Por qué la difusión de Arnold aparece genéricamente en los sistemas hamiltonianos con más de dos grados de libertad

Amadeu Delshams Valdés

POR QUÉ LA DIFUSIÓN DE ARNOLD APARECE GENÉRICAMENTE EN LOS SISTEMAS HAMILTONIANOS CON MÁS DE 2 GRADOS DE LIBERTAD

Memoria presentada por Amadeo Delshams Valdés para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas (por la Universidad de Barcelona).

Carles Simó Torres,

Catedrático Numerario de Análisis Numérico

de la Facultad de Matemáticas de la Universidad

de Barcelona,

CERTIFICA:

Que la presente Memoria ha sido realizada bajo su dirección por Amadeo Delshams Valdés, y que constituye su tesis para aspirar al grado de Doctor en Matemáticas.

Barcelona, 7 de Septiembre de 1.983

C. Simó

CAPITULO 1

INTRODUCCION

Dentro de los sistemas dinámicos, y en particular, de los sistemas hamiltonianos, la integrabilidad de un sistema y la estabilidad de las órbitas asociadas a dicho sistema, son propiedades fundamentales para entender el comportamiento de los diferentes fenómenos de la naturaleza que puedan modelar.

Concretamente para sistemas hamiltonianos, bajo condiciones generales que se detallan en el capítulo 2, un sistema hamiltoniano integrable tiene asociada una función de Hamilton del tipo

$$(\phi,I) = (\phi_1,\ldots,\phi_n, I_1,\ldots,I_n) \longmapsto H_0(I),$$

es decir, independiente de las variables angulares $\phi_1,\ldots,\phi_n$, y dependiendo sólo de las variables de acción, y cuyas órbitas asociadas son fácilmente calculables.

En general, los sistemas físicos no son integrables, aunque en muchas ocasiones están próximos a ellos, en el sentido de que podemos asociarles una función de Hamilton del tipo

$$H(\phi,I,\varepsilon) = H_0(I) + \varepsilon H_1(\phi,I,\varepsilon)$$

siendo ε un parámetro pequeño. El ejemplo quizás más conocido de tales sistemas, llamados sistemas casi-integrables, lo constituye el sistema solar.

Estos sistemas, si $\varepsilon = 0$, son de fácil resolución, obteniéndose que toda órbita se encuentra contenida en un toro n-dimensional de ecuación I = constante. No ocurre lo mismo si $\varepsilon \neq 0$, ya que en general no son integrables, aunque como ya fue enunciado por Kolmogorov hace casi treinta años, sabemos que la mayoría de los toros n-dimensionales que existian para $\varepsilon = 0$, continúan existiendo si ε es sufucientemente pequeño. Así, si ε es suficientemente pequeño, la mayoría de las órbitas se encuentran en toros invariantes n-dimensionales (para una formulación precisa, véase el apartado (3.4)).

Sin embargo, el comportamiento de las órbitas, llamémolas "irregulares", que no se encuentran sobre tales toros quedaba como un problema abierto, en el sentido de que no se sabía si tales órbitas permanecían cerca de los toros invariantes próximos o por el contrario, podrían escaparse de éstos y tener lugar por tanto una difusión (véase la figura (3.2)).

El primero en hacer notar la existencia de esta difusión, para $n > 2$, fue Arnold, con lo que este fenómeno recibe el nombre de difusión de Arnold. Asímismo Arnold ideó una herramienta para detectar dicha difusión: el mecanismo de las cadenas de transición, basado en la intersección transversal de variedades invariantes asociadas a distintos toros invariantes del sistema (una explicación detallada de este mecanismo se encuentra en el capítulo 5).

El propósito de esta memoria consiste en mostrar cómo dichas cadenas de transición, aparecen , en general, en cualquier sistema hamiltoniano con $n > 2$ grados de libertad. El método de prueba es constructivo, con lo que puede comprobarse la existencia de tales cadenas de transición en hamiltonianos concretos. La estrategia de la prueba es como sigue. Necesitamos 5 pasos.

PASO 1. Construcción de forma normal resonante Γ para un hamiltoniano H dado, en el entorno de un punto elíptico, bajo condiciones muy generales. Esta forma normal es una generalización de la forma normal de Gustavson y puede ser hallada también en el caso de difeomorfismos simplécticos. En el apartado (4.1) se prepara el camino para dicha forma normal, que es calculada en el apartado (4.2).

PASO 2. Prueba de la existencia de familias (n-1)-paramétricas de toros (n-1)-dimensionales T, invariantes por el flujo asociado a Γ, de carácter hiperbólico, es decir, con variedades invariantes estable e inestable W^sT, W^uT, coincidentes: $W^sT = W^uT$, en el entorno de un punto elíptico. Esto se hace en el apartado (4.3), donde se dan estimaciones sobre la situación de tales toros, ángulo entre variedades sobre el toro, y "anchura" entre variedades. De paso, también se prueba la existencia de familias (n-1)-paramétricas de toros elípticos (n-1)-dimensionales, situadas entre las familias correspondientes a toros hiperbólicos.

PASO 3. Persistencia de la existencia de la mayoría de los toros hiperbólicos, al considerar H en vez de Γ. Además se prueba que los toros T que se conservan, son de transición, es decir, entornos arbitrarios de puntos arbitrarios $x_s \in W^sT$, $x_u \in W^uT$ pueden ser conectados por trayectorias del sistema. Este paso se hace en el apartado (5.2) con ayuda del teorema KAM.

PASO 4. Construcción de la integral de Melnikov para calcular la (posible) intersección transversal de variedades invariantes asociadas a toros de transición. En el apartado (6.1) se establecen las condiciones necesarias para la definición de dicha integral de Melnikov, efectuada en el apartado (6.2), donde también se explica de nuevo, el porqué aparecen cadenas de transición para $n > 2$, en general, y no para $n = 2$.

PASO 5. Comprobación de que el conjunto de hamiltonianos para los cuales la construcción de cadenas de transición, siguiendo los pasos 1, 2, 3, 4, es residual, si $n > 2$. Aquí es básico probar que las variedades invariantes asociadas a toros de transición se cortan de manera efectiva, así como la existencia de toros de transición suficientemente próximos, para que pueda haber intersección transversal entre variedades invariantes correspondientes a distintos toros de transición. El apartado (7.2) está dedicado a este respecto.

Como consecuencia , la existencia, en general, de cadenas de transición nos da una medida de la distancia a que puede dejarse una órbita del sistema, pudiendo hablarse de inestabilidad global. Además, la intersección transversal de variedades invariantes da indicios claros, para $n > 2$, de movimiento casi-aleatorio o caótico cerca de dichos toros invariantes, así como de no integrabilidad del sistema. Para $n = 2$, se comprueba en el apartado (7.2) que efectivamente esto es así, es decir, en general hay movimiento casi-aleatorio y no integrabilidad, aunque no existan, en principio, cadenas de transición.

Estimaciones de la velocidad de difusión, especialmente para sistemas no hamiltonianos, a los cuales asociamos un sistema promedio, son tratadas en los apartados (3.1), (3.2), (3.3), imponiendo condiciones geométricas con el fin de evitar las resonancias.

Los conceptos y definiciones básicas se introducen en el capítulo 2, donde sólo cabe destacar como no standard la parte dedicada a subvariedades simplécticas.

El concepto de sistema promedio se introduce en el apartado (3.1), así como el concepto de resonancias en (3.2), con el fin de dar estimaciones de la velocidad de difusión en (3.3).

Los sistemas casi-integrables son presentados en el apartado (3.4), así como el teorema KAM, del cual más de una versión es necesaria. En el apartado (3.5) se introducen los conceptos de difusión de Arnold y de ρ-estabilidad toroidal.

La terminología de puntos elípticos de orden (al menos) N, así como de formas normales es introducida en el apartado (4.1), con el fin de obtener la forma normal resonante necesaria para el paso 1, y poder estudiar su comportamiento cualitativo para el paso 2.

Los toros de transición, y el mecanismo de las cadenas de transición, núcleo de esta memoria, y necesarios para el paso 3, son presentados en el apartado (5.1).

En el apartado (6.1) se introducen los requisitos previos para poder definir la función de Melnikov, cuya construcción se desarrolla en el apartado (6.2).

Finalmente, el concepto de genericidad se introduce en el apartado (7.1), así como se dota de una topología a los sistemas hamiltonianos sobre una variedad simpléctica. La comprobación del paso 5 se hace en tres "subpasos" en el apartado (7.2), definiendo tres categorías de hamiltonianos sobre una variedad.

No quisiera acabar esta introducción sin expresar mi agradecimiento al Dr. Carles Simó Torres por la constante y alentadora ayuda que me ha prestado durante la elaboración de esta Memoria. Tambien quisiera agradecer a mi esposa Rosalía y a mi hermano Pedro la ardua tarea de mecanografiado de esta Memoria.

CAPITULO 2

SISTEMAS HAMILTONIANOS INTEGRABLES

2.1. Generalidades sobre sistemas hamiltonianos

Toda función real $H \in C^2(U)$ definida sobre un abierto de U de $\mathbb{R}^{2n}$, con coordenadas $(q,p) = (q_1,\ldots,q_n, p_1,\ldots,p_n)$, define un sistema de 2n ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad i=1,\ldots,n, \tag{2.1.1}$$

llamado sistema de ecuaciones canónicas de Hamilton con n grados de libertad. La función H recibe el nombre de Hamiltoniano del sistema (2.1.1) y en los sistemas mecánicos clásicos viene dada por la suma de la energía cinética y la energía potencial, representando por tanto la energía total del sistema. Las coordenadas q_i, p_j reciben el nombre de posiciones y momentos, respectivamente. El sistema (2.1.1) puede escribirse en forma más compacta como

$$\dot{x} = J \operatorname{grad} H(x) \equiv X_H(x), \tag{2.1.2}$$

donde $\operatorname{grad}H(x)$ es el vector $\left(\frac{\partial H}{\partial q_1},\ldots,\frac{\partial H}{\partial q_n}, \frac{\partial H}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial p_n}\right)$ evaluado en el punto $x=(q,p)$ y J es la matriz antisimétrica $\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix}$, siendo I la matriz identidad sobre $\mathbb{R}^n$. X_H recibe el nombre de campo hamiltoniano asociado a la función H. Como J es una matriz regular, origina en $\mathbb{R}^n$ un forma simpléctica ω° (es decir, una forma bilineal alternada no degenerada), dada por $\omega^\circ(u,v) = u^T J v$, que en términos de las coordenadas (q,p), podemos escribir como

$$\omega^\circ = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i \ .$$

Todo par (E, ρ) formado por un espacio vectorial real E y una forma simpléctica ρ se llama un espacio simpléctico. Obviamente ω establece un isimorfismo natural b entre los campos vectoriales $\mathfrak{X}(U)$ y las 1-formas $\mathfrak{X}^*(U)$, dado por $X \mapsto X^b = \omega(X,.)$. Llamando $\#$ el isomorfismo inverso, entonces el campo X_H de (2.1.2)es igual a $(dH)^\#$. Por tanto si X es un campo hamiltoniano, el hamiltoniano H tal que $X = X_H$ está determinado salvo una función localmente constante.

Con frecuencia ocurre que el espacio de fases U de un sistema mecánico no es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$, sino una variedad 2n-dimensional, por lo que es preciso generalizar los conceptos introducidos. Lo haremos de manera que localmente, en unas coordenadas adecuadas, las ecuaciones del movimiento tengan la forma de (2.1.1).

DEFINICION. Sea M una variedad diferenciable 2n-dimensional. Una forma simpléctica sobre M es una 2-forma cerrada no degenerada Ω. Al par (M, Ω) lo llamaremos variedad simpléctica de n grados de libertad.

Comentemos esta definición. Como Ω es no degenerada, para cada $m \in M$, $\Omega(m)$ es una forma simpléctica sobre T_mM, con lo que $(T_mM, \Omega(m))$ es un espacio simpléctico, de dimensión 2n. Es sabido (ver(1),pág 162) que dos espacios simplécticos (E, ω), (F, λ) de la misma dimensión son equivalentes, es decir, existe un isomorfismo $L:E \to F$ simpléctico: $L^*\lambda = \omega$ (con $(L^*\lambda)(u,v) = \lambda(Lu,Lv)$, $u,v \in E$). En particular, para cada $m \in M$, existe un isomorfismo simpléctico $L(m): (T_mM, \Omega(m)) \to (\mathbb{R}^n, \omega^\circ)$. El hecho de que pueda extenderse a un entorno de m, es consecuencia de que Ω es cerrada ($d\Omega = 0$) ya que por el teorema de Darboux ((1),pág 175) existe un entorno U de m en M y un sistema de coordenadas $(q_1,\ldots,q_n, p_1,\ldots,p_n) = \phi$ tal que $\Omega| U = \omega^o =$

$= \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$.

Dadas dos variedades simplécticas (M, Ω), (N, Λ), una aplicación diferenciable $\psi : M \to N$ se llama <u>simpléctica</u> si $\psi^* \Lambda = \Omega$, o sea, $\Omega(m)(u,v) =$ $= \Lambda(\psi(m))(d\psi(m)u, d\psi(m)\, v)$, para cualquier $m \in M$ y cualesquiera $u,v \in T_m M$.

Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n = \{(q,p)\}$ con la forma simpléctica canónica $\Sigma_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ de matriz asociada J, una aplicación $(q,p) \mapsto \Psi(q,p) = (\tilde{q}(q,p), \tilde{p}(q,p))$ es simpléctica cuando $D\Psi(q,p)^T J D\Psi(q,p) = J$, o equivalentemente, $\sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i = \sum_{i=1}^{n} d\tilde{q}_i \wedge d\tilde{p}_i$. En tal caso, Ψ se llama simpléctica <u>canónica</u>.

Como consecuencia del teorema de Darboux, toda variedad simpléctica posee un <u>atlas simpléctico</u>, o sea, un atlas formado por cartas (U_i, ϕ_i) tales que el paso $\psi_{ji} = \phi_j \circ \phi_i^{-1}$ de una carta a otra sea una aplicación canónica. Así obtenemos una definición equivalente de variedad simpléctica (Véase (10), pág 228).

Las aplicaciones canónicas están generadas localmente por funciones generatrices. Así, si $(q,p) \in V \mapsto \psi(q,p) = (\tilde{q}(q,p), \tilde{p}(q,p)) \in \tilde{V}$ es una aplicación canónica y en un punto $(q^\circ, p^\circ) \in V$ se cumple, por ejemplo, que

$$\det\left(\frac{\partial \tilde{p}_i(q^\circ, p^\circ)}{\partial p_j}\right) \neq 0 ,$$

entonces en un entorno de (q°,p°), las coordenadas $(q, \tilde{p})$ son independientes con lo que podemos escribir $0 = \sum_{i=1}^{n} d\tilde{q}_i \wedge d\tilde{p}_i - \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i =$

$= d\left(\sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i \, d\tilde{p}_i + \sum_{i=1}^{n} p_i \, dp_i\right)$. Al ser la 1-forma $\tilde{q}d\tilde{p} + pdq = \sum_{i=1}^{n} \tilde{q}_i d\tilde{p}_i +$ $+ \sum_{i=1}^{n} p_i dq_i$ cerrada, localmente existe una función $(q,\tilde{p}) \in W \mapsto S(q,\tilde{p}) \in \mathbb{R}$ definida en un entorno W de $(q^\circ, \tilde{p}^\circ = \tilde{p}^\circ(q^\circ, p^\circ))$ tal que $\tilde{q}d\tilde{p} + pdq = dS$; de donde se deduce

$$\tilde{q}_i = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i} , \quad p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} , \quad i = 1,\ldots,n ; \tag{2.1.3}$$

además, $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{p}_j}\right) \neq 0$. S recibe el nombre de <u>función generatriz</u> de la aplicación canónica Ψ. Al revés , si $(q,\tilde{p}) \in W \mapsto S(q,\tilde{p}) \in \mathbb{R}$ satisface $\det\left(\frac{\partial^2 S}{\partial q_i \partial \tilde{p}_j}(q^\circ, \tilde{p}^\circ)\right) \neq 0$, entonces las ecuaciones (2.1.3) definen una aplicación canónica $(q,p) \in V \mapsto \Psi(q,p) = (\tilde{q}(q,p), \tilde{p}(q,p)) \in \tilde{V}$, definida en un entorno V de (q°, p°) , con $p_i^\circ = \frac{\partial S}{\partial p_i}(q^\circ, \tilde{p}^\circ)$, con $\tilde{p}(q,p)$ obtenida aplicando el teorema de la función implícita a $p_i = \frac{\partial S}{\partial p_i}(q,\tilde{p})$ $i = 1,\ldots,n$ en un entorno de $(q^\circ, \tilde{p}^\circ)$. Así , $\tilde{p}(q,p)$ cumple $p_i = \frac{\partial S}{\partial p_i}(q, \tilde{p}(q,p))$, $i = 1,\ldots,n$, $\tilde{q}_i(q,p) = \frac{\partial S}{\partial \tilde{p}_i}(q,\tilde{p}(q,p))$, $i = 1,\ldots,n$; y es inmediato comprobar que $\tilde{q}d\tilde{p} + pdq = dS$, con lo que $\sum_{i=1}^{n} d\tilde{q}_i \wedge d\tilde{p}_i - \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i = 0$, cumpliéndose por tanto que Ψ es una aplicación canónica. Además, $\det\left(\frac{\partial \tilde{p}_i (q^\circ, p^\circ)}{\partial p_j}\right) \neq 0$. En los casos en que podemos encontrar otras coordenadas independientes distintas de $(q,\tilde{p})$, por ejemplo, $(q, \tilde{p}_{i1}, \ldots, \tilde{p}_{ik}, \tilde{q}_{j1}, \ldots, \tilde{q}_{jn-k})$, también puede obtenerse una función generatriz y unas ecuaciones análogas a (2.1.3) salvo algún cambio de signo (Véase (10), pág 264). Fijémonos en que toda trasformación canónica, dada por 2n funciones de 2n variables queda determinada por una función de 2n variables, una función generatriz, lo que facilita los cálculos a la hora de buscar algún tipo de transformación canónica.

Después de este breve paréntesis sobre funciones generatrices, continuemos con las variedades simplécticas. Dada (M,Ω) variedad simpléctica, Ω establece un isomorfismo natural $\flat$ entre los campos vectoriales $\mathfrak{X}(M)$ y las 1-formas $\mathfrak{X}^*(M)$ dado por $X \to X^\flat = \Omega(X,\cdot)$. Llamemos $\#: \mathfrak{X}^*(M) \to \mathfrak{X}(M)$ al isomorfismo inverso.

DEFINICION Sea (M,Ω) variedad simpléctica. Sea $H:M\to\mathbb{R}$ funcion C^{r+1}, $r \geq 1$. El campo vectorial $X_H = (dH)^\#$ se llama el *campo hamiltoniano* de función de energía H. (M,Ω,X_H) recibe el nombre de *sistema hamiltoniano*.

Así X_H queda determinado por la relación : $\Omega(m)(X_H(m), v) = dH(m)v$ para $m \in M$, $v \in T_mM$ y es un campo de clase C^r. En coordenadas simplécticas $(q_1,\dots,q_n, p_1,\dots,p_n)$ en un entorno U de un punto $m \in M$, se cumple que $\Omega|U = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$ con lo que $X_H = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$. Así en estas componentes $X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{\partial H}{\partial q_i}\right)$ con lo que las curvas integrales $(q_i(t), p_i(t))$ de X_H satisfacen en estas coordenadas el sistema

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \qquad , \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial p_i} \;, \quad i = 1,\dots n,$$

que es justamente el sistema (2.1.1). El problema básico de la mecánica consiste en encontrar (o en su defecto, estudiar el comportamiento cualitativo o cuantitativo de) las curvas integrales de X_H, cuyas imágenes reciben el nombre de órbitas o trayectorias del movimiento.

Las transformaciones que conservan la estructura de cualquier sistema hamiltoniano, son precisamente las transformaciones simplécticas. Así, si (M,Ω), (N,Λ) son espacios simplécticos, y $f:M\to N$ es un difeomorfismo, f es simpléctica si y sólo si $X_{H\circ f} = f^*X_H$ para cualquier $H\in C^1(N,\mathbb{R})$ ((1), pág 194). En particu si Ψ es una transformación canónica, $(q,p) = \Psi(\tilde{q},\tilde{p})$, transforma el sistema (2.1.1) en

$$\dot{\tilde{q}}_i = \frac{\partial H}{\partial \tilde{p}_i} \quad , \qquad \dot{\tilde{p}}_i = -\frac{\partial H}{\partial \tilde{q}_i} \quad , \quad i = 1,\dots,n \; ,$$

con $H = H\circ\Psi$, con lo que trabajando con transformaciones canónicas, basta ver cómo varía el hamiltoniano. Por ejemplo, si Ψ viene generado por una función generatriz S y cumple las ecuaciones (2.1.3) entonces $\tilde{H}\left(\frac{\partial S}{\partial \tilde{p}}(q,\tilde{p}),\ \tilde{p}\right) = H\left(q,\ \frac{\partial S}{\partial q}(q,\tilde{p})\right)$. La teoria clásica está basada en la búsqueda de transformaciones simplécticas que transformen el sistema hamiltoniano dado en otro más sencillo, en el sentido de que se pueda integrar. De hecho, los métodos formales de integración, y la mayor parte de los métodos de teoría de perturbaciones se obtienen requiriendo simplicidad en el nuevo hamiltoniano obtenido, al menos hasta cierto orden de aproximación.

Sea C subvariedad de la variedad simpléctica 2n-dimensional (M,Ω). Si llamamos $i:C\to M$ a la inclusión de C en M, entonces la restricción de Ω es $i^*\Omega$, que viene dada por $(i^*\Omega)(m)(u,v) = \Omega(i(m))(di(m)u,di(m)v) = \Omega(m)(u,v)$, $m\in C$, $u,v\in T_mC$, si identificamos T_mC con $di(m)(T_mC)$. Claramente $i^*\Omega$ es una 2-forma sobre C, y además es cerrada : $d(i^*\Omega) = i^*(d\Omega) = 0$

DEFINICION Dada C subvariedad de la variedad simpléctica (M,Ω), diremos que C es <u>subvariedad simpléctica</u> de M si $i^*\Omega$ es no degenerada. En tal caso $(C,i^*\Omega)$ es una variedad simpléctica.

Recordemos que $i^*\Omega$ es no degenerada si para cualquier $m\in C$, $\Omega(m) : T_mC\times T_mC\to\mathbb{R}$ es no degenerada, o sea, para cualquier $u\in T_mC$ no nulo, existe $v\in T_mC$ tal que $\Omega(m)(u,v)\neq 0$. Nótese que C es subvariedad de (M,Ω) si y sólo si $(C, i^*\Omega)$ es variedad simpléctica. Así, toda subvariedad simpléctica es de la dimensión par. Veamos algunos ejemplos.

Sea (U,ϕ) una carta simpléctica, es decir, $\Omega|U = \sum_{i=1}^{n} dq_i\wedge dp_i$, con $\phi = (q_1,\dots,q_n, p_1,\dots,p_n)$. Sea $(q_1^o,\dots,q_n^o, p_1^o,\dots,p_n^o)\in \phi(U)$. Entonces $C_o=\{ m\in U: q_j(m) = q_j^o, p_j(m) = p_j^o, j= \ell+1,\dots,n\}$ es una subvariedad simpléctica 2ℓ-dimensional de M, ya que $i^*\Omega = \sum_{j=1}^{n} dq_j\wedge dp_j$ es no degenerada. Llamando $x_i= q_{i+\ell}$ $y_i = p_{i+\ell}$, $i=1,\dots,n-\ell=k$, queda $\Omega|U = \sum_{j=1}^{\ell} dq_j\wedge dp_j + \sum_{i=1}^{k} dx_i\wedge dy_i$. En estas nuevas variables, sea $C_1 = \{m\ U: x_i(m)= x_i^o(m)+ f_i(m),\ y_i= y_i^o+g_i(m),\ i= 1,\dots,f\}$, donde $f_i,g_i:\mathcal{U}\to\mathbb{R}$ son de clase C^r, $r\geq 1$, $i=1,\dots,k$. Si $i_1: C_1\to M$ es la inclusión de C_1 en M, entonces

$$i_1^*\Omega = \sum_{j=1}^{\ell} dq_j\wedge dp_j + \sum_{i=1}^{k} df_i\wedge dg_i \tag{2.1.4}$$

y aunque de esta expresión podemos obtener una condición general (difícil de comprobar en cada caso en particular) bajo la cual $i^*\Omega$ no es degenerada, es inmediato comprobar que si df_i, dg_i $i=1,\dots,k$ son "pequeñas", entonces $i_1^*\Omega$ es no degenerada : si $\| df_i(m) \|$, $\|dg_i(m) \|<\varepsilon, i=1,\dots,k$, $m\in U$, y ε es suficientemente pequeño , la matriz asociada es del tipo J+A, con A antisimétrica dependiendo de las derivadas de f_i, q_i, $i=1,\dots,k$, $A=0(\varepsilon^2)$, con lo que det(J+A) $\neq 0$ si ε es suficientemente pequeño. En particular, observamos que toda subvariedad N que esté C^1-próxima a C_o es simpléctica. Obsérvese que las coordenadas $(q_1,\dots,q_\ell,p_1,\dots,p_\ell)$ no son simplécticas para C_1 (o N), a menos que $\sum_{i=1}^{n} df_i \wedge dq_i = 0$. Sin embargo, por el teorema de Darboux, ya citado, existen coordenadas $Q_1,\dots,Q_\ell$, $P_1,\dots,P_\ell$, en el entorno de cada punto de C_1 manera que $i_1^*\Omega = \sum_{i=1}^{\ell} dQ_i \wedge dP_i$.

De hecho, y modificando ligeramente la demostración del teorema de Darboux ((1), pág 175, o (30), pág 118), podríamos extender estas coordenadas simplécticas $Q_1,\dots,Q_\ell$, $P_1,\dots,P_\ell$ sobre C_1 a coordenadas simplécticas sobre M $Q_1,\dots,Q_\ell,Q_{\ell+1},\dots,Q_n$, $P_1,\dots,P_\ell,P_{\ell+1},\dots,P_n$, es decir, $\Omega = \sum_{j=1}^{n} dQ_j \wedge dP_j$, con lo que llegamos a una nueva definición de subvariedad simpléctica : $C \subset M$ es subvariedad simpléctica si para cualquier $m^o \in C$, existe una carta simpléctica (U,ϕ), con $\phi(m^o) = 0$, $\phi = (q_1,\dots,q_n, p_1,\dots,p_n)$ de manera que

$$C \cap U = \{m \in U : q_j(m) = p_j(m) = 0,\ j = \ell+1,\dots,n\}. \qquad (2.1.5.)$$

La demostración puede encontrarse en (64), pág 53.

Recordemos que el que (U,ϕ) sea simpléctica quiere decir que $\Omega | U = \sum_{i=1}^{n} dq_i \wedge dp_i$, con lo que $(i^*\Omega)|U = \sum_{i=1}^{\ell} dq_i \wedge dp_i$, y localmente toda subvariedad simpléctica es del tipo de C_o visto en el ejemplo anterior, con lo que finalmente obtenemos

PROPOSICION. Sea C subvariedad simpléctica 2ℓ-dimensional de (M,Ω). Entonces toda subvariedad N 2ℓ-dimensional de M, C^1-suficientemente próxima de C es también subvariedad simpléctica de (M,Ω). En particular, para cualquier $m^o \in N$, existe una carta simpléctica (U,ϕ) de manera que $N \cap U$ es de la forma de (2.1.5.).

Dada $H:M \to \mathbb{R}$ de clase C^{r+1}, $r \geq 1$, podemos considerar el sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H). Si C es subvariedad simplèctica de (M,Ω), entonces. $(C,i^*\Omega)$ es variedad simpléctica, y con la restricción de H a C, $H|C: \to \mathbb{R}$, podemos también considerar el sistema hamiltoniano $(C,i^*\Omega,X_{H|C})$. $X_{H|C} \in \mathfrak{X}^r(C)$ está determinado en forma única por la ecuación

$$\Omega(m)(X_{H|C}(m),v) = dH(m)v \quad , m \in C, v \in T_m C \tag{2.1.6}$$

Por otro lado, si consideramos $X_H|C$, en general, no será un campo sobre C, ya que no tiene porqué cumplirse que $X_H(m) \in T_m C$ si $m \in C$, a menos que C sea invariante por el flujo de X_H. En este caso X_H coincide con $X_{H|C}$ en C:

PROPOSICION. Sea C subvariedad simpléctica de (M,Ω), sea $H:M \to \mathbb{R}$ de clase C^{r+1}. Entonces C es invariante por el flujo de X_H si y solo si $X_{H|C} = X_H|C$. $(r \geq 1)$

<u>Demostración</u>: Si $X_{H|C} = X_H|C$, entonces, para cada $m \in C$, $X_H(m) = X_{H|C}(m) \in T_m C$, o sea, C es invariante por el flujo de X_H. Recíprocamente, si C es invariante por el flujo de X_H, entonces $X_H|C \in \mathfrak{X}^r(C)$, y cumple $\Omega(m)(X_H(m),v) = dH(m)v$, para $m \in M$, $v \in T_m M$, y en particular, cumple tambien (2.1.6.). Por ser Ω no degenerado en C, es decir, por ser $i^*\Omega$ no degenerada, $X_H|C = X_{H|C}$. c.q.d.

DEFINICION. Si C es subvariedad simpléctica de (M,Ω), con C invariante por el flujo de X_H, con $H:M\to\mathbb{R}$ de clase C^{r+1}, $r>1$, diremos que $(C, i^*\Omega, X_{H|C})$ es un <u>subsistema hamiltoniano</u> de (M,Ω,X_H).

Claramente $(C,i^*\Omega,X_{H|C})$ es un sistema hamiltoniano, con $H|C:C\to\mathbb{R}$ la función hamiltoniana asociada. La hipótesis de que C sea subvariedad simpléctica es necesaria para que $i^*\Omega$ sea no degenerada, y podamos, por tanto, definir $X_{H|C}$.

Tengamos en cuenta que si C viene dada por las ecuaciones

$$C = \{ m\in U : q_j(m) = q_j^o,\ p_j(m) = p_j^o,\ j = \ell+1,\dots,n\}$$

donde (U,ϕ), con $\phi = (q_1,\dots q_n, p_1,\dots,p_n)$, es una carta simpléctica, es decir, $\Omega|U = \sum_{i=1}^{n} dq_i\wedge dp_i$, entonces $q_1,\dots,q_\ell, p_1,\dots,p_\ell$ son coordenadas simpl ticas para $i^*\Omega$ $(i^*\Omega = \sum_{j=1}^{\ell} dq_j\wedge dp_j)$, de donde $X_H = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$, $X_{H|C} = \sum_{j=1}^{\ell} \left(\frac{\partial H}{\partial p_j}\frac{\partial}{\partial q_j} - \frac{\partial H}{\partial q_j}\cdot\frac{\partial}{\partial p_j}\right)$, con lo que las ecuaciones asociadas a las curvas integrales de $X_{H|C}$ son del tipo

$$\dot{q}_j = \frac{\partial H}{\partial p_j}(q_1,\dots,q_\ell, q^o_{\ell+1},\dots,q^o_n, p_1,\dots,p_\ell, p^o_{\ell+1},\dots,p^o_n),$$

$$\dot{p}_j = -\frac{\partial H}{\partial q_j}(q_1,\dots,q_\ell, q^o_{\ell+1},\dots,q^o_n, p_1,\dots,p_\ell, p^o_{\ell+1},\dots,p^o_n), \qquad (2.1.7$$

$$j = 1,\dots,\ell\ ,$$

es decir, son ecuaciones canónicas asociadas a $H|C$. Sin embargo, si C no está expresado en coordenadas simplécticas, por ejemplo, si C es del tipo

$$C = \{ m \in U: x_i(m) = x_i^o + f_i(m),\ y_i(m) = y_i + g_i(m),\ i = 1,\dots,k = n-\ell \}.$$

entonces $i^*\Omega = \sum_{j=1}^{\ell} dq_j \wedge dp_j + \sum_{i=1}^{k} df_i \wedge dg_i$, (véase (2.1.4.)) y no es cierto que las curvas integrales de $X_{H|C}$ sean del tipo (2.1.7). Se ha de expresar a C en variables canónicas para que esto ocurra.

Por último, digamos que todos estos resultados se trasladan inmediatamente al caso de difeomorfismos simplécticos. Si $A:(M,\Omega) \to (N,\Omega)$ es una aplicación simpléctica, y $C \xhookrightarrow{i} M$ es subvariedad simpléctica de (M,Ω), entonces $i:(C,i^*\Omega) \to (M,\Omega)$ es una aplicación simpléctica, $D = A(C) \xhookrightarrow{j} N$ es subvariedad simpléctica de (N, Λ), $A|C:(C,i^*\Omega) \to (N,\Lambda)$ es una aplicación simpléctica, y $A|C:(C,i^*\Omega) \to (D,j^*\Lambda)$ es un difeomorfismo simpléctico.

2.2. Coordenadas acción ángulo.

Sea T^n el toro n-dimensional, obtenido como conjunto cociente de la relación $\sim$ en $\mathbb{R}^n$:

$$x \sim y \iff x-y \in 2\pi \mathbb{Z}^n,$$

es decir, $T^n = \mathbb{R}^n/\sim$. Sea B^n una bola abierta de $\mathbb{R}^n$ y consideremos $M = T^n \times B^n$ con la estructura simpléctica canónica: $\Omega(\phi,I)(u,v,) = u^T Jv$, $(\phi,I) \in M$, $u,v, \in \mathbb{R}^{2n}$. Sea H un hamiltoniano dependiendo sólo de la variable $I = (I_1,\dots,I_n)$ (así, $\frac{\partial H}{\partial \phi_i} \equiv 0$). Denotaremos por $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ el gradiente de H con respecto a I : $\omega_i(I) = \frac{\partial H}{\partial I_i}(I)$, $i=1,\dots,n$. Entonces el campo X_H viene dado por

$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial H}{\partial I_i} \frac{\partial}{\partial \phi_i} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\partial}{\partial \phi_i}$, o, equivalentemente las ecuaciones del movimiento son :

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H}{\partial I_i}(I) = \omega(I), \quad \dot{I}_i = -\frac{\partial H}{\partial \phi_i} = 0 \quad , \quad i=1,\dots,n, \tag{2.2.1}$$

con flujo asociado lineal dado por :

$$\phi_i(t) = \phi_i^o + t\omega_i(I^o)\,(\mathrm{mod}\ 2\pi), \quad I_i(t) = I_i^o, \quad t\in\mathbb{R}, \quad i=1,\dots,n \tag{2.2.2}$$

Hemos podido integrar fácilmente el sistema (2.2.1) debido a que el hamiltoniano H sólo dependia de los momentos $I_1,\dots,I_n$. Las posiciones $\phi_1,\dots,\phi_n$ de (2.2.1) reciben el nombre de variables angulares y los momentos $I_1,\dots,I_n$, de variables de acción. Claramente, todo sistema equivalente a (2.2.1) se integra fácilmente, lo que motiva la

DEFINICION ((47), pág 18). Un sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H) admite coordenadas acción-ángulo (I,ϕ) en un abierto $U\subset M$ si

1) existe un difeomorfismo simpléctico $\Psi: T^n \times B^n \to U$
2) $H\circ\Psi$ sólo depende de las variables de acción $I\in B^n$ ($H\circ\Psi$ no depende de las variables angulares $\phi\in T^n$).

Llamaremos a $(\Psi\circ I, \Psi\circ\phi)$, o simplemente (I,ϕ) coordenadas acción-ángulo para H en U. Si además $\left(\frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j}\right) = \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j}\right)$ es una matriz no singular en U, diremos que las variables acción-ángulo para H son no degeneradas. Esta propiedad no depende de las variables acción-ángulo, sino que es una propiedad intrínseca de H ((47), pág 20), por lo que simplemente diremos que H es no degenerado en U.

La obtención de coordenadas acción-ángulo en un abierto U, resuelve completamente el sistema hamiltoniano sobre este abierto U. Veamos que la existencia de dichas coordenadas está íntimamente ligada a la existencia de n integrales primeras independientes, en involución. Introduzcamos estos conceptos.

DEFINICION. Sea (M,Ω) variedad simpléctica. Sean $f,g:M\to\mathbb{R}$ funciones diferenciables. Su <u>paréntesis de Poisson</u> es la función $\{f,g\}: M\to\mathbb{R}$ dada por

$$\{f,g\} = \Omega(X_f,X_g) = df\cdot X_g .$$

En coordenadas simplécticas, $X_g = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial X}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial X}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial}{\partial p_i}\right)$, con lo que

$$\{f,g\} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}\,\frac{\partial q}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\cdot\frac{\partial q}{\partial q_i}\right)$$

En el caso en que el paréntesis de Poisson de dos funciones sea nulo, se dice que estan en <u>involución</u>. Toda integral primera diferenciable $F : M\to\mathbb{R}$ de un sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H), es decir, invariante por el flujo de X_H, queda caracterizada por estar en involución con el hamiltoniano H. Así $\{F,H\}= 0$ si y sólo si $\frac{dF}{dt} = 0$ sobre las trayectorias de movimiento de X_H. En particular, todo sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H) posee una integral primera obvia: el hamiltoniano H. Si el sistema hamiltoniano tiene sólo un grado de libertad, entonces es completamente resoluble, ya que toda órbita cumple la ecuación $H = cte$. Si tiene n grados de libertad, y conocemos k integrales primeras $F_1,\dots,F_k$ funcionalmente independientes, entonces toda trayectoria está contenida en la intersección de las respectivas hipersuperficies de nivel $F_1 = f_1,\dots,F_k = f_k$, dependiendo de k parámetros, esto es, tenemos determinadas subvariedades $(2n-k)$-dimensionales de M, invariantes por el flujo de X_H. En el caso en que existan n integrales primeras independientes, en involución, entonces el sistema es resoluble por cuadraturas (Teorema de Liouville, (76)(79)) y por eso recibe el nombre de sistema integrable. Concretemos un poco más este resultado.

Si (M,ω) es una variedad simpléctica, y como consecuencia de ser ω no degenerada, ω determina un elemento de volumen $\omega^n = \omega \wedge \ldots \wedge \omega$ y consiguientemente una medida μ sobre los conjuntos borelianos de M. Claramente toda aplicación simpléctica $f: M \to M$ conserva este volumen ((1), pág 177).

DEFINICION. Sea (M,ω,X_H) sistema hamiltoniano. Diremos que es <u>integrable</u> si existen n integrables primeras diferenciables $F_1,\ldots,F_n$ sobre M, en involución, tales que $\sigma(F_1,\ldots,F_n) = \{ m \in M: dF_1(m),\ldots,dF_n(m)$ son linealmente dependientes$\}$, el conjunto de puntos críticos de $(F_1,\ldots,F_n)$, es unión finita de subvariedades de dimensión más pequeña que n en cada abierto acotado de M. (En particular, $\sigma(F_1,\ldots,F_n)$ tiene medida nula en M).

Por ejemplo, el sistema de ecuaciones (2.2.1), expresado en coordenadas acción-ángulo es un sistema integrable, siendo $I_1,\ldots,I_n$ n integrales primeras en involución, independientes en $T^n \times B^n$. En todo sistema integrable, bajo ciertas condiciones que se detallan a continuación, pueden introducirse estas coordenadas acción-ángulo:

TEOREMA DE ARNOLD-LIOUVILLE ((8),(10), (47))

Sean (M,ω,X_H) sistema hamiltoniano integrable, $F_1,\ldots,F_n$ integrales primeras en involución, m_o un punto regular de $(F_1,\ldots,F_n)$ $(m\notin\sigma(F_1,\ldots,F_n))$ (*), $N=\{m\in M: F_i(m)=F_i(m_o),\ i=1,\ldots,n\}$. Entonces:

a) Si N es compacta y conexa, es difeomorfa a un toro n-dimensional (**)

b) En las condiciones de a), existe un abierto $U\subset M$, con $N\subset U$, tal que (M,Ω,X_H) admite coordenadas acción-ángulo en U.

