igualtat que l'altra].(4) (Clavius, def. 5).[20]

DEFINICIO 8.

Dues raons es dirà que estan [la primera a la segona] en la mateixa raó logarítmica que dues quantitats [la primera a la segona], quan qualsevol raó múltiple de la primera raó i la quantitat equimúltiple de la primera quantitat, són a la vegada més petites, o bé a la vegada iguals, o bé a la vegada més grans que qualsevol raó múltiple de la segona raó i que la quantitat equimúltiple de la segona quantitat; la raó certament segons la seva elevació i la quantitat segons la seva quantitat. (Clavius, def. 6)[21]

Després d'aquestes definicions Mengoli construeix una teoria completa de raons logarítmiques, que utilitzarà per definir els logaritmes, on demostra que totes les propietats que verifiquen les magnituds en el llibre cinquè dels *Elements* també es verifiquen amb raons. La construcció de l'*Elementum quartum* és

---

[20] "Rationem logarithmicam habere inter se rationes dicentur quae multiplicatae possunt se mutuò, altitudine superare." [Geo,152]

[21] "In eadem ratione logarithmicè dicuntur esse rationes duae, prima ad secundam, atque duae quantitates, prima ad secundam: cum primae rationis, quaelibet multiplicata ratio, & primae quantitatis aequemultiplex, à secunde rationis qualibet multiplicata, & à secundae quantitatis aequemultiplici, vel unà deficiunt, vel unà aequales sunt, vel unà excedunt; ratio quidem, altitudine, & quantitas ipsà quantitate." [Geo, 152] Comentari: Es diferencia de Clavius 6 que Euclides compara quatre magnituds del mateix gènere i aquí es compara dues raons i dues quantitats. Dues raons $r_1 : r_2$ tenen la mateixa raó logarítmica que $q_1 : q_2$ equival a dir que per qualsevols naturals m, n

si $(r_1)^m < (r_2)^n$ llavors $m\, q_1 < n\, q_2$

i si són més grans o iguals l'altra raó també.

anàloga al llibre cinquè dels *Elements,* amb un paral.lelisme quasi total en les definicions i en les proposicions. Altra vegada doncs Mengoli utilitza el seu estudi del llibre cinquè dels *Elements* com a eina d'altres recerques en el procés de creació de la nova ciència.[22]

El tercer aspecte on és obvia la influència dels *Elements* d'Euclides és en el estil del llibre *Geometriae Speciosae*. Cada *Elementum* té la mateixa estructura: una carta-dedicatòria, algunes definicions i algunes proposicions amb les seves demostracions.[23] Mengoli, igual que Euclides, demostra les proposicions a partir de hipòtesis clares i propietats explícitament establertes. Demostra tot el que necessita. En les demostracions d'una proposició Mengoli escriu la paraula *Hypothesis* entenent per aquest terme la suposició d'un cas particular, sent l'enunciat el cas general. Mengoli no comprova que la demostració és certa sempre, però es fàcil veure que es continuarà verificant per altres exponents o lletres ja que la demostració és independent d'aquests valors. Després de la hipòtesis escriu la paraula *Demonstr.* i procedeix fent pas a pas la demostració.[24] En el marge escriu els teoremes que utilitza

---

[22] Cal esmentar que Giusti fa un estudi sobre les fases d'apropiació del llibre V dels *Elements* a *Euclides Reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola Galileiana,* pp. 5-9.

[23] Aquestes cartes-dedicatòries estan dirigides a personatges importants del món científic i cultural de l'època que tenien o havien tingut algun tipus de relació amb ell.

[24] A vegades després d'escriure la hipòtesi fa un altre apartat que en diu *Praeparatio*. En aquest, Mengoli escriu les igualtats que assumeix per fer la demostració.

en cada línia. Quan enuncia el que vol demostrar Mengoli diu igual que Euclides: "Dic que..." I quan acaba també ho fa amb *Quod &c.* Podríem dir que Mengoli, igual que Euclides, escriu d'una manera organitzada, sistemàtica i acurada pel que fa al rigor.

3 Cavalieri, mestre de Mengoli.

La influència de Cavalieri sobre l'obra i el pensament matemàtic de Mengoli és indiscutible però també és cert que Mengoli no vol utilitzar el mètode del seu mestre perquè no el troba prou ben fonamentat. Aquesta búsqueda del rigor de Mengoli el portarà a una recerca personalíssima amb un llenguatge nou i a vegades obscur pels seus contemporanis.

Mengoli fa les primeres quadratures amb el mètode dels indivisibles, com a bon deixeble. Una de les preguntes que ens hem fet sovint és perquè Mengoli no fa com Torricelli i es converteix en un defensor del mètode dels indivisibles. Mengoli no únicament no el defensa sinó que no publica les seves quadratures per indivisibles fins que les pot demostrar amb un altre mètode. Després de la mort de Cavalieri, Mengoli dóna a conèixer aquestes quadratures i ho fa en la carta-dedicatòria dient que no vol seguir aquest camí. Fins i tot al començament intenta trobar quadratures aplicant les sumes de sèries infinites

a aquests valors trobats però com que no dedueix cap quadratura nova desenvolupa el seu nou mètode on utilitza la teoria de quasi proporcions, les taules triangulars i l'àlgebra de Viète.

Tanmateix Mengoli basa la seva demostració de quadratures en una proporció que de alguna manera ens recorda el Teorema 3 del mètode dels indivisibles de Cavalieri: "Figures planes tenen entre si la mateixa raó que tenen "totes les seves línies"..."[25] En el corol.lari d'aquest teorema Cavalieri diu explícitament que aquest és el fonament del seu mètode.[26] Aquests resultats del teorema 3 i les seves generalitzacions són realment la idea central de la teoria de Cavalieri: transformar el càlcul d'una raó entre dues àrees en el càlcul d'una raó entre dues col.leccions de línies. Podríem dir que és la versió col.lectiva del *principi de Cavalieri*. Comparem-ho amb Mengoli quan estableix una proporció entre la raó de l'adscrita i el quadrat i la raó del sumatori i la potència de *t*. Mengoli no estableix una proporció entre les figures i "totes les línies", sinó entre la suma finita d'ordenades i figures com ara l'adscrita, composta d'un nombre finit de rectangles, per aplicar tot seguit el terme quasi a la proporció. Tot i que Mengoli ha emprès un camí molt diferent per les quadratures, el fonament de la seva demostració es pot comparar a la proporció establerta per Cavalieri evitant, això sí, les sumes infinites i la possible identificació entre

---

[25]"Figurae plane habent inter se eadem rationem, quam eorum omnes lineae...." Cavalieri, *Geometria Indivisibilium*, pàg. 209.

[26] Veure Massa, "El mètode dels indivisibles...", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, nº 9, 1994, pàg. 88.

la suma d'ordenades i la figura. Per fer el pas a l'infinit Mengoli utilitza la seva teoria de quasi proporcions, dues vegades, i la proporció queda identificada amb el teorema 3 de Cavalieri. Mengoli no estableix proporcions entre infinits sinó que demostra a què tendeixen les proporcions quan el nombre d'ordenades es fa infinit, és a dir, fa quasi proporcions. Aquesta relació del teorema 3 de Cavalieri amb la proposició que serveix de base en la demostració de quadratures de Mengoli ens explica les paraules: "la meva geometria és una conjunció de la de Cavalieri..."

Mengoli, que no vol seguir el mètode del seu mestre, demostra les quadratures pel mètode dels indivisibles utilitzant el lema de Beaugrand i l'àlgebra especiosa, que és una via molt més fàcil.[27] L'àlgebra, com veurem tot seguit, és el camí que segueix Mengoli en la seva matemàtica.

4. L'àlgebra i la geometria en el segle XVII.

Una de les principals novetats matemàtiques en el segle XVII és l'articulació de l'àlgebra i la geometria. Els dos grans avenços del segle, la geometria analítica i el càlcul infinitesimal, obtenen el seu excepcional poder de l'establiment de correspondències entre fòrmules i figures, entre càlculs

[27] Vegeu pàg. 114 del capítol 4.

simbòlics algebraics i operacions geomètriques i construccions.[28]

L'aparició d'*In artem analyticem isagoge* (1591) de Viète va fer palès l'avantatge d'utilitzar símbols dins la matemàtica no només per representar la incògnita, sinó també per les quantitats conegudes, d'aquesta manera es podia treballar amb equacions en forma general. Viète va posar també en connexió l'àlgebra i la geometria determinant les equacions que corresponen a diverses construccions geomètriques. L'àlgebra simbòlica de Viète aplicada al material de l'anàlisi geomètrica recuperada dels antics, va facilitar el desenvolupament de noves tècniques formals que van permetre nous mètodes per a ràpid descobriment més que demostracions rigoroses. El procés iniciat per Bombelli (*Algebra*, 1572), Viète, Ghetaldi (*Variorum problematum collectio*, 1607), Fermat (*Varia Opera mathematica*, 1679[29]) i Descartes (*Geometriae*, 1637) va seguir al llarg del segle XVII i molts matemàtics, entre ells Mengoli, van contribuir-hi amb les seves obres. Segons Bos: "El període, els protagonistes i el procés havien rebut poca atenció per part dels historiadors de la matemàtica però en els últims anys existeix una línia

---

[28] Aquesta fusió de l'àlgebra i la geometria no podem explicar-la únicament per tendències internes de desenvolupament o necessitat de les matemàtiques en aquell temps; més aviat, per entendre el procés correctament i jutjar la seva importància històrica, el historiador hauria d'incloure en la seva consideració el desenvolupament en altres àrees intel.lectuals. Vegeu Mahoney, "The beginnings of algebraical thought in the seventeenth century", *Descartes'philosophy, mathematics and physics,* Gaukroger, S., ed., Totowa / Brighton, Barnes and Noble / Harvester, 1980, pàg. 142.

