícitos en la resolución de los mismos (ver figura 2). Con relación a la coherencia interna del proceso de resolución del problema, encontramos que el profesor B aborda los tres problemas usando sólo la información que le proporciona el gráfico, y en la mayoría de los casos, da respuesta a los interrogantes sin tener que recurrir a información externa ni a manipulación de procesos algebraicos, exhibiendo una comprensión gráfica de los conceptos involucrados en los mismos, tales como: función, pendiente de la recta tangente, tasa media de variación, razón de cambio, derivada en un punto y función derivada.

Un aspecto a resaltar en los procesos de resolución de estos problemas, es el dominio que exhibe el profesor B tanto de la lectura como de la interpretación de gráficas que involucran diferentes magnitudes (cantidad de agua-tiempo, espacio-tiempo, y *x*-*y*), lo cual refleja la capacidad que tiene el profesor B para describir la función representada tanto globalmente como localmente. Otro aspecto a resaltar en esta resolución es el reconocimiento de los macro objetos derivada en un punto y función derivada tanto en el análisis de la variación local como global de las funciones; y de su relación con los objetos pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación y razón de cambio.

En este sentido, al analizar la reflexión y valoración que el profesor B hace del problema 3-C, encontramos aspectos interesantes sobre la enseñanza del concepto de derivada, tales como: la importancia que le otorga a las traducciones entre representaciones de la función y de su derivada, las dificultades en la interpretación de gráficas (tanto de la función como de su derivada), y las limitaciones que comporta para los alumnos una actividad matemática centrada en los procesos algebraicos.

> "Allí, el muchacho **para poder responderlo debe tener claridad sobre el concepto de derivada como la pendiente de la recta tangente, es decir el estudiante debe dominar la interpretación de gráficas, y en nuestro medio esto es una debilidad, y además comprender a la derivada como pendiente de la**

> **recta tangente**. En este caso específico la diferencia que veo con el examen que yo realizo es que **aquí te dan una gráfica, aquí no hay fórmula por ningún lado**, en el examen que yo realizo, doy una tabla de datos y pedimos una gráfica, y se entra en hacer un análisis similar. **Aquí no usan ninguna ecuación**, sin embargo, en uno de los problemas que yo planteo se entra a dar una tabla y a deducir una ecuación... Las dificultades que podrían tener en este punto es que... Esto **aquí no te piden hacer cálculo directo sino es analizar la pendiente de la tangente en cada punto, así como te la dibujo yo aquí en este caso... y tendrían que hacer esto del dibujo para resolverlo, es decir trazar las tangentes.**"

Consideramos que las respuestas a los ítems *c), d)* y *e)* del problema 3-C, pueden ser un buen indicador para analizar la comprensión gráfica de los macro objetos f '(a) y f '(x). Se da la coincidencia de que, el profesor B, al justificar la respuesta dada a este problema, insistió en centrarse en estos ítems. De la respuesta del profesor B podemos inferir lo siguiente: (1) para analizar la derivada en un punto (visión local) coordina los objetos O_1, O_2 y O_3; (2) sintetiza el macro objeto derivada en un punto en el macro objeto función derivada; y (3), coordina estos dos macro objetos en el análisis tanto de la variación global de la función como en el análisis de la variación local de la misma.

En las repuestas a los ítems *c)* y al *d)* del problema 3-C se aprecia la forma en que el profesor B coordina los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio, y a su vez los relaciona con el macro objeto f '(a),

> "Entonces en la pregunta en que me detendría a explicarte sería la c), qué es mayor la cantidad de agua que se estaba consumiendo a las 9 horas o a las 14 horas... **Entonces miramos la inclinación que tiene la recta tangente a las 9 y la que tiene a las 14 horas, entonces al trazar estas tangentes en este instante, vemos que a las 9 horas tiene una mayor inclinación, lo que indica que hay un mayor consumo**. **Ah y en cuanto a la d) bueno lo mismo la tangente que tenga mayor inclinación**."

En la respuesta al ítem *e)* del problema 3-C observamos que el profesor B coordina los tres objetos O_1, O_2 y O_3 en la interpretación y análisis del macro objeto f '(a). Es decir, que el macro objeto f '(a) engloba la coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3, los cuales, a su vez, encapsulan acciones, procesos, y otros objetos. En este caso concreto, en la solución dada se coordinan y se desencapsulan los objetos pendiente de la recta tangente, tasa instantánea de variación y razón de cambio, en el proceso de calcular el valor de la derivada de la función en el punto $t = 7$. Se aprecia el uso de una técnica de aproximación en el cálculo de la derivada en dicho punto, tomando dos valores cercanos a partir de la información que le proporciona la gráfica, para $t = 6$ y para $t = 8$ horas.

Problema 3-C		
Respuesta / Ítem	**Interpretación del enunciado y lectura correcta de la gráfica**	
a)	Consumo total de agua es de 20 m^3	
	B	
b)	**Algebraicamente**	**Gráficamente**
	Incremento de la función	Consumo constante
		No justifica
	B	B
c)	**Responde que en 9 >14**	
	Compara las pendientes de las rectas tangentes	
	Porque la *m* de la recta tangente en ese instante es mayor que en 14	
	B	
d)	Atendiendo a aspectos globales	
	Entre 8 y 12	
	Porque en este intervalo la *m* de la recta tangente es mayor	
	B	
e)	**Algebraicamente / Gráficamente**	
	A partir del concepto de derivada (calcula el valor de la *m* de la recta tangente en x = 7)	
	Responde explícitamente	
	Es de 0, 75 m^3 / h, porque se entiende la derivada como razón de cambio	
	B	

Problema 4-C		
Respuesta / Ítem	**Hace referencia al espacio recorrido**	**Hace referencia a la velocidad**
a-b)	Han recorrido la misma distancia en el mismo tiempo	Son diferentes
		Especifica $v_A > v_B$
	B	B
c)	**Hace referencia a la velocidad**	
	Si hay momentos donde las velocidades son iguales	
	En los lugares donde la recta tangente a la gráfica del movimiento de A sea paralela a la gráfica de B	
	B	
d)	**Hace referencia a la velocidad**	
	$v_A > v_B$	
	Interpretación local de la derivada	
	B	

Problema V-v			
Respuesta / Ítem	**Pendiente máxima**	**Pendiente mínima**	**Pendiente nula**
a)	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
	Los relaciona con el crecimiento de la función	Los relaciona con el decrecimiento de la función	No los relaciona con los puntos máx. y mín.
	B	B	B
b)	*Responde correctamente*		
	Velocidad máxima	**Velocidad mínima**	**Velocidad nula**
	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
	No relaciona con el crecimiento	No relaciona con el decrecimiento	No relaciona puntos máx. y mín.
	B	B	B
c)	Crece más deprisa	**Crece menos deprisa**	**Tasa instantánea de variación nula**
	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación positiva	Punto donde la *m* de la recta tangente tenga mayor inclinación negativa	Puntos donde la recta tangente a la gráfica sea paralela al eje de las X
	Los relaciona con el crecimiento de la función	Los relaciona con el decrecimiento de la función	No los relaciona con los puntos máx. y mín.
	B	B	B

Figura 2. Línea de coherencia de las respuestas del profesor B a los problemas 3-C, 4-C y V-v

Otro aspecto a resaltar, es la aplicación correcta que hace de las razones de cambio en la variación de magnitudes diferentes del espacio que dependen del tiempo; y se infiere de las respuestas a los ítems *b)* y *e)* un dominio de los conceptos tasa media de variación y tasa instantánea de variación; puesto que en el ítem *b)* aplica correctamente la tasa media de variación para calcular el consumo de agua caliente entre las 20 y 24 horas, mientras que en el ítem *e)* usa una técnica de aproximación (*función pendiente*) para calcular el valor aproximado de la tasa instantánea de variación en t = 7 horas.

> "En cuánto a la pregunta e) en qué unidades se medirá el agua que se está consumiendo en un instante específico, me parece una pregunta muy interesante, porque el estudiante descuida a menudo las unidades de medidas, y las unidades son interesantes... y además allí entraríamos nosotros de pronto a reforzar si el estudiante comete el error de no escribir las unidades correspondientes o de escribir otras equivocadas y también permite ver **si los estudiantes entienden la derivada como una razón de cambio entre magnitudes.** Entonces a las 7:00 horas se está consumiendo aproximadamente 0,75 m^3, deducido del gráfico, **porque lo que hago es aplicar la tasa media de variación en valores muy cercanos que pueda obtener del gráfico y entonces lo aproximo al valor que tendrá en ese instante en t = 7 horas**. Entonces tomo el de 6 y el de 8 que son los más próximos que puedo leer en el gráfico y entonces me da que aproximadamente es 0,75. Ah y se mide en m^3 o en litros, por segundo. $f'(7) \approx \frac{f(8)-f(6)}{8-6} = \frac{3-1{,}5}{2} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75m^3$."

Con la respuesta del problema 4-C, volvemos a encontrar la relación entre los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio, en este caso aplicadas a la velocidad instantánea. El profesor usa el signo de la pendiente de la recta tangente para describir el valor de la velocidad en un punto, y para describir el tipo de movimiento que representa la gráfica dada. Verbaliza la necesidad de coordinar estos dos objetos para poder llegar a la solución correcta de la situación, en términos de la derivada. Esto demuestra que, independientemente del contexto de la situación, el profesor B coordina los objetos O_1, O_2 y O_3 para describir la derivada de la función en un punto.

> "El punto 4 me gustó mucho, porque esto lo trabajamos en física... **Bueno, aquí también se usa la recta tangente a la curva,** en la primera pregunta, sobre qué ocurre en el punto P de la gráfica, entonces **comencé a analizar la gráfica desde abajo, desde antes del punto P a la gráfica correspondiente al coche A y noté que la tangente tiene mayor inclinación en el punto P y esto significa que la velocidad en ese punto es mayor para el coche A y eso hace concluir que en ese punto el coche A se alcanza al coche B para sobrepasarlo no... Ese es lo del punto P... porque en realidad alcanza a recorrer la misma distancia en el mismo tiempo**...
> **b) En cuánto a cómo son las velocidades en el punto P... de hecho la velocidad de A es mayor que la velocidad de B, entonces son diferentes**... Además hay que

anotar que **la velocidad del coche B es constante... y la del A es variable**, aumenta y luego entra a disminuir...
c) Sí en este instante... a los 10 segundos... a los 10 segundos, **porque al trazar aquí la recta tangente en este punto es paralela con la recta que corresponde a la trayectoria del coche B y lo mismo ocurre aquí en aproximadamente que 3,5... Es decir en los lugares donde las rectas tangentes sean paralelas entre sí. O sea que tengan la misma pendiente, que en este caso es cero**.
d) Y **si preguntas cuál es la velocidad mayor y por qué es mayor, entonces allí usa pendiente, calcula la pendiente del gráfico de distancia contra tiempo**."

Un aspecto a resaltar es la importancia que le otorga el profesor B a los contextos en la comprensión del concepto de derivada. Es decir que considera importante, a la hora de diseñar y plantear problemas, el manejar aspectos fenomenológicos del concepto en diferentes contextos, más concretamente, en la física (el concepto de velocidad) y en la propia matemática (el concepto geométrico de pendiente de la recta tangente).

"Bueno yo creo que el estudiante que ya tenga bien claro lo que hemos repetido muchas veces de que la pendiente de la recta tangente en un punto es la derivada en ese punto y que la derivada en un punto es la velocidad en ese punto... Entonces si él maneja bien esto no tendrá ningún problema, y más aún porque ya hemos visto problemas similares a este se trabajan en física, de pronto no con curvas... no gráficas con curvas como el coche A, sino gráficas rectas... pero él ya maneja de cierta manera desde física de 10º, él maneja situaciones como éstas."

Finalmente, con la respuesta a la situación V-v podemos corroborar la coordinación de los tres objetos O_1, O_2 y O_3 en la comprensión del macro objeto f '(a). En la justificación que hace el profesor B de las respuestas dadas, encontramos que hace una buena interpretación gráfica de los siguientes conceptos: pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función, crecimiento (o decrecimiento) de una función y de velocidad instantánea de un movimiento variado en una gráfica de espacio-tiempo.

La respuesta al ítem *a)* del problema V-v, refleja una coordinación entre los objetos pendiente de la recta tangente y el macro objeto f '(a). El profesor B, utiliza con propiedad el criterio de la primera derivada para encontrar los puntos de pendiente máxima, mínima y nula. Además, relaciona el crecimiento y el decrecimiento de la función con el signo de la derivada primera; sin embargo no verbaliza la relación entre los puntos máximos o mínimos con el valor nulo de la derivada en ese punto, pero sí que los representa en el registro escrito. A continuación presentamos un fragmento de la entrevista y los apuntes por escrito del proceso de resolución.

> “Bueno primero buscando **los puntos donde la tangente es cero, encontramos varios puntos... Yo los identifico con la recta tangente, si es horizontal (paralela al eje de las x), tiene pendiente cero**. Ahora un punto donde la tangente a la recta sea máxima, espera, creo que aquí *(y va señalando en el folio que le proporcionamos)*, porque **aquí veo que la tangente tiene la máxima inclinación y ahora, decrecimiento, aquí va creciendo, crece, decrece y aquí decrece, o sea sería menor, o sea aquí la pendiente es más inclinada, o sea aquí es menos, aquí la pendiente es mínima, porque la pendiente tiene una inclinación y la curva está decreciendo y la inclinación está en sentido contrario al positivo**, en sentido contrario, es decir los valores de la pendiente son negativos.”

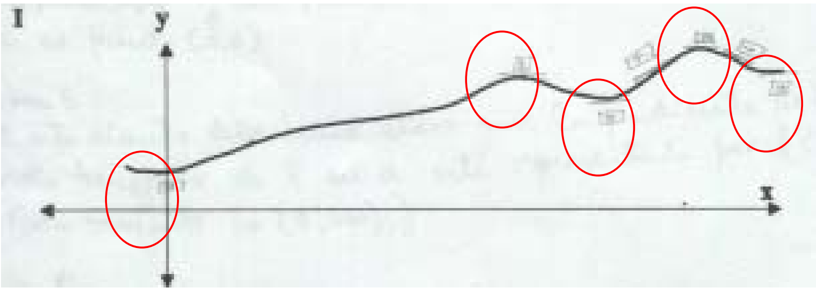


Figura 3. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor B al ítem *a)* del problema V-v

En lo que respecta al ítem *b)* del problema V-v, la repuesta es coherente con la anterior, y en este caso coordina los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio (velocidad instantánea) y los relaciona con el macro objeto f ’(a). La argumentación, de manera similar al ítem anterior, se basa en manejo del criterio de la primera derivada para encontrar los puntos de velocidad máxima, mínima y nula. Además, relaciona el crecimiento y el decrecimiento de la función con el signo de la derivada primera. Sin embargo, no relaciona explícitamente de forma verbal ni los puntos máximos o mínimos, ni los de inflexión con el valor nulo de la derivada en ese punto, pero sí que dibuja tangentes de pendiente nula en el registro escrito del proceso de resolución.

> “Bueno si me dices un punto donde tenga velocidad máxima, yo lo situaría por aquí, porque aquí la pendiente tiene una inclinación grande y coloco el signo más. Y digo que la velocidad es cero, donde las tangentes son paralelas al eje x y señalo aproximadamente aquí, entonces tenemos uno, dos puntos donde es cero y acá creo que también. Y aquí te repito considero el valor máximo positivo. Por último, veo la posibilidad de dos puntos, porque la inclinación la veo casi que igual. **¡Ojo!, Te hablo de velocidad porque estoy en un gráfico de x vs. t, y la pendiente de la recta tangente en un punto, que es la derivada en ese punto, corresponde a la velocidad en dicho punto**.”

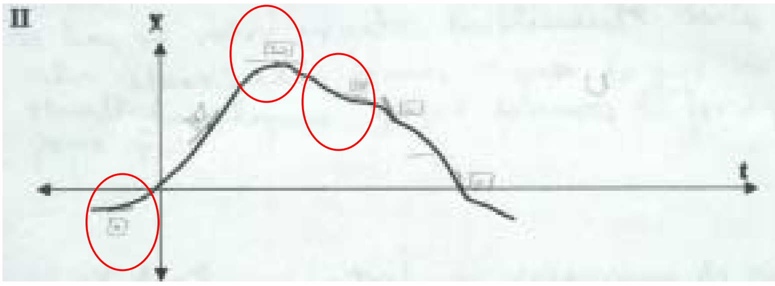


Figura 4. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor B al ítem *b)* del problema V-v

Por último, la respuesta que da al ítem *c)* del problema V-v, evidencia el reconocimiento de los objetos O_1, O_2 y O_3 inmersos en las tres situaciones planteadas. El profesor B, al igual que en los dos ítems anteriores coordina y desencapsula los objetos pendiente de la recta tangente y razón de cambio para encontrar el valor de la tasa instantánea de variación, coordinando correctamente el criterio de la primera derivada con el crecimiento y decrecimiento de la función.

> "Este es similar a los anteriores, **pero como aquí es v vs. t, entonces quiere decir que aquí estamos hablando de la aceleración**. Entonces en este intervalo grandecito es aproximadamente cero. Aquí será negativo, porque decrece, y aquí veo también una tangente horizontal por tanto también será la variación cero. Y aquí va creciendo, entonces será más. Y en ambas la inclinación es mayor. Te pondré en la gráfica un chulito donde creo que crece más y menos deprisa."

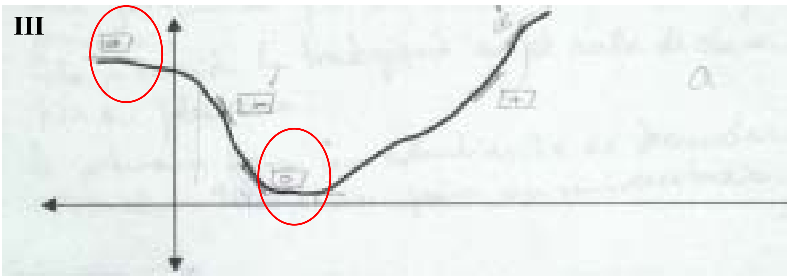


Figura 5. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor B al ítem *b)* del problema V-v

A manera de conclusión de esta primera parte del análisis podemos decir, que, si bien es cierto que las situaciones planteadas nos permiten inferir sobre la comprensión que tiene el profesor sobre la coordinación de los objetos O_1, O_2 y O_3 y su relación con el macro objeto derivada en un punto, encontramos que, en la interpretación gráfica que hace el profesor de los objetos O_1, O_2 y O_3, se evidencia un proceso de síntesis del análisis local de la variación de la función que le permite generalizarlo en la interpretación del comportamiento global de la variación de la función representada gráficamente.

5.1.1.2. Relación entre los macro objetos derivada en un punto y función derivada

i. Comprensión gráfica de la función derivada

Nuevamente, el profesor B muestra coherencia en el proceso de resolución de los problemas 1-C, 2-C y IV-v, los cuales se encuentran enunciados en un registro gráfico-verbal. El profesor aborda su solución usando la información que le proporciona el gráfico y en algunos casos la complementa con procesos algebraicos justificados (ver figura 6). Las respuestas del profesor B frente a estas situaciones muestran que además hay una consistencia en el manejo de los conceptos implícitos en la resolución de los mismos.

El profesor B en todas las situaciones donde interviene el concepto de función, trabaja con una notación funcional sin referencia a la expresión simbólica de la función, hace traducciones entre diferentes representaciones de la función y de la función derivada, y relaciona la información que le proporcionan gráficamente la función y la función derivada en el análisis monótono. Esto nos permite inferir que tiene una perspectiva objeto del concepto de función. A continuación presentamos un segmento de la entrevista realizada sobre la respuesta al ítem *a* del problema 1-C.

> "... en este caso nos dan una curva que corresponde a una función f y nos dan el punto de tangencia de coordenada (5, 3) y nos preguntan f (5), **f (5) sería el valor de la segunda variable, de la ordenada, es decir f (5) = 3, porque el punto (5,3) pertenece a la curva, que representa a y = f (x)** y entonces para x = 5, y = 3."

Además, es consciente y hace explícita la importancia que tiene la coordinación entre varias representaciones del concepto de función en la comprensión del mismo. También señala la dificultad que podrían tener sus alumnos para resolver este problema como consecuencia de la actividad matemática que usualmente realiza en el aula, centrada en la resolución de problemas que, en su mayoría, incluyen la expresión simbólica de la función como punto de partida para realizar las diferentes traducciones entre representaciones.

"... Sin embargo, es posible que **el estudiante no responda a esta pregunta por no relacionar y con f (x), o sea (y = f (x)); concretamente f (5) = y en el punto (5,3).** Esta sería la dificultad, porque como te digo el estudiante está acostumbrado a manejar, $y = f(x) = 5x^2 + 3$, por ejemplo. Es decir, que le den a él la fórmula, que le den la ecuación."