Como consecuencia, U está foliado por toros n-dimensionales $N(f_1,\ldots,f_r)$ invariantes por el flujo asociado a X_H, flujo que queda totalmente resuelto en las variables acción-ángulo (I,ϕ) sobre las cuales H toma la forma $H=H(I_1,\ldots,I_n)$, teniendo por ecuaciones asociadas las de (2.2.1). Luego en cada toro invariante, el movimiento es conjugado del movimiento lineal dado en T^n por las ecuaciones

$$\phi_i(t)=\phi_i^o+t\omega_i \pmod{2\pi}\ ,\quad t\in\mathbb{R},\ ,\quad i=1,\ldots,n\,, \tag{2.2.2}$$

con $\omega_i=\omega_i(I^o)=\frac{\partial H}{\partial I_i}(I^o)$ llamadas las <u>frecuencias</u> asociadas al toro de

---

(*) En los puntos críticos aparecen las <u>separatrices</u>, o <u>conjuntos de bifurcación</u>, llamados así porque separan regiones de distinto comportamiento cualitativo (véase (1), pág 339, (5)).

(**) Si N no es compacta, cada componente conexa es del tipo $\mathbb{R}^k\times T^{n-k}$ (véase (1), pág 393)).

ecuaciones $I = I^o$. El movimiento global en cada toro invariante dependerá de los valores de las frecuencias $\omega_1,\dots,\omega_n$. Llamando $d = d(\omega_1,\dots,\omega_n)$ a la dimensión del $\mathbb{Z}$-módulo $\{ \sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i,\ k_i \in \mathbb{Z} \}$; si $d = n$, decimos que las frecuencias $\omega_1,\dots,\omega_n$ son <u>inconmensurables</u>, y en este caso, toda órbita de (2.2.2) es densa en T^n (véase (9), pág 165); si $d = 1$, toda órbita es periódica, y $1 < d < n$, toda órbita es densa en un toro d-dimensional. Cuando las frecuencias son conmensurables <u>(o resonantes)</u>, es decir cuando existe $k \in \mathbb{Z}^n$ no nulo tal que $\sum_{i=1}^{n} k_i\,\omega_i = 0$, llamaremos <u>orden de la resonancia</u> $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_n)$ al menor número natural no nulo N tal que exista $k \in \mathbb{Z}^n$ cumpliendo $(k,\omega) = \sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i = 0$, $|k| = \sum_{i=1}^{n} |k_i| = N$ (así, $(k,\omega) = 0,\ k \neq 0 \Rightarrow |k| \geq N$). Diremos que ω es una resonancia <u>simple</u> si $d(\omega_1,\dots,\omega_n) = 1$, r-ple si $d(\omega_1,\dots,\omega_n) = r$. Veremos más adelante que esta distinción entre frecuencias conmensurables es importante.

Como ejemplos de sistemas integrables podemos citar los sistemas de un grado de libertad, el problema de 2 cuerpos, pequeñas oscilaciones, el retículo de Toda, el flujo geodésico sobre un elipsoide, el péndulo esférico, problema de dos centros fijos, los movimientos de Euler y Lagrange de un sólido rígido, el movimiento de un paraboloide bajo la acción de la gravedad, el problema de Henon-Heiles generalizado para algunos valores del parámetro, etc. (Véase,por ejemplo, (5) (10) (33) (82) (83) (84).. Para una discusión sobre sistemas integrables con una infinidad de grados de libertad, véase (48)). En estos sistemas se conocen n integrales primeras en involución que permiten resolverlos. Ahora bien, en general no se conoce ningún método sistemático para encontrar integrales primeras para un sistema dado, e incluso, los sistemas para los cuales éstas existen son no genéricos ((60),(47)(13)), con lo que no podemos esperar resolver completamente más que un número reducido de sistemas, y nos hemos de contentar con un estudio cualitativo de los sistemas no integrables. Un primer paso en este sentido lo constituye el estudio de sistemas casi integrables, es decir, próximos a integrables, siendo una perturbación de éstos, debido a que podemos aplicar teoría de perturbaciones y a que este tipo de sistemas es de una gran importancia en el mundo físico. El ejemplo más representativo de sistema casi-integrable es el sistema solar, perturbación del problema de dos cuerpos a la n, así como, por ejemplo, el movimiento de satélites artificiales, de partículas cargadas en aceleradores, etc.

CAPITULO 3

SISTEMAS CASI INTEGRABLES.

3.1. Sistemas promedio

Vimos en el capítulo anterior que en todo sistema integrable de 2n grado de libertad con subvariedades n-dimensionales invariantes compactas podían introducirse coordenadas acción-ángulo de manera que el hamiltoniano H dependía sólo de las variables llamadas de acción, $H = H(I_1,\dots,I_n)$ y no de las variables angulares $\phi_1,\dots,\phi_n$. Llamaremos sistema hamiltoniano casi integrable a todo sistema hamiltoniano generado por un hamiltoniano de la forma

$$H(\phi,I,\varepsilon) = H_o(I) + \varepsilon H_1(\phi,I,\varepsilon) \tag{3.1.1}$$

con H_1 2π-periódica en $\phi = (\phi_1,\dots,\phi_n)$. Las ecuaciones asociadas a (3.1.1) son

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \omega_i(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_i}(\phi,I,\varepsilon) \\ \dot{I}_i &= \qquad\quad - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}(\phi,I,\varepsilon) \end{aligned}\right\} ,i=1,..,n, \tag{3.1.2}$$

con $\omega_i(I) = \frac{\partial H_o}{\partial I_i}(I)$, $i=1,..,n$. Para $\varepsilon = 0$, $H=H_o$ y es por tanto integrable. Si ε es "pequeño", H está próximo a H_o y por eso el hamiltoniano H se llama casi integrable. Un método clásico para estudiar el sistema (3.1.2), es el método de los promedios, que pasamos a exponer a continuación.

Fijémosnos que para $\varepsilon=0$ sabemos resolver perfectamente (3.1.2) : $I=I^o$, $\phi = \phi^o + \omega(I^o)t$, con lo que I = cte. Estamos interesados ahora en saber si I(t) es aproximadamente constante, o en acotar $\|I(t) - I(0)\|$ en su caso, para $\varepsilon \neq 0$. Llamando F_i a $-\frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}$, $i=1,..,n$, $F = (F_1,..,F_n)$, y suponiendo que el grad H esté acotado

$I(t)=(I_1(t),\dots,I_n(t))$ cumple la ecuacion $\dot I=\varepsilon F(I,\phi,\varepsilon)$, con lo que

$$I(t)-I(0)=\varepsilon\int_0^t F(I(s),\phi(s),\varepsilon)\,ds=\varepsilon\int_0^t F(I^\circ,\phi^\circ+t\omega(I^\circ),0)\,ds+o(\varepsilon t)$$
$$=\varepsilon t\left[\frac{1}{t}\int_0^t F(I^\circ,\ \phi^\circ+t\omega(I^\circ),0)\ ds\right]+o(\varepsilon t)$$

donde tomamos un tiempo t grande con respecto a 1, pero pequeño respecto a $1/\varepsilon$. Asi,el termino entre corchetes se aproxima a

$$F^*(I^\circ,\phi^\circ)=\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\int_0^t F(I^\circ,\phi^\circ+t\omega(I^\circ),0)\,ds$$

lo que nos sugiere aproximar el sistema $\dot I=\varepsilon F(I,\phi,\varepsilon)$ por $\dot I=\varepsilon F^*(I,\phi)$. Llamaremos a F^* el promedio temporal de F, ya que calculamos el promedio de F a lo largo de una trayectoria no perturbada de (3.1.2). Como vimos en el capitulo anterior, si $\omega(I^\circ)$ es inconmensurable, toda trayectoria $\{\phi^\circ+t\omega(I^\circ),\ t\in\mathbb{R}\}$ es densa en T^n con lo que el promedio temporal de F es independiente de ϕ° e igual $\bar F(I^\circ)=1/(2\pi)^n\cdot\int_{T^n}F(I^\circ,\phi)\,d\phi$, la media espacial de F (véase (11), pág 144). Así, aproximaremos el sistema $\dot I=\varepsilon F(I,\phi,\varepsilon)$ por $\dot I=\varepsilon\bar F(I)$ y compararemos la diferencia entre las órbitas de movimiento respectivas. Como el caracter hamiltoniano de (3.1.2) no se ha usado en todo este razonamiento, consideramos sistemas más generales del tipo

$$\dot I=\varepsilon F(I,\phi,\varepsilon)\ ,\quad \dot\phi=\omega(I,\varepsilon)+\varepsilon f(I,\phi,\varepsilon)\tag{3.1.3}$$

con $I=(I_1,\dots,I_m)$, $\phi=(\phi_1,\dots,\phi_n)$; F,ω,f de clase C^s, $s\geq1$, para $I\in B$, $\phi\in\mathbb{R}^n$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ donde B es un abierto acotado de $\mathbb{R}^m$.

Supondremos ademas que F,f son 2π-periodicas en $\phi_1,\dots,\phi_n$ con lo que también podremos considerar el sistema (3.1.3) definido para $\phi\in T^n$, el toro n-dimensional. Las variables angulares ϕ_i , i=1,...,n, son variables rápidas (al menos si $\omega(I,\varepsilon)\neq0$), en contraste con las variables I_j, j=1,...,m, que son <u>variables lentas</u> debido a que la velocidad de estas es de orden ε .

DEFINICION Llamaremos SISTEMA PROMEDIO asociado al sistema (3.1.3) a

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{F}(J) \tag{3.1.4}$$

donde $\bar{F}(J) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} F(J,\phi,0)\,d\phi$, $J \in B$.

Queremos ver hasta qué punto es el sistema (3.1.4) una buena aproximación al sistema (3.1.3). Para ello, compararemos las soluciones $I(t) = I(t,I^\circ,\phi^\circ,\varepsilon)$ del sistema (3.1.3) con las soluciones $J(t) = J(t,J^\circ,\varepsilon)$ de (3.1.4) siempre que $I(0) = J(0)$. Nuestro objetivo es ver bajo qué condiciones las soluciones de los dos sistemas están próximas para tiempos grandes. Como a priori tenemos una relación del tipo $\|I(t)-J(t)\| = O(\varepsilon t)$, queremos obtener unas acotaciones mejores, del tipo

$$\|I(t) - J(t)\| \ll 1, \quad \text{si } |t| \leq \varepsilon^{-1} \ , \ I(0) = J(0). \tag{3.1.5}$$

Para n=1, es decir, si sólo hay una variable angular, esto es cierto:

TEOREMA ((18), pág. 417, (10), pág. 292). Si $n=1$, F,ω,f son de clase C^2 y $\omega(I,0) \neq 0$ para $I \in B$, entonces existen constantes positivas C,ε_1 tales que para cada ε con $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, se cumple

$$\|I(t) - J(t)\| \leq C\varepsilon \quad \text{si } |t| \leq \varepsilon^{-1}, \quad I(0) = J(0). \tag{3.1.6}$$

Sin embargo, para $n \geq 2$, no podemos, en general obtener una acotación como (3.1.6), debido al paso por resonancias; si $\omega(I(t),0)$ es commensurable no es cierto que la media temporal y la media espacial de F coincidan con lo que los razonamientos utilizados para encontrar (3.1.4) ya no son validos. Veamos un ejemplo.

EJEMPLO . Consideremos el sistema (7):

$$\dot{I}_1 = \varepsilon, \ \dot{I}_2 = \varepsilon\cos(\phi_1-\phi_2), \quad \dot{\phi}_1 = I_1, \ \dot{\phi}_2 = I_2 \ ; \tag{3.1.7}$$

el sistema promedio asociado es

$$\dot{J}_1 = \varepsilon, \quad \dot{J}_2 = 0 \ .$$

Si $I_1(0) = I_2(0) = J_1(0) = J_2(0) = 1$, $\phi_1(0) = \phi_2(0) = 0$, entonces $I_1(t) = I_2(t) = 1 + \varepsilon t = J_1(t)$, $J_2(t) = 1$. Con lo que $\| I(t) - J(t)\| = \varepsilon|t|$. Asi, para $|t| \leq \varepsilon^{-1}$, $\|I(t)-J(t)\| = 1$, en desacuerdo con (3.1.5). Para explicar este fenómeno se ha tener en cuenta el paso por resonancias: como $\omega(I_1,I_2) = (I_1,I_2)$, se cumple que $\omega_1(I(t))-\omega_2(I(t)) \equiv 0$, es decir, $\omega(I(t))$ es conmensurable para cualquier tiempo.

3.2. Resonancias

Para cualquier ε cumpliendo $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ tenemos definida en (3.1.3) una aplicacion $I\in B\subset\mathbb{R}^m \mapsto \omega(I) = \omega(I,\varepsilon)\in\Omega = \omega(B)\subset\mathbb{R}^n$. Podemos, sin perdida de generalidad, suponer que ω esta acotada sobre B, con lo que Ω es un acotado de $\mathbb{R}^n$

DEFINICION Dado $k\in\mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$, la <u>variedad resonante asociada a k</u> es $Vr(k) = \{I\in B : (k,\omega(I)) = 0\}$ donde $(k,\omega) = \sum_{i=1}^{n} k_i\omega_i$. Diremos que $I\in B$ esta en una <u>resonancia</u> si $I\in Vr(k)$ para algun $k\in\mathbb{Z}^n$, $k\neq 0$.

La variedad resonante es, en general, una hipersuperficie en B. Cuando una solucion $t\mapsto (I(t),\phi(t))$ de (3.1.3) encuentra una variedad resonante $Vr(k)$ y permanece en ella, es decir, $(k,\omega(I(s))) = 0$, $s\in[0,t]$, entonces la frecuencia $\omega=\omega(I(0))$ permanece conmensurable durante el intervalo de tiempo $[0,t]$ y no podemos esperar que $t^{-1}\int_0^t F(I(s),\phi(s),\varepsilon)ds =$

$t^{-1}\int_0^t F(I(0),\phi(0) + t\omega,0)ds + O(\varepsilon t)$ este proximo a $\bar{F}(I^0)$ con lo que el sistema (3.1.4) no aproxima bien a (3.1.3), tal como se vio en un ejemplo del apartado anterior. Así, tenemos que imponer alguna condición sobre el sistema para que no permanezca en resonancias.

DEFINICION (69) . Diremos que el sistema (3.1.3) satisface la condición geométrica, si para cualquier $I \in B$, $\omega(I) \neq 0$; y si existen constantes positivas C_1, C_2 y constantes reales $1 \geq a \geq b$ tales que para cualquier $k \in Z^n$, $k \neq 0$ y cualquier $I \in B, \phi \in T^n, |\varepsilon| < \varepsilon_o$ se cumpla

$$|(k,\omega(I))| < C_2^{-1}|k|^a \Longrightarrow |(k,D\omega(I)F(I,\phi,\varepsilon))| > C_1^{-1}|k|^b \qquad (3.2.1)$$

Notemos que en un sistema que satisfaga la condición geometrica, si $(I(t),\phi(t))$ es una solución que se aproxima a una resonancia de ecuación $(k,\omega)=0$, su velocidad transversal a esta variedad resonante le hará atravesar esta resonancia, ya que la condición (3.2.1) nos dice:

$$\frac{|(k,\omega(I(t))|}{|k|} < C_2^{-1}|k|^{a-1} \Longrightarrow \frac{|(k,(d/dt)\omega(I(t))|}{|k|} > \varepsilon\, C_1^{-1}|k|^{b-1}$$

Si n=2 una condición suficiente para que se cumpla la condicion geométrica es la llamada "condicion A" (7): $A(I,\phi,\varepsilon)= \omega(I,\varepsilon)^T JD\omega(I)\ F(I,\phi,\varepsilon) \neq 0$ para $I \in B, \phi \in T^n, |\varepsilon| < \varepsilon_o$.

Para sistemas (3.1.3), analíticos, con n=2 y satisfaciendo esta condicion se cumple la acotacion (7);

$$\|I(t) - J(t)\| < C\ \sqrt{\varepsilon}\ln^2(1/\varepsilon)\ ,\quad t \in [0,(1/\varepsilon)],\ \text{si } I(0) = J(0) \qquad (3.2.2)$$

Para sistemas (3.1.3) con $n \geq 3$ no hay una "condicion A" que garantice la condición geométrica, por lo que resultará preciso imponer ésta.

3.3. Estimaciones de la velocidad de difusión

En el caso en que el sistema (3.1.3) sea hamiltoniano, es decir, tengamos el sistema (3.1.2), entonces el sistema promedio asociado es $\dot{J} = 0$, ya que

$$\bar{F}_i(I) = (2\pi)^{-n} \int_{T^n} F_i(I,\phi,0)\, d\phi = -\varepsilon(2\pi)^{-n}\int_{T^n} \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}(\phi,I,0)\,d\phi = 0 \qquad i=1,\dots,n,$$

al ser H_1 2π-periódica en ϕ. Así $J_1(t) = J_1(0)$ y de (3.1.5), (3.1.6), (3.2.2), obtenemos acotaciones para $\|I(t)-I(0)\|$. Para $\varepsilon= 0$, $I(t) = I(0)$, con lo que $\|I(t)-I(0)\|$ nos mide la separación de las soluciones del sistema casi hamiltoniano (3. .2), para $\varepsilon \neq 0$ con respecto a los toros invariantes donde estaban obligados a moverse para $\varepsilon= 0$, el caso integrable. Es por esto que estamos interesados en establecer unas acotaciones como (3.2.2), tanto para sistemascon $n\geq 3$, como para un tiempo mayor, hamiltonianos o no.

TEOREMA (71)(25) Si el sistema (3.1.3) con F, f, ω analíticas, satisface la condición geométrica, entonces existen constantes positivas C_3, C_4, ε_1, tales que para cada $\varepsilon \in (-\varepsilon_1, \varepsilon_1)$ se cumpla

$$\|I(t) - J(t)\| < C_3\varepsilon^{(3/2)-r} \exp\,(C_4\varepsilon^{1-r}),\ \text{si}\ |t|<\varepsilon^{-r},$$
$$I(0) = J(0). \tag{3.3.1}$$

Con el fin de demostrar este teorema, introduzcamos primero un poco de notación.

Fijada ω: $B\subset \mathbb{R}^m \to \Omega = \omega(B)\subset \mathbb{R}^n$, dado $k\in \mathbb{Z}^n$, $k\neq 0$, recordemos que

$$Vr(k) = \{I\in B\ :\ (k,\omega(I)) = 0\}.$$

Nótese que si $k'\in \mathbb{Z}^n$ es tal que $k'=\lambda k$ entonces $Vr(k') = Vr(k)$. Definamos además los conjuntos

$$R(\nu,k) = \{I\in B: \ |(k,\omega(I))|<\nu|k|^{a}\},$$

$$R(\nu,N) = \bigcup_{0<|k|<N} Z(\nu,k) \quad , \quad N>0\,,$$

$$B(\nu,k) = \{I\in B \ ; \ |(k,\omega(I))|\geqslant\nu|k|^{a}\} = B\setminus R(\nu,k),$$

$$B(\nu,N) = \bigcap_{0<|k|<N} B(\nu,k) \ , \ N>0,$$

$$H(k\ ) = \{\omega\in\Omega: \ (k,\omega) = 0\}\big(Vr(k) = \omega^{-1}(H(k))\big).$$

Al ser B acotado, podemos suponer que ω, junto con sus derivadas, está acotada en B, con lo que Ω es un acotado de $\mathbb{R}^n$. Sea $M = \sup\{\|D\omega(I)\| \ , \ I\in B\}$. Es inmediato comprobar que

$$Dist(I,Vr(k))<\rho \Longrightarrow dist(\omega(I),H(k))<M\rho$$

de donde

$$Dist\ (I,Vr(k))<\frac{\nu|k|^{a-1}}{M} \Rightarrow I\in R(\nu,k) \tag{3.3.2}$$

Para $n\geqslant 3$, las resonancias múltiples aparecen. Dados $k^1,\ldots,k^r$ vectores linealmente independientes de $\mathbb{Z}^n$, definimos los conjuntos

$$Vr(k^1,\ldots,k^r) = \bigcap_{i=1}^{r} Vr(k^i) \quad \text{(Variedad resonante r-ple generada por } k^1,\ldots,k^r),$$

$$H(k^1,\ldots,k^r) = \bigcap_{i=1}^{r} H(k^i) \quad \big(Vr(k^1,\ldots,k^r) = \omega^{-1}(H(k^1,\ldots,k^r))\big),$$

$$R(\nu,k^1,\ldots,k^r) = \bigcap_{i=1}^{r} Z(\nu,k^i) = \{I\in B: |(k^i,\omega(I))|< \nu|k^i|^{a}, i=1,\ldots,r\}$$

Claramente $Vr(k^1,\ldots,k^{r-1})\supset Vr(k^1,\ldots,k^r)$, y si $<k^1,\ldots,k^r> = <m^1,\ldots,m^r>$, entonces $Vr(k^1,\ldots,k^r) = Vr(m^1,\ldots,m^r)$. $Vr(k^1,\ldots,k^n)$ es vacío si $k^1,\ldots,k^n$ son independientes ya que por la condición geométrica (3.2.1), $\omega(I)\neq 0$, si $I\in B$.

En lo que sigue, cualquier constante C_i que aparezca es una constante positiva, "suficientemente grande", dependiendo del sistema (3.1.3), en lo referente a ω,F,f pero independiente de ν,k,ε,N.

Si denotamos por $A+\nu=\{x: \text{dist }(x,A)<\nu\}$, entonces $Vr(k^1,\ldots,k^r)+$ $+\nu M^{-1}(\max|k^i|)^{a-1}\subset R(\nu,k^1,\ldots,k^r)$, usando (3.3.2) y el hecho de que $a\leqslant 1$.
Para la demostracion del teorema, necesitamos algunos lemas :

LEMA 1 Existe una constante positiva C_6 tal que para $k^1,\ldots,k^n$ vectores linealmente independientes,

$$\text{dist }(Vr(k^1,\ldots,k^{n-1}),\ Vr(k^n))\geqslant C_6^{-1}/(|k^1|\ \ldots\ |k^n|)$$

LEMA 2 sea $d>0$ fijo, sea $r_{\nu N}=\{t\in[0,d]: I(t)\in R(\nu,N)\}$, con $(I(t),\phi(t))$ una solución del sistema (3.1.3). Entonces existen constantes positivas C_7,C_8,C_9, tales que para cualquier ν cumpliendo $0<\nu<C_9^{-1}$, para cualquier $N>0$, y para $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, entonces

a) $r_{\nu N}$ consta de no mas de $C_7N^m\varepsilon d$ segmentos

b) La longitud de cada intervalo de $r_{\nu N}$ es menor o igual que $C_8N^{a-b}\nu\varepsilon^{-1}$

LEMA 3 Sea $[\alpha,\beta]$ uno de los intervalos que forman $b_{\nu N}=[0,d]\setminus r_{\nu N}$. Existe una constante C_{10} positiva tal que si $0<\nu<C_9^{-1}$, y para cualquier $N>0$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$ se cumple la propiedad siguiente:

Si $t\in[\alpha+x,\beta-x]$, entonces $I(t)\in B(\nu(x),N)$, con $\nu(x)=\nu+C_{10}^{-1}N^{b-a}\varepsilon x$

LEMA 4 Sea $J(J^\circ,t^\circ,t)$ la solucion del sistema promedio (3.1.4) con $J(t^\circ)=J^\circ$. Existen constantes positivas C_{11},C_{12} tales que para $J^\circ,\bar{J}^\circ\in B$ $t^\circ\in\mathbb{R}$ se cumple

$$\|J(J^\circ,t^\circ,t)-J(\bar{J}^\circ,t^\circ,t)\|\leqslant C_{11}e^{C_{12}\varepsilon(t-t^\circ)}\|J^\circ-\bar{J}^\circ\|$$

siempre que $J(J^\circ,t^\circ,t),\ J(\bar{J}^\circ,t^\circ,t)\in B$

LEMA 5 Sea $\|\dot{x}\|\leqslant A\|x\|+B(t)$, $\|x(0)\|\leqslant C$, $A,B,C,\geqslant 0$ $x\in\mathbb{R}^m$. Entonces

$$\|x(t)\|\leqslant\left[C+\int_0^t B(s)\,e^{-As}\,ds\right]e^{At}$$

LEMA 6 Existe una función $P = I + S(I,\phi)$. analitica, 2π-periódica en ϕ, y existen constantes $C_{13}, C_{14}, C_{15}, C_{16}$, positivas, tales que para cualquier $\nu>0$, $|\varepsilon| \leq \{C_{16}^{-1}\nu^2, \varepsilon_0\}$, $N = C_{15}\log(\nu^2/\varepsilon)$ se cumpla

$$\|\dot{P} - \varepsilon\bar{F}(P)\| < C_{13}(\varepsilon^2/\nu^2) \quad ; \quad \|P - I\| < C_{14}(\varepsilon/\nu) \quad \text{para } I \in B(\nu,N)$$

DEMOSTRACION DE LOS LEMAS

LEMA 1 Veamos primero que $\mathrm{dist}\,(H(k^1,..,k^{n-1}),\ H(k^n)) \geq (\rho_1/(|k^1|...|k^n|)$ para una cierta constante positiva ρ_1, independiente de $k^1,..,k^n$. Como $\omega(I) \neq 0$, $I \in B$, con B acotado, podemos suponer que $\Omega = \omega(B)$ está acotado superior en inferiormente por cotas positivas. Así $\omega(B)$ está contenido en $B\rho_2(0) \setminus B\rho_1(0)$, con $B\rho(0) = \{\omega:\ \|\omega\|_2 \leq \rho\}$. Por tanto $\mathrm{dist}(H(k^1,...,k^{n-1}), H(k^m)) \geq$ $\geq \mathrm{dist}\,(\bar{H}(k^1,..,k^{n-1}) \cap S_{\rho_1}(0),\ H(k^n))$, con $S_{\rho_1}(0) = \{\omega: \|\omega\|_2 = \rho_1\}$,

$\bar{H}(k^1,..,k^n) = \{\omega \in \mathbb{R}^n :\ (k^i,\omega) = 0,\ i=1,...,n\}$.

Si $\omega \in \bar{H}(k^1,...,k^{n-1}) \cap S_{\rho_1}(0)$, $\|\omega\|_2 = \rho_1$ y $(\omega,k^i) = 0$, $i=1,..,n-1$, con

lo que $\omega = \lambda \dfrac{k^1 \wedge ... \wedge k^{n-1}}{\|k^1 \wedge ... \wedge k^{n-1}\|_2}$ con $|\lambda| = \rho_1$. Así $\mathrm{dist}\,(\omega, H(k^n)) = \dfrac{|(\omega,k^n)|}{\|k^n\|_2} =$

$$= |\lambda| \frac{|(k^1 \wedge ... \wedge k^{n-1},\ k^n)|}{\|k^n\|_2\ \|k^1 \wedge ... \wedge k^{n-1}\|_2} \geq (\rho_1/(|k^1|,...,|k^s|).\ (|k^i| = \|k^i\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |k_j^i|)$$

Si ahora $C_6 \geq (M/\rho_1)$, es inmediato comprobar que $\mathrm{dist}\,(Vr(k^1,...,k^{n-1}),\ Vr(k^n)) \geq (C_6^{-1}/(|k^1|,..,|k^n|))$

LEMA 2

a) Es consecuencia del Lema 1, ya que

$$\text{número de resonancias} \leq \frac{\text{distancia recorrida por } I(t)}{\text{distancia estre resonancias}} \leq \frac{\varepsilon C_{12}\, d}{C_6^{-1}/N^n} = C_7 N^n \varepsilon d,$$

con $C_7 = C_{12}\, C_6$, $C_{12} = \sup \|F\|$

b) si $I(t) \in r_{\nu N}$, $|(k,\omega(I(t)))| < \nu |k|^a$ para $0<|k|<N$. Si $\nu < C_2^{-1}$, por la condición geometrica (3.2.1), $|(k,\dot{\omega}(I(t)))| > \varepsilon C_1^{-1} |k|^b$, con lo que $I(t)$ "atraviesa" la resonancia $(k,\omega) = 0$. Sea $t°$ tal que $(k,\omega(I(t°))) = 0$. Entonces $(k,\omega(I(t)) = (k,\dot{\omega}(I(s)))(t-t°)$ con $t°<s<t$ (suponiendo $t > t°$). De aquí,

$$|t-t°| \leq \frac{\nu |k|^a}{\varepsilon C_1^{-1} |k|^b} = \frac{C_1 \nu}{\varepsilon} |k|^{a-b} \leq \frac{C_1 \nu}{\varepsilon} N^{a-b} \qquad (a \geq b)$$

luego $I(t) \in R(\nu,N) \Rightarrow t \in (t^L, t^R)$ con $|t^R - t^L| < C_8 N^{a-b} \cdot \nu \varepsilon^{-1}$, si $\nu < C_2^{-1} = C_9^{-1}$, con $C_8 = 2C_1$

LEMA 3 Sea $[\alpha,\beta] \subset b_{\nu N}$, con $\nu < C_9^{-1} = C_2^{-1}$. Entonces si $t \in [\alpha + x, (\alpha+\beta)/2]$, $|(k,\omega(I(t)))| \geq (\nu + \varepsilon C_2^{-1} |k|^{b-a} x) |k|^a \geq (\nu + \varepsilon C_2^{-1} N^{b-a} x) |k|^a$.

Si $t \in [(\alpha+\beta)/2, \beta - x]$, solo hay que cambiar α por β.

LEMAS 4,5 son consecuancia del lema de Gronwall (vease(19)).

LEMA 6 Sea $\tilde{F}(I,\phi) = F(I,\phi) - \bar{F}(I) = \sum_{0<|k|<N} F_k(I)\, e^{i(k,\phi)}$, para $I \in B$, $|\mathrm{Im}\phi| < \rho$ (como F es analítica y periodica en ϕ, existe $\rho > 0$ tal que F es analítica para $|\mathrm{Im}\phi| < \rho$). Sean $[F]_N (I,\phi) = \sum_{0<|k|<N} F_k(I)\, e^{i(k,\phi)}$,

$S(I,\phi) = \sum_{0<|k|<N} S_k(I)\, e^{i(k,\phi)}$, donde $S_k(I) = i\varepsilon F_k(I)/(k,\omega(I))$. Entonces

$$\dot{P} = \varepsilon \bar{F}(P) + \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3 + \Sigma_4 + \Sigma_5, \text{ con}$$

$\Sigma_1 = [\varepsilon \tilde{F}]_N + (\frac{\partial S}{\partial \phi}, \omega) \equiv 0$, $\Sigma_2 = \varepsilon(\bar{F}(I) - \bar{F}(P))$, $\Sigma_3 = \varepsilon(\tilde{F} - [\tilde{F}]_N)$, $\Sigma_4 = (\frac{\partial S}{\partial I}, \varepsilon F)$

$\Sigma_5 = (\frac{\partial S}{\partial \phi}, \varepsilon f)$ y por tanto $\|\dot{P} - \varepsilon \bar{F}(P)\| \leq \sum_{i=2}^{5} \|\Sigma_i\|$

Si $I \in B(\nu/10,N)$, $|\mathrm{Im}\phi| < 0.9\rho$, usando la condición geométrica, se obtiene $\|S(I,\phi)\| < C_{14}(\varepsilon/\nu)$, $\|\frac{\partial S}{\partial \phi}(I,\phi)\| < C_{14}(\varepsilon/\nu)$, $\|\frac{\partial S}{\partial I}(I,\phi)\| < C_{14}(\varepsilon/\nu^2)$,

(C_{14} así como las otras constantes C_i que aparecerán dependen de F,f). De estas desigualdades se deduce que si $I\in B(\nu,N)\subset B(\nu/10,N)$, $\|I-P\| = \|S\| < C_{14}(\varepsilon/\nu)$ $\leqslant C_{14}C_{16}^{-1}\nu \leqslant 0.9\,\nu$, si $C_{16} \geqslant C_{14}/0.9$, y además el segmento $\overline{IP}$ está contenido en $B(\nu/10,N)$, con lo que $|\Sigma_2| \leqslant C_{17}(\varepsilon^2/\nu)$, $|\Sigma_4| \leqslant C_{18}(\varepsilon^2/\nu^2)$, $|\Sigma_5| \leqslant C_{19}(\varepsilon^2/\nu)$, y $|\Sigma_3| < 16\,\varepsilon(\sup\|F\|)\,2^n\,N^{n-1}\,e^{-N\rho/4}/\rho(1-e^{-\rho/4}) \leqslant C_{20}(\varepsilon^2/\nu^2)$, si $N = C_{15}\log(\nu^2/\varepsilon)$, para $C_{15} = C_{15}(\rho)$ suf.grande, $I\in B(\nu,N)$, $|\mathrm{Im}\,\phi| < (\rho/2)$. Por fin si $I\in B(\nu,N)$, $\phi\in T^n$, obtenemos $\|\dot{P} - F(P)\| < C_{13}(\varepsilon^2/\nu^2)$, con $C_{13} = C_{17}+C_{18}+C_{19}+C_{20}$, que es lo que queríamos probar.

DEMOSTRACION DEL TEOREMA Sea $0<\varepsilon_1<C_{16}^{-1}C_9^{-2}$, $|\varepsilon|\leqslant\varepsilon_1$, $\nu = \sqrt{C_{16}\varepsilon} < C_9^{-1}$. Aplicando el lema 6, obtenemos $N= C_{15}\log C_{16}$, $P= I + S(I,\phi)$, $B(\nu,N)$. Denotaremos a los intervalos consecutivos que forman $b_{\nu N}$ mediante $[t_i^L, t_i^R]$, $i=1,..,q$, con $q < C_7N^n\varepsilon^{1-r}$ segmentos ($d=\varepsilon^{-r}$). Podemos tomar, por ejemplo, $t_1^L = 0\in b_{\nu N}$, y $\varepsilon^{-r}\in r_{\nu N}$. Sean $I_i^\alpha = I(t_i^\alpha)$, $\alpha = L,R$, y sean $J_i(t) = J(I_i^L,t_i^L,t)$, $P(t)= P(I(t),\phi(t))$

Usando el lema 4 para $t = t_{j+1}^L$, obtenemos

$$\|I(t) - J(t)\| = \|J_{j+1}(t) - J_1(t)\| < \sum_{i=1}^{j}\|J_{i+1}(t)-J_i(t)\| = \sum_{i=1}^{j}\|J(I_{i+1}^L,t_{i+1}^L,t)-$$

$$- J(I_i^L,t_i^L,t)\| \leqslant C_{11}\sum_{i=1}^{j} e^{C_{12}\varepsilon(t - t_{i+1}^L)}\,\|J_{i+1}(t_{i+1}^L) - J_i(t_{i+1}^L)\| =$$

$$= C_{11}\sum_{i=1}^{j} e^{C_{12}\varepsilon(t - t_{i+1}^L)}\,\|I_{i+1}^L - J_i(t_{i+1}^L)\| \leqslant$$

$$\leqslant C_{11}\sum_{i=1}^{j} e^{C_{12}\varepsilon(t-t^L_{i+1})}\{\|I^L_{i+1}-I^R_i\| + \|I^R_i - J_i(t^R_i)\| + \|J_i(t^R_i) - J_i(t^L_{i+1})\|\}$$

Acotaremos los términos del sumatorio. Como $(t^R_i, t^L_{i+1}) \subset r_{\nu N}$, entonces, por el lema 2, parte b), $|t^L_{i+1} - t^R_i| < C_8 N^{a-b}\nu\varepsilon^{-1}$, con lo que

$\|I^L_{i+1} - I^R_i\| = \|I(t^L_{i+1}) - I(t^R_i)\| \leqslant \varepsilon M |t^L_{i+1} - t^R_i| \leqslant (C_{17}/2)\, N^{a-b}\nu$,

$\|J_i(t^R_i) - J_i(t^L_{i+1})\| \leqslant \varepsilon M |t^R_i - t^L_{i+1}| \leqslant (C_{17}/2)\, N^{a-b}\nu$, con $C_{17}=2MC_8$; y por tanto $\|I^L_{i+1} - I^R_i\| + \|J_i(t^R_i) - J_i(t^L_{i+1})\| \leqslant C_{17}N^{a-b}\nu$

Solo tenemos que acotar $\|I^R_i - J_i(t^R_i)\| \leqslant \|I^R_i - P(t^R_i)\| + \|P(t^R_i) - J_i(t^R_i)\|$

Por el lema 6, $\|I^R_i - P(t^R_i)\| = \|I(t^R_i) - P(t^R_i)\| < C_{14}\cdot \varepsilon/\nu$. Para acotar $\|P(t^R_i) - J_i(t^R_i)\|$, será preciso efectuar algunos cálculos. Como

$\|\dot P - \dot J_i\| \leqslant \|\dot P - \varepsilon \bar F(P)\| + \varepsilon\|\bar F(P) - \bar F(J_i)\|$ entonces

$\|\dot P - \dot J_i\| \leqslant a\|P - J_i\| + b$, con $a = C_{12}\varepsilon$, $b = \|\dot P - \varepsilon\bar F(P)\|$

Por el lema 3, sabemos que si $t\in[t^L_i + x,\ t^R_i - x]$, entonces $I(t)\in B(\nu(x),N)$, con $\nu(x) = \nu + C_{10}^{-1}N^{b-a}\varepsilon x$, de donde

$$\int_{t^L_i}^{t^R_i} b(t)\,dt \leqslant 2\int_{t^L_i}^{((t^L_i+t^R_i)/2)} \frac{C_{13}\,\varepsilon^2\,dt}{\left[\nu + C_{10}^{-1}N^{b-a}\,\varepsilon(t-t^L_i)\right]^2} \leqslant 2C_{13}C_{10}N^{a-b}(\varepsilon/\nu) = C_{18}(\varepsilon/\nu)N^{a}$$

Aplicando ahora el lema 5 resulta

$$\|P(t^R_i) - J_i(t^R_i)\| \leqslant \left[\|P(t^L_i) - J_i(t^L_i)\| + \int_{t^L_i}^{t^R_i} b(t)\,dt\right]\cdot e^{C_{12}\varepsilon(t^R_i - t^L_i)} \leqslant$$

$$\leqslant (C_{14} + C_{18}N^{a-b})\ (\varepsilon/\nu)\ e^{C_{12}\varepsilon(t^R_i - t^L_i)}$$

Teniendo en cuenta todas estas desigualdades, junto con el lema 2) parte a), se obtiene

$$\|I(t) - J(t)\| \leqslant C_{11} e^{C_{12}\varepsilon^{1-r}} \; C_7 N_n^n \, \varepsilon^{1-r} \left[(C_{17} N^{a-b} \nu + C_{14}(\varepsilon/\nu) + (C_{14} + C_{18} N^{a-b})(\varepsilon/\nu) e^{C_{12}\varepsilon^{1-r}} \right]$$

$$\leqslant C_3 \varepsilon^{(3/2)-r} \exp\, (C_4 \varepsilon^{1-r}), \qquad t \in [0, \varepsilon^{-r}],$$

donde hemos usado que $N = C_{15} \log C_{16}$, $\nu = \sqrt{C_{16}\varepsilon}$ c.q.d.