[29] Fermat no va publicar mentre vivia, els seus treballs circulaven a través de cartes o de manuscrits.

d'investigació on s'intenta entendre el procés en el seu propi context, en termes de coneixement matemàtic i de les intencions amb què es treballava més que en termes del que succeirà després." Existeix per tant un important debat historiogràfic sobre aquest tema on queda enmarcada aquesta recerca.[30]

D'acord amb Mahoney, considerarem tres característiques del modus algebraic de pensament: (1) l'ús d'un simbolisme operatiu, és a dir, un simbolisme que no únicament abreuja paraules sinó

---

[30] Aquestes paraules de Bos i les idees que remarquem representen un resum del simposium al que vaig assistir el 1993 al XIXth International Congress of History of Science a Saragossa titolat: *Algebra and Geometry around 1600*. En la fusió de l'àlgebra i la geometria en el pensament del segle XVII podem distingir molts punts d'anàlisi: la búsqueda de nous mètodes analítics recreats amb els mètodes dels antics; les línies divisòries que estaven en moviment, pel que fa a terminologia i metodologia de l'aritmètica, l'àlgebra, l'anàlisi i la geometria; la introducció i l'augment de mètodes algebraics en altres camps com ara la teoria de nombres; la logística especiosa com un llenguatge nou de símbols i tècniques; els obstacles de la compatibilitat de l'àlgebra i la geometria; les diverses solucions dels matemàtics a aquests problemes, etc. Entre els estudis sobre aquest tema ens han sigut particularment útils: Henk J. M. Bos, "On the representation of curves in Descartes'*Géométrie*", *Archive for history of exact sciencies*, 24, 1981, 295-338; Giovanna C. Cifoletti, *La méthode de Fermat: son statut et sa difussion*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle série, 33, Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1990; Enrico Giusti, "La "Géométrie" di Descartes tra numeri è grandezze", *Giornale critico della filosofia italiana*, 66 (68), 1987, 409-432; Enrico Giusti, "Algebra and Geometry in Bombelli and Viete", *Bollettino di storia delle scienze matematiche*, 12, 1992, 303-328; Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, 1996; Michael S. Mahoney, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton, Princeton University Press, 1973; Michael S. Mahoney, "The beginnings of algebraical thought in the seventeenth century", *Descartes' philosophy, mathematics and physics*, Gaukroger, S., ed., Totowa/ Brighton, Barnes and Noble/ Harvester, 1980, 141-156; Luigi Pepe, "Note sulla diffusione della *Géométrie* di Descartes in Italia nel secolo XVII", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Vol. II. (1982) fasc. 2, pàgs. 249-288.

que representa els treballs d'operacions combinades o en altres paraules, un simbolisme amb el qual hom opera; (2) l'èmfasis en les relacions matemàtiques més que en els objectes; fins i tot quan certes relacions esdevenen elles mateixes objectes, hom busca les relacions que uneixen aquests nous objectes; i finalment, (3) el modus algebraic de pensament està lliure de compromís ontològic.[31] És abstracte i, en general, no dóna referències d'interpretació física de les relacions. De fet aquestes característiques es troben en diferents graus en les obres dels matemàtics d'aquesta època.[32]

Mengoli es troba de ple dins aquesta línia d'articulació de l'àlgebra i la geometria i recordem que al començament de la seva obra *Geometriae,* ell mateix diu que farà una conjunció de la geometria antiga, de la nova de Cavalieri i de l'àlgebra de Viète.[33] En els apartats següents ens proposem aclarir el que l'obra de Mengoli volia aportar a aquest procés de la fusió de l'àlgebra amb la geometria a partir de l'anàlisi dels mètodes algebraics que utilitza per arribar als seus resultats, de com presenta el llenguatge "especiós" o simbòlic, de com opera amb les lletres i de com empra les expressions algebraiques en la

---

[31] Mahoney, "The beginnings of...", pàg 142. Vegeu referència nota anterior.

[32] Alguns com ara Cavalieri, Guldin, no tenen cap característica algebraica. Altres, com Wallis, Leibniz, van sostenir polèmiques defensant el nou llenguatge algebraic. Vegeu Paolo Mancosu, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the Seventeenth Century*, Oxford University Press, 1996, pàgs. 86-91.

[33] Vegeu pàg 110 d'aquest treball.

geometria.[34]

5. Fonts algebraiques de Mengoli.

Als començaments del 1600 Itàlia tenia una gran tradició en el camp de l'àlgebra. La connexió entre l'àlgebra i la geometria està present a la majoria dels algebristes italians: Leonardo de Pisa (1180-1250), Luca Pacioli (1445-1514), Tartaglia (1500-1557), Cardano (1501-1576) i Bombelli (1526-1573).[35] Cal assenyalar també com algebristes italians Pietro Antonio Cataldi (1552-1626), professor a Bolonya i Cristòfolus Clavius (1547-1612) docent a Roma, que va fer un tractat d'àlgebra.[36] Fora d'Itàlia la contribució més notable és deguda a François Viète (1540-1603) com ja hem explicat. A Itàlia un deixeble de Clavius,

---

[34] Naux cita a Mengoli com algebrista encara que sigui sense aprofundir. Charles Naux, *Histoire des logarithmes*, vol. 2, Ed. Blanchard, Paris, 1971, pp. 44-55.

[35] Diu Malet "L'algebrista del Renaixement pensa geomètricament, i d'enlloc més que de la geometria obté alguna garantia sobre la veritat de les relacions que usa." Per exemple Cardano a *Ars Magna* (1545) després de fer la seva clasificació d'equacions donava les maneres de solucionar-les i feia demostracions geomètriques. Vegeu Malet, *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*, 1984, pàgs. 64-68 i 170-175.

[36] Segons Pepe en aquesta obra s'ensenya com aplicar l'àlgebra a la resolució d'alguns problemes geomètrics. També diu que es troba aplicacions de l'àlgebra a la geometria a l'obra de Clavius, *Geometria pratica* (Roma, 1604). Vegeu "Note sulla diffusione della *Géométrie* di Descartes in Italia nel secolo XVII", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* Vol. II. (1982) fasc. 2, pàg 261.

Marino Ghetaldi sota l'influència de Viète també va escriure obres d'aplicació de l'àlgebra a la geometria. Però, segons Pepe, aquesta línia de recerca italiana va ser de poca importància i les aplicacions a la mecànica es continuaven fent amb la geometria sintètica.[37] Pepe també remarca que així com Viète estava present en les obres dels italians, la *Géométrie* (1637) de Descartes, va tenir poca difusió a Itàlia. Pepe diu haver trobat dues referències, una d'elles a Giannantonio Rocca (1607-1659), alumne del Col.legi jesuític de Parma, quan el 1640 un amic li envia la traducció de la *Géométrie* de Descartes. Mengoli s'interessa en fer les quadratures a través d'un problema proposat per Rocca i a més manté correspondència amb ell.[38] Haurà conegut Mengoli aquesta obra de Descartes? Mengoli reconeix haver llegit Viète, i Hérigone, però enlloc cita Descartes, d'altre banda les seves interpretacions algebraiques tampoc ens fan pensar que l'hagi llegit. Viète apareix citat per primera vegada al principi de la *Geometriae Speciosae,* i més tard en l'Element primer, quan parla dels símbols que utilitzarà, Mengoli cita Hérigone i Beaugrand que defineix com "analistes" a imitar.

L'obra d'Hérigone consta de sis volums.[39] Cifoletti diu que

---

[37] Cavalieri en una carta a Rocca (23 juliol 1640) li diu que no sap utilitzar l'àlgebra encara que considera que té molt mèrit. Vegeu Luigi Pepe, referència anterior, pàg 263.

[38] També Pepe assenyala breument que Mengoli utilitza algebra especiosa en la seva obra i que la seva recerca era de notable originalitat. (Pepe, pàg. 270).

[39] *Cursus mathematicus, nova, brevi et clara methodo demonstratus, per Notas reales & universales, citra usum cuiuscumque idiomatis intellectu faciles. Cours mathématique, demonstré d'une nouvelle, briefve, et claire methode. Par notes*

aquesta obra era molt coneguda en l'època i sovint citada per Fermat, Mersenne, Cavalieri, etc.[40] La secció d'àlgebra de Pierre Hérigone del *Cursus mathematicus* pren les seves paraules directament de Viète però no adopta el simbolisme ni l'esprit.[41] Segons Cifoletti "com manual d'àlgebra va quedar molt elemental i va servir només a les primeres generacions d'algebristes: el perquè del seu renom és degut sobretot al seu caràcter enciclopèdic i al llenguatge universal".[42] Mengoli va prendre segur d'Hérigone la notació exponencial, però Mengoli no fa abreviacions com ell sinó que empra directament les lletres i els símbols per operar.

Beaugrand, l'altre "analista" que cita Mengoli, va publicar a París el 1631 *In artem analyticem Isagoge* de Viète amb uns escolis i un compendi matemàtic.[43] Recordem també que quan Mengoli empra el mètode dels indivisibles diu que utilitzarà

---

réelles & universelles, qui peuvent estre entendues facilement sans l'usage d'aucune langue. Par Pierre Herigone, Mathematicien. A Paris, MDCXXXIV. Segons Cifoletti, el 1634 van ser publicades per primera vegada els quatre primers volums, el cinquè el 1637, el sisè el 1642. La segona edició va aparèixer el 1644. Cifoletti, *La méthode de Fermat: son statut et sa difussion*, 1990, pàg. 129.