Problema 1-C	
Respuesta / Ítem	**Gráficamente**
a)	Usando el concepto de función
	B
b)	**Gráficamente**
	Calcula la *m* de la recta tangente
	Por el conciente incremental $\frac{\Delta y}{\Delta x} = m$
	B
c)	**Gráficamente**
	Topológicamente
	Explicita el resultado
	B

Problema 2-C
Una es derivada de la otra
Gráficamente
Criterio de 1ª y 2ª derivada
B

Problema IV-v	
Algebraicamente	**Gráficamente**
Traducción de G f (x) →ES f (x)) [La gráfica de la función corresponde a $y = x^3$]	Argumentando con criterios de la 1ª derivada
Relación de ES f (x) ⇨ ES f ' (x)) [Sí $y = x^3 \Rightarrow y' = 3x^2$]	
Traducción de ES f ' (x)→ES f ' (x) [Sí $y' = 3x^2$ entonces la gráfica es una parábola]	
B	B

Figura 6. Línea de coherencia del proceso de resolución de los problemas 1-C, 2-C y IV-v

Igualmente, consideramos que el profesor B exhibe una perspectiva objeto del concepto de derivada en un punto y del concepto de función derivada, puesto que establece, en primer lugar, la coordinación entre los objetos derivada de la función en un punto y el objeto pendiente de la recta tangente de la gráfica de la función en ese punto; y en segundo lugar, sintetiza todas las derivadas en un punto en una nueva función que asocia a cada punto del dominio de la función el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto.

Las respuestas a los problemas 1-C, 2-C y IV-v, reflejan que el profesor B puede pensar y tratar con los macro objetos derivada en un punto y función derivada utilizando sólo la información que le proporciona la gráfica de la función y, según sea el caso, la información gráfica de la función derivada. Más concretamente, en la respuesta que da al ítem *b)* del problema 1-C, se aprecia la relación entre los objetos derivada en un punto y pendiente de la recta tangente, puesto que entiende que para cada punto *a* en el dominio de la función *f*, el valor de f '(a) es la pendiente de la recta tangente a la gráfica en el punto (a, f (a)). Por otra parte, para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente usa el cociente incremental de la función, es decir desencapsula el objeto tasa media de variación. Por tanto, encontramos que el profesor B coordina y desencapsula los objetos pendiente de la recta tangente a la gráfica función y la tasa media de variación para encontrar el valor de la derivada en un punto.

> "... **la derivada en 5 sería la pendiente de la recta tangente, aquí nos dan la recta tangente que pasa por los puntos de coordenadas (0,1) y (5,3), y luego hallamos la pendiente por la fórmula m =** $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{3-1}{5-0} = \frac{2}{5}$ **, luego la derivada de f en el punto (5,3) será f '(5) =** $\frac{2}{5}$**.** En este ítem yo no vería tanto el problema, el estudiante debe tener claro que **la pendiente de la recta tangente de f en el punto (5,3) es la derivada en ese punto**. Entonces allí, creo que no... no creo, sino no tendría dificultades."

Otro aspecto que podemos inferir de la justificación a la respuesta anterior, complementándola con la respuesta que da al ítem *c)* del problema 1-C, es que el profesor B, maneja varias interpretaciones de la recta tangente. Por un lado, es la recta más próxima a la gráfica de la función (curva) en el entorno del punto, y por otro se deja entrever la interpretación de la recta tangente como límites laterales (referencia al límite del cociente incremental).

> "... este me dio una frenada, cuánto es el valor de f (x) en x = 5.08, como solamente conocemos el punto de coordenadas (5,3) la respuesta que yo daría **es que f (5,08) es aproximadamente 3 y lo miré de dos formas, bueno una forma mirando la ecuación de la recta tangente, entonces calculo f (5.08) y me da aproximadamente 3, 02... O un valor próximo a 3. Y con la... en la gráfica también mirando lo del límite cuando nos aproximamos a 5 por la derecha y por la izquierda, o sea nos aproximamos a 3 por la derecha, o sea de esas dos formas la vi, pero no es un valor exacto**."

En general en lo que respecta al problema 1-C, el profesor reflexionando sobre la actividad matemática que genera en el aula, lo considera como un problema no rutinario, porque incluye el manejo de diferentes representaciones del concepto función y de diferentes técnicas (como por ejemplo de aproximación numérica) que el estudiante no está acostumbrado a aplicar en la resolución de problemas que realizan en la clase de matemática. Curiosamente, el profesor B en la respuesta que da al ítem *c)* de este problema, no aplica técnicas de aproximación numérica a partir del manejo algebraico, sino que aplica una técnica de aproximación gráfica, apoyándose en la recta tangente en el punto dado y en los límites laterales.

> "**Para el estudiante para mí sería bastante difícil, porque él está acostumbrado a manejar situaciones concretas, o sea que él conozca la ecuación, la fórmula de la función e intenta calcular y así no lo haría. Lo otro es que como la respuesta no es un valor exacto**... esto le daría problema porque no está acostumbrado a dar valores aproximados."

Igualmente, el profesor B relaciona y coordina los macro objetos derivada en un punto y función derivada en la resolución de problemas enunciados gráficamente; aplicando justificadamente los criterios de la primera y segunda derivada para describir la variación local y global de la función representada gráficamente. Esto le permite manejar una variedad, tanto de traducciones entre representaciones de los conceptos de función y función derivada, como de relaciones entre representaciones de los conceptos de función y de la función derivada. Por ejemplo, en el problema 2-C hace correctamente tanto las traducciones entre representaciones del concepto de función (G f (x)→DV f (x)) y de la función derivada (G f '(x)→DV f '(x)), como las relaciones entre f (x) y f '(x) del tipo: G f (x)⇨G f '(x) y G f '(x)⇨G f (x), llegando a la solución correcta del mismo.

> "Tal, para el caso de que la función aquí... **yo diría que la función es la de abajo que yo la marqué con f (x) y con el número 1 en el gráfico... Ésta... En este caso, aquí esta función es creciente, si la función es creciente, su derivada debe ser con valores positivos, eso va desde menos infinito, aquí no aparecen valores de este lado, hasta -2, luego de -2 hasta -1 es decreciente, sí entonces los valores de la derivada deben ser negativos, y aquí están negativos. Seguimos entonces, otro f es aquí cóncava desde -2,5 hasta -1, sí es cóncava hacia abajo entonces la función derivada debe ser decreciente, como está aquí** (señala en la gráfica de la figura 7, la curva que definió como f '(x) con el número 2). **Y eso lo seguimos corroborando con los demás intervalos.**"

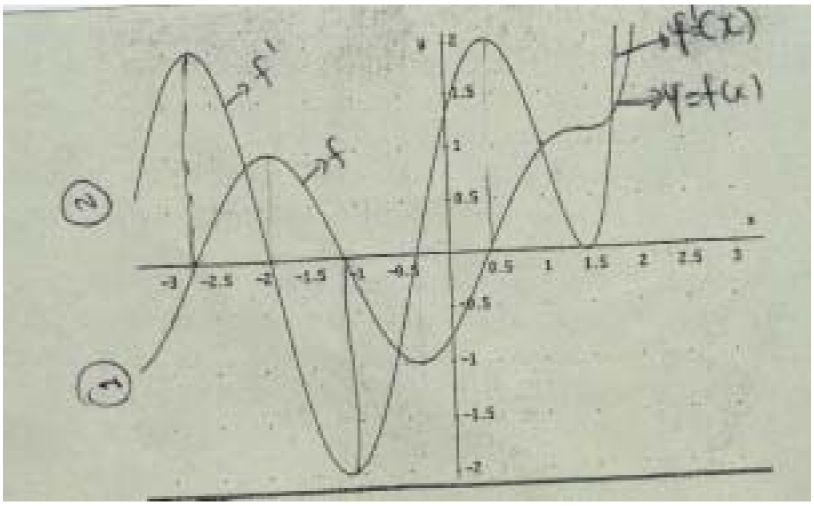


Figura 7. Registro gráfico del proceso de resolución del profesor B al problema 2-C

El profesor B considera este segundo problema, al igual que el 1-C, como una situación no rutinaria, teniendo en cuenta la actividad que realiza en el aula. Cree que es un problema complejo, que difícilmente sus estudiantes podrán resolver correctamente, puesto que requiere del dominio y comprensión gráfica de los conceptos de función, derivada en un punto y función derivada. Este dominio implica la aplicación de los criterios de la primera derivada y segunda derivada en el análisis local y global, es decir, la síntesis del análisis de la variación de la función punto a punto en el análisis de la variación de la función en un intervalo, o en todo el dominio de la función.

> “El segundo punto, ya yo diría que el estudiante nuestro no resolvería esta situación... no la resolvería porque entrarían unos elementos... unos elementos en que el estudiante eh... no lo maneja con toda precisión... **yo trabajaría esta situación en el aula de clase para discutir en grupo... a mí me parece una situación poco adecuada para estudiantes de secundaria, estaría bien para un universitario**...”

Finalmente, el problema IV-v, al igual que el 2-C nos permite ubicar la comprensión de la función derivada que tiene el profesor B, en términos de la perspectiva objeto. En su respuesta inicial a esta situación, da una argumentación basada en aspectos algebraicos de la relación entre la función y la función derivada. En primer lugar, hace una traducción entre representaciones de la función, coordinando la gráfica de la función con la expresión simbólica que representa (G f (x)$\rightarrow$ES f (x)). Es decir, que asocia un modelo matemático al prototipo gráfico de la función dada. Una vez asignado el modelo matemático de la función inicial, relaciona la expresión simbólica de la función con la expresión simbólica de la función derivada, a partir de la aplicación de la técnica indirecta de las reglas de derivación (ES f (x)⇨ES f ’(x)), y, finalmente, realiza una traducción entre representaciones de la función derivada que le permite encontrar la gráfica de la función derivada que se le pide (ES f ’(x)→G f ’(x)). Si bien es cierto que este proceso inicial de resolución nos permite ver la función derivada que maneja el profesor B desde una perspectiva proceso, en la que requiere de la expresión simbólica de la función para encontrar la gráfica de la función derivada, inmediatamente después inicia un segundo proceso de resolución gráfico coordinadamente con el primero, en el que aplica y justifica correctamente los criterios de la primera y de la segunda derivada.

La coordinación que hace el profesor B de los dos procesos de razonamiento para llegar a una respuesta correcta del problema planteado nos lleva a concluir que el profesor B tiene una perspectiva objeto de la derivada en un punto. Por otra parte, el proceso de síntesis del análisis local en un análisis global de la función nos lleva a concluir que también tiene una perspectiva objeto de la función derivada. Por tanto, en general podemos concluir, a partir de las respuestas a los problemas planteados, que el profesor B tiene un nivel trans del esquema gráfico del concepto de derivada.

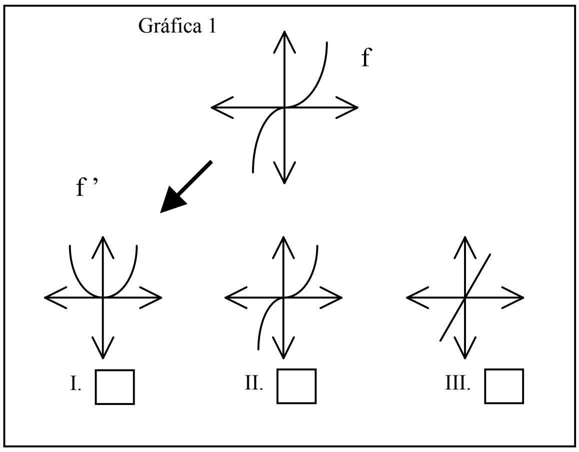


Figura 8. Respuesta del profesor B al problema IV-v

“Bueno, **el gráfico de esta función corresponde, por su forma a una función cúbica, y su derivada corresponde entonces a una función cuadrática, porque si la función tiene potencia *n*, entonces la función derivada tendrá potencia *n-1***. Otro aspecto es que **cuando la función es creciente, y esta función que tú me das en el gráfico 1 es creciente en todo su dominio, entonces los valores de la función derivada deben ser positivos. Por tanto yo escojo la I y no las otras**

dos. Porque las otras dos toman valores negativos en el intervalo de (∝, o), y **además los grados de la función derivada son de tercer grado y de primer grado en la II y III, respectivamente**."

ii. Comprensión algebraica de la función derivada

El profesor B al abordar la solución de los problemas 5-C; I-v, II-v y III-v mantiene una coherencia en el proceso de resolución (ver figura 9), y sigue mostrando consistencia en el manejo de los conceptos que se encuentran inmersos. En la valoración que hace de los problemas estudiados, el profesor B considera que el 5-C es un ejercicio rutinario dentro de la actividad matemática que realiza con sus alumnos en el aula, afirmando que en el proceso de resolución difícilmente sus estudiantes tendrán dificultades para resolverlo correctamente.

> "**Yo creo que ese sería el más fácil... (risas)... el más fácil de resolver**, **el que más se usa**, sí porque allí tendría que calcular únicamente la pendiente por la derivada... **Porque ya tienen la ecuación... Este es el tipo de situaciones que ellos manejan más**. Está como que más fácil para ellos..."

En el proceso de resolución de este problema el profesor B, nuevamente y ahora en un contexto algebraico, coordina y relaciona los objetos derivada en un punto y pendiente de la recta tangente para encontrar la ecuación de la recta tangente. Inicialmente encuentra la expresión simbólica de la función derivada a partir de la expresión simbólica de la función (ES f (x)⇨ES f '(x)), usando correctamente la técnica indirecta de las reglas de derivación. Un aspecto a resaltar es que el profesor B coordina inconscientemente los macro objetos de función derivada y derivada en un punto como clase y elemento, cuando para calcular el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto dado lo hace a partir de la expresión simbólica de la función derivada. Sin embargo, creemos conveniente señalar que el profesor no hace explícita verbalmente esta relación.

> "Yo lo resuelvo así: Si $f(x) = 3x^2 - 2x$, en el punto de abscisa 2, entonces $y = f(2) = 8 \cdot f'(x) = 6x - 2$, **$f'(2) = 10$, esta será la pendiente**... y como esta recta tangente pasa por el punto (2,8), entonces: $y - 8 / x - 2 = 10 \Rightarrow y - 8 = 10x - 20 \Rightarrow -10x + y + 12 = 0$, es la ecuación pedida."

Problema 5-C
Algebraicamente
Diferencia implícita de la función derivada y de la derivada en un punto
B

<table>
<tr><th colspan="5">Problema I-v</th></tr>
<tr><th colspan="2">Atendiendo a aspectos globales</th><th colspan="3">Atendiendo a aspectos locales</th></tr>
<tr><td colspan="2">Define la función derivada</td><td colspan="3">Define la derivada en un punto</td></tr>
<tr><td>Hace énfasis en la sintaxis</td><td>Hace énfasis en la semántica</td><td colspan="3">Hace énfasis en la semántica</td></tr>
<tr><td>$f'(x) = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$</td><td>Razón de cambio</td><td>Significado geométrico</td><td colspan="2">Significado físico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td rowspan="2">B</td><td>*m* de la recta tangente a la gráfica en un punto fijo</td><td>Velocidad instantánea</td><td>Aceleración</td></tr>
<tr><td>B</td><td>B</td><td>B</td></tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">Problema II-v</th></tr>
<tr><th colspan="2">Atendiendo a aspectos globales</th><th>Atendiendo a aspectos locales</th></tr>
<tr><td colspan="2">Define la función derivada</td><td>Define la derivada en un punto</td></tr>
<tr><th>Algebraicamente</th><th>Gráficamente</th><th>Gráficamente</th></tr>
<tr><td>Modelo matemático de la función derivada</td><td>Función que asocia a cada punto del dominio la *m* de la recta tangente a la gráfica de la función en ese punto</td><td>El valor de la *m* de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto fijo</td></tr>
<tr><td>B</td><td>B</td><td>B</td></tr>
</table>

Problema III-v
Algebraicamente
Aplicando la técnica indirecta de las reglas de derivación. (derivada de la función exponencial $y = a^x$)
Explicita el resultado: ($m = y' = 4^x . \ln 4 \approx 22$)
No justifica el resultado
B

Figura 9. Línea de coherencia del proceso de resolución del profesor B a los problemas 5-C, I-v, II-v y II-v

En lo que respecta al problema I-v, el profesor B al definir la derivada en un punto y la función derivada, encontramos que plantea confusamente las relaciones entre estos dos macro objetos. Establece diferencias semánticas entre los macro objetos pero no en la sintaxis de los mismos. Es decir, que aparecen el significado geométrico y el significado físico de la derivada en un punto, como el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica y el valor de la velocidad instantánea en el punto, respectivamente; y el significado físico de la función derivada como razón de cambio entre magnitudes (inferimos que se refiere a la función límite de las razones de cambio). Sin embargo, no hay una distinción clara entre la definición formal de la derivada en un punto y de la función derivada, apareciendo sólo la definición formal de la función derivada como el límite del cociente incremental cuando el incremento de la variable independiente tiende a cero.

> "El concepto de derivada, **la derivada en un punto viene siendo como la pendiente de la recta tangente en un punto y que es igual al límite de la variación de la función sobre la variación de la variable independiente, cuando la variación de la variable independiente tiende a cero**. Y daría el ejemplo del caso de la velocidad instantánea o de la aceleración en la física. **En general, es una razón de cambio que es el límite del cociente incremental cuando el Δx tiende a 0,** $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$."

El profesor B, en la respuesta al problema II-v, elicita claramente las relaciones entre los macro objetos derivada en un punto y función derivada. En la respuesta a éste, se hace explícita la relación entre estos macro objetos como elemento y clase respectivamente. Manejando, tanto gráfica como algebraicamente, que la función derivada es otra función que se puede entender como una clase de objetos que son la derivada de la función en cada punto del dominio, y que la expresión simbólica de la función derivada es el modelo matemático que nos permite asociar a cada punto del dominio el valor de la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en dicho punto. Es decir que nuevamente y ahora en un contexto algebraico, se ratifica la perspectiva objeto de la derivada en un punto y una síntesis del mismo para conformar el macro objeto función derivada. Esto implica que el profesor B tiene una comprensión de la función y de la función derivada que le permite hacer una descripción del análisis monótono de la función y de su derivada teniendo en cuenta tanto aspectos locales como globales.

> "**Si f (x) es la función x^2, la derivada 2x, yo entiendo acá que f '(x) = 2x, o sea que la función derivada es igual a 2x. La función derivada de f (x) = x^2 es f (x) = 2x. Mira si tengo, f (x) = x^2 derivo y es 2x, aquí para cualquier x le corresponde un f '(x) =2x y esta es la función derivada, o sea un F (x) = 2x, es decir otra función. Esto me da cualquiera de las rectas tangentes a la función f (x) = x^2 en cualquier punto.** Y entonces el muchacho aquí si quiere hallar una tangente particular, basta con que le dé el valor de x, si x = a, entonces a ese *a* le corresponde un: f '(a) = 2a..."

La respuesta al problema III-v, aporta como elemento nuevo a la descripción la ausencia de aplicación de técnicas de aproximación numérica, puesto que el profesor lo soluciona hallando la función derivada a partir de la expresión simbólica de la función (ES f (x)⇨ ES f '(x)) mediante la aplicación de la técnica indirecta de las reglas de derivación (derivada de la función exponencial), y posteriormente, calcula la derivada en un punto reemplazando el valor de x =2 en la función derivada encontrada.

> "Sí f (x) = 4 ^{x}, cuál es la derivada de esta función exponencial en x = 2, ¿verdad? **Entonces yo primero calcularía la derivada en general f '(x), que sería $4^x \cdot$ *ln* 4, entonces se reemplazaría el x = 2, f '(2) = $4^2 \cdot$ *ln* 4, entonces con una calculadora hallaría el *ln* 4 y lo multiplicaría por 4 ^{2} = 16 y me da el resultado de lo que tú me pides, o sea 22 aproximadamente**."

En general, teniendo en cuenta los problemas en los que intervienen los objetos O_1, O_2 y O_3 hasta ahora analizados para describir la comprensión gráfica y algebraica de los macro objetos f '(a) y f '(x), podemos concluir que el profesor B tiene una perspectiva objeto de la derivada en un punto que es el resultado de la coordinación de estos tres objetos. Este profesor sintetiza la derivada en cada punto del dominio de la función en la construcción del macro objeto función derivada, mostrando también una perspectiva objeto de la función derivada, a través de la coordinación de los objetos O'_1, O'_2 y O'_3, que a su vez es el resultado del proceso de síntesis de los objetos O_1, O_2 y O_3. Lo anterior nos permite inferir, que el profesor B tiene un nivel trans del esquema algebraico del concepto de derivada.