NOTAS

NOTA 1 Para $0 < r \leqslant 1$, la desigualdad (3.3.1) se transforma en

$$\|I(t) - J(t)\| \leqslant C_3 \varepsilon^{(3/2)-r}, \quad \text{si } |t| \leqslant \varepsilon^{-r}, \; I(0) = J(0) \qquad (3.3.3)$$

con lo que $\|I(t) - J(t)\| \ll 1$ si $|t| \leqslant \varepsilon^{-r}$. Obtenemos una acotación del tipo de (3.1.5), que generaliza las estimaciones previas de Arnold(6), Neishtadt(58), válidas sólo para $n=2$, $r=1$, donde se imponía la condicion A, que implica a la condición geométrica, con $a=b=1$.

NOTA 2

El peor término que aparece en (3.3.1), $\exp\,(C_4\varepsilon^{1-r})$, no puede ser, en general, rebajado de la acotación ya que en el sistema promedio se cumple

$$\|J_1(t) - J_2(t)\| \sim \|J_1(0) - J_2(0)\| \exp\,(C_4\varepsilon^{1-r}),$$

con lo que a menos que el sistema promedio sea $\dot{J} = 0$, este término exponencial aparecerá.

NOTA 3

Para sistemas hamiltonianos, por ejemplo el sistema (3.1.2), el sistema promedio asociado es $\dot{J} = 0$, debido a que $F_i = \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}$ tiene promedio nulo con res pecto a ϕ . En tal caso, la condición geométrica no se cumple, y no puede aplicarse el teorema, pero sí algunas acotaciones debidas a Nekhroshev. Por ejemplo, si el hamiltoniano H_o del sistema (3.1.2) es convexo, entonces

$$t \leqslant (1/\varepsilon)\ \exp\ (1/\varepsilon^{a}) \Longrightarrow \|I(t) - I(0)\| \leqslant \varepsilon^{b} \qquad (3.3.4)$$

con $a = 2((6n^2 - 3n + 14)$, $b = 3a/2$. Unas acotaciones del tipo de (3.3.4) son también ciertas para hamiltonianos H_o más generales, llamados por Nekhoroshev "escarpados" (vease (59)).

3.4. Conservación de toros invariantes (teorema KAM)

Volvamos de nuevo a los sistemas hamiltonianos casi integrables, dados por un hamiltoniano del tipo

$$H(\phi,I,\varepsilon) = H_o(I) + \varepsilon H_1(\phi,I,\varepsilon), \tag{3.4.1}$$

con H_1 2π-periódica en $\phi = (\phi_1,..,\phi_n)$, de ecuaciones asociadas

$$\left.\begin{aligned} \dot{\phi}_i &= \omega_i(I) + \varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial I_i}(\phi,I,\varepsilon) \\ \dot{I}_i &= -\varepsilon\frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}(\phi,I,\varepsilon) \end{aligned}\right\} ,i=1,..,n, \tag{3.4.2}$$

con $\omega_i(I) = \frac{\partial H_o}{\partial I_i}(I)$, $i=1,..,n$. Supondremos que H está definido para $I\in U$ abierto de $\mathbb{R}^n$, $|\varepsilon|<\varepsilon_o$, $\phi\in\mathbb{R}^n$. Debido a la periodicidad de H en ϕ, podemos considerar, de manera natural, a H y al sistema (3.4.2) definidos para $\phi\in T^n$.

Si $\varepsilon = 0$, las variables de acción I_i permanecen constantes, con lo que el espacio de fases de (3.4.2) está foliado por toros n-dimensionales. Si $\varepsilon \neq 0$, pequeño, vimos en el apartado anterior que estas variables de acción varían muy lentamente, lo cual nos conduce a la pregunta: ¿ Puede ocurrir que en el sistema (3.4.2) los toros invariantes que existían para $\varepsilon = 0$, se conserven, aún deformandose ligeramente, para $\varepsilon\neq 0$ suficientemen-temente pequeño ? La respuesta es que " casi todos " se conservan, como a continuación explicaremos.

La posible conservación de un toro invariante del hamiltoniano integrable H_o dependerá de las frecuencias asociadas. Ya desde Poincaré se sabía que todos los toros invariantes con órbitas periódicas generalmente desaparecían bajo perturbaciones. Estos toros son los que tienen frecuencias asociadas racionales (Véase ecuaciones (2.2.2)) y forman por tanto un conjunto denso de toros invariantes que no se conservan. No fue hasta los trabajos de Kolmogorov(44),Arnold(3)y Moser (55)que se vio que las frecuencias $\omega_1,\ldots,\omega_n$ de los toros que se conservan no sólo no habían de ser racionales sino que tenían que ser "suficientemente irracionales", en el sentido de que tenían que cumplir las desigualdades (de Siegel).

$$|(k,\omega)|\geq \nu|k|^{-\tau} \quad \text{para cualquier } k\in\mathbb{Z}^n,\ k\neq 0, \tag{3.4.3}$$

siendo ν,τ constantes positivas. Para $\tau>n-1$ fijo, el conjunto de puntos $\omega\in\mathbb{R}^n$ cumpliendo (3.4.3) para algún $\nu>0$ es de medida total (véase (43)). Si H_o es no degenerada, es decir, $\det(D^2H_o(I))\neq 0$, podemos parametrizar los toros invariantes del hamiltoniano integrable H_o por medio de las frecuencias, con lo que realmente "casi todos" los toros invariantes de (3.4.2) para $\varepsilon=0$ se conservan para $\varepsilon\neq 0$ suficientemente pequeño, dependiendo de las frecuencias de dichos toros. Este es el teorema KAM (Kolmogorov-Arnold-Moser) que pasamos a detallar.

Llamando $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ a la imagen de U por $\omega=\operatorname{grad}H_o$ $(\Omega=\omega(U))$, y dado $\nu>0$, llamamos $\Omega(\nu)=\{\omega\in\Omega:\ \omega$ cumple (3.4.3) y $\operatorname{dist}(\omega,\mathbb{R}^n\setminus\Omega)>\nu\}$, que es conjunto de Cantor. Nótese que $\Omega=\bigcup_{\nu>0}\Omega(\nu)$ salvo un conjunto de medida cero.

TEOREMA KAM (45,5,55,15,67,61). Supongamos que el hamiltoniano integrable H_o sea analítico y no degenerado, que el hamiltoniano perturbado $H=H_o+\varepsilon H_1$ de (3.4.1) sea de clase C^r con $r>2n$, y sea τ cumpliendo $n-1<\tau<(r/2)-1$. Entonces para cualquier $\nu>0$, existe $\varepsilon(\nu)>0$, $(\varepsilon(\nu)=O(\nu^2))$, tal que si $|\varepsilon|<\varepsilon(\nu)$, el sistema perturbado (3.4.2) posee (conjuntos difeomorfos a) toros invariantes con flujo lineal de frecuencia ω , para cualquier $\omega\in\Omega(\nu)$.

Notas:

1 - Una subvariedad L de una variedad simpléctica (M,ω) 2n-dimensional se llama isotrópica si ω se anula sobre L, es decir, si para cualquier $m\in L$, y

y para cualesquiera $u,v\in T_m L$, $\omega(m)(u,v)=0$. Si además $\dim L = n = (1/2)\dim M$, se dice que L es una subvariedad lagrangiana de M. Las variedades lagrangianas son las variedades isotrópicas de dimensión máxima (véase (77)). Claramente, los toros invariantes del sistema (3.4.2) para $\varepsilon=0$ son subvariedades lagrangianas de ($T^n \times U$, $\Sigma_{i=1}^{n} d\phi_i \wedge dI_i$) , ya que su plano tangente es $\mathbb{R}^n\times\{0\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, y para $(u,0)$, $(v,0)\in\mathbb{R}^n\times\{0\}$, $\omega(u,v) = (u,0)\ J\begin{pmatrix}v\\0\end{pmatrix} = 0$. Pues bien, los toros invariantes del sistema perturbado también son subvariedades lagrangianas de $T^n\times U$ (véase (56),(31)).

2 - El enunciado del teorema KAM nos asegura que para una frecuencia ω cumpliendo (3.4.3) para cierto $\nu>0$, existe $\varepsilon(\nu)$, de manera que si $|\varepsilon|<\varepsilon(\nu)$ existe un toro $\tilde{T}_\omega$ de frecuencia ω . Además este toro $\tilde{T}_\omega$ está ε-próximo al toro T_ω del sistema no perturbado (4). Ahora bien, dado $\varepsilon > 0$, podemos obtener una estimación del conjunto de toros invariantes que no se conservan. Concretamente, y en las condiciones del sistema KAM, el conjunto $E(\varepsilon)\subset T^n\times U$ de puntos que no pertenecen a toros invariantes cumple

$$\text{med}\ (E(\varepsilon)) = O(\sqrt{\varepsilon})\ \text{med}\ (T^n\times U)$$

con lo que med $(E(\varepsilon)) \to 0$, cuando $\varepsilon\to 0$ (véase (62)).

3 - Recordemos que para $\varepsilon=0$ teníamos una foliación trivial de toros invariantes: $\Omega\times T^n$. Es decir, todo toro invariante quedaba determinado por su frecuencia, debido a la no degeneración de H_0. Además esta foliación era analítica ya que $(\phi,I)\in T^n\times U \to (\phi,\omega(I))\in T^n\times\Omega$ es un difeomorfismo analítico (en realidad, sólo sabemos que es un difeomorfismo local, pero si es necesario, restringimos U). Si $\varepsilon\neq 0$, hay una foliación más complicada $T^n\times\Omega(\nu)$ ya qu $\Omega(\nu)$es un conjunto de Cantor. Sin embargo, puede verse (62) que es una foliación diferenciable en el sentido de Whitney.

4 - Entre las hipótesis del teorema KAM se encuentra la de que $\Delta_1 =$ $= \det \left(\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}\right)$ sea no nulo, es decir, H_0 sea no degenerado. Otra condicion

suficiente, en vez de ésta, para la demostración del teorema KAM, es la condición de no degeneración isoenergética : $\Delta_2 \neq 0$, donde

$$\Delta_2 = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 H}{\partial I_i \partial I_j} & \frac{\partial H_o}{\partial I_i} \\ \frac{\partial H_o}{\partial I_i} & 0 \end{pmatrix}$$

que garantiza la existencia de toros invariantes no perturbados en cada nivel de energía. Las condiciones de no degeneración y de no degeneración isoenergética son independientes, ninguna de las dos es consecuencia de la otra (Para más detalles, véase (5), (10)).

Un resultado análogo al teorema de KAM, pero para aplicaciones canónicas, es cierto también. Esto no es de extrañar, ya que, por un lado, el flujo $F_t : m \mapsto F_t(m)$ asociado a un sistema hamiltoniano (M,ω,X_H) 2n-dimensional es una aplicación simpléctica ((1), pág 188); y por otro lado, toda aplicación de Poincaré A definida sobre una superficie de sección Σ, genera, en cada nivel de energía $H^{-1}(e)$, una aplicación simpléctica $A_e : \Sigma' = \Sigma \cap H^{-1}(e) \mapsto \Sigma'$ definida en $(\Sigma', \omega|\Sigma')$, variedad simpléctica 2n-2 dimensional (véase (64), pág 44).

Así, una aplicación canónica casi integrable es una aplicación del tipo

$(\phi, I) \in T^n \times U \xmapsto{A} A_o(\phi, I) + \varepsilon A_1(\phi, I, \varepsilon) \in T^n \times U$

con A_o aplicación canónica de la forma

$A_o(\phi, I) = (\phi + \omega(I), I)$

y A aplicación globalmente canónica, es decir, $A^*\alpha - \alpha = dS$ para alguna función S, siendo $\alpha = \sum_{i=1}^{n} I_i d\phi_i$. Claramente A es canónica, ya que $A^*d\alpha = d\alpha$, siendo $d\alpha = \sum_{i=1}^{n} dI_i \wedge d\phi_i$. Una condición equivalente es que A pueda ser generada por una función generatriz S global sobre T^n (vease

(12), apéndice 33). Así por ejemplo, toda aplicación globalmente canónica $(\phi,I)\in T^n\times U\to A(\phi,I) = (Q(\phi,I), P(\phi,I))\in T^n\times U$, con $\det\left(\frac{\partial P_i(\phi,I)}{\partial I_j}\right)\neq 0$

viene generada por una función generatriz $S(\phi,P) = (\phi,P) + G(\phi,P)$ con G 2π-periódica en ϕ, mediante las ecuaciones

$$Q_i = \phi_i + \frac{\partial G}{\partial P_i}(\phi,P) \quad , \qquad I_i = P_i + \frac{\partial G}{\partial \phi_i}(\phi,P), \quad i=1,..,n. \tag{3.4.4}$$

En particular, A_o es globalmente canónica con una función generatriz $S_o(\phi,P) = (\phi,P) + G_o(P)$, $(\omega_i(I) = \frac{\partial G_o}{\partial I_i}(I), i=1,..,n)$ con lo que la función generatriz de A será del tipo

$$S(\phi,P) = S_\varepsilon(\phi,P) = (\phi,P) + G_o(P) + \varepsilon G_1(\phi,P,\varepsilon), \tag{3.4.5}$$

con $\phi\in T^n$, $P\in U$, $|\varepsilon|<\varepsilon_o$. Si $\varepsilon = 0$, A_o está foliado por toros invariantes I =cte. con <u>movimiento de traslación</u> $\omega = \omega(I)$ en cada toro:

$$\phi \longmapsto \phi + \omega \pmod{2\pi} \tag{3.4.6}$$

Si $\omega_1,\ldots,\omega_n$, 2π son inconmensurables, es decir, si $(k,\omega/2\pi)\notin \mathbb{Z}$ para $k\in\mathbb{Z}^n$, $k\neq 0$, entonces toda órbita de (3.4.6), $\{\phi + i\omega, i\in\mathbb{Z}\}$, es densa en T^n ((12) apéndice 1). Comparando con (3.4.3), los toros invariantes de A_o que se conservarán, serán los que cumplan las desigualdades (véase (12), apéndice 34):

$$|(k,\omega/2\pi) - k_o| \geqslant \nu|k|^{-\tau} \quad \text{para cualesquiera } k\in\mathbb{Z}^n\setminus\{0\},\ k^o\in\mathbb{Z}^n \tag{3.4.7}$$

siendo ν,τ constantes positivas. Para $\tau > n$, el conjunto de puntos $\omega\in\mathbb{R}^n$ cumpliendo (3.4.7) para algún $\nu > 0$ es de medida total. Pasemos ahora a enunciar el teorema KAM correspondiente a aplicaciones canónicas. Por comodidad lo enunciaremos en términos de las funciones generatrices correspondientes. Como antes, tendremos que imponer que G_o sea no degenerada: $\det\left(\frac{\partial^2 G_o(p)}{\partial p_i \partial p_j}\right)\neq 0$. Llamaremos $G(\nu)$ al conjunto de $\omega\in\omega(U)$ tales que dist $(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \omega(U)) \geq \nu$ y cumplen además (3.4.7).

TEOREMA KAM PARA APLICACIONES (12)(75)(10) . Supongamos que la función G_o en (3.4.5) sea analítica y no degenerada y que G_1 sea de clase C^r, con $r>2n+2$.. Sea τ cumpliendo $n<\tau<(r/2)-1$. Entonces para cualquier $\nu>0$ existe $\varepsilon(\nu)>0$ tal que si $|\varepsilon|<\varepsilon(\nu)$, la aplicación canónica A queda generada por la función generatriz S de (3.4.5) posee (conjuntos difeomorfos a) toros invariantes con movimiento de traslación ω, para cualquier $\omega \in G(\nu)$.

La condición de que A, la aplicación canónica que perturba a A_o, sea globalmente canónica implica una condición de intersección efectiva de toros n-dimensionales de $T^n \times U$, que pasamos a explicar. Destaquemos primero que A es de la forma

$$\begin{aligned} \phi &\mapsto \phi + \omega(I) + \varepsilon f(\phi,I,\varepsilon) \\ I &\longmapsto I + \varepsilon g(\phi,I,\varepsilon) \end{aligned} \qquad (\phi,I) \in T^n \times U, \tag{3.4.8}$$

con f,g de clase C^{r-1}

Diremos que un (conjunto difeomorfo a un) toro n-dimensional $\Gamma \subset T^n \times U$ puede ser parametrizado por la variable ϕ si la proyección de Γ sobre $T^n \times \{0\}$ es un difeomorfismo con lo que Γ viene dada por una ecuación $I = F(\phi)$, con F 2π-periódica en ϕ. Toda aplicación globalmente canónica A cumple la <u>propiedad de intersección efectiva</u> ((12), apéndice 33, (75) pág 120):

Para cualquier toro $\Gamma \subset T^n \times U$ parametrizado por la variable ϕ , $A\Gamma \cap A$ es no vacío.

Esta es la propiedad esencial que ha de cumplir A en el teorema KAM. Así , podemos reemplazar la hipótesis de que A sea globalmente canónica por la hipótesis de que A sea de la forma (3.4.8) con $\det\left(\frac{\partial \omega_i}{\partial I_j}\right) \neq 0$ y cumpla la hipótesis de intersección efectiva (vease (75), pág 120). Reenunciando el teorema KAM con esta nueva hipótesis para n=1 obtenemos el

TEOREMA DE TWIST (55)(66) Consideremos la aplicación T definida por

$$T(\theta,r) = (\theta+\omega(r) + \varepsilon f(\theta,r,\varepsilon),\ r+ \varepsilon g(\theta,r,\varepsilon)) \tag{3.4.9}$$

para $\theta\in\mathbb{R}$, $a<r<b$, $|\varepsilon| < \varepsilon_o$ con f,g 2π-periódicas en θ, cumpliendo la propiedad de la intersección efectiva. Supongamos que ω es analítica y $\omega'(r) \neq 0$ para $a<r<b$, y que f,g son de clase C^{ℓ}, con $\ell>3$. Sea τ cumpliendo $1<\tau<(\ell-1)/2$. entonces para cualquier $\nu>0$ existe $\varepsilon(\nu)>0$ tal que si $|\varepsilon|<\varepsilon(\nu)$, T posee curvas invariantes cerradas con movimiento de traslación ω, para cualquier $\omega\in G(\nu)$.

NOTA 1 : Para $\ell = 3$, también es cierto el teorema de Twist (37). Para $\ell < 3$ existen contraejemplos (36).

NOTA 2 : Las frecuencias ω asociadas a las curvas que se conservan, son las que cumplen $|(\omega/2\pi)-(p/q)|\geq(\nu/q^{\tau+1})$. Si $\varepsilon<\varepsilon(\nu) = O(\nu^2)$ existen curvas invariantes C_ω con frecuencia ω, que desaparecen para $\varepsilon>\varepsilon(\nu)$. Conforme aumenta ε sólo se conservan curvas C_ω con frecuencia suficientemente irracional. Esto explica porqué las curvas con las frecuencias más irracionales en Ω son las últimas en desaparecer, al aumentar ε (véase algunos ejemplos en (32)).

3.5. Difusión de Arnold

Examinemos ahora las consecuencias del teorema KAM sobre la estabilidad de las órbitas. Consideremos un hamiltoniano casi integrable

$$H(\phi,I,\varepsilon) = H_o(I) + \varepsilon H_1(\phi,I,\varepsilon) \tag{3.5.1}$$

Para $\varepsilon = 0$, toda órbita asociada al sistema hamiltoniano definido por H, está contenida en un toro invariante I=cte. , con lo que dos órbitas que se encuentren en toros diferentes, mantienen constante la distancia entre los momentos asociados.

DEFINICION Sea T un toro invariante n-dimensional asociado al hamiltoniano (3.5.1). Diremos que es un toro ρ-estable si para cualquier entorno $V_\rho = \{ x: \text{dist } (x,T)<\rho \}$ de T existe un entorno $V_1 \subset V$ de T tal que si $(\phi(t), I(t))$ es una solución del sistema con $(\phi(t^\circ), I(t^\circ)) \in V_1$ entonces $(\phi(t), I(t)) \in V_\rho$ para cualquier t.

Por ejemplo, para $\varepsilon = 0$, todo toro n-dimensional invariante asociado a H es ρ-estable para cualquier $\rho>0$. (notemos, que un toro ρ-estable no tiene porqué ser ρ_1-estable si $\rho_1<\rho$). Sabemos, por el teorema KAM, que existen toros invariantes n-dimensionales para $\varepsilon \neq 0$, correspondientes a unas frecuencias cumpliendo las desigualdades (3.4.3), formando por tanto un conjunto cantoriano que lle a todo el espacio de fases salvo un conjunto de medida $(\sqrt{\varepsilon})$. Como H es una integral primera, cada toro invariante se encuentra en una hipersuperficie de energía $H^{-1}(h)$, 2n-1 dimensional, con lo que toda hipersuperficie de energía $H^{-1}(h)$ (excepto quizás para un conjunto de valores h, cuya medida tiende a cero cuando $\varepsilon \to 0$), está "foliada" por toros invariantes n-dimensionales del sistema. Veamos qué pasa con las órbitas "irregulares", es decir, no contenidas en toros invariantes.

Si n = 2, cada toro 2-dimensional separa en dos componentes conexas la hipersuperficie de energía, 3-dimensional, con lo que estos toros invariantes son la frontera de dominios abiertos de $H^{-1}(h)$, invariantes por el flujo. Si una órbita se encuentra en un momento dado entre dos toros invariantes, se encontrará siempre entre estos dos toros invariantes. Así todo toro invariante T será ρ-estable, siendo ρ la distancia al toro invariante más próximo a T. Claramente $\rho \to 0$ cuando $\varepsilon \to 0$.

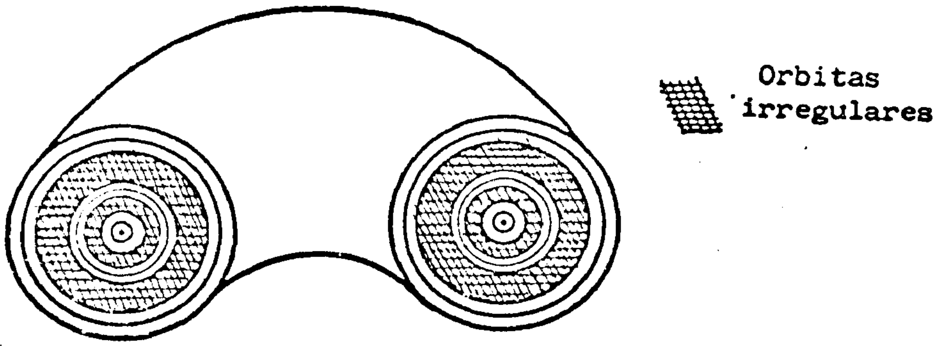

Figura 3.1.

Si $n>2$, los toros invariantes n-dimensionales no separan la hipersuperficie de energía. No tenemos ahora la ayuda topológica del caso $n = 2$, y nada impide, en principio, el que una órbita irregular, próxima en un momento dado a un toro invariante, se "escape" de él para tiempos grandes. El primero en hacer esta observación fue Arnold (4) y es por esto que este fenómeno de inestabilidad recibe el nombre de difusión de Arnold (véase figura 3.2.).

Arnold (6) fue el primero en presentar un ejemplo analítico de esta difusión (véase también (49)). Aparentemente, la difusión de Arnold ha sido también observada en el movimiento de electrones bajo campos magnéticos intensos, en experimentos sobre interacción de haces electrón-positrón (véase, por ejemplo (21) pág 346) y en experimentos numéricos (20), (46), en el sentido de que se observa una inestabilidad "estocástica en algunas zonas.

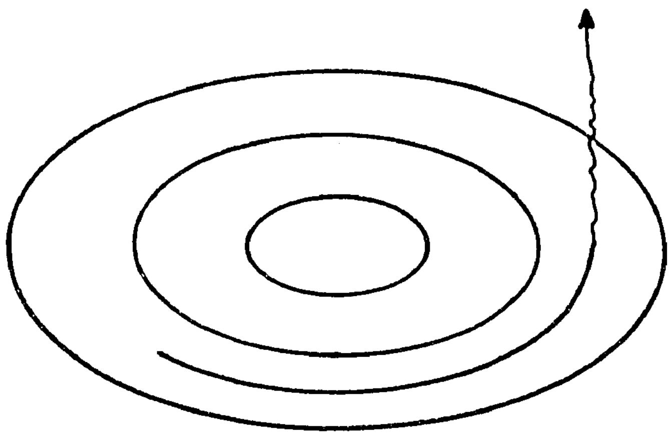

Figura 3.2.

(Veremos más adelante que estas zonas estocásticas se corresponden con regiones cercanas a órbitas homoclínicas transversales correspondientes a distintos toros de transición. Los capítulos 5 y 6 explican esta terminología).

CAPITULO 4

COMPORTAMIENTO CERCA DE PUNTOS ELIPTICOS

4.1. Existencia de toros invariantes cerca de un punto elíptico general.

Sea (M,Ω,X_H) un sistema hamiltoniano de n grados de libertad. Diremos que $m\in M$ es un punto crítico del sistema si $X_H(m) = 0$, o, equivalentemente, si $dH(m) = 0$. Escogiendo una carta simpléctica (U,ϕ) en un entorno de m, con $\phi(m) = 0$, y llamando z a las variables en $\phi(U)$, el sistema hamiltoniano viene regido por la ecuación

$$\dot{z} = J \operatorname{grad} H(z) = JD^2H(0)z + J(\operatorname{grad} H(z) - D^2H(0)z) =$$
$$= JD^2H(0)z + o(z) \qquad (4.1.1)$$

donde hemos supuesto que H es de clase C^r, $r\geqslant 2$. La parte lineal, o de primer orden, correspondiente a (4.1.1) viene dada por

$$\dot{z} = JSz \qquad (4.1.2)$$

con $S = D^2H(0)$. Es sabido ((68), pág 100) que los valores propios asociados a JS son del tipo $\{ \lambda_1,\dots,\lambda_n, -\lambda_1,\dots, -\lambda_n\}$, es decir, λ es valor propio de JS si y sólo si $-\lambda$ lo es también, y en particular, si 0 es valor propio de JS, es de multiplicidad par. Además, por ser JS matriz real, si λ es valor propio, $\bar{\lambda}$ también lo es.

Por consiguiente, para que el sistema (4.1.1.) sea estable Liapunov en un entorno del origen, es necesario que los valores propios λ_j de la matriz JS sean imaginarios puros : $\lambda_j = \pm i\alpha_j$, $\alpha_j\in\mathbb{R}$, $j = 1,\dots,n$. Si suponemos, además que todos los valores propios de JS son simples, entonces existe una matriz simpléctica C (véase (68), pág 102, (1), pág 172) de manera que al efectuar el cambio $z = Cx$, $x = (q, p) = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$, el nuevo hamiltoniano $H(x)$ es del tipo

$$H(x) = H(0) + (1/2) \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (q_j^2 + p_j^2) + \dots, \qquad (4.1.3)$$

con ecuaciones asociadas

$$\dot{q}_j = \alpha_j p_j + \dots, \qquad \dot{p}_j = -\alpha_j q_j - \dots, \qquad j = 1, \dots, n.$$

Los valores propios $\lambda_1, \dots, \lambda_n, -\lambda_1, \dots, -\lambda_n$ correspondientes a la parte lineal de X_H en el punto crítico m, no dependen de las coordenadas elegidas, y se llaman los exponentes característicos de X_H en m.

DEFINICION. Un punto elíptico m de orden (al menos) N de un sistema hamiltoniano (M, Ω, X_H) de n grados de libertad es un punto crítico de X_H que posee n exponentes característicos $\lambda_j = i\alpha_j$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, n$ no resonantes hasta orden **N**, es decir,

$$\sum_{j=1}^{n} k_j \alpha_j \neq 0, \quad \text{si} \quad 1 \leq \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leq N, \qquad k_j \in \mathbb{Z}. \qquad (4.1.4)$$

Así, en las condiciones de la definición, si α es resonante ($(k, \alpha) = 0$, $k \neq 0$, $k \in \mathbb{Z}^n$) es resonante de orden $\geq N + 1$ ($|k| \geq N + 1$). Nótese que un punto elíptico de orden 2 es el que tiene sus exponentes característicos imaginarios puros y simples, por lo que en coordenadas adecuadas toma la "forma normal" de (4.1.3), en lo que se refiere a los términos de grado 2. Además, también se cumple

TEOREMA DE BIRKHOFF. Sea m un punto elíptico de orden N de un sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H), con H de clase C^{N+1}. Entonces existe un sistema de coordenadas canónico (q,p) en un entorno V de m de manera que H se escribe

$$H(q,p) = H(m) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_j + H_2(I) + \ldots + H_{[N/2]}(I) + R_{N+1}(q,p),$$

$$(q,p) \in V \tag{4.1.5}$$

con $I = (I_1,\ldots,I_n), 2I_j = q_j^2 + p_j^2 \quad j = 1,\ldots,n,$ H_i polinomio homogéneo de grado i, y $R_{N+1}(q,p) = O(|q| + |p|)^{N+1}$.

El polinomio $\Gamma_N = \Sigma\, \alpha_j I_j + H_2(I) + \ldots + H_{[N/2]}(I)$ de grado $[N/2]$ en la variable I recibe el nombre de forma normal de Birkhoff de grado N. Para la demostración véase (17), cap III, o también el apartado siguiente. Digamos, por último, que está univocamente determinada (véase (57) pág 9).

En caso de que tengamos un punto elíptico m de orden 4, en coordenadas adecuadas (q,p) el hamiltoniano se expresa como

$$H(q,p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_j + \sum_{j,\ell=1}^{n} \alpha_{j\ell}\, I_j I_\ell + H_5(q,p), \tag{4.1.6}$$

(hemos trasladado m al origen de coordenadas e impuesto H(m) = 0).

Haciendo el cambio canónico $q_j = \sqrt{2I_j}\cos\phi_j \quad p_j = \sqrt{2I_j}\,\mathrm{sen}\phi_j$ $j = 1,\ldots,n$, queda

$$H(\phi,I) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_j + \sum_{j,\ell=1}^{n} \alpha_{j\ell} I_j I_\ell + H_5(\phi,I) = H_0(I) + H_5(\phi,I) \quad (4.1.7)$$

con H 2π-periódica en ϕ, $H_5(\phi,I) = 0(I^{5/2})$, $I \in U$, abierto de $\mathbb{R}^n$.

Como en el capítulo anterior, sea $\omega = \text{grad } H_0 : U \mapsto \mathbb{R}^n$, $\Omega = \omega(U) \subset \mathbb{R}^n$, y dado $\nu > 0$, sea $\Omega(\nu) = \{\omega \in \Omega : |(k,\omega)| \geq \nu \, |k|^{-\tau}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^n$, $k \neq 0$, y $\text{dist}(\omega, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) \geq \nu\}$. Aplicando el teorema KAM, obtenemos

TEOREMA. Supongamos que el hamiltoniano H de (4.1.7) sea de clase C^r con $r > 2n$, y además que $\det(\alpha_{j\ell}) \neq 0$. Sea τ cumpliendo $n-1 < \tau < r/2 - 1$. Entonces para cualquier $\nu > 0$, existe $\delta(\nu) > 0$, $\delta(\nu) = 0(\nu^4)$ tal que en el conjunto $V_\delta = \{(\phi,I) \in T^n \times U, \, ||I|| < \delta\}$, el sistema correspondiente al hamiltoniano (4.1.7) posee, para cualquier $\omega \in \Omega(\nu)$, (conjuntos difeomorfos a) toros invariantes con flujo lineal de frecuencia ω.

La hipótesis de que $\det(\alpha_{j\ell}) \neq 0$, se impone para que H_0 sea no degenerado. Si m es de orden N, y H puede expresarse como $H = \Gamma_N + R_{N+1}$, donde Γ_N es la forma normal de Birkhoff de grado N, entonces $H_0 = \Gamma_N$, y basta imponer que Γ_N sea no degenerado, esto es, $\det\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0$.

Como consecuencia del teorema anterior, si llamamos <u>punto elíptico general</u> de un sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H) a todo punto elíptico de orden al menos 4 no degenerado, es decir, tal que en su forma normal de Birkhoff asociada de grado 4, $\Gamma_2 = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_j + \sum_{j,\ell=1}^{n} \alpha_{j\ell} I_j I_\ell$, se cumpla $\det(\alpha_{j\ell}) \neq 0$, resulta el

TEOREMA. Sea m punto elíptico general de un sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H) de n grados de libertad, con exponentes característicos $\lambda_j = i\alpha_j$, y con H de clase C^r, $r > 2n$. Sea τ cumpliendo $n-1 < \tau < r/2 - 1$. Entonces para cualquier $\nu \in (0,\nu_0)$, existe un entorno $V = V(\nu)$ de m tal que el campo X_H posee en V, para cualquier $\omega \in \mathbb{R}^n$ cumpliendo

$$\| \omega - \alpha \| < \nu , \quad |(k,\omega)| \geq \nu |k|^{-\tau} \text{ para cualquier } k \in \mathbb{Z}^n, \quad k \neq 0 \qquad (4.1.8)$$

(conjuntos difeomorfos a) toros invariantes con flujo lineal de frecuencia ω .

Existe un resultado análogo para difeomorfismos simplécticos. Dada una variedad simpléctica (M,Ω) 2n-dimensional , y $A:M \to M$ un difeomorfismo simpléctico, $m \in M$ es un punto fijo de A si $A(m) = m$. En tal caso, a los valores propios de $dA(m)$ los llamaremos los multiplicadores característicos de A en m y son del tipo $\{\mu_1,\mu_2,\ldots,\mu_n,1/\mu_1,\ldots,1/\mu_n\}$ ((1), pág 168). Por ser $dA(m)$ real se cumple además que si μ es un valor propio, $\bar{\mu}$ también lo es.

DEFINICION. Un punto elíptico m de orden (al menos) N de un difeomorfismo simpléctico $A:M \to M$, con M 2n-dimensional, es un punto fijo de A con n multiplicadores característicos $\mu_j = e^{i\alpha_j}$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1,\ldots,n$ no resonantes hasta orden N, es decir,

$$\mu_1^{k_1}\ldots\mu_n^{k_n} \neq 1 \qquad \text{si} \qquad 1 \leq \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leq N, \quad k_j \in \mathbb{Z}$$

o equivalentemente, teniendo en cuenta que $\mu_j = e^{i\alpha_j}$,

$$(k, \alpha/2\pi) \neq k_0 \quad \text{si} \quad 1 \leqslant \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leqslant N, \quad k_r \in \mathbb{Z}, \quad r = 0,1,\dots,n \qquad (4.1.9)$$

Por ejemplo, todo punto elíptico de orden 2 tiene multiplicadores característicos simples y por tanto diferentes de ± 1. Para aplicaciones canónicas también se cumple el

TEOREMA DE BIRKHOFF. Sea m un punto elíptico de orden $N \geqslant 2$ de una aplicación simpléctica $A:M \to M$ de clase C^{N+1}, con M variedad simpléctica 2n-dimensional. Entonces existe un sistema de coordenadas canónico (q,p) en un entorno V de m de manera que en estas coordenadas A se expresa en la forma

$$(q,p) \xmapsto{A} (\tilde{q},\tilde{p}), \qquad \text{con}$$

$$\left.\begin{aligned} \tilde{q} &= q_j \cos \frac{\partial S_N}{\partial I_j}(I) - p_j \operatorname{sen} \frac{\partial S_N}{\partial I_j}(I) + O_{N+1}(q,p) \\ \tilde{p}_j &= q_j \operatorname{sen} \frac{\partial S_N}{\partial I_j}(I) + p_j \cos \frac{\partial S_N}{\partial I_j}(I) + O_{N+1}(q,p) \end{aligned}\right\} \quad j = 1,\dots,n \qquad (4.1.10)$$

siendo $S_N(I) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_j + \Gamma_2(I) + \dots + \Gamma_{N/2}(I)$ un polinomio de grado $N/2$ en la variable $I = (I_1,\dots,I_n)$, con $2I_j = p_j^2 + q_j^2 \quad j = 1,\dots,n$.

La forma de las ecuaciones (4.1.10), despreciando los términos de orden N+1, recibe el nombre de forma normal de Birkhoff de orden N asociado a la aplicación A en un entorno del punto m. Efectuando el cambio canónico $q_j = \sqrt{2I_j} \cos \phi_j$, $p_j = \sqrt{2I_j} \operatorname{sen} \phi_j$, $j = 1,\dots,n$, queda

$$(\phi,I)\in T^n \times U \longmapsto A(\phi,I) = (\phi + \omega_N(I) + O(I^{(N+1)/2}),\ I + O(I^{(N+1)/2}))\in$$

$$\in T^n \times \mathbb{R}^n \qquad (4.1.11)$$

con $\omega_N(I) = \operatorname{grad} S_N(I)$. Si además $\det\left(\frac{\partial^2 S_N(I)}{\partial I_j \partial I_j}\right) \neq 0$ (para lo que es necesario que $N \geq 4$) y si A cumple la propiedad de la intersección efectiva (por ejemplo, si A es globalmente canónica, véase (3.4.8)), entonces en el entorno de m existen toros invariantes por la aplicación A, con movimiento de traslación. Precisemos esto un poco más en el caso más fácil: $n = 1$.

Todo difeomorfismo simpléctico $A:(M,\Omega) \to (M,\Omega)$ queda caracterizado por la propiedad de conservar el área Ω, si M es bidimensional, y cumple además claramente la propiedad de la intersección efectiva. Sea $m \in M$ un punto fijo de A. Sus multiplicadores característicos son del tipo $\{\mu,\mu^{-1}\}$. Decimos que m es <u>elíptico</u> si $|\mu| = 1$, $\mu \neq \pm 1$, que m es <u>parabólico</u> si $\mu = \pm 1$ (fijémonos que la definición de punto elíptico para $n = 1$, coincide con la definición de punto elíptico de orden (al menos) 2 dada para $n \geq 1$, y que la definición de punto parabólico, coincide con la definición de punto elíptico que no es de orden (al menos) 2 para $n \geq 1$, es decir, es raiz cuadrada de la unidad), y que m es <u>hiperbólico</u> si $|\mu| \neq 1$.

Si $\mu = e^{i\alpha}$ no es raiz tercera ni cuarta de la unidad, escribiendo su forma normal de orden $N \geq 4$, llegamos a una expresión análoga a (4.1.11), donde escribimos $M = N/2$

$$(\phi,I)\longmapsto(\phi + \alpha + a_1 I + a_2 I^2 + \ldots + a_M I^M + O(I^{(N+1)/2}),\ I + O(I^{(N+1)/2}))$$

Si además alguno de los coeficientes a_i $i=1,\ldots,M$ es no nulo, diremos que m es un <u>punto elítico general</u>. Llamando $\omega(I)$ a $\alpha+a_1 I+\ldots+a_M I^M$ y aplicando el Teorema del Twist, se obtiene

TEOREMA. Sea m punto elíptico general de un difeomorfismo simpléctico A de clase C^r, $r \geq 4$ sobre una superficie simpléctica, con multiplicadores característicos $e^{\pm i\alpha}$. Sea τ cumpliendo $1 < \tau \leq r/2 - 1$. Entonces para cualquier $\nu \in (0,\nu_0)$ existe un entorno $V = V(\nu)$ de m tal que la aplicación A posee en V, para cualquier $\omega \in \mathbb{R}$ cumpliendo

$$|\omega - \alpha| < \nu, \ |\omega/2\pi - p/q| \geq \nu/|q|^{\tau+1} \quad \text{para cualquier } p,q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \qquad (4.1.12)$$

curvas invariantes cerradas alrededor de m, con movimiento de traslación ω.

Como consecuencia, en cada entorno del punto m hay al menos una curva característica, con lo que es estable Liapunov. Lo mismo ocurre con una órbita periódica elíptica general de un sistema hamiltoniano de dos grados de libertad, es decir, una órbita periódica γ para la cual un punto $m \in \gamma$ sea un punto elíptico general respecto a una aplicación de Poincaré asociada a la órbita γ en el punto m. Asímismo es estable todo punto elíptico general m de un sistema hamiltoniano de 2 grados de libertad, si en cada nivel de energía próximo al de m existen toros 2-dimensionales invariantes ya que separarán la hipersuperficie tridimensional H = cte.