[40] Cifoletti, també ens explica que Beaugrand i Hérigone eren amics, pp. 140-160.

[41] Vegeu Mahoney, "The beginnings of algebraical...", *Descartes'philosophy, mathematics and physics*, Gaukroger, S., ed., Totowa / Brighton, Barnes and Noble / Harvester, 1980, pàg. 28.

[42] Vegeu Cifoletti, *La méthode de Fermat: son statut et...*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle série, 33, Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1990, pàg. 160.

[43] Ibid, pp. 114-128.

l'àlgebra que és més fàcil i cita el lema de Beaugrand.[44] En el *Circolo*, quan explica les taules Mengoli cita Viète i el seu llibre *Ad angulares sectionem*. Això ens fa pensar que sigui a través de l'obra d'Hérigone, o de Beaugrand o bé directament, Mengoli coneixia l'obra de Viète.

6 El llenguatge especiós de Mengoli.

El 1655 Mengoli escriu en vers una obra dedicada a la Reina Cristina de Suecia on li explica una "via reial" per entendre les matemàtiques, *Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, Algebram Speciosam, & Planimetriam, ornata Maiestatae Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum* (Bolonya, 1655). En ella Mengoli divideix les matemàtiques en tres parts: l'aritmètica, on explica les operacions amb els nombres, fins i tot les taules triangulars; l'àlgebra especiosa, on explica com utilitzar les lletres per resoldre equacions i fa una classificació d'elles fins al tercer grau; i la planimetria, on tracta de figures planes i les seves propietats. Al començament de la segona part, o sigui l'àlgebra especiosa, Mengoli explica la utilitat de aquest art:

Una sola entre les Matemàtiques s'anomenarà Algebra

[44] Vegeu capítol quatre, pàg. 114.

Especiosa, un art en el qual res s'amaga al que investiga. Si preguntes, si és o no és, consisteix en dir la veritat; si preguntes quant és, aquest art ho fa prou. Ja que als nombres genèrics [aquest art] els proporciona maneres aptes per fer i per probar les coses fetes i dites. Així és a saber que hi intervindràn dos tipus de nombres generals, aquells que busques [incògnites] i aquells que pots donar [dades] arbitràriament.[45]

No queda cap dubte: per Mengoli l'àlgebra és una part més de la matemàtica que li permet resoldre problemes i demostrar teoremes.[46] Mengoli, igual que Viète, explica que representarà els nombres amb lletres, però Mengoli presenta l'àlgebra com un llenguatge i compara metafòricament les figures lingüístiques amb les figures algebraiques. Així les consonants representen dades; les vocals, incògnites; les síl.labes, expressions algebraiques d'una sola lletra; els signes de puntuació, les regles d'addició, subtracció, etc; les paraules, expressions algebraiques de vàries lletres; els textos, igualtats; els versos, equacions. Mengoli

---

[45] "Una, Mathematicas inter, Speciosa vocatur Algebra: quaerenti qua nihil arte latet. Sive rogas, utrum sic, vel non, dicere verum est; sive rogas, quantum est: ars facit ista satis. Ut pote quae numeris generalibus instruit aptos, Ad facere, ad facta, & dicta probare, modos. Scilicet intererit generalis uterque fuisse; Quem-quaeris numerus, quem-dare cunque potes." [Via Regia, 19]

[46] Més tard, el 1674, en el *praefatio* de l'*Arithmetica Rationalis elementa quatuor,* també explica que l'aritmètica es divideix en dues parts: la racional, que es refereix a càlcul de raons i la real, a coses i que va arribar a la racional a través de l'ús de l'Algebra Especiosa. O sigui que Mengoli sembla que fa les seves obres de lògica també emprant l'àlgebra. Referència trobada a Matteuzzi, "Mengoli e l'àlgebra della Lògica", 82-83.

no posa cap exemple amb lletres ni amb nombres d'aquestes comparacions metafòriques, només explicacions. Dóna les propietats de les igualtats: sumant, restant, multiplicant, dividint pels mateixos nombres els dos membres la igualtat no varia. També elevant al mateix nombre i treient la mateixa arrel als dos membres s'obté la mateixa igualtat. Defineix raó i proporció, igualtat absurda o indeterminada i falsa o incompatible. Tot seguit passa a intentar resoldre l'equació i explica que pot ser indeterminada o incompatible, però que si no és cap d'aquests dos cassos sempre trobarem solució. Mengoli fa també una mesura numerosa i especiosa de les equacions. Explica que les equacions de segon grau es poden transformar fàcilment en una de primer grau i que algunes de tercer grau també es poden transformar en equacions de segon grau. Finalment fa una classificació de les equacions fins a tercer grau segons el grau i segons els signes.[47] La classificació de Viète és més completa tanmateix hi ha coincidències en les paraules emprades: *antithesis* que vol dir transposició de termes de l'equació;

---

[47] Les classifica en dinou tipus: una de primer grau, quatre de segon grau i catorze de tercer grau; segons el signes, també en dinou tipus: set que totes tenen el signe més, cinc que la primera expressió té signe menys i la última té signe més, cinc que la primera expressió té signe més i la última té signe menys, una que la segona expressió té signe més i la primera i la tercera menys i una altra que la segona expressió té signe menys i la primera i la tercera més. De cada una d'aquestes equacions intenta explicar com seran els seus valors, el que nosaltres diríem veure com varia la gràfica de l'equació. En cap moment parla Mengoli de representacions gràfiques només diu com van augmentant i disminuint els valors de l'equació. Ens recorda a la classificació que donava Cardano a *Ars Magna* (Capítol XI, *Sobre el cub i la cosa igual al nombre*) (Nuremberg,1545) Per més dades vegeu Malet, *Els origens i enseyament de l'àlgebra simbòlica*, 1984, pp. 103-116.

subgraduales, que vol dir que tenen un grau més petit que el de l'equació,etc. L'originalitat de Mengoli és presentar explícitament l'àlgebra com un llenguatge per poder fer matemàtiques ja que el que feien els algebristes era explicar com representar els nombres amb lletres i les operacions entre elles, però no fer una comparació amb el llenguatge que utilitzem per escriure.

Quatre anys més tard Mengoli escriu la *Geometriae Speciosae Elementa* que podem traduir per *Elements de geometria especiosa*. Mengoli ja remarca en el títol que està utilitzant l'àlgebra especiosa en la geometria i l'anomena *Geometria Especiosa*.

Qué diu Mengoli sobre la paraula "espècies"? A la *Geometriae Speciosae* defineix aquesta paraula:

> Anomenem espècie a un sumatori qualsevol, en el qual se sumen totes les abscisses de cada una de les totes, anomenades proporcionals; i anomenem taula especiosa a les espècies ordenades en una taula triangular similar a la taula proporcional.[48]

O sigui que per Mengoli l'espècie, en ser el sumatori de les abscisses, és una variable que va canviant de valor per cada

---

[48] "Vocamus autem speciem unamquamlibet massam, in qua colliguntur cuiusque totae, omnes, eiusdem appellationis proportionales, pro singulis abscissionibus acceptae: & ex speciebus ordinatam tabulam triangularem similem tabulae proportionalium, speciosam nuncupamus."[Geo, 59]

nombre *t* que prenguem.[49]

En aquest llibre, Mengoli torna a donar tots els signes i és consistent amb la seva primera obra. Si els comparem amb els definits per Viète trobem algunes diferències. Per exemple, Mengoli representa el símbol igual amb dos punts, en canvi Viète el representa amb una abreviació de la paraula *aequalis*. Per multiplicar, Viète empra la paraula *in,* mentre que Mengoli per expressar el producte escriu una lletra al costat de l'altra.[50] Així mateix, en aquest llibre, a diferència de Viète, Mengoli no distingeix entre vocals i consonants que poden representar indistintament dades, incògnites i variables. La idea de variable ja apareix a les primeres pàgines de la *Geometriae Speciosae*:

> Precisament em plau dels mateixos analistes, representar de la mateixa manera el caràcter produit, del nombre indeterminat determinable (o potència o producte de les potències) i del nombre determinat, fet per multiplicació del producte dels indeterminats, igualment determinables i el nombre de la multiplicació, escric: $3a^2.r$, triple producte de la segona potència del nombre *a*, i de la primera del nombre *r*.[51]

---

[49] Hi ha diferents interpretacions sobre la paraula espècies a la traducció de l'obra de Viète, *The Analytic Art* (Pàg. 13). Relacionada amb la paraula espècies la frase logística especiosa o numerosa no l'he trobada a Mengoli. Sobre aquesta expressió vegeu també la traducció de Viète (Pàg. 17).

[50] *The Analytic Art*, Viète, traducció, pàg. 19.

[51] "Placuit demum ijsdem Analystis, ex numero indeterminato, & determinabili (sive potestate, sive ex potestatibus producto) & ex determinato numero, per multiplicationem factum productum

Mengoli utilitza minúscules i majúscules; generalment les minúscules representen dades i les majúscules variables però Mengoli no és totalment consistent amb aquesta idea. Dóna noms a les lletres i expressions utilitzades, segons ell, per Viète, Hérigone i Beaugrand. Alguns noms coincideixen com ara la paraula *radix,* que, tant per Viète com per Mengoli, representen la primera potència [base], altres són totalment originals de Mengoli, *triprimam, unisextam,* etc.[52] Viète retè en les potències la paraula, per exemple, *A quadratus, A cubus,...*,Descartes en canvi escriu els nombres a dalt tal com fem ara. Mengoli no escriu paraules com Viète però tampoc posa els nombres a dalt com Descartes, els escriu al costat, com Hérigone.