5.1.2. Conocimiento didáctico del contenido: la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje

Este apartado se encuentra estructurado en dos grandes ítems. En el primero, denominado estructura y organización del contenido matemático de derivada para su enseñanza en el nivel de secundaria, intentamos describir los elementos más significativos del contenido matemático de derivada que el profesor B resalta en el proceso de transposición didáctica. Para ello, miraremos en dos sitios: primero, en la programación y, segundo, en la unidad didáctica. Nos centraremos, en el análisis de las relaciones que establece entre los macro objetos f '(a) y f '(x), intentado focalizar las posibles ventajas o dificultades que tienen los alumnos en la comprensión de los mismos como resultado, tanto del tratamiento instruccional que da el profesor en la unidad didáctica a estos macro objetos, como del trabajo individual cuando se enfrentan a la resolución de tareas o a las definiciones que les proporciona el profesor.

En el segundo apartado, que hemos denominado estructura y contenido de las tareas y actividades que propone el profesor, intentamos describir y tipificar las tareas que diseña, implementa y evalúa para que los alumnos construyan los macro objetos f '(a) y f '(x). Para ello, miraremos en dos lugares: primero, en la unidad didáctica y, segundo, en la evaluación que hace el profesor sobre la comprensión de la derivada.

5.1.2.1. Estructura y organización del objeto matemático derivada para su enseñanza en el nivel secundaria

i. Con relación a la programación

El profesor B nos proporcionó un *plan de área* que incluye la programación de la asignatura matemática de 11º, el cual fue elaborado conjuntamente por los profesores de matemática del centro. En una de las entrevistas realizadas, el profesor destacó los siguientes elementos como importantes en el proceso de programación:

- Primero, **la importancia del trabajo en equipo** y justificó la elaboración de un plan de área que integre todas las programaciones de la asignatura de matemática de 6º a 11º, porque considera que brinda una panorámica más amplia de las dificultades que tienen los estudiantes al abordar un nuevo curso académico como resultado de la instrucción anterior, y por tanto, les permite diseñar programaciones que tengan en cuenta la problemática institucional concreta.

- Segundo, **el diseño de programaciones partiendo de las dificultades y errores de los estudiantes**. Es decir, que resalta las implicaciones didácticas que tiene el adelantarse al pensamiento de los estudiantes al diseñar la agenda de enseñanza (planificación y diseño de unidad didáctica); en términos de Simon (1995, 2000), se podría decir que, el profesor apuesta por la definición de una *trayectoria hipotética del aprendizaje* de sus estudiantes como elemento clave a la hora de elegir los contenidos y diseñar las actividades.

> "En este caso la intencionalidad es que **el profesor de secundaria no solamente se centre en la realización de la programación de un grado específico, sino que tenga una visión integral de toda la matemática que se trabaja en secundaria** (...) **para que en un momento dado él sepa cuáles son las fortalezas y**

debilidades de sus estudiantes, que tenga ya... es decir que **se adelante previamente al pensamiento de los estudiantes,** y diga... bueno yo espero que este estudiante tenga estas dificultades (teniendo en cuenta el análisis de la preparación que trae el estudiante), entonces voy a prepararles estas acciones. Por eso yo planteo allí, eh... La propuesta integral, **y esto no solamente es mi visión, es la visión de todos los colegas del área de matemática de mi colegio y lo presentamos a discusión, hicimos varias jornadas**"

Estructura del plan de área

El plan de área está estructurado en ocho partes, que denominan: identificación, objetivos, estructura, logros y logros mínimos, situación del estudiante, evaluación (criterios y estrategias), recursos (humanos y físicos) y la bibliografía. Con relación a la primera parte, se hace una descripción detallada en un cuadro sobre la intensidad horaria correspondiente por grados. Un aspecto a resaltar es que de 6 a 9 grado asignan una hora semanal específica al estudio de la geometría y cuatro horas al estudio de la matemática específica del nivel. En el caso de la matemática de 11º, que es la que nos interesa, asignan cuatro horas semanales sólo al estudio del análisis matemático.

Objetivos del plan de área

Los objetivos que plantean son generales y engloban *grosso modo* contenidos procedimentales, conceptuales y actitudinales; además, encontramos que guardan mucha relación con los propuestos por los lineamientos curriculares oficiales emanados por el MEN.

"El estudiante debe:
- Desarrollar habilidades que le permitan razonar lógica, crítica y objetivamente
- Adquirir independencia en la actividad intelectual
- Adquirir perseverancia en la búsqueda del conocimiento
- Aplicar su capacidad para resolver situaciones significativas contextualizadas
- Desarrollar habilidades en los procedimientos operativos aritméticos y geométricos
- Familiarizarse con los conceptos básicos de matemática explicitados en los ejes conceptuales
- Adquirir la precisión en la expresión verbal y familiaridad con el lenguaje y expresiones simbólicas
- Interpretar la realidad a través de modelos matemáticos."

Organización de los contenidos del plan de área

La estructura conceptual horizontal del área de matemática que presentan por grados, de la cual enfatizan que es el resultado del consenso de los profesores del área, en primera instancia encontramos que no difiere mucho de los programas curriculares oficiales en cuanto a la elección de los contenidos programáticos. En el caso de 11º, plantean la siguiente organización de contenidos,

> "1. Función: concepto. Interpretación gráfica (cartesiana). Clases. Composición. Intervalo. Clases. Sucesión. Progresión aritmética y geométrica.
> 2. Límite: concepto intuitivo. Concepto formal. Propiedades. Cálculo de límite de funciones.
> 3. Derivada: Concepto (interpretación geométrica). Propiedades. Cálculos de derivadas. Problemas".

De la organización de los contenidos que plantea el profesor B en la programación, destacaremos los siguientes aspectos, (1) sigue un itinerario tradicional, en la que previo a la introducción del concepto de derivada se desarrollan dos unidades, una dedicada al estudio de las funciones y otra dedicada al estudio del concepto de límite; (2) Se hace una referencia genérica al concepto de derivada, es decir, que no se establece explícitamente ni diferencia ni relación al tratamiento de los macro objetos f '(a) y f '(x).

Elementos en los que se basa para la elaboración de las programaciones

Al preguntarle al profesor sobre los elementos que tienen en cuenta a la hora de realizar las programaciones, encontramos aspectos interesantes que enriquecen nuestro análisis. Por un lado, nos comentó que no se ciñen linealmente a un libro de texto único, sino que la organización y jerarquización de los contenidos es el resultado de investigar y utilizar varios libros de texto, optando finalmente por la más consensuada entre el grupo de profesores. Sin embargo, destaca la libertad que tiene cada profesor en la concreción de cada una de las programaciones a la hora de diseñar y desarrollar las unidades didácticas específicas.

> "Bueno que te digo... **cuando hicimos la propuesta nosotros nos salimos del esquema de cualquier libro**, es decir, rompimos con esos esquemas, porque decimos cada vez que uno se mete en un libro, el libro tiene una visión que es

distinta a la de nosotros y nosotros nos desgastamos tratando de cumplir con ese texto (...)"

Contenidos de matemática de 11º

Con relación a la organización de los contenidos del grado 11, aclara que si bien es cierto que lo que está registrado en el plan de área es el resultado del consenso de los profesores y que en la práctica mucho de ellos las siguen; como caso particular, introduce algunas modificaciones. En lo que se refiere, a la introducción del concepto de derivada, propone algunas innovaciones fundamentadas en los aportes de algunas lecturas que ha realizado sobre la historia de este concepto, optando, al diseñar la unidad didáctica (de la que hablaremos en la siguiente sección) por un itinerario didáctico diferente, que incluye un tratamiento sobre la variación media y progresivamente se va construyendo el concepto de variación instantánea, con fundamentos geométricos (pendiente de una recta) y físicos (velocidad instantánea). Con este itinerario didáctico, no aceptado por sus colegas, persigue un acercamiento intuitivo al concepto de derivada previo a la definición formal del concepto en términos de límite. De lo anterior, podemos inferir que este itinerario didáctico, propuesto por el profesor B, sigue más fielmente el desarrollo histórico porque se basa en el método que utilizaba Newton para calcular velocidades instantáneas y en el cálculo de la pendiente de la recta tangente en un punto a partir de las pendientes de las rectas secantes, cuando estas se aproximan a la recta tangente.

> "**Eso es una consensuada, pero que no es exactamente la que yo práctico**. O sea yo mismo hago una variación a la propuesta en la programación... yo se las presento a mis colegas, y la discutimos... En esta nueva propuesta mía juego con una jerarquización de esos temas a la hora de la realidad de dar las clases con los chicos. Por ejemplo, **el concepto de derivada yo lo enfrento con un trabajo riguroso sobre la variación media e instantánea, pero fíjate tú que aquí como aparece en el programa que fue lo que el resto de compañeros insistieron en trabajar en el colegio. Es decir, aparece que primero se trabaja la definición a partir del límite, y eso, no es más que la forma tradicional de enseñanza en Colombia**... Pero entonces, ahora yo estoy experimentando **introducir la definición del concepto haciendo un trabajo previo con la variación media y como nos ayuda a construir la variación instantánea, y después definir la derivada... Y esta nueva óptica la tengo gracias a una lectura que hice de la Historia de la derivada, estudiando un poco los trabajos de Leibnitz y a Newton** (...)"

Resaltamos entonces, dos elementos en la anterior postura del profesor B, por un lado, la importancia que le otorga a la Historia de la matemática y a la evolución histórica de los conceptos matemáticos en la concreción de la programación; y por otro, la postura crítica frente al uso y elección del libro texto y los textos de consulta.

Uso de los sistemas de representación

En lo que respecta a la estructura conceptual que propone, también encontramos varios aspectos para comentar. En primer lugar, la preocupación del profesor por presentarles a los estudiantes un tratamiento intuitivo de los conceptos previo a la definición formal[1]. Lo anterior se ve tanto en el abordaje del concepto de límite, como con el concepto de derivada. Ese tratamiento intuitivo lo fundamenta en el uso de varios sistemas de representación en la resolución de tareas contextualizadas en la cotidianidad de los estudiantes. En éste caso con aproximaciones numéricas, algebraicas, gráficas y geométricas que ayuden a los estudiantes a tener una imagen más rica del concepto y no centrada únicamente en la repetición memorística de procedimientos algebraicos. En segundo lugar, resalta la importancia de tener en cuenta a la hora de diseñar las programaciones los conceptos que los estudiantes ya han trabajado en años anteriores, tratando de explicitar tanto los errores y dificultades, como el manejo conceptual adecuado de dichos contenidos. Es decir, que para introducir los macro objetos f '(a) y f '(x) parte de los objetos pendiente de la recta y velocidad media (incluso velocidad instantánea) que ya habían sido tratados en el curso anterior en las asignaturas de matemática y física de 10º.

> "(...) **primero partir de algo concreto, yo te hablo de concreto porque ellos ya manejan el concepto de velocidad media e instantánea de física de 10º, y ese es un buen punto de partida si se refuerza y además de matemática ya manejan el concepto de pendiente de la recta... si, lo que son gráficas de curvas... sí... Entonces es hacer un trabajo fuerte de afianzamiento de estas cosas que ya conocen a partir de situaciones problemas que estén más cerca de su cotidianidad... e introducir el concepto de derivada intuitivamente y luego para formalizarla se introduce numéricamente el límite se trabaja formalmente el álgebra de límite a través de problemas de derivación, aunque en la temática de la derivada hay un momento en el que hablamos del concepto intuitivo de límite (con aproximaciones numéricas y gráficas)**... Porque es que esa misma definición de límite... Bueno es mi apreciación, los estudiantes parece que no llegaran a su comprensión... yo creo que no se llega a

[1] Lo anterior lo podremos describir en profundidad cuando analicemos la unidad didáctica del concepto de derivada diseñada por el profesor.

una comprensión completa de este concepto de los deltas y creo que mejor hacer un trabajo más comprensivo para ellos... sin dejar de lado el aspecto formal de la matemática... **y me esmero por manejar cosas intuitivas para que los pelaos comprendan más el concepto y no solo graben reglas memorísticas que dan resultado pero no lo son todo**".

Tipos de contenidos y logros

El cuarto elemento es el de logros y logros mínimos, en este apartado, se especifican muy vagamente los contenidos procedimentales (destrezas, razonamientos y estrategias) y los conceptuales (hechos, conceptos y estructurales conceptuales), que deben construir los estudiantes en general del área de la matemática, y, en particular, por grados. Encontramos ausente de la programación a la hora de señalar los logros, los contenidos actitudinales que es un elemento clave dentro de la formación integral del estudiante.

En lo que respecta a la matemática de 11º se plantean que los estudiantes deberán alcanzar los siguientes logros mínimos,

"* Interpretará los conceptos de derivada e integral
* Calculará límites, derivadas e integrales
* Aplicará derivadas e integrales en la solución de problemas"

Lo anterior desvela que hay una ruptura entre los objetivos generales planteados en el apartado 2 y los logros mínimos por grados. En efecto, no queda del todo claro a la hora de determinar los logros de los estudiantes la importancia de los contenidos actitudinales. Igualmente, se presentan de manera muy escueta o están casi ausentes en este apartado aspectos remarcados en los objetivos, como lo son: (1) el papel de la **modelización** y la utilización de símbolos; (2) en relación con los **sistemas de representación**, encontramos que en la programación éstos no se tienen en cuenta a la hora de organizar la estructura conceptual; y (3), tampoco queda claro el papel de la modelización matemática en la **resolución de problemas en diferentes contextos** matemáticos y no-matemáticos. Sin embargo, a partir de la entrevista con el profesor, pudimos observar el papel que le asigna a los sistemas de representación a la hora de diseñar un itinerario didáctico, considerándolos como algo complementario a la descripción conceptual del contenido matemático. Igualmente, hace énfasis en la importancia del concepto de derivada en la modelización de tareas en la física (velocidad, aceleración, etc.), la biología (crecimiento de bacterias, etc.), la economía (costo marginal, etc.), en la vida diaria (consumo de agua, etc.), y en la propia matemática (ecuación de la recta tangente, análisis monótono de funciones, etc.).

Situación del estudiante: dificultades y errores conceptuales

En el quinto apartado, denominado por el profesor como situación del estudiante, se presenta, como resultado de una indagación previa por medio de evaluaciones (preguntas y las habilidades mostradas en la resolución de problemas concretos), un listado de conceptos con los que los estudiantes tienen problemas conceptuales y procedimentales. Concretamente, para 11º detectaron dificultades en los siguientes contenidos,

> "Factorización; gráficas de la función lineal, cuadrática y cúbica; resolución de triángulos; identidades trigonométricas, ecuaciones de la circunferencia y de la parábola"

El profesor, al preguntarle sobre el anterior listado de dificultades, señaló que las tiene en cuenta a la hora de iniciar un contenido temático que requiera del dominio de estos conceptos. Es así, como en la programación dedica una unidad al estudio y tratamiento de funciones; además, afirma que previo al concepto de límite se proponen y desarrollan tareas para afianzar la factorización. Igualmente, antes de la introducción de las reglas de derivación de las funciones trascendentes, hace un recuento sobre las funciones trigonométricas, que ya había comenzado al definir la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta tangente con la horizontal. Aquí podemos ver nuevamente como el profesor B se preocupa por definir, previamente al desarrollo de la unidad didáctica, la trayectoria hipotética de aprendizaje de los estudiantes, y a partir de allí, diseña y propone el tratamiento instruccional a seguir. Sin embargo, como podemos observar en la siguiente sección, el análisis de la unidad didáctica nos permite detectar que en el tratamiento del objeto pendiente de la recta, no aparece la interpretación trigonométrica, es decir, no se define el objeto pendiente de la recta tangente como la tangente del ángulo de inclinación de dicha recta.

> "**Yo realmente procuro tener presente estas dificultades que muestran los estudiantes en las pruebas diagnósticas para poder estructurar el programa que voy a desarrollar ese año**. Por ejemplo yo sé que los pelaos **tienen problemas en la interpretación gráfica de funciones de primer, segundo grado**, etc. **Pues entonces le dedico una unidad a un trabajo serio con funciones a**

> **partir de resolución de problemas que enriquezcan la visión que los estudiantes traen de este concepto**; también en factorización, pues entonces antes del álgebra del límite, les presento unos ejercicios que permitan afianzar esto y entonces trabajan después mejor el tema del límite, porque sino es muy difícil para los estudiantes comprender un nuevo concepto si tienen problemas con otro concepto clave (...)"

La evaluación y criterios de evaluación

Con relación al apartado de la evaluación, plantean como punto central el desarrollo de competencias matemáticas, como son: la interpretación, la argumentación y el pensamiento conjetural. Igualmente, plantean una serie de estrategias de evaluación como medios para diagnosticar los avances que muestran los estudiantes, entre ellas, la autoevaluación y la coevaluación; la técnica del taller, debates alrededor de la resolución de problemas, sustentación de trabajo, y talleres con apuntes dirigidos por monitores. Se observa una gran preocupación por parte del profesor por darles protagonismo a los estudiantes durante los procesos de construcción del conocimiento y de evaluación, ésta última entendida como un proceso dinámico, continuo y formativo. Plantean igualmente unos criterios de evaluación donde se destacan aspectos actitudinales que consideran importantes en la matemática y para la vida como: la democracia, la comunicación (verbal y oral), el reconocimiento a la individualidad, y al trabajo en equipo.

> "**Se toma la competencia como objeto de evaluación**. La competencia se asume como un saber hacer en el contexto matemático escolar. **El estudiante es competente cuando hace significación matemática que explícita en acciones de interpretar, argumentar y proponer cuando se enfrenta a situaciones problemas**"

Recursos: el uso de nuevas tecnologías

El séptimo apartado, es el de los recursos, donde diferencian dos clases de recursos los humanos y los físicos. Con relación al primero, se destaca el hecho de contar con todo el grupo de profesores que conforman el área, es decir, nuevamente se es coherente con el planteamiento inicial de la reflexión en equipo como estrategia para la mejora de la práctica. Y en lo que respecta a los recursos físicos, enumeran: el bibliobanco, instrumentos de geometría y material de apoyo. Integrando éste apartado con el de la bibliografía en el punto octavo, observamos que cuando el profesor hace referencia al bibliobanco, nos está hablando de los libros de matemática, de investigación en educación matemática, de didáctica de la matemática, de innovación en el aula, de Historia de la matemática y de los programas curriculares, que sustentan la propuesta que plantean.

Lo anteriormente señalado nos muestra que hay una preocupación por parte del profesor de fundamentar teóricamente su práctica educativa, pues no sólo se centra en el manejo de los libros de texto de matemática como único referente para su trabajo en el aula, sino por el contrario, señala como importante la interacción de varias disciplinas científicas como elementos constituyentes de su conocimiento profesional. Sin embargo, encontramos a faltar en la propuesta alguna referencia a las nuevas tecnologías, lo cual no implica que el profesor no lo considere importante en la enseñanza de la matemática, puesto que en la entrevista nos comentó sobre la problemática y limitaciones que le plantea la ausencia de las mismas en su formación inicial y permanente, y en el contexto institucional donde se encuentra inmerso.

> "(...) y éste que es del 2000 se llama *Alfa 11*, de editorial Norma, **es un libro de actualidad, que tiene como intención didáctica de trabajo, el trabajo por competencias, la novedad aquí en Colombia, y otra novedad es que tiene dos Software educativos. Aunque por motivos logísticos en el colegio no los puedo utilizar**... Tu sabes que no hay computadores en los colegios de los pueblos... **y si que veo importante este tipo de actividades que ayudan y motivan más a los estudiantes, pero no tengo elementos de formación y tampoco cuento con este tipo de material de soporte en el colegio**... tu ya sabes esto porque también trabajaste en un pueblo..."

Aspectos del conocimiento profesional

Encontramos dos elementos a resaltar en esta última parte: (1) la conciencia de las diferentes componentes que integran el conocimiento profesional del profesor, y su preocupación por la autoformación en cada una de ellas; y (2), la importancia de las nuevas tecnologías en la enseñanza de la matemática, pero también la ausencia de las mismas en la práctica del profesor por dos motivos, por falta de formación y por falta de recursos en la institución donde labora. En la tabla 1 intentamos sintetizar los aspectos más relevantes del análisis de la programación realizada por el profesor B, teniendo en cuenta las categorías del análisis que definimos para el estudio de las tareas curriculares.