En el caso en que tengamos un punto elíptico m con multiplicador característico $\mu = e^{i\alpha}$, raíz tercera o cuarta de la unidad, no podemos encontrar su forma normal de orden 4. En estos casos, m es un punto parabólico de A^3 ó A^4 , según sea el caso, y conviene trabajar con una forma normal adecuada al caso parabólico (véase(72)(73)).

Finalmente, observemos que los toros invariantes n-dimensionales que se conservan en un entorno de un punto elíptico general, tanto en el caso de un sistema hamiltoniano como en el de una aplicación canónica, son los toros invariantes con frecuencias suficientemente irracionales. Así, por ejemplo, si m es un punto elíptico general de un sistema hamiltoniano, con exponentes característicos $\lambda_j = \pm\, i\alpha_j$, los toros invariantes n-dimensionales que existen son aquellos para los cuales las frecuencias asociadas $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)$ satisfacen (4.1.8), es decir,

$$\|\omega - \alpha\| < \nu \quad , \ |(k,\omega)| \geq \nu\, |k|^{-\tau} \quad , \quad \forall k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}.$$

Nuestro objetivo en este capítulo es ver bajo qué condiciones existen toros invariantes de dimensión inferior, con frecuencias resonantes ω , es decir, cumpliendo

$$\|\omega - \alpha\| < \nu \quad , \quad (k,\omega) = 0, \quad \text{para algún} \quad k \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$$

así como el movimiento cualitativo en su entorno. Para ello, pasamos primero a construir una forma normal adecuada en el siguiente apartado.

4.2. Una forma normal resonante

Sea m_0 un punto elíptico de orden (al menos) 2 de un sistema hamiltoniano (M,Ω,X_H) de n grados de libertad, con H de clase C^r, $r \geq 2$. En coordenadas (q,p) adecuadas podemos suponer que $m_0 = (0,\ldots\overset{2n}{\overbrace{0}},\ldots0)$ y que el hamiltoniano H es de la forma

$$(q,p) = (q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) \longmapsto H(q,p) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (q_j^2+p_j^2)+H_3(q,p) \qquad (4.2.1)$$

definido en un entorno del origen, donde hemos supuesto por comodidad, que $H(0,0) = 0$, y con $H_3(q,p) = 0(|q|^2 + |p|^2)$ cuando $|q|^2 + |p|^2 \longmapsto 0$.

Sea ahora $k^0 = (k_1^0,\dots,k_n^0) \in \mathbb{Z}^n$ con m.c.d. $(k_1^0,\dots,k_n^0) = 1$ si k^0 es no nulo. k^0 será fijo en todo este apartado. Denotaremos por J el $\mathbb{Z}$-módulo generado por k^0 : $J = \{mk^0,\ m\in\mathbb{Z}\}$

DEFINICION. Diremos que $\alpha \in \mathbb{R}$ es <u>no resonante de orden N salvo para $k^0 \in \mathbb{Z}^n$</u> si

$$(k,\alpha) = 0,\quad k\in\mathbb{Z}^n,\quad 3 \leqslant |k| \leqslant N \Longrightarrow \exists\, m\in\mathbb{Z} \text{ tal que } k = mk^0. \quad (k\in J) \qquad (4.2.2)$$

Así, por ejemplo, si $k^0 = 0$, entonces α cumple (4.2.2) si y sólo si es no resonante de orden N. Y si $k^0 \neq 0$, entonces, o bien $(\alpha,k) \neq 0$ para $1 \leqslant |k| \leqslant N$, o bien $(\alpha,k^0) = 0$ y $(\alpha,k) \neq 0$ para $1\leqslant |k| \leqslant N$ a menos que $k = mk^0$, es decir, $k\in J$.

TEOREMA. Supongamos que el hamiltoniano H de (4.2.1) sea de clase C^{N+1}, y que $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ sea no resonante de orden N salvo para $k^0 \in \mathbb{Z}^n$, es decir, se cumple (4.2.2). Entonces existe un polinimio W de grado N en las variables n-dimensionales q,y :

$$W(q,y) = (q,y) + W^{(3)}(q,y) + \dots + W^{(N)}(q,y),$$

que genera una transformación canónica $q = \mu(x,y) = x + \dots$, $p = v(x,y) = y + \dots$, de manera que el nuevo hamiltoniano $\Gamma(x,y) = H(\mu(x,y), v(x,y))$ se escribe

$$\Gamma(x,y) = \Gamma^{(2)}(x,y) + \Gamma^{(3)}(x,y) + \dots + \Gamma^{(N)}(x,y) - \Gamma_{N+1}(x,y)$$

con $\Gamma^{(s)}(x,y)$ polinomios homogéneos de grado s en (x,y), $\Gamma^{(2)}(x,y) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j (x_j^2+y_j^2)$, y para $3 \leq s \leq N$,

$$\Gamma^{(s)}(x,y) = \sum_{\substack{|\ell|+|m|=s \\ \ell-m\in J,\ \ell,m\in \mathbb{N}^n}} c_{\ell_1\dots\ell_n m_1\dots m_n} z_1^{\ell_1}\dots z_n^{\ell_n} \bar{z}_1^{m_1}\dots\bar{z}_n^{m_n} =$$

$$= \Sigma\, c_{\ell m} z^{\ell}\bar{z}^{m},$$

siendo $z_j = x_j + iy_j$; y $\Gamma_{N+1}(x,y) = 0(|x| + |y|)^{N+1}$.

Además, si H es real, W, Γ son reales. Los polinomios $\Gamma^{(s)}$, $2 \leq s < |k^0|$, están determinados de manera única, y si $(\alpha,k^0) = 0$, también $\Gamma^{(s)}$, $|k^0| \leq s \leq N$, están determinados de manera única.

Comentario. A todo polinomio $\Gamma^{(2)} + \dots + \Gamma^{(N)}$ de grado N en la variable (x,y) lo llamaremos forma normal de grado N de H con respecto a $k^0 \in Z^n$. El caso en que $(k^0,\alpha) \neq 0$, pero (k^0,α) "pequeño" será de gran importancia en el apartado siguiente de este capítulo. La demostración que sigue sirve también para el caso en que la dimensión de J es mayor que 1, es decir, cuando la dimensión del subespacio generado por $R_N(\alpha) = \{k \in Z^n :$

$(k,\alpha) = 0,\ |k| \leq N\}$ sea mayor que 1, obteniéndose una forma normal análoga a la obtenida en el teorema. Si $(k^0,\alpha) = 0$ en el teorema (o $R_N(\alpha) \neq 0$ en el caso antes descrito), entonces la forma normal del teorema coincide con la forma normal de Gustavson hasta orden N (véase (54),(34)). La línea de demostración del teorema es totalmente análoga a la correspondiente a la forma normal de Gustavson.

Antes de probar el teorema, veamos una propiedad esencial de la forma normal :

PROPOSICION. $\tilde{\Gamma} = \Gamma^{(2)}+\ldots+\Gamma^{(N)}$ es integrable, si $(k^0,\alpha) \neq 0$ o $k^0 = 0$

<u>Demostración</u>. El caso $k^0 = 0$ es claro, ya que $\tilde{\Gamma}$ se reduce a la forma normal de Birkhoff hasta grado N. Si $k^0 \neq 0$, existe una base de $\mathbb{R}^n$ formada por vectores $\alpha,\gamma^{(2)},\ldots,\gamma^{(n)}$, con $(k^0,\gamma^{(r)}) = 0$, $r = 2,\ldots,n$. Si llamamos $F_1 = \tilde{\Gamma} = \Gamma^{(2)}+\ldots+\Gamma^{(n)}$, $F_r = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \gamma^{(r)} (x_j^2+y_j^2)$, $r = 2,\ldots,n$, claramente $F_1,\ldots,F_n$ son independientes, al ser $\alpha,\gamma^{(2)},\ldots,\gamma^{(n)}$ independientes. Es fácil comprobar que $\{F_r,F_s\} = 0$ $2 \leq r, s \leq n$. Veamos que $\{F_r,F_1\} = 0$, $r = 2,\ldots,n$. $\{F_r,F_1\} = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(r)} (x_j\tilde{\Gamma}_{y_j} - y_j\tilde{\Gamma}_{x_j}) = D_{\gamma^{(r)}}\tilde{\Gamma}$,

donde $D_\gamma = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial x_j})$, $\gamma\in\mathbb{R}^n$. Es fácil comprobar que $D_\gamma(z^\ell\bar{z}^m) = i(\gamma,\ell-m)z^\ell\bar{z}^m$ (las funciones $z^\ell\bar{z}^m$ son funciones propias del operador D_γ, de valor propio asociado $i(\gamma,\ell-m)$), con lo que

$$D_{\gamma(r)}\tilde{\Gamma} = \sum_{\ell-m\in J} i(\gamma^{(r)},\ell-m)c_{\ell m}z^{\ell}\bar{z}^{m} = 0$$,ya que $(\gamma^{(r)},k^0) = 0$ y $J = \{mk^0, m\in\mathbb{Z}\}$.

Luego $\tilde{\Gamma}$ es integrable.c.q.d.

Nota. En el caso en que $(k^0,\alpha) = 0$, $k^0 \neq 0$, $\tilde{\Gamma}$ será integrable si $\tilde{\Gamma},F_2,\ldots,F_n$ son independientes, lo cual depende de los términos de $\tilde{\Gamma}$ de orden superior a 2 en (x,y).

Vayamos por fin a la

Demostración del teorema. Escribiremos

$$W(q,y) = W^{(2)} + W^{(3)} + \ldots + W^{(N)}, \quad \text{con } W^{(2)} = (q,y) = \sum_{j=1}^{n} q_j y_j,$$

$$\Gamma(x,y) = \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(3)} + \ldots + \Gamma^{(N)}, \quad \text{con } \Gamma^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x_j^2 + y_j^2),$$

$$H(q,p) = H^{(2)} + H^{(3)} + \ldots + H^{(N)}, \quad \text{con } H^{(2)} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\alpha_j(x_j^2 + y_j^2),$$

siendo $W^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$, $H^{(s)}$ polinomios homgéneos. Los polinomios $H^{(s)}$, $s \geq 2$, son conocidos, y buscamos $W^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$.

Como $W_q(q,y) = y + W_q^{(3)} + \ldots + W_q^{(N)}$, $W_y(q,y) = q + W_y^{(3)} - \ldots + W_y^{(N)}$, entonces $W_{qy}(0,0) = Id.$, y por tanto W genera, en un entorno del origen, una transformación canónica

$$x = W_y(q,y), \qquad p = W_q(q,y),$$

dando lugar a un nuevo hamiltoniano $\Gamma(x,y)$ relacionado con $H(q,p)$ mediante

$$H(q,W_q(q,y)) = \Gamma(W_y(q,y),y). \tag{4.2.4}$$

Escribiendo en (4.2.4) sólo los términos de orden 2, y sustituyendo $\Gamma^{(2)}$, $W^{(2)}$, por los valores ya escritos, queda

$$H^{(2)}(q,y) = \Gamma^{(2)}(q,y),$$

es decir, (4.2.4) se cumple hasta términos de orden 2, y $\Gamma^{(2)}$ está evidentemente en forma normal de (4.2.3). Razonaremos ahora por inducción. Supongamos que hemos determinado $\Gamma^{(r)}$, $W^{(r)}$, $2 \leq r \leq s-1$, para $3 \leq s \leq N$, de manera que $\Gamma^{(2)} + \ldots + \Gamma^{(s-1)}$ esté en la forma normal de (4.2.3), es decir, $\Gamma^{(r)} = \sum_{\substack{|\ell|+|m|=r \\ \ell-m \in J}} c_{\ell m} z^{\ell} \bar{z}^{m}$, para $r = 2, \ldots, s-1$, y además se cumpla (4.2.4) hasta términos de orden s-1, es decir se cumpla :

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[q_j^2 + (y_j + \ldots + W_{q_j}^{(s-1)})^2\right] + H^{(3)}(q, y + \ldots + W_q^{(s-1)}) + \ldots + H^{(s-1)}(q, y + \ldots + W^{(s-1)})$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[(q_j + \ldots + W_{y_j}^{(s-1)})^2 + y_j^2\right] + \Gamma^{(3)}(q + \ldots + W_y^{(s-1)}, y) + \ldots +$$

$$+ \Gamma^{(s-1)}(q + \ldots + W_y^{(s-1)}, y) + O_s(q,y), \qquad (4.2.5)$$

donde $O_s(q,y)$ contiene sólo términos de grado $\geq$ s en (q,y).

Si podemos determinar $\Gamma^{(s)}, W^{(s)}$, de manera que $\Gamma^{(2)} + \ldots + \Gamma^{(s)}$ esté en la forma normal de (4.2.3), y se cumpla (4.2.4) hasta orden s, ya habremos demostrado la existencia de la forma normal buscada. La ecuación (4.2.4) hasta orden s es del tipo

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[q_j^2 + (y_j + \ldots + W_{q_j}^{(s)})^2\right] + H^{(3)}(q, y + \ldots + W_q^{(s)}) + \ldots + H^{(s)}(q, y + \ldots + W_q^{(s)}) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[(q_j + \ldots + W_{y_j}^{(s)})^2 + y_j^2\right] + \Gamma^{(3)}(q + \ldots + W_y^{(s)}, y) + \ldots +$$

$$\Gamma^{(s)}(q + \ldots + W_y^{(s)}, y) + O_{s+1}(q,y) . \qquad (4.2.6)$$

Hasta grado s-1 (4.2.6) se cumple por inducción, ya que los únicos términos desconocidos en (4.2.6) de orden menor o igual que s son $\Gamma^{(s)}, W^{(s)}$, polinomios de grado s. Así basta ver que (4.2.6) se cumple para grado s. El único término desconocido en el primer miembro de (4.2.6), de grado s es $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j W_{q_j}^{(s)}$

mientras que en el segundo miembro sólo $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j W_{y_j}^{(s)} + \Gamma^{(s)}(q,y)$ es desconocido entre los términos de grado s.Así, en lo referente a términos de grado s, (4.2.6) queda

$$P^{(s)}(q,y) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j W_{q_j}^{(s)}(q,y) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j W_{y_j}^{(s)}(q,y) + \Gamma^{(s)}(q,y), \quad (4.2.7)$$

con $P^{(s)}$ polinomio homogéneo de grado s, cuyos coeficientes dependen sólo de los coeficientes de $H^{(j)}$, $2 \leqslant j \leqslant s$, $\Gamma^{(r)}$, $W^{(r)}$, $2 \leqslant r \leqslant s-1$, y por tanto, por inducción, conocemos explícitamente. Podemos descomponer a $P^{(s)}$ en :

$$P^{(s)}(q,y) = \sum_{\substack{\ell-m \in J \\ |\ell|+|m|=s}} a_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} + \sum_{\substack{\ell-m \notin J \\ |\ell|+|m|=s}} a_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} = P_J^{(s)}(q,y) + P_{NJ}^{(s)}(q,y),$$

con $\zeta = (\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$, $\zeta_j = q_j + iy_j$.

Por otro lado, llamando $D\alpha$ al operador $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j (q_j \frac{\partial}{\partial y_j} - y_j \frac{\partial}{\partial q_j})$, entonces

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j W_{y_j}^{(s)}(q,y) - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j y_j W_{q_j}^{(s)}(q,y) = (D_\alpha W^{(s)})(q,y),$$ con lo que

descomponiendo también $W^{(s)}$ en

$$W^{(s)}(q,y) = \sum_{\ell-m \in J} d_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} + \sum_{\ell-m \notin J} d_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} = W_J^{(s)}(q,y) + W_{NJ}^{(s)}(q,y),$$

y teniendo en cuenta que $D_\alpha(\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m}) = i(\alpha,\ell-m)\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m}$, resulta:

$$D_\alpha W^{(s)}(q,y) = \sum_{\ell-m \in J} i(\alpha,\ell-m)d_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} + \sum_{\ell-m \notin J} i(\alpha,\ell-m)d_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} =$$

$$= D_\alpha W_J^{(s)}(q,y) + D_\alpha W_{NJ}^{(s)}(q,y).$$

Finalmente imponiendo que Γ sea de la forma

$$\Gamma^{(s)}(q,y) = \sum_{\ell-m \in J} c_{\ell m}\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m} = \Gamma_J^{(s)}(q,y),$$

o sea, $c_{\ell m} = 0$ si $\ell-m \notin J$, y sustituyendo las expresiones de $P^{(s)}$, $D_\alpha W^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$ en (4.2.7) , se obtiene

$$\left.\begin{array}{ll} a_{\ell m} = i(\alpha,\ell-m)d_{\ell m} + c_{\ell m}\,, & \ell-m\in J \\ a_{\ell m} = i(\alpha,\ell-m)d_{\ell m}\,, & \ell-m\notin J \end{array}\right\} \quad \ell,m\in\mathbb{N}^n,\ |\ell|+|m|= s\,. \qquad (4.2.8)$$

Es ahora cuando usamos la hipótesis (4.2.2) sobre α. Como $3\leqslant s\leqslant N$, entonces si $|k|=s$, $(\alpha,k)\neq 0$ a menos que $k\in J$. Así, para $\ell-m\notin J$, $d_{\ell m} = a_{\ell m}/i(\alpha,\ell-m)$; y para $\ell-m\in J$, $c_{\ell m} = a_{\ell m} - i(\alpha,\ell-m)$, para cada $d_{\ell m}$ arbitrario, y ya hemos encontrado $W^{(s)}$, $\Gamma^{(s)}$. Si imponemos, por ejemplo, que W sea del tipo $W^{(s)}_{NJ}$, entonces $d_{\ell m} = 0$ para $\ell-m\in J$, y $c_{\ell m} = a_{\ell m}$, $\ell-m\in J$.

Si $|\ell|+|m|= s<|k^0|$, entonces $\ell-m\in J$ si y sólo si $\ell= m$, con lo que $c_{\ell m} = c_{\ell\ell} = a_{\ell\ell}$, y si $\ell\neq m$, $c_{\ell m} = 0$, con lo que $c_{\ell m}$ está unívocamente determinado, si $|\ell|+|m| < |k^0|$. Notemos de pasada que si $2|\ell| = |k^0|$, también los coeficientes $c_{\ell\ell}$ están unívocamente determinados. Si $(\alpha,k^0) = 0$, entonces $(\alpha,k) = 0$, si $k\in J$, con lo que $(\alpha,\ell-m) = 0$ si $\ell-m\in J$, y aunque $d_{\ell m}$ sea arbitrario para $\ell-m\in J$, $c_{\ell m}$ está determinado de forma única, para $\ell-m\in J$, $|\ell|+|m| = s$, con $|k^0|\leqslant s\leqslant N$.

Además, si H es real $\Gamma^{(2)}$, $W^{(2)}$ son polinomios a coeficientes reales, con lo que, por inducción, $\Gamma^{(r)}$, $W^{(r)}$, $r = 2,\ldots,s-1$ son polinomios con coeficientes reales, lo que implica que $a_{\ell m} = \bar{a}_{m\ell}$ para $|\ell|+|m|=s$. De aquí se obtiene que $d_{\ell m} = \bar{d}_{m\ell}$ para $\ell-m\notin J$. Si imponemos además que $d_{\ell m} = \overline{d_{m\ell}}$ para $\ell-m\in J$, $W^{(s)}$ será un polinomio con coeficientes reales y lo mismo ocurre con $\Gamma^{(s)}$, ya que $c_{\ell m} = \bar{c}_{m\ell}$. c.q.d.

COROLARIO. Como consecuencia de este teorema, para el caso $k^0 = 0$, se deduce el teorema de Birkhoff (véase (4.1.5)).

4.3. Existencia de toros invariantes de dimensión inferior.

Cosideremos el hamiltoniano real

$$H(q,p) = H(q_1,\dots,q_n,p_1,\dots,p_n) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(q_j^2+p_j^2) + H_3(q,p) \qquad (4.3.1)$$

definido en un entorno del origen, punto elíptico de orden (al menos)2, con $H_3(q,p) = o(|q|^2 + |p|^2)$ cuando $|q|^2 + |p|^2 \to 0$. Supondremos que H es de clase C^{N+1}, y que $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ es no resonante de orden N salvo para $k^0 \in Z^n$, es decir,

$$(k,\alpha) = 0, \quad k\in \mathbb{Z}^n, \quad 3 \leqslant k \leqslant N \implies \exists m\in \mathbb{Z} \text{ tal que } k = mk^0 \qquad (4.3.2)$$

Gracias al teorema del apartado anterior, existe un cambio polinomial canónico $(x,y) \to (q,p)$ de manera que en las variables (x,y), el hamiltoniano (4.3.1) se escribe como

$$\Gamma = \Gamma^{(2)} + \dots + \Gamma^{(N)} + \Gamma_{N+1} \qquad (4.3.3)$$

con $\Gamma^{(s)}$ polinomios homogéneos de grado s en (x,y), $2\leqslant s\leqslant N$, $\Gamma^{(2)}(x,y) = 1/2 \sum_{j=1}^{n} \alpha_j(x_j^2+y_j^2)$, $\Gamma^{(s)}(x,y) = \Sigma\, c_{\ell m} z^{\ell} \bar{z}^{m}$, con $z_j = x_j+iy_j$, $j=1,\dots,n$, donde el sumatorio se extiende a todos los pares $\ell,m\in \mathbb{N}^n$ tales que $|\ell|+|m| = s$, $\ell-m = pk^0$, con $p\in \mathbb{Z}$; y $\Gamma_{N+1}(x,y) = O(|x|+|y|)^{N+1}$.

Si $|k^0| = M$, $4\leqslant M\leqslant N$, entonces Γ es de la forma

$$\Gamma = \Gamma^{(2)} + \Gamma^{(4)} +\dots+ \Gamma^{(2L)} + \Gamma^{(M)} + \Gamma^{(M+1)} +\dots+ \Gamma^{(N)} + \Gamma_{N+1}$$

con $L = [M/2] \geq 2$, $\quad \Gamma^{(2s)}(x,y) = \sum_{|\ell|=s} c_{\ell\ell}(z\bar{z})^{\ell}$, $\quad 1 \leq s \leq L$, determinados unívocamente, polinomios de grado s en las variables $x_j^2 + y_j^2$, $j=1,\ldots,n$.

Hagamos ahora el cambio canónico de variables $(x,y) \longrightarrow (\theta,r)$

$$x_j = \sqrt{2r_j}\cos\theta_j, \quad y_j = -\sqrt{2r_j}\operatorname{sen}\theta_j, \quad j = 1,\ldots,n,$$

o también

$$z_j = \sqrt{2r_j}\, e^{-i\theta_j}, \quad \bar{z}_j = \sqrt{2r_j}\, e^{+i\theta_j}, \quad j = 1,\ldots,n.$$

El hamiltoniano (4.3.3) se transforma en

$$\Gamma(\theta,r) = \Gamma^{(2)}(r) +\ldots+ \Gamma^{(2L)}(r) + \Gamma^{(M)}(\theta,r) +\ldots+ \Gamma^{(N)}(\theta,r) + \Gamma_{N+1}(\theta,r) \tag{4.3.4}$$

con $\Gamma^{(2)}(r) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j$, $\quad \Gamma^{(4)}(r) = 2\sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} r_j r_k$, $\quad \Gamma^{(2s)}(r) =$

$$= 2^s \sum_{|\ell|=s} c_{\ell\ell}\, r^{\ell}, \quad 3 \leq s \leq L,$$

$$\Gamma^{(s)}(\theta,r) = \sum_{\substack{\ell-m=pk^0,\ |\ell|+|m|=s \\ \ell,m\in\mathbb{N}^n,\ p\in\mathbb{Z}}} c_{\ell m}(2r)^{(\ell+m)/2}\, e^{-i(\ell-m)\theta}, \quad M \leq s \leq N,$$

y $\Gamma_{N+1}(\theta,r) = O(r^{(N+1)/2})$ $\quad (r \rightarrow 0)$ $\quad (r^{\ell} = r_1^{\ell_1}\ldots r_n^{\ell_n})$

Claramente ahora los polinomios $\Gamma^{(2s)}(r)$ son de grado s en r.

Hagamos ahora otro cambio canónico de variables: $(\theta,r) \rightarrow (\phi,I)$

$$\phi_j = \theta_j \qquad r_j = I_j + k_j^0 I_n \quad , \quad j = 1,\ldots,n-1 \; ,$$

$$\phi_n = (k,\theta) \qquad r_n = k_n^0 I_n$$

donde hemos supuesto que $k_n^0 \neq 0$. El hamiltoniano (4.3.4) se transforma ahora en

$$\Gamma(\phi,I) = \Gamma^{(2)}(I) + \ldots + \Gamma^{(2L)}(I) + \Gamma^{(M)}(\phi,I) + \ldots + \Gamma^{(N)}(\phi,I) + \Gamma_{N+1}(\phi,I) \tag{4.3.5}$$

con $\Gamma^{(2)}(I) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j I_j + (\alpha,k^0) I_n$

$$\Gamma^{(4)}(I) = 2 \sum_{i,j=1}^{n-1} \alpha_{ij} I_i I_j + 4\Big(\sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} k_j I_i \Big) I_n + 2\Big(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} k_i^0 k_j^0 \Big) I_n^2, \text{ etc}$$

$$\Gamma^{(s)}(\phi,I) = \Gamma^{(s)}(\phi_n,I) = \sum_{\substack{\ell-m=pk^0,\, |\ell|+|m|=s \\ p\in \mathbb{Z}}} c_{\ell m} (2r)^{(\ell+m)/2} e^{-ip\phi_n} \; ,$$

$$L = [M/2], \quad M \leq s \leq N \; , \quad (r = (r_1,\ldots,r_n)),$$

y $\Gamma_{N+1}(\phi,I) = O(I^{(N+1)/2})$, $\qquad I \longrightarrow 0$.

Como $M = |k^0|$, $\Gamma^{(M)}$ se compone, por un lado, de los términos con coeficientes $c_{\ell\ell}$ $(2|\ell| = M)$ que incorporamos a $\Gamma^{(2L)}(I)$, y de dos términos correspondientes a $p = \pm 1$:

$$\Gamma^{(M)}(\phi_n,I) = c(2r)^{k^0/2} e^{-i\phi_n} + d(2r)^{k^0/2} e^{i\phi_n}$$

donde se ha supuesto, por comodidad, que $k_j^0 \geqslant 0$. Si esto no ocurre así, $2r$ va elevado a $(1/2)(|k_1^0|,\ldots,|k_n^0|)$.

Como H en (4.3.1) es real, también lo es Γ y de aquí se deduce que $d = \bar{c} = \frac{a}{2}\, e^{ib}$, con $a \geqslant 0$, $b \in T^1$. Así,

$$\Gamma^{(M)}(\phi_n, I) = a(2r)^{k^0/2} \cos(\phi_n - b)$$

Nos restringiremos de momento a estudiar la existencia de toros invariantes n-1 dimensionales de

$$\Gamma_0(I) + \Gamma^{(M)}(I) = (\Gamma^{(2)}(I) + \ldots + \Gamma^{(2L)}(I)) + \Gamma^{(M)}(\phi, I).$$

TEOREMA. Consideremos el hamiltoniano

$$\Gamma(\phi, I) = \Gamma(\phi_n, I) = \Gamma_0(I) + \Gamma^{(M)}(\phi_n, I) \quad , \quad \phi \in T^n, \quad \|I\| < \rho \qquad (4.3.6)$$

con $\Gamma_0(I) = \Gamma^{(2)}(I) + \Gamma^{(4)}(I) + \ldots + \Gamma^{(2L)}(I)$, $L = [M/2]$, siendo

$$\Gamma^{(2)}(I) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j, \quad \Gamma^{(4)}(I) = 2 \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk} r_j r_k, \quad \Gamma^{(2s)}(I) = \sum_{|\ell|=s} c_{\ell\ell} (2r)^{\ell},$$

$3 \leqslant s \leqslant L$, donde $r = (r_1, \ldots r_n) = (I_1 + k_1^0 I_n, \ldots, I_{n-1} + k_{n-1}^0 I_n, k_n^0 I_n)$, y $r^{\ell} = r_1^{\ell_1} \ldots r_n^{\ell_n}$ y con $\Gamma^{(M)}(\phi_n, I) = a(2r)^{k^0/2} \cos(\phi_n - b)$, $a, b \in \mathbb{R}$, siendo $k^0 = (k_1^0, \ldots, k_n^0)$ $\mathbb{Z}^n$, con $|k^0| = M \geqslant 4$, $k_n^0 \neq 0$

Supongamos que $|(\alpha,k)| < 4\rho \, |\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} k_i^0 k_j^0|$, $a \neq 0$.

Entonces existe una familia continua n-l paramétrica de toros n-l dimensionales $T(I_1^*,\dots,I_{n-1}^*)$, invariantes por el flujo asosiado al hamiltoniano (4.3.6), de tipo hiperbólico: existen variedades invariantes n-dimensionales W^sT, W^uT con $(\phi(t),I(t)) \longrightarrow T$, $t \to \infty$ si $(\phi(0),I(0)) \in W^sT$, y $(\phi(t),I(t)) \longrightarrow T$, $t \to -\infty$, si $(\phi(0),I(0)) \in W^uT$. Además $W^sT, W^uT \subset$ $\{(\phi,I) : I_j = I_j^*,\ j = 1,\dots,n-1,\ \Gamma(\phi_n,I_1^*,\dots,I_{n-1}^*,I_n) = \Gamma(T)\}$.

También existe otra familia n-l paramétrica de toros n-l dimensionales $\tilde{T}(I_1^*,\dots,I_{n-1}^*)$ invariantes de tipo elíptico : existe un cambio canónico de variables en el entorno de $\tilde{T}$: $(\phi,I) \to (\theta,R)$, con $R_j = I_j$, $j = 1,\dots,n-1$, de manera que en estas nuevas variables el hamiltoniano es de la forma $\Gamma(R)$, y $\tilde{T}$ tiene por ecuaciones $R_j = I_j$, $j = 1,\dots,n-1$, $R_n = 0$, con lo que $T(I_1^*,\dots,I_{n-1}^*)$ se encuentra rodeado de toros invariantes n-dimensionales

Comentario. Estas familias n-l paramétricas de toros (n-l)-dimensionales se reparten, en general, en diversos niveles de energía, es decir, en diferentes hipersuperficies $\Gamma^{-1}(h)$. Si $n \geqslant 3$, fijada h, en $\Gamma^{-1}(h)$ existirá al menos una familia (n-2)-paramétrica de toros (n-l) dimensionales para el hamiltoniano (4.3.6), hecho que será de gran importancia en el capítulo siguiente.

Demostración. Escribamos las ecuaciones asociadas al hamiltoniano (4.3.6):

$$\dot{\phi}_j = \frac{\partial \Gamma}{\partial I_j} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial I_j}(I) + \frac{\partial \Gamma^{(M)}}{\partial I_j}(\phi_n, I) = \alpha_j + \ldots + a\,\frac{\partial (2r)^{k^0/2}}{\partial I_j}\cos(\phi_n - b)$$

$$j = 1,\ldots,n$$

$$\dot{\phi}_n = \frac{\partial \Gamma}{\partial I_j} = \frac{\partial \Gamma_0}{\partial I_j}(I) + \frac{\partial \Gamma^{(M)}}{\partial I_j}(\phi_n, I) = (\alpha, k^0) + 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}\,k_i^0\,I_j -$$

$$+(4\sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}k_i^0k_j^0)I_n + \ldots + a\,\frac{\partial (2r)^{k^0/2}}{\partial I_n}\cos(\phi_n - b)$$

$$\dot{I}_j = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_j} \equiv 0 \qquad j = 1,\ldots,n$$

$$\dot{I}_n = -\frac{\partial \Gamma}{\partial \phi_n} = -\frac{\partial \Gamma^{(M)}}{\partial \phi_n}(\phi_n, I) = a(2r)^{k^0/2}\,\mathrm{sen}(\phi_n - b) \tag{4.3.7}$$

donde hemos usado la expresión de $\Gamma^{(2)}$, $\Gamma^{(4)}$ en función de I, que ya aparece desarrollada en (4.3.5). Impongamos ahora que $\dot{\phi}_n = \dot{I}_n = 0$, con el fin de obtener toros invariantes n-1 dimensionales en (4.3.7). De $\dot{I}_n = 0$ obtenemos dos soluciones: $\phi_n^* = b, b+\pi$ $((2r)^{k^0/2} > 0$. Si en $\dot{\phi}_n = 0$ conservamos sólo los tres primeros sumandos, obtenemos

$$0 = \delta + 4\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n-1}\alpha_{ij}k_i^0\,I_j + (4\Delta)I_n \tag{4.3.8}$$

donde $\delta = (\alpha, k^0)$, $\Delta = \sum_{i,j=1}^{n}\alpha_{ij}\,k_i^0\,k_j^0$. La solución de (4.3.8) es

$$I_n = -\frac{\delta + 4\Sigma\,\Sigma\,\alpha_{ij}\,k_i^0\,I_j}{4\Delta},$$

y como, por hipótesis, $|\delta| < 4\rho|\Delta|$, existe, para cada $I_1,\ldots,I_{n-1}$

suficientemente pequeños, I_n solución única de (4.3.8), con $||I|| =$ $= ||(I_1,\dots,I_n)|| < \rho$. Como $4\Delta \neq 0$, si tenemos en cuenta toda la expresión correspondiente a $\dot{\phi}_n = 0$, también para cada $I_1^*,\dots,I_{n-1}^*$ suficientemente pequeños, por el teorema de la función implícita, existe I_n^* solución de $\frac{\partial\Gamma}{\partial I_n}(\phi_n^*,I) = 0$, con $||I^*|| = ||(I_1^*,\dots,I_n^*)|| < \rho$. Podemos suponer, además, que $I_n > 0$, ya que podemos suponer que $\delta\Delta < 0$, sin más que cambiar k^0 por $-k^0$, si hace falta.

Sea $T^*(I_1^*,\dots,I_{n-1}^*)$ un toro n-1 dimensional invariante de (4.3.7), de ecuaciones

$$T^* = T^*(I_1^*,\dots,I_{n-1}^*) = \{(\phi,I):\ \phi_n = \phi_n^*,\ \ I = I^*\}$$

con I_n^* dado por $\frac{\partial\Gamma}{\partial I_n}(\phi_n^*,I_1^*,\dots,I_{n-1}^*,I_n^*) = 0$, y ϕ_n^* dado por $\mathrm{sen}(\phi_n^*-b) = 0$. Estudiemos cómo es el flujo sobre T^*. Claramente $I_j(t) = I_j^*, j = 1,\dots,n-1$ y $\dot{\phi}_j = \frac{\partial\Gamma}{\partial I_j}(\phi_n^*,\ I^*) = \text{cte.}$, $j = 1,\dots,n-1$, con lo que en T tenemos un flujo lineal análogo al de (2.2.2)

Estudiemos ahora el comportamiento de una órbita de (4.3.7), cerca del toro T^*. Las variables I_j, $j = 1,\dots,n-1$, permanecen constantes, $I_j =$ $= I_j^0$, $j = 1,\dots,n-1$, y si conocemos $\phi_n(t)$, $I_n(t)$, mediante una cuadratura conoceremos $\phi_j(t)$, $j = 1,\dots,n-1$. Y las órbitas asociadas a $(\phi_n(t), I_n(t))$ se obtienen a partir de

$$\Gamma(\phi_n,I_1^0,\dots,I_{n-1}^0,\ I_n) = \Gamma(\phi_n^0,I_1^0,\dots,I_n^0)$$

Todo esto es consecuencia de que, como ya se había dicho en el teorema del apartado anterior, el hamiltoniano (4.3.6) es integrable. Escribiendo sólo las ecuaciones correspondientes a $\dot{\phi}_n$, $\dot{I}_n$ se obtiene

$$\dot{\widehat{\phi_n-\phi_n^*}} = \dot{\phi}_n = \frac{\partial\Gamma}{\partial I_n} = \frac{\partial\Gamma}{\partial I_n}(\phi_n^*,I^*) + \frac{\partial^2\Gamma}{\partial I_n^2}(\phi_n^*,I^*)(I_n-I_n^*) + O_2 =$$

$$= (4\Delta)(I_n-I_n^*) + O_2$$

$$\dot{\widehat{I_n-I_n^*}} = \dot{I}_n = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi_n} = -\frac{\partial\Gamma}{\partial\phi_n}(\phi_n^*,I_n^*) - \frac{\partial^2\Gamma}{\partial\phi_n^2}(\phi_n^*,I_n^*)(\phi_n-\phi_n^*) + O_2 = \tag{4.3.9}$$

$$= \pm a(2r^*)^{k^0/2}(\phi_n-\phi_n^*) + O_2\ , \quad (r^* = (I_1+k_1^0 I_n^*,\ldots,k_n^0 I_n^*)),$$

con $O_2 = O(|\phi-\phi_n^*|^2 + |I_n-I_n^*|^2)$ y el signo $+$ en la segunda ecuación de (4.3.9) corresponde a $\phi_n^* = b$, y el signo $-$ a $\phi_n^* = b+\pi$. Llamando $u = \phi_n-\phi_n^*$, $v = I_n-I_n^*$, (4.3.9) queda:

$$\dot{u} = (4\Delta)v + O_2\ ,$$
$$\dot{v} = \pm a(2r^*)^{k^0/2}u + O_2\ . \tag{4.3.10}$$

Estudiemos la parte lineal de (4.3.10) :

$$\dot{u} = (4\Delta)v\quad ,\quad \dot{v} = \pm a(2r^*)^{k^0/2}u \tag{4.3.11}$$

de matriz asociada $\begin{pmatrix} 0 & 4\Delta \\ \pm a(2r^*)^{k^0/2} & 0 \end{pmatrix}$ con valores propios asociados $\lambda = \pm 2(2r^*)^{k^0/2}\sqrt{\pm a\Delta}$ no nulos, debido a que $a\Delta \neq 0$. Si $a\Delta > 0$, los valores propios son reales si $\phi_n^* = b$, e imaginarios puros si $\phi_n^* = b+\pi$. Al revés si $a\Delta < 0$. Para fijar ideas, supongamos que $a\Delta > 0$.

En el caso en que los valores propios son reales, existe una única curva invariante C^s de (4.3.10) cumpliendo

$$(u(0),\ v(0)) \in C^s \Rightarrow (u(t),\ v(t)) \xrightarrow[t\to\infty]{} (0,0)$$

(teorema de la variedad estable, véase (19), pág 330), y asimismo una única curva invariante C^u de (4.3.10) cumpliendo

$$(u(0),\ v(0)) \in C^u \Rightarrow (u(t),\ v(t)) \xrightarrow[t\to-\infty]{} (0,0).$$

Dado un campo X sobre una variedad M, y dado un punto crítico m de X, decimos que es <u>hiperbólico</u> si sus <u>exponentes característicos</u> en dicho punto, es decir, los valores propios de la matriz $(\partial X_i/\partial x_j)$ en el punto m, donde $(x_1,\dots,x_n)$ es un sistema de coordenadas arbitrario, tienen todos parte real no nula (los exponentes característicos no dependen del sistema de coordenadas elegido, véase (1), pág 72). Así el punto $\phi_n^* = b$, I_n^* es un punto hiperbólico de (4.3.9), con curvas invariantes estable e inestable asociadas, cuyas ecuaciones conocemos ya que vienen dadas por

$$\Gamma(\phi_n, I_1^*, \dots, I_{n-1}^*, I_n) = \Gamma(\phi_n^*, I^*) = \text{cte.}$$

Así, si llamamos W^sT $(W^uT) = \{(\phi^0, I^0) : (\phi(t,\phi^0,I^0),\ I(t,\phi^0,I^0)) \to \Gamma^*\},\ t \to +(-)\infty\}$, entonces

$$W^sT^*,\ W^uT^* \subset \{(\phi,I):\ I_j = I_j^*,\ j = 1,\dots,n-1,\ \Gamma(\phi_n, I_1^*,\dots,I_{n-1}^*, I) = \Gamma(\phi_n^*, I^*)\}.$$

Localmente $W^\alpha T^* = \{(\phi,I) : I_j = I_j^*,\ j=1,\dots,n-1,\ (\phi_n - \phi_n^*, I_n - I_n^*) \in C^\alpha\}$

$\alpha = s,u$, con lo que $W^\alpha T^*$ son variedades n-dimensionales conteniendo a T^*.