Pel que fa a la formació de les potències, Mengoli igual que Viète i Descartes observa que les successives potències d'incògnites constitueixen una proporció contínua,

$1:a = a : a^2 = a^2 : a^3 =...$ Viète i Descartes ho expliquen amb paraules, tanmateix Descartes i Mengoli parteixen de la unitat i Viète no.[53]

Les grans novetats aportades per Mengoli al llenguatge

---

indeterminatum pariter atque determinabilem, eodem producendis charactere significari, praescripto numero multiplicationis, ut 3a2r, triplum productum sub secunda potestate numeri *a*, & sub prima numeri *r*."[Geo, 16]

[52] *The Analytic Art* de Viète, traducció (pàg.30).

[53] Viète, *The Analytic Art*, pàg.1, per Descartes, *Regulae ad directionem Ingenii* (1628), Regla XVI. Vegeu també Mahoney que al segon capítol del seu llibre sobre Fermat relaciona aquesta representació amb la idea d'homogeneïtat del producte. *The Mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton, Princeton University Press, 1973, pàg.43.

algebraic es troben en la manipulació d'aquest llenguatge especiós. Per una banda, Mengoli a més de les operacions conegudes, s'inventa una manera de fer i d'escriure els sumatoris finits. No tinc coneixement que cap altre matemàtic ho faci. Com escriu Mengoli els sumatoris? Mengoli no escriu les sumes de potències, donant valors o bé escrivint els nombres amb el signe + i punts suspensius, sinó que representa els nombres amb lletres, inventa una construcció original i avantatjosa que li permet fer el càlcul d'aquests sumatoris. Per altra banda, Mengoli aplica l'àlgebra a les taules triangulars per generalitzar i aprofita les propietats dels nombres combinatoris per trobar aquestes sumes de potències. Posa el desenvolupament binomial en forma de taula triangular i així es pot estendre a qualsevol potència natural.[54]

Mengoli també aplica l'àlgebra quan fa la seva teoria de quasi proporcions. La idea que les lletres a més d'un nombre fix o una incògnita, poden representar variables, és a dir nombres indeterminats determinables era nova i Mengoli fa una intensa utilització d'aquesta idea. Recordem, per exemple, el capítol tres quan explica com tendeix a un nombre o a infinit la raó entre expressions algebraiques quan donem valors a les lletres. Mengoli també utilitza l'àlgebra per generalitzar el seu càlcul de límits; així la quasi raó del teorema 42 que empra després per fer quadratures, no depèn dels valors donats a les lletres servint per qualsevol potència natural ja que les raons

---

[54] Viète també fa els desenvolupaments amb lletres però no els posa en forma triangular i per cada potència dóna una demostració.

s'estableixen a través dels graus de les expressions algebraiques.

7. Compatibilitat de l'àlgebra i la geometria.

El 1650 Mengoli escriu la *Novae Quadraturae Arithmeticae* on calcula sumes de sèries infinites. El llenguatge utilitzat durant tota l'obra és en termes geomètrics: *magnitudino, planum, solidi,..* Al final del llibre, Mengoli explica com aplicar els càlculs aritmètics trobats a les magnituds contínues, és a dir, a la geometria:[55]

> He volgut aportar aquestes definicions per guarnir aquest volum aritmètic, de manera que qualsevol pugui fàcilment convertir els Teoremes Aritmètics en pràctiques Geomètriques, i aplicar les demostracions exposades en les magnituds discretes a les magnituds contínues, canviant la interpretació dels termes.[56]

---

[55] Giusti en el seu article sobre la *Novae* també assenyala aquest caràcter d'algebra geometrizada de l'obra."Le prime ricerche...",*Proceedings of an International Meeting on the Occasion on the IX Centennial of the University of Bologna*, ed. S. Coen, Nova York: Dekker, 1991, 195-213.

[56] "Huiusmodi definitionis in Arithmetici voluminis calce appositas esse volui, ut faciliter quisq; possit Arithmetica Theoremata in Geometricos usus convertere, & demonstrationes in quantitate discreta expositas, in quantitate continua mutatis nominum interpraetationibus adhibere."[Novae, 130]

Així és més fàcil entendre que en la carta dedicada a Cassini de l'*Elementum sextum* Mengoli apliqui aquestes sumes de sèries infinites a sumar quadratures. És a dir que Mengoli des del començament de la seva obra té clara la idea d'emprar els seus càlculs aritmètics en la geometria. Tanmateix aquí les lletres representen nombres no variables, no hi ha símbols, o sigui encara no ha introduit el llenguatge especiós.

Com aplica Mengoli l'àlgebra a la geometria? Còm treballa amb les figures?

Mengoli intenta que quedi clara la seva aplicació de l'àlgebra a la geometria i s'entreté moltíssim en intentar identificar les figures que vol quadrar amb les expressions algebraiques que utilitza per representar-les. Dóna el seu sistema de coordenades i descriu individualment les ordenades de les figures a través de les abscisses. Les ordenades d'aquestes figures les obté per mitjanes proporcionals o terceres proporcionals, és a dir, el lligam entre la figura i l'equació és la teoria de proporcions d'Euclides. Quan fa les demostracions de les seves propietats (creixent, punt màxim,...) Mengoli utilitza per la demostració directament l'expressió algebraica i les propietats de les proporcions sense preocupar-se de la representació de la figura. Segons Bos, per Descartes era diferent, les noves corbes que desitja introduir han de ser susceptibles de tractament algebraic o sigui han de tenir una equació algebraica. Però, inversament també mira si les equacions que resulten del tractament algebraic corresponen a corbes acceptables geomètricament. O sigui, per Descartes l'equació és una eina i no un mitjà de definició o

representació.[57] En canvi Mengoli no fa la construcció de cada figura ni la de les propietats que demostra algebraicament, i la definició de la figura és l'expressió algebraica mitjançant una proporció. Per Mengoli l'equació que obté ja representa la figura. Mengoli no fa quasi cap dibuix d'aquestes figures i en el cas de la quadratura del cercle no fa ni un dibuix en tota l'obra, encara que queda clar que sap quin és el dibuix de cadascuna de les figures.

Mengoli tampoc no fa com Descartes una àlgebra de segments o sigui no interpreta geomètricament cadascuna de les operacions algebraiques que defineix, fins i tot quan demostra la igualtat $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ ho fa a través de les propietats de les proporcions. Mengoli té més similituds amb Viète que també utilitza la teoria de proporcions com lligam entre l'àlgebra i la geometria, però Viète fa diagrames sense establir un sistema de coordenades, comprova les construccions però no estableix relacions entre les ordenades i les abscisses.

A diferència de Descartes i Viète, Mengoli fa un pas més en l'aplicació de l'àlgebra a la geometria ja que col.loca aquestes expressions algebraiques en taules triangulars per fer alhora totes les quadratures quan els exponents són naturals. Mengoli multiplica les expressions algebraiques per dos factors que troba fàcilment ja que només depenen del grau de l'expressió algebraica i únicament li queda demostrar que totes les quadratures són iguals a la del quadrat de costat u. La demostració de

---

[57] Vegeu Bos,"On the representation of Curves in Descartes' Géométrie ", *AHES*, 24, 1981, pàg. 308.

quadratures que hem analitzat al capítol quatre és independent de la figura i es podria fer servir sempre que es conegués la quasi raó del sumatori de potències. L'àlgebra permet a Mengoli trobar alhora infinites quadratures i no li cal fer cada vegada la quadratura d'una corba per trobar una regla que el permeti generalitzar.

A més, Mengoli classifica les figures en dos tipus, segons estiguin situades en els costats primer i últim de la taula triangular o bé al mig i dóna les seves propietats fent les demostracions amb la teoria de proporcions. Mengoli al final fa una altra classificació de les figures segons el lloc de la taula i especifica com serà el seu dibuix, quin angle formen, quin és el baricentre, encara que no ho demostra. En el *Circolo,* quan fa la taula de quadratures de figures interpolades, Mengoli classifica també les quadratures trobades segons el lloc i el grau en quadratures de primera classe, segona classe i tercera classe. Encara que quan hom observa l'obra del *Circolo* no sembla que tracti de quadratures de figures geomètriques només s'hi troben taules triangulars i càlculs de productes infinits per trobar pi.

El fet de representar els nombres i les variables amb lletres i buscar artilugis per operar amb elles i poder "generalitzar", ho interpretem com una resposta a la necessitat mengoliana de resoldre molts problemes matemàtics alhora. Mengoli troba l'eina generalitzadora en les taules triangulars i en l'àlgebra ja que les taules es poden estendre indefinidament, són fàcils de construir i les lletres li permeten identificar les figures dins

la taula.

Com a cloenda de la investigació sobre aquesta relació entre l'àlgebra i la geometria en la seva obra direm que, igual que deia Malet respecte a Gregorie, Mengoli es situa com un més dels que considera que: "la geometria i l'àlgebra eren més com dues capes del discurs matemàtic que dues perspectives conflictives pel que fa als seus propòsits i al seu mètode."

EPÍLEG

Explicar en poques línies totes les idees noves que hem pogut extreure d'aquesta investigació de l'obra de Mengoli és difícil però ho intentarem. Cal dir que hem avançat molt en el coneixement de les matemàtiques i del pensament matemàtic de Mengoli, però també som conscients que resta molt per fer. Encara cal investigar a fons la seva teoria de logaritmes i la seva aplicació a la música. També caldrà investigar les obres de lògica que va fer al final de la seva vida.