CATEGORÍAS DEL ANÁLISIS			
Estructura y contenido del objeto matemático derivada		**Estructura y contenido del objeto de enseñanza y aprendizaje de derivada**	
Sintaxis / Semántica	**Sistemas de representación**	**Organización de la enseñanza**	**Diseño de actividades y tareas**
• Sigue el desarrollo histórico porque se basa en el método de Newton • Se introduce a partir de la tasa media de variación: relación entre pendiente de la recta secante y la velocidad media • Se tiene en cuenta la fenomenología del concepto: problema de la recta tangente y el de la velocidad • Definición formal en términos de límite (no establece distinción entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x)) • Reglas de derivación: polinómicas y trascendentes • Las razones de cambio permiten la modelización de tareas en otras ciencias (Biología y Economía) • Problemas de optimización: maximización y minimización de funciones	• Se consideran como algo complementario a la descripción conceptual del contenido matemático • Hay un tratamiento intuitivo del concepto a partir de un acercamiento numérico y gráfico (geométrico) • Se resalta la importancia de la interpretación numérica, gráfica y algebraica en la resolución de problemas • Se fomenta la resolución de problemas en diferentes contextos y ámbitos matemáticos y no-matemáticos	• Los objetivos son generales y se corresponden con los propuestos por los lineamientos curriculares oficiales • Se parte de las dificultades y errores de los estudiantes (trayectoria hipotética de aprendizaje) • No se ciñen linealmente a un libro de texto único • La organización y jerarquización de los contenidos es el resultado de investigar y utilizar varios libros de texto • Los contenidos no se encuentran organizados atendiendo a la lógica formal de la disciplina • Se tiene en cuenta la Historia de la matemática en la estructuración conceptual • La evaluación apunta a los contenidos conceptuales, procedimentales y, periféricamente se hace referencia a los actitudinales • Se consideran diferentes tipos de evaluación; autoevaluación y coevaluación	• Se asigna un papel importante a la resolución de problemas para la construcción del conocimiento por parte del alumno • Se diseñan teniendo en cuenta los errores y obstáculos de aprendizaje de los estudiantes • Se busca desarrollar procesos de argumentación, interpretación, justificación y pensamiento conjetural a través de la resolución de problemas • No se hace explícito las traducciones entre sistemas de representación (sin embargo, el profesor verbalmente las considera importante) • Se privilegia el trabajo en equipo y la discusión orientada por el profesor

Tabla 1.

ii. Con relación a la unidad didáctica

En el anexo 10, presentamos la unidad didáctica del concepto de derivada, diseñada por el profesor B, atendiendo a los parámetros que les proporcionamos inicialmente a los profesores y que discutimos en una entrevista previa a la elaboración de la misma. Podemos decir que en términos generales el profesor B siguió las pautas consensuadas. A continuación, describimos y analizamos la unidad didáctica elaborada por este profesor, apoyándonos en los datos que nos proporcionan las entrevistas realizadas sobre la elaboración de la misma, donde se le brinda la oportunidad de comentar y argumentar las decisiones tomadas a lo largo del proceso, y de justificar el material de apoyo; conformado éste por definiciones, actividades y tareas, diseñadas por él o bien tomadas del libro de texto que usa en el proceso de enseñanza y aprendizaje de este concepto.

La unidad didáctica diseñada por este profesor, se encuentra estructurada en 12 actividades con 36 horas de dedicación presencial para el desarrollo de las mismas.

Teniendo en cuenta que, tal y como lo señala en la programación, la intensidad horaria semanal asignada para la matemática de 11º es de 4 horas, podemos concluir que el profesor B dedica, aproximadamente, 9 semanas al estudio de la derivada.

En términos generales, encontramos que el profesor B tiene en cuenta en la organización y selección de los contenidos, en el diseño de las actividades y tareas, y en los procesos evaluativos de la unidad didáctica, los criterios marcados por los programas curriculares oficiales, ya concretados en los objetivos generales propuestos en el plan de área que analizamos en la sección anterior. Por tanto, enfatizamos el carácter institucional que otorga el profesor al diseño de la unidad didáctica, teniendo en cuenta contenidos procedimentales, conceptuales y actitudinales. En la unidad didáctica prima una visión unificadora del concepto de derivada y la aplicación del mismo en situaciones significativas de la cotidianidad de los estudiantes, privilegiando los aspectos fenomenológicos del conceptos (otras ciencias y matemática), con un mayor énfasis en lo físico y lo matemático; lo mismo que el uso de una variedad de representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x).

Al preguntarle sobre las impresiones y dificultades que tuvo durante el proceso del diseño y elaboración de la unidad didáctica del concepto de derivada, el profesor B manifestó que éste le llevó a reflexionar sobre la forma en que venía afrontando la práctica docente en el aula. Es decir que le permitió autocuestionarse sobre la importancia que tiene la reflexión previa sobre los aspectos que están inmersos en el diseño de la unidad didáctica, tales como: planteamiento de objetivos, elección y jerarquización de contenidos, tipos de tareas, el nivel de dificultad de las mismas, los tipos de procesos cognitivos que se persiguen desarrollar, las estrategias de enseñanza y los procesos de evaluación. El profesor terminó reconociendo que este proceso riguroso de planificación previa de la enseñanza lo tenía muy descuidado, y, que precisamente, el enfrentarse nuevamente a ello le llevó a dimensionar las ventajas que éste ofrece para reflexionar y mejorar la práctica en el aula.

> "**Siendo concreto y sincero, nosotros hacemos un plan de área y en un cuaderno anotamos unas actividades para realizar... Estos apuntes son generalmente sueltos... No es una cosa que sea el resultado de habernos sentado a reflexionar lo que vamos a hacer, cómo y por qué... eh... como en**

> **esta propuestas que tú me solicitaste que hiciera... en donde uno tiene que colocar la descripción de la actividad, el propósito o intencionalidad... o sea éste es un tipo de trabajo que uno realmente descuida en la realidad**... Tengo que ser sincero en esto... se descuida este tipo de trabajo que **tiene mucha trascendencia e importancia, porque en la medida que uno planifica y diseña este conjunto de actividades, uno tiene una visión más clara de lo que quiere hacer en el aula,** y le das como que... sí... no como que, sino que **le das una jerarquización a las mismas actividades y nos lleva a reflexionar sobre el por qué de una actividad sobre el propósito de las actividades, un propósito a lograr con los estudiantes**."

Resaltamos el valor metacognitivo y formativo que le asigna, por un lado, al diseño de la unidad didáctica bajo los parámetros que le sugerimos; y por otro lado, la valoración positiva que le otorga a la reflexión entre pares como medio para mejorar la práctica docente. En efecto, nos proporciona evidencia empírica para considerar el diseño de unidades didácticas y la discusión entre pares como herramientas para la formación permanente del profesorado de matemática.

> "**Este trabajo o tarea que me pediste me pareció muy bueno, por eso porque nos lleva a reflexionar sobre la intencionalidad de cada actividad y es un trabajo serio que deberíamos hacer antes de la enseñanza, es una reflexión que se debe hacer así como tú lo planteas antes de las clases y acompañado con esto debe haber una reflexión durante el desarrollo porque hay cosas que se nos saldrán de las manos y tendremos que incorporar cambios en el camino,** y también debemos revisar y reflexionar después de haberla desarrollado para incorporar cambios que **nos permitan mejorar nuestro trabajo y compartirlo porque un conocimiento que se comparte entre colegas o así como contigo será un conocimiento más fructífero y fácil de mejorar**".

A continuación nos centraremos en el análisis de cada una de las categorías definidas, teniendo como eje conductor la triangulación de la información que nos proporciona los diferentes instrumentos de recolección de datos.

a. Conceptos estructurantes que justifican las técnicas de f '(a) y f '(x)

El profesor B, aparentemente, opta por definir primero el macro objeto f '(a) y, posteriormente, el macro objeto f '(x). Previo a la definición del macro objeto f '(a) trata los objetos: pendiente de la recta tangente, velocidad media y tasa media de variación, todos definidos como el cociente incremental de la función, y, a partir de ellos introduce la definición del macro objeto f '(a) utilizando también la notación incremental.

El profesor B opta por la resolución de problemas no rutinarios enunciados en diferentes contextos como punto de partida para la introducción y definición de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Las tareas que propone este profesor, requieren la comprensión de unos conceptos previos o conceptos estructurantes que son claves para la comprensión de los conceptos del cálculo diferencial. En efecto, el profesor B es consciente y hace explícito que la comprensión del macro objeto f ’(x) implica el manejo conceptual y procedimental de un conjunto de objetos matemáticos que se encuentran interrelacionados entre sí, y que se han de coordinar en la resolución de los problemas que forman parte de la actividad matemática que desarrolla en el aula, tales como, función y diferentes representaciones; pendiente de una recta y diferentes representaciones; velocidad media; tasa media de variación; relación entre tasa media de variación, pendiente de la recta secante y la velocidad media; y la idea intuitiva de límite.

> “Yo te diría que **el profesor debe tener pendiente o revisar que los estudiantes tengan unos ciertos fundamentos, por ejemplo, que el alumno maneje bien la variación de una función, la variación media y el concepto de pendiente de una recta, y las funciones sus gráficas, su ecuación, concepto intuitivo de límite** (...)”.

Con relación al primero de ellos, el tratamiento que da al **concepto de función**, a través de las tareas que propone en la unidad didáctica, nos muestra la gran preocupación que tiene el profesor B para que sus alumnos lleguen a la comprensión de este concepto. Apuesta por la resolución de problemas enunciados en diferentes contextos en los que prima el uso de una variedad de representaciones y traducciones entre representaciones del macro objeto f (x). Del tratamiento que da a las funciones, inferimos que este profesor aplica conjuntamente las visiones de Descartes y Fermat[2] (Boyer, 1986; Azcarate y Deulofeu, 1996; Font, 2000). Es decir, que diseña las tareas buscando que los estudiantes comprendan tanto el paso de la gráfica de la curva a la expresión simbólica, tal y como se centró Descartes (G f (x)→ES f (x)); o bien para que

[2] Partimos de la consideración de que Descartes se interesa por la traducción de la gráfica a la curva, mientras que Fermat se interesa más por la traducción de la expresión simbólica a la gráfica (Font, 2000). Sin embargo, creemos conveniente aclarar que Fermat y Descartes, no pensaban en una cantidad como una función, ni hacían referencia al concepto de infinitesimal, y los métodos que utilizaban para el cálculo de la normal y de la tangente no implicaban el concepto de límite, tal y como le entendemos en la actualidad; si no que los métodos eran puramente algebraicos y gráfico. En efecto, sus posturas teóricas proporcionan elementos conceptuales y didácticos interesantes para el tratamiento del concepto de función, que implícitamente ellos manejaban, y que el profesor B explicita en su discurso.

comprendan que una curva con dos variables es una expresión algebraica de las propiedades de la curva, tal y como se centró Fermat (ES f (x) →G f (x)).

El itinerario que sigue en la unidad didáctica para el tratamiento del macro objeto f (x), inicia con el estudio de los modelos elementales de las funciones, y posteriormente, se tratan funciones más complejas, como por el ejemplo, funciones acumulativas, funciones espacio-tiempo, velocidad- tiempo, etc., deteniéndose en el análisis monótono de las funciones enunciadas en diferentes contextos, y privilegiando diferentes traducciones entre representaciones del macro objeto. Un aspecto a resaltar, es la importancia que le asigna a la interpretación de la gráfica de una función. Ésta es considerada desde dos perspectivas complementarias que obedecen a diferentes momentos históricos dentro de la construcción del concepto de función: una estática y otra dinámica. Con relación a la primera, que es una postura que brinda tanto característica globales como específicas de la curva, se interpreta la gráfica de una función, desde la postura actual de la teoría de conjuntos, donde la gráfica de una función es el conjunto (se corresponde con el todo) formado por los puntos (se corresponde con la parte) de coordenadas (x, y) o bien (x, f (x)). Por otro lado, la segunda visión, hace referencia a una concepción de gráfica de función newtoniana (ya considerada en la obra de Descartes), entendida como la trayectoria descrita por un punto que se encuentra en movimiento sobre la gráfica.

> "**Yo insisto en la gráfica porque es como visualizar una parte de conocimiento de pronto que está abstracto y entonces a partir de ella que analice e interprete lo que sucede por ejemplo con magnitudes directamente proporcionales**. Es decir que **no es sólo suficiente el cálculo de la pendiente por la fórmula de la tasa media de variación o por la ecuación de la línea recta, sino que también interprete la gráfica, interprete el significado de un punto, del conjunto de puntos, de esa pendiente**."

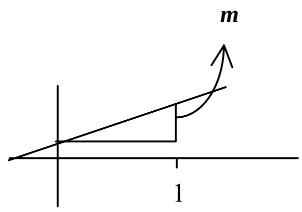
El estudio de la proporcionalidad directa, el modelo afín y el estudio del modelo de función cuadrática, los relaciona con el estudio de los conceptos de pendiente de una recta y tasa media de variación. Igualmente, coordina estos conceptos en la modelización del objeto velocidad media para pasar al objeto velocidad instantánea. Y, posteriormente, lo extiende al análisis de la monotonía de una curva en general, apoyándose en las diferentes representaciones y traducciones entre representaciones del concepto de función.

> “**En Física nosotros trabajamos magnitudes directamente proporcionales y trabajamos la ecuación de la recta o el estudio de la función lineal en general y eso también lo retomamos acá en matemática de 11º para introducir la derivada, o sea que habría que hacer una parte inicial de recordar de esos aspectos de la pendiente de la recta y su gráfica, la gráfica de una función**. Ya eso lo haríamos y entonces fíjate **comenzaríamos a trabajar enseguida con la variación media, sí hablándoles de velocidad media, hablándoles de pendiente**”

Si bien es cierto, que en la unidad didáctica se le asigna un papel preponderante al estudio de las funciones y sus representaciones como un prerrequisito para llegar a la comprensión del macro objeto f ’(x), encontramos que en la unidad didáctica no se hace referencia dentro del análisis de las funciones a la coordinación de los diferentes aspectos de la continuidad de una función en un punto y en un intervalo (discontinuidad evitable, discontinuidad no evitable), que consideramos que es una de las características esenciales para la definición formal del macro objeto f ’(x). Más concretamente, no encontramos tareas, en toda la unidad didáctica ni en la evaluación, en las que se estudien funciones definidas a trozos, que requieran la comprensión de la continuidad de funciones, bien sea en un intervalo o en todo el dominio de la misma.

En lo que respecta al segundo concepto estructurante, el profesor B en las tareas que plantea en la unidad, hace énfasis en los aspectos gráficos, numéricos y algebraicos del **concepto de pendiente de una recta**, y lo traslada al estudio particular de la recta secante y la tangente a una curva. Encontramos a faltar dentro de las diferentes representaciones del concepto de pendiente de una recta, el significado que tiene en la trigonometría, es decir, el manejo de la pendiente como la tangente trigonométrica del ángulo que forma la recta con el eje *x*, lo cual no implica que el profesor no lo tenga integrado en su estructura cognitiva -tal y como queda reflejado en el estudio del nivel de comprensión del esquema de la derivada que tiene el profesor B (ver sección 5.1.1.); sin embargo, lo interesante es que no lo considera relevante dentro del contexto institucional de la enseñanza secundaria, no obstante que los alumnos hayan desarrollado en 10º una unidad didáctica dedicada al estudio de la trigonometría.

El tratamiento que da el profesor B del concepto de pendiente, se centra en el uso de los signos de la notación de incrementos ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x}$) -sin llegar a definirla completamente, es decir, sin llegar a utilizar la notación $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(a+\Delta x) - f(a)}{\Delta x}$ - mezclada con la notación funcional de la tasa media de variación ($m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$), pero sin relacionarla con la notación funcional $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$, lo cual consideramos importante para introducir el macro objeto f ’(a). Lo anterior nos muestra, que inicialmente el profesor B, hace un intento, no justificado, por buscar que los alumnos coordinen dos notaciones de la tasa media de variación claves para la comprensión posterior del macro objeto f ’(a). Sin embargo, cuando define el macro objeto f ’(a) como el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto fijo, sólo utiliza la notación incremental, dejando de lado la notación funcional del objeto tasa media de variación, lo cual le lleva a cometer algunas inconsistencias que dificultan a los estudiantes la comprensión de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), las cuales describiremos más adelante.

Gráfica	**Numérica / analítica**	**Algebraica**
La pendiente determina el grado de inclinación de la recta. La longitud de este segmento es el valor de la pendiente. 	La pendiente como la razón entre los incrementos de las variables $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ Notación incremental Notación funcional	La pendiente como el número (coeficiente) en la fórmula, $y = m \cdot x + b$

El itinerario que sigue el profesor B para introducir el concepto de derivada, descrito en la programación y sugerido por los programas oficiales, contempla el desarrollo previo del **concepto límite**. Tal y como el profesor comenta, curricularmente le exigen el desarrollo de la unidad de límite centrada en la aplicación de las técnicas del cálculo del límite de funciones. El profesor B cumple con esta restricción institucional y desarrolla la unidad, pero consciente de las dificultades que tienen los estudiantes para comprender este concepto, prefiere introducir la derivada a partir de un tatamiento previo de los objetos tasa media de variación y pendiente de la recta secante, desde procedimientos numéricos y gráficos que ayuden al estudiante a comprender intuitivamente el concepto de límite, y, así poder encapsularlos en los objetos tasa instantánea de variación y pendiente de la recta tangente. Para ello, el profesor B privilegia un acercamiento intuitivo del **concepto de límite del cociente incremental** previo a la formalización matemática del concepto de derivada, apoyándose en diferentes contextos: numérico, gráfico, algebraico y analítico. En efecto, esta postura es coherente con el desarrollo histórico del concepto de derivada.

> "**Hay otros o muchos matemáticos que introducen la derivada desde el límite, pero yo lo hago desde una manera que muchos me dicen osada y terca, lo que pasa es que yo veo que ese límite le complica mucho la vida a los estudiantes**, entonces si hay **otra forma de introducir la derivada que es por la variación, que el vea por ejemplo, que por ejemplo si te quieres aproximar al dos lo puedes hacer tanto como se quiera por la izquierda y por la derecha, y que si este lo estamos aproximando por la izquierda por ejemplo tomamos: 1,1... 1,9; 1,99; 1,9999... viendo que esto se está acercando cada vez a 2 y que prácticamente va a ser el 2... Bueno sí, pero lo hago más como una idea intuitiva de límite**, ¡exacto!"

Es importante resaltar, la conciencia sobre la dificultad fundamental que el límite constituye para llegar a la comprensión del concepto de derivada y la riqueza del esquema numérico que utiliza como itinerario didáctico para tratar de contrarrestarlas. Consideramos que, es precisamente, el esquema del infinito actual que exhibe el profesor lo que le permite manejar bien conceptual y didácticamente la aproximación intuitiva del concepto límite para la introducción del concepto de derivada (ver anexo 7). Igualmente, se percibe el conocimiento de algunos de los obstáculos que provoca la definición formal del límite, tales como, obstáculos ligados al concepto de infinito, al concepto de función, a los cuantificadores lógicos y los ligados al símbolo, este último lo ampliaremos más adelante (Cornu, 1980, 1983; Robinet, 1983; Sierpinska, 1985, 1987). Pero lo curioso, es como posteriormente en la definición del macro objeto f '(a) cae en el error de utilizar únicamente la notación incremental que favorece la aparición de estos obstáculos en la comprensión de los alumnos.

b. Técnicas que utiliza para calcular los macro objetos f '(x) y f '(a)

La unidad didáctica diseñada por el profesor B tiene como objetivo principal el definir el macro objeto f '(x), calcular la derivada de funciones sencillas a partir de la técnica directa de la definición en términos de límite y, construir y aplicar las técnicas de derivación indirecta de las reglas de derivación en la resolución de problemas enunciados en diferentes contextos. Analizando qué técnicas para calcular f '(x) tiene que saber el alumno como resultado del estudio de la unidad didáctica que propone el profesor B, encontramos que aparecen tres técnicas de derivación:

I. Técnica directa por definición en términos de límite
II. Técnica directa por aproximación gráfica y numérica
III. Técnica indirecta por las reglas de derivación

Posteriormente, rastreamos qué técnicas ha definido para calcular f '(a) para luego poder justificar las técnicas de cálculo de f '(x), y encontramos, sorprendentemente, que, en general, no existen técnicas para calcular f '(a), porque en las definiciones que presenta en la unidad didáctica están mezclados los macro objetos f '(a) y f '(x). Es decir, que no se diseñan actividades y tareas que permitan la construcción de las técnicas de cálculo del macro objeto f '(a).