En el caso en que los valores propios sean imaginarios puros, el hamiltoniano $(\phi_n, I_n) \longrightarrow \Gamma(\phi_n, I_1, \ldots, I_{n-1}, I_n)$ tiene su parte cuadrática definida en (ϕ_n, I_n) (puede ponerse en la forma de (4.1.3)) con lo que (ϕ_n, I_n) es un punto estable ((1), pág 207), que está rodeado por órbitas periódicas: es un centro ((35), pág 173). Mediante un cambio canónico de variables en un entorno de (ϕ_n, I_n), $(\phi, I) \to (\theta, R)$, el nuevo hamiltoniano $\Gamma(\theta, R)$ depende sólo de $R = R_1, \ldots, R_n$, con $R_j = I_j \quad j = 1, \ldots, n-1$

$$R_n = 1/(2\ ) \oint_{T^1} f(\phi_n, I_1, \ldots, I_{n-1}, h)\, d\phi_n \quad , \text{ donde } f(\phi_n, I_1, \ldots, I_{n-1}, h) = I_n$$

si y sólo si $\Gamma(\phi_n, I_1, \ldots, I_{n-1}, I_n) = \Gamma(\phi_n^*, I^*) + h$ (véase (10), pág 278). Claramente en estas nuevas coordenadas, T^* viene dado por $R_n = 0$. c.q.d.

NOTA 1 : Para un punto elíptico de orden (al menos) M, el que pueda ser escrito en la forma (4.3.6), cumpliendo las condiciones $a \neq 0$, $|(\alpha, k^0)| < 4\rho \, |\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} k_i^0 k_j^0|$, es una condición muy general que se cumplirá "casi siempre", en un sentido que se precisará en el apartado (7.2).

NOTA 2 : Hemos visto, en el transcurso de la demostración de este teorema, que localmente, en un entorno U de un toro invariante hiperbólico n-1 dimensional, se cumple que $(W^s T^* \cup W^u T^*) \cap U = \{(\phi, I) \in U : I_j = I_j^*,$ $j = 1, \ldots, n-1, \ \Gamma(\phi_n, I_1^*, \ldots, I_{n-1}^*, I_n) = \Gamma\ (T\ )\}$. Restringiéndonos a las variables (ϕ_n, I_n), y al hamiltoniano $G(\phi_n, I_n) = \Gamma(\phi_n, I_1^*, \ldots, I_{n-1}^*, I_n) - \Gamma(\phi_n^*, I_n^*)$, 2π-periódico en ϕ_n, las curvas invariantes C^s, C^u pasando por el punto (ϕ_n^*, I_n^*) son como se indican en la figura, que es 2π-periódica en ϕ_n :

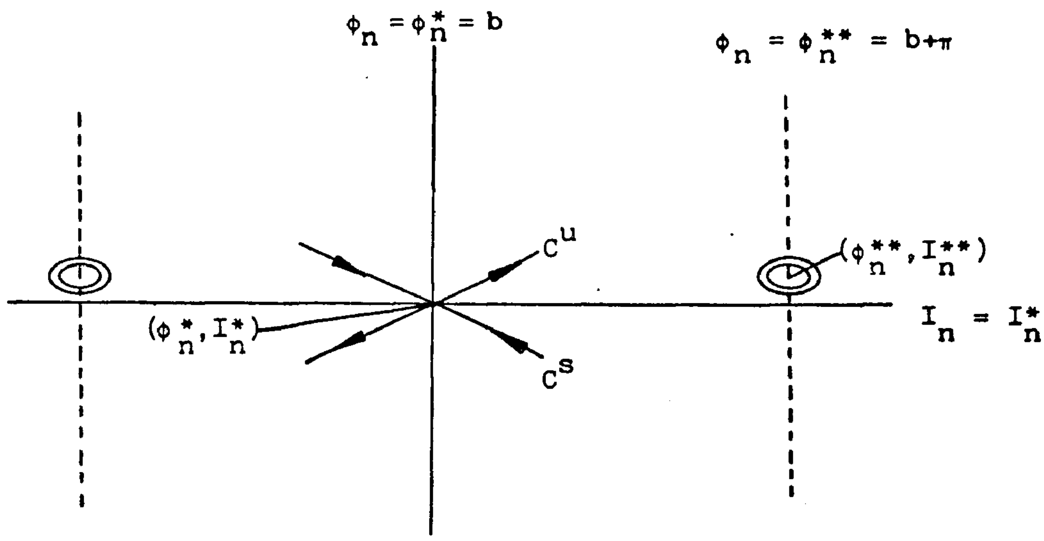

Figura 4.1

Por ser G integral primera, entonces C^s, $C^u \subset G^{-1}(d)$, donde $d = G(\phi_n^*, I_n^*)$. La función G la podemos escribir en la forma

$$G(\phi_n, I_n) = \Gamma(\phi_n, I_1^*, \ldots, I_{n-1}^*, I_n) = P(I_n) + Q(I_n)(1 - \cos(\phi_n - b))$$

con P, Q polinomios de grado $\leqslant [M/2]$ cuyos coeficientes dependen de $I_1^*, \ldots, I_{n-1}^*$. Como $G(\phi_n, I_n) = d$, $\frac{\partial G}{\partial I_n}(\phi_n^*, I_n^*) = \frac{\partial G}{\partial \phi_n}(\phi_n^*, I_n^*) = 0$, y $\frac{\partial^2 G}{\partial I_n^2}(\phi_n^*, I_n^*) = 4\Delta$, $\frac{\partial^2 G}{\partial \phi_n^2}(\phi_n^*, I_n^*) = -a(2r\ )^{k^0/2}$ (véase (4.3.9)), entonces

$P(I_n^*) = d$, $P'(I_n^*) = 0$, $P''(I_n) = 4\Delta$, $Q(I_n^*) = -a(2r^*)^{k^0/2}$, con lo que G es del tipo

$$G(\phi_n, I_n) = G(\phi_n^*, I_n^*) + (2\Delta)(I_n - I_n^*)^2 + O_3(I_n - I_n^*) - \left[a(2r^*)^{k^0/2} + O_1(I_n - I_n^*)\right](1 - \cos(\phi_n - b)) \tag{4.3.12}$$

En $O_3(I_n-I_n^*)$ aparecen términos de orden 3 o superior en $(I_n-I_n^*)$, cuyos coeficientes dependen explícitamente de $I_1^*,\dots,I_{n-1}^*$ y son por tanto $O(\rho)$. En $O_1(I_n-I_n^*)$ aparecen términos de orden 1 o superior en $(I_n-I_n^*)$ pero multiplicados por términos del orden de $\rho^{(M/2)-1}$, ya que

$r^{k^0/2} = (I_1+k_1^0 I_n)^{k_1^0/2} \dots (I_{n-1}+k_{n-1}^0 I_n)^{k_{n-1}^0/2} (k_n^0 I_n)^{k_n^0/2}$.

Recordemos además que, en un entorno del orden de ρ en I_n, las únicas soluciones de $\frac{\partial G}{\partial I_n} = \frac{\partial G}{\partial \phi_n} = 0$, eran (ϕ_n^*, I_n^*), (ϕ_n^{**}, I_n^{**}), donde $\phi_n^{**} = b+\pi$, con lo que $\frac{\partial G}{\partial \phi_n} \neq 0$ y por tanto, las curvas invariantes C^s, C^u estan definidas al menos para $|\phi_n-b| < \pi$. Basta encontrar su forma para $0 \leqslant \phi_n-b < \pi$, ya que son simétricas respecto al eje $\phi_n = b$. Para encontrar esta forma, resolvemos primero la ecuación $G(\phi_n,I_n) = G(\phi_n^*,I_n^*)$, despreciando los términos O_3, O_1 que aparecen en (4.3.12), y obtenemos

$$I_n = I_n^* \pm \sqrt{2a/\Delta}\ (2r^*)^{k^0/4} \operatorname{sen}((\phi_n-b)/2)$$

Así, $I_n-I_n = O(\rho^{M/4})$, con lo que podemos aplicar el teorema de la función implícita a la ecuación $G(\phi_n,I_n) = G(\phi_n^*,I_n^*)$ y obtenemos las ecuaciones siguientes para C^s, C^u :

$$I_n = I_n^* \pm \sqrt{2a/\Delta}\ (2r^*)^{k^0/4} \operatorname{sen}((\phi_n-b)/2) + O(\rho^{(M/4)-1}), \qquad (4.3.13)$$

con lo que C^s, C^u cortan al eje $\phi_n = b+\pi$ en los puntos $\pm\sqrt{2a/\Delta}\ (2r^*)^{k^0/4} + O(\rho^{(M/4)-1})$. Como G es 2π-periódica respecto a la variable ϕ_n, también lo son las curvas invariantes, y por tanto

$$C^s = C^u = \{(\phi_n,I_n) : G(\phi_n,I_n) = G(\phi_n^*,I_n^*)\} .$$

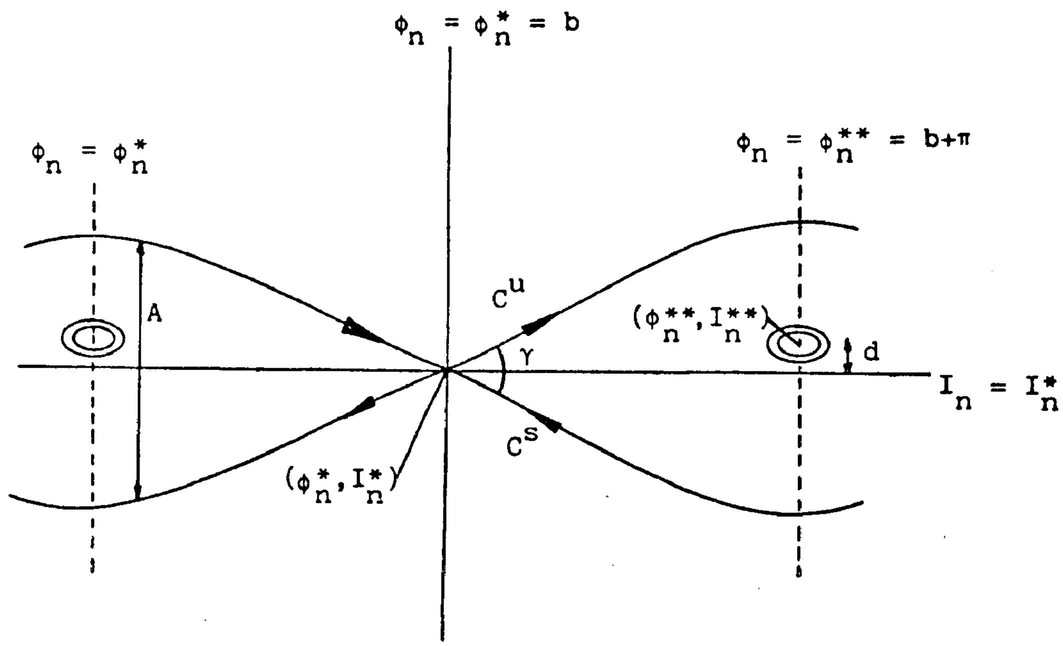

Figura 4.2

Luego W^sT, W^uT constituyen una componente conexa de

$W^0T = \{ (\phi, I) : I_j = I_j^* \quad j = 1, \ldots, n-1, \quad \Gamma(\phi_n, I_1, \ldots, I_{n-1}, I_n) = \Gamma \ (T) \}$,

y restringiéndonos a un entorno de T, tenemos que $W^sT = W^uT = W^0T$, es decir, las variables estable e inestable coinciden, y están compuestas por órbitas <u>homoclínicas</u> : si $(\phi(0), I(0)) \in W^0$, $(\phi(t), I(t)) \xrightarrow[t \to \pm\infty]{} T$. Por ejemplo, en la figura superior, (ϕ_n^*, I_n^*) tiene asociadas dos órbitas homoclínicas.

NOTA 3 : Obsérvese que la distancia, en lo referente a la componente I_n, de los toros invariantes al origen, a igualdad de las otras componentes $I_1, \ldots, I_{n-1}$, varía ligeramente según sean los toros invariantes hiperbólicos o elípticos. Esto es debido a que la ecuación que da la componente I_n del toro invariante en función de $I_1,\dots,I_{n-1}$ es del tipo (véase 4.3.7)

$$\delta + 4 \Sigma \Sigma \alpha_{ij} k_i^0 I_j + (4\Delta) I_n + \dots \pm a \frac{\partial (2r)^{k^0/2}}{\partial I_n} = 0,$$

cambiando sólo el signo del último sumando, que es positivo para $\phi_n^* = b$, y negativo para $\phi_n^{**} = b+\pi$. Si $a\Delta > 0$, el signo + corresponde a un toro hiperbólico, y el − a un toro elíptico que por tanto se encuentra más alejado $(\delta\Delta < 0)$. Si $a\Delta < 0$ ocurre lo mismo: los toros hiperbólicos se encuentran más cercanos al origen que los elípticos.

NOTA 4 : En el teorema hemos impuesto que $a \neq 0$, es decir, que el primer término resonante del tipo $a(2r)^{k^0/2} \cos(\phi_n - b)$ sea no nulo. Si a fuese nulo, pero para $M \leq s \leq N$, encontrásemos algún coeficiente $c_{\ell m} \neq 0$ en la expresión de $\Gamma^{(s)}(\phi, I) = \sum_{\substack{\ell - m = pk^0, |\ell|+|m|=s \\ p \in \mathbb{Z}}} c_{\ell m} (2r)^{(\ell+m)/2} e^{-ip\phi_n}$

(véase (4.3.5)) entonces en vez de (4.3.6) escogeríamos un hamiltoniano del tipo

$$\Gamma(\phi, I) = \Gamma_0(I) + \Gamma^{(s)}(\phi_n, I)$$

con $\Gamma^{(s)}(\phi_n, I) = P(I) \cos p\phi_n + Q(I) \text{ sen } p\phi_n$, $p > 1$, siendo P,Q polinómios homogéneos de grado s. Entonces para cada cero de

$I_n \longmapsto \frac{\partial P}{\partial I_n}(I_1,\dots,I_n) \pm \frac{\partial Q}{\partial I_n}(I_1,\dots,I_n$, fijados $I_1,\dots,I_{n-1}$, puede verse que existen p toros invariantes n-1 dimensionales hiperbólicos, y p toros elípticos sin más que repetir los pasos de la demostración del teorema

NOTA 5 : Más adelante veremos que si añadimos a (4.3.6) la "cola" que hemos despreciado, y que aparecía en (4.3.5), siguen conservándose toros invariantes n-1 dimensionales hiperbólicos (véase el apartado (5.2)).

NOTA 6 : Hemos visto que cada toro hiperbólico (n-1)-dimensional, tenía asociados dc valores propios $\lambda = \pm 2(2r^*)^{k^0/4}\sqrt{|a\Delta|}$, con $r^* = (I_1^* + k_1^0 I_n^*,\ldots,I_{n-1}^* + k_{n-1}^0 I_n^*, k_n^0 I_n^*)$, donde hemos supuesto, por comodidad, que $k_j^0 \geq 0$, $j = 1,\ldots,n$. I_n^* venía dado por

$$(-4\Delta)I_n^* = \delta + 4\sum_{j=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}k_i^0\right)I_j^* + O(I_1^*,\ldots,I_{n-1}^*)^2,$$

para cada $I_1^*,\ldots,I_{n-1}^*$ tal que $|4\sum\sum\alpha_{ij}k_i^0 I_j^*| < \mu$, con $\mu < \mu_0 = \rho(1-|\delta|4\rho\Delta|) < \rho$.

Apuntemos algunas estimaciones con respecto e este parámetro. Así $I_n^* = (-\delta/4\Delta) + O(\mu)$, $r^* = (-\delta/4\Delta)k^0 + O(\mu)$, $\lambda = \pm c_0(-\delta/2\Delta)^{M/4}(1+O(\mu))$,

con $c_0 = 2\sqrt{|a\Delta|}\ {k^0}^{(k^0/4)}$ (recordemos que $\delta\Delta < 0$). $\gamma \simeq 2\lambda$ representa el ángulo entre las variedades invariantes estable e inestable asociadas al toro $T(I_1,\ldots,I_{n-1})$ (al menos en lo referente a las variables ϕ_n, I_n). La "anchura' (distancia máxima entre la variedad estable y la inestable) entre variedades viene dada por $A = (\sqrt{2}/\Delta)|\lambda|(1+O(\mu)) = c_1(-\delta/2\Delta)^{M/4}(1+O(\mu))$ con $c_1 = (\sqrt{2}/\Delta)c_0$. Finalmente recordemos que la distancia de un toro hiperbólico al origen era más pequeña que la distancia de un toro elíptico al origen, en lo referente a la componente I_n, y una vez fijadas las componentes $I_1,\ldots,I_n$ (véase la nota 3). Esta diferencia d de distancias viene dada por

$$d = (a/4\Delta)\ \frac{\partial (2r)^{k^0/2}}{\partial I_n}\ \Big|_{r^*} + O(\mu) = (\sqrt{\bar{c}_0}n/2)(-\delta/2\Delta)^{(M/2)-1}(1 + O(\mu))$$

(véase la figura 4.2 para una representación de estas magnitudes).

NOTA 7 : Aunque la forma normal del apartado (4.2) ha sido formulada sólo para sistemas hamiltonianos, puede encontrarse una forma normal análoga para aplicaciones globalmente canónicas, definidas sobre variedades simplécticas 2n-dimensionales, así como resultados concernientes a la existencia de toros invariantes hiperbólicos y elípticos (n-1)-dimensionales. Por ejemplo, para aplicaciones T que conservan área, definidas en superficies (n = 1), pueden encontrarse puntos (toros 0-dimensionales) periódicos de T, unos hiperbólicos y otros elípticos, con una disposición semejante, localmente, a la de la figura 4.2, y unas estimaciones para λ, r , A, d, del mismo tipo (véase, por ejemplo, (80)(11)

NOTA 8 (y última) : En el hamiltoniano (4.3.6) hemos supuesto que α estaba "cerca de una resonancia", es decir, $|(\alpha,k^0)| < 4\rho\Delta$, e imponíamos que el coeficiente a correspondiente al primer término "resonante" de (4.3.6) fuese no nulo. Si sabemos además que α se encuentra cerca de "resonancia multiple", es decir, existan $k^1,\dots k^r$, $1 \leq r \leq n$ vectores independientes de $\mathbb{Z}^n$, $|k^i| \leq M$, $i = 1,\dots,r$ tales que $|(\alpha,k^i)| < 4\rho\Delta$, $i = 1,\dots,r$, es razonable suponer que si algunos coeficientes correspondientes a los primeros términos resonantes cumplen algunas condiciones de no degeneración, pueda asegurarse la existencia de toros hiperbólicos y elípticos, pero de dimensión n-r. Este caso no ha sido tratado aquí porque no es necesario para los capítulos 5 y 6, pero puede ser de gran utilidad en algunos casos concretos, debido a que la parte intrínsicamente hiperbólica asociada a un toro hiperbólico, es decir, el número de valores propios λ con parte real no nula es $2r$. Así, para $r = n-1$, encontraríamos órbitas periódicas totalmente hiperbólicas en el sistema hamiltoniano, es decir, con $2n-2$ multiplicadores característicos asociados cuyo módulo es diferente de 1.

CAPITULO 5

CADENAS DE TRANSICION

5.1. Mecanismo de cadenas de transicion

Sea un sistema dinámico clásico, es decir, definido por un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas

$$\dot{x} = X(x) \qquad x \in M \tag{5.1.1}$$

con M una variedad riemanniana m-dimensional, X un campo vectorial C^r($x \in \chi^r(M)$), $r \geq 1$, de flujo asociado $(t,x) \mapsto \Phi(t,x) = \Phi_t(x)$.

DEFINICION. Diremos que un (conjunto difeomorfo a un) toro d-dimensional ($d \geq 0$) $T \subset M$ es un toro con mostachos del sistema (5.1.1) si

a) T es un toro invariante con respecto a (5.1.1): $\Phi(t,x) \in T, \forall t \in \mathbb{R}, \forall x \in T$.

b) T tiene asociadas una variedad estable W^sT y otra inestable W^uT de clase C^s $s \geq 1$, o sea:

b1) $x \in W^sT \Rightarrow \Phi(t,x) \in W^sT \quad \forall t \in \mathbb{R}$ y dist $(\Phi(t,x),T) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

b2) $x \in W^uT \Rightarrow \Phi(t,x) \in W^uT \quad \forall t \in \mathbb{R}$ y dist $(\Phi(t,x),T) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

b3) T está contenido en una componente conexa de $W^sT \cap W^uT$

Diremos que W^sT es el mostacho entrante de T, y W^uT el mostacho saliente. Otra definición equivalente, de un caracter local, es la siguiente: T es un toro con mostachos si es invariante y si existen dos subvariedades $W^s_{loc}T$ de M, de clase C^s y tales que

b'1) $x \in W^s_{loc}T \Rightarrow \Phi(t,x) \in W^s_{loc}T$, $\forall t \geq 0$, y dist $(\Phi(t,x),T) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$

b'2) $x \in W^u_{loc}T \Rightarrow \Phi(t,x) \in W^u_{loc}T$, $\forall t \leq 0$, y dist $(\Phi(t,x),T) \xrightarrow[t \to -\infty]{} 0$

b'3) $T = W^s_{loc}T \cap W^u_{loc}T$

Para la equivalencia véase (24), pág 25.

Los conceptos anteriores pueden ser definidos de manera análoga si tenemos un <u>sistema dinámico discreto</u> (M,Φ) con $\Phi: M\to M$ difeomorfismo sobre la variedad M, donde la dinámica sobre M viene dada por $\{\Phi^n(x),\ n\in\mathbb{Z}\}$, $x\in M$, $\Phi^n = \Phi\circ\overset{n}{\cdots}\circ\Phi$. Un conjunto A es invariante por Φ si $\Phi(A) = A$. Así, sustituyendo $t\in\mathbb{R}$ por $n\in\mathbb{Z}$ obtemos la definición de toro con mostachos para un sistema discreto.

<u>Ejemplos</u>. Sea $M = \mathbb{R}^u\times\mathbb{R}^s\times\mathbb{R}^c\times T^d$ con flujo dado por las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax & x&\in\mathbb{R}^u\\ \dot{y} &= By & y&\in\mathbb{R}^s\\ \dot{z} &= 0 & z&\in\mathbb{R}^c\\ \dot{\Phi} &= \omega(z) & \Phi&\in T^d \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

con A,B, matrices reales cuadradas con valores propios con parte real positiva, negativa respectivamente, ω de clase C^r, $r\geq 1$, definida para $z\in U\subset\mathbb{R}^c$. Para cada $z\in U$, sea

$$T_z = \{(0,0,z,\Phi),\Phi\in T^d\} = \{(0,0,z)\}\times T^d\simeq T^d$$

T_z es un toro con mostachos del sistema (5.1.2), siendo $W^sT_z = \{(0,y,z,\Phi),\ y\in\mathbb{R}^s,\Phi\in T^d\}\simeq\mathbb{R}^s\times T^d$; $W^uT_z = \{(x,0,z,\Phi),\ x\in\mathbb{R}^u,\Phi\in T^d\}\simeq\mathbb{R}^u\times T^d$ que recibe el nombre de <u>toro con mostachos standard</u> (6).

Sea $C = \{(0,0,z,\Phi),z\in U,\ \Phi\in T^d\} = \bigcup_{z\in U} T_z$ la foliación formada por toros invariantes T_z. Se cumple que C es una variedad invariante asociada a (5.1.2), dotada también de variedades inavariantes $W^cC\equiv N^s = \{(x,y,z,\Phi)\in M: x=0\}$, $W^uC\equiv N^u = \{(x,y,z,\Phi)\in M:\ y=0\}$. C es, de hecho, un subconjunto normalmente hiperbólico del sistema (5.1.2). Con objeto de definir este concepto recordemos primero que si A es una transformación lineal, la norma de A, $\|A\|$, es sup $\{|Ax|, \ |x| = 1\}$ y la norma mínima de A, m(A), viene dada por $m(A)=\inf\{|Ax|, |x| = 1\}$. Cuando A inversible, $m(A)=\|A^{-1}\|^{-1}$.

DEFINICION Caso discreto . Sea $f:M\to M$ un difeomorfismo C^r, $r\geq 1$ sobre una variedad M. Diremos que una subvariedad $V\subset M$ es normalmente hiperbólica para f si es invariante por f $(f(V) = V)$, si existe una descomposición invariante por Tf, $T_xM = N_x^u \oplus T_xV \oplus N_x^s$ para cada $x\in V$, que varía contínuamente con $x\in V$, y si existe una estructura riemanniana sobre TM tal que para cualquier $x\in V$

a) $m(N_x^u f) > \|V_x f\|$

b) $\|N_x^s f\| < m(V_x f)$

donde $N_x^u f = T_x f: N_x^u \to N_x^u$, $N_x^s f = T_x f: N_x^s \to N_x^s$, $V_x f = T_x f: T_xV \to T_xV$.

DEFINICION Caso Contínuo. $V\in M$ es normalmente hiperbólica con respecto al sistema (5.1.1) correspondiente a un campo $X\in \chi^r(M)$, $r\geq 1$, si es normalmente hiperbólica para el flujo unidad Φ_1 correspondiente al campo X.

Comprobemos que C es normalmente hiperbólica respecto a (5.1.2) . El flujo asociado a (5.1.2) es

$$\Phi_t(x,y,z,\phi) = (e^{tA}x, e^{tA}y,z, \Phi + t\omega(z)) \qquad (5.1.3)$$

Si llamamos f a Φ_1, queda

$$f(x,y,z,\phi)= (e^A x,e^B y,z, \phi+\omega(z)) \qquad (5.1.4)$$

C es invariante con respecto a f, TM se descompone en $N^u \oplus N^s \oplus C$, $m(N_p f) = m(e^A) > 1$, $m(V_p f) = \|V_p f\| = 1$, $\|N_p^s f\| = \|e^B\| < 1$, $\forall\, p\in M$, con lo que resulta que C es normalmente hiperbolica.

La importancia de las variedades normalmente hiperbolicas reside en el siguiente

TEOREMA (sobre subvariedades normalmente hiperbólicas). Sea $V \subset M$ variedad normalmente hiperbólica bien respecto a un difeomorfismo $f: M \to M$ de clase C^r, $r \geq 1$, bien respecto a un sistema generado por un campo $X \in \chi^r(M)$, $r \geq 1$, de flujo asociado $\{\phi_t\}$, con $f = \phi_1$, con descomposición $T_V M = N^u \oplus TV \oplus N^s$. Entonces

a) Existencia Existen subvariedades invariantes locales W^u, W^s en un entorno U de V, tangentes en V a $N^u \oplus TV$, $TV \oplus N^s$

b) Unicidad Todo conjunto invariante cerca de V está en $W^u \cup W^s$.

c) Caracterización W^s está compuesto por todos los puntos cuyas órbitas positivas permanecen siempre en U. W^u está compuesto por todos los puntos cuyas órbitas negativas permanecen siempre en U.

d) Diferenciabilidad W^u, W^s y V son C^r.

e) Permanencia Si f' es otro difeomorfismo C^r, que está C^r-cerca de f, entoces existe una única subvariedad $V' \subset M$, C^r-cerca de V, que es normalmente hiperbólica con respecto a f'. Las variedades $W^u(f')$, $W^s(f')$ están C^r-cerca de las de f.

f) Linearización Sea $Nf = Tf|N^u \oplus N^s$, esto es, $Nf(x, v^u, v^s) = (f(x), T_x f(v^u), T_x f(v^s))$, para $x \in M$, $v^u \in N^u_x$, $v^s \in N^s_x$. Entonces, cerca de V, f es topológicamente conjugada a Nf, es decir, existen un entorno U_1 de V en M, un entorno U_2 de V en $(N^u \oplus N^s)|V$, y un homeomorfismo $h: U_1 \to U_2$ tal que $h \circ f = Nf \circ h$. Para la demostración, véase (38) (63).

Así por ejemplo, si perturbamos (5.1.2) y consideramos

$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + \varepsilon F_1(p,\varepsilon) \\ \dot{y} &= By + \varepsilon F_2(p,\varepsilon) \\ \dot{z} &= \qquad \varepsilon F_3(p,\varepsilon) \\ \dot{\phi} &= \omega(z) + \varepsilon F_4(p,\varepsilon) \end{aligned}\right\} \quad \text{con } p = (x,y,z,\phi) \tag{5.1.5}$$

con $F = (F_1, F_2, F_3, F_4)$ de clase C^r, 2π-periodica de ϕ , entonces, si ε es suficientemente pequeño, existe una variedad invariante C_ε de clase C^r, de ecuaciones

$$x = \varepsilon h(z,\phi,\varepsilon), \quad y = \varepsilon g(z,\phi,\varepsilon) \tag{5.1.6}$$

con h,g de clase C^r, 2π-periódica en ϕ , y $Dh(0,\phi,\varepsilon)= 0$, $Dg(0,\phi,\varepsilon)= 0$, $\forall\phi\in T^d$, por la condicion e) .

El movimiento en C_ε viene dada por

$$\dot{z} = \varepsilon G_3(z,\phi,\varepsilon), \quad \dot{\phi} = \omega(z) + \varepsilon G_4(z,\phi,\varepsilon) \tag{5.1.7}$$

con $G_i(z,\phi,\varepsilon) = F_i(\varepsilon h(z,\phi,\varepsilon),\ \varepsilon g(z,\phi,\varepsilon),\ z,\phi,\varepsilon)$, $i=3,4$

Por último, el flujo asociado a (5.1.5) es topológicamente conjugado, según f) al del sistema.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax \\ \dot{y} &= By \\ \dot{z} &= \varepsilon G_3(z,\phi,\varepsilon) \\ \dot{\phi} &= \omega(z) + \varepsilon G_4(z,\phi,\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

Pasemos ahora a definir un concepto importante: el de toro de transición. Previamente, introduciremos unos conceptos necesarios para esta definición.

Dado un subconjunto Ω de una variedad diferenciable X, y dada M subvariedad de X, diremos que Ω <u>corta el paso a M en $x\in M$</u> (o que Ω obstruye a M en $x\in M$) si cualquier subvariedad N de X, transversal en x a M, tiene intersección no vacía con Ω(véase figuras 5.1,5.2(Recordemos que dos subvariedades M,N de una variedad X son transversales en un punto $x\in M\cap N$ si $T_xM + T_xN = T_xX$. Esto se escribe simbólicamente $M \pitchfork_x N$)

Así, en símbolos, Ω corta el paso a M en $x\in M$ si

$$N \pitchfork_x M \Rightarrow N\cap\Omega \neq \emptyset$$

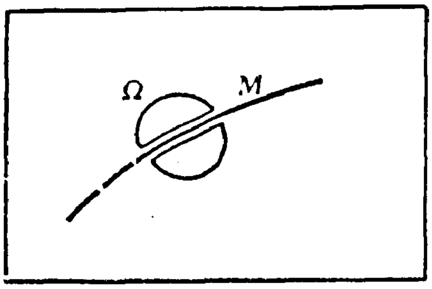

Figura 5.1.

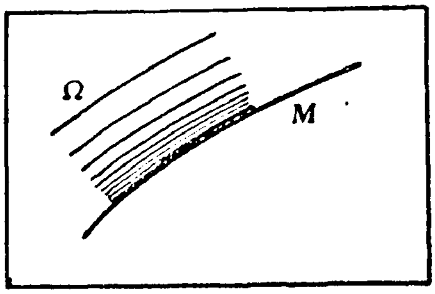

Figura 5.2.

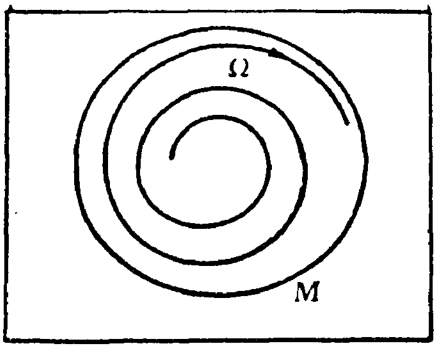

Figura 5.3.

Si Ω corta el paso a M en todo punto $x \in M$, diremos que Ω corta el paso a M (véase figura 5.3)

Este concepto es fácil de visualizar. Así, si un conjunto Ω corta el paso a una subvariedad M en un punto $x \in M$, cualquier curva que pase por x y cuyo vector no sea tangente a M, es decir, se "salga" de M en x, se encuentra con el conjunto Ω :este conjunto Ω corta el paso a M en x. Claramente esta propiedad se conserva por difeomorfismos $f: X \to X$.

DEFINICION. Sea T un toro con mostachos del sistema (5.1.1). Diremos que T es un <u>toro de transición</u> del sistema (5.1.1) si el futuro de cualquier entorno de cualquier punto de W^sT corta el paso a W^uT(el futuro de un conjunto U es $\bigcup_{t>0} \Phi_t(U)$).

<u>Ejemplo</u>. Consideremos los toros con mostachos standard $T_z = \{(0;0,z,\phi), \phi \in T^d\}$ correspondientes al sistema (5.1.2) ,de ecuaciones asociadas

$\dot{x} = Ax, \qquad \dot{y} = By, \qquad \dot{z} = 0, \qquad \dot{\Phi} = \omega(z).$

El flujo asociado a cada toro T_z es lineal, con frecuencias $\omega_1(z),..,\omega_d(z)$

$\phi_j(t) = \phi_j^\circ + t\omega_j(z) \quad (\mathrm{mod}\ 2\pi), \quad t \in \mathbb{R}, \quad j=1,..,d.$

PROPOSICION T_z es un toro de transición si y sólo si $\omega_1(z),...,\omega_d(z)$ son inconmensurables.

Para la demostración véase (12). Recordemos que, en el caso en que nos ocupa , toda órbita de T_z es densa, mientras que si $\omega_1(z),...,\omega_d(z)$ no son inconmensurables , no existe ninguna órbita densa (véase capítulo 2). Un sistema dinámico dado por un flujo $\{\Phi_t\}$ o por un difeomorfismo f sobre una variedad M se llama <u>topológicamente transitivo</u> si existe una órbita densa. Así, fijémonos que de entre los toros con mostachos T_z del sistema (5.1.2), los únicos que son de transición son aquellos cuyo flujo restringido es topológicamente transitivo. Esta transitividad topológica sobre T_z es la que "distribuye en cualquier dirección con respecto a la variedad inestable" las órbitas que se acercan a T próximas a su variedad estable.

Si T es un toro de transición, entornos arbitrarios de puntos arbitrarios de las variedades estable e inestable , están conectados por trayectorias del sistema. Si tenemos dos toros de transicion, también existirá esta transición siempre que las variedades invariantes se corten transversalmente. Más concretamente se cumple el

TEOREMA (6). Sean $T_1,...,T_k$ toros de transicion tales que la variedad invariante inestable W^uT_j de cada toro interseque transversalmente a la variedad estable W^sT_{j+1} del siguiente toro T_{j+1} (en símbolos , $W^uT_j \pitchfork W^sT_{j+1}$), para $1 \leq j < k$. Entonces el futuro de cualquier entorno de cualquier punto de W^sT_1

corta el paso a W^uT_k.

En particular, para entornos cualesquiera U, V de puntos $\xi_1 \in W^sT_1$, $\eta_k \in W^uT_k$ existe una órbita del sistema $\{x(t),\ t\in[0,\tau]\}$ que los conecta : $x(0)\in U$, $x(\tau)\in V$. En particular, para entornos cualesquiera de T_1, T_k, existe una órbita del sistema que los conecta.

Dados dos toros de transicion T_1 , T_2 sobre una variedad M, $T_1 \neq T_2$, diremos que hay transición de T_1 a T_2 y lo escribimos en símbolos mediante $T_1 \longrightarrow T_2$ si existe $x\in M$ tal que $W^uT_1 \underset{x}{\overline{\pitchfork}} W^sT_2$. Dado un toro de transición T, diremos que hay <u>transición de T a T</u> si existe $x \notin T$ tal que $W^uT \underset{x}{\overline{\pitchfork}} W^sT$. Toda sucesión del tipo $T_1 \to T_2 \to T_3 \to \ldots\ldots$, finita o infinita, recibe el nombre de <u>cadena de transición</u>. Todas estas definiciones, así como las de las páginas anteriores se traducen inmediatamente en el caso en que en vez de un sistema dinámico dado por ecuaciones como en(5.1.1), tengamos un difeomorfismo $f:M\to M$, sin más que tener en cuenta que en este caso, las órbitas son sucesiones de iterados por f: $\{f^kx,\ k\in\mathbb{Z}\}$.

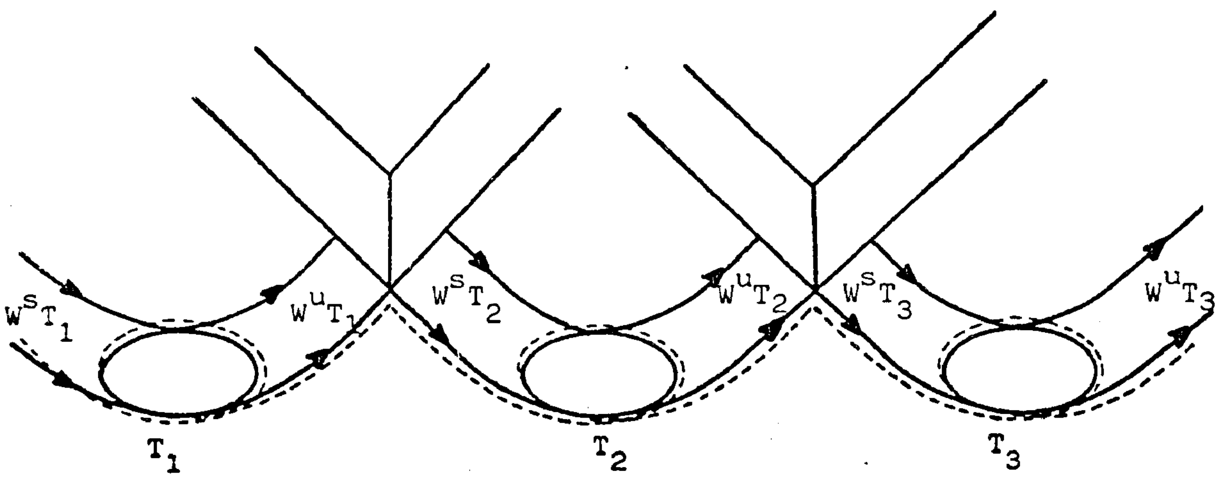

Figura 5.4.

Por el teorema anterior, la existencia de una cadena de transición señala una separación efectiva de órbitas próximas a T_1 hasta un entorno de cualquier toro posterior en la cadena, e indica, por tanto, si la distancia entre estos toros es mayor que ρ , la imposibilidad de que T_1 sea ρ-estable (véase el apartado 3.5), y por añadidura, la imposibilidad de que T_1 sea estable. Ésta será la herramienta clave para la detección de difusion de Arnold, como se verá en el capítulo 7.