Mengoli emprèn un camí dins les matemàtiques diferent a qualsevol dels seus contemporanis -però Cavalieri, Euclides, Hérigone, Pascal, Arquimedes, Viète, tots ells d'una o altra manera estan presents en la seva obra. Cavalieri és el seu mestre i el seu punt de partida per fer les quadratures. Segurament, perquè volia allunyar-se del mètode dels indivisibles i de les seves crítiques, Mengoli es mou cap un llenguatge nou, l'àlgebra de Viète. En aquest sentit és modern. Però Mengoli és clàssic en la seva forma de presentar la seva obra i el seu pensament, ja que un dels seus grans pilars són els *Elements* d'Euclides. La teoria de proporcions euclidiana és una de les eines fonamentals en la seva matemàtica. Amb la teoria de proporcions construeix la teoria de quasi proporcions. Aquesta palesa però, que és també modern, perquè treballa amb l'infinit, compara infinits de diferent ordre i demostra, quan tendeixen a infinit, un munt de propietats d'aquestes quasi proporcions com si fossin proporcions. Una altra eina de les matemàtiques de Mengoli és el

triangle aritmètic de Pascal que va conèixer a través de l'obra de Hérigone. El seu ús amb lletres és del tot original i a més de servir-li per estendre indefinidament els resultats, amb ell n'aconsegueix de nous com ara els desenvolupaments binomials, la suma de potències, les quadratures de les figures, la quadratura del cercle,... Aquest conjunt meravellós de nombres en forma de taula, i les seves funcions dins l'obra de Mengoli estan extensament explicats en els capítols 2, 4 i 5 de la tesi. Mengoli utilitza també el mètode d'exhaustió d'Arquimedes per la demostració de les quadratures encara que fa servir una figura nova, l'adscrita, i un procediment directe de demostració, les quasi proporcions. Aquesta original teoria de Mengoli es troba explicada detalladament en el capítol 3.

En aquest capítol de conclusions no pot faltar una referència explícita als objectius d'aquesta investigació. El primer objectiu de la tesi ens sembla que l'hem assolit en bona mesura. La reconstrucció d'aquesta part de les matemàtiques de Mengoli dóna una consistència interna a la seva obra que fins ara es presentava fragmentada i incompleta. Un dels objectius de Mengoli és la quadratura del cercle i per obtenir-lo fa un recorregut per quasi tota la matemàtica començant per les taules triangulars, la teoria de quasi proporcions, les sumes de sèries infinites, les quadratures de les infinites paràboles i, per fi, la quadratura del cercle. Mengoli fa una aplicació molt rigorosa del llenguatge algebraic sobretot en l'aspecte formal; això li comporta una complicació molt gran de símbols, d'escriptura i a mesura que avança l'obra cada vegada es complica més. Tanmateix creiem que hem aconseguit donar les tècniques de Mengoli

totalment descodificades. Citarem els resultats més importants que no havien sigut assenyalats en les investigacions anteriors: la construcció dels sumatoris, les taules triangulars de sumatoris, la demostració i obtenció de la regla per trobar la suma de potències, la idea de variable totalment explicitada per Mengoli, els càlculs de les quasi proporcions, els càlculs amb l'infinitament gran i l'infinitament petit, la construcció de les taules de quadratures, la nova interpretació de la demostració de les quadratures, les quadratures d'expressions amb exponents racionals, els càlculs de les fitacions dels productes infinits i la computació del nombre pi. A més analitzem dues influències que són fonamentals en la seva matemàtica i que tampoc han sigut esmentades abans, Euclides i Cavalieri.

Pel que fa al segon objectiu de la tesi, que era aclarir la conjunció de l'àlgebra i la geometria dins les matemàtiques de Mengoli, resumirem les característiques principals que hem analitzat en el capítol sis. Mengoli utilitza les lletres i els símbols per construir els sumatoris, les taules triangulars, les quasi proporcions i les figures que vol quadrar. Les lletres representen nombres indeterminats, que poden prendre infinits valors, però determinables, és a dir, podem trobar el seu valor mitjançant la relació que expressen, tot assignant un nombre. Mengoli explica aquesta idea molt clarament. Pel que fa als símbols, Mengoli és més avançat que Viète i representa les potències amb nombres i els productes posant les lletres una al costat de l'altra. També igual que Viète i Descartes defineix les potències dels nombres en contínua proporció. En la seva aplicació a la geometria Mengoli s'esforça en explicar que les

expressions algebraiques que defineix representen les figures. El lligam que estableix Mengoli entre l'àlgebra i la geometria és la teoria de proporcions. Per aplicar-lo construeix el seu sistema de coordenades i descriu les abscisses a través de les ordenades fent mitjanes i terceres proporcionals. A més Mengoli col.loca aquestes expressions en taules triangulars, convenientment definides, de manera que pot trobar alhora infinites quadratures i no li cal fer cada vegada la quadratura d'una corba per trobar una regla que el permeti generalitzar.

Finalment volem fer-nos una reflexió. Per què l'obra matemàtica de Mengoli, tan rica, va tenir poca incidència dins el pensament matemàtic del segle XVII?

Encara que creiem que sí va tenir incidència no la va tenir de manera directa. Mengoli no va fer escola, no va tenir seguidors. Donarem algunes raons per les quals podríem pensar que no va tenir seguidors però creiem que és una pregunta encara oberta. Caldrà investigar més altres obres de Mengoli i dels seus contemporanis, i conèixer millor el context intel.lectual de la segona meitat del segle XVII.

És una realitat que molts matemàtics de l'època no se'l van llegir degut a la seva manera d'escriure enrevessada i poc clara. Mengoli va elaborar un llenguatge algebraic propi on la notació, a mesura que s'avança, es va complicant. A més, el camí que emprèn per introduir l'àlgebra a la geometria no coincideix amb les tendències del moment. També pogueren ajudar-hi factors externs, com que durant la segona meitat del 1600 a Bolonya hi ha una crisi cultural molt important, i els científics amb més

renom se'n van - Cassini à Paris i Montanari i Guglielmini a Padova.[1]. Els centres connectats amb els ambients europeus estaven limitats als florentins, al voltant de la cort dels Medici, i dels romans lligats a la Curia, res a Bolonya. Un altre factor podria ser el nou camí de recerca que emprèn Mengoli. Després del *Circolo*, que li ha de permetre esbrinar les regles de solsticis i equinoccis, no escriu més obres de matemàtica pura, sinó obres relacionades amb la cronologia i la cosmologia bíblica que a més sembla que no estaven d'acord amb el pensament filosòfic de l'època. Potser la resposta no sigui una sola sinó el conjunt de tots aquests arguments.

Esperem que aquest treball obri camins a noves recerques d'aprofundiment sobre les obres d'aquest autor a fi d'acabar de situar l'obra de Mengoli dins la història de les matemàtiques en el lloc que es mereix i alhora aclarir la incidència d'aquesta obra en el pensament del segle XVII.

---

[1] L. Pepe, "Il calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche*, Vol. I, nº 2, 1981, pàg. 56.

BIBLIOGRAFIA DE MENGOLI[1]

a) *Obres editades.*

II Sig. Mengoli col seguente discorso provò che l'armonia della musica non è dissimile dell'armonia che unite formano le parti che costituiscono un bel sembiante, en *Amor tiranno. Accademia fatta in casa dell'Illustrissimo Sig. Senator Fantuzzi, composta in musica da Domenico Pellegrini, accademico Filomuso. All'Illustrissima Signora Sulpizia Orsi Grimaldi*, Bologna, Eredi del Dozza 1649, pp. 26-33

Elogio Lapidario Latino in lode del senatore conte Paolo Emilio Fantuzzi per il suo ingresso al Confalonierato, Bononiae, Typis Io. Paptistae Ferronij 1650 (Segnalato da FANTUZZI, VI pp. 10-11)

Novae Quadraturae Arithmeticae seu de Additione Fractionum Petri Mengoli Art. et Phil. Doct. Illustrissimis et Sapientissimis Civitatis Bononiae Senatoribus, Ex Typographia Jacobi Montij 1650.

---

[1] Per la bibliografia de Mengoli he emprat Baroncini, *La corrispondenza di Pietro Mengoli*, 189-191 i varis autors, *Memorie*, Vol LXXVII de l'*Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, Classe di Scienze Morali, Anno 74º*, 1979-80, 99-100.

Series Lectionum quas praesenti anno 1654, ineunte 1645 (sic.) Petrus Mengolus I.U. et Phil Doct. Col. et Mechanicarum Publicus Professor pubblice pollicetur, et in quibus universae fere Mechanicae propria methodo exponentur, Bononiae, Typis Io. Bapitstae Ferronij [1654]

Via Regia ad Mathematicas per Arithmeticam, ALgebram Speciosam et Planimetriam ornata, Maiestati Serenissimae D. Christinae Reginae Suecorum, a Petro Mengolo Bononiensis Archygymnasij Mechanico, Bononiae, Typis Haeredis VIctorij Benatij 1655.

D.O.M. Lectiones Mechanicae quas in annuo studiorum curriculo 1656 et 1657 pollicetur Petrus Mengolus I.U. Pb. D. Coll. Mechanicarum in almo Bononiensi Archigumnasio professor, quarum congeriem a praecipua parte denominat "De centro gravitatis", Bononiae, Typis Io. Baptistae Ferronij 1656.

Geometriae Speciosae Elementa. Primum de Potestatibus a Radice binomia et residua. Secundum de innumerabilibus numerosis progressionibus. Tertium de quasi proportionibus. Quartum de rationibus Logaritmicis. Quintum de propriis rationum Logaritmis. Sextum de innumerabilibus quadraturis. Petri Mengoli J.U. et Pb. Doct. Colleg. Patr. Conon. Archigym. mechanici, Bononiae, Typis Jo. Baptistae Ferroni 1659.