Todo lo anterior, nos permite concluir que, (1) en la unidad didáctica propuesta por el profesor B no se dedica un espacio exclusivo y necesario al tratamiento y construcción de las técnicas para calcular el macro objeto f '(a); (2) el tratamiento de las técnicas de cálculo del macro objeto f '(x) se adelantan, consciente o inconscientemente, al tratamiento de las técnicas del macro objeto f '(a), lo cual genera confusión en la comprensión de los macro objetos f '(a) y f '(x); y (3), las técnicas de cálculo del macro objeto f '(a) aparecen reducidas a la simple sustitución de variables ($x = a$) posterior al cálculo del macro objeto f '(x).

c. Definición del macro objeto f '(a)

El profesor B en la unidad didáctica plantea un itinerario didáctico para la enseñanza y aprendizaje de los macro objetos f '(a) y f '(x) que sigue *grosso modo* el desarrollo histórico de los mismos, basado en el método que utilizaba Newton para calcular velocidades instantáneas y para calcular la pendiente de la recta tangente en un punto a partir de las pendientes de las rectas secantes, cuando estas se aproximan a la recta tangente. Es así como, apoyándose en la definición que propone el libro de texto de la *Editorial PIME*, después de proponer y resolver un grupo de tareas (1, 2, 3, 4 y 5) introduce conjuntamente la definición de los objetos tasa instantánea de variación y pendiente de la recta tangente como la derivada en un punto P, sólo en términos del límite del cociente incremental. Consideramos que lo hace incorrectamente por dos razones:

1. No especifica las coordenadas del punto fijo P en el texto escrito
2. La notación que usa en la definición, conlleva al error de definir el macro objeto derivada en un punto como el macro objeto función derivada; es decir, como el límite del cociente incremental de la función en todos los puntos del dominio.

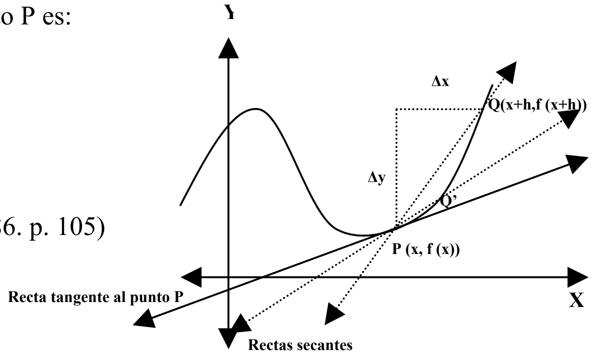
"La pendiente de la recta tangente en el punto P es:

$$m_{\tan} = \underset{\Delta x \to 0}{Lim} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

o

$$m_{\tan} = \underset{h \to 0}{Lim} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

cuando el límite existe." (Pérez, J. *et al.*, 1986. p. 105)



El profesor B, al usar la anterior definición en la unidad didáctica como transposición didáctica del objeto pendiente de la recta tangente en términos del macro objeto f '(a), no diferencia y genera confusión en el manejo de los macro objetos f '(a) y f '(x), puesto que, da un tratamiento funcional al macro objeto f '(a) que es un número; más exactamente, el valor de la pendiente de la recta tangente en el punto P (a, f (a)). Conjuntamente, a partir de la resolución de problemas contextualizados en la física, y siguiendo el mismo modelo de definición anterior, introduce el objeto razón de cambio, atendiendo tanto al cálculo específico de la velocidad instantánea o bien al cálculo de razones de cambio instantáneas de magnitudes cualesquiera que dependen del tiempo (consumo de agua), considerando aspectos gráficos, numéricos y algebraicos de estos objetos.

Si bien es cierto que el que el profesor B en la unidad didáctica se propone introducir primero la definición del macro objeto f '(a), después de un tratamiento fenomenológico previo con los objetos pendiente de la recta secante, velocidad media y tasa media de variación, para posteriormente, pasar a definir los objetos pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea y, por tanto, definir el macro objeto f ’(a) como el límite del cociente incremental; encontramos que el uso de esta notación implica utilizar el aparato sintáctico del macro objeto f ’(x) sin haberlo definido previamente. Es decir, que al definir el macro objeto f ’(a) avanza la definición del macro objeto f ’(x), lo cual genera confusiones entre los macro objetos f ’(a) y f ’(x).

Estas confusiones, han sido detectadas por otros estudios, en los que se dan las siguientes sugerencias, que consideramos interesantes a la hora de diseñar programas de formación permanente y a la hora de elaborar material didáctico en este nivel de escolaridad:

1. Emplear la siguiente cadena de notaciones al definir el macro objeto f ’(a), en la que se introduce primero una notación más sencilla de la derivada en un punto como el límite de la tasa media de variación, y posteriormente, se introduce la notación incremental, haciendo un trabajo previo que permita la coordinación de ambas notaciones (Inglada y Font, 2002)

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

2. Al igual que los autores anteriores, Dubinsky y otros (1985), propone el uso de la misma cadena de notaciones, pero estableciendo una distinción notacional para el macro objeto f ’(a), que ayude a diferenciarlo del macro objeto f ’(x), pero a su vez que ayude en la comprensión de la relación entre estos dos macro objetos, así, proponen el tratamiento coordinado de dos definiciones del macro objeto f ’(a), que ayude a una mejor comprensión del mismo:

Definition 4.1. (Definition of derivate at a point)

If f is a function and a is a point in its domain, the derivate of f at a is,

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}, \textit{ provided this limit exists.}$$

> ***Definition 4.2. (Alternative definition of derivate at a point)***
> *If f is a function and a is a point in its domain, the derivate of f at a is,*
>
> $$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$ *, provided this limit exists.*

Y paralelo a ello, proponen una notación especial para la derivada en un punto que favorezca la distinción y la relación de los macro objetos f ’(a) y f ’(x). Es decir, que se sugiere el uso de una notación en la que se especifique que el macro objeto f ’(a) es un número que representa una imagen del macro objeto f ’(x) en el punto de abscisa $x = a$.

> $$\frac{dy}{dx}\Big|_{x=a} = \frac{d}{dx} f(x)\Big|_{x=a} = f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$ (Dubinsky *et al.*, 1995, pp. 197).

d. Definición del macro objeto f ’(x)

Posteriormente, y teniendo en cuenta el tratamiento anterior de los objetos pendiente de la recta tangente, razón de cambio y tasa instantánea de variación “en un punto”, define la función derivada, como el límite del cociente incremental. Ahora, en esta definición, podemos observar que se intenta diferenciar los macro objetos, f ’(a) y f ’(x) como elemento y clase, así:

> “Sea *f* una función real. La derivada de *f* es otra función que simbolizaremos por *f ’*, y tal que su valor en cualquier punto $x = x_0$ de su dominio está dado por la expresión:
>
> $$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$, siempre que el límite exista.
>
> La derivada de una función *f (x)* con respecto a *x,* es otra función que relaciona a cada punto del dominio con el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto, y se puede expresar mediante los símbolos: *f’(x)* = $\frac{dy}{dx}$ ”

En la anterior definición del macro objeto f ’(x), hay un intento por diferenciar los macro objetos f ’(a) y f ’(x), quizás influenciado por la comprensión que tiene este profesor de las diferencias y relaciones entre estos dos macro objetos (Ver sección

5.1.1). Sin embargo, consideramos que es muy difícil que el alumno llegue a comprender las diferencias sintácticas y semánticas entre estos dos macro objetos, puesto que las dos definiciones de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), propuestas por el libro de texto que usa el profesor B en el aula, incluyen una notación que dificulta dicha comprensión. Es decir que al definir el macro objeto f ’(a) como el cociente incremental, además, sin remarcar en $x = a$ para referirse a la derivada en un punto concreto, se refleja que no hay conciencia de la complejidad semiótica que involucra el paso del macro objeto f ’(a) al macro objeto f ’(x) (Font, 2000). En efecto, como ya lo hemos mencionado anteriormente, cuando se opta por esta notación de incrementos para definir el macro objeto f ’(a), de alguna manera, se está avanzando la función derivada (Inglada y Font, 2002).

Teniendo en cuenta que el uso de las diferentes notaciones es un aspecto clave a la hora de definir y comprender los macro objetos f ’(a) y f ’(x), el interrogante que surge, y que ya se han planteado en otros estudios, es por qué se plantean en el libro de texto el uso de la notación de incrementos para definir la derivada en un punto y por qué el profesor B, que ha evidenciado comprender los macro objetos f ’(a) y f ’(x), la utiliza acríticamente. Como ya mencionamos en el análisis del caso del profesor A, Inglada y Font (2002) concluyen que una justificación válida para introducir la derivada en un punto con la notación de incrementos en la secundaria es que ayuda a justificar más adelante la regla de la cadena como: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$. Es decir, que la notación de incremento coordinada con la notación diferencial $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{dy}{dx}$ permite con comodidad introducir y justificar la regla de la cadena. Ahora bien, según estos autores, esta posible ventaja se puede conseguir sin necesidad de utilizar desde el principio la notación incremental. Ésta se puede introducir más tarde, después de haber tratado previamente la notación funcional.

Partiendo de la anterior hipótesis rastreamos en la unidad didáctica el tratamiento que el profesor B hace de la regla de la cadena y nos encontramos que, en el caso del profesor B, en la unidad didáctica no hay un espacio reservado para el estudio de la regla de la cadena. Por tanto, no podemos inferir que el profesor B haya optado por la definición de los incrementos como un tratamiento previo para la introducción y justificación de la regla de la cadena. En la siguiente tabla 2, resumimos los aspectos analizados en la unidad didáctica.

<table>
<tr><td rowspan="8">Forma
(SINTAXIS)</td><td rowspan="2">¿Cómo introduce el concepto?</td><td colspan="12">Del problema de la recta secante (X)</td></tr>
<tr><td colspan="12">Del incremento finito (X)</td></tr>
<tr><td rowspan="3">¿Qué símbolos utiliza?</td><td colspan="12">Δx, h (X)</td></tr>
<tr><td colspan="12">x – a ( )</td></tr>
<tr><td colspan="12">ε, δ ( )</td></tr>
<tr><td>¿En qué términos la define?</td><td colspan="12">La pendiente de la recta tangente en el punto P es: $m_{tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, cuando el límite existe.</td></tr>
<tr><td>¿Qué otros aspectos formales manejan?</td><td colspan="12">Reglas de derivación</td></tr>
<tr><td>¿Qué técnicas se tratan?</td><td colspan="12">Técnica directa: definición de la derivada (derivada en un punto)
Técnica indirecta de derivación: reglas de derivación (funciones trigonométricas, funciones exponenciales y logarítmicas, funciones potenciales, etc.
Técnica de aproximación numérica y gráficas.</td></tr>
<tr><td rowspan="7">Contenido
(SEMÁNTICA)</td><td>¿Cómo introduce el concepto?</td><td colspan="12">A partir de la resolución de problemas contezxtualizados en la física (paso de la velocidad media a la instantánea), y en la propia matemática (paso de la secante a la tangente)</td></tr>
<tr><td>¿Cómo maneja el paso de la velocidad media a la instantánea?</td><td colspan="12">A partir de la resolución de problemas que incluyen traducciones: DV f (x)→T f (x) →G f (x), y aplicando técnicas numéricas y gráficas se trata la velocidad media y se introduce la velocidad instantánea.</td></tr>
<tr><td>Razones de cambio Instantáneas</td><td colspan="4">1. Velocidad de cambio: e / t (X)</td><td colspan="4">2. Velocidad de cambio: mag / t (X)</td><td colspan="4">3. Velocidad de cambio: mag / mag ’ (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">A todas por igual.</td></tr>
<tr><td>¿Cómo maneja el paso de la secante a la tangente?</td><td colspan="12">A partir de la resolución de problemas que incluyen traducciones: DV f (x)→T f (x) →G f (x), y aplicando técnicas numéricas y gráficas se calcula la pendiente de la recta secante y se introduce la pendiente de la recta tangente (con problemas contextualizados en la física, la matemática y en otras ciencias).</td></tr>
<tr><td>Significado geométrico</td><td colspan="4">1. Recta tangente (X)</td><td colspan="4">2. Tangente trigonométrica ( )</td><td colspan="4">3. Análisis de funciones (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">A la recta tangente y al análisis monótono de funciones</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Representaciones semióticas</td><td>Fenomenología</td><td colspan="4">Matemática (X)</td><td colspan="4">Física (X)</td><td colspan="4">Otras (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">A todas, pero se entra un poco más en la Física</td></tr>
<tr><td>Contexto</td><td colspan="3">1. Algebraico (X)</td><td colspan="3">2. Numérico (X)</td><td colspan="3">3. Verbal (X)</td><td colspan="3">4. Gráfico (X)</td></tr>
<tr><td>¿Marca importancia?</td><td colspan="12">Más al algebraico, al verbal y al gráfico</td></tr>
</table>

Tabla 2. Aspectos de la derivada como objeto matemático analizados en la unidad didáctica elaborada por el profesor B

5.1.2.2. Estructura y contenido de las tareas y actividades que plantea el profesor B

i. Con relación a la evaluación

El profesor B nos proporcionó dos talleres evaluativos que constan de 3 tareas cada uno (ver anexo 9), las cuales hemos enumerado del uno al seis en la tabla de análisis 3, correspondientes al profesor B. Las tareas propuestas por este profesor se encuentran tipificadas en la tabla 10 como: P (3), P (7), P (8), P (9), P (11) y P (13), respectivamente. Como se puede observar, ninguna de las tareas se repiten en tipología entre sí: es decir que plantea una variedad de situaciones que van desde problemas rutinarios hasta problemas no rutinarios, si tomamos como referencia los tipos de problemas que aparecen usualmente en los libros de texto del sistema educativo colombiano. Entre las del primer grupo señalamos las tareas tipo P (3), P (7), P (11) y P (13), y entre las del segundo grupo tenemos las tareas del tipo P (8) y P (9). Esta clasificación de las tareas en rutinarias y no rutinarias, obedece a la complejidad de los procesos cognitivos que demandan cada una de las tareas, y a la diferencia entre las técnicas que hay que utilizar durante el proceso de resolución. Sin embargo, el análisis de las tareas de la unidad didáctica nos permitirá concluir si las tareas que se evalúan forman parte de la práctica matemática que se genera en el aula, y si los problemas en general se convierten en rutinarios dentro de la actividad matemática que realizan los alumnos.

Las tareas propuesta por el profesor B recogen **aspectos fenomenológicos** del concepto de derivada de corte histórico: es decir que plantea situaciones donde los fenómenos que organiza el concepto están tanto en la física como en la propia matemática, tratando de mostrar los dos problemas históricos que dieron origen a la construcción del concepto, como lo son, el problema de la pendiente de la recta tangente (tareas 1 del tipo P (3) y 2 del tipo P(7)) y el de la velocidad en la física (tareas 3 del tipo P (8) y 4 del tipo P (9)). Sin embargo, hay una preocupación por organizar otros fenómenos propios de las matemáticas generalizando el concepto de derivada como razón de cambio (tareas 5 del tipo P (11) y 6 del tipo P (13). El profesor, en la entrevista sobre la justificación y reflexión de las tareas que proponen en las evaluaciones, también lo afirma explícitamente.

"(...) La que más uso en las evaluaciones son las de calcular la pendiente de la recta tangente a una curva, pero la trabajamos esencialmente con el cálculo de velocidad instantánea, o sea velocidad. Porque **manejo la idea de que el estudiante cuando ve una situación problema concreta va a comprender más fácilmente la situación y aterriza en la aplicación del concepto de derivada**."

Igualmente, encontramos en las tareas una variedad de **contextos**: algebraico, gráfico y verbal, que determinan en cierta forma la riqueza de los sistemas de representaciones utilizados, y de las traducciones y relaciones entre representaciones del concepto que emergen en el proceso de resolución de las mismas. Es de suponer que la variedad y riqueza de estos elementos influyen en la comprensión que posee un estudiante del concepto de derivada.

"Yo sé sí comprenden cuando ellos entran a resolver situaciones donde aplican este concepto... Es decir **que sean capaces de resolver situaciones problemas dados diferentes enunciados y diferentes contextos**... Me refiero, como dije anteriormente, a la velocidad en física o la pendiente de la recta tangente en geometría u optimización en otras ciencias... Ya sea que se le de una tabla o una gráfica o un problema, etc."

Exceptuando la tarea 4 del tipo P (9), todas las tareas requieren de **traducciones entre representaciones** del concepto función para ser solucionadas, y en el enunciado de éstas se usan diferentes representaciones de este concepto; por ejemplo, las situaciones 1 del tipo P (3) y 4 del tipo P (9) se enuncian mediante la expresión simbólica de la función; las situaciones 2 del tipo P (7) y 3 del tipo P (8) se enuncian mediante la gráfica de la función; y las 5 del tipo P (11) y 6 del tipo P (13) a través de la descripción verbal de la función. Lo cual nos muestra la variedad de contextos manejados y la necesidad de traducciones y relaciones necesarias para solucionarlas. En cuanto a las traducciones entre representaciones del concepto de función derivada, sólo encontramos una tarea, la 3 del tipo P (8), que requiere la traducción de la descripción verbal de la función derivada a la gráfica de la función derivada.

Si bien es cierto que las **relaciones entre representaciones** del concepto función derivada y del concepto de función nos llevan al campo del cálculo integral, consideramos que algunas relaciones entre representaciones con estas características ayudan a una mejor comprensión del concepto de derivada. En las tareas propuestas en la evaluación proporcionada por el profesor B no se privilegian las relaciones entre representaciones de la función derivada y el concepto función (____ f '(x)⇨____ f (x)), mientras que sí se propician las relaciones entre representaciones del concepto función y del concepto de función derivada, siendo las más utilizadas: ES f (x)⇨ES f ’(x) y DV f (x)⇨ES f ’(x), seguidas de, G f (x)⇨G f ’(x) y G f (x)⇨DV f ’(x). Esto nos muestra la variedad de relaciones que pueden ser evaluadas por el profesor B, las cuales se pueden visualizar mejor en la tabla 4. Sin embargo, como hemos anotado anteriormente podrían ser evaluadas otras, que quizás el profesor B no considere importante en la evaluación, pero que han podido ser tratadas en la unidad didáctica (ver apartado siguiente).

En el enunciado de las tareas el profesor B no se hace explícito el uso de una **técnica** específica de derivación, dejando libertad al alumno para tomar decisiones sobre la técnica que considere más apropiada y más adecuada. Sin embargo, hemos inferido de algunos comentarios hechos por el profesor que por economía se espera que los alumnos apliquen la técnica indirecta de las reglas de derivación para solucionar en los casos que se requiera. Lo cual no quiere decir que no se considere válido el uso de otra técnica, como por ejemplo la técnica directa por la definición de límite. Un aspecto a resaltar es la evidencia del uso de técnicas de aproximación numérica y gráfica, complementarias a las anteriores, para poder solucionar tareas del tipo P (7) y P (8), que por su complejidad y riqueza requieren un nivel de comprensión trans gráfico del esquema de la derivada.

> **“ (...) porque el** resto es saber derivar con las reglas que ya se deben conocer de memoria**.”**

Encontramos que las **estructuras conceptuales** de las tareas fomentan y requieren la coordinación de esquemas de varios conceptos, tales como, función, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente, derivada en un punto, función derivada, conceptos de la geometría (área, volumen...), etc. Esta coordinación de esquemas necesita de la activación de **procesos cognitivos** complejos que ayuden a la construcción de esquemas de los conceptos matemáticos más consistentes y coherentes. En este sentido, consideramos que las tareas evaluadas por el profesor, teniendo en cuenta la complejidad conceptual y la riqueza en el uso de las representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones de los conceptos de función y de función de derivada requieren de la coordinación de las dos dimensiones del esquema de la derivada que hemos definido para poder ser solucionadas (algebraico y gráfico). Lo cual implica que demandan una serie de procesos cognitivos complejos que incluyen, encapsulaciones de procesos, desencapsulaciones de objetos, coordinaciones de procesos y esquemas, y generalización de esquemas; esto lo podemos encontrar especificado para cada tarea en la tabla 3. Teniendo en cuenta lo que suponemos que el profesor B esperaba evaluar en cada una de las tareas intentaremos ampliar la inferencia hecha en el párrafo anterior.

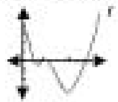
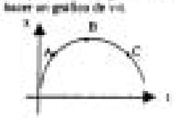
La tarea 1 del tipo P (3) planteada por el profesor B, teniendo en cuenta las relaciones y traducciones entre representaciones que demanda su solución, suponemos que activa los siguientes procesos cognitivos:

- Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la ecuación de la recta tangente a una curva a partir de la expresión simbólica de f (x).
- Desencapsulación del objeto función en el proceso de dibujar la gráfica a partir de la expresión simbólica.

Sin embargo, la intencionalidad del profesor al plantear esta tarea nos muestra, por un lado que sí se persigue la desencapsulaciones que hemos planteado para poder solucionarla, pero por otro lado, nos cuestiona sobre la facilidad con que, en la práctica, la actividad cognitiva que demanda esta tarea se puede quedar reducida en la interiorización de acciones (ver en la tabla 7 del capítulo 3 de procesos cognitivos para: ES f (x)→G f (x)), y en la coordinación de procesos (ver en la tabla 9 del capítulo 3 procesos cognitivos para: ES f (x)⇨ES f ’(x)), que no necesariamente son indicadores de la comprensión del concepto matemático en cuestión.