Si $T_1 \to T_2$, entonces existe x tal que $W_1^u \overline{\pitchfork}_x W_2^s$,donde $W_1^u = W^u T_1$, $W_2^s = W^s T_2$. Al ser W_1^u, W_2^s invariantes la órbita γ pasando por x está contenida también en $W_1^u \cap W_2^s$, y en todo punto $y \in \gamma$ se cumple que $W_1^u \overline{\pitchfork}_y W_2^s$. La variedad $\Gamma = (W_1^u \cap W_2^s) \setminus (T_1 \cup T_2)$ es la unión de tales órbitas γ pasando por puntos $x \notin T_1 \cup T_2$, y si es no vacía (o sea, si existe $x \notin T_1 \cup T_2$ tal que $W_1^u \overline{\pitchfork}_x W_2^s$) recibe el nombre de <u>variedad heteroclínica transversal</u>, si $T_1 \neq T_2$, y <u>variedad homoclínica transversal</u> si $T_1 = T_2$. Así $\forall x \in \Gamma$, $\Phi_t(x) \xrightarrow[t \to -\infty]{} T_1$, $\Phi_t(x) \xrightarrow[t \to +\infty]{} T_2$, y $T_x W_1^u + T_x W_2^s = T_x M$.

Como la nocion de toro de transición es importante con respecto al problema de la estabilidad, veamos unas definiciones equivalentes.

PROPOSICION Sea $T \subset M$ un toro con mostachos asociados W^u, W^s. Sea $\{\Phi_t\}$ el flujo asociado al sistema. Los enunciados siguientes son equivalentes

a) T es un toro de transición.

b) Para cualquier subvariedad Δ transversal a W^s, $\bigcup_{t>0} \Phi_t(\Delta)$ corta el paso a W^u

c) Para entornos cualesquiera U,V de puntos $\xi \in W^s(T)$, $\eta \in W^u(T)$, respectivamente existe una órbita del sistema $\{\Phi(t), t \in [0,\tau]\}$ tal que $\Phi(o) \in U$, $\Phi(\tau) \in V$

DEMOSTRACION Claramente b) $\Rightarrow$ a) $\Rightarrow$ c) . Basta probar que c) $\Rightarrow$ b) . Sean $\xi \in W^s(T)$, $\eta \in W^u(T)$, sean Δ subvariedad transversal a $W^s(T)$ en $\xi (\Delta \underset{\xi}{\pitchfork} W^s(T))$, N subvariedad transversal a $W^u(T)$ en $\eta (N \underset{\eta}{\pitchfork} W^u(T))$. Queremos probar que existe una órbita del sistema $\{\Phi(t),\ t \in [0,\tau]\}$ tal que $\Phi(0) \in \Delta$, $\Phi(\tau) \in N$. El flujo en un entorno U sucifientemente pequeño de ξ es transversal a Δ, ya que el flujo restringido a $W^s(T)$ es transversal a Δ, y análogamente para un entorno V de η. Por c), existe $\{\Phi(t),\ t\in[0,\tau]\}$ tal que $\Phi(0) \in U$, $\Phi(\tau) \in V$. Debido a la transversalidad citada, existen $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ pequeños, tales que $\xi_1 = \Phi(\varepsilon_1) \in \Delta$, $\Phi(\tau + \varepsilon_2) \in V$. Así la órbita $\{\Phi(t),\ t \in [0, \tau + \varepsilon_2 - \varepsilon_1]\}$ cumpliendo $\Phi(0) = \xi_1$ es la orbita buscada.

Como consecuencia de esta proposición, obtenemos que la propiedad de transicion se conserva bajo conjugaciones topológicas. Así, por ejemplo, todo toro normalmente hiperbólico T es de transición si y solo si el flujo restringido a T contiene una órbita densa en T, es decir el flujo sobre T es topológicamente transitivo, ya que el flujo en un entorno de T es topológicamente conjugado a su parte lineal, que es del tipo de las ecuaciones (5.1.2), pero sin componente z.

5.2 Conservación de toros de transición

Queremos estudiar en este apartado la conservacion de toros de transición de un sistema bajo perturbaciones suficientemente pequeñas. Nos restringiremos a perturbaciones hamiltonianas sobre toros standard de transición. Así consideramos el sistema (5.1.5) :

$$\begin{aligned}
\dot{\phi} &= \omega(I) + \varepsilon F^1(z,\varepsilon), & \phi \in T^d \\
\dot{x} &= Ax + \varepsilon F^2(z,\varepsilon), & x \in \mathbb{R}^u \\
\dot{I} &= \varepsilon F^3(z,\varepsilon), & I \in \mathbb{R}^c \\
\dot{y} &= By + \varepsilon F^4(z,\varepsilon), & y \in \mathbb{R}^s
\end{aligned} \qquad \text{con } z=(\phi,x,I,y) \tag{5.2.1}$$

para que este sistema sea hamiltoniano, se ha de cumplir que $B = -A^T$, $d = c$, $u = s$, $\omega(I) = \operatorname{grad} H_o(I)$, $F^1_i(z,\varepsilon) = \frac{\partial H_1}{\partial I_i}(z,\varepsilon)$, $i=1,\dots,d$, $F^2_j(z,\varepsilon) = \frac{\partial H_1}{\partial y_j}(z,\varepsilon)$ $j=1,\dots,s$, $F^3_i(z,\varepsilon) = -\frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}(z,\varepsilon)$, $i=1,\dots,d$, $F^4_j(z,\varepsilon) = -\frac{\partial H_1}{\partial x_j}(z,\varepsilon)$, $j=1,\dots,s$.

Así, consideramos el hamiltoniano

$$H(z,\varepsilon) = \tilde{H}_o(z) + \varepsilon H_1(z,\varepsilon) = H_o(I) + y^T Ax + \varepsilon H_1(z,\varepsilon), \quad z = (\phi,x,I,y) \tag{5.2.2}$$

definido para $I \in U$ abierto de $\mathbb{R}^d$, $(x,y) \in V$ entorno del origen de $\mathbb{R}^{2s}$, $\phi \in \mathbb{R}^d$, $|\varepsilon| < \varepsilon_o$ con H 2π-periodico en ϕ. Debido a esta periodicidad podemos considerar a H definido para $\phi \in T^d$. Supondremos además que $A = (a_{jk})$ es una matriz <u>expansiva</u>, es decir, con todos sus valores propios con parte real positiva. Por tanto, $-A^T$ será una matriz <u>contractiva</u>, esto es, con todos sus valores propios con parte real negativa.

El sistema de ecuaciones asociado al hamiltoniano H de (5.2.2) viene dado por:

$$\begin{aligned}
\dot{\phi}_i &= \frac{\partial H_o}{\partial I_i}(I) + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial I_i}(\phi,x,I,y,\varepsilon), & \dot{x}_j &= \sum_{k=1}^{s} a_{jk} x_k + \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial y_j}(\phi,x,I,y,\varepsilon) \\
\dot{I}_i &= -\varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial \phi_i}(\phi,x,I,y,\varepsilon), & \dot{y}_j &= -\sum_{k=1}^{s} a_{kj} y_k - \varepsilon \frac{\partial H_1}{\partial x_j}(\phi,x,I,y,\varepsilon)
\end{aligned} \tag{5.2.3}$$

Por ejemplo, el hamiltoniano (4.3.5) es de este tipo si se satisfacen las condiciones del teorema del apartado (4.3) relativas a la existencia de toros invariantes hiperbólicos respecto al hamiltoniano integrable (4.3.6) En el sistema (4.3.7) x,y son unidimensionales, y basta efectuar un cambio de variables $(\phi_n, I_n) \to (x,y)$ de manera que diagonalice la parte lineal correspondiente a las variables (ϕ_n, I_n), y qued en la forma de(5.2.3). Por tanto, los resultados que obtengamos sobre conservación de toros invariantes para (5.2.3) se podran aplicar al hamiltoniano(4.3.5)

Si $\varepsilon = 0$, el sistema (5.2.3) queda reducido a

$$\dot{\phi}_i = \frac{\partial H_o}{\partial I_i}(I) \qquad \dot{I}_i = 0 \qquad i=1,\ldots,d$$
$$\dot{x}_j = \sum_{k=1}^{s} a_{jk} x_k \qquad \dot{y}_j = -\sum_{k=1}^{s} a_{kj} y_k \qquad j=1,\ldots,s \tag{5.2.4}$$

Para cada $I^\circ \in U$, $T(I^\circ) = \{(\phi,x,I,y) ;\ x=y=0,\ I = I^\circ\}$ es un toro con mostachos del sistema (5.2.4). Si $(\omega\,(I^\circ)) = \left(\frac{\partial H_o}{\partial I_1}(I^\circ),\ldots,\frac{\partial H_o}{\partial I_d}(I^\circ)\right)$ son inconmensurables, $T(I^\circ)$ es un toro de transición de (5.2.4), como ya se vio en el apartado anterior. Obsérvese que si H_o es no degenerado, es decir, $\det\left(\frac{\partial^2 H_o}{\partial I_i \partial I_j}\right) \neq 0$, el conjunto de toros de transición $T(I^\circ)$ llena, salvo un conjunto de medida $O(\sqrt{\varepsilon})$ el conjunto $T^d \times U$. Ademas, en este caso podemos parametrizar estos focos invariantes por sus frecuencias y escribirlos como $T_{\omega^\circ} = \{(\phi,x,I,y) ;\ x=y=0,\ \omega(I) = \omega^\circ\}$.

La variedad $C = \{(\phi,x,I,y):\ x=y=0\}$ es una subvariedad simpléctica tanto del sistema (5.2.4) como de (5.2.3), tal como como vimos en el apartado (2.4). Para $\varepsilon = 0$, C es además una variedad invariante de (5.2.3)

Veamos bajo qué condiciones se conservan los toros de transición de

(5.2.4). Llamaremos $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ a la imagen de U por $\omega = \text{grad } H_o$. Dado $\nu > 0$ sea $\Omega(\nu)$ el conjunto de $\omega \in \Omega$ cumpliendo

$$|(k,\omega)| \geq \nu |k|^{-\tau} \text{ para cualquier } k \in \mathbb{Z}^d,\ k \neq 0 \qquad (5.2.5)$$

y cumpliendo además dist $(\omega, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \nu$. τ es una constante positiva fija, cumpliendo $\tau > d-1$

TEOREMA Sea H dado por (5.2.2), con A matriz expansiva y H_o analítico y no degenerado. Supongamos que H es de la clase C^r, con $r > 2d$, y sea τ cumpliendo $d-1 < \tau < (r/2)-1$. En tonces para cualquier $\nu > 0$, existe $\varepsilon(\nu) > 0$ $(\varepsilon(\nu) = O(\nu^2))$ tal que si $|\varepsilon| < \varepsilon(\nu)$, (5.2.3) posee, para todo $\omega \in \Omega(\nu)$ toros con mostachos d-1 dimensionales T_ω, con flujo lineal de frecuencia ω. Dos toros con mostachos T_ω, $T_{\tilde{\omega}}$ C^r-próximos tienen sus variedades invariantes asociadas C^r próximas. Por último, todo toro T_ω, es un toro de transición del sistema (5.2.3).

DEMOSTRACION Para $\varepsilon = 0$, $C = \{(\phi, x, I, y) : x=y=0\}$ es una subvariedad normalmente hiperbólica 2d-dimensional de (5.2.3) (véase 5.1.3). Por el teorema sobre variedades normalmente hiperbólicas del apartado anterior, ya aplicado a (5.1.5), si ε es suficientemente pequeño, existe una única subvariedad C_ε normalmente hiperbólica de (5.2.3), 2d-dimensional, C^r-cerca de C, con variedades invariantes $W^u(C_\varepsilon)$, $W^s(C_\varepsilon)$, C^r-cerca de $W^s(C)$, $W^u(C)$, respectivamente (por ejemplo, $W^s(C) = \{(\phi, x, I, y) : x=0\}$). Además si escribimos $\phi^\varepsilon(t, z^\circ)$ el flujo asociado a (5.2.3), con $z^\circ = (\phi^\circ, x^\circ, I^\circ, y^\circ)$, entonces existen W_1, W_2 entornos de C_ε, y existe $h: W_1 \to W_2$ homeoformismo tal que

$$h(\phi^\varepsilon(t, z^\circ)) = \psi^\varepsilon(t, h(z^\circ)) \qquad (5.2.6)$$

con $\psi^\varepsilon(t, z^\circ) = \psi^\varepsilon(t, \phi^\circ, x^\circ, I^\circ, y^\circ) = (\phi(t, \phi^\circ, I^\circ, \varepsilon), e^{tA} x^\circ, I(t, \phi^\circ, I^\circ, \varepsilon), e^{-tA^T} y^\circ)$ siendo $(\phi(t, \phi^\circ, I^\circ, \varepsilon), I(t, \phi^\circ, I^\circ, \varepsilon))$ el flujo $\phi^\varepsilon(t, z^\circ)$ restringido a C_ε. Así, C_ε vendrá dado por $C_\varepsilon = \{(\phi, x, I, y) : x = \varepsilon f(\phi, I, \varepsilon),\ y\ \varepsilon g(\phi, I, \varepsilon)$, con f,g de clase C^r, C^r pequeñas, 2π-periódicas en ϕ y si $\phi^\varepsilon(t, z^\circ) = (\phi^\varepsilon(t, z^\circ), x^\varepsilon(t, z^\circ), I^\varepsilon(t, z^\circ), y^\varepsilon(t, z^\circ))$, entonces

$$\phi(t,\phi^\circ,I^\circ,\varepsilon) = \phi^\varepsilon(t,\phi^\circ, \varepsilon f(\phi^\circ, I^\circ,\varepsilon), I^\circ,\varepsilon g(\phi^\circ, I^\circ,\varepsilon))$$
$$I(t,\phi^\circ,I^\circ,\varepsilon) = I^\varepsilon(t,\phi^\circ, \varepsilon f(\phi^\circ, I^\circ,\varepsilon), I^\circ,\varepsilon g(\phi^\circ, I^\circ,\varepsilon))$$

debido a la forma de C_ε , es una subvariedad de $\phi\in T^d$, $(x,y)\in V\subset\mathbb{R}^{2s}$, $I\in U\subset\mathbb{R}^d$ (véase (2.3 a)) que es además subvariedad invariante de (5.2.3). Por tanto el flujo dentro de C_ε es hamiltoniano de función de Hamilton $H|C_\varepsilon$ (véase proposición pág. 15). Notemos que $C_\varepsilon = \{(\phi,x,I,y) : x=\varepsilon f(\phi,I,\varepsilon),$ $y = \varepsilon g(\phi,I,\varepsilon)\}$ no está expresado en coordenadas canónicas. Sin embargo, existe una completación de las coordenadas canónicas sobre C_ε, (ϕ,I), a (ϕ,q,I,p) de manera que C_ε venga dado por $C_\varepsilon =\{(\phi,q,I,p) : p=q=0\}$. (véase pág. 15). En estas nuevas coordenadas el sistema (5.2.3), en lo que se refiere a C_ε , viene dado por.

$$\begin{aligned} \dot\phi_i &= \frac{\partial H_\circ}{\partial I_i}(I) + \varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial I_i}(\phi,I,\varepsilon) \\ \dot I_i &= \qquad\qquad - \varepsilon \frac{\partial \widetilde{H}_1}{\partial \phi_i}(\phi,I,\varepsilon) \end{aligned} \qquad i=1,\dots,d \tag{5.2.7}$$

con $\tilde H_1(\phi,I,\varepsilon) = \bar H_1(\phi,0,I,0,\varepsilon)$, $\bar H_1(\phi, q,I,p) = H_1(\phi,x,I,y)$ es la nueva expresión de H_1 en las coordenadas (ϕ,q,I,p).

En (5.2.7) podemos aplicar el teorema de KAM, obteniéndose toros invariantes T^ε_ω de (5.2.6) con flujo lineal de frecuencia ω, para ω cumpliende (5.2.5), si ε es suficientemente pequeño. Por la conjugación topológica (5.2.6), cada toro invariante T^ε_ω tiene asociadas variedades invariantes $W^sT^\varepsilon_\omega$, $W^uT^\varepsilon_\omega$ (s+d)-dimensiones de la manera siguiente: si el toro T^ε_ω tiene por ecuación asociada $I = \varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)$, h 2π-periódica en ϕ, entonces

$$\begin{aligned} W^sT^\varepsilon_\omega &= \{(\phi,x,I,y) : x = \varepsilon f(\phi,I,\varepsilon), \quad I = \varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)\} \\ W^uT^\varepsilon_\omega &= \{(\phi,x,I,y) ; y = \varepsilon g(\phi,I,\varepsilon), \quad I= \varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)\} \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Luego T_ω^ε es un toro con mostachos del sistema (5.2.3), si ε es suficientemente pequeño. Dados ahora dos toros T_ω^ε, $T_{\tilde\omega}^\varepsilon$, sus variedades invariantes respectivas seran de la forma (5.2.8) con lo que estarán C^r-proximas si lo están los toros T_ω^ε, $T_{\tilde\omega}^\varepsilon$, de ecuaciones $I = \varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)$, $I = \varepsilon h_{\tilde\omega}(\phi,\varepsilon)$, respectivamente.

Veamos finalmente que cada toro T_ω^ε con mostachos que se conserva, es un toro de trasición. Hemos visto que los toros con mostachos que se conservaban estaban contenidos en una subvariedad simplectica C_ε, normalmente hiperbólica. En coordenadas adecuadas, $C_\varepsilon = \{(\phi,q,I,p): p=q=0\}$, donde q representa la componente expansiva, y p la componente contractiva. Usando el teorema sobre variedades normalmente hiperbólicas, apartado f) el flujo en un entorno de C_ε es topologicamente conjugado al generado por el sistema:

$$\begin{aligned}
\dot q &= Aq \\
\dot p &= -A^T p \\
\dot\phi_i &= \frac{\partial H_o}{\partial I_i}(I) + \varepsilon \frac{\partial \tilde H_1}{\partial I_i}(\phi,I,\varepsilon) \\
\dot I_i &= \qquad\qquad - \varepsilon \frac{\partial \tilde H_1}{\partial \phi_i}(\phi,I,\varepsilon) \qquad I=1,\dots,d.
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

es decir, en las coordenadas que no son de C_ε, basta escribir la parte lineal de (5.2.3).

En (5.2.9) T_ω^ε tendrá por ecuaciones

$$T_\omega^\varepsilon = \{(q,p,\phi,I): q=p=0,\ I = \varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)\}$$

con h_ω de clase C^r, y sus variedades invariantes (locales) serán del tipo

$$W^s_{loc}T^\varepsilon_\omega = \{(q,p,\phi,I) : q=0,\ I=\varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)\}$$
$$W^u_{loc}T^\varepsilon_\omega = \{(q,p,\phi,I) : p=0,\ I=\varepsilon h_\omega(\phi,\varepsilon)\}$$

Sean ahora $\xi = (0,p^s,\ \phi^s,I^s) \in W^u_{loc}T^\varepsilon_\omega$, $\eta = (q^u,0,\phi^u,I^u) \in W^u_{loc}T^\varepsilon_\omega$. Se cumple que $I^\alpha = \varepsilon h_\omega(\phi^\alpha,\varepsilon)$, $\alpha = s,u$. Sean U,V entornos de ξ,η, respectivamente, que podemos suponer de la forma $U =\{(q,p,\phi,I) : \|q\| < \rho,\ \|p-p^s\| < \rho,\ (\phi,I) \in B^s\}$, $V = \{(q,p,\phi,I) : \|q-q^u\| < \mu,\ \|p\| < \mu,\ (\phi,I) \in B^u\}$, con B^α entorno de (ϕ^α,I^α) en las variables ϕ,I $\alpha = s,u$, que podemos suponer de la forma $B^\alpha = E^\alpha \times F^\alpha$, con E^α entorno de ϕ^α en la variable ϕ, y F^α entorno de I^α en la variable I. Como A es expansiva, $\|e^{-At}q^u\|$, $\|e^{-A^Tt}p^s\| \to 0$, cuando $t \to \infty$, con lo que existe $\tau^\circ>0$ tal que si $t \geq \tau^\circ$, entonces $\|e^{-At}q^u\| < \rho$, $\|e^{-A^Tt}p^s\| < \mu$. Como el flujo sobre T_ω es lineal de frecuencia ω, y ω es incomensurable, ya que cumple (5.2.5), entonces toda órbita sobre T_ω es densa en T_ω. Así, llamando $\phi(t,\phi^\circ)$ al flujo de (5.2.9) restringido a T_ω, entonces $\overline{\{\phi(t,\phi^\circ),\ t\geq 0\}}$ es denso para cualquier $\phi^\circ \in T_\omega$. Luego existe $\tau \geq \tau^\circ$ tal que $\phi(\tau,\phi^s) \in E^u$, $\varepsilon h_\omega(\phi(\tau,\phi^s)) \in F^u$, ya que $I^u = \varepsilon h_\omega(\phi^u,\varepsilon)$. Sea ahora $z^\circ = (q^\circ,\ p^\circ,\phi^\circ,I^\circ) = (e^{-A\tau}q^u,p^s,\phi^s,I^s)$, y sea $\Phi(t,z^\circ) = (q(t,q^\circ),\ p(t,p^\circ),\ \phi(t,\phi^\circ,I^\circ),\ I(t,\phi^\circ,I^\circ))$ la solución de (5.2.9) cumpliendo $\Phi(0,z^\circ) = z^\circ$. Como $\tau \geq \tau^\circ$, claramente $\Phi(0,z^\circ) \in U$. Veamos ahora que $\Phi(t,z^\circ) \in V$. Como $q(\tau,q^\circ) = q^u$, $\|p(\tau,p^\circ)\| < \mu$, basta ver que $(\phi(\tau,\ \phi^\circ,\ I^\circ),\ I\ (t,\phi^\circ,I^\circ))$ $B^u = E^u \times F^u$. Como $(\phi^\circ,I^\circ) = (\phi^s,I^s)$, entonces $I^\circ = \varepsilon h_\omega(\phi^\circ,\varepsilon)$. Por la invariancia de T_ω, se cumple que

$$I(t,\phi^\circ,I^\circ) = \varepsilon h_\omega(\phi(t,\phi^\circ,\ I^\circ),\ \varepsilon)$$

con lo que $\Phi(\tau,\Phi^\circ,I^\circ) \in E^u$, $I(\tau,\phi^\circ,I^\circ) \in F^u$.

Así, hemos visto que para entornos arbitrarios U,V de puntos arbitrarios $\xi \in W^s_{loc}\ T^\varepsilon_\omega$, $\eta \in W^u_{loc}T^\varepsilon_\omega$ existe una trayectoria $\{\Phi(t),\ t \in [0,\tau]\}$ del sistema (5.2.9) que los conecta: $\Phi(0)\in U$, , $\Phi(\tau)\in V$. Lo mismo ocurre si $\xi \in W^s T^\varepsilon_\omega$, $\eta \in W^u {}^\varepsilon_\omega$, ya que existe $\tau^1>0$ tal que $\xi_1 = \Phi(\tau^1,\xi)\in W^s_{loc}T^\varepsilon_\omega$, $\eta_1 = \Phi(-\tau^1,\eta)\in W^s_{loc}T^\varepsilon_\omega$, y si entornos arbitrarios de ξ_1,η_1 pueden ser conectados por trayectorias del sistema (5.2.9), lo mismo ocurrirá con entornos arbitrarios de ξ,η (para más detalles, véase (24), pág 75). Así, T^ε_ω es un toro de transición del sistema (5.2.9). Como el sistema (5.2.9), es topológicamente

conjugado, en un entorno de C_ε y por tanto de T^ε_ω, al sistema (5.2.3), y ya vimos al final del apartado anterior que el concepto de toro de transición es invariante por conjugaciones topologicas, entonces T^ε_ω es toro de transicion del sistema (5.2.3) cqd.

Tal como habíamos dicho antes, podemos ahora aplicar este teorema al hamiltoniano (4.3.5), en lo referente a la conservacion de toros de transición, obteniendo el

TEOREMA (CONSERVACION DE TOROS DE TRANSICION)

Consideremos el hamiltoniano

$$\Gamma(\phi,I) = \Gamma_0(I) + \Gamma^{(M)}(\phi_n,I) + \Gamma_{M+1}(\phi,I), \quad \phi\in T^n,\ I\in\mathbb{R}^n,\ \|I\|<\rho \qquad (5.2.10)$$

con $\Gamma_0(I) = \Gamma^{(2)}(I) + \Gamma^{(4)}(I) + \ldots + \Gamma^{(2L)}(I)$, $L=[M/2]$, $\Gamma^{(2)}(I) = \sum_{j=1}^{n}\alpha_j r_j$,

$\Gamma^{(4)}(I) = 2\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}r_j r_k$, $\Gamma^{(2s)}(I) = \sum_{|\ell|=s} C_{\ell\ell}(2r)^\ell$, $3\leqslant s\leqslant L$,

$\Gamma^{(M)}(\phi_n,I) = a(2r)^{k^\circ/2}\cos(\phi_n-b)$, $a,b\in\mathbb{R}$, y $\Gamma_{M+1}(\phi,I) = O(I^{(M+1)/2})$, $I\to 0$

donde $r=(r_1,\ldots,r_n)=(I_1+k_1^\circ I_n,\ldots,I_{n-1}+k_{n-1}^\circ I_n,k_n^\circ I_n)$, y $k^\circ=(k_1^\circ,\ldots,k_n^\circ)\in\mathbb{Z}^n$ con $|k^\circ|=M\geqslant 4, k_n^\circ\neq 0$. Sea $\Omega = \{(\frac{\partial\Gamma_0}{\partial I_1}(I),\ldots,\frac{\partial\Gamma_0}{\partial I_{n-1}}(I)),\ \|I\|<\rho\}\subset\mathbb{R}^{n-1}$

y para cada $\nu>0$, sea $\Omega(\nu) = \{\omega\in\Omega : |(k,\omega)|\geqslant\nu|k|^{-\tau}$ para cualquier $k\in\mathbb{Z}^{n-1}$

$k \neq 0$ y cumpliendo además que $|\omega_i - \alpha_i| < \nu$, $i=1,\ldots,n-1\}$.

Supongamos que Γ es de clase C^r, con $r>2(n-1)$; sea τ cumpliendo $n-2<\tau<(r/2)-1$ y supongamos que $|(\alpha, k^\circ)|<4\rho|\Sigma_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}k_i^\circ k_j^\circ|$, $\det(\alpha_{ij})_{1\leq i,j\leq n-1} \neq 0$, y que $a \neq 0$.

Entonces para cualquier $\nu>0$, existe $\delta(\nu)>0$ $(\delta(\nu) = O(\nu^4))$, tal que en $V_\delta = \{(\phi,I) \in T^n \times \mathbb{R}^n, \|I\|<\delta\}$ el sistema correspondiente al hamiltoniano (5.2.10) posee, para cualquier $\omega \in \Omega(\nu)$ toros de transición $(n-1)$-dimensionales T_ω, con flujo lineal de frecuencia ω. Dos toros de transición T_ω, $T_{\tilde{\omega}}$ C^r-próximos, tienen sus variedades invariantes asociadas C^r-próximas.

DEMOSTRACION El hamiltoniano $H_\circ = \Gamma_\circ(I) + \Gamma^{(M)}(\phi_n, I)$ es el de (4.3.6) y cumple todas las hipótesis del teorema de la sección (4.3), por lo cual existe una familia $n-1$ paramétrica de toros $n-1$ dimensionales $T(I_1^*,\ldots,I_{n-1}^*)$ invariantes por el flujo asociado a $H_\circ$, de tipo hiperbólico, dado por

$$T(I_1^*,\ldots,I_n^*) = \{(\phi,I): \frac{\partial H_\circ}{\partial I_n}(\phi,I) = \frac{\partial H_\circ}{\partial \phi_n}(\phi,I) = 0, \quad I_j=I_j^*, \quad j=1,\ldots,n-1\}$$

y con unas ecuaciones asociadas, en su entorno, del tipo de (5.2.3). Como $H_\circ$ es analítico y no degenerado ($\det(\alpha_{ij}) \neq 0$, $i,j=1,\ldots,n-1$) y se satisfacen todas las condiciones del teorema visto anteriormente, con $d = n-1$ obtenemos los resultados enunciados, c.q.d.

CAPITULO 6

TRANSVERSALIDAD DE VARIEDADES INVARIANTES

6.1. Consideraciones previas

El mecanismo de las cadenas de transición constituye la herramienta fundamental para probar la existencia de difusion de Arnold en sistemas hamiltonianos casi integrales. Segun hemos visto en el apartado (5.1), la existencia de una cadena de transición en un sistema hamiltoniano casi-integrable, esto es, la existencia de una sucesion(finita o infinita) de toros de transición T_i con variedades invariantes estable W^sT_i e inestable W^uT_i asociadas, tales que $W^uT_i \pitchfork W^sT_{i+1}$, garantiza la existencia de difusion de Arnold en dicho sistema. En los capítulos 4 y 5 se han dado condiciones suficientes para detectar toros de transición. El objetivo de este capítulo es suministrar condiciones suficientes que garanticen la interseccion transversal de variedades invariantes correspondientes a distintos toros de transicion de sistemas hamiltonianos casi-integrables. Empecemos por imponer algunas condiciones previas sobre el sistema no perturbado, basandonos en el hamiltoniano integrable (4.3.6).

A) Consideremos un hamiltoniano (no perturbado) analítico del tipo

$$H(q,p,\phi,I) = H_0(q,p,I), \ (q,p)\in V=\mathring{V}\subset\mathbb{R}^2, \ I\in U=\mathring{U}\subset\mathbb{R}^d, \ \phi\in T^d. \quad (6.1.1)$$

Claramente H_0 es integrable, siendo $H_0, I_1, \ldots, I_d$, d+1 integrales primeras en involucion.

B) Suponemos que existen funciones analíticas, $I\in U\mapsto(f(I),g(I))\in V$, tales que

$$\frac{\partial H_0}{\partial q}(f(I),g(I),I) = \frac{\partial H_0}{\partial p}(f(I),g(I),I) = 0 \quad , I\in U, \tag{6.1.2}$$

$$\left|\begin{matrix} \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial q^2} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial p} \\ \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial q\partial p} & \dfrac{\partial^2 H_0}{\partial p^2} \end{matrix}\right|_{(f(I),g(I),I)} < 0, \ I\in U, \tag{6.1.3}$$

El sistema de ecuaciones asociado es

$$\dot q = \frac{\partial H_0}{\partial p}(q,p,I) \quad , \qquad \dot\phi_j = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}(q,p,I) \quad , \quad j=1,\ldots,d \tag{6.1.4}$$

$$\dot p = -\frac{\partial H_0}{\partial q}(q,p,I) \quad , \qquad \dot I_j = 0 \quad , \quad j=1,\ldots,d \tag{6.1.5}$$

con lo que para cada $I\in U$, $(f(I),g(I))$ es un punto crítico hiperbólico del sistema (6.1.4), y como consecuencia, para cada $I\in U$ el toro $T(I) = \{(q,p,\phi,I) : q = f(I), p = g(I)\}$ es un toro con mostachos asociado al hamiltoniano H_0. Los mostachos $W^sT(I)$, $W^uT(I)$ estan contenidos en $W^0(I) = \{(q,p,\phi,I) : H_0(q,p,I) = H_0(f(I),g(I),I)\}$.

C) Supondremos que coinciden con este conjunto, es decir, $W^sT(I) = W^uT(I) = W^q(I)$, $I\in U$. Esto equivale a decir que existen órbitas homoclínicas asociadas al sistema (6.1.4) contenidas en $\{(q,p) : H_0(q,p,I) = H_0(f(I),g(I),I)\}$ para cada $I\in U$, que juega el papel de un parámetro d-dimensional en (6.1.4).

D) Sean $\omega_j(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}(f(I),g(I),I)$, $j=1,\ldots,d$, $\omega(I) = (\omega_1(I),\ldots,\omega_d(I))$ el vector de frecuencias asociado a cada toro invariante de $T(I)$. Para que no haya degeneración de frecuencias, supondremos finalmente que $\det\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial I_j}(I)\right) \neq 0$, $\forall I\in U$. Como consecuencia, podemos parametrizar los toros invariantes segun sus frecuencias asociadas: $T_{\omega^o}=\{(f(I),g(I),\phi,I):\omega(I)=\omega^o\}$ y analogamente en lo referente a sus mostachos: $W^s_\omega = W^u_\omega = W^0_\omega$

Si añadimos ahora una perturbación al hamiltoniano(6.1.1) y consideramos el hamiltoniano

$$H(q,p,\phi,I,\varepsilon) = H_0(q,p,I) + H_1(q,p,\phi,I,\varepsilon) \tag{6.1.6}$$

los toros invariantes con frecuencias $\omega_1,..,\omega_d$ suficientemente irracionales, cumpliendo (5.2.5), se conservarán, segun el primer teorema del apartado (5.2), dando lugar a toros de transición T^ε_ω con variedades invariantes asociada $W^{s,\varepsilon}_\omega$, $W^{u,\varepsilon}_\omega$, (d+1)-dimensionales.

Queremos ver cuándo se cortan transversalmente dos de tales mostachos, es decir, cuándo $W^{s,\varepsilon}_\omega \pitchfork W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$. Para esto, es preciso que en cualquier punto x de interseccion, $T_xW^{s,\varepsilon}_\omega + T_xW^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega} = \mathbb{R}^{2(d+1)}$. Ahora bien, por ser $W^{s,\varepsilon}_\omega, W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$ variedades invariantes, si se cortan en un punto, al menos toda la órbita pasando por x esta contenida en $W^{s,\varepsilon}_\omega \cap W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$, con lo que $\dim(W^{s,\varepsilon}_\omega \cap W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}) \geq 1$. Luego como $W^{s,\varepsilon}_\omega, W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$ son (d+1)-dimensionales, no pueden cortarse transversalmente respecto a $V \times T^d \times U \subset \mathbb{R}^{2(d+1)}$. Ahora bien, el sistema asociado al hamiltoniano H tiene a H como integral primera, y por ser $W^{s,\varepsilon}_\omega, W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$ variedades invariantes, solo pueden intersecarse si estan en el mismo nivel de energia, llamémosle h. Una vez fijada la energia h, el espacio de fases al cual esta restringido el movimiento es $H^{-1}(h)$, hipersuperficie si h es valor regular, con lo que $W^{s,\varepsilon}_\omega, W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega} \subset H^{-1}(h)$ se cortaran transversalmente si $T_xH^{-1}(h) = T_xW^{s,\varepsilon}_\omega + T_xW^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$, $\forall x \; W^{s,\varepsilon}_\omega \cap W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$. En tal caso $W^{s,\varepsilon}_\omega \cap W^{u,\varepsilon}_{\tilde\omega}$ se reduce a una orbita del sistema. La herramienta fundamental para detectar esta intersección transversal, la integral de Melnikov, sera dada en el apartado siguiente.

Veamos ahora que el hamiltoniano (4.3.6) cumple todas las hipotesis

A-B-C-D. El hamiltoniano Γ es de la forma

$$\Gamma(\phi,I) = \Gamma(\phi_n,I) = \Gamma_0(I) + \Gamma^{(M)}(\phi_n,I), \ \|I\| < \rho, \qquad (6.1.7)$$

con $\Gamma^{(M)}(\phi_n,I) = a(2r)^{K^0/2}\cos(\phi_n-b)$. Llamando $q=\phi_n-b$, $p=I_n$, y siendo $d=n-1$, Γ toma la forma de (6.1.1), es analitico, y existe además para cada $I=(I_1,..,I_d)$, de modulo suficientemente pequeño, una funcion $f(I)$ de manera que en los puntos $(0,I,f(I))$ se cumplen (6.1.2)(6.1.3) (vease 4.3.11). Segun lo expuesto en la nota 2 del apartado (4.3), podemos suponer que $W^sT(I) = W^0T(I) = W^uT(I)$. Finalmente, llamando $\omega_j(I)$ a $\frac{\partial\Gamma}{\partial I_j}(0,I,f(I))$, $j=1,..,d$, y debido a la forma de $f(I)$ (vease (4.3.13)) hasta suponer que $\det(\alpha_{ij})_{1\le i,j\le n} \neq 0$, tal como aparece en el teorema sobre conservacion de toros de transicion para que $\det\left(\frac{\partial\omega_i(I)}{\partial I_j}\right) \neq 0$, $\|I\| < \rho$, si ρ es suficientemente pequeño.

6.2. La integral de Melnikov

Consideremos el hamiltoniano

$$H(q,p,\phi,I,\varepsilon) = H_0(p,q,I) + H_1(q,p,\phi,I,\varepsilon) \qquad (6.2.1)$$

definido para $(q,p)\in V\subset\mathbb{R}^2$, $I\in U\subset\mathbb{R}^d$, $\phi\in T^d$, $|\varepsilon|<\varepsilon_0$, con H_0 cumpliendo las hipotesis A,B,C,D del apartado anterior, siendo H de clase C^∞.

Si $\varepsilon=0$, para cada $I\in U$, $T^0(I) = \{(q,p,\phi,I) \cdot q = f(I), p = g(I)\}$ es un toro con mostachos asociado a H_0 de frecuencia asociada

$\omega(I) = (\omega_1(I),...,\omega_d(I))$, con $\omega_j(I) = \frac{\partial H_0}{\partial I_j}(f(I),g(I),I)$, $j=1,..,d$. Sea

$\Omega = \omega(U) \subset \mathbb{R}^d$. Como, por hipotesis, $\det\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial I_j}(I)\right) \neq 0$, restringiendo U si es necesario, podemos considerar que $\omega : U \to \Omega$ es biyectiva, y podemos parametrizar los toros invariantes mediante $\omega(I)$. Así, para cada $\beta \in \Omega$, sea

$$T_\beta^0 = \{(q,p,\phi,I) \; : \; \omega(I) = \beta, q = f(I), \; p = g(I)\} \tag{6.2.2}$$

toro con mostachos d-dimensional asociado a H_0. Sus mostachos, por hipotesis, se confunden, y tienen por ecuaciones

$$W_\beta^0 = W_\beta^{s,0} = W_\beta^{u,0} = \{(q,p,\phi,I) : \omega(I) = \beta \; , \; H_0(q,p,I) = H_0(f(I), g(I), I)\} \tag{6.2.3}$$

Así, si $\bar{x} = (\bar{q}, \bar{p}, \bar{\phi}, \bar{I}) \in W_\beta^0$, entonces, llamando $x_0(t,\bar{x})$ a la órbita, con respecto al hamiltoniano H_0, tal que $x_0(0,\bar{x}) = \bar{x}$, se cumple que $x_0(t,\bar{x}) \to T_\beta$, cuando $t \to \pm\infty$. En particular, $x_0(t,\bar{x})$ es del tipo:

$$x_0(t,\bar{x}) = (q_0(t,\bar{q},\bar{p},\bar{I}), p_0(t,\bar{q},\bar{p},\bar{I}), \bar{\phi} + t\omega(\bar{I}), \bar{I}) \tag{6.2.4}$$

con $H_0(q_0(t,\bar{q},\bar{p},\bar{I}), \; p_0(t,\bar{q},\bar{p},\bar{I}), \bar{I}) = H_0(\bar{q},\bar{p},\bar{I})$.