Ad maiorem Dei gloriam. Refrattioni e parallasse solare del Dottor Pietro Mengoli, Bologna, Per l'Herede del Benacci 1670.

Speculationi di musica, dedicate all'Eminentiss. e Reverendiss. Sig. Card. Azzolini, da Pietro Mengoli, Dottor delll'una e l'altra Legge e di Filosofia Collegiato, Prior di S. Maddalena e Pubblico Professor di Scienze Mecaniche nello Studio di Bologna, Bologna, per l'Herede del Benacci 1670. Altra ed. 1673.

Circolo. Agll'Illustrissimi Signori Marchese Alessandro Fachenetti Confaloniere di giustizia e Signori del Reggimento di Bologna dedicato da Pietro Mengoli, Priore della Maddalena, Lettore di Mecaniche, Dottore dell'una e dell'altra Legge e di Filosofia Collegiato, Bologna; Per l'Herede del Benacci 1672.

Anno di Pietro Mengoli, Priore di S. Maddalena, Professore di Mecaniche Filosofo Collegiato, Dottor di Leggi, Bologna, Per l'lHerede di Vittorio Benacci 1673.

Ad maiorem Dei gloriam. Theorema arithmeticum. Non est possibile invenire tres numeros, quorum differentiae, quadrati, et quorum differentiae quadratorum, quadrati. Pro solutione Problematis propositi sub die 17 Februarii 1674 sub his verbis: Invenire (...) quadratus. Respondit Petrus Mengolus, Prior S. Magd. Mechanicus Bononiem., Bononiae, Typis Haer. V. Benatij 1674. Reimprès el mateix any a París, amb un afegit al frontispici: *Cui respondit sub finem Jacobus Ozanam Dombensis Profess. Mathem. die 18 Aprilis 1674.*

Arithmeticae Rationalis Elementa quatuor Petri Mengoli Prioris S. Magd., I. U. et Art. D. Colleg. et Mechanici Bononien., Bononiae, Typis Haeredis VIctorij. Benatij 1674.

Arithmetica Realis Petri Mengoli Praefatio, Bononiae, Typis Haeredis Victorij Benatij 1674.

Arithmetica Realis Serenissimo et Reverendissimo Principi Leopoldo ab Etruria Cardinali Medices dicata a Petro Mengolo Priore S. Magdalenae Mechanico Bonon., Bononiae, Typis Haeredis Victorij Benatij 1675.

Estratto d'una lettera del signor Pietro Mengoli Professore delle Mechaniche nello Studio di bologna scritta al signor Antonio Magliabechi, Bibliotecario del G. Duca di Toscana, Bologna 1676 (Crf. FANTUZZI, VI, p. 10 i "Giornale de Letterati", Roma 1676, XIV, p. 236).

Il mese di Pietro Mengoli. Parte prima. Bologna, Per l'Erede di V. Benacci 1681.

Ad Maiorem Dei Gloriam. Illustrissimo et Reverendissimo Domino Co. Carolo Malvasiae Metropolitanae Bononiae Canonico. D.D.D. Petrus Mengulus Prior S. Magdalenae Bonon. 21 Iunij 1681, a Carlo Cesare MALVASIA, *Marmora Felsinea, innumeris non solum Inscriptionibus exteris bucusque ineditis, sed etiam quam plurimis doctissimorum Virorum expositionibus roborata et aucta,* Bononiae, ex Typographia Pisariana 1690, pp. 597-600.

Dues cartes a Alessandro Marchetti (16-12-1673 i 2-6-1674), en *Lettere di uomini illustri,* a. c. di G. B. Tonidini, Macerata, B. Capitani 1783, pp. 117 e 128-129.

b) *Manuscrits.*

Firenze, Biblioteca Nazionale.

Ms. Magl., VIII, 1094, 54 cartes a Antonio Magliabechi dal 6 juny 1674 al 26 març 1686, dues sense data.

Ms. Magl., XI, 46, cc. 6 *r/v Arithmetica realis praefatio,* autogr.

Ms. Magl., XXXVIII, cod. 17, cc. [40], *r/v, Conversione di S. Maddalena,* autogr. Ms. Galil. 279, c. 180 i c. 196, 2 cartes a Leopoldo dei Medici (Bolonya, 26 gener 1675 i 22 maig 1675) autogr.

Bolonya, Biblioteca Universitaria.

Ms. 193: tres cartes autògrafes a Lorenzo Grimaldi, 19 octubre, 16 novembre, 23 novembre 1652.

Ms. 493: *Copia de la carta del Prior Mengoli sobre el cometa (1680-81)* a L. Grimaldi.

Ms. 1012. *P. Mengoli, Arithmetica Realis*, cc. 80 *r/v*.

Ms. 1066. *P. Mengoli. Arithmetica*: vol.1. *Pars prima. De altimetria. Opuscoli di geometria practica. Pars 2º & 3º*: vol. II. *Arithmeticae realis lectiones secundae*: vol. III. *Arithmeticae realis decas tertia, Num. XXI-XXX.*

Milà. Biblioteca Nazionale Braidense.

Ms. AF. 13/6, 1 carta a G. B. Baliani (Bolonya, 19 de decembre de 1648), autogr.

Hannover. Niedersächsische Landesbibliothek.

LBr, 79, 4, c. 29 *f/v*, 1 carta a Rudolph Christian Bodenhausen (Bolonya, 19 de maig de 1686) autogr.

BIBLIOGRAFIA GENERAL

AGAZZI, EVANDRO, "La matematica dell'età galileiana", *Periodico di Matematiche*, (en endavant, *PM*), 3, 1964, 1-49, 137-159.

AGOSTINI, AMEDEO, "L'invenzione dei logaritmi", *PM*, ser 4, vol. 2, 1922, 142-151.

----------, "La teoria dei logaritmi da Mengoli ad Eulero", *PM*, ser 4, vol. 2, 1922, 430-451.

----------, "Il concetto d'integrale definito in Pietro Mengoli", *PM*, ser 4, vol. 5, 1925, 137-146.

----------, "La teoria dei limiti in Pietro Mengoli", *PM*, ser 4, vol. 5, 1925, 18-30.

----------, "Rileggendo la "Geometria speciosa" di Pietro Mengoli", *PM*, ser 4, vol. 20, 1940, 313-327.

----------, "La serie sommate da Pietro Mengoli", *Bollettino della Unione Matematiche Italiana*, ser 2, vol. 3, 1941, 231-251.

----------, "L'opera matematica di Pietro Mengoli", *Archive Internationale d'Histoire des Sciences*, 3, 1950, 816-834.

ANDERSEN, KIRSTI, "Cavalieri's Method of Indivisibles", *Archive for the History of the Exact Sciences* (en endavant, *AHES*), 31, 1984/85, 291-367.

AUGER, LEON, *Un savant méconnu, Gilles Personne de Roberval (1602-1675)*, París, Blanchard, 1962.

BALDINI, UGO, "La scuola galileiana", a *Storia d'Italia Annali 3. Scienza e tecnica nella cultura e nella società dal Rinascimento a oggi*, 8 vols, G. Micheli (ed)., Torino, Einaudi, 1980, 383-463.

----------, "La formazione scientifica di Giovanni Battista Riccioli, a *Copernico e la questione copernicana in Italia dal XVI al XIX secolo*, Pepe L. ed., Firenze, Olschki, 1996, 123-182.

BARON M. E.,, *The origins of the Infinitesimal Calculus*, New York, Dover, 1987.

BARONCINI, GABRIELE, "Introduzione ad una teologia matematica del tardo seicento, l'Arithmetica realis (1675) di Pietro Mengoli", *Studie e Memorie per la storia dell'Università di Bologna*, 3, 1983, 315-392.

----------, "Un itinerario galileiano, Pietro Mengoli dalla meccanica alla teologia matematica", *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria,* LXXVII, 1979-80, 23-56.

BARONCINI, G.i CAVAZZA, M (eds) , *La corrispondenza di Pietro Mengoli,* Florència, Editorial Leo S. Olschki, 1986.

BARROW, ISAAC, *The Usefulness of Mathematical Learning....*London, 1734, repr. London, 1970.

BAYER, P., "Variae observationes circa series infinitas, *Butlletí de la Societat Catalana de Ciències, Físiques, Químiques i Matemàtiques*, vol. II, nº 4, Barcelona, 1984, 429-481.

BERNOULLI, JACOB, *Die Werke*, 3 vols., Basel, Birkhäuser Verlag, 1975.

BORTOLOTTI, ETTORE, "I primi algoritmi infiniti nelle opere dei matematici italiani del secolo XVII", *Bollettino della Unione Matematica Italiana*, 1, 1939, 351-371.

----------, "Lo sviluppo del concetto di limite ed i primi algoritmi infiniti nel rinascimento italiano", *Memoria Acc. dell'Istituto di Bologna*, ser 9, vol. 6, 1939, 113-141.

----------, "La scoperta e la successiva generalizzazioni di un teorema fondamentale di calcolo integrale", *Archeion* **5** (1924), 205-227.

BOS, H. J. M., "On the representation of curves in Descartes' Géométrie", *AHES,* 24, 1981, 295-338.

----------, "L'élaboration du calcul infinitesimal, Huygens entre Pascal et Leibniz", a *Huygens et la France*, París, Vrin, 115-122.

----------, "The signifiance of Sluse's Mesolabum within seventeenth-century geometry and algebra", *Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége, 55e année,* **1**, 1986, 145-163.

BOSMANS, H.,"Un chapitre de l'oeuvre de Cavalieri", *Mathesis* **36** (1922), 365-456.