> “En la primera situación, que es un problema de estos normales que aparecen en los libros, **lo que quiero es que vean la aplicación del concepto en la Geometría, tal y como en realidad comenzó en la historia**. Y más que todo se centra en calcular la derivada en un punto.”

TABLA 3. ANÁLISIS DE LA EVALUACIÓN DEL PROFESOR B

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f(x) y f'(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (3)	B	1. Encuentre la ecuación de la recta tangente a la gráfica de f(x) = x² en (2,8). Haz el gráfico de la función y de la recta tangente en dicho punto.	Matemática	Algebraico	ES f (x) G f (x) ES f ' (x)	ES f (x) → G f (x)	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (x) ⇒ G f (x) (B. 1.1.2 + B. 2. 2)	Reglas de derivación Usando límite	Función y representación gráfica, pendiente, función derivada (cálculo directo o indirecto)	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular la ecuación de la recta tangente a una curva a partir de la ES de f (x). • Desencapsulación del objeto función en el proceso de dibujar la gráfica a partir de la ES.	No
P (7)	B	2. Para la gráfica de la función f determina: a. Dominio y Rango de la función f b. ¿Dónde la función es creciente? c. ¿Dónde la función es decreciente? d. Puntos críticos de la función e. Puntos máximos para f f. Puntos mínimos para f g. ¿Qué puedes decir de la gráfica de la función en general?  	Matemática	Gráfico / Verbal	G f (x) DV f (x) DV f ' (x)	G f (x) → DV f (x)	G f (x) ⇒ DV f ' (x) (B.2.7. + B. 2.7)	Aproximación gráfica / numérica	Función, intervalo, pendiente de una recta, estudio de la monotonía de funciones, función derivada (criterios de la 1ª derivada), interpretación gráfica de la derivada	• Desencapsulación del objeto (estático) de función derivada en el proceso de considerar s dinámico en un intervalo de la función e interpretar los criterios de 1ª y 2ª derivada en el análisis monotónico de la función. • Coordinación de los esquemas de función y derivada de la función en un punto (como el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto), que permita hacer un análisis de la monotonía de la función: creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad, etc.	No
P (8)	B	3. En la gráfica x-t, indica en qué punto la velocidad v es positiva (v > 0), donde la velocidad es negativa (v < 0) o cuando es nula (v = 0). Justifica tu respuesta y haz una interpretación del gráfico. Podrías hacer un gráfico de v-t.  	Física	Gráfico / Verbal	G f (x) DV f (x) DV f ' (x) G f ' (x)	G f (x) → DV f (x) DV f ' (x) → G f ' (x)	G f (x) ⇒ G f ' (x) G f (x) ⇒ DV f ' (x) → G f ' (x) (B. 4.4)	Aproximación gráfica / numérica	Función, velocidad instantánea, función derivada, derivada en un punto.	• Desencapsulación del objeto función en su representación gráfica en los procesos que permitan realizar el análisis monotónico de la función. • Coordinación de los esquemas de función derivada como la razón de cambio del espacio en función del tiempo, velocidad instantánea, gráfica de f (x) y gráfica de f ' (x) (interpretar los criterios de 1ª y 2ª derivada en el análisis monotónico de la función)	No
P (5)	B	4. Al soltar un objeto y dejarlo caer libremente desde una altura de 100 m, su altura en el instante t viene dada por la función posición y (t) = 100 – 16 t², con y en m y t en seg. a. Halla la velocidad en cualquier instante t. b. Halla la velocidad en t = 1 seg.	Física	Algebraico	ES f (x) ES f ' (x)	No	ES f (x) ⇒ ES f ' (x) ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (t) (B. 1.1.2)	Reglas de derivación Usando límite	Función, velocidad instantánea, movimiento vertical, función, función derivada (razón de cambio), derivada en un punto	• Coordinación de los esquemas de velocidad instantánea y función derivada como razón de cambio	No
P (11)	B	5. Se van a fabricar tanques en serie para almacenar fertilizantes químicos, en forma de cilindro circular recto completamente cerrado, cuya capacidad sea 16 π metros cúbicos. a. Hallemos las dimensiones que debe tener el tanque más económico.	Matemática	Verbal	DV f (x) ES f (x) ES f ' (x)	DV f (x) → ES f (x) → ES f ' (x)	DV f (x) ⇒ ES f ' (x) DV f (x) → ES f (x) → ES f (x) ⇒ ES f ' (x) (r) (B. 4.8)	Reglas de derivación	Función, composición de funciones, volúmenes de sólidos geométricos, función derivada (criterio de la 1ª derivada), derivada en un punto, Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la selección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función • Encapsulación de la función derivada como la razón de cambio entre magnitudes relacionadas	No

Tipo de problema	Profesor	Problema			Representaciones			Técnica	Conocimientos Involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
		Enunciado	Fenomenología	Contexto	Representaciones	Traducciones	Relación entre f (x) y f ' (x)				
P (13)	B	a. Se infla un balón esférico de tal forma que a los t segundos el radio r (t) = 3t (cm). Elabora una tabla de datos con las variables tiempo t en segundos y el volumen V en centímetros cúbicos, tomando incrementos de 1 segundo en la variable t. a) ¿Cuál es la variación media del volumen de la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los 12 segundos? ¿Y a los 15 segundos? b) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los t segundos de empezarse hallo entre los 12 y los 15 segundos. c) ¿Cuál es la tasa de variación instantánea del volumen del balón a los t segundos de empezar a inflar?	Matemática	Algebraico / Verbal	DV f (x) ES f (x) ES f ' (x)	DV f (x) → ES f (x) → ES f (x)	DV f (x) ⇔ ES f ' (x) DV f (x) → ES f (x) → ES f (x) ⇔ ES f ' (x) ↻ (IL 4.8)	Reglas de derivación	Función, composición de funciones, volúmenes de sólidos geométricos, Función derivada (criterio de la 1ª derivada), derivada en un punto, Reglas de derivación (cálculo indirecto de la función derivada), regla de la cadena (composición de funciones)	• Desencapsulación del objeto composición de funciones en las funciones sencillas • Encapsulación de la función derivada como la razón de cambio entre magnitudes relacionadas • Desencapsulación de la función derivada en las acciones de aplicar la colección de reglas de derivación e incluso la regla de la cadena a partir de la ES de la función	No

Tabla 4. Análisis de las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f ' (x) en las tareas propuestas en la ***evaluación*** diseñada por **EL PROFESOR B**.
(Se tiene en cuenta sólo la representación inicial y la representación final utilizada)

de → a	Expresión simbólica f '(x)	Gráfica f '(x)	Tabla f '(x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))	Expresión simbólica f (x)	Gráfica f (x)	Tabla f (x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))
Expresión simbólica f (x)	1, 4							
Gráfica f (x)		3		2				
Tabla f (x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))	5, 6							
Expresión simbólica f '(x)								
Gráfica f '(x)								
Tabla f '(x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))								

La segunda tarea del tipo P (7), que hemos definido como no rutinaria, al igual que el profesor B, coincidimos que es una situación muy interesante y de una gran complejidad, es un problema que para su solución requiere un nivel de comprensión trans gráfico del esquema de la derivada que incluya la coordinación de varios esquemas, entre ellos el de función y función derivada, que le permita al estudiante hacer un análisis monótono de la función a partir de la información que le proporciona la gráfica de la misma.

> **"Con la segunda, ya ésta es más complicadita, y ya el alumno para hacerla tiene que comprender el tema bien, o sea es ver los criterios de 1ª y 2ª derivada implícitos en el gráfico.** Es aprender a analizar la función a partir de su gráfico**.** **Cosa que hemos trabajado en clase, pero que tiene cierta dificultad para ellos. Pero es que lo pongo porque** para mí es importante que el alumno pueda manejar el concepto en varios contextos y el gráfico creo que es uno de los más complejos**, porque ellos están familiarizados es a pasar de la fórmula a la tabla y después graficar."**

La tarea 3 del tipo P (8), al igual que la anterior, la hemos definido como no rutinaria puesto que tiene características semejantes a la 2 del tipo P (7), pero se contextualiza en el campo de la física, lo cual permite una generalización del concepto de función derivada en las ciencias. Además, su complejidad aumenta en relación con la anterior, cuando se añade el ítem de hacer el gráfico de la función derivada a partir de los datos de ésta, obtenidos de la gráfica de la función. Es decir que es una tarea que integra una traducción entre sistemas de representaciones de la función derivada (DV f '(x)→ G f '(x)), además de las traducciones entre representaciones del concepto de función y de las relaciones entre las representaciones de la función y la función derivada, respectivamente (G f (x)→DV f (x)⇨DV f '(x)→G f '(x)). Por tanto, consideramos que para su solución demanda la coordinación y relación de los macro objetos f '(a) y f '(x), lo cual implica tener un nivel de comprensión trans gráfico del esquema de la derivada.

> "El tercero va en la misma dirección del anterior, pero aterrizado al campo de la física, porque es que **a veces en física grafican cosas y no saben que hay conceptos matemáticos que los estructuran y a mí me interesa que vean la aplicación a otros campos científicos**... Ah y ojo, también con la base histórica del problema, que yo les he insistido en eso, por eso lo pongo."

La tarea 4 del tipo P (9), que hemos denominado como rutinaria o ejercicio tipo, es una tarea interesante porque también contextualiza el concepto de derivada al campo de la física, que muestra la preocupación del profesor por evidenciar la riqueza fenomenológica del concepto matemático. Esta tarea no demanda traducciones entre representaciones del concepto función, porque el enunciado proporciona la expresión simbólica de la función y de lo que se trata es que el estudiante coordine los esquemas de la función derivada y la velocidad instantánea. Sin embargo, al igual que en la tarea 1 del tipo P (3), se puede caer en la práctica en la reducción de la aplicación del aparato sintáctico de la derivada, mediante la aplicación de las técnicas de derivación, que permita hacer la relación de la expresión simbólica de la función a la expresión simbólica de la función derivada (ES f (x)⇨ES f '(x)). Es decir que la actividad cognitiva que demanda esta situación, finalmente podría quedar reducida a la interiorización de acciones sobre el objeto función en el proceso de calcular la función derivada por algunas de las técnicas de derivación, lo cual no implica que para su resolución se necesite exhibir una perspectiva objeto de la derivada.

> "En cuanto al cuarto, es lo mismo que te dije con el anterior, solo que **aquí se trabaja el proceso algebraico, pero me interesa tanto la función derivada como la derivada en un punto**."

En relación con las tareas 5 del tipo P (11) y 6 del tipo P (13), que hemos definido como rutinarias dentro de las situaciones de aplicación del concepto de derivada de optimización de funciones, consideramos que son bastante similares en lo que concierne a los procesos cognitivos que se requieren para solucionarlas, y que varían un poco en el contexto en el que se enuncian. El enunciado de la tarea cinco está expresado en un lenguaje verbal que requiere de un proceso de modelización de la situación para poder ser solucionada mediante la aplicación del aparato sintáctico de la derivada.

> "En el quinto, tenemos un problema que tiene que ver con máximo y mínimo, tiene que ver con el mínimo de material que se requiere para que tenga un volumen de $16\pi m^3$. Este es más o menos típico también, pero claro **está el cuento de saber encontrar la expresión que represente la función**, **allí está la dificultad**, porque el resto es saber derivar con las reglas que ya se deben conocer de memoria."

Mientras que la tarea 6 del tipo P (13), se encuentra enunciada en dos tipos de lenguajes el algebraico y el verbal, también incluye un proceso de modelización pero indirecto a través de la composición de funciones. Otro aspecto, sutil pero interesante, que las diferencia es que la tarea 6 hace más explícita la necesidad de considerar la función derivada como razón de cambio.

> “En la sexta situación, le hablamos de un balón esférico y estamos allí planteándole la variación del volumen en un intervalo de tiempo... la variación media y luego cuál es la variación instantánea en un tiempo. **Cuando estamos hablando de la variación instantánea del volumen en un tiempo fijo estamos allí exigiéndole la aplicación del concepto de derivada**.”

Con estas dos tareas los estudiantes deben saber traducir el problema al de determinar máximos y mínimos de una función, aplicar el aparato sintáctico de la función derivada a dicha función, y finalmente, interpretar las respuestas encontradas en términos del problema resuelto, teniendo la necesidad de ser críticos con las soluciones que obtengan en sus cálculos (Azcárate *et al.*, 1996). Estos tres subprocesos resultan en muchos casos conflictivos para los estudiantes, y por ello encontramos importante resaltar que las situaciones elegidas por el profesor B son muy interesantes, puesto que la base conceptual recae en la geometría permitiéndole a los estudiantes el uso de recursos conocidos fácilmente refutables y que se hagan conjeturas de solución por medio de la aplicación de otras técnicas. Igualmente es importante el hecho de que las situaciones planteadas sean modelizadas por funciones polinómicas que son del dominio público de los estudiantes, dejando todo el peso en la comprensión del concepto de derivada.

> “Bueno primero se le pide que elabore una tabla de datos del volumen en función esférico. Pero aquí el estudiante debe saber la fórmula del volumen de una esfera y la tabla tendría tres filas una con radio, otra con tiempo y otra con volumen. Y luego que haga la gráfica si cree que la necesita. **Otra cosa importante de esta situación es que en el ítem d) se le pide que busque la velocidad instantánea en cualquier tiempo, para tratar de buscar la generalización**... Es decir que vea la función derivada. O sea, que en un tiempo halla la derivada en un punto, pero que hay una función derivada que para cada tiempo le permite hallar la velocidad instantánea en cada punto del dominio.”

Con relación a los **recursos**, más concretamente, al uso de las nuevas tecnologías en el proceso de evaluación, encontramos que en las tareas propuestas por el profesor B, no se requiere de la implementación de éstas, ni se evalúa el uso de nuevas tecnologías que ayuden en el proceso de resolución de las tareas.

El análisis de la evaluación hasta ahora realizado nos permite inferir elementos del conocimiento que exhibe el profesor con relación al concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje. En primer lugar, a lo largo de la entrevista sobre la evaluación que realizamos al profesor, se ve reflejada que la intención del profesor B al diseñar los dos talleres de evaluación, no es otra que tratar de hacer una radiografía de la comprensión que han alcanzado sus estudiantes como resultado del desarrollo de la unidad didáctica. Para ello, el profesor diseña una evaluación en la que propone tareas, enunciadas en diferentes contextos y en las que se utilizan una variedad de representaciones de los macro objetos f (x), f '(a) y f '(x), que requieren para su resolución de la traducción y relación entre representaciones de estos macro objetos.

El profesor B es consciente de la importancia que le asigna a las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x) en las tareas que propone, sin embargo, no tenemos evidencia empírica de la conciencia por parte del profesor B sobre la complejidad de los procesos cognitivos que emergen durante el proceso de resolución de las mismas. En efecto, el análisis de las tareas desarrollado anteriormente, es un análisis a posteriori al diseño de las tareas, y las categorías analíticas y teóricas que hemos utilizado son totalmente desconocidas por este profesor. Sin embargo, lo que sí queda claro, a través de las tareas que propone, es la importancia de evaluar las dimensiones algebraicas y gráficas del esquema de la derivada que manejan sus estudiantes, y esto lleva implícito una complejidad de procesos cognitivos que el profesor B explícita en la valoración de algunas de las tareas.

> **"Con la segunda, ya ésta es más complicadita, y ya el alumno para hacerla tiene que comprender el tema bien, o sea es ver los criterios de 1ª y 2ª derivada implícitos en el gráfico.** Es aprender a analizar la función a partir de su gráfico**. Cosa que hemos trabajado en clase, pero que tiene cierta dificultad para ellos. Pero es que lo pongo porque** para mí es importante que el alumno pueda manejar el concepto en varios contextos y el gráfico creo que es uno de los más complejos**, porque ellos están familiarizados es a pasar de la fórmula a la tabla y después graficar."**

En lo que respecta a la derivada como objeto matemático, creemos conveniente resaltar que el profesor B a lo largo de su discurso distingue y relaciona conceptualmente los macro objetos f '(a) y f '(x), proponiendo tareas que para su resolución los estudiantes tendrían que tener construido el esquema de la derivada, este entendido como la coordinación previa de las dos dimensiones algebraicas y gráficas definidas. En algunos casos se requiere la desencapsulación del macro objeto f '(x) en los elementos que la componen, es decir en el macro objeto f '(a) en cada punto del dominio. Además, plantea tareas que requieren de la generalización del concepto de derivada como razón de cambio entre magnitudes, teniendo como base la historia del concepto matemático.

Por tanto, la resolución del conjunto de tareas propuestas en la evaluación requiere el proceso de síntesis de los objetos O_1, O_2 y O_3 que engloba el macro objeto f ’(a) en los objetos O_1’, O_2’ y O_3’ que engloban el macro objeto f ’(x).

> “El significado del concepto de derivada... Podíamos pensar que es... **es la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto... en un punto... perfecto**... Pero otra cosa... entonces te decía que **es la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto o también puede tomarse como la velocidad instantánea de un cuerpo en un tiempo fijo... en un instante**... **En general yo diría que es una función, la función razón de cambio entre dos magnitudes**...”

En cuanto a las técnicas que se requieren implementar en la resolución de las tareas, encontramos que el profesor B, conoce y propone una variedad de técnicas directas e indirectas de derivación. Incluso, a diferencia de la ausencia de técnicas de derivación para el cálculo del macro objeto f ’(a) detectada en el análisis de las técnicas propuestas para el cálculo de los macro objetos f ’(a) y f ’(x) que desarrolla en la unidad didáctica, creemos que las tareas propuestas en la evaluación nos dejan ver el dominio que tiene el profesor B de las técnicas de cálculo de f ’(a) y f ’(x), y el nivel de comprensión que tiene de los macro objetos f ’(a) y f ’(x), puesto que plantea tareas que requieren la implementación de una variedad de técnicas para el cálculo del macro objeto f ’(a) y la coordinación con técnicas de derivación para el cálculo del macro objeto f ’(x).

> “**Lo otro es que cuando nosotros comenzamos a hacer un cálculo numérico de una variación instantánea, eso es algo engorroso, ir reduciendo un intervalo hasta cero, hasta muy próximo a cero**... Entonces eso es algo muy engorroso, y que el estudiante encuentre, **se dé cuenta de que hay otro procedimiento más ágil y más rápido y fácil de hacerlo, entonces se les dice bueno aquí está la importancia de esto de las reglas de derivación**... Pero claro sin descuidar lo gráfico, que también es muy importante la interpretación gráfica de la derivada y de la función derivada. Además de esa gran aplicabilidad que tiene en Física como ya lo dije, en Geometría, Química, etc... **Lo que trato con esto es ir minimizando tanto el darles las reglas sin que ellos comprendan de dónde salen y le vean sentido al uso algebraico posterior de ellas... como instrumento facilitador de procesos menos tediosos y más prácticos**...”

Las tareas que propone el profesor B en la evaluación, nos permite intuir, un tratamiento previo de los macro objetos f (x), f ’(a) y f ’(x), basado en la resolución de problemas enunciados en diferentes contextos y con una riqueza en el uso de representaciones, traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x), que ayuden a emerger en los estudiantes un buen nivel de comprensión de estos macros objetos que posibilite la resolución de las mismas. Esto se corroborará con el análisis de las tareas que conforman la actividad matemática que el profesor B realiza en el aula.