Si $\varepsilon \neq 0$, la mayoría de los toros invariantes, junto con sus variedades invariantes, se conservan, segun el primer teorema sobre conservación de toros de transición. Sea T_β uno de tales toros que se conservan, y sean $W_\beta^{s,\varepsilon}, W_\beta^{u,\varepsilon}$ sus variedades conservantes asociadas. Como estas están próximas a W_β^0, si ε es pequeño, $W_\beta^{s,\varepsilon}, W_\beta^{u,\varepsilon}$ seran de la forma

$$W_\beta^{V,\varepsilon} = \{(q,p,\phi,I) : \omega(I) = \beta + \varepsilon\Delta_{\beta,1}^{V,\varepsilon}(q,\phi), \quad F(q,p,I) = \varepsilon\Delta_{\beta,2}^{V,\varepsilon}(q,\phi)\}, V = u,s \tag{6.2.5}$$

donde $F(q,p,I) = H_0(q,p,I) - H_0(f(I), g(I), I)$. Recordemos que la ecuación $F(q,p,I) = 0$, fijado I, se compone de dos ramas - una localmente estable, $C^s(I)$, y otra localmente inestable $C^u(I)$, ya que $(q(I), p(I))$ es un punto hiperbólico - en el entorno de $(q(I), p(I))$; es decir, $F(q,p,I) = 0$, equivale a $p = f^s(q,I)$, si $(q,p) \in C^s(I)$, y a $p = f^u(q,I)$, si $(q,p) \in C^u(I)$, donde, por ejemplo, hemos expresado p en función de (q,I). Al considerar la ecuacion que aparece en (6.2.5), hay que escoger la rama estable para $W_\beta^{s,\varepsilon}$ y la inestable para $W_\beta^{u,\varepsilon}$. Al incrementar en 2π la variable q, como F es 2π-periódica en q, nos encontramos de nuevo con la singularidad $(q(I), p(I))$. Para evitar esto, usaremos la expresión (6.2.5) solo para $|q - f(I)| < 2\pi - C$, donde C es una constante pequeña (por ejemplo, $0<C<(\pi/4)$).

Como el hamiltoniano H es una constante del sistema, T_β se encontrara en un cierto nivel de energía h, es decir, $T_\beta \subset H^{-1}(h)$, y por tanto, las variedades invariantes $W_\beta^{s,\varepsilon}, W_\beta^{u,\varepsilon} \subset H^{-1}(h)$, esto es, cumplen la ecuacion adicional $H = h$. Sin perdida de generalidad, podemos suponer que $\frac{\partial H_0}{\partial I_d} \neq 0$, con lo que existira una función G, tal que

$$H(q,p,\phi,I,\varepsilon) = h \Leftrightarrow I_d = G(q,p,\phi,I_1,..,I_{d-1},h,\varepsilon) \tag{6.2.6}$$

si $|\varepsilon|<\varepsilon_0$. Así, dados $q,p,\phi,I_1,..,I_{d-1}$, fijar la energía equivale a fijar I_d.

Sea ahora $x^0 = (q^0,p^0,\phi^0,I^0) \in W_\beta^0$. Por la forma de las variedades $W_\beta^{s,\varepsilon}, W_\beta^{u,\varepsilon}$, existen $x^{s,\varepsilon}, x^{u,\varepsilon}$, pertenecientes a $W_\beta^{s,\varepsilon}, W_\beta^{u,\varepsilon}$, respectivamente de ecuaciones $x_\beta^{V,\varepsilon} = (q^0, p^{V,\varepsilon}, \phi^0, I^{V,\varepsilon})$, con

$$\omega(I^{V,\varepsilon}) = \beta + \varepsilon\Delta_{\beta,1}^{V,\varepsilon}(q^0,\phi^0), \quad F(q^0,p^{V,\varepsilon},I^{V,\varepsilon}) = \varepsilon\Delta_{\beta,2}^{V,\varepsilon}(q^0,\phi^0), \quad V=u,s$$

$$H(q^0,p^{s,\varepsilon},\phi^0,I^{s,\varepsilon}) = H(q^0,p^{u,\varepsilon},\phi^0,I^{u,\varepsilon}) = h \tag{6.2.7}$$

Si denotamos por $x(t,\bar{x},\varepsilon)$ a la orbita, con respecto al hamiltoniano H, tal que $x(0,\bar{x},\varepsilon) = \bar{x}$, las ecuaciones (6.2.7) continuan siendo validas para $x(t,x^{V,\varepsilon},\varepsilon)$, V= u,s, al ser $W_\beta^{s,\varepsilon}, W_\beta^{u,\varepsilon}$, invariantes. La expresión de $x(t,x^{V,\varepsilon},\varepsilon)$

es del tipo

$$x(t,x^{V,\varepsilon},\varepsilon) = x_0(t,x^0) + \varepsilon x_1^V(t) + 0(\varepsilon^2), \qquad v = u,s \quad (6.2.8)$$

con $x_1^V(t)$ solución de la ecuacion variacional

$$\dot{x}_1^V(t) = JD^2H_0(x_0(t,x^0))x_1^V(t) + \varepsilon\, J\mathrm{grad}\, H_1(x_0(t,x^0),0), \; V = u,s \quad (6.2.9)$$

con condiciones iniciales

$$x_1^V(0) = (0,p_1^V,0,I_1^V) \qquad V = u,s$$

que nos miden, en primer orden, la separación entre $W_\beta^{V,\varepsilon}$ y W_β^0 cerca de x^0 y que no conocemos, aunque no serán necesarias más adelante, segun será visto. Notemos que, gracias a la conservación de la energía, $x^{V,\varepsilon}$ será conocido, una vez dados q^0, $p^{V,\varepsilon}$, ϕ^0, $I_1^{V,\varepsilon}, \ldots, I_{d-1}^{V,\varepsilon}$ y dada la energía h, usando (6.2.6).

Nuestro objetivo es ver cuándo se cortan transversalmente $W_\beta^{s,\varepsilon}$, $W_\beta^{u,\varepsilon}$, es decir, cuando se cortan a lo largo de una curva homoclínica (vease el comentario despues de (6.1.6)). Esto implica que $x^{s,\varepsilon} = x^{u,\varepsilon}$ y por tanto se satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} &\omega(I^\varepsilon) = \beta + \varepsilon\Delta_{\beta,1}^{s,\varepsilon}(q^0,\phi^0), \quad F(q^0,p^\varepsilon,I^\varepsilon) = \varepsilon\Delta_{\beta,2}^{s,\varepsilon}(q^0,\phi^0) \\ &\Delta_{\beta,1}^{s,\varepsilon}(q^0,\phi^0) = \Delta_{\beta,1}^{u,\varepsilon}(q^0,\phi^0) \\ &\Delta_{\beta,2}^{s,\varepsilon}(q^0,\phi^0) = \Delta_{\beta,2}^{u,\varepsilon}(q^0,\phi^0) \end{aligned} \quad (6.2.10)$$

para $x^\varepsilon = x^{s,\varepsilon} = x^{u,\varepsilon} = (q^0,p^\varepsilon,\phi^0,I^\varepsilon)$ comparese con(2.3)). Como $W_\beta^{s,\varepsilon}$, $W_\beta^{u,\varepsilon}$, son invariantes, si x^ε es solucion del sistema (6.2.10), tambien lo será de $x(t,x^\varepsilon,\varepsilon)$, para cualquier tiempo donde esté definido. En particular,

$$\omega(I(t,x^{\varepsilon},\varepsilon)) = \beta + \varepsilon\Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,1}(q(t,x^{\varepsilon},\varepsilon), \ \phi(t,x^{\varepsilon},\varepsilon)), \ t>0 \qquad (6.2.11)$$

ya que $x^{\varepsilon} = x^{s,\varepsilon} \in W^{s,\varepsilon}_{\beta}$. Derivando con respecto a t se obtiene

$$(d/dt)\left[\Delta(q(t,x^{\varepsilon},\varepsilon), \ \phi(t,x^{\varepsilon},\varepsilon))\right] = \varepsilon\{\omega,H_1\} \ (x(t,x^{\varepsilon},\varepsilon),\varepsilon), \qquad (6.2.12)$$

con $\{\omega,H_1\} = (\{\omega_1,H_1\},\ldots,\{\omega_d,H_1\})$, y donde hemos usado el hecho de que, para cualquier funcion f, $(d/dt)\left[f(x(t,\bar{x},\varepsilon))\right] = \{f,H\} \ (x(t,\bar{x},\varepsilon))$ (vease(1), pag 193) junto con $\{\omega,H\} = \{\omega,H_0\} + \varepsilon\{\omega,H_1\} = \varepsilon\{\omega,H_1\}$, ya que $\{\omega,H_0\} = 0$, al ser H_0 independiente de ϕ. A partir de (6.2.12), tenemos

$$\Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,1}(q^0,\phi^0) = \Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,1}(q(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon), \ \phi(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon)) + $$
$$+\int_{t^1}^{0} \{\omega,H_1\}(x(t,x^{\varepsilon},\varepsilon),\varepsilon)\,dt\,. \qquad (6.2.13)$$

Igualmente,

$$\Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,2}(q^0,\phi^0) = \Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,2}(q(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon), \ \phi(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon)) + $$
$$+\int_{t^1}^{0} \{F,H_1\}(x(t,x^{\varepsilon},\varepsilon),\varepsilon)\,dt \qquad (6.2.14)$$

Se obtienen expresiones analogas a (6.2.13), (6.2.14) si reemplazamos s por u, t^1 por $-t^2$ con $t^2 > 0$. Sustituyendo en (6.2.10), queda

$$\omega(I^{\varepsilon}) = \beta+\varepsilon\Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,1}(q^0,\phi^0), \quad F(q^0,p^{\varepsilon},I^{\varepsilon}) = \varepsilon\Delta^{s,\varepsilon}_{\beta,2}(q^0,\phi^0),$$

$$\varepsilon\int_{-t^2}^{t^1} \{\omega,H_1\} \ (x(t,x^{\varepsilon},\varepsilon),\varepsilon)\,dt = \omega(I(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon)) - \omega(I(-t^2,x^{\varepsilon},\varepsilon)),$$

$$\int_{-t^2}^{t^1} \{F,H_1\} \ (x(t,x^{\varepsilon},\varepsilon),\varepsilon)\,dt = F(q(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon),p(t^1,x^{\varepsilon},\varepsilon)) - F(q(-t^2,x^{\varepsilon},\varepsilon),p(-t^2,x^{\varepsilon},\varepsilon))$$

(6.2.15)

con $t^1, t^2 \geq 0$, arbitrarios. Las ecuaciones (6.2.5) son las de un punto $x^\varepsilon \in W_\beta^{s,\varepsilon} \cap W_\beta^{u,\varepsilon}$ que son tambien cumplidas por $x(t^0, x^\varepsilon, \varepsilon)$ (es decir, en (6.2.15), podríamos reemplazar $x(t, x^\varepsilon, \varepsilon)$ por $x(t-t^0, x^\varepsilon, \varepsilon)$). Las incógnitas $(q^0, p^\varepsilon, \phi^0, I^\varepsilon)$ que aparecen en (6.2.15) no son independientes, ya que estan ligadas por la relacion $H(q^0, p^\varepsilon, \phi^0, I^\varepsilon) = h$, o bien, $I_d = G(q, p, \phi, I_1, \ldots, I_{d-1}, h, \varepsilon)$. Tampoco lo son las ecuaciones (6.2.15), ya que provienen de (6.2.7), donde I_d era funcion de las otras variables. Asi en (6.2.15) podemos escoger 2d+1 ecuaciones adecuadas, una vez fijada la energía. Así, por ejemplo, si $\dfrac{\partial \omega_d}{\partial I_d} \neq 0$, en (6.2.15) la ecuacion

$$\varepsilon \int_{-t^2}^{t^1} \{\omega_d, H_1\}(x(t, x^\varepsilon, \varepsilon), \varepsilon)\, dt = \omega_d(I(t^1, x^\varepsilon, \varepsilon)) - \omega_d(I(-t^2, x^\varepsilon, \varepsilon))$$

es consecuencia de las restantes ecuaciones que aparecen en (6.2.15), una vez fijada h. Para resolver (6.2.15), es preciso conocer los terminos que aparecen a la derecha de las igualdades, al menos hasta cierto orden. Asi, por ejemplo, usando (6.2.8)

$$\begin{aligned}
&F(q(t^1, x^\varepsilon, \varepsilon),\, p(t^1, x^\varepsilon, \varepsilon)) - F(q(-t^2, x^\varepsilon, \varepsilon),\, p(-t^2, x^\varepsilon, \varepsilon)) = \\
&= \left[F(q_0(t^1, q^0, p^0), p_0(t^1, q^0, p^0)) - F(q_0(-t^2, q^0, p^0), p_0(-t^2, q^0, p^0))\right] + \\
&+ \varepsilon \left[DF(q_0(t^1, q^0, p^0), p_0(t^1, q^0, p^0))(q_1(t^1), p_1(t^1)) + \right. \\
&+ \left. DF(q_0(-t^2, q^0, p^0), p_0(-t^2, q^0, p^0))(q_1(-t^2), p_1(-t^2))\right] + \varepsilon^2 a(t^1, t^2) \\
&\qquad \forall\, t^1, t^2 \geq 0 \qquad (6.2.16)
\end{aligned}$$

con $|a(t^1, t^2)| \leq M$ para cualesquiera $t^1, t^2 \geq 0$. El termino de orden 0 en ε es identicamente nulo si imponemos ademas $F(q^0, p^\varepsilon, I^\varepsilon) = \varepsilon \Delta_{\beta,2}^{s,\varepsilon}(q^0, \phi^0)$ hasta orden 0 en ε, ya que F se anula sobre las orbitas homoclinicas no perturbadas (vease (6.2.3)). El termino de (6.2.16) de orden ε tambien se anulará si consideramos $t^1 \to \infty$, $t^2 \to \infty$, porque tendemos a un punto crítico de F (vease (6.1.2)).

Así dos de las ecuaciones de (6.2.15) las podemos escribir como

$$\begin{aligned} &F(q^0,p^0,I^0) = 0 + O(\varepsilon) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \{F,H_1\}(x_0(t,x^0),0)\,dt = 0 + O(\varepsilon) \end{aligned} \tag{6.2.17}$$

Por otro lado, como $I(t,x^0,0) = I^0 = \text{cte.}$,
$\omega(I(t^1,x^\varepsilon,\varepsilon)) - \omega(I(-t^2,x^\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon D\omega(I^0)(I_1(t^1) - I_1(-t^2)) + \varepsilon^2 b(t^1,t^2)$, con $|b(t^1,t^2)| \leq M$ para cualquiera $t^1,t^2 \geq 0$. Como $x(t,x^0,0) \to T^0$, $t \to \pm\infty$; y como $x(t,x^{s,\varepsilon},\varepsilon) = x_0(t,x^0) + \varepsilon x_1^s(t) + \varepsilon^2 C^s(t) \to T^\varepsilon_\beta$, cuando $t \to \infty$, para cualquier $x^{s,\varepsilon}_\beta \in W^{s,\varepsilon}_\beta$, $\varepsilon x_1^s(t)$, para t grande, nos mide la distancia, en primer orden con respecto a ε, de T^ε_β a T^0_β. Analogamente, para cualquier $x^{u,\varepsilon} \in W^{s,\varepsilon}_\beta$, $\varepsilon x_1^u(-t)$, para t grande, nos mide tambien la distancia en primer orden con respecto a ε, de T^ε_β a T^0_β. Por lo tanto $x(t,x^\varepsilon,\varepsilon) \to T^\varepsilon_\beta, t \to \pm\infty$, implica que $I_1(t^1) - I_1(-t^2) \to 0$ cuando $t^1 \to \infty$, $t^2 \to \infty$.

Las restantes ecuaciones de (6.2.15) las podemos escribir como

$$\begin{aligned} &\omega(I^0) = \beta + O(\varepsilon) \\ &\int_{-\infty}^{\infty} \{\omega_j,H_1\}(x_0(t,x^0),0)\,dt = 0 + O(\varepsilon) \qquad j=1,\ldots,d-1 \end{aligned} \tag{6.2.18}$$

Para poder resolver (6.2.16), basta ver que se puede resolver el sistema aproximado formado por (6.2.17) y (6.2.18). Para ello basta ver que la funcion

$$M_\beta(\phi_1^0,\ldots,\phi_d^0) = M_\beta(\phi^0) = (M_1(\phi^0),\ldots,M_d(\phi^0))$$

dada por

$$M_j(\phi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{\omega_j, H_1\}(x_0(t,x^0),0)\,dt \qquad j=1,\ldots,d-1$$

$$M_d(\phi^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F, H_1\}\,(x_0(t,x^0),0)\,dt \tag{6.2.19}$$

tenga un cero simple: exista ϕ^0 tal que $M(\phi^0) = 0$, $\det DM(\phi^0) \neq 0$. En (6.2.19) $x^0 = (q^0, p^0, \phi^0, I^0)$, con $\omega(I^0) = \beta$, $F(q^0, p^0, I^0) = 0$. (q^0, p^0) es un punto de la órbita homoclínica asociada al punto crítico $(f(I^0), g(I^0))$

La función vectorial M recibe el nombre de <u>función de Melnikov</u> asociada al hamiltoniano H. Fue introducida por primera vez por Melnikov (véase (50))para tratar el desdoblamiento de separatrices. Arnold (6) ya la usó para dar el primer ejemplo analítico de difusión de Arnold. Otros ejemplos más generales fueron dados por Holmes-Marsden (39),(40),(41),(42). Nótese que para su cálculo sólo es preciso conocer el flujo sobre la variedad invariante no perturbada W^0_β. Agrupando los resultados obtenidos, podemos enunciar el

TEOREMA Sea H un hamiltoniano cumpliendo las hipótesis A,B,C,D descritas en el apartado anterior, con $\frac{\partial \omega_d}{\partial I_d} \neq 0$. entonces dado $\nu>0$, existe $\varepsilon_1 \in (0,\varepsilon_0]$ tal que si $|\varepsilon|<\varepsilon_1$, el sistema asociado al hamiltoniano H posee, para cualquier $\beta \in \Omega(\nu) = \{\beta \in \Omega = \omega(U) : |(k,\beta)| \geq \nu |k|^{-(d-1)}$ para cualquier $k \in \mathbb{Z}^d$, $k \neq 0$ y $\mathrm{dist}\,(\beta, \mathbb{R}^d \setminus \Omega) \geq \nu\}$ toros de transición d-dimensionales T^ε_β, con flujo lineal de frecuencia β. Si además existe un cero simple de su función de Melnikov M_β asociada (6.2.19), entonces $W^s T^\varepsilon_\beta$, $W^u T^\varepsilon_\beta$ se cortan transversalmente (con respecto a la hipersuperficie $H^{-1}(H(T^\varepsilon_\beta))$).

Ademas, si T_β^ε T_β^ε, son dos ɔ os invariantes C^r-proximos, sus variedades invariantes estaran C^r-proximas, con lo que podemos añadir

COROLARIO En las condiciones del teorema anterior, si T_β^ε, esta suficientemente proximo a T_β^ε las variedades invariantes de T_β^ε, se cortaran transversalmente entre sí, y con las variedades invariantes de T_β^ε. Por tanto, si ε es suficientemente pequeño y n (= d+1, el numero de grados de libertad) es mayor que 2, existen cadenas de transicion asociadas a toros de transicion T_β^ε ;...T_β^ε, si para algun β, la funcion de Melnikov M_β tiene un cero simple.

Aquí n, el numero de grados de libertad de H, es esencial para la existencia de cadenas de transición. Así, por el teorema anterior, existe un conjunto de toros (n-1)-dimensionales de transición parametrizados por $\Omega(\nu)\subset\Omega\subset\mathbb{R}^{n-1}$, conjunto cantoriano en $\mathbb{R}^{n-1}$ que llena Ω salvo un conjunto de medida proporcional a ν. Fijado un nivel de energía h, en $H^{-1}(h)$ existirá, en general, una familia parametrizada por un conjunto cantoriano (n-2)-dimensional. Si n = 2, estos toros 1-dimensionales de transición, son orbitas per., en general aisladas, con lo que si T_β es una de tales órbitas de transicion no existiran órbitas proximas $T_{\beta'}$, en general. Si n>2, y T_β es un toro (n-1)-dimensional de transicion en un nivel de energía $H^{-1}(h)$, sí que existiran, generalmente, toros de transicion $T_{\beta'}$ arbitrariamente proximos a T_β, con lo que serán posible las intersecciones de sus invariantes respectivas, y tendremos cadenas de transición. Volvemos a ver aquí la diferencia entre el caso n=2 y n>2 (vease apartado (3.5)). En los casos conocidos sólo para los toros T_β, $T_{\beta'}$, que se encuentren a una distancia realmente muy pequeña (véase los ejemplos, mas adelante) puede haber intersección entre sus variedades invariantes. por lo que es muy importante esta "acumulacion" de toros de transicion, presente solo para $n>2$.

NOTA 1 La funcion de Melnikov M nos mide la distancia entre variedades invariantes estable e inestable en primer orden con respecto a ε. El que M sea identicamente nula no asegura la coincidencia de tales variedades sino solo la coincidencia en primer orden con respecto a ε. En tales casos, es preciso trabajar con la funcion de Melnicov de segundo orden (vease un ejemplo en (14)), ordenes sucesivos.

NOTA 2 En el caso en que H_1 dependa explicitamente del tiempo, no hay conservacion de la energia y las variedades estable e inestable puede cortarse transversalmente con respecto al espacio de fases total. En este caso puede aplicarse tambien la funcion de Melnikov, y no hace falta "quitarle" una ecuacion a (6.2.15) (vease, por ejemplo (6) o(39)).

NOTA 3 EJEMPLOS . el ejemplo original de Arnold (6) es el siguiente:

$$H(q,p,\phi,I,t) = (1/2)(p^2 + I^2) + \varepsilon(\cos q-1)(1 + \mu(\operatorname{sen}\phi + \cos t)) \tag{6.2.20}$$

con $\mu<<\varepsilon<<1$. Si $\mu=0$, cada toro del tipo $T_\omega = \{(q,p,\phi,I,t) \cdot q=p=0, I=\omega\}$ es un toro 2-dimensional invariante asociado a (6.2.20), con variedades invariantes $W^s_\omega = W^u_\omega = W^0_\omega = \{(q,p,\phi,I,t) : F(q,p) = (p^2/2) + \varepsilon(\cos q-1) = 0, I=\omega\}$ con flujo asociado dado por

$q^0(t) = \pm 2\operatorname{arccotg}(-\operatorname{sh}\tau)$, $p^0(t) = \pm 2\sqrt{\varepsilon}/\operatorname{ch}\tau$, $\phi^0(t) = \phi^0(0) + \omega(t-t^0)$,

$I(t) = \omega$, con $\tau = \sqrt{\varepsilon}(t-t^0)$. La funcion de Melnikov $M(\phi^0,t^0)=(M_1(\phi^0,t^0),M_2(\phi^0,t^0$ vale (vease (49)).

$$M_1(\phi^0,t^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{I,H^1\}(x_0(t-t^0),0)\ dt = \frac{2\pi\omega \cos\phi_2^0}{\operatorname{senh}(\omega\pi/2\sqrt{\varepsilon})} = \delta_1$$

$$M_2(\phi^0,t^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F,H^1\}(x_0(t-t^0),0)\ dt = 2\ \frac{\operatorname{sen} t^0}{\operatorname{senh}(\omega\pi/2\sqrt{\varepsilon})} + \omega\delta_1 = \delta_2 + \omega\delta_1$$

que tiene ceros simples para $t^0 = m\pi$, $\phi^0 = (n + (1/2))\pi$, $m,n \in \mathbb{Z}$, con lo que, al cumplirse todas las hipótesis A-D, posee cadenas de transicion conteniendo a cualquier toro invariante de T_ω^ε .

Observese que la expresión de M aparece el factor multiplicativo $1/\operatorname{senh}(\omega\pi/2\sqrt{\varepsilon}) \sim (1/2)\ \exp(\omega\pi/2\sqrt{\varepsilon})$, con lo que variedades estable e inestable correspondientes a distintos o os de transicion T_ω^ε, $T_{\tilde{\omega}}^\varepsilon$ se cortaran transversalmente si $M_2(\phi^0,t^0) = \omega - \tilde{\omega}$ (vease la expresión (6.2.15)), o sea, si $\omega-\tilde{\omega} \sim \exp(-\omega\pi/2\sqrt{\varepsilon})$. Ademas el angulo de corte entre variedades tambien sera del orden de $\exp(\omega\pi/2\sqrt{\varepsilon}) = \exp(\omega\pi/\lambda)$, siendo λ el "angulo" entre la variedad estable y la inestable en T_ω, para = 0 (vease la Nota 6 del apartado (4.3)). De hecho, hay una conjetura de Simo (70), que establece que esta dependencia del angulo con respecto a λ, es siempre del tipo $C_1\lambda^a \exp(C_2\lambda^{-b})$, con $a \geq 0$, $b>0$ (pueden verse algunos calculos a este respecto en (16), (28)). Por ultimo, digamos que en (6.2.20) aparecen dos parametros ε, μ de manera que si $\mu = 0$, H es todavia integrable, y es del tipo de la forma normal del apartado (4.2), con lo que existen toros de transicion 2-dimensionales, que no aparecen, en cambio si $\varepsilon = \mu = 0$.

Como otro ejemplo, más cercano a nuestro caso, podemos considerar el hamiltoniano

$$H(q,p,\phi_1,\phi_2,I_1,I_2) = (p^2/2) - \cos q + (I_1^2/2) + (I_2^2/2) + \\ + \varepsilon/2 \left[((2I_1)^{1/2} \operatorname{sen}\phi_1 - q)^2 + ((2I_2)^{1/2} \operatorname{sen}\phi_2 - q)^2\right]. \quad (6.2.21)$$

Si $\varepsilon = 0$, cada toro $T_\alpha = \{(q,p,\phi_1,\phi_2,I_1,I_2) : I_1 = \alpha_1, I_2 = \alpha_2, q = \pm\pi, p=0\}$ es un toro invariante con mostachos $W_\alpha^s = W_\alpha^u = W_\alpha^0 = \{(q,p,\phi_1,\phi_2,I_1,I_2) : F(q,p) = (p^2/2) - \cos q = 0, I_1=\alpha_1, I_2=\alpha_2\}$ y flujo asociado $x^0(t) = (q^0(t), p^0(t), \phi^0(t), I^0(t))$ dado por

$q^0(t) = \pm 2 \operatorname{arctag}(\operatorname{sh} t)$, $p^0(t) = 2 \operatorname{sech} t$, $I_j^0(t) = \alpha_j$, $\phi_j^0(t) = \phi_j^0(0) + \alpha_j t, j=1,2$

La funcion de Melnikov $M_\alpha(\phi_1^0,\phi_2^0) = M(\phi^0) = (M_1(\phi^0), M_2(\phi^0))$ viene dada por

$$M_1(\phi_1^0,\phi_2^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{I_1, H_1\}(x^0(t),0)\, dt = 2\,(2\alpha_1)^{1/2} \operatorname{coseh}(\pi\alpha_1/2) \operatorname{sen}\phi_1^0$$

$$M_2(\phi_1^0,\phi_2^0) = \int_{-\infty}^{\infty} \{F, H^1\}(x^0(t),0)\, dt = \left[(2\alpha_1)^{1/2} \alpha_1 \operatorname{sech}(\pi\alpha_1/2) \operatorname{sen}\phi_1^0 + \\ + (2\alpha_2)^{1/2} \alpha_2 \operatorname{sech}(\pi\alpha_2/2) \operatorname{sen}\phi_2^0\right]$$

(El calculo de estas integrales puede verse en (40)), con ceros simples para $\phi_1^0 = m\pi$, $\phi_2^0 = n\pi$, $\forall m,n$, con lo que, al cumplirse tambien las hipótesis A-D posee cadenas de transicion conteniendo a cualquier toro de transicion T_α^ε asociado a (6.2.21).

NOTA 1 Si $d = 1$, esto es, el hamiltoniano H del teorema tiene dos grados de libertad, los toros invariantes son unidimensionales, y son por tanto, orbitas periodicas con variedades invariantes 2-dimensionales. En tal caso trabajando con una aplicacion de Poicare adecuada (vease (39),(41)), puede aplicarse los resultados de Smale (74), y Moser (56) e incluir un Shift

de Bernoulli como subsistema, cerca de un punto homoclínico transversal. Además en tal caso el hamiltoniano H es no integrable, más precisamente, no existe otra integral primaria analítica independiente de H (vease Moser (56)).
En estos casos, la integral de Melnikov se revela como una herramienta eficaz para detectar la no integrabilidad (vease (13),(41)). El caso $d>3$ no está estudiado en general, en lo referente a la inclusion de shift como subsistema, aunque existen algunos resultados parciales garantizando dicha inclusion ((27),(39)). De todos modos, parece plausible la tesis de no integrabilidad en el caso de intersección transversal de diferentes variedades invariantes, debido a la densidad de órbitas periodicas de periodo arbitrariamente grande (vease (40)) cerca de las órbitas homoclínicas transversales, dado lugar a capas "caoticas".

CAPITULO 7

GENERICIDAD DE LA DIFUSION DE ARNOLD

7.1. El concepto de genericidad en sistemas hamiltonianos .

Dado un conjunto S de objetos matemáticos, es de práctica común el comenzar a clasificarlos en dos tipos: usuales (regulares, no degenerados, ...) e inusuales (singulares, degenerados,...). Una manera de hacer esto consiste en atribuir una medida al conjunto S, y considerar como conjuntos inusuales a los de medida cero, y como usuales a los de medida total. Otra manera es introduciendo una topología en S, y considerando usuales a los subconjuntos residuales de S:

DEFINICION. Sea S un espacio topológico. Diremos que un subconjunto G de S es residual si es intersección numerable de subconjuntos abiertos y densos en S.

Por ejemplo, el conjunto de los números irracionales es residual en $\mathbb{R}$. Diremos que S es un espacio de Baire si todo subconjunto residual es denso en S. Así, si G es un subconjunto residual de un espacio de Baire S, en todo abierto de S encontramos elementos de G. Todo espacio topológico "decente" es un espacio de Baire; así, por ejemplo, todo espacio homeomorfo a un espacio métrico completo es de Baire ((65), sección 2.2).

DEFINICION . Una propiedad P sobre un espacio topológico S se llama genérica si $\{x \in S : P(x)\}$ contiene un subconjunto residual de S.

Nuestro próximo objetivo consiste en introducir una topología en la categoría de sistemas hamiltonianos, de manera que podamos aplicar estas dos definiciones a propiedades concretas de sistemas hamiltonianos y podamos discernir si son o no genéricas, es decir, son o no "típicas" de los sistemas hamiltonianos . Obsérvese que ningún hamiltoniano particular puede ser declarado genérico, sino sólo ciertas clases de hamiltonianos podrán ser genéricos. Además en muchos casos es difícil establecer que un hamiltoniano concreto pertenezca a alguna clase genérica de hamiltonianos (aunque perturbándolo ligeramente, sí pertenecerá. Digamos, por último, que la genericidad o no de una propiedad dependerá de la topología introducida, por lo que ésta habrá de ser especificada en cada caso.

Sea (M,Ω) una variedad simpléctica 2n-dimensional. Dada una función C^r $H : M \to \mathbb{R}$, construímos su campo hamiltoniano asociado X_H, de clase C^{r-1}, de manera única mediante

$$\Omega(m)(X_H(m), v) = dH(m)\, v \qquad m \in M, \quad v \in T_m M$$

Si $\bar{H}$ es otra función C^r tal que $H-\bar{H}$ sea una función localmente constante (constante en cada componente conexa de M) entonces el campo asociado $X_{\bar{H}}$ coincide con el campo anterior X_H. Con el fin de establecer una correspondencia biunívoca entre hamiltonianos H y sistemas hamiltonianos X_H, introduciremos en $C^r(M,\mathbb{R})$ la relación de equivalencia:

$$f \sim g \iff f-g \qquad \text{es localmente constante,}$$

y cada elemento de $\mathcal{H}^r = \mathcal{H}^r(M) = C^r(M,\mathbb{R})/\sim$ lo llamaremos un <u>hamiltoniano normalizado</u> ((47), pág 11).A menudo designaremos un hamiltoniano normalizado dando un representante de la clase de equivalencia; si M es compacto podemos normalizar H imponiendo, por ejemplo, que su valor mínimo en cada componente conexa sea cero.

Definamos a continuación la topología C^r de Whitney $(2 \leqslant r \leqslant \infty)$ sobre el espacio de hamiltonianos normalizados sobre la variedad simpléctica (M,Ω).

Como el conjunto de funciones localmente constantes es un subespacio vectorial de $C^r(M,\mathbb{R})$ (respecto a suma de funciones y producto de una función por un número real), $\mathcal{H}^r$ es un espacio vectorial en el cual introducimos la topología generada por la base de entornos del cero:

$$V(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k) = \{f \in C^r(M,\mathbb{R}) \ : \ \|D^i f(x)\| < \varepsilon_i(x), \quad x \in M, \quad i = 1,\ldots,k$$

con $\varepsilon_i : M \to \mathbb{R}^+$ continuas, $i = 1,\ldots,k$, con $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant r$.

Las derivadas $Df,\ldots,D^k f$ y sus normas asociadas en un punto $x \in M$ son evaluadas con respecto a una métrica de Riemann fija (recordemos que M es orientable, al ser (M,Ω) simpléctica), pero escogida de manera arbitraria. Si $g \in C^r(M,\mathbb{R})$, los elementos de su base de entornos son del tipo $g + V(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_k)$. Con la topología generada por esta base de entornos, es inmediato comprobar que $\mathcal{H}^r$ es un espacio vectorial topológico Haussdorff, y puede comprobarse además que es un espacio de Baire (ver(52)), con lo que todo subconjunto residual de $\mathcal{H}^r$ es denso en $\mathcal{H}^r$. En el caso en que M sea una variedad compacta, las funciones continuas $\varepsilon_i : M \to \mathbb{R}^+$, $i=1,\ldots,r$, pueden ser reemplazados por constantes $\varepsilon_i = (1/n)$ $i=1,..,r$, $n \geq 1$, y $\mathcal{H}^r$ se convierte en un espacio de Frechet, con una topologia metrizable dada por la distancia

$$\mathrm{dist}(f,g) = \sum_{k=1}^{r} \max_{x \in M} \frac{1}{2^k} \frac{\|D^k(f-g)(x)\|}{1+\|D^k(f-g)(x)\|}$$

que es en realidad una norma si $r < \infty$, en cuyo caso $\mathcal{H}^r$ es un espacio de Barrach

Podemos hablar ya de propiedades <u>C^r genericas</u>, en el sentido de que el conjunto de hamiltonianos que las cumplan, sean subconjuntos residuales de $\mathcal{H}^r$. Asi, por ejemplo, si llamamos <u>punto critico regular</u> a todo punto critico de un sistema hamiltoniano X_H tal que ((1), pag 580)

a) 0 no es un exponente caracteristico.

b) Si λ es un exponente caracteristico con parte real nula, entonces tiene multiplicidad 1.

c) si λ, ν son exponentes caracteristicos con parte real nula y parte imaginaria positiva, entonces $k_1\lambda + k_2\mu \neq 0$ si $|k_1| + |k_2| \geq 1$, $k_1, k_2 \in Z$

y si decimos que un hamiltoniano H tiene la propiedad (H1) si todo punto critico es regular, entonces puede verse que la propiedad (H1) es C^r-generica para $r \geq 1$ (vease (1) pag 59).

Observemos que, en particular, todo punto eliptico de orden (al menos) N, para cualquier $N \in \mathbb{N}$, es un punto critico regular (vease(4.1.4), y que las propiedades a),b) son consecuencia de c). De hecho un punto eliptico de orden (al menos) N, para cualquier $N \in \mathbb{N}$ cumple $(K,\alpha) \neq 0$, $\forall k \in Z^n$, $k \neq 0$, condicion mas restrictiva que a),b),c). En el apartado siguiente veremos otras propiedades genericas de sistemas hamiltonianos, relacionadas con los conceptos introducidos en los capitulos anteriores.

7.2. Algunas propiedades genericas de sistemas hamiltonianos

Sea (M,Ω) variedad simplectica 2n-dimensional, fija en este apartado.

DEFINICION Llamaremos $\mathcal{H}_1^r = \mathcal{H}_1^r(M)$ al conjunto de hamiltonianos normalizados $H \in \mathcal{H}^r(M)$ tales que existe un punto elíptico $m \in M$ de orden (al menos) 2 de X_H.

Así, m tiene sus exponentes característicos asociados del tipo $\lambda_j = \pm i\alpha_j$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j=1,\dots,n$, todos distintos entre sí:

$$\alpha_j \neq 0,\ j=1,\dots,n,\quad \alpha_j \neq \alpha_i\ i\neq j,\quad \alpha_j \neq \alpha_i\ i,j=1,\dots,n,$$

o alternativamente

$$\sum_{j=1}^{n} k_j\alpha_j \neq 0 \quad \text{si} \quad 1 \leq \sum_{j=1}^{n} |k_j| \leq 2,\ k_j \in \mathbb{Z}$$

que es la condicion que aparecia en (4.1.4)

PROPOSICION Si M es compacta, $\mathcal{H}_1^r(M)$ es abierto y denso en $\mathcal{H}^r(M)$, $r\geq 2$

DEMOSTRACION Sea $\mathcal{G}^r \subset \mathcal{H}^r(M)$ el conjunto de hamiltonianos normalizados H tales que el hessiano $D^2H(m)$ de H en cada uno de sus puntos críticos ($DH(m) = 0$) es no degenerado ($\det(D^2H(m) \neq 0)$. Entonces el conjunto de tales puntos críticos de un hamiltoniano $H \in \mathcal{G}^r$ es un conjunto discreto (vease (51) pag 8), y la teoría clasica de Morse nos dice que $\mathcal{G}^r$ es abierto y denso en $\mathcal{H}^r$ (53).

Si $H \in \mathcal{H}_1^r(M)$, existe $m \in M$ punto crítico de H, tal que los exponentes caracteristicos de X_H en m son del tipo $\pm i\alpha_j$ $j=1,\dots,n$, todos de multiplicidad 1. Si H' es otro hamiltoniano C^r-suficientemente proximo a H, sus exponentes característicos λ_j' en un punto m' proximo a m, donde $dH'(m') = 0$

tendran todavia todas sus partes imaginarias distintas,puras: si $\lambda_n = a_n + i\alpha'_n$, con $a \neq o$, entonces $-\lambda_n$, $\bar{\lambda}_n$, $-\bar{\lambda}_n$ son tambien exponentes caracteristicos distintos de los restantes, con lo cual tedríamos $2n + 2$ exponentes característicos, lo cual es absurdo. Así, $\mathcal{H}_1^r(M)$ es abierto en $\mathcal{H}^r(M)$. Para acabar la demostracion, basta probar que $\mathcal{H}_1^r(M)$ es denso en ^{r}, es decir,que todo elemento $H_0 \in \mathcal{G}^r$ puede aproximarse arbitrariamente, en la topologia C^r, por elementos de $\mathcal{H}_1^r(M)$. Si $H_0 \in \mathcal{G}^r$, y por ser M compacta, existe $m \in M$, donde H_0 alcanza el minimo, siendo su hessiano en m no degenerado, y por lo tanto, definido positivo, con lo que m es un punto estable(vease(1),pág 207) y por tanto los exponentes caracteristicos de X_{H_0} en m son todos imaginarios puros (si existiese alguno con parte real negativa, existiria su opuesto, con parte real positiva, y m no podria ser estable). Si los exponentes caracteristicos de X_{H_0} en m son simples,$H_0 \in \mathcal{H}_1^r(M)$, si no, podemos encontrar $H_1 \in \mathcal{H}_1^r(M)$ arbitrariamente C^r-proximo a H_0 con los exponentes caracteristicos de X_{H_1} en m simples. c.q.d.