----------,"Sur l'oeuvre mathématique de Blaise Pascal", *Mathesis* **38** Supplément (1924), 1-59.

----------,"Un émule de Viète" in *Annales de la Sociéte Scientifique de Bruxelles,* 34, pt. 2, with an analysis of Van den Cirkel (1596 Van Ceulen), 1910, 88-139.

BOYER, CARL B., "Pascal's Formula for the Sums of Powers of the Integers, *Scripta Mathematica* **9** ,1943, 237-244.

----------, "Proportion, equation, function, three steps in the development of a concept.", *Scripta Mathematica* **12**, 1946, 5-13.

----------,"Descartes and the geometrization of algebra", *American mathematical monthly*, 66, 1959, 390-393.

----------, *Historia de la matemática,* Madrid, Alianza Universidad, 1968.

BUCCIANTINI, M.- TORRINI, M., (ed.) *Geometria e atomismo nella scuola galileiana*, Firenze, Olschki, 1992.

BURROWS B. L.-TALBOT R. F., "Sums of powers of integers", *American Mathematical Monthly* **91**, 1984, 394-403.

CAJORI, FLORIAN, *A History of Mathematical Notations*, Open Court, vol. 1, Chicago, 1928.

CARRUCCIO, ETTORE, "Cavalieri", *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C.C. GILLISPIE), Nova York, vol 3, 1971, 149-153.

CASSINA, UGO, "Storia del triangolo aritmetico", *Bollettino di Matematica,* 2d ser.,2 , 1923, 33-39.

----------, "Storia del concetto di limite", *PM,* ser 4, 1936, 1-19, 82-103, 144-167.

CASTELNUOVO, GUIDO, *Le origini del Calcolo infinitesimale nell' era moderna,* Milano, Fetrinelli, 1962, primera edició, Bologna, Zanichelli, 1938.

CAVALIERI, BONAVENTURA, *Geometria degli indivisibili di Bonaventura Cavalieri,* trad. L. Lombardo-Radice, Torino, 1966.

----------, *Exercitationes geometricae sex*, Bolonya, 1647.

CAVAZZA, MARTA, "Bologna and the Royal Society in the Seventeenth Century", a *Notes and Records of the Royal Society of London*, vol. 35, nº2, 1980, 105-123.

----------, "L'"oscurità" di Pietro Mengoli e i suoi difficili rapporti con i contemporanei", *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria,* LXXVII, 1979-80, 57-78.

----------, *Setecento inquieto alle origini dell'Istituto delle Scienze di Bologna*, Bologna, Il Mulino, 1990.

CELLINI, G., "Gli indivisibili nel pensiero matematico e filosofico di Bonaventura Cavalieri",*PM,* 4ta ser., 44, 1966, 1-21.

----------, "Le dimostrazioni di Cavalieri del suo principio", *PM,* 4ta ser.,44, 1966, 85-105.

CIFOLETTI, G., *La méthode de Fermat, son statut et sa diffusion*, Cahiers d'histoire et de philosophie des sciences, nouvelle série, 33, Paris, Société française d'histoire des sciences et des techniques, 1990.

CLAGETT, M., *Nicole Oresme and the Medieval Geometry of Qualities and Motions*, Madison: Wisconsin, 1968.

COOLIDGE, J. L.,"The story of the binomial teorem", *American Mathematical Monthly*, LVI, 1949, 147-157.

CROMBIE, A. C., *Historia de la Ciencia: de San Agustin a Galileo, Siglos XIII-XVII*, vol. 2, Madrid: Alianza Universidad, tercera edició, 1980.

DAVIS, P., "Leonhard Euler's Integral: A Historical Profile of the Gamma Function", *American Mathematical Monthly*, **66**, 1959, 849-869.

DESCARTES, R., *The Geometry of René Descartes*, D. E. Smith i M. L. Latham ed., Nova York, Dover, 1954.

DHOMBRES J., *Nombre, mesure et continu. Epistémologie et histoire*, Paris, Cedic-Fernand Nathan, 1978.

----------, "Las progresiones infinitas: el papel del discreto y del contínuo en el siglo XVII", *Llull,* vol. 16, 1993, 43-114.

----------, "Un parcours baroque la quadrature du cercle: 1600-1775", a *Diffusion du savoir et affrontement des idées 1600-1770*, Montbrison: Association du Centre Culturel, 1993, 161-197.

DOU, A., *Comentario a la "combinatoria de Sebastian Izquierdo" del P. Ramón Ceñal, S. J.*, discurso en la Real Academia de la Historia, Madrid, 1975.

DUTKA, J., "Wallis's Product, Brouncker's Continued Fraction, and Leibniz's Series", *AHES*, vol. 26, 1982, 115-126.

EDWARDS, A. W. F.,"Sums of powers of integers- a little of the history", *The Mathematical Gazette* **66**, 1982, 22-28.

----------, "A quick route to sums of powers", *American Mathematical Monthly*, Vol. 93, Nº 6, 1986, 451-455.

----------, *Pascal's Arithmetical triangle,* Griffin, London, Oxford University Press, Nova York, 1987.

EDWARDS, CH. JR., *The Historical Development of the Calculus,* Nova York, Springer-Verlag, 1979, Cap. 4.

ENESTRÖM, G., "Zur Geschichte der unendlinchen Reihen um die Mitte des siebzehnten Jahrhunderts", *Bibliotheca mathematica,* 1912, 135-148.

EUCLIDES, *The Elements,* edició anglesa de T. L. Heath, Nova York, Dover, 1956.

---------, *Les Eléments.* Volume I,B. Vitrac trad., 1990-1994. Introducció general per M. Caveing. Volume II. Llibres V al IX. Paris, PUF, Bibliothèque d'histoire des sciences.

FANTUZZI, *Notizie degli scrittori bolognesi*, Bologna, Stamperia di S. Tommaso d'Aquino, 1788.

FERMAT, P., *Oeuvres*, ed. Paul Tannery and Charles Henry, 4 vols.and spp., París, Gauthier-Villars, 1891-1922.

GANDT, FRANÇOIS DE, "Les indivisibles de Torricelli", *L'Oeuvre de Torricelli, Science Galiléenne et nouvelle géométrie,* Nice, 1987, 147-206.

----------,"Cavalieri's Indivisibles and Euclid's Canons", *Studies in Philosophy and the History of Philosophy,* Volum 24, The Catholic University of America Press, Washington, D. C. , 1991, 157-182.

GIUSTI, ENRICO, *Bonaventura Cavalieri and the Theory of Indivisibles,* Edizioni Cremonese, Bolonya, 1980.

----------, "La "Géométrie" di Descartes tra numeri e grandezze", *Giornale critico della filosofia italiana,* 66(68), 1987, 409-432.

----------, "Sette lettere di Pietro Mengoli ad Alessandro Marchetti", *L'Educazione Matematica* (3), 1, nº 2 suppl., 1990, 1-12.

----------, "Le prime ricerche di Pietro Mengoli, la somma delle serie", en *Geometry and Complex Variables, Proceedings of an International Meeting on the Occasion on the IX Centennial of the University of Bologna*, ed. S. Coen, New York, Dekker, 1991, 195-213.

----------, "Algebra and Geometry in Bombelli and Viète", *Bollettino di Storia delle scienze matematiche,* 12, 1992, 303-328.

----------, *Euclides reformatus. La teoria delle proporzioni nella scuola Galileiana,* Bollati Boringhieri, Torino, 1993.

GOLDSTEIN, CATHERINE,"El uno es el otro, una historia del círculo", en *Historia de las ciencias*, ed. Serres, M., Madrid, Catedra, 1991, 151-174.

GOZZA, PAOLO, "Atomi ,"spiritus", suoni, le "speculationi di musica" (1670) del "galileano" Pietro Mengoli", *Nuncius*, vol. 5, 1991, 75-98.

----------, "A mechanical account of hearing from the "Galilean school", Pietro Mengoli's Speculationi di Musica of 1670" en *The second sense, studies in hearing and musical judgement from antiquity to the 17th century*, ed. Charles Burnett, Londres, The Warburg Institute, 1991, 115-136.

----------, *La musica nelle rivoluzione scientifica del seicento*, Bolonya,...,1989.

GREGORY, JAMES, *Tercentenary Memorial Volume* ed. H.W. Turnbull, London, Bell, 1939.

JAMI, C., "Une histoire chinoise du nombre pi", *A. H. E. S.*, vol. 38, 1, 1988, 39-50.

HALL, RUPERT A., *La revolución científica 1500-1750*, Barcelona, Crítica, 1985. Primera edició, Londres, 1954.

HERIGONE, PIERRE, *Cursus Mathematici*, 4 vols.,París, 1634-1637.

HOBSON, E. W., *Squaring the circle*, Cambridge, Cambridge University, 1913.

HOFMANN, J. E., *Register zu Leibniz, Mathematische Schriften, Briefwechsel mit Mathematikern.* Hildesheim- Nova York, Olms, 1977.

HUYGENS, CHRISTIAN, *Oeuvres complétes*, 16 vols.,Harlem, Societat Holandesa de Ciències, 1897.

KEPLER, JOHANNES, *Nova Stereometria Doliorum vinariorum*, Linz, 1615, o *Gesammelte Werke*, 22 vols., *Mathematische Schriften*, vol. 9, ed. Franz Hammer, München, C. H. Beck'sche, 1960.

KLINE, M., *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros dias, I*, Madrid, Alianza Universidad, 1992.

KOYRE, A., "Cavalieri y la geometria de los contínuos", *Estudios de Historia del pensamiento científico*, Siglo XXI, Madrid, 1977.