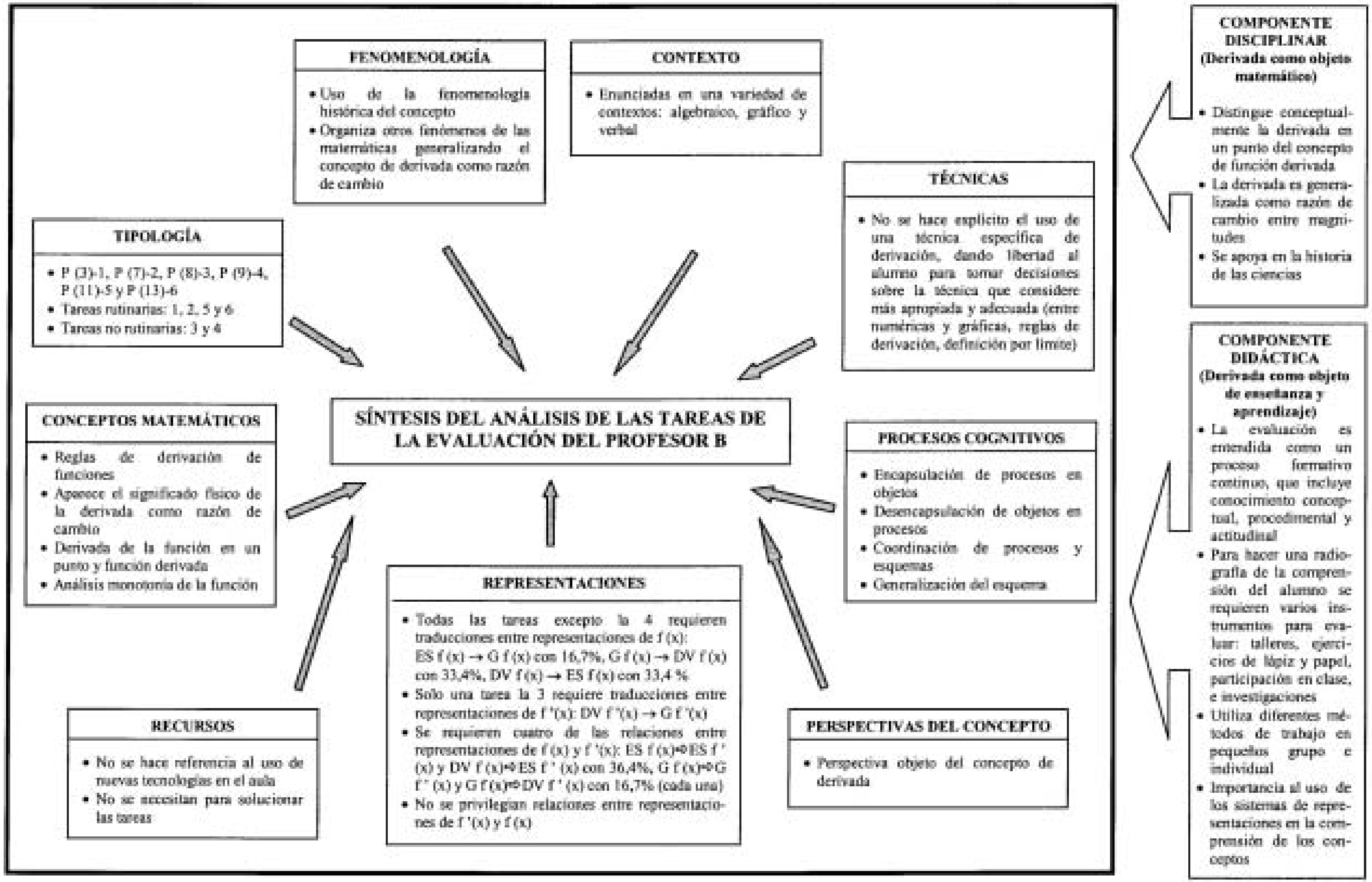
Igualmente, podemos inferir del discurso del profesor B que la evaluación es entendida como un proceso formativo continuo, que incluye la necesidad de evaluar en los estudiantes conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal.

> **“Bueno esto yo le llamo taller evaluativo, no lo veo como un examen tradicional que persigue medir el grado de conocimiento del alumno**. Aquí lo que quiero mirar es el grado de comprensión del concepto, lo cual implica dominio conceptual y procedimental, **por tanto, el estudiante tiene la posibilidad de buscar sus apuntes, usar libros... en general consultar porque les pongo situaciones de interpretación más que de aplicación de formulas... y en un tiempo de 2 horas clases...** Yo acostumbro a colocarles en cada evaluación o taller evaluativo una frase o pensamiento que contribuya a su formación integral; en éste que te doy les coloqué: trabaja con autonomía y responsabilidad para lograr ser una persona con un futuro promisorio y lleno de triunfos”

Por tanto, el profesor B entiende la evaluación como una herramienta necesaria para indagar la comprensión de los estudiantes, pero no centrándose en el examen, como único instrumento de evaluación, sino que para hacer una radiografía de la comprensión del alumno con relación al concepto matemático, se requiere de varios instrumentos y de diferentes momentos durante el proceso de enseñanza y aprendizaje; entre los instrumentos que utiliza, señala: talleres, ejercicios de lápiz y papel, participación en clase, trabajo en pequeños grupos, etc...

> Además, yo ya te he dicho en la otra entrevista que **para mí la evaluación es formativa y continua, es decir que tengo en cuenta todo el proceso del alumno, su participación, el trabajo en pequeños grupos y sus trabajos individuales**... por eso nunca le llamo examen... sino taller evaluativo....”

A continuación, en el esquema siguiente, intentaremos resumir los elementos descritos a lo largo del análisis de la unidad didáctica.


SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE LAS TAREAS DE LA EVALUACIÓN DEL PROFESOR B
FENOMENOLOGÍA
• Uso de la fenomenología histórica del concepto
• Organiza otros fenómenos de las matemáticas generalizando el concepto de derivada como razón de cambio
CONTEXTO
• Enunciadas en una variedad de contextos: algebraico, gráfico y verbal
TÉCNICAS
• No se hace explícito el uso de una técnica específica de derivación, dando libertad al alumno para tomar decisiones sobre la técnica que considere más apropiada y adecuada (entre numéricas y gráficas, reglas de derivación, definición por límite)
TIPOLOGÍA
• P (3)-1, P (7)-2, P (8)-3, P (9)-4, P (11)-5 y P (13)-6
• Tareas rutinarias: 1, 2, 5 y 6
• Tareas no rutinarias: 3 y 4
CONCEPTOS MATEMÁTICOS
• Reglas de derivación de funciones
• Aparece el significado físico de la derivada como razón de cambio
• Derivada de la función en un punto y función derivada
• Análisis monotonía de la función
PROCESOS COGNITIVOS
• Encapsulación de procesos en objetos
• Desencapsulación de objetos en procesos
• Coordinación de procesos y esquemas
• Generalización del esquema
REPRESENTACIONES
• Todas las tareas excepto la 4 requieren traducciones entre representaciones de f (x): ES f (x) → G f (x) con 16,7%, G f (x) → DV f (x) con 33,4%, DV f (x) → ES f (x) con 33,4 %
• Sólo una tarea la 3 requiere traducciones entre representaciones de f '(x): DV f '(x) → G f '(x)
• Se requieren cuatro de las relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x): ES f (x)⇒ES f '(x) y DV f (x)⇒ES f '(x) con 36,4%, G f (x)⇒G f '(x) y G f (x)⇒DV f '(x) con 16,7% (cada una)
• No se privilegian relaciones entre representaciones de f '(x) y f (x)
RECURSOS
• No se hace referencia al uso de nuevas tecnologías en el aula
• No se necesitan para solucionar las tareas
PERSPECTIVAS DEL CONCEPTO
• Perspectiva objeto del concepto de derivada
COMPONENTE DISCIPLINAR (Derivada como objeto matemático)
• Distingue conceptualmente la derivada en un punto del concepto de función derivada
• La derivada es generalizada como razón de cambio entre magnitudes
• Se apoya en la historia de las ciencias
COMPONENTE DIDÁCTICA (Derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje)
• La evaluación es entendida como un proceso formativo continuo, que incluye conocimiento conceptual, procedimental y actitudinal
• Para hacer una radiografía de la comprensión del alumno se requieren varios instrumentos para evaluar: talleres, ejercicios de lápiz y papel, participación en clase, e investigaciones
• Utiliza diferentes métodos de trabajo en pequeños grupo e individual
• Importancia al uso de los sistemas de representaciones en la comprensión de los conceptos

ii. Con relación a la unidad didáctica

Para el análisis de las tareas propuestas en la unidad didáctica implementamos la misma metodología utilizada en el análisis de las tareas propuestas en las evaluaciones diseñadas por los profesores. Inicialmente, clasificamos las tareas propuestas en la unidad didáctica atendiendo a la tipología que arrojó el análisis de las tareas de las evaluaciones (trece tipos de tareas,- ver apartado 5.3.2.2.). Posteriormente, se hizo un análisis de las tareas que no se correspondían con la tipología definida.

La unidad didáctica propuesta por el profesor B contiene 35 tareas en total. Teniendo en cuenta la tipología definida como resultado del análisis de las tareas propuestas en las evaluaciones, podemos concluir que de las 35 tareas propuestas en la unidad didáctica, 25 de ellas pueden ser ubicadas en la tipología definida, y 10 no están incluidas en esta clasificación, y, por tanto, requieren de un análisis particular. Tal y como se ilustra en la siguiente tabla, de las 25 tareas que se corresponden con la tipología definida, podemos concluir que el tipo de tareas que más usa el profesor B en el desarrollo de la unidad es la tipo P (4) con un total de 10 tareas, seguidamente, tenemos las tipo P (6) y P (9) con 6 tareas, la P (8) con 2 y, finalmente, la P (7) con 1 tarea.

Tipo de tarea / Frecuencia	P(0)	P(1)	P(2)	P(3)	P(4)	P(5)	P(6)	P(7)	P(8)	P(9)	P(10)	P(11)	P(12)	P(13)	Otras
					10		6	1	2	6					10
TOTAL	35														

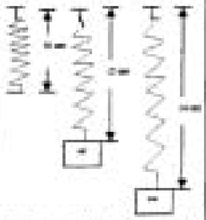
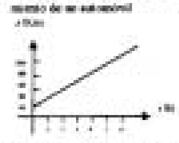
Las tareas que hemos definido como "otras", las analizamos utilizando el mismo instrumento que diseñamos para el análisis de las tareas propuestas por los profesores en las evaluaciones. El análisis particular de las diez, nos arroja diez tipos de tareas más a la tipología ya definida inicialmente, en el análisis de las tareas de las evaluaciones, la cual ya fue ampliada en tres más (P (14), P (15) y P (16)) después del análisis de las tareas presentes en la unidad didáctica del profesor A (ver anexo 11). A continuación nos centraremos en describir el análisis de las diez que aparecen en la unidad didáctica del profesor B y que no fueron evaluadas por este profesor. El objetivo del análisis de estas tareas que hemos definido como "otras", es intentar interpretar y caracterizar la actividad matemática que el profesor genera en el aula para que sus alumnos construyan los macro objetos f ’(a) y f ’(x), y a su vez, compararla con las tareas que considera relevantes para evaluar la comprensión de estos macro objetos.

Las tareas propuestas por el profesor B en la unidad didáctica y que no fueron evaluadas por este profesor, enumeradas del uno al diez en la tabla de análisis 5, las hemos tipificado como P (17), P (18), P (19), P (20), P (21), P (22), P (23), P (24), P (25) y P (26), respectivamente. Encontramos que éstas poseen una riqueza conceptual, una variedad de técnicas y una gran complejidad en los procesos cognitivos que demanda su resolución.

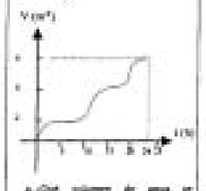
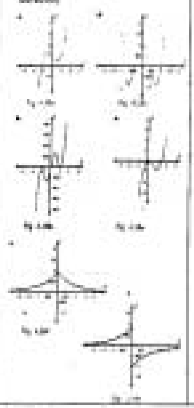
Estas tareas recogen aspectos **fenomenológicos** del concepto de derivada, donde se trata una variedad de fenómenos que organiza tanto la propia matemática como la física. Son tareas que contemplan el tratamiento conjunto de los objetos tasa instantánea de variación y pendiente de la recta tangente, basado en la aplicación de técnicas gráficas, numéricas y algebraicas de estos dos objetos; esto consideramos que facilita la comprensión de los mismos. Así, las tareas P (17), P (19), P (21) P (23) y P (24) se centran en estudiar el objeto tasa instantánea de variación, atendiendo tanto a la velocidad instantánea ($\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$), como la variación de una magnitud que depende del tiempo ($\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta t}$), o bien las variaciones de dos magnitudes cualesquiera ($\lim\limits_{\Delta mag' \to 0} \frac{\Delta mag}{\Delta mag'}$).

Igualmente encontramos en las tareas una variedad de **contextos**: verbal, gráfico y algebraico, que determinan, en cierta forma, la riqueza de los sistemas de representaciones usados y de las traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x) que requieren realizar durante el proceso de resolución de las mismas. Lo anterior es coherente con la importancia que el profesor otorga a la hora de evaluar a la variedad de traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x) como un gran indicador de la comprensión que posee un estudiante de estos macro objetos (ver apartado anterior).

Tabla 5. ANÁLISIS DE TAREAS DE LA UNIDAD DIDÁCTICA DEL PROFESOR B

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f (x) y f ' (x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (17)	B	1. El resorte de la figura tiene 10 cm de longitud. Colocando sucesivamente masas de 100 gr., 200 gr., etc., sus valores pasan a ser los indicados en la gráfica.  a) Realiza una tabla de datos para 0, 1, 2, 3, 4 y 5 cuerpos b) Haz un gráfico de las magnitudes longitud y masa, indicando previamente cuál es la variable independiente c) Calcula la pendiente del gráfico. ¿Cuál es su significado físico? d) ¿Cuál es la expresión matemática (ecuación) que relaciona la magnitud del resorte y la masa del cuerpo que se carga al mismo. e) Halla la longitud del resorte si se cuelgan 800 gr.	Física	Verbal	DV f (x) T f (x) G f (x) ES f (x)	DV f (x) → ES f (x) ⟲ DV f (x) → T f (x) → G f (x) → ES f (x) ⟲ I. 4. 5.	No	Aproximación gráfica y numérica	Función, gráfica de la función afín, pendiente de una recta, proporcionalidad directa.	• Desencapsulación de la función f (x) como conjunto de pares (x, f (x)) para construir la G f (x) • Desencapsulación del objeto pendiente en el proceso de calcularla a partir de dos puntos de la gráfica • Desencapsulación del objeto función afín en el proceso de calcular su ES f (x) a partir de la información que proporciona la G f (x)	No
P (18)	B	2. Halla la ecuación de la recta, si: a) La recta pasa por los puntos (-1, -2) y (3, 2) b) La recta tiene pendiente m = -2/5 y pasa por el punto (-3,4) c) Recuerda elaborar el gráfico en cada caso	Matemática	Verbal	DV f (x) ES f (x) G f (x)	DV f (x) → G f (x) DV f (x) → ES f (x) → G f (x) I. 4. 6.	No		Función, ecuación de la línea recta, pendiente de una recta, gráfica de función afín	• Desencapsulación de la función f (x) como conjunto de pares (x, f (x)) para construir la G f (x) • Desencapsulación del objeto pendiente en el proceso de calcularla a partir de dos puntos de la gráfica • Desencapsulación del objeto función afín en el proceso de calcular su ES f (x) a partir de la coordinación de los dos procesos anteriores	No
P (19)	B	3. El gráfico x-t representa el movimiento de un automóvil  a. Describe el movimiento del auto hasta las 6 h. b. Halla la pendiente. ¿Qué significado tiene? c. Halla la ecuación que liga x y t d. Verifica la ecuación para los valores de t	Física	Gráfico/ verbal	G f (x) DV f (x) ES f (x) DV f ' (x)	G f (x) → DV f (x) → ES f (x) ES f ' (x) → DV f ' (x)	G f (x) ⇒ DV f ' (x) G f (x) → DV f (x) → ES f (x) ⇒ DV f ' (x) [II. 4. 5]		Función, función afín, gráfica de la función afín, ecuación de la línea recta, pendiente de la línea recta, velocidad, gráfica de x-t	• Desencapsulación del objeto gráfica de espacio-tiempo como el conjunto de pares (t, x (t)) • Coordinación de los objetos pendiente y velocidad en la interpretación de la gráfica x-t • Desencapsulación del objeto función afín en el proceso de calcular su ES f (x) a partir de la coordinación de los dos procesos anteriores	No

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f (x) y f ´(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (20)	B	4. Consideremos la función $y = f(x) = x^2$ I. Hallemos Δy para a) $X_0 = 2$ y $X_1 = 2,2$ b) $X_0 = 2$ y $X_1 = 2,1$ c) $X_0 = 2$ y $X_1 = 2,01$ d) $X_0 = 2$ y $X_1 = 2,001$ II. Analiza el comportamiento de los valores de Δy. ¿Qué concluyes de la variación de y referida a Δx, cuando $\Delta x \to 0$? III. Grafica $y = f(x) = x^2$, utiliza papel milimetrado. Traza aproximadamente la recta que sea tangente a la curva y que pasa por el punto (2,4). IV. Calcula la pendiente de esta recta a partir del gráfico, ¿puedes hacerlo?. Compara el valor obtenido con $\Delta y/\Delta x$ cuando $\Delta x \to 0$, ¿qué concluyes? ¿Cuál será el valor exacto de la pendiente de la recta tangente? ¿Puedes hallar su ecuación?	Matemática	Algebraico	ES f (x) DV f (x) G f (x) DV f ´(x) ES f ´(x)	ES f (x) → ES f (x) ↻ → DV f (x) → G f (x) G f ´(x) → ES f ´(x) → DV f ´(x)	ES f (x) ⇔ DV f ´(x) ES f (x) → ES f (x) ↻ → DV f (x) → G f (x) ⇔ G f ´(x) → ES f ´(x) → DV f ´(x) (I. 4.3 - II. 4.4)	Aproximación gráfica y numérica (Regla de los cinco pasos)	Función, función afín, pendiente, recta tangente, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, derivada en un punto y función derivada (cálculo directo)	• Desencapsulación del objeto función en la acción de calcular el incremento de una función a partir de la ES f (x) • Coordinación de la acción de calcular los incrementos de la función en diferentes intervalos próximos del dominio en el análisis de la variación local de la función • Encapsulación del proceso de calcular el incremento de la función para valores próximos a un punto del dominio en el objeto tasa instantánea de variación • Coordinación los objetos tasa instantánea de variación y pendiente de la recta tangente en la construcción de la gráfica de f (x) y f ´(x) • Desencapsulación de la función f (x) como conjunto de pares (x, f (x)) para construir la G f (x)	No
P (21)	B	5. El gráfico s-t representa las posiciones de un automóvil y los tiempos empleados:  a. Describe el movimiento del automóvil b. Halla el desplazamiento en intervalos de 1 h c. Halla la distancia en intervalos de 1h d. Calcula la velocidad media del automóvil en intervalos de 1h e. Estima la velocidad del automóvil en el instante que ha gastado en 1,2 h.	Física	Gráfico/ verbal	G f (x) DV f (x) ES f ´(x) DV f ´(x)	G f (x) → DV f (x)	G f (x) ⇔ DV f ´(x) G f (x) → DV f (x) ⇔ DV f ´(x) (II. 4.5)	Usando límite	Función, gráfica s-t, desplazamiento, pendiente, recta tangente, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, derivada en un punto	• Desencapsulación del objeto gráfica de espacio-tiempo como el conjunto de pares (t, s (t)) • Coordinación de los objetos pendiente y velocidad en la interpretación de la gráfica s-t • Desencapsular el objeto tasa instantánea de variación en el proceso de calcularla a través de los valores que proporciona la gráfica de s-t • Coordinación de los esquemas de velocidad instantánea y función derivada como razón de cambio	No
P (22)	B	6. Utilice la prueba de la primera derivada para demostrar que la función cuadrática $f(x)=ax^2+bx+c$ tiene: a. Un máximo en $x = -b/2a$ de valor $f(-b/2a) = (4ac-b^2)/4a$, siempre y cuando $a < 0$. b. Un mínimo en $x = -b/2a$ de valor $f(-b/2a) = (4ac-b^2)/4a$, siempre y cuando $a > 0$. c. ¿Cómo se llama el punto de la gráfica de f donde se ubica el máximo (o mínimo) de f?	Matemática	Algebraico	ES f (x) ES f ´(x) DV f ´(x)	ES f ´(x) ↻ → DV f ´(x)	ES f (x) ⇔ DV f ´(x) ES f (x) ⇔ ES f ´(x) ↻ → DV f ´(x) (II. 4.6)	Reglas de derivación	Función, función cuadrática, función derivada (cálculo indirecto), derivada en un punto, criterio de la primera derivada	• Desencapsulación del objeto función derivada en el proceso de calcular los puntos críticos • Coordinación del proceso de calcular la función derivada a partir de ES y el proceso de calcular los puntos máximos y mínimos de la función mediante la aplicación del criterio de la 1ª derivada • Coordinar el análisis de la monotonía de la función en un intervalo (global) con el análisis de la función en un punto del dominio (local).	No