Si m es un punto eliptico de orden (al menos) N de un hamiltoniano $H \in \mathcal{H}_1^r(M)$, con $N > 4$, $r \geq N + 1$, su forma normal de Birkhoff, en un entorno de m, es del tipo (vease (4.1.5)) .

$$\gamma_N(q,p) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j r_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} r_i r_j + \ldots + \gamma'_{[N/2]}(r) \tag{7.2.1}$$

con $r = (r_1, \ldots, r_n)$, $2r_j = q_j^2 + p_j^2$ $j=1,\ldots,n$, estando univocamente determinada. En estas coordenadas simplecticas (q,p), H se escribe como

$$H(q,p) = H(m) + \gamma_N(q,p) + O(|q| + |p|)^{N+1}, \quad |q| + |p| \to 0 \tag{7.2.2}$$

En particular, el vector $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ y la matriz $A = (\alpha_{ij})_{1<i,j<n}$, correspondientes a los terminos de primer y segundo orden de la forma

normal de Birkhoff asociada a H en m, estan univocamente determinados por el germen del hamiltoniano normalizado $H \in \mathcal{H}^r(M)$, es decir, si $H_1 \in C^r(M,\mathbb{R})$ y existe V entorno de M tal que $H-H_1$ sea constante en V, entonces la forma normal de Birkhoff asociada a H_1 en m es exactamente (7.2.1), donde aparecen α, A.

Sea ahora $k^0 \in \mathbb{Z}^n$, con $4 \leqslant |k^0| \leqslant N$. Mediante un cambio polinómico de variables, en un entorno de m, la forma normal de grado N de H con respecto a k^0 es del tipo

$$\Gamma^{(2)}(x,y) + \ldots + \Gamma^{(N)}(x,y) \tag{7.2.3}$$

con $\Gamma^{(s)}(x,y) = \sum_{(\ell,m) \in L_s} C_{\ell m} Z^{\ell}\bar{Z}^m$; $L_s = \{(\ell,m) \in \mathbb{Z}^{2n} : \ell - m = jk^0$, $j \in \mathbb{Z}$, $|\ell| + |m| = s\}$ y $Z = (Z_1, \ldots, Z_n)$, $Z_j = x_j + iy_j$ $j=1,\ldots,n$

Recordemos que si $2 \leqslant s \leqslant |k^0| = M$, entonces $L_s = \{(\ell,\ell) \in \mathbb{Z}^{2n}\}$, y $\Gamma^{(2)} + \ldots + \Gamma^{(M-1)} = \gamma_{M-1}$, es decir, la forma normal de grado M-1 de H con respecto a k^0 coincide con la forma normal de Birkhoff de H de orden M-1. los terminos "resonantes" de (7.2.3) ($C_{\ell m} \neq 0$, $\ell \neq m$), aun no han aparecido.

Vimos en (4.3.5) que haciendo el cambio canonico $Z_j = \sqrt{2r_j}\,e^{-i\theta_j}$ $j=1,\ldots,n$ $\Gamma^{(M)}$ se escribia como

$$\Gamma^{(M)}(\theta,r) = \Gamma^{(2L)}(r) + \tilde{\Gamma}^{(M)}(\theta,r) \tag{7.2.4}$$

con $\Gamma^{(2L)}(r) = 2^s \sum_{|\ell|=s} C_{\ell\ell} r^{\ell}$, $L=(M/2)$ (este termino solo aparece si M es par)

$$\text{y} \quad \tilde{\Gamma}^{(M)}(\theta,r) = a(2r)^{k^0/2} \cos((k^0,\theta)-b) \tag{7.2.5}$$

$\Gamma^{(2L)}$ es un termino mas de la forma normal de Birkhoff, si aparece, y $\tilde{\Gamma}^{(M)}$ es el termino "resonante". Así, (7.2.3) hasta orden M es del tipo

$$\Gamma^{(2)} + \ldots + \Gamma^{(M)} = \gamma_M(r) + \tilde{\Gamma}^{(M)}(\phi,r).$$

Recordemos que para obtener $(\Gamma^{(2)}+\ldots+\Gamma^{(M)})(x,y)$, hemos hecho un cambio polinomico de variables $(q,p)\mapsto(x,y)$, canonico, siendo su funcion generatriz $W(q,y) = (q,y) + \sum_{|\ell|+|m|=3}^{M} d_{\ell m}\,\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m}$, con $\zeta_j = q_j+iy_j$ $j=1,\ldots,n$.

Para determinar $\tilde{\Gamma}^{(M)}(\theta,r)$ univocamente, impodremos que $d_{\ell m} = 0$, si $(\ell,m)\in L_s(k^0) = \{(\ell,m)\in \mathbb{Z}^{2n} : \ell-m=jk^0,\ j\in\mathbb{Z},\ |\ell| + |m|=s\}$ para $3\leqslant s\leqslant M$. Así la funcion generatriz del cambio sera

$$W(q,y) = (q,y) + \sum_{s=3}^{M}\ \sum_{(\ell,\,m)\notin L_s(k^0)} d_{\ell m}\,\zeta^{\ell}\bar{\zeta}^{m},$$

$$\text{con } \zeta_j = q_j + iy_j, \qquad j = 1,\ldots,n \tag{7.2.6}$$

viniendo el cambio de variables $(q,p)\to(x,y)$ dado por las ecuaciones

$$x_j = \frac{\partial W}{\partial y_j}(q,y), \quad p_j = \frac{\partial W}{\partial q_j}(q,y), \quad j = 1,\ldots,n.$$

Si H se encontraba ya en forma normal de Birkhoff hasta orden M, no es dificil comprobar que si hacemos un cambio canonico de variables generado por la funcion W de la forma de (7.2.6), para encontrar su forma su forma normal de orden M con respecto a k^0, $\Gamma^{(2)}+\ldots+\Gamma^{(M)}$, esta coincide con H, es decir, en (7.2.6) $d_{\ell m}=0$ para $3\leqslant|\ell|+|m|\leqslant M$ (usense las igualdades (4.2.8))

DEFINICION Llamaremos $\mathcal{H}_2^{\infty} = \mathcal{H}_2^{\infty}(M)$ al conjunto de hamiltonianos normalizados $H\in\mathcal{H}^{\infty}(M)$ tales que existe un punto elíptico $m\in M$ de orden (al menos) 4 cumpliendo

i) $\alpha_1,\ldots,\alpha_n$ son inconmensurables.

ii) dado $\rho>0$, existe $k^0\in Z^n$, $|k^0| = M\geqslant 4$, con $k_n^0 \neq 0$, y m.c.d$(k_1^0,\ldots,k_n^0) = 1$ cumpliendo

a) $|(\alpha,k^0)| < 4\rho|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}k_i^0 k_j^0|$

b) $a \neq 0$ en (7.2.5), al hacer el paso a forma normal de orden M con respecto a k^0, usando una funcion generatriz del tipo de (7.2.6)

iii) $\det (\alpha_{ij})_{1 \leq i,j \leq n-1} \neq 0$

$(\alpha_j, (\alpha_{ij})$ vienen dados por los terminos de primer orden y segundo orden de la forma normal de Birkhoff asociada a H en m).

Comentemos esta definicion. Los hamiltonianos $H \in \mathcal{H}_2^\infty(M)$ satifacen las hipotesis del teorema sobre conservacion de toros de transicion del capítulo 5 con lo que en todo entorno de m existen toros de transción n-1 dimensionales. Notemos que en ii), para cada $\rho > 0$, existe $k^0 = k^0(\rho)$ cumpliendo la propiedad a), con lo que al tomar entornos mas pequeños de m, k^0, en general, variara.

Se trata de ver que, genericamente, en el entorno de un punto eliptico se satisfacen i), ii), iii), con lo que existiran los toros de transicion n-1 dimensionales ya citados. Observemos que, debido a la condicion i), m es un punto elíptico de orden N, para cualquier natural N, con lo que en particular $\mathcal{H}_2^\infty \subset \mathcal{H}_1^\infty$.

PROPOSICION $\mathcal{H}_2^\infty(M)$ es residual en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$

DEMOSTRACION Sea $g_N(M) \subset \mathcal{H}_1^\infty(M)$ el conjunto de hamiltonianos normalizados $H \in \mathcal{H}_1^\infty(M)$ tales que existe un punto eliptico m de orden (al menos) N. Así si $\lambda_j = \pm i\alpha_j$, j=1,..,n son los exponentes caracteristicos de X_H en m, se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i k_i \neq 0 \quad \text{si } 1 \leq \sum_{i=1}^{n} |k_i| \leq N, \quad K_i \in \mathbb{Z}$$

Fijemonos que $g_2(M) = \mathcal{H}_1^\infty(M)$. Claramente $g_N(M)$ es un abierto de $\mathcal{H}_1^\infty(M)$ para $N > 2$. Sea $g_\infty(M) = \bigcap_{N=2}^{\infty} g_N(M)$. Es conocido (vease (47), pág 41) que

$g_\infty(M)$ es denso en $g_2(M) = \mathcal{H}_1^\infty(M)$, con lo que cada $g_N(M)$ es denso en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$. y $g_\infty(M)$ es residual en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$. Los hamiltonianos $H\in g_\infty(M)$ son precisamente los que en algun punto eliptico m, cumplen la propiedad i). Para probar que $\mathcal{H}_2^\infty$ es residual en $\mathcal{H}_1^\infty$ probaremos que $\mathcal{H}_2^\infty$ es abierto y denso en g_∞.

Sea $H\in g_\infty(M)$. Sea $\rho > 0$ arbitrario. Veamos que existe $k^0\in{}^n$, $|k^0|= M\geq 4$, con $k_n^0 \neq 0$ cumpliendo a). Lo probaremos por reducción al absurdo. Si para cualquier $k^0\in Z^n$, con $k_n^0 \neq 0$, se cumpliese la desigualdad

$$|(\alpha,k^0)| \geq 4\rho|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, k_i^0\, k_j^0| ,$$

entonces, para cualquier $r = (r_1,\ldots,r_n)\in Q^n$, $r_i = q_i/p$ con $r_n\neq 0$. se cumplira

$$|(\alpha,r)| > 4\rho p|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, r_i\, r_j| \geq 4\rho|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, r_i\, r_j|$$

y por densidad de Q^n en $\mathbb{R}^n$, se cumpliria

$$|(\alpha,x)| \geq 4\rho|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, x_i\, x_j|$$

para cualquier $x\in\mathbb{R}^n$ con $x \neq 0$, lo cual es absurdo: si no, para cualquier $v \in\mathbb{R}^n$ con $v_n \neq 0$. y cualquier $\lambda\in\mathbb{R}$, $\lambda > 0$ tendriamos, escribiendo $x = \lambda v$

$$|(\alpha,v)| \geq 4\rho\lambda|\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\, v_i\, v_j| \quad \forall\lambda > 0 \quad v_n \neq 0$$

de donde $A = (\alpha_{ij}) = 0$. Así, a menos que $A = 0$, existe $k^0\in Z^n$ con $k_n^0\neq 0$ tal que se cumple a) con $mcd(k_1^0,\ldots,k_n^0) = 1$. Si $|k^0| = M\geq 4$ ya esta, si no considerando a k^0 como un numero racional cumpliendo a), podemos encontrar otro $k^0\in Z^n$ cumpliendo a), con $k_n^0 \neq 0$, $M = |k^0| \geq 4$ y m.c.d. $(k_1^0,\ldots,k_1^0) = 1$.

Una vez encontrado k^0 (si $A\neq 0$, consicion densa y abierta en $g_\infty(M)$), buscamos su forma normal de orden M con respecto a k^0, usando una funcion generatriz del tipo de (7.2.6), obteniendo (7.2.4). El que a sea no nulo es una condicion densa y abierta en $g_\infty(M)$. Por ultimo tambien la condicion

iii) es densa y abierta en $\mathcal{G}_\infty(M)$, con los que $\mathcal{H}_2^\infty(M)$ es denso y abierto en $\mathcal{G}_\infty(M)$. Como $\mathcal{G}_\infty(M)$ es residual en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$, entonces $\mathcal{H}_2^\infty(M)$ es residual en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$. c.q.d.

DEFINICION Sea P_1 la propiedad siguiente: Existe un punto elíptico m de un hamiltoniano $H \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ con frecuencias asociadas $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n$ de manera que para cualquier $\nu > 0$ existe un entorno V de m (de radio $\delta = \alpha(\nu^4)$), tal que en V, el sistema correspondiante al hamiltoniano H, posee toros de transicion n-1 dimensionales T_ω, con flujo lineal de frecuencia $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_{n-1})$, para cualquier $\mathbb{R}^{n-1}$ con $|\omega_i - \alpha_i| \leq \nu$, tal que

$$|(k,\omega)| \geq \nu |k|^{-(n-1)} \quad \text{para cualquier } k \in \mathbb{Z}^n,\ k \neq 0$$

Esta propiedad la cumplen precisamente los hamiltonianos de $\mathcal{H}_2^\infty(M)$.

COROLARIO La propiedad P_1 es generica en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$. Si M es compacta, la propiedad P_1 es generica en $\mathcal{H}^\infty(M)$.

Nuestro proximo objetivo, y de importancia crucial para probar la generalidad de la difusión de Arnold, es probar que los hamiltonianos de $\mathcal{H}_2^\infty(M)$ que tienen una orbita homoclinica transversal dentro del nivel de energía, forman un conjunto residual en $\mathcal{H}_2^\infty(M)$.

DEFINICION Llamaremos $\mathcal{H}_3 = \mathcal{H}_3^\infty = \mathcal{H}_3^\infty(M)$ al conjunto de hamiltonianos normalizados $H \in \mathcal{H}_2^\infty(M)$ tales que existe un toro de transicion T (n-1)-dimensional cuyas variedades invariantes asociadas W^sT, W^uT se cortan transversalmente, con respecto al nivel de energía de T, a lo largo de una orbita asociada al hamiltoniano H. Dicha orbita recibe el nombre de <u>orbita homoclínica transversal que va de T a T</u>.

PROPOSICION $\mathcal{H}_3^{\infty}(M)$ es abierto y denso en $\mathcal{H}_2^{\infty}(M)$

DEMOSTRACION Sea $H \subset \mathcal{H}_2^{\infty}(M)$. Entonces, al cumplirse los puntos i) ii), iii), de la definicion de $\mathcal{H}_2^{\infty}(M)$, se cumplen todas las hipotesis del teorema de conservacion de toros de transicion (vease(5.2.10)), con lo que si fijamos un entorno de radio $\rho > 0$ de un punto eliptico $m \in M$ con exponentes caracteristicos $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ cumpliendo i), ii), iii), entonces para cada $\nu > 0$, existe $\delta(\nu) > 0$ tal que en un entorno de radio δ de m, el hamiltoniano H posee toros de transicion (n-1)-dimensionales T_β, con flujo lineal de frecuencia β, para cada $\beta \in \Omega(\nu) \subset \Omega$, donde Ω es un entorno abierto de $(\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1})$ en $\mathbb{R}^{n-1}$, y $\Omega(\nu)$ es un conjunto cantoriano que llena Ω salvo un conjunto de medida $O(\nu) = O(\delta^{1/4})$. Ademas, conocemos aproximadamente la expresion de las variedades invariantes W_β^s, W_β^u asociadas a T_β, gracias a la expresion de H en la forma normal de (4.3.6), hasta orden M, donde $M = |k^0|$, con k^0 cumpliendo la condicion ii) a) de la definicion de $\mathcal{H}_2^{\infty}(M)$. Vemos que W_β^s, W_β^u tienen interseccion no vacia. Por ello observemos que si consideramos H como

$$H = \Gamma + R_{M+1}$$

siendo $\Gamma = \Gamma_0 + \Gamma^{(M)}$ la forma normal de H hasta orden M con respecto a k^0, entonces existian con respecto a Γ toros de transicion T_β^0, con frecuencia lineal β y variedades invariantes asociadas $W_\beta^{s,0} = W_\beta^{u0} = W_\beta^0$, C^r-proximas a las correspondientes a H, ya citadas arriba, si β' estaba proximo a β. Los toros T_β^0, tenian por ecuacion $I_n = I_n^*$, $\phi_n = \phi_n^*$, en coordenadas (ϕ, I) validas en un entorno de m, con I_n^*, ϕ_n^* dependiendo de β'.

Fijemos (ϕ_n^*, I_n^*) para la frecuencia β correspondiente al toro T_β y en la hipersuperficie de nivel $H^{-1}(h)$, consideremos la hipersuperficie de seccion

$$\Sigma_h = \{(\phi, I) \cdot \phi_n = \phi_n^*\} \cap H^{-1}(h).$$

si $\frac{\partial H}{\partial I_n} \neq 0$ en Σ_h, Σ_h sera una variedad simplectica (2n-2)-diemnsional (vease (64)) con coordenadas simplecticas $\phi_1,\ldots,\phi_n$, $I_1,\ldots,I_{n-1}$.

En Σ_h definimos la correspondiente aplicacion de Poincare P_h, que sera una aplicacion globalmente canonica (12) del tipo

$$\begin{aligned} \phi_i &\to \phi_i + \gamma_i(I) + O_{M+1}(I) \\ I_i &\to I_i + O_{M+1}(I) \end{aligned} \qquad i=1,\ldots,n-1$$

no definida para $(\phi_1,\ldots,\phi_{n-1}, I_1,\ldots,I_{n-1})$ sobre la variedad estable asociada a T_β , es decir, no definida sobre el toro (n-1) dimensional que

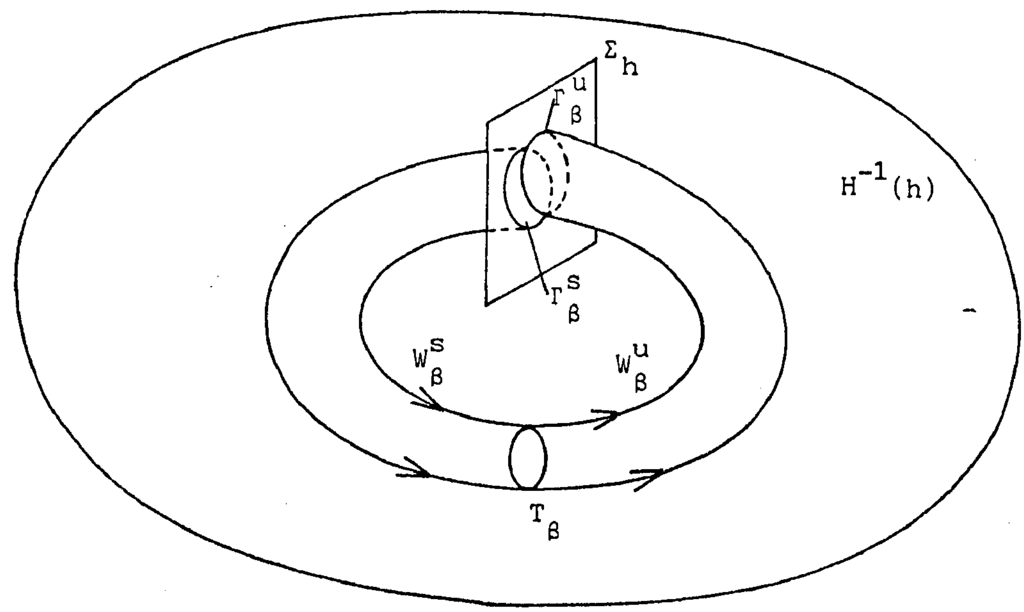

Figura 7.1.

llamaremos $\Gamma^s_\beta \subset \Sigma_h$. Analogamente, P_h^{-1} no esta definida sobre un toro (n-1)-dimensional Γ^u_β. Para cualquier toro(n-1)-dimensional $\Gamma \subset \Sigma_h$ proximo a Γ^s_β, dis junto con Γ^s_β, se cumple la propiedad de la interseccion efectiva, ya citada en el apartado 3.4.:

$P_h \Gamma \cap \Gamma$ es no vacio

(de hecho, esta interseccion contiene al, menos algebraicamente 2^{n-1} puntos de los cuales n+1 al menos son disjuntos geometricamente, (12) Ap. 33) debido al caracter globalmente canonico de P_h. De aqui podemos afirmar que $\Gamma^s_\beta, \Gamma^u_\beta$ tienen interseccion no vacia. En efecto, supongamos que $\Gamma^s_\beta \cap \Gamma^u_\beta = \phi$. Entonces, por ser ambos compactos, dist $(\Gamma^s_\beta, \Gamma^u_\beta) = d > 0$. Escogiendo ahora Γ toro (n-1)-dimensional suficientemente proximo a Γ de manera que dist $(\Gamma^s_\beta, \Gamma_\beta) < (d/2)$, dist$(\Gamma^u_\beta, P_h\Gamma) < (d/2)$ (T_β es un toro de transicion) se cumple que existe $x \in \Gamma \cap P_h \Gamma$. Pero entonces dist$(\Gamma^s_\beta, \Gamma^u_\beta) <$ dist(Γ^s_β, x) + + dist$(x, \Gamma^u_\beta) < d$, lo cual es absurdo.

Asi en un entorno suficientemente pequeño de m, $\Gamma^s_\beta \cap \Gamma^u_\beta \neq \phi$, con lo que W^s_β W^u_β se cortan al menos a lo largo de una orbita, o dicho de otro modo, la funcion del Melnikov $M_\beta(\phi_1 \ldots \phi_n)$ tiene ceros. El que estos sean simples o no, depende solo de que $\det DM_\beta(\phi_1 \ldots, \phi_{n-1}) \neq 0$ en esos ceros, condicion claramente abierta y densa, con lo que si el hamiltoniano $H \in \mathcal{H}^\infty_2(M)$ escogido no satisface esta condicion de no degeneracion puede ser aproximado de manera arbitraria por hamiltonianos $H_1 \in \mathcal{H}^\infty_3(M)$. En definitiva, hemos probado que $\mathcal{H}^\infty_3(M)$ es denso y abierto en $\mathcal{H}^\infty_2(M)$.

Como consecuencia de las tres ultimas proposiciones, obtenemos por fin el siguiente

TEOREMA Sea M una variedad simplectica 2n-dimensional. Entonces si $n > 2$, en $\mathcal{H}^\infty_1(M)$ (o en $\mathcal{H}^\infty(M)$, si M es compacta) la difusion de Arnold es generica. Mas concretamente, la existencia de cadenas de transicion es generica en $\mathcal{H}^\infty_1(M)$ (o en $\mathcal{H}^\infty(M)$, si M es compacta), si $n > 2$.

DEMOSTRACION Sea $H \in \mathcal{H}_3^\infty(M)$. Entonces existe un toro de transicion T $(n-1)$ dimensional cuyas variedades invariantes W^sT, W^uT se cortan transversalmente dentro del nivel de energía de T. Como $\mathcal{H}_3^\infty(M) \subset \mathcal{H}_2^\infty(M)$, existe una familia parametrizada por un conjunto cantoriano (n-2)-dimensional(vease el comentario al corolario del apartado 6.2) si se cumple la condición tecnica $\frac{\partial\omega_{n-1}}{\partial I_{n-1}} \neq 0$ del teorema del apartado 6.2., condicion abierta y densa en $\mathcal{H}_3^\infty(M)$. Por tanto, debido a que $n > 2$, en un conjunto abierto y denso en $\mathcal{H}_3^\infty(M)$, existen cadenas de transición, ya que existen toros de transicion T' arbitrariamente proximos a T con lo que las variedades de los diferentes toros tambien se intersecarán. Como $\mathcal{H}_3^\infty(M)$ es abierto y denso en $\mathcal{H}_2^\infty(M)$, y como $\mathcal{H}_2^\infty(M)$ es residual en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$, la existencia de cadenas de transicion es generica en $\mathcal{H}_1^\infty(M)$. Si M es compacta, $\mathcal{H}_1^\infty(M)$ es denso abierto en $\mathcal{H}^\infty(M)$, con lo que la existencia de cadenas de transición es generica en $\mathcal{H}^\infty(M)$.

NOTA 1 La existencia de cadenas de transicion para un hamiltoniano específico puede ser efectivamente comprobada siguiendo los pasos descritos en los capítulos anteriores, ya que hemos hecho una demostracion constructiva. Así dado un hamiltoniano H, estudiaríamos su forma normal en su entorno de un punto elíptico con el fin de ver si existen toros de transición (n-1)-dimensionales, cuyas variedades se cortarán transversalmente si la funcion de Melnikov asociada tiene algun cero simple. De todos modos los calculos necesarios para calcular la forma normal y la función de Melnikov son, en general, muy costosas.

NOTA 2 Si encontramos una cadena de transicion $T_1, \ldots, T_k$ de longitud > d, es decir, $dist(T_1, T_k) > \rho$, entonces T_1 no es ρ- estable (vease apartado 3.5.) En el proceso de construccion seguido en esta memoria, buscamos dichas cadenas de transicion en entornos de puntos elipticos. El que exista una cadena de transicion en el entorno de un punto eliptico no significa que éste sea inestable (Liapunov). Por ejemplo, todo maximo o minimo relativo de un hamiltoniano H es un punto eliptico estable, ((1), pag 207). Sin embargo la existencia de una cadena de transicion de longitud > d en una hipersuperficie de nivel, indica que en esta, hay orbitas que se distancian de los toros de transicion al menos una distancia > d.

NOTA 3 Para sistemas casi integrables de hamiltoniano asociado $H_0(I) + \varepsilon H_1(\phi; I, \varepsilon)$, una tecnica analoga a la usada en esta memoria, esto es, busqueda de la forma normal adecuada (en un entorno de un toro dado) que garantice la existencia de toros de transicion (n 1) dimensionales, y cálculo de la interseccion de las variedades asociadas mediante la integral de Melnikov, parece plausible con el fin de poder detectar separaciones grandes de la variable I, para $\varepsilon \neq 0$, que era constante para $\varepsilon = 0$.

NOTA 4 Para n=2, no tenemos, en general, cadenas de transicion, es decir, interseccion de variedades correspondientes a distintos toros de transicion (vease el comentario del apartado (6.2)) pero si interseccion transversal de variedades invariantes estable e inestable W^s_β, W^u_β asociados a toros de transicion unidimensionales γ_β es decir, orbitas periodicas. Fijado el nivel de enrgia h de γ_β, y escogiendo una superficie de seccion Σ_h en un punto $p \in \gamma_\beta$ obtenemos una aplicacion de Poincare asociada $P. \Sigma_h \to \Sigma_h$, difeomorfismo conservando area, con p punto hiperbolico con curvas invariantes asociadas

$C^s_p = W^s_\beta \cap \Sigma_h$, $C^u_\beta = W^u_\beta \cap \Sigma_h$, que se cortan transversalmente, en general, en un punto homoclínico $q \in \Sigma_h$. Es conocido (74), (56), (2), que cerca de q, existe $N \geq 0$, existe un conjunto cantoriano Λ sobre el cual P^N_h es homeomorfa al shift de dos símbolos. Mas concretamente, si llamamos $S(m) = \{0,1,\ldots,m-1\}$, $B(m) = S(m)^Z = \{s=(s_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, tales que $s_i \in S(m)$, $i \in \mathbb{Z}\}$ y definimos $\sigma: B(m) \to B(m)$ mediante $s = (s_i) \longmapsto \sigma s = ((\sigma s)_i)$ con $(\sigma s)_i = s_{i+1}$ $i \in \mathbb{Z}$, entonces el sistema $(B(m), \sigma)$ recibe el nombre de <u>shift de Bernoulli de m símbolos</u>. El teorema de puntos homoclínicos de Smale y Moser establece que para cualquier entorno abierto V de q, existe un entorno abierto $U \subset V$ de q, un entero $N \geq 1$, y un imbedding $\phi: B(2) \to U$ tal que $\Lambda = \phi(B(2))$ es un conjunto cantoriano invariante y tal que $P^N_h \circ \phi = \phi \circ \sigma$. En tal caso se dice que existe <u>movimiento casi aleatorio</u> cerca de q.

Como hemos visto que la interseccion transversal de variedades invariantes es generica, de pasada hemos probado el

COROLARIO Sea M una variedad simplectica 4-dimensional. Entonces en $\mathcal{H}^\infty_1(M)$ (o en $\mathcal{H}^\infty(M)$, si M es compacta) la existencia de movimiento casi aleatorio es una propiedad generica.

En particular(vease (56), (80)), de aquí se deduce que no puede existir otra integral primera analítica, independiente del hamiltoniano, definida en un entorno de la orbita periodica hiperbolica, si existe movimiento casi aleatorio.

BIBLIOGRAFIA

(1) Abraham,R., Marsden,J.E., Foundations of Mechanics, Benjamin, Masachusetts (1978).

(2) Alekseev,V., Quasirandom dynamical systems I;II,III, math. U.S.S.R.-Sbornic, Vol 5, 73-128(1968), Vol. 6,505-560(1968), Vol. 7,1-43(1969)

(3) Arnold,V.I., The stability of the equilibrium position of a Hamiltonian system of ordinary differential equations in the general elliptic case, Sov. Math. Dokl. 2,247-249(1961)

(4) Arnold,V.I., Proof of a theorem of A.N.Kolmogorov on the invariance of quasi-periodic motions under small perturbations of the Hamiltonian, Russ. Math. Surveys,18,9-36(1963).

(5) Arnold,V.I., Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics,Russ. Math. Surveys, 18, 85-191, (1963).

(6) Arnold,V.I., Instability of dynamical systems with several degrees of freedom, Sov. Math. Dokl., 5, 581-585(1964).

(7) Arnold,V.I., Conditions for the applicability, and estimate of the error, of an averaging method for systems which pass through states of resonance in the course of their evolution,Sov. Math. Dokl., 6, 331-334(1965).

(8) Arnold,V.I., On a theorem of Liouville concerning integrable problems of dynamics, Am. Math. Soc. Translations,61, 292-296(1967).

(9) Arnold,V.I., Equations différentielles ordinaires, Mir,Moscú,(1974).

(10) Arnold,V.I., Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, Mir, Moscou(1976).

(11) Arnold,V.I., Chapitres supplémentaires de la théorie des équations differentielles ordinaires,Mir,Moscou(1980).

(12) Arnold,V.I.,Avez,A.,Problèmes ergodiques de la mécanique classique, Gauthier-Villars, Paris(1967).

(13) Aubanell,A., The second order Melnikov integral applied to detect quasi-randomness, en (29),266-267.

(14) Aubanell,A., Sobre técnicas de Melnikov de orden superior para el estudio de la intersección entre variedades invariantes, Actas V Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones,La Laguna(1982) (por aparecer).

(15) Barrar,R. A proof of the convergence of the Poicaré-Von Zeipel procedure in celestial mechanics, Am. J. Math., 88, 206-220(1966).

(16) Benseny,A.,Delshams,A., Sobre la no integrabilidad del problema generalizado de Henon-Heiles, Actas IV Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones, 119-128,Univ. Sevilla(1982).

(17) Birkhoff,G.D., Dynamical systems, Am. Math. Soc.,Providence(1950).

(18) Bogolioubov,N.,Mitropolski,I., Les méthodes asymptotiques en théorie des oscillations non linéaires, Gauthier-Villars, Paris(1962).

(19) Coddington,E.,Levinson,N., Theory of ordinary differential equations, Mc Graw-Hill, New York(1955).

(20) Chirikov,B.V.,Ford,J.,Vivaldi,F., Some numerical studies of Arnold diffusion in a simple model,en Simposium on non-linear dynamics and the beam-beam interaction,323-340,AIP Conference Proceedings,American Institute of Physics (1979).

(21) Chirikov,B.V., A universal instability of many-dimensional oscillators systems, Phys. Reports 52,263-379(1979).

(22) Chow,S.N.,Hale,J.K.,Mallet-Paret,J., An example of bifurcation to homoclinic orbits, J., Diff.,Eq., 37, 351-373(1980).

(23) Delshams,A., Notas sobre difusión de Arnold, Pub. Mat. UAB 22, 27-30 (1980).

(24) Delshams,A., Sobre difusión de Arnold,Tesina, Univ. barcelona(1980).

(25) Delshams,A., On systems passing through resonances,en (29),280-281.

(26) Delshams,A., Comportamiento cerca de toros invariantes de sistemas hamiltonianos casi integrables, Actas V congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones,Univ, La Laguna (por aparecer).

(27) Easton,R.W., Homoclinic phenomena in hamiltonian systems with several degrees of freedom, J.,Diff., Eq., 29, 241-252(1978).

(28) Fontich,E., Integrabilitat de difeomorfismes conservatius al plã, Tesina,Univ. Barcelona(1983).

(29) Garrido (editor),Dynamical systems and chaos, L.N.Physics 179,Springer, New York(1983).

(30) Godbillon,C., Géometrie différentielle et mécanique analitique,Hermann, Paris(1969).

(31) Graff,S.,M., On the conservation of hyperbolic invariant tori for hamiltonian systems, J., Diff., Eq., 15, 1-69(1974).

(32) Greene,J.,M., Calculation of KAM surfaces, en Intrinsic stochasticity in plasmas, Edited by G. Laval and D. Gresillon, Les editions de Physique,Orsay, 53-62(1979).

(33) Guckenheimer,J.,Moser,J.,Newhouse,S.E., Dynamical systems,Birkhäuser, Boston(1980).

(34) Gustavson,F.,G., On constructing formal integrals of a hamiltonian systems near an equilibrium point, The Astron. Jour., 71, 670-686(1966).

(35) Hale,J.K., Ordinary differential equations, Wiley, New York(1969).

(36) Herman,M.,por aparecer en Proceed. simp. international sist. dyn. IMPA (1981).

(37) Herman,M.,comunicación privada de J. Palis.

(38) Hirsch,M.W.,Pugh,C.,Shub,M., Invariant manifolds, L. N. Math., 583, Springer, New York(1977).

(39) Holmes,P.,Marsden,J.E., A partial differential equation with infinitely many periodic orbits : chaotic oscillations of a forced beam, Arch. Rat. Mech. Anal. 76, 135-167(1981).

(40) Holmes,P.,Marsden,J.E., Melnikov's method and Arnold diffusion for perturbations of integrable hamiltonian systems, J. Math. Phys., 23, 669-675 (1982).

(41) Holmes,P.,Marsden,J.E., Horseshoes in perturbations of hamiltonian systems with two degrees of freedom, Comm. Math. Phys., 82, 523-544(1982).

(42) Holmes,P.J., Marsden,J.E., Horseshoes and Arnold diffusion for Hamiltonian systems on Lie groups, Indiana Univ. Math. Journ., 32, 273-309 (1.983).

(43) Koksma,J.F., Diophantische Approximationen, Chelsea(1936).

(44) Kolmogorov,A.N., The general theory of dynamical systems and classical mechanics, en apéndice de (1).

(45) Kolmogorov,A.N., Preservation of conditionally periodic movements with small change in the Hamilton function, L.N. Physics 93, 51-56 (1979).

(46) Lieberman,M.A., Arnold diffusion in Hamiltonian systems with three degrees of freedom, Electronics research laboratory memorandum , February, Univ. of California, Berkeley(1980).

(47) Markus,L., Meyer, K.R., General Hamiltonian dynamical systems are neither integrable nor ergodic, Mem. Am. Math. Soc., 144, Providence(1974).

(48) McKean,H.P., Integrable systems and algebraic curves, L.N. Math., 755, 83-200, Springer, New York(1978).

(49) McLaughlin,J., Stochastic behavior in slightly dissipative systems, Phys. Review A., 20, 2114-2119(1979).

(50) Melnikov,V.K., On the stability of the center for time-periodic perturbations, Russ.Math. Surveys, 32, 1-56(1977).

(51) Milnor,J., Morse theory, Princeton Univ. Press, Princeton, N.J.(1963).

(52) Morlet,C., Le lemme de Thom et les théorèmes de plongement de Whitney, Sém. H. Cartan(1961-62)(4). École Normale Supérieure, Paris(1963).

(53) Morse,M., The calculus of variation in the large, Amer. Math. Soc. Coll., New York(1934).

(54) Moser,J., New aspects in the theory of stability of Hamiltonian systems, Comm. on pure and Applied Math., 11, 81-114,(1958).

(55) Moser,J., On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl, 1-20(1962).

(56) Moser,J.,Stable and random motions in dynamical systems, Princeton Univ. Press and Univ. of Tokyo Press, Princeton, New Jersey,(1973).

(57) Moser,J., Lectures on Hamiltonian systems, in Memoirs Am. Math. Soc., vol. 81. Am. Math. Soc., Providence, R.I.(1968).

(58) Neishtadt,A.I., Sov. Phys. Dokl. 20, 189-191(1975).

(59) Nekhoroshev,N.N., An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable Hamiltonian systems, Russian Math. Surveys 32, 1-65(1977).

(60) Poincaré,H., Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste, 1, 2, 3, Gauthier-Villars, Paris(1892), Dover, New York,(1957)(1892).

(61) Pöschel,J., Über invariante Tori in differenzierbaren Hamiltonschen systemen, Bonn. Math. Schr. 120,(1980).

(62) Pöschel,J., Integrability of Hamiltonian systems on Canton sets, Comm. Pure App. Math. XXXV, 653-695(1982).

(63) Pugh,C., Shub,M., Linearization of normally hiperbolic diffeomorphisms and flows, Inv. Math. 10, 187-198,(1970).

(64) Robinson,R.C., Lectures on Hamiltonian systems, Monografias de Matematica, 7, I.M.P.A., Rio de Janeiro,(1971).

(65) Rudin,W., Functional analysis, Tata McGraw-Hill, New Delhi(1980).

(66) Russmann,H., Über invariante kurven differenzierbarer abbildunger eines kreisringes, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen II, Math. Phys. Kl. 67-105(1970).

(67) Russmann,H., On optimal estimates for the solution of linear P.D.E. of 1^st order with constant coeff. on the torus, en Dynamical systems theory and applications, editor J.Moser,Lec. Notes Phys., vol. 38, Springer, New York(1975), 598-624.

(68) Siegel,C.L., Moser,J.K., Lectures on celestial mechanics, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, New York(1971).

(69) Simó,C. La variedad de las órbitas keplerianas y la teoría general de perturbaciones, Tesis, Univ. de Barcelona(1974).

(70) Simó,C. Integrability: A difficult analytical problem, Pub. Mat. UAB 22, 71-80(1980).

(71) Simó,C. Difusión de Arnold, Pub. Mat. UAB 18, 31-48 (1980).

(72) Simó,C. Invariant curves near parabolic points and regions of stability, en Global theory of Dyn. Sys. en L.N. in Math., 819, ed. Z.Nitecki, C.Robinson, 418-424, Springer(1980).

(73) Simó,C., Stability of degenerate fixed points of analytic area preserving maps, Asterisque 98-99, 184-194(1982).

(74) Smale,S., Diffeomorphisms with many periodic points, in Differential and combinatorial topology, a simposium in honor of Marston Morse, edited by S. S. Cairns, Princeton, New Jersey, Princeton Univ. Press, (1965).

(75) Sternberg,S., Celestial mechanics, vol. I, II, Benjamin-Cummings, Reading, Mass. (1969).

(76) Treve,Y.M., en Jorna,S., Topics in Nonlinear Dynamics, AIP Conf. Proced. 46, Am. Inst. Phys, New York (1978).

(77) Weinstein,A., Symplectic manifolds and their lagrangian submanifolds, Advances in Math. 6, 329-346(1971).

(78) Weinstein,A., Lagrangian submanifolds and Hamiltonian systems, Ann. Math., 98, 377-410(1973).

(79) Whittaker,E.T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, 4th ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge(1959).

(80) Zehnder,E., Homoclinic points near elliptic fixed points, Comm. App. Math., 26, 131-182(1973).

(81) Zehnder,E., Generalized implicit functions theorems with applications to some small divisor problems, I,II, Comm. Pure Appl. Math. 28, 91-140 (1975), 29, 49-111 (1976).

(82) Alekseev,V.M., Probléme géneral des deux points fixes dans l'espace. Classification des mouvements, Bull. Inst. Astron. Theor. Leningrad 117 nº 4 (1965).

(83) Bountis,T., Segur,H., Vivaldi,F., Integrable Hamiltonian systems and the Painlevé property(preprint).

(84) Gray,A., Jones,A., Rimmer,R., Motion under gravity on a paraboloid, J. Diff. Eq. 45, 168-181 (1982).

INDICE