KOELBLEN, SABINE, "Un jalon dans l'histoire de la théorie des proportions au XVIe siècle, le commentaire de Clavius au livre V des *Éléments* d'Euclide", Thèse d'histoire des sciences et des techniques, spécialité histoire des mathématiques, Université de Nantes, 1994.

LAY-YONG, LAM, "Circle Measurements in Ancient China", *Historia Mathematica*, **13**, 1986, 325-340.

LEIBNIZ, G. W., *Mathematische Schriften*, Vol. 1, E. Knobloch & W. S. Contro (eds.) Berlin, Akademie-Verlag, 1990.

LORIA, G., "L'infinito e l'infinitessimo secondo i matematici moderni anteriori al secolo XVIII", *Scientia*, XLIV-6, Vol. XIX, 1915, 1-18.

--------, *Storia delle Matematiche*, Hoepli, Milano, 1946.

LINDBERG, D. C. (ed.), *Science in the Middle Ages*, Chicago: The University of Chicago Press, 1978, 231-241.

MAHONEY, MICHAEL S., "Another Look at Greek Geometrical Analysis", *AHES*, 5, 1968, 318-48.

----------, "Jean-François Niceron", *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), Nova York, 1971, 103-104.

----------, *The mathematical career of Pierre de Fermat*, Princeton, Princeton University Press, 1973.

----------, "The beginnings of algebraical thought in the seventeenth century", *Descartes' philosophy, mathematics and physics*, Gaukroger, S., ed., Totowa / Brighton, Barnes and Noble / Harvester, 1980, 141-156.

MAIERU, L., *Fra Descartes e Newton, Isaac Barrow e John Wallis*, Messina, Rubbettino, 1994.

MALET A., PARADIS, J, *Els origens i l'ensenyament de l'àlgebra simbòlica*, Barcelona, Universitat Barcelona, 1984.

MALET, ANTONI, "Studies on James Gregorie (1638-1675)", Ph. D. Diss., Princeton University, 1989.

----------, "James Gregorie on Tangents and the "Taylor" rule for series expansions", *AHES*, vol. 46, nº 2, 1993, 97-137.

----------, *From Indivisibles to Infinitesimals, Studies on Seventeenth-Century Mathematizations of Infinitely Small Quantities*. Barcelona, Publicacions Universitat Autònoma de Barcelona, 1996.

MANCOSU, PAOLO, *Philosophy of Mathematics and Mathematical Practice in the seventeenth century*, New York, Oxford University Press, 1996.

MASSA, MªROSA, "El mètode dels indivisibles de Bonaventura Cavalieri", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques*, nº 9, 1994, 68-100.

----------,"Mengoli on quasi proportions", *Historia Mathematica* **24**, 1997, 257-280.

MATTEUZZI, MAURIZIO, "Pietro Mengoli e l'algebra della Logica", *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria,* vol. LXXVII, 1979-80, 79-98.

----------, "L'Arithmetica realis e la confusa genialità di Pietro Mengoli", *Studie e Memorie per la storia dell'Università di Bologna,* 3, 1983, 393-408.

MAZZETTI, S, *Repertorio di tutti i professori antichi e moderni della celebre Università e del celebre Istituto delle Scienze di Bologna,* Bologna, Tipografia di S. Tommaso d'Aquino, 1847.

MELANDRI, E., "Tre studi su Pietro Mengoli (1625-1686)", *Atti della Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna. Cl. di Scienze Morale. Memoria,* vol. LXXVII, 1979-80, 5-21.

MONTUCLA, E , *Histoire des Mathématiques*, 2 vols, Paris, Blanchard, 1960. Primera edició 1799-1802.

NATHAN, H., "Jean Beaugrand", *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), Nova York, 1971, 541-542.

NAUX, CHARLES, *Histoire des logarithmes*, 2 vols, Paris, Blanchard, 1971.

NASTASI, P. i SCIMONE, A., "Pietro Mengoli and the Six-Square Problem", *Historia Mathematica,* 21, 1994, 10-27.

NATUCCI, A., "Mengoli", *Dictionary of Scientific Biography* (ed. C. C. Gillispie), New York, vol. 9, 1971, 303-304.

NEWTON, ISAAC, *Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World,* 2 vol. F. Cajori ed., A. Motte trans. Berkeley, University of California Press, 1962.

----------, *Philosophiae naturalis principia mathematica*. A. Koyre i I.B. Cohen eds. Cambridge (Mass), 1972.

----------, *The Correspondence of Isaac Newton*, 7 vol. H. Turnbull, J. Scott, A. R. Hall, i L. Tilling eds. Cambridge, 1959-1977.

NUNN, T. P., "The arithmetic of infinites", *The Mathematical Gazette,* 5, 1909-1911, 345-356, 377-386.

ORTEGA, J. M., "Euler, series y algunas funciones especiales", *Butlletí de la Societat Catalana de Ciències, Físiques, Químiques i Matemàtiques*, vol. II, nº 4, Barcelona, 1984, 383-404.

OLDENBURG, H., *The correspondence of Henry Oldenburg,* 13 Vols. A. Rupert Hall and Marie Boas Hall, eds. University of Wisconsin Press, 1965-1975, Mansell, 1975-1977, Taylor & Francis, 1986.

PASCAL, BLAISE, *Oeuvres complètes,* Paris, Gallimard, 1954.

PEPE, LUIGI, "L'elemento primo dell' "Aritmetica razionale" di Pietro Mengoli", *Bolletino U. M. I.*, 5, 1979, 201-209.

----------, "Il calcolo infinitesimale in Italia agli inizi del secolo XVIII", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* Vol. I, nº 2, 1981, 43-101.

----------, "Note sulla diffusione della *Géométria* di Descartes in Italia nel secolo XVII", *Bollettino di Storia delle Scienze Matematiche,* Vol. II, 1982, fasc. 2, 249-288.

PLA, J., "Les sèries de Newton", *Butlletí de la Societat Catalana de Matemàtiques,* 4, 1989, 9-20.

RIGAUD, S. P., *Correspondence of Scientific Men of the Seventeenth Century*, 2 vol., Oxford, 1841.

ROBINET, A., "G. W. Leibniz et la République des llettres de Bologne" en *Studi e Memorie per la Storia dell'Università di Bologna*, VI, Bolonya, 1987.

----------, *G. W. Leibniz Iter Italicum*, Firenze, Olschki, 1988.

SCOTT, JOHN F., *The Mathematical Work of John Wallis, D.D.,F.R.S. (1616-1703)*, Nova York, Chelsea, 1981.

SCRIBA, CHRISTOPH J., "Gregory's converging double sequence. A New Look at the Controversy between Huygens and Gregory over the "Analytical" Quadrature of the Circle", *Historia Mathematica*, 10, 1983, 274-285.

SEIDENBERG, A. "The ritual origin of the Circle and Square", *A. H. E. S.*, vol. 25, 1981, 269-327.

----------, "On the Area of a Semi-Circle", *A. H. E. S.*, vol. 9, 1972, 171-211.

SMEUR, A. J. E. M., "On the Value Equivalent to pi in Ancient Mathematical Texts. A New Interpretation", *Archive for History of Exact Sciences*, Vol. 6, 1970, 249-270.

SMITH D. E., *A source book in Mathematics*, Nova York, Dover, 1929.

STRUIK, D. (ed)., *A Source Book in Mathematics, 1200-1800*, Cambridge, Mass, Harvard University Press, 1969.

----------, "Ludolph Van Ceulen", *Dictionary of Scientific Biography,* (ed. C. C. Gillispie), 13 vols., Nova York, 1971, pàg. 181.

TABARRONI, G., "Geminiano Montanari", *Dictionary of Scientific Biography,* (ed. C. C. Gillispie), 13 vols., Nova York, 1971, pp. 484-487.

TITS, L., "Sur la sommation des puissances numériques, *Mathesis*, 37, 1923, pp. 353-355.

TORRICELLI, E., *Opere*, 3 vol, G. Loria i al. (eds), Faenza, 1919.

VACCA, GIOVANNI, "Sulle scoperte di Pietro Mengoli", *Atti dell'Accademia Nazionale dei Licei-Rendiconti,* vol. XXIV, 5, 1915, 508-513, 617-620.

VIETE, FRANÇOIS, *The Analytic Art,* T R Witmer tr.,Kent State University Press, Kent, Ohio, 1983.

----------, *Opera Mathematica* per Francisci A. Schooten, Georg Olms Verlag Hildesheim, New York, 1970, pp 1-41.

VOLKOV, A., "Calculation of pi in Ancient China: from Liu Hui to Zu Chongzhi", *International Journal of the History of Science Society of Japan,* 1994, 139-157.

----------, "Zhao Youqin and His Calculation of pi", *Historia Mathematica,* **24** (1997), 301-331.

----------, "Transformations of geometrical objects in chinese mathematics and their evolution", *Memoire de l'Institut des Hautes études chinoises*, vol. XXXVI, 1992, 133-148.

WALKER, EVELYN, *A Study of the Traité des Indivisibles of...Roberval,* Nova York, Columbia Univ. Press, 1986.

WALLIS, JOHN, *Arithmetica Infinitorum*, en *Opera Mathematica*, 3 vol. Oxford, 1693-1699. Repr. Hildesheim, Georg Olms, 1972.

WHITESIDE, D. T.,"Newton's discovery of the general binomial theorem", *The Mathematical Gazette,* Vol. XLV, 1961, 175-180.

----------, "Patterns of Mathematical Thought in the later Seventeenth Century", *Archive for History of Exact Sciences*, **1** 1960, 179-388.