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Problema: Fenomenología	Problema: Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre $f'(x)$ y $f''(x)$	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
P (23)	B	7. La velocidad de una partícula que se mueve a lo largo del eje x varía en el tiempo de acuerdo con la expresión $v = (5t^2 - 20)$ m/seg., donde t se mide en seg. a) Encuentre la aceleración promedio en el intervalo de tiempo $t = 0$ a $t = 2$ seg. b) Determine la aceleración en $t = 2$ seg. c) Grafica la función y la recta tangente	Física	Algebraico / Verbal	EE $f(x)$ EE $f'(x)$ G $f(x)$ G $f'(x)$	EE $f'(x) \to$ EE $f'(x) \to$ G $f(x)$ EE $f'(x) \to$ G $f'(x)$	EE $f(x) \Rightarrow$ G $f'(x)$ EE $f'(x) \to$ EE $f'(x) \to$ G $f(x) \Rightarrow$ EE $f'(x) \to$ G $f'(x)$ (L 4.2 + IL 4.5)	Reglas de derivación	Función, velocidad instantánea, aceleración media, aceleración instantánea, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, función derivada, derivada en un punto	• Coordinación de los esquemas de aceleración media y aceleración instantánea con los esquemas de tasa media de variación y tasa instantánea de variación. • Coordinación de los esquemas de aceleración instantánea y función derivada como razón de cambio	No
P (24)	B	8. La gráfica representa el consumo de agua que hace la comunidad del Bachillerato de Pehuamo durante un día cualquiera del año académico del 2000.  a. ¿Qué volumen de agua se consume en 24 h? b. ¿Qué cantidad de agua se consume entre las 3 y las 18 h? c. Halla los m³/h que se están consumiendo a las 3 h en punto d. ¿A qué hora en punto se consume más agua?	Física	Gráfico/ verbal	G $f(x)$ DV $f(x)$ DV $f'(x)$	G $f(x) \to$ DV $f(x)$	G $f(x) \Rightarrow$ DV $f'(x)$ G $f(x) \to$ DV $f(x) \Rightarrow$ DV $f'(x)$ (IL 4.3)	Aproximación gráfica y numérica	Función, gráfica de funciones acumulativas, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, derivada en un punto	• Desencapsulación del objeto derivada en un punto en el análisis monotónico de la función (criterio de la primera derivada). • Desencapsulación de los objetos tasa media de variación y tasa instantánea de variación en el proceso de calcular su valor a partir de la información que proporciona la gráfica de la función. • Coordinación de los objetos tasa instantánea de variación y pendiente de la recta tangente en la interpretación gráfica de la variación local de la función (derivada en un punto).	No
P (25)	B	9. Aparee cada gráfica de la función (lado izquierdo) con la gráfica que le corresponde a su derivada (lado derecho) 	Matemáticas	Gráfico	G $f(x)$ DV $f(x)$ G $f'(x)$ DV $f'(x)$	G $f(x) \to$ DV $f(x)$ DV $f'(x) \to$ G $f'(x)$ o G $f'(x) \to$ DV $f'(x)$ DV $f(x) \to$ G $f(x)$	G $f(x) \Rightarrow$ G $f'(x)$ G $f(x) \to$ DV $f(x) \Rightarrow$ DV $f'(x) \to$ G $f'(x)$ (IL 4.4) o G $f'(x) \Rightarrow$ G $f(x)$ G $f'(x) \to$ DV $f'(x) \Rightarrow$ DV $f(x)$ $\to$ G $f(x)$ (IV. 4.4)	Aproximación gráfica	Función, gráfica de la función, función derivada, derivada en un punto, interpretación gráfica de los criterios de la 1ª y 2ª derivada, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión	• Desencapsulación del objeto (estático) de función derivada en el proceso de considerar a dinámica en un intervalo de la función e interpretar los criterios de 1ª y 2ª derivada en el análisis monotónico de la función. • Coordinación de los esquemas de función y derivada de la función en un punto (tomo el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto), que permita hacer un análisis de la monotonía de la función: creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad, etc. • Síntesis del nuevo objeto $f'(x)$ en el nuevo objeto $f''(x)$ y coordinación de los nuevos objetos $f(x)$, $f'(x)$ y $f''(x)$ en la interpretación gráfica de los mismos.	No

Tipo de problema	Profesor	Problema: Enunciado	Fenomenología	Contexto	Representaciones: Representaciones	Representaciones: Traducciones	Relación entre f (x) y f '(x)	Técnica	Conocimientos involucrados	Procesos cognitivos	Recursos (Tecnología)
F (2b)	B	10. De la gráfica de la siguiente figura de la función derivada f '(x), encuentre dónde f tiene puntos críticos, dónde es creciente, dónde es decreciente, cuáles puntos críticos corresponden a máximos locales y cuáles a mínimos locales. 	Matemático	Gráfico Verbal	G f '(x) DV f '(x) DV f(x)	G f '(x) →DV f '(x)	G f '(x)⇒DV f (x) G f '(x) → DV f '(x)⇒DV f (x) [IV. 4.4]	Aproximación gráfica	Función, gráfica de la función, función derivada, derivada en un punto, interpretación gráfica de los criterios de la 1ª y 2ª derivada, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión	• Desencapsulación del objeto (estático) de función derivada en el proceso de considerar y dinámico en un intervalo de la función e interpretar los criterios de 1ª y 2ª derivada en el análisis monotónico de la función. • Coordinación de los esquemas de función y derivada de la función en un punto (como el valor de la pendiente de la recta tangente en dicho punto), que permite hacer un análisis de la monotonía de la función: creciente, decreciente, puntos máximos y mínimos, puntos de inflexión, concavidad, etc. • Síntesis del macro objeto f '(x) en el macro objeto f ''(x) y coordinación de los macro objetos f (x), f '(x) y f ''(x) en la interpretación gráfica de los mismos	No

Con relación al uso de **representaciones** del macro objeto f (x), podemos concluir que, exceptuando las tareas 6 del tipo P (22) y la tarea 10 del tipo P (26), todas las tareas requieren hacer traducciones entre representaciones de este macro objeto, en las que destacan: **DV** f (x)→T f (x)→G f (x)→ES f (x); **DV** f (x)→ES f (x)→G f (x); **G** f (x)→DV f (x)→ES f (x); **ES** f (x)→ ES f (x) ↻→ DV f (x)→ G f (x); G f (x)→ DV f (x); ES f (x)→ ES f (x)↻→G f (x); DV f (x)→G f (x). Lo anterior nos muestra la variedad de representaciones del macro objeto función en las que se enuncian las tareas y la riqueza en las traducciones entre representaciones del mismo.

A diferencia de la evaluación elaborada por el profesor B donde solo una de las tareas (la 3 del tipo P(8)) requiere de traducciones entre representaciones del macro objeto f '(x), en las tareas propuestas en la unidad didáctica encontramos que seis de las tareas requieren traducciones entre representaciones de este macro objeto; así: las tareas 3 del tipo P (19) y 6 del tipo P(22) de ES f '(x)→DV f '(x); la tarea 4 del tipo P (20) de G f '(x)→ES f '(x)→DV f '(x); la tarea 7 del tipo P (23) de ES f '(x) ↻→G f '(x); la tarea 9 del tipo P (25) de DV f '(x)→G f '(x) o de G f '(x)→ DV f '(x); y, finalmente, la tarea 10 del tipo P (26) de G f '(x) → DV f '(x).

Igualmente, en las tareas propuestas en la evaluación del concepto de derivada que propuso el profesor B, no encontramos ninguna tarea que privilegiara las relaciones entre representaciones de f '(x) a f (x). Ahora en cambio, en las tareas que el profesor trata en la unidad didáctica, sí encontramos las que requieren para su resolución relacionar los macro objetos f '(x) y f (x), aunque el profesor no las considere importantes a la hora de evaluar la comprensión de estos macro objetos. Más concretamente, tenemos, la tarea 9 del tipo P (25) que requiere la relación G f '(x)⇨ G f (x); y la tarea 10 del tipo P (26) que requiere la relación G f '(x)⇨DV f (x). Y, en lo que respecta a las relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) a f '(x), al igual que en la evaluación, encontramos que todas las tareas, exceptuando las tareas 1 del tipo P (17) y la 2 del tipo P (18), privilegian la relación entre estos dos macro objetos.

En general, si tenemos en cuenta la totalidad de las tareas propuestas en la unidad didáctica (35 tareas), es decir, si consideramos, además del análisis hasta ahora realizado de los 10 tipos de tareas que el profesor no tuvo en cuenta a la hora de evaluar el concepto de derivada, el análisis de las 25 tareas que sí fueron evaluadas y que se distribuyen en los tipos P (4), P (6), P (8) y P (9), podemos concluir que las tareas propuestas por el profesor B, evidencian el uso de una variedad de sistemas de representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x), y propician la emergencia de traducciones y relaciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x) en el proceso de resolución. Lo anterior se puede visualizar mejor en la tabla 6.

Al igual que las tareas de la evaluación, en los enunciados de las tareas que estamos analizando de la unidad didáctica, no se hace explícito el uso de una **técnica** específica de derivación, lo cual muestra la libertad que otorga el profesor B a sus alumnos para que decidan y justifiquen la técnica que consideren más adecuada según sea la característica de la tarea. Sin embargo, la variedad de enunciados de las tareas tratadas en la unidad didáctica, propicia el uso de diferentes técnicas de derivación directas e indirectas. En efecto, creemos que se privilegia por igual y complementariamente, tanto el uso de técnicas de derivación directa por definición en términos de límite, como el uso de técnicas directas de aproximación gráficas y numéricas, o bien el uso de las técnicas indirectas de las reglas de derivación. Esta riqueza y complejidad de las técnicas utilizadas, puede ayudar a emerger, en los estudiantes, un nivel de comprensión trans algebraico-trans gráfico del esquema de la derivada caracterizado por la complejidad de procesos cognitivos que requieren activar en el proceso de resolución de las tareas.

En lo que respecta a las **estructuras conceptuales**, al igual que las tareas analizadas en la evaluación, las estructuras conceptuales de las tareas de la unidad didáctica requieren la coordinación de varios esquemas de conceptos, tales como: función, tasa media de variación, tasa instantánea de variación, velocidad instantánea, pendiente de la recta tangente, derivada en un punto, función derivada, conceptos de la geometría, etc. Lo anterior conlleva a la activación de procesos cognitivos complejos que ayuden a la construcción de esquemas de los conceptos inmersos, que sean coherentes y consistentes.

Tabla 6. Análisis de las traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x) en las tareas propuestas en la ***unidad didáctica*** diseñada por **EL PROFESOR B.** (Se tiene en cuenta sólo la representación inicial y la representación final utilizada)

de → a	Expresión simbólica f '(x)	Gráfica f '(x)	Tabla f '(x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))	Expresión simbólica f (x)	Gráfica f (x)	Tabla f (x)	Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))
Expresión simbólica f (x)	22	1		2				
Gráfica f (x)		3		4				
Tabla f (x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f (x))					1	1		
Expresión simbólica f '(x)								
Gráfica f '(x)						1		1
Tabla f '(x)								
Descripción verbal de la situación (en términos de f '(x))								

TOTAL DE TAREAS PROPUESTAS EN LA UNIDAD DIDÁCTICA	36

Si tenemos en cuenta la complejidad de los elementos hasta aquí analizados de las tareas propuestas en la unidad didáctica, podemos concluir que para que un individuo pueda abordar con éxito el proceso de resolución de las mismas, requiere tener una perspectiva objeto de los macro objetos f (x) y f ’(x). Lo cual implica, activar una serie de procesos cognitivos complejos que incluyen, interiorización de acciones en procesos, encapsulación de procesos en objetos, desencapsulación de objetos en procesos, coordinación de acciones, procesos y esquemas, y el proceso de síntesis de objetos en esquemas (tematización); para cada una de las tareas analizadas en la unidad (P (17) a P (26)) los podemos encontrar descritos detalladamente en la tabla 4, y los restante (25 tareas que se corresponden con la tipología definida en el análisis global de las tareas en la tabla 18).

En lo que respecta al tipo de **estrategias metodológicas** que implementa en el aula para que el alumno construya el conocimiento matemático, el profesor B plantea una variedad de actividades que incluyen: investigación previa del tema por parte de los estudiantes, trabajo individual, trabajo en grupo pequeño, trabajo en grupo grande en donde se ponen en común las ideas o conceptos trabajados en pequeño grupo o de manera individual, y donde el profesor aclara las dudas que puedan tener los estudiantes, ejercicios de lápiz y papel de ampliación del conocimiento construido y evaluación formativa y continua del tema desarrollado.

> “Bueno hay trabajos individuales, después de una exposición o de una construcción por parte del alumno, algunos realizan ejercicios en el tablero; en otras ocasiones las actividades son grupales porque consideran que aprenden mucho más, interactúan mucho más y eso se nota, es más hay muchas veces que parece ser que el lenguaje común entre ellos es un instrumento de mayor comprensión que el mismo lenguaje que maneja el profesor, pero para que no se manipule hay que ir aplicando distintos criterios para la formación de los grupos, rotativa, colocando monitores, etc. Por eso yo les aclaro que esto es trabajo de grupo lo cual implica que deben trabajar todos y no trabajo en grupo que es algo de remiendos.”

En términos generales, el profesor B para introducir un concepto propone una metodología de enseñanza que parte de las ideas previas de los estudiantes sobre el tema en cuestión, posteriormente los enfrenta a la resolución de problemas en pequeños grupos, y finalmente, se hace una plenaria en la que se ponen en común los resultados del trabajo en grupo, en el cual, teniendo en cuenta los logros y/o dificultades que tengan los estudiantes, el profesor B orienta la discusión y formaliza los conceptos tratados. Consideramos que a lo largo de toda la unidad es coherente con esta metodología que implementa, y que justifica su práctica con un modelo Ausubeliano, en el que la potencia y significación de las situaciones y el trabajo entre iguales (lenguaje) son la base para que el estudiante construya su conocimiento; el profesor se convierte en un orientador en el proceso.

> "Bueno en cuanto a las preguntas obedecen más bien a una estructura metodológica o a una corriente pedagógica, yo considero que el conocimiento pasa por una tríada de elementos: la realidad, el pensamiento y el lenguaje, entonces hoy por hoy pienso que hay que extractarle a los estudiantes con preguntas lo que ellos están observando a su alrededor y cómo eso lo están conectando o como lo pueden conectar con el saber escolar. Entonces, desde la metodología socrática, la pregunta a los alumnos es motivante, entre otras porque crea un clima de confianza siempre que tenga un buen tono, por eso es muy distinto pregunta qué piensas tú de la derivada o que crees que es la derivada, de la pregunta define la derivada, porque ya en la segunda te debe decir algo exacto, mientras que con las primeras son sus ideas. Ya después vendría la segunda parte de la metodología, que sería, la resolución de problemas para tratar de desmontar eso que él cree que es lo correcto hasta que vea sus conflictos y llegar a conciliar algo que se acerque más al conocimiento científico. En cuanto al trabajo de grupo, bueno primero porque permite que ellos interactúen y socializar el conocimiento, es decir como pueden hablar alrededor de un tema, y sobre todo el aprendizaje entre iguales. Y finalmente, con la exposición, ya aquí me voy un poco a lo que plantea Ausubel, ya el profesor es el que le da una organización a toda esa lluvia de ideas que han surgido del trabajo en grupo o de las preguntas, entonces es el que formaliza y organiza las ideas."

En general, podemos concluir, que la actividad matemática que el profesor B implementa en el aula está caracterizada por los siguientes elementos, que se encuentran resumidos en la tabla 7:

1. Tratamiento histórico de los fenómenos que dieron origen a la construcción del concepto: cálculo de la pendiente de la recta tangente y de la velocidad instantánea; es decir; se plantean tareas donde los fenómenos que organizan el concepto están tanto en las ciencias naturales (más concretamente en la física) como en la propia matemática.
2. La resolución de problemas es la base para la introducción y desarrollo de los conceptos. Estos problemas se caracterizan por estar enunciados en diferentes contextos (verbal, gráfico, numérico y algebraico) y por el uso de una variedad de representaciones de los macro objetos f (x) y f '(x), sin llegar a sobrecargar el uso de representaciones y traducciones entre representaciones, que conlleven el convertirse en obstáculos para la comprensión de los objetos f (x), f '(a) y f '(x).

3. Se privilegian las traducciones entre representaciones de los macro objetos f (x) y f ’(x), al igual que las relaciones entre representaciones tanto de f (x) a f ’(x) como de f ’(x) a f (x). Ésta última en menor proporción, puesto que algunas relaciones nos comportaría a la comprensión del cálculo integral.
4. Se fomenta el trabajo justificado de varias técnicas de derivación directas e indirectas para el cálculo del macro objeto f ’(x), e incluso, aparece el tratamiento de técnicas directas de derivación gráficas y numéricas para el cálculo del macro objeto f ’(a).
5. Las tareas requieren la coordinación de varios objetos matemáticos para su resolución. Esto implica el surgimiento y la activación de procesos cognitivos complejos que contribuyen a la construcción de una perspectiva objeto de los conceptos involucrados: pendiente de la recta, velocidad media, tasa media de variación, pendiente de la recta tangente, velocidad instantánea y tasa instantánea de variación.
6. La organización y jerarquización de las tareas, permiten la emergencia progresiva de procesos cognitivos complejos, y por tanto, la posible construcción de los macro objetos f ’(a) como el resultado de la coordinación de los tres objetos O_1, O_2 y O_3; y la construcción del macro objeto f ’(x) como resultado del proceso de síntesis del macro objeto f ’(a).
7. La tipología de tareas propuestas en la evaluación en su totalidad forman parte de la actividad matemática que el profesor B propone en la unidad didáctica. En efecto, en la unidad didáctica se incluyen otros tipos de tareas que no fueron evaluadas.
8. Al igual que en la evaluación, ninguna de las tareas propuestas en la unidad didáctica requieren del manejo y aplicación de algún software específico u otras herramientas tecnológicas.

<table>
<tr>
<td rowspan="7">Forma / Contenido
SINTAXIS/SEMÁNTICA</td>
<td>¿Cuál es la secuencia de los contenidos?</td>
<td colspan="4">▪ Lectura de un pasaje histórico: la derivada ¿cómo surgió?, y, ¿en qué se aplica?
▪ La ecuación de la recta, el concepto de pendiente y la gráfica de la función lineal.
▪ Resolución de problemas de gráficas de espacio-tiempo y cálculo de pendiente
▪ Variación media de variación e instantánea y pendiente.
▪ Definición de derivada y función derivada (no hay claridad entre la definición de los macro objetos f'(a) y f'(x))
▪ Aplicación del concepto de derivada
▪ Derivada y función derivada
▪ Propiedades de las derivadas: suma, producto, etc.
▪ Máximos y mínimos (Análisis monótono de funciones: criterio de la primera derivada, puntos críticos, criterio de la segunda derivada)
▪ Reglas de derivación: derivada de las funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales)
▪ Problemas de optimización.</td>
</tr>
<tr>
<td>¿A partir de qué introduce el concepto?</td>
<td>Definición
( )</td>
<td>Ejercicio tipo
( )</td>
<td>Situación real
(X)</td>
<td>Historia de la ciencia
(X)</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Qué tipo de actividades presenta?</td>
<td colspan="4">▪ Taller individual para elicitar ideas previas
▪ Puesta en común de los procesos de resolución de los problemas propuestos en el taller e introducción de conceptos a partir de los mismos.
▪ Resolución de problemas de aplicación: individual y en grupo
▪ Puesta en común de los procesos de resolución e intervención del profesor para aclarar dudas.
▪ Investigación de temas</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Qué tipo de ejercicios y/o problemas?</td>
<td colspan="4">Problemas rutinarios y no rutinarios enunciados en diferentes contextos</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Qué procesos cognitivos emergen de la actividad matemática?</td>
<td colspan="4">Interiorización de acciones en procesos, encapsulación de procesos en objetos, desencapsulación de objetos en proceso, generalización y generalización de esquemas</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Qué perspectivas del concepto se propician en las actividades?</td>
<td>Acción
( )</td>
<td>Proceso
( )</td>
<td>Objeto
(X)</td>
<td>Esquema
(X)</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Cuál es el uso que hace de la historia de la ciencia?</td>
<td colspan="4">La usa para introducir el concepto, y se manejan los problemas históricos y los aspectos fenomenológicos que dieron origen a la construcción del concepto</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="3">Traducciones y relaciones entre representaciones</td>
<td>¿Qué papel se le otorga a las traducciones y relaciones entre representaciones en el planteamiento de tareas?</td>
<td colspan="4">Un papel importante, puesto que se usan los diferentes sistemas de representaciones y se tratan varias traducciones y relaciones entre representaciones de f (x) y f '(x), sin llegar a una saturación de las mismas que obstaculice la comprensión de los macro objetos f (x), f'(a) y f'(x)</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Qué traducciones entre representaciones semióticas se utilizan?</td>
<td colspan="4">DV f (x)→ES f (x); DV f (x)→G f (x) (ver tabla 3)</td>
</tr>
<tr>
<td>¿Qué relaciones entre representaciones semióticas se utilizan?</td>
<td colspan="4">▪ ES f(x)⇨ES f'(x); ES f(x)⇨G f'(x); ES f(x)⇨DV f'(x); G f(x)⇨G f'(x); G f(x)⇨DV f'(x)
▪ G f'(x)⇨G f(x); G f'(x)⇨DV f(x) (ver tabla 3)</td>
</tr>
</table>

Tabla 7. Aspectos de la derivada como objeto de enseñanza y aprendizaje analizados en la unidad didáctica elaborada por el profesor B